Technische Informatik
Rechnen mit booleschen Ausdrücken

Thorsten Thormählen

08. November 2022

Teil 3, Kapitel 2

Dies ist die Druck-Ansicht.

Aktiviere Präsentationsansicht

Steuerungstasten

→ nächste Folie (auch Enter oder Spacebar).
← vorherige Folie
d schaltet das Zeichnen auf Folien ein/aus
p wechselt zwischen Druck- und Präsentationsansicht
CTRL + vergrößert die Folien
CTRL - verkleinert die Folien
CTRL 0 setzt die Größenänderung zurück

Notation

Typ	Schriftart	Beispiele
Variablen (Skalare)	kursiv	a, b, x, y
Funktionen	aufrecht	$\mathrm{f}, \mathrm{g}(x), \max(x)$
Vektoren	fett, Elemente zeilenweise	$\mathbf{a}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^\top$, $\mathbf{B} = (x, y, z)^\top$
Matrizen	Schreibmaschine	$\mathtt{A}, \mathtt{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
Mengen	kalligrafisch	$\mathcal{A}, B = \{a, b\}, b \in \mathcal{B}$
Zahlenbereiche, Koordinatenräume	doppelt gestrichen	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Inhalt

Beweise durch vollständige Wahrheitstafeln

Durch die Verwendung vollständiger Wahrheitstafeln können leicht Aussagen bewiesen werden

Beispiel:
Beweise das Vereinigungstheorem (9): $xy \vee x\bar{y} = x$

x	y	xy	$x\bar{y}$	$xy \vee x\bar{y}$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	1	0	1

Beweise durch Umformung

Die Verwendung von Wahrheitstafel ist für größere Funktionen aufwendig

Durch Verwendung der Liste der Axiome und Theorme aus dem letzten Kapitel können ebenfalls Aussagen bewiesen werden

Beispiel 1:
Beweise das Vereinigungstheorem (9): $xy \vee x\bar{y} = x$

$$
\begin{aligned}
& xy \vee x\bar{y} \\
\overset{(8)}{=} \; & x \wedge (y \vee \bar{y}) \\
\overset{(5)}{=} \; & x \wedge 1 \\
\overset{(1)}{=} \; & x
\end{aligned}
$$

Beweise durch Umformung

Beispiel 2:
Beweise das Theorem der Absorption (10): $x \vee xy = x$

$$
\begin{aligned}
& x \vee xy \\
\overset{(1)}{=}\ & (x \wedge 1) \vee xy \\
\overset{(8)}{=}\ & x \wedge (1 \vee y) \\
\overset{(2)}{=}\ & x \wedge 1 \\
\overset{(1)}{=}\ & x
\end{aligned}
$$

Die Klammer über dem Gleichheitszeichen gibt jeweils das bei der Umformung verwendete Axiom an (siehe "Liste der Axiome und Theorme" aus dem letzten Kapitel)

Beweise durch Umformung

Beispiel 3:
Beweise das Theorem der Involution (4): $\neg(\neg x) = x$

$$
\begin{aligned}
&\neg(\neg x) = \neg\bar{x} \\
&\overset{(1)}{=} \neg\bar{x} \wedge 1 \\
&\overset{(5)}{=} \neg\bar{x} \wedge (x \vee \bar{x}) \\
&\overset{(8)}{=} (\neg\bar{x} \wedge x) \vee (\neg\bar{x} \wedge \bar{x}) \\
&\overset{(6)}{=} (\neg\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge \neg\bar{x}) \\
&\overset{(5)}{=} (\neg\bar{x} \wedge x) \vee 0 \\
&\overset{(5)}{=} (\neg\bar{x} \wedge x) \vee (x \wedge \bar{x}) \\
&\overset{(6)}{=} (\neg\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge x) \\
&\overset{(8)}{=} (\neg\bar{x} \vee \bar{x}) \wedge x \\
&\overset{(5)}{=} 1 \wedge x \\
&\overset{(1)}{=} x
\end{aligned}
$$

