装

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A 卷）

2012~2013 学年第 1 学期　　　　**考试科目：高等数学 AⅠ**

考试类型：（闭卷）考试　　　　**考试时间：120 分钟**

学号＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿年级专业＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	总分
得分					
评阅人					

得分	

一、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．函数 $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是＿＿＿＿＿＿。

2．$\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}=$ ＿＿＿＿＿＿。

3．设 $y=\ln(\sin x)$，则 $dy=$＿＿＿＿＿＿＿。

4．不定积分 $\int \dfrac{1}{x\ln x}dx=$＿＿＿＿＿＿＿＿＿。

5．反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}dx=$＿＿＿＿＿＿。

得分	

二、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．设 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，在点 $x=0$ 处必定　　　　（　　）

A．连续但不可导　　　　B．连续且可导

C．不连续但可导　　　　D．不连续，故不可导

2．曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(\dfrac{1}{2},2)$ 处的切线方程是　　　　（　　）

A．$y-4x+4=0$　　　　B．$4x+y-4=0$

C．$y-4x-4=0$　　　　D．$4x-y-4=0$

3．设 $f(x)$ 为连续函数，则 $d\int f(x)dx=$　　　　（　　）

A． $f(x)$　　　　B． $f(x)dx$　　　　C． $f(x)+C$　　　　D． $f'(x)dx$

4．设 $\Phi(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$，则 $\Phi'(0)=$　　　　　　　　　（　　　）

A． -2　　　　B． -1　　　　C． 1　　　　D． 2

5．若函数 $f(-x)=f(x),\ (-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，

则在 $(0,+\infty)$ 内有　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（　　　）

A． $f'(x)>0,\ f''(x)<0$　　　　B． $f'(x)>0,\ f''(x)>0$

C． $f'(x)<0,\ f''(x)<0$　　　　D． $f'(x)<0,\ f''(x)>0$

得分	

三、**计算题**（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$。

2. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ c, & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 具有连续导数且 $f(0)=0$，试确定 c 使 $F(x)$ 连续，并讨论 $F'(x)$ 是否连续。

3. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^3)\\ y=t^2\sin t\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$。

装

订

线

4．计算不定积分$\int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$。

5．求函数$f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$的极值和拐点。

6．设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x}, & x\geq 0\\ \frac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$，求$\int_0^2 f(x-1)dx$。

7．已知$\frac{\sin x}{x}$是函数$f(x)$的一个原函数，求$\int x^3 f'(x)dx$。

得分	

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．证明不等式：当$x>1$时，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$。

2．设函数$f(x)$在$\left[0,1\right]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0$，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)+2f(\xi)=0$。

3．设$y=ax(0<x<1)$与抛物线$y=x^2$所围图形的面积为S_1，该直线与抛物线和直线$x=1$所围图形的面积为S_2。（1）试确定a的值使S_1+S_2达到最小；（2）求该最小值所对应的平面图形绕x轴旋转所得旋转体的体积。

装

1.5CM

订

线

华南农业大学期末考试试卷（A卷）

2012~2013 学年第 1 学期　　　考试科目：高等数学 AⅠ参考答案

一、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．$[-1,0)\cup(0,1]$　2．e^4　3．$\cot xdx$　4．$\ln|\ln x|+C$　5．π

二、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

1．A　2．B　3．B　4．D　5．C

三、计算题（本大题共7小题，每小题7分，共49分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$ ………… 4 分

$=2$ …………… 7 分

2. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\neq0\\ c, & x=0\end{cases}$，其中 $f(x)$ 具有连续导数且 $f(0)=0$，试确定 c 使 $F(x)$ 连续，并讨论 $F'(x)$ 是否连续。

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)}{2x}=\dfrac{f(0)}{2}=0$，……………… 1 分

所以当 $c=0$ 时，$F(x)$ 连续……………… 2 分

当 $x\neq0$ 时，$F'(x)=\dfrac{f(x)}{x}-2\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}$ …………… 3 分

$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{3x}=\dfrac{f'(0)}{3}$ …………… 4 分

所以

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}-2\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^3}, & x\neq0\\ \dfrac{f'(0)}{3}, & x=0\end{cases}$$ ………… 5 分

并且有

$$\lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2\int_0^x tf(t)dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x)+x^2f'(x)-2xf(x)}{3x^2}=\frac{f'(0)}{3}$$ .. 6 分

