装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2011~2012 学年第 1 学期 **考试科目：高等数学 AⅠ**

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：120 分钟**

学号______________姓名____________年级专业____________________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

得分	

一、**填空题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}=$____________。

2．曲线 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的曲率是____________。

3．设 $f(x)$ 可导，$y=\ln\left[f(x)\right]$，则 $dy=$______________。

4．不定积分 $\int x\sqrt{x^2-3}dx=$__________________。

5．反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-6x}dx=$____________。

得分	

二、**单项选择题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}x^2,0<x\le 1\\ x,1<x<2\end{cases}$，在点 $x=1$ 处必定　　（　　）

A．连续但不可导　　B．连续且可导

C．不连续但可导　　D．不连续，故不可导

2．曲线 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x=4$ 处的切线方程是　　（　　）

A． $y=\dfrac{1}{4}x-1$　　B． $y=\dfrac{1}{2}x+1$

C． $y=\dfrac{1}{4}x+1$　　D． $y=\dfrac{1}{4}x+2$

3．下列函数在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是　　（　　）

A． $\frac{1}{x^2}$　　B． x^3　　C． $|x|$　　D． $\frac{1}{1+x^2}$

4．设 $f(x)$ 为连续函数，则下列等式中正确的是　　（　　）

A． $\int f'(x)dx = f(x)$　　B． $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)+C$

C． $d\int f(x)dx = f(x)$　　D． $d\int f(x)dx = f(x)dx$

5．已知 $\int_0^a x(2-3x)dx = 2$，则 $a =$　　（　　）

A． -1　　B． 0　　C． $\frac{1}{2}$　　D． 1

得分	

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\left(e^x-1\right)}$。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\sin 2x, & x\le 0\\ a+bx, & x>0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处可导，求 a,b 的值。

3. 设参数方程 $\begin{cases}x=t(1-\sin t)\\ y=t\cos t\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$。

4．设方程 $y^2-2xy+9=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

装

5．求函数 $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 的单调区间，极值和拐点。

订

线

6．计算定积分 $\int_1^e x\ln x dx$。

7．求不定积分 $\int\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

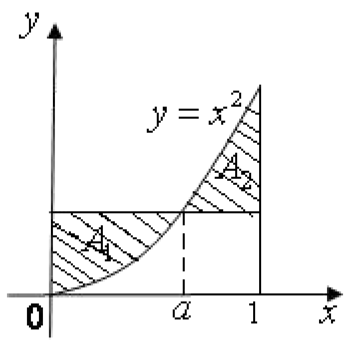
得分	

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．证明不等式：当 $x>0$ 时，$\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$。

2．设 $a>0, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f(a)=0$，试证：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$。

3．如图，在区间 $[0,1]$ 上给出函数 $y=x^2$，问 a 为何值时，图中阴影部分的面积 A_1 与 A_2 之和最小？



装

1.5CM

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2011~2012 学年第 1 学期　　　考试科目：高等数学 AⅠ参考答案

一、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．$\frac{5}{2}$　2．1　3．$\frac{f'(x)}{f(x)}dx$　4．$\frac{1}{3}(x^2-3)^{\frac{3}{2}}+C$　5．$\frac{1}{6}$

二、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．A　2．C　3．D　4．D　5．A

三、计算题（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\left(e^x-1\right)}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\left(e^x-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$ ………… 2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}$ …………… 4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2+x}$ ………… 5 分

$=\frac{1}{2}$ …………… 7 分

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1+\sin 2x, & x\le 0\\ a+bx, & x>0\end{cases}$，在点 $x=0$ 处可导，求 a,b 的值。

解：因为函数在点 $x=0$ 处可导，所以在点 $x=0$ 处连续，

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ …………… 1 分

即 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1+\sin 2x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(a+bx)=1$ ………… 2 分

所以 $a=1$ ………………………………… 3 分

又函数在点 $x=0$ 处可导，所以

$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ ………… 5 分

即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{1+\sin 2\Delta x-1}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{a+b\Delta x-1}{\Delta x}$ ………… 6 分

所以 $b=2$ ………………………………… 7 分

3. 设参数方程$\begin{cases} x = t\left(1-\sin t\right) \\ y = t\cos t \end{cases}$确定 y 是 x 的函数，求$\dfrac{dy}{dx}$。

