Algebra lineal

Sistemas de ecuaciones lineales

Es una igualdad que relaciona los terminos independientes con variables con exponente siempre igual a 1

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\mathbb{R}^2 = \begin{cases} 3x + 2y = -5 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

Clases de soluciones

- **Única solución:** Cuando la ecuación es escalable.
- **Infinitas soluciones:** Cuando hay más incognitas que ecuaciones o cuando hay más ecuaciones que incognitas.
- **Solución inconsistente:** Cuando los términos lineales son mutiplos escalares de alguna de las ecuaciones pero sus terminos independientes no lo son.

Clases de matrices

Matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz fila

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_n \end{pmatrix}$$

Matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz columna

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{pmatrix}$$

Matriz nula

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algebra de matrices

Suma de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Diferencia de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 * -1 + 2 * 7 & 1 * 5 + 2 * 2 \\ 3 * -1 + 4 * 7 & 3 * 5 + 4 * 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 9 \\ 25 & 23 \end{pmatrix}$$

Tensores

$$e_{ij} = i * j \,;\, 1 \leq i\,,j \;\leq 3$$

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Traza

Escalar obtenido de la suma de los elementos de la diagonal principal.

Siempre son matrices cuadradas

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & i & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = 1 + i + 2 = 3 + i$$

Traspuesta

Matriz resultante al intercambiar filas por columnas.

Para matrices cuadradas y rectangulares.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrices de Dirac

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\gamma^\mu * \gamma^u + \gamma^u * \gamma^\mu = 2g^{\mu u}\mathbb{I}_4$ (Clifford)

$\gamma^\mu * \gamma^u - \gamma^u * \gamma^\mu = 2\gamma^{\mu u} - 2g^{\mu u}$ (Lie)

Gamma de matrices de Dirac

$$g^{\mu u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

Relaciones Gamma-Matrices

1. $\gamma^\mu * \gamma^u + \gamma^u * \gamma^\mu = 2g^{\mu u}\mathbb{I}_4$
2. $\gamma^\mu * \gamma^u - \gamma^u * \gamma^\mu = 2\gamma^{\mu u} - 2g^{\mu u}$
3. $\gamma^5 = i * \gamma^0 * \gamma^1 * \gamma^2 * \gamma^3$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices triangulares

Triangulares inferiores

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Al trasponer una matriz triangular inferior se genera una matriz triangular superior.

Triangulares superiores

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Al trasponer una matriz triangular superior se genera una matriz triangular inferior.

La matriz es simétrica si, y solo si al trasponerla es identica a la original.

La matriz es antisimétrica si, y solo si al trasponerla da el opuesto.

Producto Kronecker o tensionar

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am & bm \\ an & bn \\ ap & bp \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Las matrices de Pauli se definen de la siguiente forma:

$$\sigma x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Facultativa

Método de Gauss-Jordan

Consiste en determinar la solución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de algunas operaciones elementales sobre las filas en su arreglo matricial.

- Intercambio de filas.
- Multiplica por un escalar distinto de cero.
- Sumar y restar entre filas.
  - Si una fila da 0 en todos sus campos el ejercicio tiene infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} x + 2y - 3z - t = -1 \\ 2x + 3y + t = 0 \\ y + z + 2t = 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

El objetivo del método de Gauss es convertir el sistema de ecuaciones inicial en un sistema escalonado, es decir, un sistema en el cual cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior.

Determinante de una matriz

Se aplica unicamente para matrices cuadradas.

$$|\mathbb{X}|: \det(\mathbb{X}) \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a * d) - (c * b)$$

Si una matriz 2x2 tiene filas repetidas el determinante será 0.

El determinante de una matriz triangular superior e inferior es el producto de los elementos de la diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = a * c * f \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a * d * f$$

Teorema fundamental del algebra: Cuando se tiene una ecuación polinómica de grado menor o igual a n, a lo sumo tiene n raices reales.

Matriz Inversa

IMPORTANTE

$$\mathbb{R}: a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad \mathbb{A}: \mathbb{A}^{-1} \neq \frac{\mathbb{I}}{\mathbb{A}}$$

$$f(x): f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

Para que una matriz sea invertible su determinante debe ser ≠ 0

$$\mathbb{B}\mathbb{X} + \mathbb{A} = \mathbb{O} \,;\, \mathbb{B}\mathbb{X} = \mathbb{O} - \mathbb{A}$$

$$\mathbb{B}\mathbb{X} = -\mathbb{A}$$

Se multiplica de izquierda a derecha por $\mathbb{B}^{-1}$ ($Matriz\ inversa$)

$$\underbrace{\mathbb{B}^{-1} * \mathbb{B}}_{\mathbb{I}}\mathbb{X} = -\mathbb{A} * \mathbb{B}^{-1}$$

$$\mathbb{X} = \mathbb{B}^{-1} * (-\mathbb{A})$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; \mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbb{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Matriz adjunta

$$adj(\mathbb{B}) = (-1)^{i+j} \quad \mathbb{b}_{ij} \quad Adjunta$$

$$\mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{|\mathbb{B}|}\left(adj\left(\mathbb{B}\right)^{t}\right) \ Inversa$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La adjunta tambien se define como la matriz formada de los menores y se denota por mij.

