

Technische Informatik

Minimierung mit KV-Diagrammen

Thorsten Thormählen

17. November 2022

Teil 5, Kapitel 2

Dies ist die Druck-Ansicht.

Aktiviere Präsentationsansicht

Typesetting math: 59%

Typesetting math: 59%

Steuerungstasten

- nächste Folie (auch **Enter** oder **Spacebar**).
- ← vorherige Folie
- d schaltet das Zeichnen auf Folien ein/aus
- p wechselt zwischen Druck- und Präsentationsansicht
- CTRL + vergrößert die Folien
- CTRL - verkleinert die Folien
- CTRL 0 setzt die Größenänderung zurück

Typesetting math: 59%

Notation

Typ	Schriftart	Beispiele
Variablen (Skalare)	kursiv	a, b, x, y
Funktionen	aufrecht	$f, g(x), \max(x)$
Vektoren	fett, Elemente zeilenweise	$\mathbf{a}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^\top,$ $\mathbf{B} = (x, y, z)^\top$
Matrizen	Schreibmaschine	$\mathbf{A}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
Mengen	kalligrafisch	$\mathcal{A}, \mathcal{B} = \{a, b\}, b \in \mathcal{B}$
Zahlenbereiche, Koordinatenräume	doppelt gestrichen	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Thorsten Thormählen 3/34

Typesetting math: 59%

Typesetting math: 59%

Das Vereinigungstheorem

Das Vereinigungstheorem ist ein wichtiges Theorem zur systematischen Minimierung von Funktionen:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) = a$$

Grundsatz zur Vereinfachung bei zweistufiger Logik (ODER-Verknüpfung von Monomen):

Sind in der "1"-Menge zwei Monome, die die sich nur in einer Variablen unterscheiden, dann können diese zusammengefasst werden. Zur Abdeckung dieser beiden Elemente der "1"-Menge kann ein einzelnes Monom verwendet werden, in welchem diese Variable nicht mehr vorkommt.

Beispiel 1:

b	a	y	DNF
0	0	1	$(\bar{a} \wedge \bar{b})$
0	1	0	
1	0	1	$\vee (\bar{a} \wedge b)$
1	1	0	

Die Variable b kommt nicht negiert und negiert vor, daher:

$$y = \bar{a}\bar{b} \vee \bar{a}b = \bar{a}$$

Typesetting math: 59%

Das Vereinigungstheorem

Beispiel 2:

x_2	x_1	x_0	y	DNF
0	0	0	0	$(\neg x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0)$
0	0	1	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
1	0	0	0	$\vee (x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0)$
1	0	1	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	

Die Variable x_2 kommt nicht negiert und negiert vor, daher:

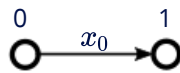
$$y = \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0 = x_1 \bar{x}_0$$

Typesetting math: 59%

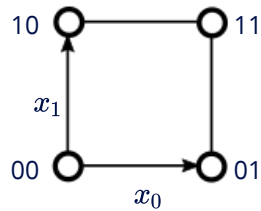
Boolescher Würfel

Mit Hilfe des Booleschen Würfels kann einfach festgestellt werden, ob das Vereinigungstheorem angewendet werden kann

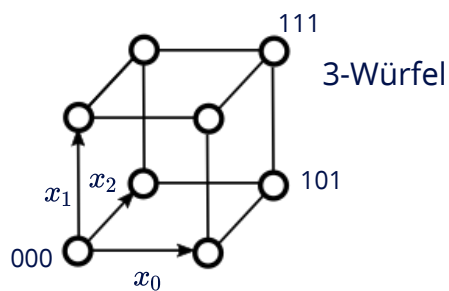
n -Eingangsvariablen $\equiv n$ -dimensionaler Würfel



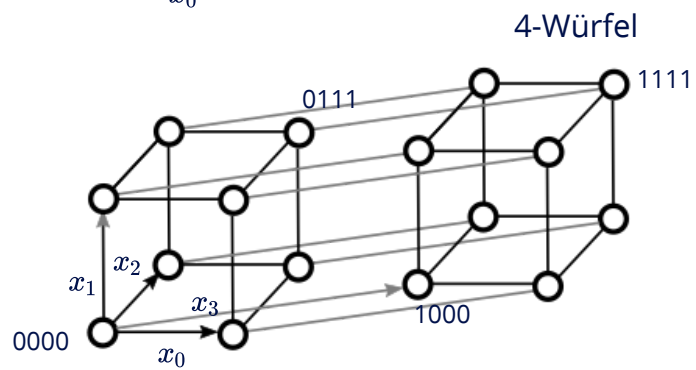
1-Würfel



2-Würfel



3-Würfel



4-Würfel

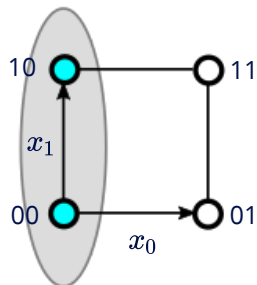
Thorsten Thormählen 6/34

Typesetting math: 59%

Boolescher Würfel

Das Vereinigungstheorem fasst zwei Unterräume eines Würfels zu einem größeren zusammen

