Technische Informatik
Rechnerinterne Zahlenformate

Thorsten Thormählen

27. Oktober 2022

Teil 2, Kapitel 2

Dies ist die Druck-Ansicht.

Aktiviere Präsentationsansicht

Steuerungstasten

→ nächste Folie (auch Enter oder Spacebar).
← vorherige Folie
d schaltet das Zeichnen auf Folien ein/aus
p wechselt zwischen Druck- und Präsentationsansicht
CTRL + vergrößert die Folien
CTRL - verkleinert die Folien
CTRL 0 setzt die Größenänderung zurück

Notation

Typ	Schriftart	Beispiele
Variablen (Skalare)	kursiv	a, b, x, y
Funktionen	aufrecht	$\mathrm{f}, \mathrm{g}(x), \max(x)$
Vektoren	fett, Elemente zeilenweise	$\mathbf{a}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^\top$, $\mathbf{B} = (x, y, z)^\top$
Matrizen	Schreibmaschine	$\mathtt{A}, \mathtt{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
Mengen	kalligrafisch	$\mathcal{A}, B = \{a, b\}, b \in \mathcal{B}$
Zahlenbereiche, Koordinatenräume	doppelt gestrichen	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

Inhalt

Darstellung vorzeichenloser ganzer Zahlen

Je nachdem wie viele Bits zur binären Speicherung einer vorzeichenloser ganzer Zahlen (unsigned integer) zur Verfügung gestellt werden, können verschieden große Zahlen dargestellt werden

Bytes	Bits	Wertebereich	Name des Datentyps (Microsoft Visual C++)
1	8	$[0; 255]$	unsigned char
2	16	$[0; 65535]$	unsigned short
4	32	$[0; 4294967295]$	unsigned int
8	64	$[0; 18446744073709551615]$	unsigned long long

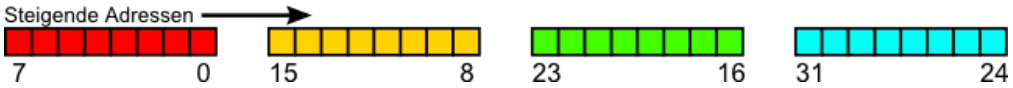
[**Quelle:** Data Type Ranges, Visual Studio 2013]

Big- und Little-Endian-Speicherung

Little-Endian

Das Byte mit der niedrigsten Wertigkeit wird *zuerst* gespeichert

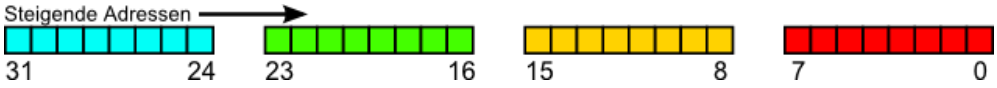
Alle x86-kompatiblen Rechner verwenden diese Ordnung



Big-Endian

Das Byte mit der niedrigsten Wertigkeit wird *zuletzt* gespeichert

MIPS, SPARC, PowerPC, Java Virtual Machine, etc.



Darstellung vorzeichenbehafteter ganzer Zahlen

Sollen positive und negative Zahlen gespeichert werden, so gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Betrags-Vorzeichendarstellung
- Einerkomplement
- Zweierkomplement

Jede Darstellung hat Vor- und Nachteile bezüglich

- der Symmetrie des darstellbaren Wertebereichs
- der Eineindeutigkeit der Darstellung
- der Durchführung von arithmetischen Operationen

Betrags-Vorzeichendarstellung

Das höchstwertige Bit wird für das Vorzeichen verwendet:

0 = Zahl positiv; 1 = Zahl negativ

Die verbleibenden Bits werden für den Betrag verwendet.