解：$\dfrac{dy}{dt} = \cos t - t\sin t$ . . . . 2 分

$\dfrac{dx}{dt} = 1-\sin t - t\cos t$ . . . . 4 分

所以$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\cos t - t\sin t}{1-\sin t - t\cos t}$ . . . . 7 分

4．设方程$y^2 - 2xy + 9 = 0$确定隐函数$y = y(x)$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。

解：方程两边对 x 求导，. . . . . 1 分

得$2yy' - 2y - 2xy' = 0$ . . . . 5 分

所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{y-x}$ . . . . 7 分

5．求函数$y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$的单调区间，极值和拐点。

解：$y' = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ . . . . 1 分

$y'' = \dfrac{2x(x^3+3)}{(x^2-1)^3}$ . . . . 2 分

令$y' = 0$，得驻点$x = 0, \pm\sqrt{3}$ . . . . 3 分

令$y'' = 0$，得驻点$x = 0$ . . . . 4 分

讨论得单调递增区间为$(-\infty, -\sqrt{3}), (\sqrt{3}, +\infty)$，单调递减区间为$(-\sqrt{3}, -1), (-1, 1), (1, \sqrt{3})$ . . . . 5 分

当 $x = -\sqrt{3}$ 时取得极大值 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，当 $x = \sqrt{3}$ 时取得极小值 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ . . . . 6 分

拐点为$(0,0)$。. . . . . 7 分

装

订

线

1.5CM

6．计算定积分 $\int_1^e x\ln x dx$。

解：$\int_1^e x\ln x dx = \frac{1}{2}\int_1^e \ln x dx^2$ .... 2 分

$=(\frac{1}{2}x^2\ln x)_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x^2 d\ln x$ .... 4 分

$=\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_1^e x dx$ .... 6 分

$=\frac{e^2+1}{4}$ .... 7 分

7．求不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$。

解：设 $x=\sin t$ .... 1 分

则 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \sin^3 t dt$ .... 2 分

$=\int (\cos^2 t - 1) d(\cos t)$ .... 4 分

$=\frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t + C$ .... 6 分

$=\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - \sqrt{1-x^2} + C$ .... 7 分

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．证明不等式：当 $x>0$ 时，$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$。

解：设 $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$

则 $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ .... 1 分

所以 $f''(x) = x - \sin x$ .... 2 分

当 $x>0$ 时，$f''(x) = x - \sin x > 0$，即 $f'(x)$ 单调递增............ 4 分

所以当 $x>0$ 时，$f'(x) > f'(0)$

即 $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$，故 $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ 单调递增........ 6 分

所以当 $x>0$ 时，$f(x) > f(0)$

即 $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ .... 7 分

2．设 $a>0, f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，又 $f(a)=0$，试证：存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$。

证明：令 $F(x)=(b-x)^a f(x)$ .... 2 分

则 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导................ 3 分

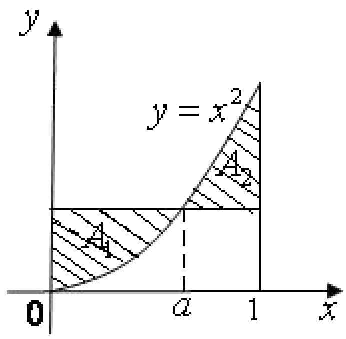
且 $F(a)=F(b)$ .... 4 分

由罗尔定理知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$F'(\xi)=-a(b-\xi)^{a-1}f(\xi)+(b-\xi)^a f'(\xi)=0$ .... 6 分

即 $f(\xi)=\frac{b-\xi}{a}f'(\xi)$ .... 7 分

3．如图，在区间 $\left[0,1\right]$ 上给出函数 $y=x^2$，问 a 为何值时，图中阴影部分的面积 A_1 与 A_2 之和最小？



解：$A_1=\int_0^a (a^2-x^2)dx=\frac{2}{3}a^3$ .... 1 分

$A_1=\int_a^1 (x^2-a^2)dx=\frac{1}{3}-a^2+\frac{2}{3}a^3$ .... 2 分

所以 $A=A_1+A_2=\frac{1}{3}-a^2+\frac{4}{3}a^3$ .... 3 分

$A'=-2a+4a^2$ .... 4 分

令 $A'=-2a+4a^2=0$，得 $a=0$ 或 $a=\frac{1}{2}$ .... 5 分

$A''=-2+8a$，$A''(\frac{1}{2})=2>0$ .... 6 分

所以当 $a=\frac{1}{2}$ 时阴影部分的面积 A_1 与 A_2 之和最小..... 7 分