

# Teorías de gravedad modificada: implicaciones teóricas y pruebas observacionales. Ajuste de parámetros cosmológicos en base a $\Lambda$ CDM sin contribuciones oscuras usando el código *SimpleMC* con el algoritmo Markov Chain Monte Carlo

David R. Márquez,<sup>1\*</sup> Investigadora anfitriona: Tula Bernal,<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Física, Universidad Veracruzana, Circuito Gonzalo Aguirre Beltrán S/N, Zona Universitaria, Xalapa, Veracruz 91000, México

<sup>2</sup>Universidad Autónoma Chapingo, km. 38.5 Carretera México-Texcoco, Texcoco 56230, Estado de México, México

Xalapa Enríquez, Veracruz a 20 de agosto de 2020

## RESUMEN

Las teorías de gravedad modificada como alternativa al modelo de  $\Lambda$  Cold Dark Matter ( $\Lambda$ CDM) sin considerar materia ni energía oscuras han podido explicar algunos problemas cosmológicos, desde la expansión acelerada del universo hasta la falta de masa en galaxias, de aquí que hoy en día esta clase de teorías resulta igual de viable que  $\Lambda$ CDM. En este reporte se hace una breve revisión a la idea detrás de las teorías de gravedad modificada, comenzando con Modified Newtonian Dynamics (MOND) una teoría de gravedad modificada no relativista y una extensión a este modelo. Se ajusta la curva de rotación de la galaxia NGC1003 para obtener la aceleración de MOND  $a_0$  y un parámetro de la teoría de gravedad extendida. Posteriormente se estudian las teorías relativistas  $f(R)$  y  $f(R, \mathcal{L}_{\text{matt}})$  en la aproximación métrica, con  $R$  el escalar de Ricci y  $\mathcal{L}_{\text{matt}}$  el Lagrangiano de materia, haciendo dos propuestas de modelos a gravedad modificada: un modelo con acoplamiento débil de curvatura-materia y otro fuerte, ambos en un universo plano y dominado por polvo. Estas dos propuestas se ajustan en base a  $\Lambda$ CDM (sin contribuciones oscuras) para estimar los valores actuales de los parámetros cosmológicos de: densidad de materia  $\Omega_m$ , la constante de Hubble normalizada  $h$ , la densidad física de bariones  $\Omega_b h^2$ , los parámetros de desaceleración  $q_0$  y el jerk  $j_0$ , y un parámetro de densidad efectiva  $\Omega_0$ , usando el código SimpleMC con el algoritmo Markov Chain Monte Carlo (MCMC). Los valores numéricos obtenidos para los parámetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$  y  $h$  de  $\Lambda$ CDM en SimpleMC, arrojan que los modelos débil y fuerte, son modelos viables para la descripción de un universo sin componentes oscuras.

**Key words:** Gravedad modificada; MOND ; Parámetros cosmológicos: SimpleMC; MCMC

## 1 OBJETIVOS

- Revisar el modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM.
- Revisión a las teorías de gravedad modificada como alternativas al modelo cosmológico  $\Lambda$ CDM.
- Estudiar el modelo de MOND y sus generalizaciones en su límite no relativista para ajustar curvas de rotación y la relación Tully-Fisher en galaxias.
- Implementar una rutina en Python para ajustar observaciones de curvas de rotación.
- Revisión de teorías de gravedad modificada  $f(R)$  como generalización más sencilla a relatividad general.
- Estudiar las teorías  $f(R, \mathcal{L}_{\text{matt}})$  con acoplamiento de materia y curvatura (acoplamiento débil y fuerte), y probar dos modelos parti-

culares con el código SimpleMC con observaciones cosmológicas.

- Entender el método de Markov-Chain-Monte-Carlo implementado.

## 2 HIPÓTESIS

Es posible explicar la expansión acelerada de nuestro universo con teorías de gravedad modificada que convergen al caso de MOND en el límite no relativista, sin necesidad de incluir a la materia y energía oscuras. Para ello se ajustan observaciones de oscilaciones acústicas bariónicas y de supernovas tipo Ia.