Insgesamt kann so ein symmetrischer Wertebereich von $[-(2^{n-1}-1), +(2^{n-1}-1)]$ dargestellt werden

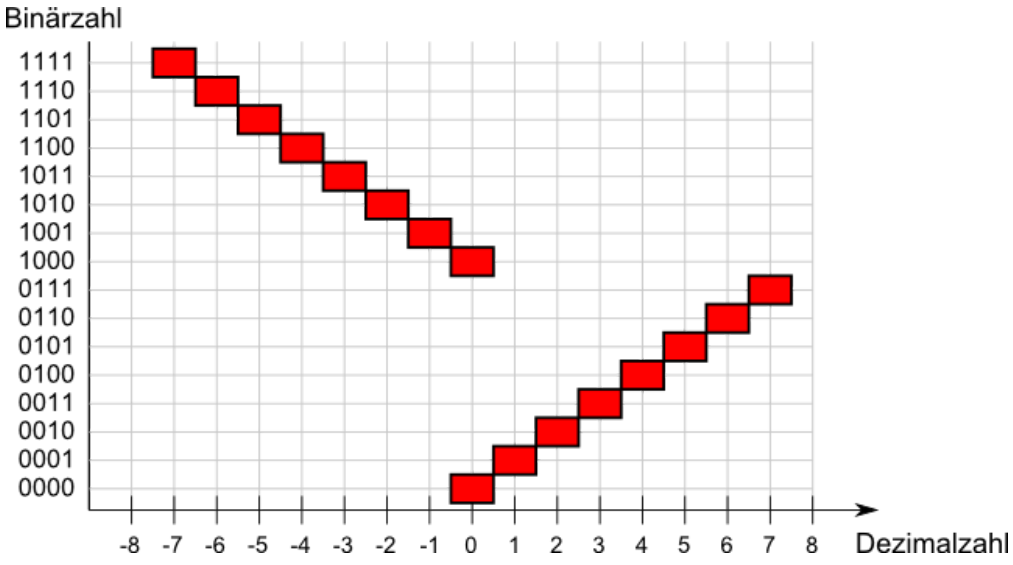
Beispiel für $n = 4$:

Dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binär	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

Dezimal	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
Binär	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Betrags-Vorzeichendarstellung

Die Darstellung ist nicht eineindeutig, da die Null doppelt repräsentiert ist. Dies führt zu Problemen beim Gleichheitstest: $-0 \neq 0$



Betrags-Vorzeichendarstellung

Die Addition/Subtraktion ist umständlich, da das Vorzeichen-Bit gesondert behandelt werden muss, ansonsten:

$$\begin{array}{r} 5 \\ +-6 \\ \hline = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0101 & (5) \\ +1110 & (-6) \\ \hline = 10011 & (-3) \end{array}$$

[**Quelle**: D. W. Hoffmann: *Grundlagen der Technischen Informatik*, 2. Auflage; Hanser 2009]

Einerkomplement

Eine negative Zahl $(-w)$ wird binär durch das bitweise Komplement der entsprechenden positiven Zahl w dargestellt

Beispiel: $(6)_{10} \hat{=} 0110 \rightarrow (-6)_{10} \hat{=} 1001$

Insgesamt kann so ein symmetrischer Wertebereich von $[-(2^{n-1}-1), +(2^{n-1}-1)]$ dargestellt werden

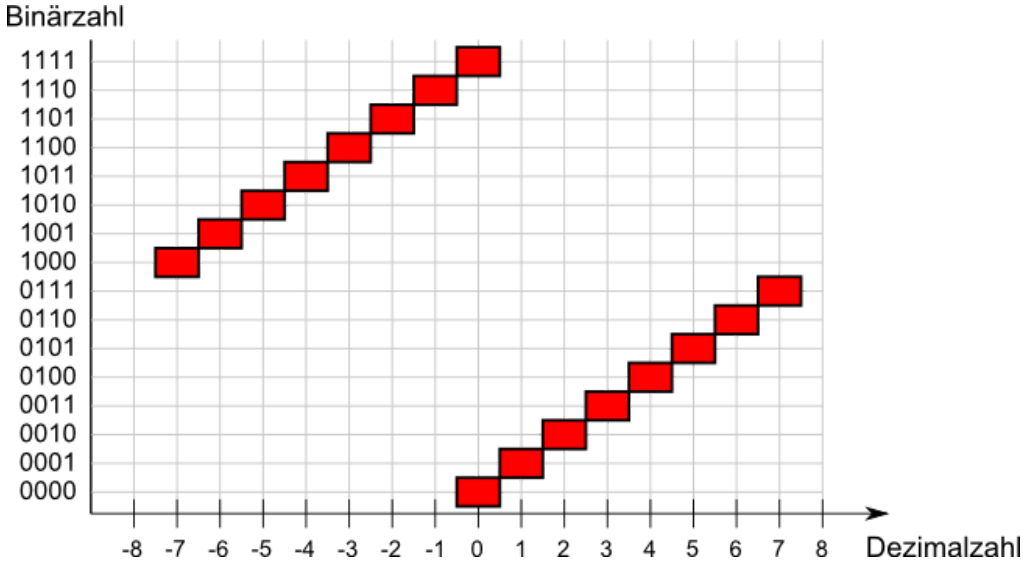
Beispiel für $n = 4$:

Dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binär	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

Dezimal	-0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
Binär	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000

Einerkomplement

Die Darstellung ist nicht eineindeutig, da die Null doppelt repräsentiert ist



Einerkomplement

Die Addition/Subtraktion muss in zwei Schritten erfolgen

1. Normale Binäraddition
2. Zusätzliche Addition eines eventuellen Übertrags (der bei der 2. Addition entstehender Übertrag wird gestrichen)

Beispiel 1:

$$\begin{array}{r} 5 \\ +-6 \\ \hline = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0101 & (5) \\ +1001 & (-6) \\ \hline = 1110 & (-1) \end{array}$$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{r} 5 \\ +-3 \\ \hline = \ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0101 & (5) \\ +1100 & (-3) \\ \hline = 1|0001 & (-14) \\ +1 & (1) \\ \hline = \not{1}|0010 & (2) \end{array}$$

[**Quelle**: D. W. Hoffmann: *Grundlagen der Technischen Informatik*, 2. Auflage; Hanser 2009]

Zweierkomplement

Beim Zweierkomplement werden die negativen Zahlen durch Bestimmung des Einerkomplements und einer zusätzlichen Addition von 1 gebildet

Beispiel:

$$(-6)_{10} \hat{=} \mathrm{not}(0110) + 1 = \ 1001 + 1 = 1010$$

Wertebereich ist unsymmetrisch $\left[-2^{n-1}, +2^{n-1} - 1\right]$

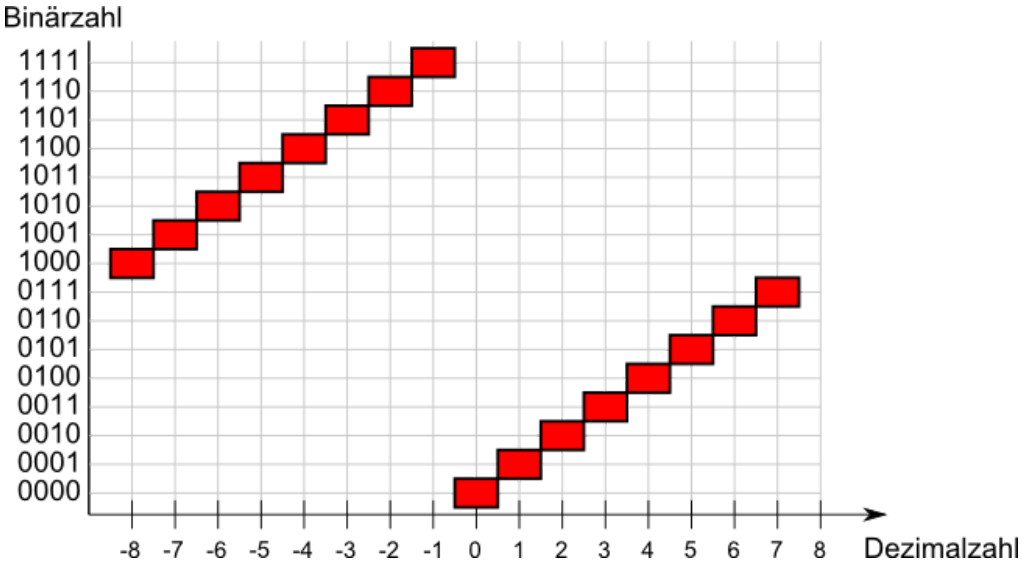
Beispiel für $n = 4$:

Dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7
Binär	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111

Dezimal	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
Binär	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000

