2009~2010 学年第 2 学期　　　考试科目：高等数学 AⅡ参考答案

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．C　　2、C　　3、C　　4、A　　5、D

二、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$　　2．$(6,-1,4)$　　3．$\frac{1}{2}$

4．$y^x\ln ydx+xy^{x-1}dy$　　5．-18π

三、**计算题**（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1．$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{x}{y})^2}=\frac{y}{x^2+y^2}$ ……………………………3 分

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ……………………7 分

2．为了应用高斯公式，作辅助曲面

$\sum_1: z=1\ \ (x^2+y^2\le 1)$ ……………………………………1 分

取上侧。则$\sum_1$与$\sum$一起构成一个闭曲面，取外侧，记它所围城的空间闭区域为Ω，由高斯公式得

$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz-zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(1+0-1)dxdydz=0$ ……………………………4 分

故

$\iint\limits_{\Sigma} xdydz-zdxdy=-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz-zdxdy=-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+\iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy$ ……………….5 分

而

$\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz=0,\quad \iint\limits_{\Sigma_1} zdxdy=\iint\limits_{D_{xy}} dxdy=\pi$ …………………………6 分

于是$\iint\limits_{\Sigma} xdydz-zdxdy=\pi$ …………………………7 分

3．原方程化为

$y'-\frac{1}{x}y=x\cos x$ …………………………………………………2 分

$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int x\cos x\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx+C)$

$=x(\int\cos dx+C)$

$=x(\sin x+C)$ ……………………………………………5 分

由条件：$-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}(\sin\dfrac{\pi}{2}+C)$

得：$C=-2$ ……………………………………………………6 分

特解为：$y=x(\sin x-2)$ …………………………………7 分

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}\cdot\dfrac{4^n n!}{n^n}$ ……………………….5 分

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{e}{4}<1$$

所以原级数收敛……………………………………………7 分

5．$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}\cos\theta\cdot\rho d\rho$ …………………………….5 分

$=\dfrac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\theta\cos\theta d\theta=\dfrac{2}{3}\sin^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{6}$ ……………………..7 分

6．$\iint\limits_D A\sin(x+y)dxdy=A\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_x^{2x}\sin(x+y)dy$ ………5 分

$=A\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2x-\cos 3x)dx=A(\dfrac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\sin 3x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}})=\dfrac{A}{3}$

由 $\dfrac{A}{3}=1$，得 $A=3$ ……………………………………….7 分

7．$\oint_L xydx=\iint\limits_D -xdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}-\rho\cos\theta\cdot\rho d\rho$ …..5 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{8}{3}a^3\cos^4\theta d\theta=-\dfrac{\pi}{2}a^3$ ………………………………7 分

四、解答题（本大题共3小题，每小题7分，共21分）

1、$A=2\pi RH+2\pi R^2$

令 $F=2\pi RH+2\pi R^2+\lambda(\pi R^2H-V_0)$ …………………3 分

$$\begin{cases}F_R=2\pi H+4\pi R+2\pi\lambda RH=0\\ F_H=2\pi R+\pi R^2\lambda=0\\ \pi R^2H=V_0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}H+2R+\lambda RH=0\\ 2+R\lambda=0\\ \pi R^2H=V_0\end{cases}$$ ………………………………………..5 分

得：$2R=H$，即 $\dfrac{H}{R}=2$ ………………………………7 分

2、由题意 $g(u,v)=f(uv,\dfrac{1}{2}(u^2-v^2))$ ……………………………..1 分

所以

$\dfrac{\partial g}{\partial u}=f_1^{'}\cdot v+f_2^{'}\cdot u$，$\dfrac{\partial g}{\partial v}=f_1^{'}\cdot u+f_2^{'}\cdot(-v)$ ……………………………..3 分

因此有

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2$$

$=(av^2-bu^2)(f_1^{'})^2+(au^2-bv^2)(f_2^{'})^2+2uv(a+b)f_1^{'}f_2^{'}$ ………………..5 分

$=u^2+v^2$

利用 $(f_1^{'})^2+(f_2^{'})^2=4$，即 $(f_2^{'})^2=4-(f_1^{'})^2$ 得

$$(av^2-bu^2)(f_1^{'})^2+(au^2-bv^2)(f_2^{'})^2+2uv(a+b)f_1^{'}f_2^{'}$$

$$=(a+b)(v^2-u^2)(f_1^{'})^2+2(a+b)uvf_1^{'}f_2^{'}+4au^2-4bv^2$$

$$=u^2+v^2$$

由此得 $a=\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{1}{4}$ ……………………………………………..7 分

3、由 $xy^{'}+y=e^x$ 得 $y=\dfrac{e^x+C}{x}$ ………………………………..2 分

根据 $\lim\limits_{x\to 0}y(x)=1$，有 $C=-1$，故 $F(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ ………………3 分

于是 $f(x)=(F(x))^{'}=(\dfrac{e^x-1}{x})^{'}$ ………………………………..4 分

而 $\dfrac{e^x-1}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!}$ ………………………………………………..5 分

故 $f(x)=(F(x))^{'}=(\dfrac{e^x-1}{x})^{'}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ ……………………..6 分

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}=[(\dfrac{e^x-1}{x})^{'}]\big|_{x=1}=1$ …………………………..7 分

2011 年

参考答案

一、 **选择题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 1 5 分）

1．C　　2．B　　3．C　　4．A　　5．B

二、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 1 5 分）

1． $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$　　2． $(7,8,0)$　　3． $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$

4． $-2xy\sin(xy^2)$　　5． $\dfrac{7}{10}$

三、**计算题**（本大题共 7 小题，每小题 6 分，共 4 2 分）

1．求微分方程 $x(1+2y)dx+(1+x^2)dy=0$ 的通解.