Beispiel:



Die Variable x_1 kommt nicht negiert und negiert vor, daher:

$$y = \overline{x_1} \overline{x_0} \vee x_1 \overline{x_0} = \overline{x_0}$$

Zwei benachbarte Unterräume der Größe 0 (Knoten) werden zu einem Unterraum der Größe 1 (Kante) zusammengefasst.

x_1	x_0	y	DNF
0	0	1	$(\overline{x_1} \wedge \overline{x_0}) \vee (x_1 \wedge \overline{x_0})$
0	1	0	
1	0	1	
1	1	0	

Thorsten Thormählen 7/34

Typesetting math: 59%

Boolescher Würfel

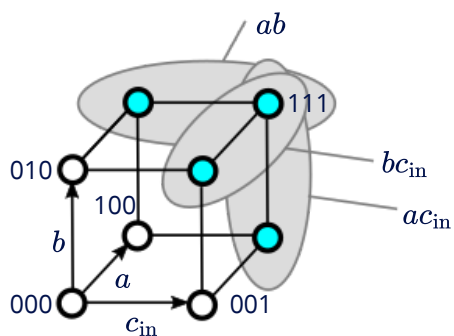
Beispiel: 1-bit binärer Volladdierer
(aus Kapitel 3.2)

Eingänge: Summanden a und b , Carry-in c_{in}

Ausgänge: Summe s , Carry-out c_{out}



Volladdierer



a	b	c_{in}	s	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Die DNF für das Carry-out aus Tabelle: $c_{out} = \bar{a}bc_{in} \vee a\bar{b}c_{in} \vee ab\bar{c}_{in} \vee abc_{in}$

Zweistufige Logik aus booleschem Würfel: $c_{out} = bc_{in} \vee ac_{in} \vee ab$

Typesetting math: 59%

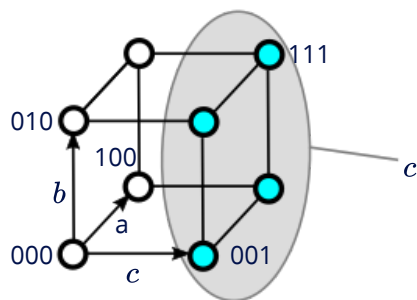
Boolescher Würfel

Das Verfahren kann rekursiv fortgeführt werden:

Zwei benachbarte Unterräume der Größe 0 (Knoten) werden zu einem Unterraum der Größe 1 (Kante) zusammengefasst. Dies ergibt für das Beispiel unten z. B. die beiden Kanten ac und $\bar{a}c$, d.h. $y = ac \vee \bar{a}c$

Zwei benachbarte Unterräume der Größe 1 (Kanten) werden zu einem Unterraum der Größe 2 (Seite) zusammengefasst.

Dies ergibt für das Beispiel: $y = c$



D. h. c ist wahr - bleibt unverändert. Die Variablen a und b variieren.

Typesetting math: 59%

Boolescher Würfel

In einem Würfel mit drei Variablen gibt es folgende Unterräume:

0-Würfel (Knoten), dies entspricht einem Term mit drei Literalen

1-Würfel (Kante), dies entspricht einem Term mit zwei Literalen

2-Würfel (Seite), dies entspricht einem Term mit einem Literal

3-Würfel (Würfel), dies entspricht der Konstanten 1

Im Allgemeinen gilt:

Ein m -Subwürfel in einem n -Würfel ($m < n$) repräsentiert einen Term mit $n - m$ Literalen

Typesetting math: 59%

Karnaugh-Veitch-Diagramme

Karnaugh-Veitch-Diagramme (KV-Diagramme) dienen zur übersichtlichen Darstellung und systematischen Vereinfachung boolescher Funktionen

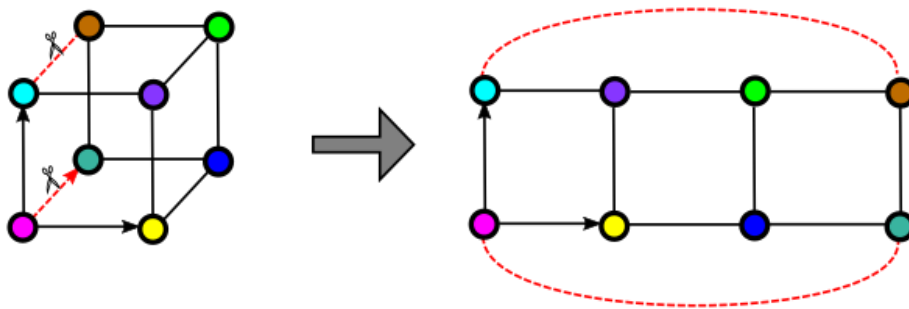
Ziel: Umwandlung einer disjunktiven Normalform in einen minimalen disjunktiven logischen Ausdruck (minimale ODER-Verknüpfung von Monomen)