Zweierkomplement

Die Darstellung ist eineindeutig



Zweierkomplement

Zur Addition/Subtraktion kann die normale vorzeichenlose Binäraddition verwendet werden

Subtraktion entspricht Negation und anschließender Addtion, z.B.
$(5 - 6) = (5 + (-6))$

Beispiel 1:

$$\begin{array}{r} 5 \\ +-6 \\ \hline = -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0101 & (5) \\ +1010 & (-6) \\ \hline = 1111 & (-1) \end{array}$$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{r} 5 \\ +-3 \\ \hline = \quad 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0101 & (5) \\ +1101 & (-3) \\ \hline = \not{1}|0010 & (2) \end{array}$$

Zweierkomplement

Beispiel 3:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +-3 \\ \hline = \quad 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0100 & (4) \\ +1101 & (-3) \\ \hline = \not{1}|0001 & (1) \end{array}$$

Beispiel 4:

$$\begin{array}{r} -3 \\ +-4 \\ \hline = -7 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 1101 & (-3) \\ +1100 & (-4) \\ \hline = \not{1}|1001 & (-7) \end{array}$$

Es scheint als könnten wir (anders als beim Einerkomplement) den Übertrag beim Zweierkomplement einfach streichen.

Ist diese immer der Fall?

Zweierkomplement

Eigentlich ja, aber Vorsicht:

Beispiel 5:

$$\begin{array}{r} -4 \\ +-5 \\ \hline = -9 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 1100 & (-4) \\ +1011 & (-5) \\ \hline = \not{1}|0111 & (7) \end{array}$$

Beispiel 6:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +5 \\ \hline = 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 0100 & (4) \\ +0101 & (5) \\ \hline = 1001 & (-7) \end{array}$$

Hier kommt es jeweils zum falschen Ergebnis. Der Übertrag kann nur gestrichen werden, wenn es nicht zum Überlauf kommt, d.h. das Ergebnis den Bereich der darstellbaren Zahlen nicht verlässt

Zweierkomplement

Nochmal Beispiel 5, jetzt mit $n = 5$

$$\begin{array}{r} -4 \\ +-5 \\ \hline = -9 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 11100 & (-4) \\ +11011 & (-5) \\ \hline = \not{1}|10111 & (-9) \end{array}$$

Nochmal Beispiel 6, jetzt mit $n = 5$:

$$\begin{array}{r} 4 \\ +5 \\ \hline = 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 00100 & (4) \\ +00101 & (5) \\ \hline = 01001 & (9) \end{array}$$

Bei ausreichender Anzahl von Stellen (kein Überlauf) kann der Übertrag gestrichen werden

Zweierkomplement

Beim Zweierkomplement berechnet sich der Zahlenwert w formal wie folgt als den Ziffern $z_{n-1}, \ldots, z_1, z_0$ einer Binärzahl:

$$w = -z_{n-1} \cdot 2^{n-1} + z_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \cdots + z_0 \cdot 2^0$$

Beispiel:

$$1101 = -1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -3$$

Wann kommt es beim Zweierkomplement zum Überlauf?

Betrachten wir die Addition von w_a und w_b mit:

$$w_a = -a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \ldots 2^{n-2} + \cdots + a_0 \cdot 2^0$$
$$w_b = -b_{n-1} \cdot 2^{n-1} + b_{n-2} \ldots 2^{n-2} + \cdots + b_0 \cdot 2^0$$

Sei c_{n-1} ein eventueller Übertrag, der aus der binären Addition der Stellen a_{n-1} und b_{n-1} entsteht, und c_{n-2} der eventuelle Übertrag bei a_{n-2} und b_{n-2}

Vorzeichen w_a	Vorzeichen w_b	Richtiges Ergebnis, wenn	Überlauf (falsches Ergebnis), wenn
+	+	$c_{n-1} = 0$ und $c_{n-2} = 0$	$c_{n-1} = 0$ und $c_{n-2} = 1$
+	-	$c_{n-1} = c_{n-2}$	nie
-	+	$c_{n-1} = c_{n-2}$	nie
-	-	$c_{n-1} = 1$ und $c_{n-2} = 1$	$c_{n-1} = 1$ und $c_{n-2} = 0$