[**Quelle:** D. W. Hoffmann: *Grundlagen der Technischen Informatik*, 2. Auflage; Hanser 2009, S. 122]

Vereinfachung durch Umformung

Beispiel 1:

$$
\begin{aligned}
& (x \not\leftrightarrow y) \vee (x \leftrightarrow y) \\
= \; & (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y) \\
= \; & (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y) \\
\stackrel{(6)}{=} \; & \big((\bar{x} \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y})\big) \vee \big((x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y)\big) \\
\stackrel{(8)}{=} \; & \big(\bar{x} \wedge (y \vee \bar{y})\big) \vee \big(x \wedge (\bar{y} \vee y)\big) \\
\stackrel{(5)}{=} \; & (\bar{x} \wedge 1) \vee (x \wedge 1) \\
\stackrel{(1)}{=} \; & \bar{x} \vee x \\
\stackrel{(5)}{=} \; & 1
\end{aligned}
$$

Der boolesche Ausdruck $(x \not\leftrightarrow y) \vee (x \leftrightarrow y)$ ist demnach immer gleich 1.

Eine solcher Ausdruck heißt *allgemeingültig*

[**Quelle:** D. W. Hoffmann: *Grundlagen der Technischen Informatik*, 2. Auflage; Hanser 2009, S. 124]

Vereinfachung durch Umformung

Beispiel 2:

$$
\begin{aligned}
& (x \nleftrightarrow y) \wedge \big((x \wedge \bar{y}) \vee y\big) \\
= \; & (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \wedge \big((x \wedge \bar{y}) \vee y\big) \\
\overset{(6)}{=} \; & (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \wedge \big((x \wedge \bar{y}) \vee y\big) \\
\overset{(7)}{=} \; & \big((x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)\big) \wedge \big((x \wedge \bar{y}) \vee y\big) \\
\overset{(8)}{=} \; & (x \wedge \bar{y}) \vee \big((\bar{x} \wedge y) \wedge y\big) \\
\overset{(7)}{=} \; & (x \wedge \bar{y}) \vee \big(\bar{x} \wedge (y \wedge y)\big) \\
\overset{(3)}{=} \; & (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y) \\
\overset{(6)}{=} \; & (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \\
= \; & (x \nleftrightarrow y)
\end{aligned}
$$

[**Quelle:** D. W. Hoffmann: *Grundlagen der Technischen Informatik*, 2. Auflage; Hanser 2009, S. 124]

Tipps zum Rechnen mit booleschen Ausdrücken

- Abkürzende Schreibweise erst verwenden, wenn Sie Sicherheit mit booleschen Ausdrücken erlangt haben
- Beim Vereinfachen des Ausdrucks von den innersten geklammerten Ausdrücken nach außen vorgehen. Eventuell Klammerpaare farblich markieren.
- Immer zunächst in folgender Reihenfolge prüfen, ob sich der Ausdruck vereinfachen lasst:
  - Absorption (10)
  - Absorption II (11)
  - Vereinigung (9)
- Besonders Distributivität (8) erst nach Prüfen aller anderen Möglichkeiten verwenden, wenn sich dadurch der Ausdruck verlängert

Literale und Monome

Ein *Literal* ist eine Variable oder eine negierte Variable, z.B. a, b, $\neg c$, $\bar{x}$, etc.

Ein *Monom* ist eine UND-Verknüpfung von Literalen, z.B. $(a \wedge b \wedge \neg c) = ab\bar{c}$, $\bar{f}\bar{e}\bar{d}$, $\bar{x}\bar{y}$, $xy\bar{z}$ etc.