解：$\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}dx=-\int\frac{1}{1+2y}dy$ ....（ 1 分）

$\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2y}d(1+2y)$ ....（ 5 分）

$\ln(1+x^2)=-\ln|1+2y|+\ln C$，即 $(1+x^2)(1+2y)=C$ ......（ 6 分）

2．设 $z=(x^2+y^2)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：设 $z=u^v$，$u=x^2+y^2$，$v=xy$ ....（ 1 分）

$\displaystyle\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=(x^2+y^2)^{xy}(\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2))$ ....（ 3 分）

$\displaystyle\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(x^2+y^2)^{xy}[\frac{2(x^4+2x^3y^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}+(2xy+1+xy\ln(x^2+y^2))\ln(x^2+y^2)]$.（ 6 分）

3．判断级数 $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1\cdot2}{10^2}+\dfrac{1\cdot2\cdot3}{10^3}+\cdots+\dfrac{n!}{10^n}+\cdots$ 的敛散性.

解：$\displaystyle\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!/10^{n+1}}{n!/10^n}$ ....（ 3 分）

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty$ ....（ 5 分）

所以级数发散........（ 6 分）

4．设一矩形的周长为 2，现让它绕其一边旋转，求所得圆柱体体积为最大时矩形的面积及圆柱体的体积.

解：设矩形两边长分别为x, y．则$x+y=1$，假设绕长度为y的一边旋转，则圆柱体体积为

$V=\pi x^2 y$ ....（2 分）

作拉氏函数$F(x,y,\lambda)=\pi x^2 y+\lambda(x+y-1)$ ....（3 分）

解方程组

$$\begin{cases} 2\pi xy+\lambda=0 \\ \pi x^2+\lambda=0 \\ x+y=1 \end{cases}$$ ....（4 分）

得可能的极值点$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$ ....（5 分）

由题意知道其一定是所求的最值点，所以最大体积为$\frac{4}{27}\pi$，对应面积为$\frac{2}{9}$ ....（6 分）

5．将函数$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$展开成x的幂级数，并确定其收敛域.

解：因为$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$ ....（1 分）

所以$e^{-\frac{x}{2}}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{2^n\cdot n!}+\cdots$ ....（3 分）

$f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2^2\cdot 2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{2^n\cdot n!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}$（5 分）

收敛域为$(-\infty,+\infty)$ ....（6 分）

6．设$z=z(x,y)$是由方程$x+y^2-z=e^z$确定的隐函数，求全微分dz.

解：$F(x,y,z)=x+y^2-z-e^z$ ....（1 分）

$F_x=1, F_y=2y, F_z=-1-e^z$ ....（3 分）

所以$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{1+e^z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{2y}{1+e^z}$ ....（5 分）

故$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{1}{1+e^z}(dx+2ydy)$ ....（6 分）

7．计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\cos y}{y}dxdy$，其中$D$是由$y=\sqrt{x}$及$y=x$围成的区域.

解：积分区域为：$D=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1,\ y^2\le x\le y\}$ ....（1 分）

$$\iint\limits_D \frac{\cos y}{y}dxdy=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\cos y}{y}dx$$ ....（3 分）

$$=\int_0^1(1-y)\cos y dy$$ ....（5 分）

$$=1-\cos 1$$ ....（6 分）

四、解答题（本大题共 4 小题，每小题 7 分，共 2 8 分）

1．计算曲线积分$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy$，其中$L$是由曲线$y=x^2$和$y^2=x$所围成的区域的正向边界曲线.

解：$\oint_L (2xy-x^2)dx+(x+y^2)dy=\iint\limits_D(1-2x)d\sigma$ ......（2 分）

$$=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(1-2x)dy$$ ....（4 分）

$$=\int_0^1(x^{\frac{1}{2}}-x^2-2x^{\frac{3}{2}}+2x^3)dx$$ ....（6 分）

$$=\frac{1}{30}$$ ......（7 分）

2．计算二重积分$\iint\limits_D\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}d\sigma$，其中区域$D$由$x^2+y^2\le 1$，$x\ge 0$及$y\ge 0$所确定.

解：$\iint\limits_D\frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}}d\sigma=\iint\limits_{D'}\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+r^2}}rdrd\theta$ ....（2 分）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1+r^2}}rdr$$ ....（4 分）

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi-2}{4}d\theta$$ ......（6 分）

$$==\frac{\pi(\pi-2)}{8}$$ ....（7 分）

3．设$u=f(xyz)$，$f(0)=0$，$f'(1)=1$，且$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2f'''(xyz)$，试求$u$的表达式.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=yzf'(xyz),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zf'(xyz)+xyz^2f''(xyz)$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=f'(xyz)+3xyzf''(xyz)+x^2y^2z^2f'''(xyz)$$ ....（2 分）

因为$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=x^2y^2z^2 f'''(xyz)$，所以 $f'(xyz)+3xyzf''(xyz)=0$

令 $xyz=t$，得 $3tf''(t)+f'(t)=0$......（4 分）

解之得 $f'(t)=C_1 t^{-\frac{1}{3}}$，由$f'(1)=1$，得$C_1=1$，所以$f'(t)=t^{-\frac{1}{3}}$.....（5 分）

解得 $f(t)=\dfrac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C_2$，由$f(0)=0$，得$C_2=0$，所以$f(t)=\dfrac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}$.....（6 分）

即 $u=f(xyz)=\dfrac{3}{2}(xyz)^{\frac{2}{3}}$.......（7 分）

4．计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)\text{，}$$

其中Σ为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解：因为在曲面Σ上$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$，