Bei zwei positiven Zahlen entsteht ein Überlauf, wenn der Übertrag in die letzte Stelle das Vorzeichenbit der Summe verfälscht

Bei zwei negativen Zahlen entsteht ein Überlauf, wenn die Umkehrung des Vorzeichenbits nicht durch einen Übertrag in die letzte Stelle kompensiert wird

Später werden wir lernen, dass ein Überlauf schaltungstechnisch durch ein XOR detektiert werden kann, d.h. Überlauf tritt auf, wenn (c_{n-1} xor c_{n-2}) = 1

Inverse des Zweierkomplements

Die Inverse Operation des Zweierkomplements ist einfach eine erneute Anwendung des Zweierkomplements

Beispiel:

$$(6)_{10} \mathrel{\hat{=}} 0110$$

$$(-6)_{10} \mathrel{\hat{=}} \mathrm{not}(0110) + 1 = 1001 + 1 = 1010$$

$$(6)_{10} \mathrel{\hat{=}} \mathrm{not}(1010) + 1 = (0101) + 1 = 0110$$

D.h. jede Anwendung des Zweierkomplements negiert die repräsentierte Dezimalzahl

Darstellung vorzeichenbehafteter ganzer Zahlen

Zusammenfassung

Verfahren	Wertbereich	Eineindeutig	Operationen
Betrags-Vorzeichendarstellung	symmetrisch	nein	Sonderbehandlung
Einerkomplement	symmetrisch	nein	2-Stufen Addition
Zweierkomplement	unsymmetrisch	ja	einfach

Das Zweierkomplement ist die in der Praxis vorherschende Art zur Darstellung binärer vorzeichenbehafteter ganzer Zahlen (Unsymmetrie wird in Kauf genommen)

Bytes	Bits	Wertebereich	Name des Datentyps (Microsoft Visual C++)
1	8	$[-128; 127]$	char
2	16	$[-32768; 32767]$	short
4	32	$[-2147483648; 2147483647]$	int
8	64	$[-9223372036854775808; 9223372036854775807]$	long long

[**Quelle:** Data Type Ranges, Visual Studio 2013]

Darstellung vorzeichenbehafteter rationaler Zahlen

Zur binären Repräsentation vorzeichenbehafteter rationaler Zahlen werden wir zwei Verfahren betrachen:

- Festkommadarstellung
- Gleitkommadarstellung

Festkommadarstellung

Die *Festkommadarstellung* ist ähnlich der Betrags-Vorzeichendarstellung bei ganzen Zahlen

Das höchstwertige Bit s wird für das Vorzeichen verwendet

Die verbleibenden $n-1$ Bits werden als *Mantisse* bezeichnet und werden zur Speicherung der Vor- und Nachkommastellen verwendet

Beispiel für $n = 16$:

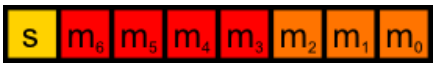
In der Mantisse werden die ersten $k \leq (n-1)$ Stellen als Vorkommastellen festgelegt. Damit gibt es $j = (n-1) - k$ Nachkommastellen

Der Zahlenwert w berechnet sich dann gemäß:

$$w = (-1)^s \left(\left(\sum_{i=0}^{k-1} m_{j+i} \cdot 2^i \right) + \left(\sum_{i=-j}^{-1} m_{j+i} \cdot 2^i \right) \right) = (-1)^s \left(\sum_{i=-j}^{k-1} m_{j+i} \cdot 2^i \right)$$

Festkommadarstellung

Beispiel: Umrechnung von 11011001 für $n = 8$, $k = 4$ und $j = 3$:



$$
\begin{aligned}
w &= (-1)^s \left(\sum_{i=-j}^{k-1} m_{j+i} \cdot 2^i \right) \\
&= (-1)^1 \left(1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \right) \\
&= (-1)(0,125 + 1 + 2 + 8) = -11,125
\end{aligned}
$$

Festkommadarstellung ist ein äquidistantes Zahlenformat, da der nummerische Abstand zwischen zwei darstellenbaren Zahlen konstant ist

Ist der Wertbereich der verwendeten Zahlen sehr ähnlich und vorher bekannt, kann mit einer Festkommadarstellung somit eine bestimmte Genauigkeit der Darstellung garantiert werden

