《高等数学》试卷

（2011 期末理工类统考 时间 120 分钟，总分 100）

成绩报告表序号：______专业班____姓 名：_____学院（系）_____

一、填空题（共 18 分）

1．[3 分] 设 $f(x)$ 连续，则 $d\int f(x)dx=\underline{f(x)dx}$，$\int f'(x)dx=\underline{f(x)+c}$

2．[3 分] $\sin x$ 带有皮亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式为 $\underline{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})}$

3．[3 分]曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)$ 的渐近线方程为 $\underline{y=x+\frac{1}{e}}$

4．[3 分] 设 $y=2x^2-x$，在 $x=1$ 处,当 $\Delta x=0.01$ 时，则应有 $dy=\underline{\quad 0.03 \quad}$

5、[3 分] $\frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt\right)=\underline{2x\sqrt{1+x^4}}$

6、[3 分] 设 $\vec{a}=\{-1,2,2\},\vec{b}=\{2,-1,2\}$，则 $\vec{a}\times\vec{b}=\underline{\{6,6,-3\}}$

二、计算下列各题（$4\times5=20$）

1、[5 分] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

$(=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6})$

2、[5 分]求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^2\sin x}$ $(=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sec^2 x}{3x^2}=-\frac{1}{3})$

3、[5 分] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ $(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi^n}{2\sqrt{1+\xi^2}}=0,\xi\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 或用比较性质与夹逼准则)

4、[5 分]设函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\frac{1}{x^2},x\neq0\\0,x=0\end{cases}$,讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性

(先求导函数,分段点用定义,其余点用法则公式;再用定义判断为连续

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=f'(0)$)

三、解答下列各题[每小题 5 分，共 15 分]

1． 已知$\int_0^y e^{t^2}dt+\int_0^{\sin x}\cos^2 tdt=0$，求$\frac{dy}{dx}$($-\frac{\cos^2(\sin x)\cos x}{e^{y^2}}$)

2． 设函数$g\left(x\right)=\left(\sin 2x\right)f\left(x\right)$,其中$f\left(x\right)$在$x=0$处连续，问$g\left(x\right)$在$x=0$处是否可导？如果可导，求出$g'\left(0\right)$.($=\lim\limits_{x\to}\frac{g\left(x\right)-g\left(0\right)}{x}=\lim\limits_{x\to}\frac{(\sin 2x)f\left(x\right)}{x}=2f\left(0\right)$)

3． 设函数$y=y\left(x\right)$由参数方程$\begin{cases}x=a\left(t-\sin t\right)\\ y=a\left(1-\cos t\right)\end{cases}$确定，求$\frac{d^2y}{dx^2}$

($=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)==-\frac{1}{a\left(1-\cos t\right)^2}$)

四、计算下列各题[每小题 5 分，共 10 分]

1、计算$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$ ($x=\tan t, I=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+c$)

2、计算$\int\left(\sin x\right)\ln\tan xdx$ ($=\ln|\csc x-\cot x|-\cos x\cdot\ln\tan x+c$)

五、计算下列各题[每小题 5 分，共 20 分]

1. 在下列两个积分$\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx,\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx$中确定哪个积分值大，并说明理由.

($\int_0^{\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx>\int_{\pi}^{2\pi}e^{-x^2}\cos^2 xdx=\int_0^{\pi}e^{-(t+\pi)^2}\cos^2 tdt, x=t+\pi$ 换元)

2. 计算$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\left(1+\sin x\right)}{1+\sqrt{1-x^2}}dx$

（$=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t\cos t}{1+\cos t}dt=2-\frac{\pi}{2}$）

3. 计算$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|\ln x\right|dx$ （$=2-\frac{e}{2}$）

4. 设$a>0$，求$\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin xdx$ （$\frac{1}{1+a^2}$）

六、解答下列各题[每小题 6 分，共 12 分]

1. 求由曲线$y=x^2$和$x=2,y=0$所围成的平面图形绕y轴旋转一周所得旋转体的体积.（$=8\pi$）

2. 求心形线$r=a\left(1+\cos\theta\right)$的全长.（$=8a$）

七、证明题[本小题 5 分]

设函数 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，$g\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上不变号，证明：至少存在一点 $\xi\in\left[a,b\right]$ 使得$\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx=f\left(\xi\right)\int_a^b g\left(x\right)dx$ （见教材，一考再考了）