Sie wurden 1952 von Edward W. Veitch entworfen und 1953 von Maurice Karnaugh zu ihrer heutigen Form weiterentwickelt

Sie entsprechen einer flachen Abbildung des booleschen Würfels

Verbindungen an den Schnittkanten (rote gestrichelte Linien) müssen sich gedacht werden

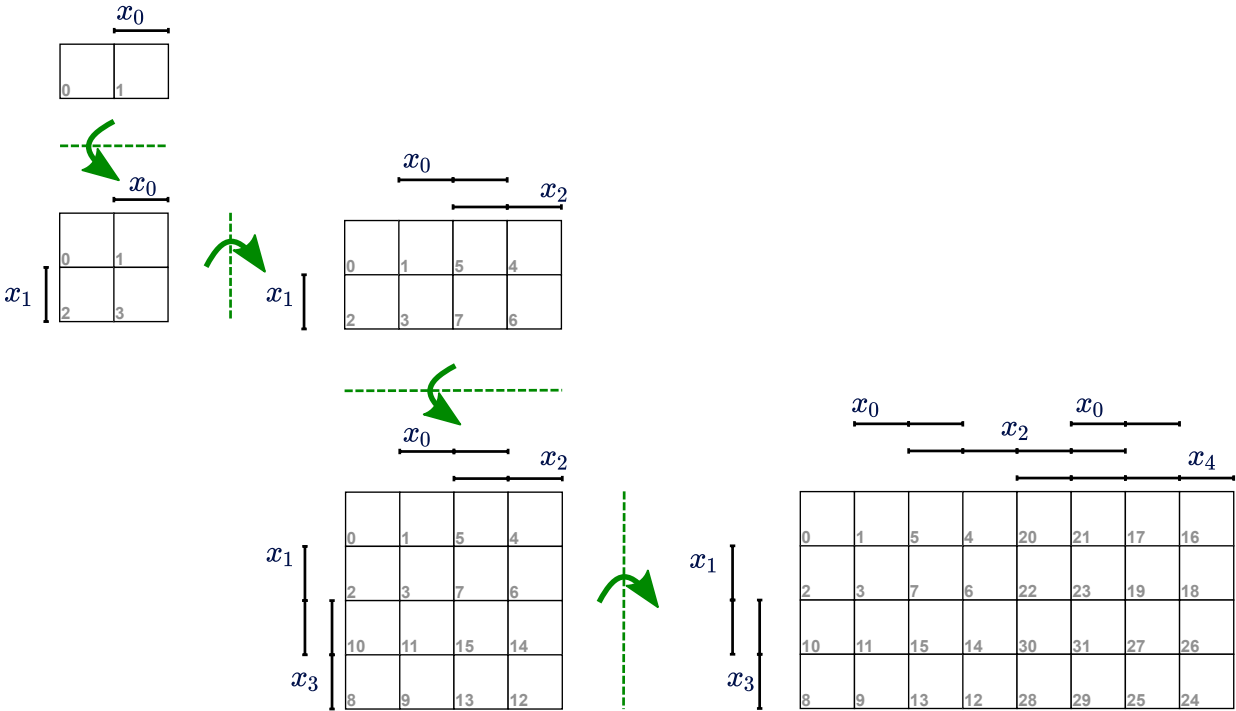
Schwierig zu zeichnen, wenn mehr als 4 Variablen vorkommen



Thorsten Thormählen 11 / 34

Typesetting math: 59%

Konstruktion von KV-Diagrammen



Typesetting math: 59%

Konstruktion von KV-Diagrammen

Das KV-Diagramm einer booleschen Funktion $y = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ der Stelligkeit n hat 2^n Zellen

Bereiche, in denen eine Variable x_i den Wert 1 hat, sind durch einen Strich gekennzeichnet

Beim Hinzufügen einer neuen Variablen x_i wird das bisherige KV-Diagramm durch abwechselndes vertikales und horizontales Spiegeln erzeugt

Dabei verdoppeln sich jeweils die Anzahl der Zellen

Benachbarte Zellen unterscheiden sich in genau einer Variablen

Zellen an der linken und rechten (bzw. oberen und unteren) Kante des Diagramms sind ebenfalls benachbart (wrap-around)