Die Festkommadarstellung kommt daher bei spezieller Hardware, wie z.B. digitalen Signalprozessoren (DSPs) zum Einsatz

Gleitkommadarstellung

In der Praxis müssen oft Zahlen mit verschiedenen Größenordnungen verarbeitet werden

Als Beispiel können physikalische Naturkonstanten betrachtet werden:

- Lichtgeschwindigkeit: $2,99792458 \cdot 10^{8}$ m/s
- Elektronenmasse: $9,10938291 \cdot 10^{-31}$ kg
- Elementarladung: $1,60217656 \cdot 10^{-19}$ C

Bei der wissenschaftlichen Potenzschreibweise wird das Komma durch den Exponenten verschoben:

- Verschiebung nach rechts für kleine Zahlen: $0,00041 = 4,1 \cdot 10^{-4}$
- Verschiebung nach links für große Zahlen: $1200000,00041 \approx 1,2 \cdot 10^{6}$

Die binäre Gleitkommadarstellung (engl. "floating point") kopiert die wissenschaftlichen Potenzschreibweise und erweitert die Festkommadarstellung um einen binär-kodierten Exponenten

Gleitkommadarstellung

Beispiel: 1 Bit Vorzeichen, 5 Bit Exponent, 10 Bit Mantisse

Die 5 Bits des Exponenten können $2^5 = 32$ verschiedene Zahlen darstellen

Um negative Exponenten e darzustellen, werden statt dem Exponenten dessen Charakteristik $c \geq 0$ in den 5 Bits gespeichert:

Die Umrechnung zwischen Charakteristik und Exponenten erfolgt durch Substraktion einer Konstanten, z.B. $e = c - 15$

Damit kann der Exponent Werte aus dem Intervall $[-15, 16]$ annehmen

Gleitkommadarstellung

Die Gleitkommadarstellung ist zunächst nicht eindeutig

$$\begin{aligned} 0,00111011 &= 000001,11011 \cdot 2^{-3} \\ &= 00000,111011 \cdot 2^{-2} \\ &= 0000,0111011 \cdot 2^{-1} \\ &= 000,00111011 \cdot 2^{0} \\ &= 00,000111011 \cdot 2^{1} \\ &= 0,0000111011 \cdot 2^{2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Bei der *Vorkomma-Normalisierung* wird der Exponent so gewählt, dass die erste Vorkommastelle ungleich 0 ist, hier also $000001,11011 \cdot 2^{-3}$

Bei der *Nachkomma-Normalisierung* wird der Exponent so gewählt, dass die erste Nachkommastelle ungleich 0 ist, hier also $00000,111011 \cdot 2^{-2}$

Bei einer normalisierten Darstellung ist bekannt, dass das erste relevante Bit immer eine 1 ist. Dieses implizite Bit kann daher in einer sogenannten *gepackten* Darstellung weggelassen werden.

Gleitkommadarstellung

Bespiel 1: 1001011010000000 (Nachkomma-Normalisierung, ungepackt)

$$s = 1$$
$$e = c - (15)_{10} = (00101)_2 - (15)_{10} = (5)_{10} - (15)_{10} = -10$$
$$m = 0,1010000000 = 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3} = 0,5 + 0,125 = 0,625$$

Ergebnis: $-0,625 \cdot 2^{-10}$

Bespiel 2: 1001011010000000 (Vorkomma-Normalisierung, ungepackt)

$$s = 1$$
$$e = c - (15)_{10} = (00101)_2 - (15)_{10} = (5)_{10} - (15)_{10} = -10$$
$$m = 1,010000000 = 1 \cdot 2^{0} + 1 \cdot 2^{-2} = 1 + 0,25 = 1,25$$

Ergebnis: $-1,25 \cdot 2^{-10}$

Gleitkommadarstellung

Bespiel 3: 0101011010000000 (Nachkomma-Normalisierung, gepackt)

$$s = 0$$
$$e = c - (15)_{10} = (10101)_2 - (15)_{10} = (21)_{10} - (15)_{10} = (6)_{10}$$
$$m = 0,11010000000 =$$
$$= 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-4} = 0,5 + 0,25 + 0,0625 = 0,8125$$