所以 $I=\iint\limits_{\Sigma}a(xdydz+ydzdx+zdxdy)$..........（1 分）

补曲面$\Sigma_1=\{(x,y,z)\,|\,z=0, x^2+y^2\le a^2\}$，$\Sigma_1$取下侧..........（2 分）

由高斯公式得

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}a(xdydz+ydzdx+zdxdy)=a\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dv=3a\times\frac{2}{3}\pi a^3=2\pi a^4$$ ..（4 分）

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$

$=\iint\limits_{\Sigma_1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot zdxdy=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2+0}\cdot 0dxdy=0$.......（6 分）

故 $I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xdydz+ydzdx+zdxdy)$

$=(\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})a(xdydz+ydzdx+zdxdy)=2\pi a^4$.......（7 分）

2011~2012 学年第 2 学期　　　考试科目：高等数学 AⅡ参考答案

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1． 0　2． $3x+3y-z-3=0$　3． $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ 或者 $\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$　4． 3

5． $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．B　2．D　3．B　4．C　5．C

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1.设 $s=f\left(x^2,\frac{x}{y},xyz\right)$，且 f 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial s}{\partial x}$，$\frac{\partial s}{\partial y}$，$\frac{\partial s}{\partial z}$。

解：令 $u=x^2$，$v=\frac{x}{y}$，$w=xyz$，则 ………………1 分

$$\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=2xf'_u+\frac{1}{y}f'_v+yzf'_w$$ ………………3 分

$$\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f'_v+xzf'_w$$ ………………5 分

$$\frac{\partial s}{\partial z}=\frac{\partial s}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=xyf'_w$$ ………………7 分

2. 设由方程 $x^2+y^2+z^2+4z=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求全微分 dz 。

解：令 $F=x^2+y^2+z^2+4z$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{x}{z+2}$$ ………………3 分

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{y}{z+2}$$ ………………6 分

$$dz=-(\frac{x}{z+2}dx+\frac{y}{z+2}dy)$$ ………………7 分

3. 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2yd\sigma$，其中 D 是由直线 $x=2$，$y=\sqrt{x}$ 及曲线 $y=\frac{1}{x}$ 所围成的区域。

解：原式 $=\int_1^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}}x^2ydy$ ………………4 分

$=\int_1^2 (\frac{x^3}{2}-\frac{1}{2})dx$ ………………6 分

$=\frac{11}{8}$ ………………7 分

4.计算 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域。

解 1：把闭区域 Ω 投影到 xOy 面上，得半径为 2 的圆形闭区域

$D_{xy}=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ ………………1 分

在 D_{xy} 内任取一点 (ρ,θ)，过该点作平行于 z 轴的直线，此直线通过曲面 $z=x^2+y^2$ 穿入 Ω 内，然后通过平面 $z=4$ 穿出 Ω 外．因此闭区域 Ω 可用不等式

$\rho^2\le z\le 4,\ 0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi$ ………………3 分

来表示．于是 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^4 z\mathrm{d}z$ ………………5 分

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho(16-\rho^4)\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[8\rho^2-\frac{1}{6}\rho^6\right]_0^2=\frac{64}{3}\pi.$ ………………7 分

解 2：可用先一后二，或者先二后一也可。

5. 计算曲线积分 $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$ ，其中 L 是抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧。

解：原式 $=\int_0^1 (x+x^2)dx+(x^2-x)2xdx$ ………………5 分

$=\int_0^1 (2x^3-x^2+x)dx=\left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ ………………6 分

$=\frac{2}{3}$ ………………7 分

6．判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$ 的收敛性。

解：$\because \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\dfrac{n^n}{5^n\cdot n!}$ ………………4 分

$=\lim\limits_{n\to\infty}5(\dfrac{n}{n+1})^n$ ………………5 分

$=\dfrac{5}{e}>1$ ………………6 分

$\therefore$ 原级数发散。………………7 分

7．试用间接法将函数 $\ln(5+x)$ 展开成 x 的幂级数，并确定展开式成立的区间。

解：$\ln(5+x)=\ln[5(1+\dfrac{x}{5})]$ ………………1 分

$=\ln 5+\ln(1+\dfrac{x}{5})$ ………………3 分

$=\ln 5+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}$ ………………6 分

$-1<\dfrac{x}{5}\le 1$，即 $-5<x\le 5$ ………………7 分

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．从斜边之长为 l 的一切直角三角形中求有最大周长的直角三角形。

解：作 $L=l+x+y+\lambda(x^2+y^2-l^2)$ ………………1 分

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=1+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=1+2\lambda y=0\\ x^2+y^2=l^2\end{cases}$$

………………5 分

得 $x=y$ ………………6 分

得 $x=y=\dfrac{l}{\sqrt{2}}$（唯一）………………7 分

2．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4xzdxdy$，其中 Σ 是由曲线 $x=e^y(0\le y\le a)$ 绕 x

轴旋转而成的曲面，取左侧。

解：作平面$x=e^a$，取右侧，与曲面Σ围成闭区域Ω。………………2 分

由高斯公式可得 $$I+\iint_{y^2+z^2\le a^2} 2(1-e^{2a})dydz=\iiint_{\Omega} 0dV$$ ………………5 分

所以 $$I=-\iint_{y^2+z^2\le a^2} 2(1-e^{2a})dydz=2\pi a^2(e^{2a}-1)$$ ………………7 分

3．设对于半空间$x>0$内任意的光滑有向封闭曲面S，都有

$$\iint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=0,$$

其中函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内具有连续的一阶导数，且$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，求$f(x)$。

解：由题设和高斯公式可得

$$0=\iint_S xf(x)dydz-xyf(x)dzdx-e^{2x}zdxdy=\pm\iiint_V (xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x})dV$$

