装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2010~2011 学年第 1 学期 **考试科目：高等数学 A Ⅰ**

考试类型：（闭卷）考试 **考试时间：120 分钟**

学号_______________姓名____________年级专业_______________________

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

得分	

一、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．当 $x\to 0$ 时，$\sqrt{1+ax^2}-1$ 与 $\sin^2 x$ 是等价无穷小，则常数 $a=$_______。

2．若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=2$，则常数 $a=$_______。

3．设 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $dy=$____________。

4．曲线 $y=\dfrac{2(x-1)^2}{x^2+x+1}$ 的水平渐近线是________________。

5．设 $\varphi(x)=\int_0^{x^2} te^{-t}dt$，则 $\varphi'(x)=$____________。

得分	

二、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．函数 $f(x)=x^3+2x$ 在区间 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的所有条件，则满足拉格朗日中值定理结论中的 ξ 是 （ ）

A．$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ B．$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

C．$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ D．$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

装

订

线

2．函数 $y = xe^{-x}$ 的拐点是 （　　）

A． 2　　　　B． $(2, \frac{2}{e^2})$

C． 0　　　　D． $(0,0)$

3．如果 $\int f(x) e^{-\frac{1}{x}} dx = -e^{-\frac{1}{x}} + C$，则 $f(x) =$ （　　）

A． $\frac{1}{x}$　　　　B． $\frac{1}{x^2}$

C． $-\frac{1}{x}$　　　　D． $-\frac{1}{x^2}$

4．下列广义积分收敛的是 （　　）

A． $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$　　　　B． $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$

C． $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$　　　　D． $\int_e^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx$

5．考虑一元函数 $f(x)$ 有下列四条性质：

（1） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续　　　　（2） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积

（3） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导　　　　（4） $f(x)$ 在 $[a,b]$ 存在原函数

若用“$P \Rightarrow Q$”表示可由性质 P 推出性质 Q，则有 （　　）

A． $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (4)$　　　　B． $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (2)$

C． $(3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$　　　　D． $(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$

装

订

线

三、**计算题**（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

得分	

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3}$。

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{a\sin x}, & x<0;\\ 2, & x=0;\\ x\sin\frac{1}{x}+b, & x>0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 与 b 的值。

3. 计算定积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 。

装

订

线

4．设 $y=y(x)$ 是由方程 $y\sin x-\cos(x-y)=0$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

5．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

6．计算定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,dx$。

7．求不定积分 $\int\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$。

CM

装

订

线

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

得分	

1．证明不等式：当 $x>0$ 时，$\dfrac{\arctan x}{\ln(1+x)}>\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$。

2．设函数 $f(x)=x^3-px+q\ (p>0)$

（1）求 $f(x)$ 的极值点与极值。

（2）求证：$-2(\dfrac{p}{3})^{3/2}<q<2(\dfrac{p}{3})^{3/2}$ 时，$f(x)=0$ 恰有三个实根。

3．求区间 $(2,6)$ 内的一点，使该点上曲线 $y=\ln x$ 的切线与直线 $x=2$，$x=6$ 及 $y=\ln x$ 所围平面图形的面积最小。

装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2010--2011学年第 1 学期 **考试科目：** 高等数学AⅠ参考答案

一、选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1． $a=2$。2． $a=-\frac{1}{2}\ln 2$。3． $dy=\frac{1-\ln x}{x^2}dx$。 4． $y=2$。 5． $\varphi'(x)=2x^3e^{-x^2}$。

二、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1． （B） 2．（ B） 3．（ D） 4．（ C）5． （C）

三、计算题（本大题共 7 小题，每小题 7 分，共 49 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}$ …………………(2 分)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}$ ………………(4 分)

$=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\sec^2 x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$ …………(6 分)

$=\frac{1}{3}$ ……………………………(7 分)

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{a\sin x}, & x<0;\\ 2, & x=0;\\ x\sin\frac{1}{x}+b, & x>0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求 a 与 b 的值。

解： $f(0)=2$ ………………(1分)

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{a\sin x}=\frac{1}{a}=2$，故$a=\frac{1}{2}$ ……………(4 分)

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\frac{1}{x}+b)=b=2$，故$b=2$ …………(7 分)

3．计算定积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ 。

解：令 $x=\tan u$，则 $1+x^2=\sec^2 u$， $dx=\sec^2 u\,du$ …………………(2 分)

$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{du}{\sec u}$ …………………(4 分)

装

订

线

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos u du \text{…………………(5 分)}$$

$$=\sin u\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \text{…………………(6 分)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2} \text{…………………(7 分)}$$

4．设 $y=y(x)$ 是由方程 $y\sin x-\cos(x-y)=0$ 所确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：方程两边关于 x 求导，得

$$y'\sin x+y\cos x+(x-y)'\sin(x-y)=0 \text{…………………(2 分)}$$

$$y'\sin x+y\cos x+(1-y')\sin(x-y)=0 \text{…………………(4 分)}$$

$$y'[\sin x-\sin(x-y)]=-y\cos x-\sin(x-y) \text{…………………(6 分)}$$

所以，$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$ …………………(7 分)

