Technische Informatik
Normalformen

Thorsten Thormählen
10. November 2022
Teil 4, Kapitel 1

Dies ist die Druck-Ansicht.

Aktiviere Präsentationsansicht

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Steuerungstasten

→ nächste Folie (auch Enter oder Spacebar).
← vorherige Folie
d schaltet das Zeichnen auf Folien ein/aus
p wechselt zwischen Druck- und Präsentationsansicht
CTRL + vergrößert die Folien
CTRL - verkleinert die Folien
CTRL 0 setzt die Größenänderung zurück

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Notation

Typ	Schriftart	Beispiele
Variablen (Skalare)	kursiv	a, b, x, y
Funktionen	aufrecht	$\mathrm{f}, \mathrm{g}(x), \max(x)$
Vektoren	fett, Elemente zeilenweise	$\mathbf{a}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^\top$, $\mathbf{B} = (x, y, z)^\top$
Matrizen	Schreibmaschine	$\mathtt{A}, \mathtt{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
Mengen	kalligrafisch	$\mathcal{A}, \mathcal{B} = \{a, b\}, b \in \mathcal{B}$
Zahlenbereiche, Koordinatenräume	doppelt gestrichen	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Inhalt

Typesetting math: 100%

Normalformen

- Die Wahrheitstabelle ist eine eindeutige Definition einer booleschen Funktion
- Es gibt jedoch unendlich viele verschiedene Realisierungen mittels Logikgattern oder Beschreibungen in Form eines booleschen Ausdrucks
- Normalformen (auch kanonische Formen):
  - Standarddarstellung für einen booleschen Ausdruck in einer eindeutigen algebraischen Form

Typesetting math: 100%

Minterm

Gegeben sei eine boolesche Funktion
$y = f(x_n, \ldots, x_1, x_0)$ und die Literale $\hat{x}_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$.

Minterm: $(\hat{x}_n \wedge \cdots \wedge \hat{x}_2 \wedge \hat{x}_1 \wedge \hat{x}_0)$

- Der Minterm evaluiert für genau eine bestimmte Konfiguration der Variablen x_i zu 1 und sonst zu 0
- Genauer gesagt: Der Minterm evaluiert genau dann zu 1, wenn für alle negierten Variablen $x_i = 0$ und alle nicht negierten $x_i = 1$
- Beispiel für einen Minterm: $y = \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_1 \wedge x_0$
- Ein Minterm ist ein Monom, in dem alle Variablen vorkommen müssen

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Maxterm

Gegeben sei eine boolesche Funktion $y = f(x_n, \ldots, x_1, x_0)$ und die Literale $\hat{x}_i \in \{\bar{x}_i, x_i\}$.

Maxterm: $(\hat{x}_n \vee \cdots \vee \hat{x}_2 \vee \hat{x}_1 \vee \hat{x}_0)$

- Der Maxterm evaluiert für genau eine bestimmte Konfiguration der Variablen x_i zu 0 und sonst zu 1
- Genauer gesagt: Der Maxterm evaluiert genau dann zu 0, wenn für alle negierten Variablen $x_i = 1$ und alle nicht negierten $x_i = 0$
- Beispiel für einen Maxterm: $y = f(x_2, x_1, x_0) = \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0$

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Disjunktive Normalform

Eine disjunktive Normalform (DNF) ist eine ODER-Verknüpfung von Mintermen

Alle Konfigurationen von Mintermen, in denen $y = f(x_n, \ldots, x_1, x_0) = 1$, müssen vorkommen

Beispiel:

x_2	x_1	x_0	y	DNF
0	0	0	0	
0	0	1	1	$(\neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0)$
0	1	0	1	$\vee(\neg x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0)$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\vee(x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0)$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$\vee(x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0)$
1	1	1	1	$\vee(x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$

Typesetting math: 100%

Disjunktive Normalform (DNF)

Anzahl der Variablen: 3 Generiere zufälliges Beispiel

Durch Klicken auf die grauen Elemente kann die boolesche Funktion verändert werden

x_2	x_1	x_0	y	DNF
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	0	0

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Konjunktive Normalform

Eine konjunktive Normalform (KNF) ist eine UND-Verknüpfung von Maxtermen

Alle Konfigurationen von Maxtermen, in denen $y = f(x_n, \dots, x_1, x_0) = 0$, müssen vorkommen

Beispiel:

x_2	x_1	x_0	y	KNF
0	0	0	0	$(x_2 \vee x_1 \vee x_0)$
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	0	$\wedge(x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0)$
1	0	0	1	
1	0	1	0	$\wedge(\neg x_2 \vee x_1 \vee \neg x_0)$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Typesetting math: 100%