…………2 分

由S的任意性知$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,\quad x>0$

即 $$f'(x)+(\frac{1}{x}-1)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},\quad x>0$$ ………………3 分

解之得： $$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x+C)$$ ………………5 分

由于$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x}(e^x+C)=1$，故必有$\lim\limits_{x\to 0^+}(e^{2x}+Ce^x)=0$ …………6 分

所以$C=-1$，于是 $$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$$ ………………7 分

2012~2013 学年第 2 学期　　　考试科目：高等数学 AⅡ参考答案

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．$y=\ln(\frac{1}{2}e^{2x}+C)$　2．0　3．$\frac{x-3}{3}=\frac{y}{-7}=\frac{z+1}{5}$　4．$-e^{x}\sin(x+y)$　5．-8

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．C　2．B　3．A　4．A　5．A

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1.求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=x-y$ 满足初始条件 $y|_{x=\sqrt{2}}=0$ 的特解。

解：$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=1$

$y=e^{-\int p(x)dx}(\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)$ ………………2 分

$=\frac{1}{x}(\int xdx+C)=\frac{1}{x}(\frac{1}{2}x^{2}+C)=\frac{x}{2}+\frac{C}{x}$ ………………5 分

由 $y|_{x=\sqrt{2}}=0$，得 $C=-1$，特解为 $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$

2.设 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_{y}^{x}p(t)dt$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$p(t),\varphi'(t)$ 连续，且 $\varphi'(t)\neq1$，求 $p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：由 $z=f(u)$，可得 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$ ………………2 分

将 $u=\varphi(u)+\int_{y}^{x}p(t)dt$ 两边分别对 x,y 求偏导得

$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x),\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y)$ ………………4 分

由此得

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}$ ………………6 分

于是

$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}$ =0………………7 分

3.设由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求全微分 dz 。

解法 1：设 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$

$F_x=\frac{1}{z}, F_y=-\frac{y}{z}(-\frac{z}{y^2})=\frac{1}{y}, F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{y}{z}\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2}$ ………………4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z}, \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}$ ………………6 分

$dz=\frac{z}{x+z}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy$ ………………7 分

解法 2：

等式 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 两边对 x 取偏导数得，$\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=\frac{y}{z}\cdot\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$（3 分）；

等式 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 两边对 y 取偏导数得，$x\left(-\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{y}{z}\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2}$，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$（6 分）

$dz=\frac{x+z}{z}dx+\frac{z^2}{y(x+z)}dy$ （7 分）

4.求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域及和函数。

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{2^{n+1}}x^{2n}}{\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}}=\frac{x^2}{2}<1$，得 $|x|<\sqrt{2}$ ………………1 分

当 $|x|=\sqrt{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}(\pm\sqrt{2})^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$ 发散，故收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ……2 分

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{x^2}{2})^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^{n-1}$ ………………3 分

记 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{x^2}{2})^{n-1}, S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2})^{n-1}$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} t^n = \frac{t}{1-t}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$ ………………4 分

设 $t = \frac{x^2}{2}$，得 $S_1(x) = \frac{1}{(1-\frac{x^2}{2})^2}$ ………………5 分

$S_2(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^{n-1} = \frac{1}{2-x^2}$ ………………6 分

所以 $S(x) = S_1(x) - S_2(x) = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$ ………………7 分

（另解：$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2n-2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}x^{2n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}\right]' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-1}\right)'$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{1-\frac{x^2}{2}}\right)' = \left(\frac{x}{2-x^2}\right)' = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，（$\left|\frac{x}{\sqrt{2}}\right| < 1$，即 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$））

5.使用间接法将函数 $\ln(a+bx)\ (a, b > 0)$ 展开成 x 的幂级数，并确定展开式成立的区间。

解: $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ………………2 分

$\ln(a+bx) = \ln a(1+\frac{b}{a}x) = \ln a + \ln(1+\frac{b}{a}x)$ ………………5 分

$= \ln a + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{b}{a}x)^{n+1}}{n+1} = \ln a + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(bx)^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}\quad (-\frac{a}{b} < x \le \frac{a}{b})$ ………………7 分

6.计算曲线积分 $\int_L (x^2-2xy)dx + (y^2-x^2)dy$，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧。

解：积分路径为 $y = x^2 (-1 \le x \le 1)$ ………………2 分

$$\int_L (x^2-2xy)dx+(y^2-x^2)dy=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x^3)+(x^4-x^2)2x]dx=\frac{2}{3}$$ ………………7 分

（也可以利用曲线积分与路径无关计算）

7.计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}d\sigma$ ，其中 D 是由曲线 $x^2+y^2=1, x=0$ 和 $y=0$ 所围成的区域在第一象限的部分。

解：$D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 0\le\rho\le1\}$ ………………3 分

$$\iint\limits_D \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\rho d\rho$$ ………………5 分

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{(-1-\rho^2)+2}{1+\rho^2}d(1+\rho^2)=\pi(\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4})$$ ………………7 分

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1. 在半径为 a 的半球内，内接一长方体，问长方体各边长为多少时，其体积最大？

解：设长方体的长、宽、高分别为 $2x,2y,z$ ，则体积 $V=4xyz(x,y,z>0)$ ，且

$x^2+y^2+z^2=a^2$ ………………2 分

设拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=4xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$ ………………3 分

得

$F_x=4yz+2x\lambda=0$

$F_y=4xz+2y\lambda=0$

$F_z=4xy+2z\lambda=0$

$x^2+y^2+z^2=a^2$ ………………5 分

解之得：$x=y=z=\frac{\sqrt{3}a}{3}$ ………………6 分

由于驻点唯一，所以长和宽为 $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ ，高为 $\frac{\sqrt{3}a}{3}$ 时，体积最大。…………7 分

