FB12 — AG IT-Sicherheit
Prof. Dr. Elmar Tischhauser

Philipps Universität Marburg

THEORETISCHE INFORMATIK – WS 2025/26

Übung 02

Hausübung: Aufgaben 3d) und 5.
Abgabe der bearbeiteten Aufgaben via Ilias bis zum **29.10. 23:59 Uhr**

Aufgabe 1 (Wortinduktion)
Beweisen Sie mittels Wortinduktion

$$\forall u, v \in \Sigma^*.\ |u \circ v| = |u| + |v|$$

(siehe Kap. 2, Theorem 2, Folien 12 und 16). Begründen Sie dabei jeden einzelnen Schritt entweder durch Verweis auf die Induktionshypothese oder einen spezifischen Fall der rekursiven Definitionen von $\circ$ und $|\cdot|$.

Aufgabe 2 (Rekursive Definitionen)
Für $a \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit v_+a das Anhängen des Zeichens a *hinten* an das Wort v (“append”-Operation).

a) Geben Sie eine rekursive Definition für die Operation $_+$ an.

b) Zeigen Sie mit Wortinduktion, dass Folgendes gilt:

$$\forall a \in \Sigma.\ \forall u, v \in \Sigma^*.\ (u \circ v)_+a = u \circ (v_+a).$$

Aufgabe 3 (Eigenschaften von Sprachen)

a) Bestimmen Sie die Sprachen $\emptyset^*$ und $\emptyset^+$.

b) Erläutern Sie kurz den Unterschied zwischen ε, $\emptyset$ und $\{\varepsilon\}$.

c) Für welche Sprachen $L \subseteq \{a, b\}^*$ ist L^* endlich?

d) (**Hausübung, 4 Punkte**) Sei Σ ein Alphabet und $L, M \subseteq \Sigma^*$ zwei beliebige Sprachen über Σ. Gelten die folgenden beiden Gleichungen allgemein? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel (jeweils).

$$(L^+)^+ = L^+ \tag{1}$$
$$(L^* M^*)^* = (L \cup M)^* \tag{2}$$

Aufgabe 4 (Sprachdefinitionen)
Für ein Alphabet Σ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit Σ^n die Menge aller Worte über Σ der Länge n. Die n-fache Konkatenation eines Wortes $w \in \Sigma^*$ ist rekursiv erklärt als $w^n := w \circ w^{n-1} = ww^{n-1}$ mit $w^0 = \varepsilon$.

Sei nun konkret $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie jeweils alle Worte der folgenden Sprachen an:

a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \Sigma^2.\ w = uu^Ru\}$

b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w^2 = w^3\}$

c) $L_3 = \{w \in \Sigma^2 \mid \exists u, v \in \Sigma^*.\ uvw = wvu\}$

Aufgabe 5 (Rekursive Definition von Teilfolgen, Hausübung, 2 Punkte)
Wir nennen ein Wort $u = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ eine *Teilfolge* von w und schreiben $u \text{ subseq } w$, falls die Zeichen von u in der gleichen Reihenfolge, jedoch nicht notwendigerweise aufeinanderfolgend in w enthalten sind:

$$u \text{ subseq } w \quad :\Leftrightarrow \quad \exists v_0, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*.\ w = v_0 u_0 v_1 \cdots u_{n-1} v_n.$$

Beachten Sie, dass jedes der Worte v_i auch leer sein darf. Beispielsweise haben wir:

$$\begin{aligned} \textit{nora} &\text{ subseq } \textit{Informatik} \\ \textit{Irma} &\text{ subseq } \textit{Informatik} \\ \textit{mat} &\text{ subseq } \textit{Informatik} \\ \neg(\textit{mar} &\text{ subseq } \textit{Informatik}) \end{aligned}$$

Geben Sie eine rekursive Definition für die Relation subseq.