Konjunktive Normalform (KNF)

Anzahl der Variablen: 3 Generiere zufälliges Beispiel
Durch Klicken auf die grauen Elemente kann die boolesche Funktion verändert werden

x_2	x_1	x_0	y	KNF
0	0	0	0	$(x_2 \vee x_1 \vee x_0)$
0	0	1	0	$\wedge(x_2 \vee x_1 \vee \neg x_0)$
0	1	0	0	$\wedge(x_2 \vee \neg x_1 \vee x_0)$
0	1	1	0	$\wedge(x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0)$
1	0	0	0	$\wedge(\neg x_2 \vee x_1 \vee x_0)$
1	0	1	0	$\wedge(\neg x_2 \vee x_1 \vee \neg x_0)$
1	1	0	0	$\wedge(\neg x_2 \vee \neg x_1 \vee x_0)$
1	1	1	0	$\wedge(\neg x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0)$

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Normalformen der negierten Funktion

Teilweise kann es einfacher sein, die Normalform der negierten Funktion zu betrachten

Beispiel:

x_2	x_1	x_0	y	DNF y	$\neg y$	DNF $\neg y$
0	0	0	0		1	$(\neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0)$
0	0	1	1	$(\neg x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0)$	0	
0	1	0	1	$\vee(\neg x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0)$	0	
0	1	1	0		1	$\vee(\neg x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$
1	0	0	1	$\vee(x_2 \wedge \neg x_1 \wedge \neg x_0)$	0	
1	0	1	0		1	$\vee(x_2 \wedge \neg x_1 \wedge x_0)$
1	1	0	1	$\vee(x_2 \wedge x_1 \wedge \neg x_0)$	0	
1	1	1	1	$\vee(x_2 \wedge x_1 \wedge x_0)$	0	

Typesetting math: 100%

Umformen der negierten Funktion mit De Morgan

Disjunktive Normalform (Beispiel von Folie vorher)

$$\bar{y} = \bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2\bar{x}_1 x_0$$

Mit De Morgans Gesetz (Theorem 14)

$$\begin{aligned} \neg\bar{y} &= \neg(\bar{x}_2\bar{x}_1\bar{x}_0 \vee \bar{x}_2 x_1 x_0 \vee x_2\bar{x}_1 x_0) \\ y &= (x_2 \vee x_1 \vee x_0) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_1 \vee \bar{x}_0) \end{aligned}$$

Konjunktive Normalform (neues Beispiel)

$$\bar{y} = (x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3)$$

Mit De Morgans Gesetz (Theorem 14)

$$\begin{aligned} \neg\bar{y} &= \neg((x_2 \vee \bar{x}_1 \vee x_0 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_0 \vee \bar{x}_3)) \\ y &= \bar{x}_2 x_1 \bar{x}_0 \bar{x}_3 \vee x_2 x_1 x_0 x_3 \end{aligned}$$

Typesetting math: 100%

Zusammenhang zwischen den Normalformen

Umrechnung DNF in KNF

Verwenden derjenigen Maxterme M_i, die nicht in der Erweiterung der Minterme m_i enthalten sind

Beispiel:

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{1,3,5,6,7\}} m_i = \bigwedge_{i \in \{0,2,4\}} M_i$$

Umrechnung KNF in DNF

Umgekehrtes Vorgehen: Verwenden derjenigen Minterme m_i, die nicht in der Erweiterung der Maxterme M_i enthalten sind

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Zusammenhang zwischen den Normalformen

Anzahl der Variablen: 3 Generiere zufälliges Beispiel

Durch Klicken auf die grauen Elemente kann die boolesche Funktion verändert werden

x_2	x_1	x_0	y	DNF	KNF
0	0	0	0		$(x_2 \vee x_1 \vee x_0)$
0	0	1	0		$\wedge(x_2 \vee x_1 \vee \neg x_0)$
0	1	0	0		$\wedge(x_2 \vee \neg x_1 \vee x_0)$
0	1	1	0		$\wedge(x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0)$
1	0	0	0		$\wedge(\neg x_2 \vee x_1 \vee x_0)$
1	0	1	0		$\wedge(\neg x_2 \vee x_1 \vee \neg x_0)$
1	1	0	0		$\wedge(\neg x_2 \vee \neg x_1 \vee x_0)$
1	1	1	0	0	$\wedge(\neg x_2 \vee \neg x_1 \vee \neg x_0)$

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Zusammenhang zwischen den Normalformen

Umwandlung der DNF von f in die DNF von $\neg\mathrm{f}$

Verwenden für $\neg\mathrm{f}$ diejenigen Minterme m_i, die nicht in f enthalten sind