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{x^2}dxdy$ ，其中 D 是由直线 $y=x$ 和曲线 $y=x^3$ 所围成的区域在第一象限的部分。

解：$\iint\limits_D e^{x^2}dxdy=\int_0^1dx\int_{x^3}^{x}e^{x^2}dy$ ………………2 分

$=\int_0^1 e^{x^2}(x-x^3)dx$ ………………4 分

$=\dfrac{e}{2}-1$ ………………7 分

3. 设 $f(x,y)$ 在全平面上有三阶连续偏导数并满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+y,$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x$ ，求（1）$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ 。（2）$f(x,y)$ 。

解：（1）因为 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y$ ，两边对 x 积分，得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=yx+c(y)$ ………………1 分

两边对 y 求偏导，得 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+c'(y)=x+y$ ………………2 分

所以 $c'(y)=y$ ，得 $c(y)=\dfrac{1}{2}y^2+a$ ，故 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+a$ ………………3 分

同理得 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=xy+\dfrac{1}{2}x^2+b$ ………………4 分

（2）将 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+a$ 对 x 积分得 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+ax+d(y)$ …5 分

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}x^2+xy+d'(y)=xy+\dfrac{1}{2}x^2+b$ ，故 $d'(y)=b$ ………………6 分

解得 $d(y)=by+c$ ，所以 $f(x,y)=\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+ax+by+c$ ………………7 分

2014~2015 学年第 2 学期　　　考试科目：高等数学 AⅡ参考答案

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．$\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$　2．-1　3．0　4．$2x^{2y}\ln x$　5．$p>0$

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．A　2．B　3．C　4．B　5．C

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1. 求微分方程 $y'=\dfrac{y}{x+y}$ 的通解。

解：原方程化为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$，此为齐次方程………………1 分

令 $u=\dfrac{y}{x}$，得 $u+u'x=\dfrac{u}{u+1}$………………3 分

分离变量得 $(-\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{u})du=\dfrac{1}{x}dx$

积分得 $\dfrac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|+C$………………6 分

将 $u=\dfrac{y}{x}$ 代入得 $x=Cy+y\ln|y|$………………7 分

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的和函数。

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$，所以 $R=1$，………………1 分

当 $x=\pm1$ 时级数发散，所以收敛域为 $(-1,1)$………………2 分

因为 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}\quad(-1<x<1)$………………3 分

所两边求导得 $1+2x+3x^2+\cdots nx^{n-1}+\cdots=(1-x)^{-2}\quad(-1<x<1)$………………5 分

两边再求导得 $2+3\times2x+\cdots n(n-1)x^{n-2}+\cdots=2(1-x)^{-3}\quad(-1<x<1)$…………6 分

两边乘以 x，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=\dfrac{2x}{(1-x)^3}\quad(-1<x<1)$………………7 分

3.设由方程 $\frac{y}{z}=\ln\frac{z}{x}$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求全微分 dz 。

解：设 $F(x,y,z)=\frac{y}{z}-\ln\frac{z}{x}$ ………………1 分

$F_x=\frac{1}{x}$， $F_y=\frac{1}{z}$， $F_z=-\frac{y+z}{z^2}$ ………………4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z^2}{x(y+z)}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z}{y+z}$ ………………6 分

$dz=\frac{z^2}{x(y+z)}dx+\frac{z}{y+z}dy$ ………………7 分

4.求曲线积分 $\int_L (x+y)^3 ds$ ，其中 L 为连接点 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 的直线段。

解： $L: y=1-x, 0<x<1$ ………………2 分

$\int_L (x+y)^3 ds=\int_0^1 1\cdot\sqrt{1+(y')^2}dx$ ………………5 分

$=\int_0^1\sqrt{2}dx=\sqrt{2}$ ………………7 分

5.计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ ，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$ 。

解： $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\rho\le a, 0\le\theta\le 2\pi\}$ ………………2 分

$\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-\rho^2}\cdot\rho d\rho$ ………………5 分

$=2\pi\cdot(-\frac{1}{2})e^{-\rho^2}\Big|_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$ ………………7 分

6.已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}x^n$ 的收敛半径。

解：级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R，有 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{R}$ ………………3 分

则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}/2^{n+2}}{a_n/2^{n+1}}\right|=\dfrac{1}{2R}$ ………………6 分

即级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^{n+1}}x^n$ 的收敛半径为 $2R$ ………………7 分

7.将函数 $\dfrac{1}{3+x}$ 展开成 x 的幂级数，并求其成立的区间。

解：因为 $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$， $|x|<1$ ………………2 分

$$\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^n$$

………………5 分

成立范围为 $\left|\dfrac{x}{3}\right|<1,$ 即 $|x|<3$ ………………7 分

四、 解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1.抛物线 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=4$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最小值和最大值。

解：设 $p(x,y,z)$ 为椭圆上任一点，则点 p 到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
构造拉格朗日函数

$F=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2-z)+\lambda_2(x+y+z-4)$ ………………2 分

$$\begin{cases}F_x=2x+2\lambda_1 x+\lambda_2=0\\ F_y=2y+2\lambda_1 y+\lambda_2=0\\ F_z=2z-\lambda_1+\lambda_2=0\\ F_{\lambda_1}=x^2+y^2-z=0\\ F_{\lambda_2}=x+y+z-4=0\end{cases}$$

………………5 分

解得 $p_1(1,1,2),\ p_2(-2,-2,8)$ ………………6 分

$d(p_1)=\sqrt{6}$ 为最小值， $d(p_2)=6\sqrt{2}$ 为最大值………………7 分

2.计算二重积分 $\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$ ，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$。