Bei 5 Variablen ist der Bereich für x_0 räumlich gespalten

Allgemein gilt: Bei $n > 4$ Variablen sind die Bereiche für $n - 4$ Variablen räumlich gespalten

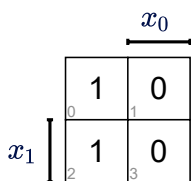
D. h. wirklich intuitiv ist die Nutzung nur bis zu 4 Variablen

Typesetting math: 59%

Übertragen von Wahrheitstafeln in das KV-Diagramm

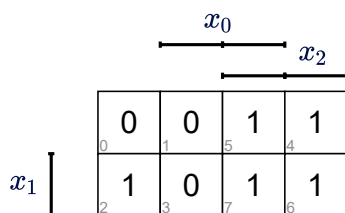
Für eine Funktion $y = f(x_1, x_0)$ wird folgendes Diagramm konstruiert:

x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	2
1	1	0	3



Für eine Funktion $y = f(x_2, x_1, x_0)$ wird folgendes Diagramm konstruiert:

x_2	x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	2
0	1	1	0	3
1	0	0	1	4
1	0	1	1	5
1	1	0	1	6
1	1	1	1	7

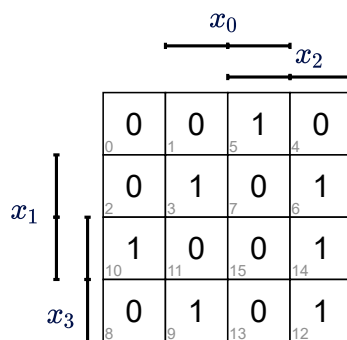


Typesetting math: 59%

Übertragen von Wahrheitstafeln in das KV-Diagramm

Für eine Funktion $y = f(x_3, x_2, x_1, x_0)$ wird folgendes Diagramm konstruiert:

x_3	x_2	x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	1	5
0	1	1	0	1	6
0	1	1	1	0	7
1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	1	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	0	11
1	1	0	0	1	12
1	1	0	1	0	13
1	1	1	0	1	14
1	1	1	1	0	15



Typesetting math: 59%

Karnaugh-Veitch-Diagramme

Zur Konstruktion der bisherigen Diagramme wurde von einer Wahrheitstafel ausgegangen

Nun soll aus einem Diagramm eine minimale Oder-Verknüpfung von Monomen abgelesen werden

Dazu werden die verwendeten Monome so gewählt, dass möglichst viele "Einsen" gemeinsam abgelesen werden

Ein Monom entspricht dabei einem rechteckigen Block im KV-Diagramm

Somit werden möglichst große Blöcke gesucht, welche die 1-Menge im KV-Diagramm überdecken

Die Blöcke im KV-Diagramm entsprechen Unterräumen im Booleschen Würfel

		x_0		x_2	
	0	1	1	0	
x_1	0	0	0	0	

$$y = \bar{x}_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 = \bar{x}_1 x_0$$

Thorsten Thormählen 16 / 34

Typesetting math: 59%

Typesetting math: 59%

Überdecken von 1-Mengen in KV-Diagrammen

$\xrightarrow{x_0}$
 $\xrightarrow{x_2}$

0	0	1	1
0	0	0	0

$x_1 \left| \right.$

$$y = x_2 \bar{x}_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 = x_2 \bar{x}_1$$

$\xrightarrow{x_0}$
 $\xrightarrow{x_2}$

0	0	1	0
0	0	1	0

$x_1 \left| \right.$

$$y = x_2 x_1 x_0 \vee x_2 \bar{x}_1 x_0 = x_2 x_0$$

$\xrightarrow{x_0}$
 $\xrightarrow{x_2}$

0	0	0	1
0	0	0	1

$x_1 \left| \right.$

$$y = x_2 \bar{x}_1 \bar{x}_0 \vee x_2 x_1 \bar{x}_0 = x_2 \bar{x}_0$$

$\xrightarrow{x_0}$
 $\xrightarrow{x_2}$

0	0	1	1
0	0	1	1

$x_1 \left| \right.$

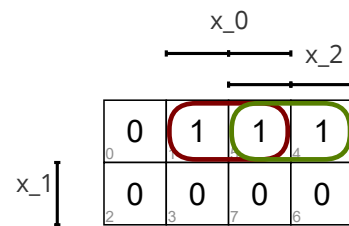
$$y = x_2$$

Typesetting math: 59%

Überdecken von 1-Mengen in KV-Diagrammen

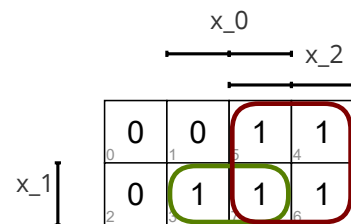
Die Blöcke dürfen sich überlappen

Blöcke haben immer Zweierpotenzen als Höhe und Breite. In diesem Beispiel ist es daher nicht möglich, ein 3×1 Block zu verwenden. Stattdessen ergeben sich zwei 2×1 Blöcke.



