2008-2009 学年第一学期《高等数学》试卷（A 卷）及简单解答

一．填空题（共 6 小题,每小题 3 分,共 18 分）

1. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ __0，第二类__.

2. 若函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-2008)$，则 $f'(0)=$ __2008！__.

3. 设 $f(u)$ 可微，且 $y=f^2(\sin 3x)$，则 $\mathrm{d}\,y=$ $\underline{6f(\sin 3x)f'(\sin 3x)\cos 3xdx}$.

4. $\int_{-2}^{2}(x+1)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x=\underline{2\pi}$.

5. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $x\ln x$，则 $f'(x)=\underline{\dfrac{1}{x}}$

6. 设 $\vec{a}=\{-1,2,2\},\vec{b}=\{2,-1,2\}$，则 $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=$ __{12，12，-6}__.

二．计算下列各题（共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分）

1. 设 $a_n=n\sin\pi(\sqrt{n^2+2}-n)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{2\pi}{\sqrt{n^2+2}+n}=\pi$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x-1\right]$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^x-1\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{2x}-1\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\exp\left(2x\ln\cos\frac{x}{2}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left(2x\ln\cos\frac{x}{2}\right)\right]=0$$

3. 已知 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x}\dfrac{\sin x}{\ln f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln f(x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f^{-1}(x)f'(x)}=1$

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n})=\int_0^1\dfrac{1}{1+x}dx$

$=\ln 2$

三. 解答下列各题（共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分）

1. 已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处切线相同,求此切线方程.

解 $y'(0)=e^{-(\arctan x)^2}\dfrac{1}{1+x^2}\ \Big|_{x=0}=1$

切线方程 $y=x$

2. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^3+9t\\ y=t^2-2t\end{cases}$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 向下凸的 x 的取值范围.

解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2t-2}{3t^2+9}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-6(t-3)(t+1)}{(3t^2+9)^3}>0$

$-1<t<3$,

下凸的 x 的取值范围[-10，54].

3. 设 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\varphi(0)=0$，若

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)}{x} & ,x\neq 0\\ a & ,x=0\end{cases}$$

（1）确定 a，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续;

（2）求 $f'(x)$.

解:（1）使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,

只要 $\lim_{x\to 0} f(x) = f\left(0\right), a = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi\left(0\right)}{x-1} = \varphi'\left(0\right)$

（2）当 $x\neq 0, f'(x) = \dfrac{x\varphi'(x)-\varphi\left(x\right)}{x^2}$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\varphi\left(x\right)}{x}-\varphi'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi\left(x\right)-x\varphi'(0)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\varphi'\left(x\right)-\varphi'(0)}{2x} = \frac{\varphi''\left(0\right)}{2}$$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sqrt[x]{y} = \sqrt[y]{x}\ \ (x>0, y>0)$ 所确定, 求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$.

解 $\dfrac{1}{x}\ln y = \dfrac{1}{y}\ln x, y\ln y = x\ln x$,

$\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = \dfrac{1+\ln x}{1+\ln y}$.

四. 解答下列各题(共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

1. 计算 $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}\,x$.

解 $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}\,x$

$= \int \sec x\sec^2 x\,\mathrm{d}\,x$

$= \int \sec x\,\mathrm{d}\tan x$

$= \sec x\tan x + \int \sec x\tan^2 x\,\mathrm{d}\,x$

$= \sec x\tan x - \int \sec x(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}\,x$

$\int \sec^3 x\,\mathrm{d}\,x = \dfrac{1}{2}(\sec x\tan x + \ln\left|\sec x+\tan x\right|) + C$.

2. 计算 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x$.

解 $\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}\,x^2$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{32}\pi$

3．计算 $\int_1^{+\infty}\frac{(1+x)^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int_1^{+\infty}\frac{(1+x)^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$=\int_1^{+\infty}\frac{1+x^2+2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

4. 设 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t,(x>0)$，求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

解 $f(\frac{1}{x})=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t=\int_1^x\frac{\ln u}{u(1+u)}\mathrm{d}u$，

$f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln^2 x$.

五．（本题 10 分） 设直线 $y=ax\ (0<a<1)$ 与曲线 $y=x^2$ 所围成的图形面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2.

（1）试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值;

（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解 $S=S_1+S_2=\int_0^a ax-x^2dx+\int_a^1 x^2-axdx=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}$，

$S'=a^2-\frac{1}{2}=0,a=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

又 $S''=a>0$，

最小值 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}x^2-x^4dx+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}x^4-\frac{1}{2}x^2dx$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{30}\pi$$

六. （本题 6 分）当$0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$时，证明：

$$(y-x)\cos^2 y<(\tan y-\tan x)\cos^2 y\cos^2 x<(y-x)\cos^2 x\,.$$

证明　由 Lanrange 定理在(x,y)存在ξ，

使得　　$\tan y-\tan x=\sec^2\xi(y-x)=\dfrac{1}{\cos^2\xi}(y-x)$，

…..，……

七.（本题 6 分）设$f(x)$在$[-a,a]$上二阶导函数连续（$a>0$），且$f(0)=0$，证明：在$[-a,a]$ 上至少存在一点η，使得

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}\,x\,.$$

证明 由 Taylor 只值定理　　$f(x)=f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(\xi)x^2$，两边积分得

$$3\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}\,x=\frac{3}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\,.$$

由$f(x)$在$[-a,a]$上二阶导函数连续知$f''(x)$在$[-a,a]$上取得最小值和最大值，得

$$m\int_{-a}^{a}x^2dx\le\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le M\int_{-a}^{a}x^2dx\,,$$

即 $m\le\dfrac{3}{2a^2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\le M$，由介值定理得$[-a,a]$ 上至少存在一点η，使得

$$\frac{3}{2a^3}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx=f''(\eta)\text{，即}$$

$$\frac{3}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx=a^3f''(\eta)\,\ldots.$$