《高等数学》试卷

（2009 期末理工类统考 时间 120 分钟，总分 100）

成绩报告表序号：______专业班____姓 名：_____学院（系）_____

一、填空题（共 15 分）

1．[3 分] 设 $x \to 0$ 时，且 $e^{\sin x} - e^{x}$ 与 x^{n} 是同价无穷小，则 $n =$___

2．[3 分] 设 $y = \dfrac{1}{1+2x}$，则 $f^{(6)}\left(x\right) =$____

3．[3 分]若曲线 $y = ax^{3} + bx^{2}$ 的拐点为 $\left(1,3\right)$，则常数 $a =$______ $b =$___

4．[3 分] 曲线 $y = \left(2x-1\right)e^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线方程为_________

5、[3 分] $f\left(x\right) = \ln x$ 在 $x_{0} = 1$ 处带有皮亚诺余项的 n 阶泰勒公式为______

二、计算下列各题（$4 \times 5 = 20$）

1、[5 分] 已知 $f\left(x\right) = \dfrac{x^{2} - x}{\left|x\right|\left(x^{2}-1\right)}$，指出函数的间断点及其类型

2、[5 分]设函数 $f\left(x\right) = \begin{cases} \ln\sqrt{x^{2}-a^{2}}, x > 1 \\ e^{b(x-1)} - 1, x \le 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续，求 a,b 的值

3、[5 分] 已知 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\arctan x - \ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^{n}} = C \ne 0$，试确定常数 n, C

4、[5 分]求极限 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{4n^{2}-1}} + \dfrac{1}{\sqrt{4n^{2}-4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{4n^{2}-n^{2}}}\right)$

三、解答下列各题[每小题 6 分，共 18 分]

1． 由方程 $x^{y} - 2x + y = 0$ 确定了隐函数 $y = y\left(x\right)$，求微分 dy

2． 求由参数方程 $\begin{cases} x = t - \ln\left(1+t\right) \\ y = t^{3} + t^{2} \end{cases}$ 所确定函数 $y = y\left(x\right)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}$

3． 已知函数 $f\left(x\right)$ 连续，$g\left(x\right) = \int_{0}^{x} t^{2} f\left(t-x\right)dt$，求 $g'\left(x\right)$

四、解答下列各题[每小题 6 分，共 24 分]

1、计算 $\int \sec^{3} x dx$

2、计算 $\int_{1}^{16} \arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$

3、计算$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{e^{x}+e^{2-x}}dx$

4、已知三点$M(1,2,-1),A(2,3,-1)$和$B(1,3,0)$，计算：（1）以$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$为邻边的平行四边形的面积；（2）求同时垂直$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$的单位向量$\overrightarrow{n_0}$

五、解答下列各题[每小题 6 分，共 12 分]

1、求$r=\sqrt{2}\sin\theta$和$r^2=\cos 2\theta$围成图形的公共部分的面积

2、求由曲线$y=e^x,x=1,x=2$及x轴围成的平面图形绕y轴旋转所成立体的体积

六、解答下列各题[每小题 6 分，共 11 分]

1、[本题 6 分] 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，利用定义证明：函数$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$在$(-\infty,+\infty)$上可导，且$F'(x)=f(x)$

2、[本题 6 分] 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_{0}^{1}f(x)dx=0,\int_{0}^{1}xf(x)dx=1$。试证：

（1）存在$\xi\in[0,1]$，使得$|f(\xi)|\geq 4$；

（2）若$f(x)$在$[0,1]$上可导，则存在$\eta\in(0,1)$，使得$|f'(\eta)|\geq 4$

证：（1）由已知$1=\int_{0}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)dx\leq\int_{0}^{1}\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx$

由积分第一中值定理，存在$\xi\in[0,1]$，

使得$\int_{0}^{1}\left|x-\frac{1}{2}\right||f(x)|dx=|f(\xi)|\int_{0}^{1}\left|x-\frac{1}{2}\right|dx=\frac{1}{4}|f(\xi)|$

从而存在$\xi\in[0,1]$，$|f(\xi)|\geq 4$

（2）由积分中值定理，存在$c\in[0,1]$，$\int_{0}^{1}f(x)dx=f(c)=0$

由拉格朗日中值定理，则存在$\eta\in(0,1)$，

使得$|f(\xi)|=|f(\xi)-f(c)|=|f'(\eta)(\xi-c)|\leq|f'(\eta)|$

从而由（1）可知存在$\eta\in(0,1)$，使得$|f'(\eta)|\geq 4$

另：（1）反证法，该法省去了记第一积分中值定理，有优势。

若不存在$\xi \in [0,1]$，使得$\left|f\left(\xi\right)\right| \geq 4$，则有所有$\xi \in [0,1]$有$\left|f\left(\xi\right)\right| < 4$

由已知$1=\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f\left(x\right)dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}}\left|x-\frac{1}{2}\right|\left|f\left(x\right)\right|dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\left|f\left(x\right)\right|dx$

从而推出$1<4\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+4\int_{\frac{1}{2}}^1\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=4\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=1$，矛盾。推导合乎逻辑，由此得证结论（1）。

（2）当导函数连续时，也可以用反证法。但较繁无优势。

由已知$0=\int_0^1 f\left(x\right)dx=f\left(1\right)-\int_0^1 xf'\left(x\right)dx, \Rightarrow f\left(1\right)=\int_0^1 xf'\left(x\right)dx,$

$1=\int_0^1 xf\left(x\right)dx=f\left(1\right)-\int_0^1 x\left[f\left(x\right)+f'\left(x\right)\right]dx=f\left(1\right)-\int_0^1 xf\left(x\right)dx-\int_0^1 x^2 f'\left(x\right)dx,$

从而$1=\int_0^1 xf'\left(x\right)dx-1-\int_0^1 x^2 f'\left(x\right)dx, \Rightarrow 2=\int_0^1 (x-x^2)f'\left(x\right)dx,$

若不存在$\eta \in (0,1)$，使得$\left|f'\left(\eta\right)\right| \geq 4$，则有所有$\eta \in (0,1)$有$\left|f'\left(\eta\right)\right| < 4$

由此推出$2 \leq \int_0^1 \left|x(1-x)\right|\left|f'\left(x\right)\right|dx < 4\int_0^1 x(1-x)dx=4\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$

矛盾。推导合乎逻辑，由此得证结论（2）。

其它题目参考答案：

一、 $3;(-2)^6\frac{6!}{\left(1+2x\right)^7}; a=-\frac{3}{2}, b=\frac{9}{2}; y=2x+1;$

$\left(x-1\right)-\frac{1}{2}\left(x-1\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-1\right)^3-\frac{1}{4}\left(x-1\right)^4+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{n}\left(x-1\right)^n+o\left(\left(x-1\right)^n\right)$

二、$x_1=0, x_2=1$为第一类间断点，$x_3=-1$为第二类间断点；$a=0,b=1;n=3,C=-1;\frac{\pi}{6}$

三、

$dy=\frac{2-yx^{y-1}}{1+x^y\ln x}dx; \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(5+6t\right)\left(1+t\right)}{t}; g'\left(x\right)=2\int_{-x}^0\left(u+x\right)f\left(u\right)du=2\int_0^x tf\left(t-x\right)dt$；

四、$\tan x-\sec x+c; \frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}; \frac{\pi}{4e}; \sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,-1,1\}$ 五、$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}; 2\pi e^2$；六、1 略