所以 $F'(x)$ 在 $x=0$ 点连续。.................................... 7 分

3. 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^3)\\ y=t^2\sin t\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\frac{dy}{dx}$。

解：$\frac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$ .... 2 分

$\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2}{1+t^3}$ .... 4 分

所以 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{(1+t^3)(2\sin t+t\cos t)}{3t}$ .... 7 分

4. 计算不定积分 $\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$。

解：令 $x=\sin t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},\ dx=\cos t dt$ 求导，.............. 2 分

$\int\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx=\int\frac{\cos t}{\cos^3 t}dt=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt$ .... 4 分

$=\tan t+C$ .... 5 分

$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$ .... 7 分

5. 求函数 $f(x)=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的极值和拐点。

解：$y'=\frac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}$ .... 1 分

$y''=\frac{10(x+2)}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}}$ .... 2 分

令 $y'=0$，得驻点 $x=1$；. $x=-1$ 为不可导点............... 3 分

令 $y''=0$，得 $x=2$ .... 4 分

当 $x=-1$ 时取得极大值 0 .... 5 分

当 $x=1$ 时取得极小值 $-3\sqrt[3]{4}$ . . . . 6 分

拐点为 $(-2,-6)$ 。. . . . . 7 分

6．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+x}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & x<0\end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x-1)dx$ 。

解：令 $x-1=t$ . . . . 1 分

原式 $=\int_{-1}^{1} f(t)dt$ . . . . 2 分

$=\int_{-1}^{0} f(t)dt+\int_0^1 f(t)dt=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+e^t}dt+\int_0^1\dfrac{1}{1+t}dt$ . . . . 3 分

$=\int_{-1}^{0}\dfrac{e^t}{e^t(1+e^t)}dt+[\ln(1+t)]_0^1$ . . . . 5 分

$=\int_{-1}^{0}(\dfrac{1}{e^t}-\dfrac{1}{1+e^t})de^t+\ln 2$ . . . . 6 分

$=[\ln\dfrac{e^t}{1+e^t}]_{-1}^{0}+\ln 2=\ln(e+1)$ . . . . 7 分

7．已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)dx$ 。

解：因为 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数

所以 $f(x)=(\dfrac{\sin x}{x})'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ . . . . 2 分

则 $\int x^3 f'(x)dx=\int x^3 df(x)$ . . . . 3 分

$=x^3 f(x)-\int f(x)dx^3$ . . . . 4 分

$=x^3 f(x)-\int 3x^2 f(x)dx$ . . . . 5 分

$=x(x\cos x-\sin x)-3\int(x\cos x-\sin x)dx$ . . . . . 6 分

$=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$ . . . . 7 分

四、解答题（本大题共 3 小题，每小题 7 分，共 21 分）

1．证明不等式：当 $x>1$ 时，$\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$ 。

证明：设 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1} \quad (x>1)$ .... 1 分

则 $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$ .... 3 分

故当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 单调递增............ 4 分

所以当 $x>1$ 时，$f(x)>f(1)$............ 5 分

而 $f(1)=0$ .... 6 分

所以 $\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$，即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$ .... 7 分

2．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$。

证明：令 $F(x)=e^{2x}f(x)$ .... 2 分

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导................ 3 分

且 $F(0)=F(1)$ .... 4 分

由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得

$F'(\xi)=2e^{2\xi}f(\xi)+e^{2\xi}f'(\xi)=0$ .... 6 分

即 $f'(\xi)+2f(\xi)=0$ .... 7 分

3．设 $y=ax(0<x<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围图形的面积为 S_1，该直线与抛物线和直线 $x=1$ 所围图形的面积为 S_2。（1）试确定 a 的值使 S_1+S_2 达到最小；（2）求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积。

解：（1）$S_1=\int_0^a(ax-x^2)dx=\frac{a^3}{6}$

$S_1=\int_a^1(x^2-ax)dx=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}$

所以 $S=S_1+S_2=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{3}$ .... 2 分

装

订

线

$S'=-\frac{1}{2}+a^2$

令 $S'=-\frac{1}{2}+a^2=0$，得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）

$S''=2a$， $S''(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}>0$

所以当 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和最小..... 4 分

（2）$V=\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\frac{\sqrt{2}x}{2})^2dx-\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^4dx+\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 x^4dx-\pi\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1(\frac{\sqrt{2}x}{2})^2dx$ ..... 6 分

$=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$ ..... 7 分