解：设 $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,x\le y\le 1\}$， $D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le x\}$

………………2 分

则 $$e^{\max\{x^2,y^2\}}=\begin{cases} e^{y^2}, & (x,y)\in D_1 \\ e^{x^2}, & (x,y)\in D_2 \end{cases}$$ ………………4 分

所以 $$\iint\limits_{D} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1} e^{y^2}dxdy+\iint\limits_{D} e^{x^2}dxdy$$ ………………5 分

$$=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx+\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}dy$$ ………………6 分

$=e-1$ ………………7 分

3.已知 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，试确定 $f(x)$，使曲线积分 $I=\int_A^B [e^x+f(x)]ydx-f(x)dy$ 与积分路径无关，并求该曲线积分当 A,B 分别为 $(0,0),(1,1)$ 时的值。

解：设 $P=[e^x+f(x)]y$， $Q=-f(x)$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$ ………………1 分

即 $-f'(x)=e^x+f(x)$ ………………2 分

解得 $$f(x)=e^{-x}(-\frac{1}{2}e^{2x}+C)$$ ………………4 分

再由 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，得 $C=1$，故 $f(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{2}e^x$ ………………5 分

取积分路径 $L:y=x$，得

$$I=\int_0^1[(\frac{1}{2}e^x+e^{-x})x-(-\frac{1}{2}e^x+e^{-x})]dx=\frac{e}{2}-\frac{1}{e}$$ ………………7 分

2015~2016 学年第 2 学期　　　考试科目：高等数学 AⅡ参考答案

一、**填空题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．$\{(x,y)\,|\,y^2-2x+2\ge 0\}$　2．$-\dfrac{4}{3}$　3．$2x-y=0$　4．$(y+\dfrac{1}{y})dx+(x-\dfrac{x}{y^2})dy$

5．$a>1$

二、**单项选择题**（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．B　2．C　3．C　4．C　5．D

三、**计算题**（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1. 求微分方程 $y'+y\tan x=\sec x$ 的通解。

解：先求 $y'+y\tan x=0$ 的通解，得 $y=C\cos x$ ………………3 分

采用常数变易法，设 $y=h(x)\cos x$，得 $y'=h'(x)\cos x-h(x)\sin x$ ………4 分

代入原方程得 $h'(x)\cos x=\sec x$ ………………5 分

得 $h(x)=\tan x+C$ ………………6 分

故通解为 $y=\sin x+C\cos x$ ………………7 分

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数。

解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=1$，所以 $R=1$，………………1 分

当 $x=\pm 1$ 时级数收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$ ………………2 分

因为 $1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\dfrac{1}{1-x}\quad(-1<x<1)$ ………………3 分

两边积分得 $x+\dfrac{1}{2}x^2+\cdots\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots=-\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$ ………………4 分

两边再积分得

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2\times 3}+\cdots\frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}+\cdots=x+(1-x)\ln(1-x)\quad(-1\le x<1)$$
…………5 分

两边除以 x，即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}=\dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x}\quad(-1\le x<1,\quad x\ne 0)$ ………6 分

考虑 $x=0$ 和 $x=1$ 的情况，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}=\begin{cases}\dfrac{x+(1-x)\ln(1-x)}{x} & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\\ 1, & x=1\end{cases}$$

3.求由方程 $x^3+y^3+z^3+xyz-6=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,2,-1)$ 的偏奥数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

解：设 $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+xyz-6$ ………………1 分

$F_x=3x^2+yz,\quad F_y=3y^2+xz,\quad F_z=3z^2+xy$ ………………4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2+yz}{3z^2+xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{3y^2+xz}{3z^2+xy}$ ………………6 分

将 $(1,2,-1)$ 代入得

$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,-1)}=-\frac{1}{5},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2,-1)}=-\frac{11}{5}$。………………7 分

4.求曲线积分 $\int_L ydx+xdy$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t$，$y=R\sin t$ 上 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧。

解：$\int_L ydx+xdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R^2\cos^2 t-R^2\sin^2 t)dt$ ………………4 分

$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt$ ………………5 分 $=\left.\frac{R^2}{2}\sin 2t\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$ ………………6 分 $=0$ ………………7 分

5.计算 $\iint_D\cos(x+y)dxdy$，其中 D 是由 $x=0$，$y=\pi$ 及 $y=x$ 所围成的区域。

解：$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le\pi,\ x\le y\le\pi\}$ ………………2 分

$\iint_D\cos(x+y)dxdy=\int_0^{\pi}dx\int_x^{\pi}\cos(x+y)dy$ ………………4 分

$=-\int_0^{\pi}(\sin x+\sin 2x)dx$ ………………6 分 $=-2$ ………………7 分

6.已知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$，$u_n$ 及 a 都是正数，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{u_n}\right)^n$ 的敛散性。

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{u_n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{u_n} = \dfrac{2}{a}$ ………………1 分

当 $\dfrac{2}{a} < 1$，即 $a > 2$ 时，级数收敛………………3 分

当 $\dfrac{2}{a} > 1$，即 $0 < a < 2$ 时，级数发散………………5 分

当 $\dfrac{2}{a} = 1$，即 $a = 2$ 时，级数可能收敛也可能发散。………………7 分

7.将函数 $\dfrac{x}{1-3x}$ 展开成 x 的幂级数，并求其成立的区间。

解：因为 $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n,\quad |x| < 1$ ………………2 分

$$\frac{x}{1-3x} = x\cdot\frac{1}{1-3x} = x[1+3x+(3x)^2+(3x)^3+\cdots] = x+3x^2+9x^3+27x^4+\cdots$$ ………………5 分