Primero se determina la adjunta

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Se construye la adjunta

$$adj(\mathbb{B}) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Por otro lado se calcula el determinante de la matriz.

Regla de Sarrus

$$\left(\begin{array}{ccc:cc} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$(1)(3)(1) + (-2)(4)(-1) + (0)(0)(1) - (-2)(0)(1) - (1)(4)(1) - (0)(3)(-1)$$

$$3 + 8 + 0 - 0 - 4 - 0 = 7$$

$$\therefore |\mathbb{B}| = 7$$

Se traspone la adjunta

$$\left(adj(\mathbb{B})\right)^{t} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$\mathbb{B}^{-1} = \frac{1}{7} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -8 \\ -4 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 & 2/7 & -8/7 \\ -4/7 & 1/7 & -4/7 \\ 3/7 & 1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

Regla de Crammer

$$\begin{cases} ax & by & cz & j \\ dx & ey & fz & k \\ gx & hy & pz & l \end{cases}$$

$$x = \frac{\det\begin{bmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & p \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & p \end{bmatrix}}$$

$$y = \frac{\det\begin{bmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & p \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & p \end{bmatrix}}$$

$$z = \frac{\det\begin{bmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & p \end{bmatrix}}$$

Vectores $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^2 = (x^1, x^2); \mathbb{R}^3 = (x^1, x^2, x^3);$$
$$\mathbb{R}^n = (x^1, x^2, x^3, x^4 \dots x^n); \dim \mathbb{R}^n = n$$

- Un vector se compone de sentido, magnitud y dirección.
- Los vectores son iguales si y solo si tienen la misma magnitud y dirección.
- La distancia **siempre** es positiva.

Cálculo de la magnitud de un vector

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{(x^1, x^2)}_{\vec{u}}$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{(x^1, x^2, x^3)}_{\vec{v}}$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$\mathbb{X} = (1,2) \in \mathbb{R}^2; ||\mathbb{X}|| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Cálculo de la dirección de un vector

$$\mathbb{R}^n = \hat{w} = \frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \frac{1}{||\vec{w}||} * \vec{w}$$

$$= (x^1, x^2, x^3 \dots, x^n) * \frac{1}{||\vec{w}||}$$

$$= \left(\frac{x^1}{||\vec{w}||}, \frac{x^2}{||\vec{w}||} \cdots \frac{x^n}{||\vec{w}||}\right)$$

$$\overset{\text{Unitario}}{\widehat{\mathbb{X}}} = \frac{1}{5} * (1, -2) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\vec{p} = (3,5) = ||\vec{p}|| = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{34}} * (3, -5) = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$$

Suma de vectores

$$\vec{x} = (5,7) \ ; \ \vec{y} = (2,3)$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (5 + 2, 7 + 3) = (7,10)$$

Resta de vectores

$$\vec{x} = (5,7) \ ; \ \vec{y} = (2,3)$$

$$\vec{x} - \vec{y} = (5 - 2, 7 - 3) = (3,4)$$

$$\vec{u} = (1,2); \vec{v} = (0, -2); \ \alpha = 3$$

$$||3\vec{u} - 2\vec{v}|| = ||\alpha\vec{u} - 2\vec{v}||$$

$$3\vec{u} = 3(1,2) = (3,6) \ ; \ 2\vec{v} = 2(0, -2) = (0, -4)$$

$$(3,6) - (0, -4) = (3,10)$$

$$||3\vec{u} - 2\vec{v}|| = ||(3,10)|| = \sqrt{(3)^2 + (10)^2} = \sqrt{109}$$

Producto cruz

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$||u \times v|| = ||u|| \, ||v|| \, \sin\theta$$

Producto punto de vectores

$$\vec{u} * \vec{v} = (u_1, u_2) * (v_1, v_2) = (u_1 v_1 + u_2 v_2)$$

$$\vec{s} * \vec{n} = (3, -4, 2) * (2, 0, -3) = \big(6 + 0 + (-6)\big) = 0$$

$$\therefore \vec{s} \perp \vec{n} \ sii \ \vec{s} * \vec{n} = 0$$

- El producto cruz genera unicamente vectores en R3.
- 2 Vectores son perpendiculares solo si un angulo es igual a 90˚
- Si 2 angulos son 180˚ el producto cruz vale 0.
- El **producto punto** es **conmutativo.**
- El producto tensorial y el producto cruz no es conmutativo.