$$y = \overline{x_1} x_0 \vee x_2 \overline{x_1}$$

Es gibt häufig mehrere Möglichkeiten die 1-Menge zu überdecken. Es wird immer diejenige ausgewählt, die auf möglichst wenige Oder-Verknüpfungen führt (d.h. möglichst große Blöcke und davon wenige)



$$y = x_1 x_0 \vee x_2$$

Typesetting math: 59%

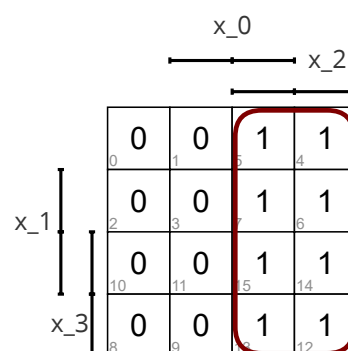
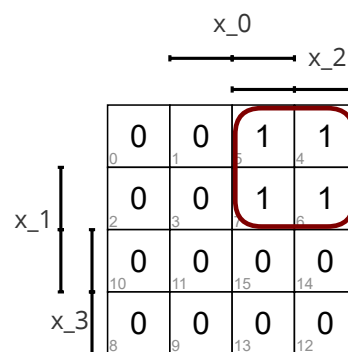
Überdecken von 1-Mengen in KV-Diagrammen

Es ist zu erkennen, dass bei größeren Blöcken das Vereinigungstheorem wiederholt angewendet wird, indem immer größere Blöcke aus benachbarten Blöcken gebildet werden

In dem Beispiel rechts werden aus zwei 2×1 Blöcken ein 2×2 Block

$$\begin{aligned} y \quad &= \overline{x_3} x_2 \\ &\overline{x_1} x_0 \vee \overline{x_3} x_2 x_1 x_0 \\ &\vee \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} \\ &\overline{x_0} \vee \overline{x_3} x_2 x_1 \\ &\overline{x_0} \vee \overline{x_3} x_2 x_0 \vee \\ &\overline{x_3} x_2 \end{aligned}$$

und in diesem Beispiel aus zwei 2×2 Blöcken ein 4×2 Block:

$$\begin{aligned} y \quad &= \overline{x_3} x_2 \\ &\overline{x_1} x_0 \vee \overline{x_3} x_2 x_1 x_0 \\ &\vee \overline{x_3} x_2 \overline{x_1} \\ &\overline{x_0} \vee \overline{x_3} x_2 x_1 \\ &\overline{x_0} \vee \overline{x_3} x_2 x_0 \vee \\ &x_0 \vee x_3 x_2 x_1 x_0 \vee x_3 x_2 \\ &\overline{x_1} \overline{x_0} \vee x_3 x_2 x_1 \\ &\overline{x_0} \vee \overline{x_3} x_2 x_0 \vee \end{aligned}$$


Thorsten Thormählen 19/34

$$\overline{x_3 x_2} \overline{x_0} \vee x_3 x_2 x_0 \\ \vee x_3 x_2 \overline{x_0} \quad \&=\& \overline{x_3} \\ x_2 \vee x_3 x_2 \quad \&=\& x_2 \end{eqnarray}$$

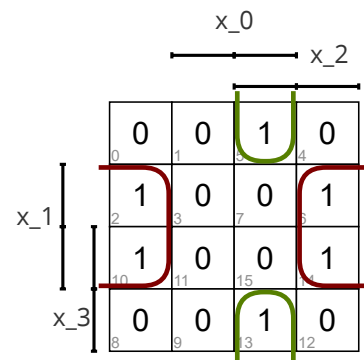
Typesetting math: 59%

Überdecken von 1-Mengen in KV-Diagrammen

Die Blöcke können auch über die Ränder hinweg gebildet werden.

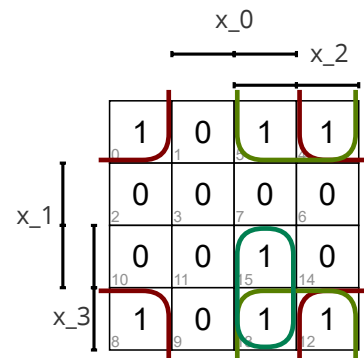
Beispiel 1:

$$y = x_1 \overline{x_0} \vee x_2 \overline{x_1} x_0$$



Beispiel 2:

$$y = \overline{x_1} \overline{x_0} \vee x_2 \overline{x_1} \vee x_3 x_2 x_0$$



Thorsten Thormählen 20/34

Typesetting math: 59%

Beispiel: 1-bit binärer Volladdierer

Eingänge: Summanden a und b , Carry-in c_{in}

Ausgänge: Summe s , Carry-out c_{out}

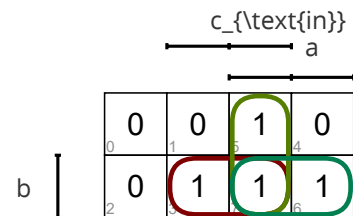
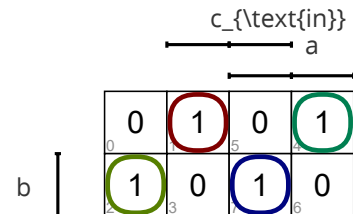


