装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A卷）

2013~2014 学年第 1 学期　　　　考试科目：高等数学 A Ⅰ

考试类型：（闭卷）考试　　　　**考试时间：120 分钟**

学号______________姓名___________年级专业_____________________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

得分	

一、**填空题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．函数 $y=\ln(x+1)+\sqrt{1-2x}$ 的定义域是____________。

2．设 $y=\sin(2x+1)$，则 $dy=$____________。

3．$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$________________。

4．不定积分 $\int\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=$___________________。

5．反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=$_____________。

得分	

二、**单项选择题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ 1, & x=0\\ e^x-1, & x>0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处　　（　　）

A．$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在　　　B．$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，但 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续

C．$f'(0)$ 存在　　　D．$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，但不可导

2．设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的　　（　　）

A．等价无穷小　　　B．同阶非等价无穷小

C．低阶无穷小　　　D．高阶无穷小

3．设$\int_0^x f(t)dt = x\sin x$，则$f(x) =$ （　　）

A．$x\cos x - \sin x$　　B．$\sin x - x\cos x$

C．$\sin x + x\cos x$　　D．$-(\sin x + x\cos x)$

4．不定积分$\int d\sin^2 x =$ （　　）

A．$\cos^2 x + C$　　B．$\frac{1}{3}\sin^3 x + C$　　C．$x + C$　　D．$\sin^2 x + C$

5．由曲线$y = \sqrt{x}$与$y = x^2$ 围成的图形绕x轴旋转所成旋转体的体积为（　　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{3\pi}{10}$　　C．$\frac{2\pi}{10}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

得分	

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$。

2. 讨论函数$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \le 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}$, 在$x = 0$处的连续性与可导性。

3. 设参数方程$\begin{cases} x = \theta(1-\sin\theta) \\ y = \theta\cos\theta \end{cases}$确定$y$是$x$的函数，求$\frac{dy}{dx}$和$\frac{d^2y}{dx^2}$。

装

订

线

4．计算定积分$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$。

5．求函数$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$的极值。

6．求不定积分$\int x\ln 3xdx$。

7．设$f(x)=\begin{cases}1-\cos x, & x<0\\ xe^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$，求$\int_1^3 f(x-2)dx$。

得分	

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．设方程 $y+xe^{y}-1=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $y'|_{x=0}$。

2．过原点作曲线 $y=e^{x}$ 的切线，求此切线与曲线 $y=e^{x}$、x 轴及直线 $x=-1$ 所围成的平面图形的面积。

3．设函数 $f(x),g(x)$ 均定义在 $[a,b]$ 上，且均可导，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=g'(\xi)$。

装

1.5CM

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2013~2014 学年第 1 学期　　　　考试科目：高等数学 A Ⅰ参考答案

一、**填空题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．$(-1,\frac{1}{2}]$　2．$2\cos(2x+1)dx$　3．e^{-1}　4．$\arctan e^{x}+C$　5．1

二、**单项选择题**（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．B　2．B　3．C　4．D　5．B

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$ .... 4 分

$=\frac{1}{2}$ .... 7 分

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\le 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处的连续性与可导性。

解：$f(0^{-})=\lim\limits_{x\to 0^{-}}e^{-x}=1$ .... 1 分

$f(0^{+})=\lim\limits_{x\to 0^{+}}(x+1)=1$ .... 2 分

$f(0^{-})=f(0^{+})=f(0)=1$，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。.......... 3 分

$f'_{-}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{-}}\frac{e^{-x}-1}{x}=-1$ .... 5 分

$f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\frac{(x+1)-1}{x}=1$，

$f'_{-}(0)\ne f'_{+}(0)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导。.......... 7 分

3、设参数方程 $\begin{cases} x=\theta(1-\sin\theta) \\ y=\theta\cos\theta \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos\theta-\theta\sin\theta}{1-\sin\theta-\theta\cos\theta}$ .... 3 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2-2\sin\theta-\theta\cos\theta+\theta^2}{(1-\sin\theta-\theta\cos\theta)^3}$ .... 7 分

4．计算定积分$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$。

解：$\int_1^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\int_1^{e^2}\frac{d(\ln x+1)}{\sqrt{1+\ln x}}$ . . . . 4 分

$=2\sqrt{1+\ln x}\,|_1^{e^2}=2\sqrt{3}-2$ . . . . 7 分

5．求函数 $f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值。

解：$f(x)=(x-1)\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}$，定义域为$(-\infty,+\infty)$

$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$ . . . . 4 分

令 $y'=0$ 得 $x=\frac{2}{5}$， $x=0$ 为不可导点。. . . . . 5 分

经分析得： $f(0)=0$ 是极大值， $f(\frac{2}{5})=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}$ 是极小值。. . . . . 7 分

6．求不定积分$\int x\ln 3xdx$。

解：$\int x\ln 3xdx=\int \ln 3xd\,\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\ln 3x-\int\frac{x^2}{2}d\ln 3x$ . . . . 3 分

$=\frac{x^2}{2}\ln 3x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$ . . . . 5 分

$=\frac{x^2}{2}\ln 3x-\frac{x^2}{4}+C$ . . . . 7 分

7、设 $f(x)=\begin{cases}1-\cos x, x<0\\ xe^{-x}, \quad x\ge 0\end{cases}$，求$\int_1^3 f(x-2)dx$。

解：设$t=x-2$，则

$\int_1^3 f(x-2)dx=\int_{-1}^1 f(t)dt$ . . . . 1 分

$=\int_{-1}^0(1-\cos t)dt+\int_0^1 te^{-t}dt$ . . . . 2 分

1.5CM

装

订

线

$=(t-\sin t)|_{-1}^{0}+(-te^{-t})|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}e^{-t}dt$ .... 5 分

$=2-\sin 1-2e^{-1}$ .... 7 分

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．设方程 $y+xe^{y}-1=0$ 确定隐函数 $y=y(x)$，求 $y'|_{x=0}$。

解：方程两边对 x 求导得， $y'+e^{y}+xe^{y}y'=0$，

得 $y'=\dfrac{-e^{y}}{1+xe^{y}}$ .... 5 分

将 $x=0$ 带入方程得 $y=1$,所以 $y'|_{x=0}=-e$ 。.......... 7 分

2．过原点作曲线 $y=e^{x}$ 的切线，求此切线与曲线 $y=e^{x}$ 、x 轴及直线 $x=-1$ 所围成的平面图形的面积。

解：曲线 $y=e^{x}$ 上任一点的切线方程为. $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$ .... 2 分

因为切线过原点，得 $-e^{x_0}=-x_0e^{x_0}$，所以 $x_0=1$

故切线方程为 $y=ex$ .... 3 分

所求面积为 $A=\int_{-1}^{0}e^{x}dx+\int_{0}^{1}(e^{x}-ex)dx$ .... 5 分

$=e^{x}|_{-1}^{0}+(e^{x}-\frac{e}{2}x^{2})|_{0}^{1}=\frac{e}{2}-\frac{1}{e}$ .... 7 分

3．设函数 $f(x),g(x)$ 均定义在 $[a,b]$ 上，且均可导，$f(a)=g(a),f(b)=g(b)$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=g'(\xi)$。

证明：构造

$F(x)=f(x)-g(x)$ .... 3 分

由已知知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，而

$F(a)=F(b)=0$ .... 5 分

根据罗尔中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$F'(\xi)=f'(\xi)-g'(\xi)=0$ .... 7 分