华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2009-2010 学年第 1 学期 **考试科目：** 高等数学 A Ⅰ

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：** **120** **分钟**

学号______________姓名___________年级专业_____________________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

（一）填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。把答案写在横线上。）

1．函数 $y=\dfrac{\arcsin(1-x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是____________________。

2．设 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^{2x}=e$，则常数 $k=$________。

3．已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导且 $f'(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=$______________。

4．函数 $y=\dfrac{x}{x^2+1}-3$ 的水平渐近线是__________________________。

5．设 $\int_{-a}^{a}(x^2\sin x+x^4)dx=\dfrac{2}{5}$，则 $a=$______________。

（二）单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，在每小题四个选项中，只有一个是符合题目要求的，把所选字母填在括号内）

1．当 $x\to 0$ 时，下列函数中是无穷小量的是（　　）

A．$\dfrac{\sin x}{x}$　　B．$2x-1$　　C．$\dfrac{1}{x}\ln(1+x)$　　D．$x^2+\sin x$

2．设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可导且 $f'(x)>0$，如果 $f(a)<0$ 而 $f(b)>0$，

则 $f(x)$ 在 $[a,b]$（　　）

A．至少有两个零点　　B．有且仅有一个零点

C．没有零点　　D．是否有零点不能确定

3．下列函数中在区间 $[-1,1]$ 上满足罗尔中值定理条件的是（　　）

A．$y=\ln|x|$　　B．$y=x^2-1$　　C．$y=\dfrac{1}{x^2-1}$　　D．$y=e^{-x}$

4．下列广义积分收敛的是　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．$\int_1^{+\infty} x dx$　　　　　　B．$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$

C．$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$　　　　　　D．$\int_1^{+\infty} \cos x dx$

5．设 $y = xe^y$，则 $dy =$　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A．$\frac{e^y}{xe^y - 1} dx$　　　　　　B．$\frac{e^y}{1 - xe^y} dx$

C．$\frac{1 - xe^y}{e^y} dx$　　　　　　D．$\frac{xe^y - 1}{e^y} dx$

（三）计算题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$。

2．设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} + a, & x < 0; \\ 2, & x = 0; \\ x \sin \frac{1}{x} + b, & x > 0. \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续，求 a 与 b 的值。

3．计算定积分 $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 。

4．设 $y=y(x)$ 是由方程 $e^x-e^y=xy$ 所确定的隐函数，求 $y'(0)$ 。

5．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t - t\cos t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 。

6．计算定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x}{1+\cos 2x} dx$ 。

7．求不定积分 $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ 。

（四）解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．证明不等式：当 $x>1$ 时，$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} > \frac{x}{1+x}$ 。

2．设函数 $F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$，求 $F(x)$ 的单调区间和凹凸区间。

3．设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时 $y\ge 0$。又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a、b、c，使此图绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小。

参考答案：

一、填空题(15 分)

1. (1，2]　　2. $\frac{1}{2}$　　3. $\frac{1}{2}$　　4. $y=-3$　　5. 1

二、单项选择题(15 分)

1. D　　2. B　　3. B　　4. C　　5. B

三、计算题(49 分)

1. 解：原式 $\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$ ……………………………………（3分）

$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ……………………………………（6分）

$=1$ ……………………………………（7分）

2.解： $f(0)=2$ ………………(1分)

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(\frac{\sin x}{x}+a)=1+a=2$, 故$a=1$ ……………(4 分)

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\frac{1}{x}+b)=b=2$, 故$b=2$ …………(7 分)

3 . 解：令 $x=t^2$ …………(1分)

原式 $=2\int_1^2\frac{1}{1+t^2}dt$ ……………………………………(4分)

$=2\arctan t\,\Big|_1^2$ ……………………………………(6 分)

$=2\arctan 2-\frac{\pi}{2}$ ……………………………………(7 分)

4. 解：方程两边对 x 求导，

$e^x-e^y\cdot y'=y+xy'$ ……………………………(3 分)

$\therefore\quad y'=\frac{e^x-y}{e^y+x}$ ……………………………………(5 分)

又将 $x=0$ 代入原方程求出 $y=0$， ………………(6分)

所以 $y'(0)=\dfrac{e^x-y}{e^y+x}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=1$ ………………(7分)

5. 解：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy\big/dt}{dx\big/dt}=\frac{\cos t-\cos t+t\sin t}{-\sin t}=-t \quad \text{……………………(3分)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{-1}{-\sin t}=\csc x \quad \text{……………(7分)}$$

6. 解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx \text{…………(1分)}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}xd\tan x \text{…………(3分)}$$

$$=\frac{1}{2}(x\tan x|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx) \text{…………(5分)}$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}+\ln\cos x|_0^{\frac{\pi}{4}}) \text{…………(6分)}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2 \text{…………(7分)}$$

7. 解法一： 令 $x=\tan t$， $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$， $dx=\sec^2 tdt$ ………………(3分)

$$\text{原式}=\int\frac{\tan^3 t}{\sec t}\sec^2 tdt=\int\tan^3 t\sec tdt$$

$$=\int\frac{\cos^2 t-1}{\cos^4 t}d\cos t \quad \text{………………(5分)}$$

$$=\frac{1}{3}\cos^{-3}t-\cos^{-1}t+C$$

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+C \quad \text{………………(7分)}$$

解法二：原式 $=\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$ ……………………(4分)

$$=\frac{1}{2}\int[(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]d(1+x^2)$$ ……………………(6分)

$$=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-\sqrt{1+x^2}+C$$ ……………………(7分)

四、解答题(21 分)

1. 证明：令 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-x\ln x$ ……………………(1分)

$$f'(x)=\ln(1+\frac{1}{x})$$ ……………………(3分)

当 $x>1$时， $f'(x)>0$ 且 $f(1)=2\ln 2$ ……………………(5分)

从而，当 $x>1$时， $f(x)$ 单调增，故 $f(x)>f(1)=2\ln 2>0$ ……(6分)

即 $(1+x)\ln(1+x)-x\ln x>0$

亦即 $\frac{\ln(1+x)}{\ln x}>\frac{x}{1+x}$ ……………………………………(7分)

2. 解：函数的定义域 $(-\infty,\ +\infty)$

$$F'(x)=2xe^{-x^4}$$ ……………………(2分)

$$F''(x)=2e^{-x^4}(1-4x^4)$$ ……………………(3分)

令 $F'(x)=0$，得 $x=0$， ……………………(4分)

令 $F''(x)=0$，得 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$。 ……………………(5分)

所以 $F(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$，单调递减区间为 $(-\infty,0)$。………(6分)

$F(x)$ 的凹区间为 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$，凸区间为 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$。…(7分)

3. 解：　$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3})$ ·········(2分)

又$\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{1}{3}$ ··················(3分)

即$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$，从而得$b=\frac{2}{3}(1-a)$ ··················(4分)

将其代入V的表达式，得$V=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{a(1-a)}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2]$ ···(5分)

令$V'=\pi[\frac{2a}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2a}{3}-\frac{8}{27}(1-a)]=0$，

解得$a=-\frac{5}{4}$， ··················(6分)

代入b的表达式得$b=\frac{3}{2}$，

因$V''(-\frac{5}{4})=\frac{4}{135}\pi>0$

从而当$a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2},c=0$时，体积$V$取得最小值。······(7分)