成立范围为 $|3x| < 1$，即 $|x| < \dfrac{1}{3}$ ………………7 分

四、 解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．1.有一上部为圆柱形、下部为圆锥形的无盖容器，容积为常数。已知圆柱的高为 H，圆柱和圆锥的底面半径为 R，圆锥的高为 h，求容器侧面积最小时 $H:R:h$。

解：$V = \pi R^2 H + \dfrac{1}{3}\pi R^2 h = \pi R^2 (H + \dfrac{h}{3}) = C$（常数）………………1 分

设无盖容器的侧面积为 S，则 $S = \pi R(2H + \sqrt{h^2+R^2})$ ………………1 分

构造拉格朗日函数

$$F = \pi R(2H + \sqrt{h^2+R^2}) + \lambda(\pi R^2 H + \frac{\pi}{3}R^2 h - C)$$ ………………3 分

$$\begin{cases} F_R=\pi(2H+\sqrt{h^2+R^2}+\dfrac{\pi R^2}{\sqrt{h^2+R^2}})+2\pi R\lambda(H+\dfrac{h}{3})=0 \\ F_H=2\pi R+\lambda\pi R^2=0 \\ F_h=\dfrac{\pi Rh}{\sqrt{h^2+R^2}}+\dfrac{\pi}{3}R^2\lambda=0 \\ F_\lambda=\pi R^2H+\dfrac{\pi}{3}R^2h-C=0 \end{cases}$$
………………5 分

解得 $R=-\dfrac{2}{\lambda},\quad h=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{\lambda},\quad H=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{1}{\lambda}$ ………………6 分

所以 $H:R:h=1:\sqrt{5}:2$ 为最小值，$d(p_2)=6\sqrt{2}$ 为最大值………………7 分

2.计算曲线积分 $\oint_{+C}(x+y)dx-(x-y)dy$，其中 C 为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ 的周界。

解：设 $P=x+y,\quad Q=-(x-y)$ ………………1 分

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1,\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$ ………………3 分

由格林公式得 $\oint_{+C}(x+y)dx-(x-y)dy=\iint_D(-1-1)d\sigma$ ………………5 分

$=-2\pi ab$ ……………………7 分

3.设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，$f(1)=\dfrac{5}{2}$，对于一切的 x，t 满足

$\int_1^{xt}f(u)du=t\int_1^x f(u)du+x\int_1^t f(u)du$，求 $f(x)$。

解：等式两边对 t 求导，得

$xf(xt)=\int_1^x f(u)du+xf(t)$ ………………2 分

令 $t=1$ 得 $xf(x)=\int_1^x f(u)du+\dfrac{5x}{2}$ ………………3 分

两边对 x 求导得 $f'(x)=\dfrac{5}{2x}$ ………………4 分解之得 $f(x)=\dfrac{5}{2}(\ln x+C)$ ………………5 分

由 $f(1)=\dfrac{5}{2}$，得 $C=1$ ………………6 分所以 $f(x)=\dfrac{5}{2}(\ln x+1)$ ………………7 分

2016~2017 学年第 2 学期　　　考试科目：<u>高等数学 AⅡ参考答案</u>

一、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. $\{(x,y)\,|\,y^2-2x+1>0\}$　2. 3

3. $9y-z-2=0$　4. $yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln x dy+yx^{yz}\ln x dz$　5. $0<p\le 1$

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1．C　2．C　3．C　4．B　5．A

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1. 求微分方程 $y'+y=e^x$ 满足初始条件 $x=0$，$y=2$ 的特解。

解：先求 $y'+y=0$ 的通解，得 $y=C_1e^{-x}$ ………………2 分

采用常数变易法，设 $y=h(x)e^{-x}$，得 $y'=h'(x)e^{-x}-h(x)e^{-x}$ ………3 分

代入原方程得 $h'(x)e^{-x}-h(x)e^{-x}+h(x)e^{-x}=e^x$ ………………4 分

得 $h(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$ ………………5 分

故通解为 $y=\dfrac{1}{2}e^x+Ce^{-x}$ ………………6 分

将初始条件 $x=0$，$y=2$ 带入得 $C=\dfrac{3}{2}$，故特解为 $y=\dfrac{1}{2}e^x+\dfrac{3}{2}e^{-x}$ …………7 分

2. 计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1,\ x+y\ge 1\}$。

解：设 $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$ ………………1 分

则 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2},\quad \dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}\le r\le 1$ ………………3 分

所以 $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1}\dfrac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r^2}rdr$ ………………5 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta+\cos\theta-1)d\theta$ ………………6 分

$=\dfrac{4-\pi}{2}$ ………………7 分

3. 设 $z=z(x,y)$ 为方程 $2\sin(x+2y-3z)=x-4y+3z$ 确定的隐函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

解：设 $F(x,y,z)=x-4y+3z-2\sin(x+2y-3z)$ ………………1 分

$F_x=1-2\cos(x+2y-3z),\quad F_y=-4-4\cos(x+2y-3z),\quad F_z=3+6\cos(x+2y-3z)$

………………4 分

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{3[1+2\cos(x+2y-3z)]},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{4\cos(x+2y-3z)+4}{3[1+2\cos(x+2y-3z)]}$ ……6 分

所以

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ ………………7 分

4. 求曲线积分 $\int_L (x+y)dx+(x-y)dy$ ，其中 L 沿 $x^2+y^2=a^2(x\geq 0,\ y\geq 0)$，逆时针方向。