Die Schaltfunktion eines Monoms kann nur dann 1 sein, wenn jedes vorkommende Literal 1 ist, d.h. jede vorkommende Variable mit 1 und jede negierte Variable mit 0 belegt ist

Das Monom $\bar{x}y\bar{z}$ ist also nur dann 1, falls $x = z = 0$ und $y = 1$ sind

Literale und Monome

Ein boolescher Ausdruck, der aus einer ODER-Verknüpfung von Monomen besteht, evaluiert genau dann zu 1, wenn mindestens eines der Monome zu 1 evaluiert

So evaluiert der Ausdruck $y = (\bar{x}y\bar{z} \lor x\bar{y}z)$ zu 1, wenn
$x = z = 0$ und $y = 1$
oder $x = z = 1$ und $y = 0$

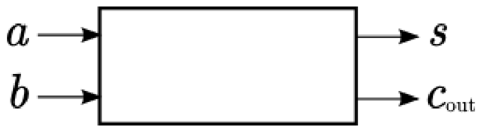
Durch die ODER-Verknüpfung von Monomen kann somit eine beliebige Schaltfunktion abgebildet werden

Literale und Monome

Beispiel: 1-bit binärer Halbaddierer

Eingänge: Summanden a und b

Ausgänge: Summe s, Carry-out c_{out} (Übertrag)



Halbaddierer

a	b	s	c_{out}
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Aus der Wahrheitstafel können in jeder Spalte, in der das Ergebnis 1sein soll, die Monome abgelesen werden

Damit ergibt sich:

$$s = \bar{a}b \vee a\bar{b} = a \nleftrightarrow b$$

$$c_{\text{out}} = ab$$

Literale und Monome

Beispiel: 1-bit binärer Volladdierer

Eingänge: Summanden a und b, Carry-in c_{in}

Ausgänge: Summe s, Carry-out c_{out}

Volladdierer

a	b	c_{in}	s	c_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Damit ergibt sich:

$$s = \bar{a}\bar{b}c_{\text{in}} \vee \bar{a}b\bar{c}_{\text{in}} \vee a\bar{b}\bar{c}_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}}$$

$$c_{\text{out}} = \bar{a}bc_{\text{in}} \vee a\bar{b}c_{\text{in}} \vee ab\bar{c}_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}}$$

Literale und Monome

Als Beispiel soll nun der boolesche Ausdruck für das c_{out} des Volladdierers vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
c_{\text{out}} &= \bar{a}bc_{\text{in}} \vee a\bar{b}c_{\text{in}} \vee ab\bar{c}_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}} \\
&\overset{(3)}{=} \bar{a}bc_{\text{in}} \vee a\bar{b}c_{\text{in}} \vee ab\bar{c}_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}} \\
&\overset{(6)}{=} \left(\bar{a}bc_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}}\right) \vee \left(a\bar{b}c_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}}\right) \vee \left(ab\bar{c}_{\text{in}} \vee abc_{\text{in}}\right) \\
&\overset{(8)}{=} \left((\bar{a} \vee a)bc_{\text{in}}\right) \vee \left(a(\bar{b} \vee b)c_{\text{in}}\right) \vee \left(ab(\bar{c}_{\text{in}} \vee c_{\text{in}})\right) \\
&\overset{(5)}{=} \left((1)bc_{\text{in}}\right) \vee \left(a(1)c_{\text{in}}\right) \vee \left(ab(1)\right) \\
&\overset{(1)}{=} bc_{\text{in}} \vee ac_{\text{in}} \vee ab
\end{aligned}$$

Quiz

Frage: Ist der boolesche Ausdruck
$(a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee \neg a$
allgemeingültig?

Antwort 1: **Nein**

Antwort 2: **Ja**

Antwort 3: **keine Ahnung**

Am Online-Quiz teilnehmen durch Besuch der Webseite:
www.onlineclicker.org

Gibt es Fragen?

Anregungen oder Verbesserungsvorschläge können auch gerne per E-mail an mich gesendet werden: Kontakt

Weitere Vorlesungsfolien