## 3 INTRODUCCIÓN

Desde el siglo pasado ya se tenía evidencia acerca de la expansión acelerada del universo con, por ejemplo: las observaciones de supernovas tipo Ia, la radiación cósmica de microondas (CMB) y las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) (Wang et al. 2016). Tales observaciones indican que nuestro universo en sus inicios,

\* E-mail: Davidrmc\_98@hotmail.com

\*\* E-mail: tbernaln@chapingo.mx

debió haber tenido una aceleración menor que la que se mide en la actualidad, en consecuencia la aceleración va en ascenso. Esto nos advierte que la gravedad no aporta significativamente a la expansión acelerada. Es aquí cuando se introduce la llamada energía oscura (DE), la cual proporciona el “combustible” para que el universo se expanda aceleradamente y no colapse gravitacionalmente, como habría de esperarse en ausencia de esta componente oscura.

Por otro lado, al estudiar las curvas de rotación en galaxias espirales (Sofue & Rubin 2001), desde la perspectiva clásica de Newton, uno esperaría que las distribuciones de masas ubicadas en los brazos exteriores de tales galaxias se movieran obedeciendo la ley  $v \propto r^{-1/2}$  donde  $v$  indica las velocidades de rotación y  $r$  la distancia a la cual deseamos medir velocidades con respecto al centro de la galaxia. De esta ley, se esperaría que las componentes exteriores de las galaxias posean menor velocidad en comparación con las interiores, sin embargo las observaciones apuntan a que esto no ocurre, de hecho se observa una velocidad más o menos constante en toda la distribución de las galaxias, siguiendo la ley Tully-Fisher  $v \propto M^{1/4}$ , con  $M$  la masa de la galaxia.

La segunda ley de Newton nos permite definir la velocidad de rotación de una distribución de masa de una galaxia<sup>1</sup> con respecto a su centro como,

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}, \quad (1)$$

donde  $G$  es la constante universal de gravedad,  $M_T$  la masa total de la galaxia. Vale la pena mencionar, que la masa total, no es constante pues varía en función de  $r$ . Además, esta puede ser descompuesta como  $M_T = M_{\text{bulge}} + M_{\text{disk}} + M_{\text{gas}} + M_{\text{DM}}$ , donde los primeros tres términos corresponden a la masa del bulbo, disco y gas de la galaxia respectivamente. Ahora bien, como se mencionó anteriormente, las observaciones de las rotaciones en las galaxias sugieren que estas giran con velocidad constante a cualquier distancia respecto de su centro, para que la ecuación (1) sea congruente con la información empírica es necesario introducir más masa de la observada; así, se propone la llamada materia oscura (DM) o  $M_{\text{DM}}$ .

El llamado sector oscuro, conformado por DE y DM, es bien estudiado por el modelo  $\Lambda$ CDM, por sus siglas en inglés *Lambda-Cold-Dark-Matter*, que por sus siglas:  $\Lambda$ , hace referencia a la constante cosmológica que aparece en las ecuaciones de campo gravitacional de Einstein (deducidas a partir de (13)) y se introduce para explicar la expansión acelerada del universo; por otro lado, el término *Cold Dark Matter* hace referencia a la materia oscura, considerada como una partícula que se desplaza a velocidades no relativistas, más preciso, a velocidades muy inferiores a la de la luz, de ahí la referencia a “fría”. Este modelo es el más aceptado pues es el que más encaja hasta el momento con las observaciones, para resolver los problemas de expansión acelerada, curvas de rotación, lentes gravitacionales, formación de estructura a gran escala, entre otros, introduciendo este sector oscuro.

No obstante,  $\Lambda$ CDM no es perfecto, no está exento de problemas, por mencionar los ejemplos más relevantes tenemos: el más evidente

que es la no detección directa y/o experimental de la materia y energía oscura. Luego se tiene el llamado *problema de coincidencia* la cual hace referencia a que las densidades de materia y energía oscuras son aproximadamente iguales. Otro ejemplo de problemas del modelo  $\Lambda$ CDM es el nombrado *el problema de afinación de la constante cosmológica* que nos describe la gran diferencia en órdenes de magnitud entre la constante cosmológica estimada en este modelo, con el estimado de teorías cuánticas de campo (Del Popolo & Le Delliou 2017).