5．设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\ln t\\ y=\arctan t\end{cases}$ 所确定，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

解：$y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t}{1+t^2}$ …………………(3 分)

$$y''=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{(\frac{t}{1+t^2})'}{(\ln t)'}=\frac{\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{t}}=\frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \text{…………………(7 分)}$$

6．计算定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx$。

解：$\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x\cos^2 x}dx$ …………………(1 分)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x\cos x dx \text{…………………(3 分)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}x d\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{\frac{3}{2}}x d\sin x \text{…………………(5 分)}$$

装

订

线

$$=(\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-(\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$ …………………(6 分)

$$=\frac{4}{5}$$ …………………(7 分)

7．求不定积分 $\int\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx$。

解：令 $x+1=t^2$，则 $x=t^2-1$， $dx=2tdt$， …………………(2 分)

$$\int\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}dx=4\int\ln tdt$$ …………………(4 分)

$$=4t\ln t-4t+C$$ …………………(6 分)

$$=2\sqrt{x+1}\ln(x+1)-4\sqrt{x+1}+C$$ …………………(7 分)

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．证明不等式：当 $x>0$ 时，$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}>\frac{\sqrt{2}+1}{2}$。

证明：设 $f(x)=(\sqrt{2}+1)\ln(1+x)-2\arctan x$ …………………(2 分)

则 $f'(x)=\frac{\sqrt{2}+1}{1+x}-\frac{2}{1+x^2}=(\sqrt{2}+1)[x-(\sqrt{2}-1)]^2\geq 0$ …………………(4 分)

所以 $f(x)=(\sqrt{2}+1)\ln(1+x)-2\arctan x$ 单调递增， …………………(6 分)

于是 $f(x)\geq f(0)$，得 $\frac{\arctan x}{\ln(1+x)}>\frac{\sqrt{2}+1}{2}$。 …………………(7 分)

2．设函数 $f(x)=x^3-px+q\ (p>0)$

（1）求 $f(x)$ 的极值点与极值。

（2）求证：$-2(\frac{p}{3})^{3/2}<q<2(\frac{p}{3})^{3/2}$ 时，$f(x)=0$ 恰有三个实根。

解：（1）解 $f'(x)=3x^2-p=0$，得 $x=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}$， …………………(1 分)

又 $f''(x)=6x$

装

订

线

$f''(\sqrt{\frac{p}{3}})>0,\quad f''(-\sqrt{\frac{p}{3}})<0$，…………………(2 分)

所以当 $x=\sqrt{\frac{p}{3}}$ 时，取得极小值，$f(\sqrt{\frac{p}{3}})=-2(\frac{p}{3})^{3/2}+q$，…………………(3 分)

所以当 $x=-\sqrt{\frac{p}{3}}$ 时，取得极大值，$f(-\sqrt{\frac{p}{3}})=2(\frac{p}{3})^{3/2}+q$。…………………(4 分)

（2）考察区间 $(-\infty,-\sqrt{\frac{p}{3}}),\quad (-\sqrt{\frac{p}{3}},\sqrt{\frac{p}{3}}),\quad (\sqrt{\frac{p}{3}},+\infty)$

当 $-2(\frac{p}{3})^{3/2}<q<2(\frac{p}{3})^{3/2}$ 时，$f(-\sqrt{\frac{p}{3}})>0,\quad f(\sqrt{\frac{p}{3}})<0$ …………………(5 分)

又 $\lim\limits_{x\to\mp\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\mp\infty}x^3(1-\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3})=\mp\infty$，…………………(6 分)

所以在以上三区间中个有一个实根。…………………(7 分)

3．求区间 $(2,6)$ 内的一点，使该点上曲线 $y=\ln x$ 的切线与直线 $x=2$，$x=6$ 及 $y=\ln x$ 所围平面图形的面积最小。

解：设切点为 $(x_0,\ln x_0)$，又 $y'=\frac{1}{x}$，所以切线斜率为 $\frac{1}{x_0}$，…………………(1 分)

因此切线方程为 $y-\ln x_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$ …………………(2 分)

所以 $S=\int_2^6[\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0)-\ln x]dx=4\ln x_0+\frac{16}{x_0}-6\ln 6+2\ln 2$ …………(4 分)

令 $S'=\frac{4}{x_0}-\frac{16}{x_0^2}=0$，得 $x_0=4$，…………………(5 分)

又 $S''=-\frac{4}{x_0^2}+\frac{32}{x_0^3}$，$S''(4)=\frac{1}{4}>0$ …………………(6 分)

所以 $x_0=4$ 时图形的面积最小。…………………(7 分)