Vectores canónicos

$$\mathbb{R}^2 = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\} \ ; \hat{e}_1 = (1,0), \hat{e}_2 = (0,1)$$

$$\mathbb{R}^3 = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\} \ ; \hat{e}_1 = (1,0,0), \hat{e}_2 = (0,1,0), \hat{e}_3 = (0,0,1)$$

$$(1, -2) \equiv 1 * \hat{e}_1 - 2\hat{e}_2 = 1(1,0) - 2(0,1) = (1,0) - (0,2) = (1, -2)$$

$$\vec{u} * \vec{v} = \vec{v} * \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u} \quad ; \quad \vec{u} \otimes \vec{v} \neq \vec{v} \otimes \vec{u}$$

Producto triple escalar o mixto

$$\vec{u} * (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} = (2,3,0)\ ; \vec{v} = (1,-1,0)\ ; \vec{w} = (1,1,1)$$

$$\vec{u} * (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 3 + 0 = -5$$

- El triple producto escalar de los 3 vectores de la base canónica dara 1.
- El triple producto escalar no es conmutativo.
- Nunca se puede operar el producto escalar entre el producto punto y el producto cruz.

Combinación lineal

- Si un vector no se puede expresar como una combinación lineal de otros vectores, entonces se dice que es linealmente independiente **LI.** En caso contrario será linealmente dependiente **LD.**
- Una forma de conocer si un vector es linealmente independiente, se calcula el determinante: Si det ≠ 0 pertenece a **LI.** En caso contrario si el det = 0 pertenece a **LD.**

$$(1,2) = (2,-4) + (-1,6)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 \ \rightarrow Li$$

$$(-1,0,3); (0,2,-2); (0,0,7)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 14 \rightarrow Li$$

Espacios con polinomios

$$\mathrm{P}_n = \left\{ \begin{matrix} x^2 - 1, \\ -3x^2 + 2x - 4, \\ 3x - 9 \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{matrix} x^2 \\ x \\ T.i \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & -9 \end{vmatrix} \neq 0 \therefore Li$$

$$\mathrm{P}_n = \{x, -x^2, 4x^2 - x\}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \therefore Ld$$

Para un espacio de polinomios al momento de calcular el determinante, se debe de verificar 3 cosas:

1. No debe haber una fila de "0"
2. No debe haber una columna de "0"
3. Ninguna fila debe ser múltiplo escalar de ninguna otra.

Si ocurre alguno de los casos será linealmente dependiente.

$$\mathrm{P}_n = \left\{ \begin{matrix} a_1x^n + b_1x^n + \cdots + c_1; \\ a_2x^n + b_2x^n + \cdots + c_2; \\ a_nx^n + b_nx^n + \cdots + c_n \end{matrix} \right\}$$

$$\begin{matrix} x^2 \\ x \\ T.i \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \end{vmatrix}$$

Base

Se define como base de un espacio vectorial V. Al conjunto de vectores que satisface:

- Sea linealmente independiente.
- Que genere el espacio.

$$\mathbb{R}^3 = \{x^2 + x + 1, 2x + 3, x^2\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 5 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} f_1 - f2\,; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} f_1 + f_3; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} f_3 + f_2; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} 3f_2 - f_3;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{5} f_3\,; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -2f_3 + f_2; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} -f_3 + f_1; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} \equiv 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x^2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Producto exterior

$$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n; \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{u}$$

$$\vec{u} = (1,2) \qquad \vec{v} = (1,2,-3)$$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} = (1,2,-3,2,4,-6)$$
$$\vec{v} \otimes \vec{u} = (1,2,2,4,-3,-6)$$

$$\vec{u} \otimes \vec{v} - \vec{v} \otimes \vec{u} = (1,2,-3,2,4,-6) - (1,2,2,4,-3,-6) = (0,0,-5,-2,7,0)$$

Producto tensorial para vectores complejos

$$\otimes: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$| \ldots > \otimes | \ldots > \to | \ldots >$$

$$|\psi_1 > \otimes |\psi_2 > \otimes |\psi_3 > = |\psi_1, \psi_2 \psi_3 >$$

$$< \psi_1 | \otimes < \psi_2 | \otimes < \psi_3 | = < \psi_1, \psi_2 \psi_3 |$$

$$|\psi_1 > = 2|1,1 > + i|1,0 >$$
$$|\phi_1 > = 3|2,-1 > -4i|3,-2 >$$

$$|\psi_1 > \otimes |\phi_1 > = 2|1,1 > + i|1,0 > \otimes 3|2,-1 > -4i|3,-2 >$$

$$= 6|1,1 > \otimes |2,-1 > -8i|1,1 > \otimes |3,-2 > +3i|1,0 > \otimes |2,-1 > +4|1,0 > \otimes |3,-2 >$$

$$= 6|1,1,2,-1 > -8i|1,1,3,-2 > +3i|1,0,2,-1 > +4|1,0,3,-2 >$$

Espacios vectoriales

Axiomas

Un espacio vectorial es un conjunto no vacío V de objetos, llamados vectores, en el que se han definido dos operaciones: la suma y el producto por un escalar sujetas a los diez axiomas