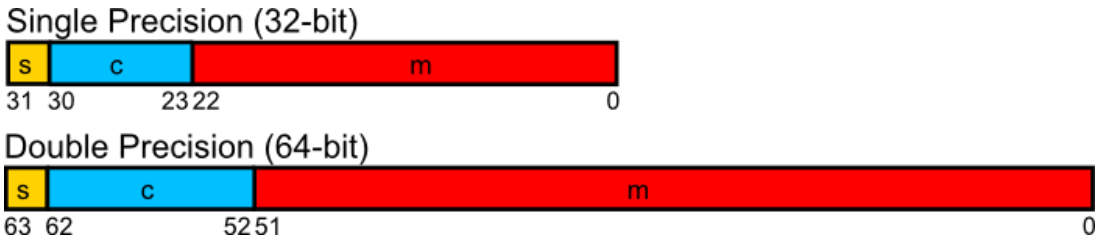
Ergebnis: $0,8125 \cdot 2^6$

Bespiel 4: 0101011010000000 (Vorkomma-Normalisierung, gepackt)

$$s = 0$$
$$e = c - (15)_{10} = (10101)_2 - (15)_{10} = (21)_{10} - (15)_{10} = (6)_{10}$$
$$m = 1,1010000000 =$$
$$= 1 \cdot 2^{0} + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3} = 1 + 0,5 + 0,125 = 1,625$$

Ergebnis: $1,625 \cdot 2^6$

Gleitkommadarstellung: IEEE 754 Formate



Charakteristik c	Mantisse m	32-/64-bit Precision
$000\ldots0000$	beliebig	32: $(-1)^s 0, m \cdot 2^{-126}$
		64: $(-1)^s 0, m \cdot 2^{-1022}$
$111\ldots1111$	$= 0$	$(-1)^s \cdot \infty$
$111\ldots1111$	$\neq 0$	Not a Number (NaN)
alle anderen Bitfolgen (default)	beliebig	32: $(-1)^s 1, m \cdot 2^{c-127}$
		64: $(-1)^s 1, m \cdot 2^{c-1023}$

[**Quelle**: D. W. Hoffmann: *Grundlagen der Technischen Informatik*, 2. Auflage, Hanser 2009]

Gleitkommadarstellung: IEEE 754 Formate

Die IEEE 754 Formate (aus dem Jahre 1985) werde heutzutage von allen gängigen Mikroprozessoren unterstützt

Normalerweise gepackte Darstellung mit Vorkomma-Normalisierung

Es gibt einige reservierte Bitmuster für die Charakteristik mit Sonderbedeutung:

Null

- Charakteristik $c = 000\ldots0000$ schaltet in eine ungepackte Darstellung um
- Darstellung der Null durch $m = 0$

Unendlich

- Charakteristik $c = 1111\ldots111$ und $m = 0$
- Vorzeichen s entscheidet zwischen $+\infty$ und $-\infty$
- Dies entsteht z.B. bei Division durch 0

Not a Number (NaN)

- Charakteristik $c = 1111\ldots111$ und $m \neq 0$
- Dies entsteht bei algebraischen Operationen mit undefiniertem oder nicht repräsentierbarem Ergebnis, wie z.B. $0/0$, $0 \cdot \infty$, usw.

Gleitkommadarstellung: IEEE 754 Formate

Für die Darstellung von Gleitpunktzahlen in einem (Quell-)Text wird typischerweise die Notation "52.21e-2" oder "52.21E-2" verwendet. Die Zahl hinter dem "e" gibt den Exponenten der Zehnerpotenz an.

Diese Notation ist auch in vielen Programmiersprachen üblich

Anstatt des deutschen Kommas wird im Englischen (und daher in fast allen Programmiersprachen) der Dezimalpunkt verwendet

Größenordnungen:

Bytes	Bits	Wertebereich	Name des Datentyps
4	32	± 1.4e-45 ... 3.403e38	float
8	64	± 4.94e-324 ... 1.798e308	double

Gibt es Fragen?

Anregungen oder Verbesserungsvorschläge können auch gerne per E-mail an mich gesendet werden: Kontakt

Weitere Vorlesungsfolien

Folien auf Englisch (Slides in English)