FB12 — AG IT-Sicherheit
Prof. Dr. Elmar Tischhauser

Philipps Universität Marburg

Theoretische Informatik – WS 2025/26

Übung 04

Hausübung: Aufgaben 2a) und 3a).
Abgabe der bearbeiteten Aufgaben via Ilias bis zum **12.11. 23:59 Uhr**

Aufgabe 1 (Entwurf von DFAs)
Gegeben sei das Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Skizzieren Sie jeweils einen DFA A_i mit $L(A_i) = L_i$.

a) $L_1 = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ungerade} \,\}$

b) $L_2 = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w|_a \equiv 0 \pmod 3 \,\}$

c) $L_3 = \{\, a^n b^m \mid n + m \text{ gerade} \,\}$

Aufgabe 2 (Produktautomaten)

a) (**Hausübung, 3 Punkte**) Beweisen Sie mittels Induktion über w das folgende Lemma aus der Vorlesung:

Seien $A = (P, \Sigma, \delta_A, p_0, F_A)$ und $B = (Q, \Sigma, \delta_B, q_0, F_B)$ endliche Automaten. Für den Produktautomaten $A \times B$ gilt:

$$\forall w \in \Sigma^* : \delta^*_{A\times B}\big((p, q), w\big) = \big(\delta^*_A(p, w), \delta^*_B(q, w)\big)$$

b) Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Konstruieren Sie einen DFA für die Sprache

$$L = \{\, w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ ungerade und } |w|_a \equiv 0 \pmod 3 \,\}\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie die DFAs A_1 und A_2 aus Aufgabe 1 für einen Produktautomaten.

c) Wie unterscheidet sich der Summenautomat aus A_1 und A_2 von ihrem Produktautomaten, und welche Sprache erkennt er?

Aufgabe 3 (Minimalautomaten)

a) (**Hausübung, 3 Punkte**) Zeigen Sie, dass die Nichttrennbarkeitsrelation $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Zustandsmenge Q ist, also reflexiv ($\forall q \in Q.\ q \sim q$), symmetrisch ($\forall p, q \in Q.\ p \sim q \implies q \sim p$) und transitiv ($\forall p, q, r \in Q.\ (p \sim q \wedge q \sim r) \implies p \sim r$).

b) Bestimmen Sie mit dem Verfahren Ihrer Wahl (Partitionierung oder Tabelle) jeweils den Minimalautomaten für:

- den Produktautomaten aus der Vorlesung (Kap. 4 Folie 30).
- den Produktautomaten aus Aufgabe 2b).

Aufgabe 4 (Kleene-Stern)
Wir wollen beweisen: für $L \subseteq \Sigma^*$ ist L^* die kleinste Sprache, welche L umfasst, ε enthält und unter der Konkatenation $\circ$ abgeschlossen ist (also $L^* \circ L^* \subseteq L^*$). Zeigen Sie hierfür die folgenden Schritte:

a) $L \subseteq L^*$

b) $\varepsilon \in L^*$

c) $L^* \circ L^* \subseteq L^*$ (Abgeschlossenheit unter Konkatenation)

d) Für alle Sprachen $L' \subseteq \Sigma^*$ mit $L \subseteq L'$, $\varepsilon \in L'$ und $L' \circ L' \subseteq L'$ gilt $L^* \subseteq L'$.

Warum ist mit den Ergebnissen aus a) - d) die Gesamtbehauptung gezeigt?