Por otro lado,  $\Lambda$ CDM no es el único modelo que da solución a los problemas de expansión acelerada o curvas de rotación en galaxias. Tan sólo para la expansión acelerada sin considerar energía oscura, se tiene por ejemplo, como describen en NASA SCIENCE (2020): la teoría cuántica que propone la existencia de partículas virtuales que se forman y desaparecen del espacio “vacío”. Otra teoría es donde introducen la llamada *quintaesencia*, la cual básicamente propone que la energía oscura es alguna clase de fluido que permea al espacio y cuyos efectos se ven reflejados en la aceleración. Además de esto, existen las llamadas teorías de gravedad modificada, las cuales afirman que la teoría de gravedad de Einstein está incompleta (Del Popolo & Le Delliou 2017), y proponen nuevos términos que la “corrigen”. En este trabajo se estudiarán las teorías de gravedad modificada, que entre otras cosas, no consideran la existencia del sector oscuro (materia y energía oscura).

## 4 GRAVEDAD MODIFICADA

Aunque el modelo de  $\Lambda$ CDM es bien aceptado; como en el caso del *éter luminífero* el cual no era una cantidad medible pero propuesto de forma teórica para explicar el movimiento de la luz y que más tarde se demostró su nula existencia; la carencia de observación y detección en la materia oscura, nos hace pensar en su no existencia.

Las teorías de gravedad modificada pretenden explicar problemas cosmológicos y astrofísicos como el de las curvas de rotación sin introducir necesariamente al sector oscuro, pues su objetivo final es modificar la descripción de la gravedad para evitar proponer una cantidad “de más” como lo es la materia oscura y que la descripción matemática sea congruente con las observaciones.

Una teoría de gravedad modificada es la llamada *MOND*, por sus siglas en inglés *Modified Newtonian Dynamics*, propuesta por Milgrom (1983); M. (1983), la cual es una teoría no relativista que modifica directamente la segunda ley de Newton. En adición a esto, otra forma de modificar la gravedad es metiendo en juego a la relatividad general, en particular, cambiando la acción de Einstein-Hilbert, la cual nos arroja las ecuaciones de campo gravitacional, el cual puede ser cambiado.

### 4.1 Gravedad modificada con MOND

La idea detrás de la teoría de MOND (M. 1983; Milgrom 1983) es generalizar la aceleración clásica de Newton, proponiendo una nueva constante fenomenológica  $a_0$  cuyo valor es de:  $a_0 = 1,2 \times 10^{-10} \text{ ms}^{-2}$ , que discrimina entre aceleración Newtoniana y MONDiana; para aceleraciones  $a \gg a_0$  la aceleración es Newtoniana y para  $a \ll a_0$  es MONDiana. En Mendoza et al. (2011) se propone que  $a_0$  es una constante fundamental, así como  $G$  y  $c$ , la velocidad de la luz. Se propone que la aceleración que siente una partícula hacia una masa

<sup>1</sup> Considerando una galaxia espiral regular o elíptica de modo que se pueda usar a manera aproximada la aceleración centrípeta  $a = \frac{v^2}{r}$  definida usualmente en un movimiento circular.

$M$  estará dada por:

$$a = a_0 f(x), \quad (2)$$

con,

$$x = \frac{l_M}{r}, \quad (3)$$

y,

$$l_M = \left( \frac{GM}{a_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Como es analizado en (Mendoza et al. 2011), se recupera la típica aceleración Newtoniana eligiendo  $f(x) = x^2$ , en tal caso si se tienen dos cuerpos de masas distintas, la aceleración con la que se van a ver atraídos según Newton es:

$$a = \frac{GM}{r^2},$$

donde  $M$  en este caso, representa la masa del cuerpo más masivo y  $r$  el módulo de la distancia que los separa. Mientras que la llamada aceleración en el régimen profundo de MOND, i.e., ec. (2) se obtiene cuando  $f(x) = x$ , esto es:

$$a = \frac{\sqrt{a_0 GM}}{r}. \quad (5)$$

Vale la pena mencionar, que (2) hace referencia a una modificación en la fuerza debido a la gravedad (Mendoza et al. 2011). De aquí que podemos proponer que la fuerza  $f(x)$  de (2) que es adimensional, puede ser reescrita como una serie de potencias de la forma:

$$f(x) = \frac{a}{a_0} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n x^n. \quad (6)$$

