

2007-2008 学年第一学期《高等数学》试卷

一. 填空题 (共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设 $y = \arctan \sqrt{1+x}$, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标为 $A(1,0,1), B(2,1,0), C(0,1,1)$, 则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$.
4. 曲线 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \quad (1 \leq x \leq e)$ 的弧长等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

二. 选择题(共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

注:本大题的每小题都有代码为 A、B、C、D 的 4 个备选答案,将正确答案的代码添在题末的括号中.

1. 设 $\frac{d}{dx}f(x) = g(x)$, $h(x) = x^2$, 则 $\frac{d}{dx}f[h(x)]$ 等于 ()
- A. $g(x^2)$; B. $2xg(x)$;
C. $x^2g(x^2)$; D. $2xg(x^2)$.
2. 设 $f(x) = 5^x + 7^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, ()
- A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量; B. $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量;
C. $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量; D. $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小量.
3. 设 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调减少, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处有极大值, 则()
- A. $g[f(x)]$ 在 $x = x_0$ 处有极小值;
B. $g[f(x)]$ 在 $x = x_0$ 处有极大值;
C. $g[f(x)]$ 在 $x = x_0$ 处有最小值;

D. $g[f(x)]$ 在 $x = x_0$ 处既无极值也无最值.

4. 在下列函数中, 在定义域上连续的函数是 ()

$$\text{A. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}; \quad \text{B. } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases};$$

$$\text{C. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}; \quad \text{D. } f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

5. 若连续曲线 $y = f_1(x)$ 与 $y = f_2(x)$ 在 $[a, b]$ 上关于 x 轴对称, 则积分

$$\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx \text{ 的值为 } ()$$

$$\text{A. } 2 \int_a^b f_1(x) dx; \quad \text{B. } 2 \int_a^b f_2(x) dx;$$

$$\text{C. } 2 \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx; \quad \text{D. } 0.$$

三. 解答下列各题(本大题分 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

$$1. \text{ 设参数方程 } \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = \int_0^t \frac{u^2}{1+u^2} du \end{cases}, \text{ 求 } \frac{d^2y}{dx^2}.$$

2. 求曲线 $y = xe^{-x}$ 在拐点处的切线方程.

四. 解答下列各题(本大题分 2 小题, 每小题 7 分, 共 14 分)

$$1. \text{ 计算积分 } \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

$$2. \text{ 计算积分 } \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

五. (本题 8 分) 确定常数 a, b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} e^x + b, & x \leq 0 \\ \arcsin(ax), & x > 0 \end{cases}$

在 $x = 0$ 处连续且可导.

六. (本题 8 分) 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2} , 求 $\int x f'(x) dx$.

七. (本题 8 分) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, 且 $f(0) = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{1+x^2} dx$.

试证: $\exists \xi \in (0,1)$, 使 $(1+\xi^2)f'(\xi) - 2\xi f(\xi) = 0$.

八. (本题 8 分) 证明方程 $\int_0^x \frac{xt^2}{1+t^2} dt = \frac{1}{10}$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.

九. (本题 10 分) 已知曲线 $y = a\sqrt{x} (a > 0)$ 与曲线 $y = \ln \sqrt{x}$ 在点 (x_0, y_0) 有公共切线, 求 (1) 常数 a 的值及切点. (2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.