1. $\vec{u} \oplus \vec{v} \in \mathcal{V} \Rightarrow f(x) + g(x)$
2. $\alpha \vec{u} \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha f(x)$
3. $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u} \Rightarrow f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$
4. $\vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} \Rightarrow f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = \big(f(x) + g(x)\big) + h(x)$
5. $\vec{u} \oplus 0 = \vec{u} \Rightarrow f(x) + 0(x) = f(x)$
6. $\vec{u} \oplus (-\vec{u}) = 0 \Rightarrow f(x) + \big(-f(x)\big) = 0(x)$
7. $\alpha(\vec{u} \oplus \vec{v}) = \alpha \vec{u} \oplus \alpha \vec{v} \Rightarrow \alpha\big(f(x) + g(x)\big) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$
8. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \Rightarrow (\alpha + \beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x)$
9. $\alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u} \Rightarrow \alpha\big(\beta f(x)\big) = (\alpha\beta) f(x)$
10. $1\vec{u} = \vec{u} \Rightarrow 1 f(x) = f(x)$

Subespacios vectoriales

Sea el subconjunto contenido en el espacio vectorial $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$. El conjunto $\mathbb{U}$ es un subespacio vectorial si cumplen 3 condiciones.

1. *Si $\vec{u}, \vec{v}$ esta en $\mathbb{U}$, entonces $\vec{u} \oplus \vec{v}$ tambien está en $\mathbb{U}$*
2. *Si $\vec{u}$ esta en $\mathbb{U}$ y α es un escalar, entonces $\alpha \vec{u}$ está en $\mathbb{U}$*
3. $0\mathbb{V} \in \mathbb{U}$

Son espacios vectoriales si:

1. *La recta de ecuación es* $x = 0$
2. *Todos los planos de la forma* $ax + by + cz = 0$
3. *Todos los polinomios de grado menor o igual a 2 que cumplen la forma* $p(0) = 0$
4. *El conjunto de todas las matrices simétricas* $e_{nm} = (e_{nm})^t$

***No** son espacios vectoriales si:*

1. *Los planos que **no** pasan **por el origen***
2. *El conjunto de **las funciones trigonométricas***

Transformaciones lineales

- Es una función entre dos espacios vectoriales F: U -> V y debe cumplir las siguientes condiciones.

1. $f(u+v) = f(u) + f(v);\ \forall\ u, v \in \mathbb{V}$
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u); \forall\ v \in \mathbb{V}; \mathbb{V}\alpha \in \mathbb{R}$

La suma y el escalar debe estar definida

- Los casos en los cuales una transformación lineal no es transformación lineal si:
  - Hay términos independientes
  - Términos cruzados
- El hecho de que una transformación lineal no sea Endomorfismo no significa que la transformación lineal no sea transformación lineal.

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; f\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2y_1 \\ -x_1 + y_1 \end{bmatrix}$$

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$f\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2y_1 \\ -x_1 + y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + 2y_2 \\ -x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

$$f\begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + 2\alpha y_1 \\ -\alpha x_1 + \alpha y_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 + 2y_1 \\ -x_1 + y_1 \end{bmatrix}$$

Núcleo o Kernel

Es el conjunto de vectores cuya imagen es el $0\mathbb{V}$ *y se denota* $v(F)$ *y se define como:*

$$v(F) := \{u \in \mathbb{U} |\ F(u) = 0\mathbb{V}\}$$

El kernel de una transformación lineal es un subespacio de $\mathbb{U}$

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 0 \\ 4x - 2y \end{bmatrix} \qquad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v(F) = \left\{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 2x - y = 0 \\ 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{bmatrix}; \begin{matrix} 2x = y \\ x = y/2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y/2 \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La imagen

La imagen de F al conjunto de vectores de $\mathbb{V}$ *que son imagen de algún vector y se denota* $Im(F)$.

$$\begin{bmatrix} 2x - y \\ 0 \\ 4x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 0x + 0y \\ 4x - 2y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x \\ 0x \\ 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y \\ 0y \\ -2y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$Im(F) = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$$

Si es Li se toma 1 de los vectores
Si es Ld se toman los dos vectores