FB12 — AG IT-Sicherheit
Prof. Dr. Elmar Tischhauser

Philipps Universität Marburg

Theoretische Informatik – WS 2025/26

Übung 01

Hausübung: Aufgaben 2c und 4.
Abgabe der bearbeiteten Aufgaben via Ilias bis zum **22.10. 23:59 Uhr**

Ein sicherer Umgang mit mathematischem Basiswissen wie logischen Ausdrücken, elementaren Beweistechniken und Mengenlehre ist für die in der theoretischen Informatik notwendige präzise Arbeits- und Denkweise unerlässlich. Wir üben daher diesen Umgang an einigen Beispielen zur Wiederholung.

Aufgabe 1 (Logik)

a) Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie kurz. $\mathbb{Z}$ bezeichnet wie üblich die Menge der ganzen Zahlen, also $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

   1) $\forall x \in \mathbb{Z}.\ \exists y \in \mathbb{Z}.\ xy = 1.$
   2) $\exists x \in \emptyset.\ 0 = 0$
   3) $\forall x \in \emptyset.\ 0 = 1$

b) Sei S die Menge aller Studierenden in Marburg, V die Menge aller Studierenden, welche diese Vorlesung besuchen und $\mathcal{G}$ die Menge aller Übungsgruppen dieser Vorlesung. Jedes $G \in \mathcal{G}$ repräsentiert die Menge der Studierenden in der jeweiligen Übungsgruppe. Formulieren Sie die folgenden Aussagen verbal (in natürlicher Sprache).

   1) $\exists G \in \mathcal{G}.\ \forall s \in V.\ s \in G$
   2) $\forall s \in S.\ (s \in V \Rightarrow \exists G \in \mathcal{G}.\ s \in G)$
   3) $\forall s \in S.\ \exists G \in \mathcal{G}.\ s \in G$

Aufgabe 2 (Mengen)

Im Folgenden sei M eine Menge und A, B, C beliebige Teilmengen von M.

a) Beweisen Sie:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

b) Sei nun $A \neq \emptyset$ und es gelte $A \cup B = A \cup C$. Kann man daraus schließen, dass $B = C$? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

c) (**Hausübung, 3 Punkte**) Beweisen Sie: Falls $B \subseteq C$, dann gilt $(B \setminus A) = (C \setminus A) \cap B$.

Aufgabe 3 (Eigenschaften der Potenzmenge)
Wir betrachten die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer beliebigen Menge M. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils kurz.

a) $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$

b) $M \in \mathcal{P}(M)$

c) $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\emptyset)$

d) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(M)$

e) $M \subseteq \mathcal{P}(M)$

f) $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

Aufgabe 4 (Unendlichkeit von $\boldsymbol{\Sigma}^*$)
Sei Σ ein nichtleeres Alphabet. Konstruieren Sie eine Bijektion $\phi : \Sigma^* \to N$ (wobei $N = \mathbb{N}$ oder $N = \mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$) und geben Sie auch die inverse Funktion explizit an.

Aufgabe 5 (Rekursive Definitionen, Hausübung, 2 Punkte)
In der Vorlesung haben wir die Konkatenation $u \circ v$ zweier Worte $u, v \in \Sigma^*$ rekursiv definiert (vgl. Kapitel 2, Folie 9).

Sei nun konkret $\Sigma = \{A, B\}$. Verwenden Sie die Definition, um die Konkatenation der zwei Worte $u = BAB$ und $v = AB$ rekursiv zu bestimmen. Geben Sie alle Teilschritte explizit an, bis das Ergebnis erreicht ist.