解：圆的参数方程为: $x=a\cos t,\quad y=a\sin t\ (0\leq t\leq \frac{\pi}{2})$ ……………1 分

$\int_L (x+y)dx+(x-y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t+a\sin t)da\cos t+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos t-a\sin t)da\sin t$ ……3 分

$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2t-\sin 2t)dt$ ………………4 分

$=\frac{a^2}{2}[\sin 2t+\cos 2t]_0^{\frac{\pi}{2}}$ ………………6 分

$=-a^2$ ………………7 分

（本题也可以利用“曲线积分与路径无关”来解）

5. 计算 $\iint_D y^5\sqrt{1+x^2-y^6}\,dxdy$ ，其中 D 是由 $y=\sqrt[3]{x}$， $x=-1$ 及 $y=1$ 所围成的区域。

解： $D=\{(x,y)\,|\,\sqrt[3]{x}\leq y\leq 1,-1\leq x\leq 1\}$ ………………1 分

$\iint_D y^5\sqrt{1+x^2-y^6}\,dxdy=\int_{-1}^{1}dx\int_{\sqrt[3]{x}}^{1}y^5\sqrt{1+x^2-y^6}\,dy$ ………………2 分

$=-\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}[(1+x^2-y^6)^{\frac{3}{2}}]_{\sqrt[3]{x}}^{1}dx$ ………………4 分

$=-\frac{1}{9}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)dx$ ………………5 分

$=-\frac{2}{9}\int_{0}^{1}(x^3-1)dx$ ………………6 分

$=\frac{1}{6}$ ………………7 分

6. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的敛散性，并指出是条件收敛还是绝对收敛。

解：$\left|\frac{(-1)^n n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$ ………………1 分

$\sim\frac{1}{\sqrt{n}}(n\to\infty)$ ………………3 分

所以级数发散。………………4 分

又

$\frac{(-1)^n n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=(-1)^n(1-\frac{1}{n+1})\frac{1}{\sqrt{n}}$ ………………5 分

$=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}}$ ………………6 分

显然，交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{n}}$ 都收敛，所以原级数收敛。因此是条件收敛。………………7 分

7. 将函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 展开成 x 的幂级数，并求其成立的区间。

解：$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}$ ………………2 分

而 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$，$|x|<1$ ………………3 分

$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}[1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+\cdots] \quad (|x|<2)$ ………………4 分

所以 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}=1+x+x^2+\cdots-\frac{1}{2}[1+\frac{x}{2}+(\frac{x}{2})^2+\cdots]$ ………………5 分

$=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\frac{1}{2^{n+1}})x^n$ ………………6 分

成立范围 $|x|<1$ ………………7 分

五、 解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1. 抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离。

解：设椭圆上任一点 P 的坐标为 $P(x,y,z)$，P 点满足抛物面和平面方程。原点到这椭圆上任一点的距离的平方为 $x^2+y^2+z^2$，………………1 分

构造拉格朗日函数

$F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-1)$ ………………2 分

$$\begin{cases} F_x=2x+2x\lambda+\mu=0 \\ F_y=2y+2y\lambda+\mu=0 \\ F_z=2z-\lambda+\mu=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2-z=0 \\ F_\mu=x+y+z-1=0 \end{cases}$$ ………………4 分

解得 $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3})$ ………………5 分

得两个驻点为 $P_1=(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2},2-\sqrt{3}),P_2=(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},2+\sqrt{3})$

…………………6 分

所以最短距离为 $\sqrt{9-5\sqrt{3}}$，最短距离为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ ………………7 分

2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^n}{(n+1)!}$ 的和函数。

解：因为 $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，所以 $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$，………………1 分

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^n}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1-1)x^n}{(n+1)!}$$ ………………2 分

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}$$ ………………3 分

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=e^{-x}$$ ………………4 分

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)!}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=-\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=-\frac{1}{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}-1\right]$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}e^{-x}\qquad(x\neq 0)$$ …………5 分

所以

$$S(x)=e^{-x}-\frac{1}{x}(1-e^{-x})(x\neq 0)$$

故 $$S(x)=e^{-x}-\frac{1}{x}(1-e^{-x})\qquad(x\neq 0)$$ ……6 分

当 $x=0$ 时，$S(x)=0$。………7 分

另解：

当 $x\neq 0$ 时，$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^n}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n nx^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^x x^n dx\right]$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^n}{(n-1)!}\right]dx=-\frac{1}{x}\int_0^x x\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{(n-1)!}\right]\right\}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\int_0^x x\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^n}{n!}dx$$

$$=-\frac{1}{x}\int_0^x xe^{-x}dx$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x xde^{-x}$$

$$=\frac{1}{x}\left(xe^{-x}+e^{-x}-1\right)$$

$$=e^{-x}+\frac{1}{x}e^{-x}-\frac{1}{x}$$

当 $x=0$ 时，$S(x)=0$。

3. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=1$，$g(0)=0$，L 为平面上任意简单光滑闭曲线，取逆时针方向，L 围成的平面区域为 D，已知

$$\oint_L xydx+[yf(x)+g(x)]dy=\iint_D yg(x)d\sigma,$$

求 $f(x)$ 和 $g(x)$。

解：由格林公式得

$$\iint_D [yf'(x)+g'(x)-x]dxdy=\iint_D yg(x)dxdy$$ ………………2 分

即 $$\iint_D [yf'(x)+g'(x)-x-yg(x)]dxdy=0$$ ………………3 分

由于区域的任意性，$yf'(x)+g'(x)-x-yg(x)=0$ ………………4 分

又由于 y 的任意性，有 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=x$ ……………5 分

又由 $f(0)=1$，$g(0)=0$ 得，$g(x)=\dfrac{x^2}{2}$ ………………6 分

所以 $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+1$ ………………7 分