Volladdierer

a	b	c_{in}	s	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

$$s = \overline{a}\overline{b}c_{\text{in}} \vee \overline{a}b\overline{c_{\text{in}}} \vee a\overline{b}\overline{c_{\text{in}}} \vee abc_{\text{in}}$$

$$c_{\text{out}} = bc_{\text{in}} \vee ac_{\text{in}} \vee ab$$



Typesetting math: 59%

Weitere Beispiele mit 3 Variablen

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{0,4,5,7\}} m_i$$

	x_0		x_2	
x_1	0	1	5	6
	1	0	3	2
	0	0	1	0

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_1 \overline{x}_0 \vee x_2 x_0$$

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{0,1,4,5,6,7\}} m_i$$

	x_0		x_2	
x_1	0	1	5	6
	1	0	3	2
	0	0	1	0

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_1 \vee x_2$$

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{0,4,5,6,7\}} m_i$$

	x_0		x_2	
x_1	0	1	5	6
	1	0	3	2
	0	0	1	0

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_1 \overline{x}_0 \vee x_2$$

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{0,1,3,4,5,6,7\}} m_i$$

	x_0		x_2	
x_1	0	1	5	6
	1	0	3	2
	0	1	1	0

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \overline{x}_1 \vee x_0 \vee x_2$$

Thorsten Thormählen — 22/34

Typesetting math: 59%

Weitere Beispiele mit 4 Variablen

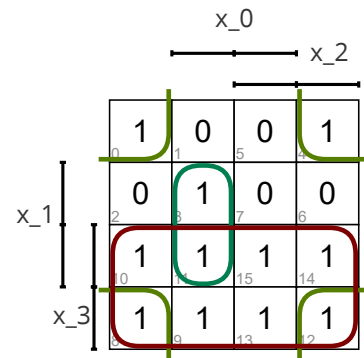
Beispiel 1:

Aufgabe:

$$\mathrm{f}(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{0,3,4,8,9,10,11,12,13,14,15\}} m_i$$

Lösung:

$$\mathrm{f}(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_0} \vee \overline{x_2} x_1 x_0$$



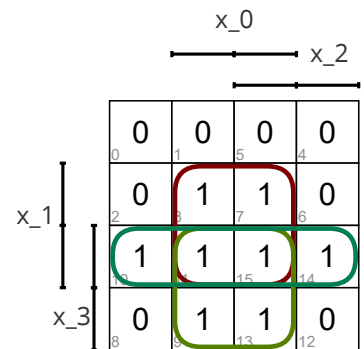
Beispiel 2:

Aufgabe:

$$\mathrm{f}(x_3, x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{3,7,9,10,11,13,14,15\}} m_i$$

Lösung:

$$\mathrm{f}(x_3, x_2, x_1, x_0) = x_1 x_0 \vee x_3 x_1$$



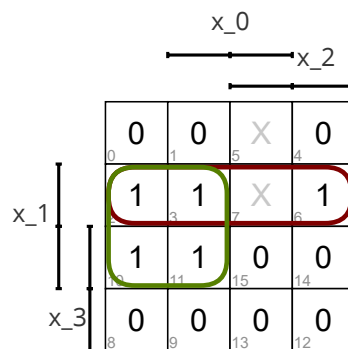
Thorsten Thormählen 23/34

Typesetting math: 59%

Don't cares in KV-Diagrammen

Don't cares können als Einsen oder Nullen behandelt werden, je nachdem, was mehr Vorteile bietet.

x_3	x_2	x_1	x_0	y	KV-Zelle
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	2
0	0	1	1	1	3
0	1	0	0	0	4
0	1	0	1	X	5
0	1	1	0	1	6
0	1	1	1	X	7
1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	9
1	0	1	0	1	10
1	0	1	1	1	11
1	1	0	0	0	12
1	1	0	1	0	13
1	1	1	0	0	14
1	1	1	1	0	15



$$y = \overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_2} x_1$$

Typesetting math: 59%

Terminologie KV-Diagramme

Implikant

Monom (bzw. zugehöriger Block), der eine Untermenge der 1-Menge (oder don't cares) abdeckt

z.B. 1×1 Block, 2×1 Block, 2×2 Block, 4×2 Block, usw.