Beispiel:

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{1,3,5,6,7\}} m_i$$

$$\Leftrightarrow \neg\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigvee_{i \in \{0,2,4\}} m_i$$

Umwandlung der KNF von f in die KNF von $\neg\mathrm{f}$

Verwenden für $\neg\mathrm{f}$ diejenigen Maxterme M_i, die nicht in f enthalten sind

Beispiel:

$$\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigwedge_{i \in \{0,2,4\}} M_i$$

$$\Leftrightarrow \neg\mathrm{f}(x_2, x_1, x_0) = \bigwedge_{i \in \{1,3,5,6,7\}} M_i$$

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Realisierung durch Logikgatter

Jede booleschen Funktion $\mathrm{f} = (x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0)$ der Stelligkeit n lässt sich durch einen Standard-Schaltkreis realisieren, der der DNF bzw. KNF entspricht

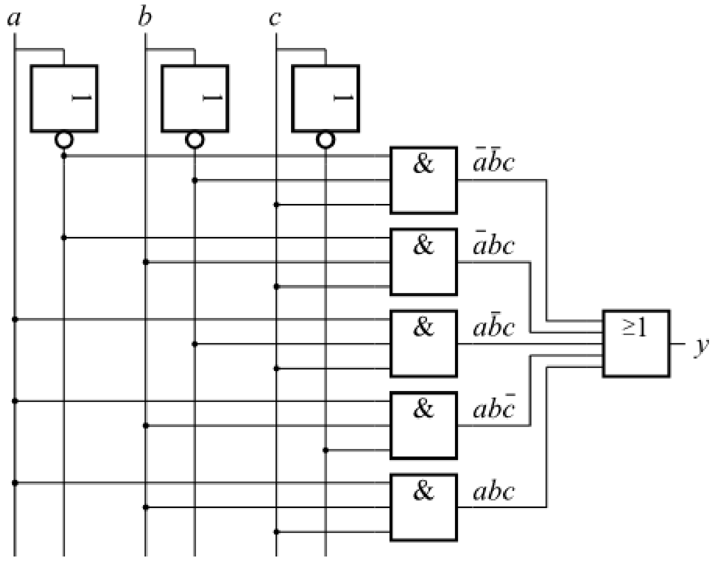
Im Fall der DNF werden die Minterme durch UND-Gatter mit n Eingängen realisiert

Die Erweiterung der Minterme zur DNF erfolgt durch ein ODER-Gatter

Beispiel:

$$y = \mathrm{f}(a, b, c) = ab \vee c$$

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Realisierung durch Logikgatter

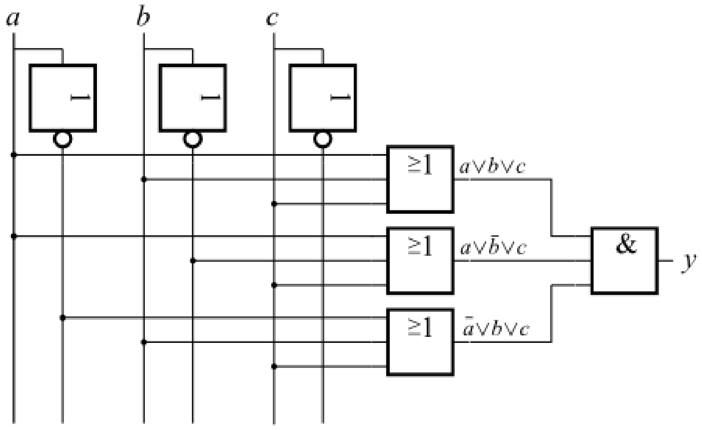
Im Fall der KNF werden die Maxterme durch ODER-Gatter mit n Eingängen realisiert

Die Erweiterung der Maxterme zur KNF erfolgt durch ein UND-Gatter

Beispiel:

$$y = \mathrm{f}(a, b, c) = ab \lor c$$

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Quiz

Frage: Was ist die DNF für folgende Boolesche Funktion?

a	b	c	y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Antwort 1: $abc \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}\bar{c}$

Antwort 2: $\bar{a}\bar{c} \vee abc$

Antwort 3: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} \vee \bar{a}b\bar{c} \vee abc$

Am Online-Quiz teilnehmen durch Besuch der Webseite:
www.onlineclicker.org

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%

Gibt es Fragen?

Anregungen oder Verbesserungsvorschläge können auch gerne per E-mail an mich gesendet werden: Kontakt

Weitere Vorlesungsfolien

[Impressum , Datenschutz ,]

Typesetting math: 100%

Typesetting math: 100%