Primimplikant

Primimplikanten können nicht (mehr) mit anderen benachbarten Implikanten zusammengefasst werden, um einen größeren Block zu bilden

Essentieller Primimplikant

Ein Primimplikant ist essentiell, wenn er als einziger Primimplikant ein bestimmtes Element der 1-Menge abdeckt

Ein essentieller Primimplikant wird somit in jedem Fall für die Abdeckungen der 1-Menge benötigt

Don't cares werden genutzt, um Primimplikanten zu bilden, aber nicht, um einen Primimplikanten als essentiell anzusehen

Typesetting math: 59%

Terminologie KV-Diagramme

Figure 10 illustrates the simplification of the Boolean function $F(A, B, C, D)$ using Karnaugh maps. The figure shows four K-maps arranged in a 2x2 grid. The top row shows the original function F and its prime implicants (PIs) circled in blue. The bottom row shows the essential prime implicants (EPIs) circled in red. The K-maps are labeled with minterms 0-15. The first K-map (top-left) shows the original function F . The second K-map (top-right) shows the prime implicants. The third K-map (bottom-left) shows the essential prime implicants. The fourth K-map (bottom-right) shows the final simplified function F_{\min} , which is the sum of the essential prime implicants.

Thorsten Thormählen 26 / 34

Typesetting math: 59%

Typesetting math: 59%

Vorgehensweise zum Finden des minimalen booleschen Ausdrucks aus einem KV-Diagramm

Schritt 1: Finde alle Primimplikanten durch Zusammenfassen horizontaler und vertikaler benachbarter 1-en zu möglichst großen Blöcken

auch über die Ränder hinweg

Höhe und Breite der Blöcke müssen Potenzen von 2 sein, also 1, 2, 4, 8 usw.

Schritt 2: Überdecke die 1-Menge im KV-Diagramm mit einer minimalen Auswahl von Primimplikanten

Wird eine 1 nur von einem bestimmten Primimplikanten überdeckt, so ist dieser essentiell und ist Teil der Überdeckungsmenge

Alle 1-en, die von einem essentiellen Primimplikanten überdeckt werden, brauchen nicht mehr untersucht zu werden

Wenn noch 1-en existieren, die nicht durch essentielle Primimplikanten abgedeckt sind, wähle die kleinste Anzahl von Primimplikanten, die die verbleibenden 1-en abdecken. Dabei werden Primimplikanten bevorzugt, die zu großen Blöcken gehören

Thorsten Thormählen 27 / 34

Typesetting math: 59%

Typesetting math: 59%

Quiz

Frage: Was ist die minimale Oder-Verknüpfung von Monomen für folgende boolesche Funktion?

	0	1	0	0
	2	3	7	6
	10	11	15	14
	8	9	13	12

Antwort 1: $x_1 x_0$

Antwort 2: $\overline{x_3}\overline{x_2}x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee x_3x_2x_0$

Antwort 3: $x_1 x_0 \vee \overline{x_3}x_2x_1 \vee x_3\overline{x_2}x_1$

Am Online-Quiz teilnehmen durch Besuch der Webseite:

www.onlineclicker.org

Thorsten Thormählen 28/34

Typesetting math: 59%

Typesetting math: 59%

Quiz

Frage: Was ist die minimale Oder-Verknüpfung von Monomen für folgende boolesche Funktion?

Diagram illustrating a 2D array structure with dimensions w and y . The array is represented as a 4x4 grid of cells. The dimensions are labeled as x (height), y (width), and w (width). The grid contains values 0, 1, and X. The dimensions are labeled as x (height), y (width), and w (width).

Antwort 1: $z \vee \overline{y}$

Antwort 2: $yw \vee \overline{z} \overline{w}$

Antwort 3: $x \vee z \vee \overline{y}$

Am Online-Quiz teilnehmen durch Besuch der Webseite:

www.onlineclicker.org

Thorsten Thormählen 29 / 34

Typesetting math: 59%

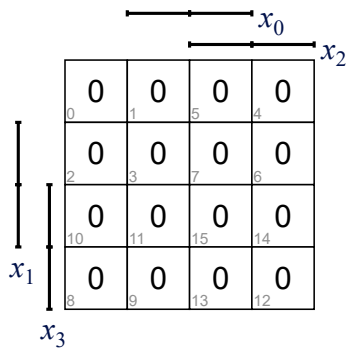
Typesetting math: 59%

Interaktiver KV-Diagramm-Rechner und Lernprogramm

Durch Klicken auf die Felder kann die boolesche Funktion verändert werden

Generiere zufälliges Beispiel **Reset**

Variablen: Don't-Cares erlauben: Ergebnis verstecken:



$y = 0$

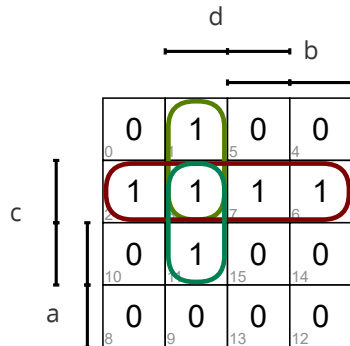
Typesetting math: 59%

Entwurfsbeispiel: 2-Bit-Komparator

$l = (ab < cd)$ (less)

$e = (ab == cd)$ (equal)

$g = (ab > cd)$ (greater)



Abgelesene Lösung für l:

$l = \overline{a}\overline{b}d \vee \overline{a}c \vee \overline{b}cd$

a	b	c	d	l	e	g	KV-Zelle
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	0	0	3
0	1	0	0	0	0	1	4
0	1	0	1	0	1	0	5
0	1	1	0	1	0	0	6
0	1	1	1	1	0	0	7
1	0	0	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	0	1	9
1	0	1	0	0	1	0	10
1	0	1	1	1	0	0	11
1	1	0	0	0	0	1	12
1	1	0	1	0	0	1	13
1	1	1	0	0	0	1	14
1	1	1	1	0	1	0	15

Thorsten Thormählen 31 / 34

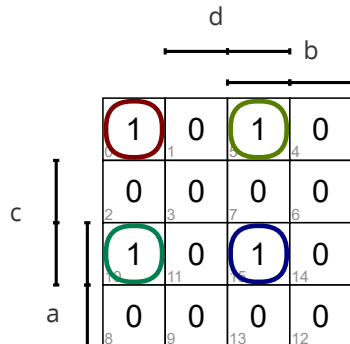
Typesetting math: 59%

Entwurfsbeispiel: 2-Bit-Komparator

$l = (ab < cd)$ (less)

$e = (ab == cd)$ (equal)

$g = (ab > cd)$ (greater)



Abgelesene Lösung für e:

$e =$

$\overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}b\overline{c}d \vee a\overline{b}c\overline{d} \vee abcd$

Dies ist die minimale Oder-Verknüpfung von Monomen, aber es geht noch besser:

$e = (\overline{a}\overline{c} \wedge (\overline{b}\overline{d} \vee bd)) \vee (a c \wedge (\overline{b}\overline{d} \vee bd)) = (\overline{a}\overline{c} \vee a c) (\overline{b}\overline{d} \vee bd) = (a \leftrightarrow c)(b \leftrightarrow d)$

a	b	c	d	l	e	g	KV-Zelle
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	0	0	3
0	1	0	0	0	0	1	4
0	1	0	1	0	1	0	5
0	1	1	0	1	0	0	6
0	1	1	1	1	0	0	7
1	0	0	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	0	1	9
1	0	1	0	0	1	0	10
1	0	1	1	1	0	0	11
1	1	0	0	0	0	1	12
1	1	0	1	0	0	1	13
1	1	1	0	0	0	1	14
1	1	1	1	0	1	0	15

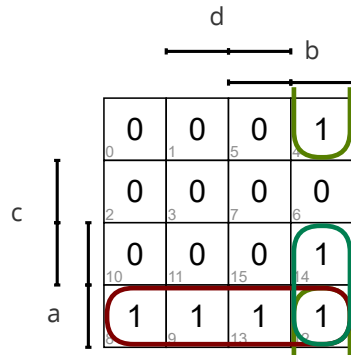
Typesetting math: 59%

Entwurfsbeispiel: 2-Bit-Komparator

$l = (ab < cd)$ (less)

$e = (ab == cd)$ (equal)

$g = (ab > cd)$ (greater)



Abgelesene Lösung für g:

$g = b \overline{c} \overline{d} \vee a \overline{c} \vee ab \overline{d}$

a	b	c	d	l	e	g	KV-Zelle
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	0	0	2
0	0	1	1	1	0	0	3
0	1	0	0	0	0	1	4
0	1	0	1	0	1	0	5
0	1	1	0	1	0	0	6
0	1	1	1	1	0	0	7
1	0	0	0	0	0	1	8
1	0	0	1	0	0	1	9
1	0	1	0	0	1	0	10
1	0	1	1	1	0	0	11
1	1	0	0	0	0	1	12
1	1	0	1	0	0	1	13
1	1	1	0	0	0	1	14
1	1	1	1	0	1	0	15

Typesetting math: 59%

Gibt es Fragen?



Anregungen oder Verbesserungsvorschläge können auch gerne per E-mail an mich gesendet werden: [Kontakt](#)

[Weitere Vorlesungsfolien](#)

[[Impressum](#) , [Datenschutz](#) ,]

Thorsten Thormählen 34 / 34

Typesetting math: 59%

Typesetting math: 59%