Proponer la expansión en la forma de (6) es de utilidad debido a que uno puede estudiar los casos de cuando se está en el límite Newtoniano,  $x \gg 1$  o bien  $x \rightarrow \infty$ , además del régimen de MOND cuando  $x \ll 1$  o el llamado régimen profundo de MOND cuando  $x \rightarrow 0$ . Al operar algebraicamente (6), como se indica en el artículo (Mendoza et al. 2011), con ayuda de las series geométricas se consigue para los dos regímenes las siguientes funciones  $f(x)$ :

$$\frac{a}{a_0} = f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x-1} & , x > 1 \\ \frac{x}{1-x} & , x < 1 \end{cases}. \quad (7)$$

Al sumar y restar algebraicamente los dos casos de (7), se computa:

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)_{\pm} = \frac{x \pm x^3}{1 \pm x},$$

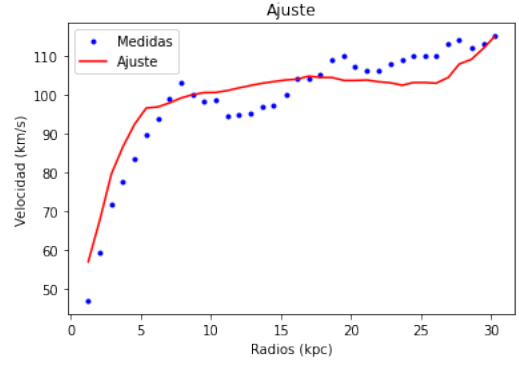
de donde se propone una estructura más general dada como:

$$\left( \frac{a}{a_0} \right)_{\pm} = x \frac{1 \pm x^{n+1}}{1 \pm x^n}. \quad (8)$$

Los signos más o menos de (8) se estiman al proponer y resolver numéricamente una función  $\mu(x)$  de interpolación para  $x$ , donde  $\mu(x)$  es tal que:

$$a\mu(a/a_0) = |\nabla\phi_N| = \frac{GM}{r^2},$$

donde  $\phi_N$  es el potencial gravitacional Newtoniano.



**Figure 1.** Curva de rotación para el ajuste del exponente  $n$  y  $a_0$  de la ecuación (10). En el eje de las ordenadas de muestra la velocidad observada en  $km/s$ . El eje de las abscisas muestra el radio medido desde el centro de la galaxia NGC1003 en  $kpc$  (kilopársec). Los puntos azules hacen referencia a las observaciones y la línea roja al ajuste de (10).

Como se menciona en Mendoza et al. (2011) al resolver numéricamente para  $x(a/a_0)$  el mejor ajuste se da cuando  $n \approx 3$  y tomando el signo negativo. Entonces la aceleración efectiva gravitacional (8) se reduce a:

$$\left( \frac{a}{a_0} \right) = f(x) = x \frac{1 - x^4}{1 - x^3}. \quad (9)$$

Ahora, las velocidades circulares (como en la ecuación 1) de rotación debido a (8) y (9) son respectivamente:

$$V(r) = \left( a_0 l_M \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x^n} \right)^{1/2}, \quad (10)$$

$$V(r) = \left( a_0 l_M \frac{1 - x^4}{1 - x^3} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Ahora bien, una vez teniendo (10) que representa el caso general para las velocidades de rotación, se procede a estimar los valores de  $n$  y  $a_0$  numéricamente con mínimos cuadrados para el caso no lineal. Para esto nos apoyaremos de la paquetería *scipy*<sup>2</sup> con *Curve Fit* de Python para el ajuste. Para el cómputo de estos dos parámetros se tomaron datos de la galaxia NGC1003 que corresponden a las velocidades de rotación de esta. Los datos y el código implementado en Python pueden ser consultados en (Márquez Castillo 2020).

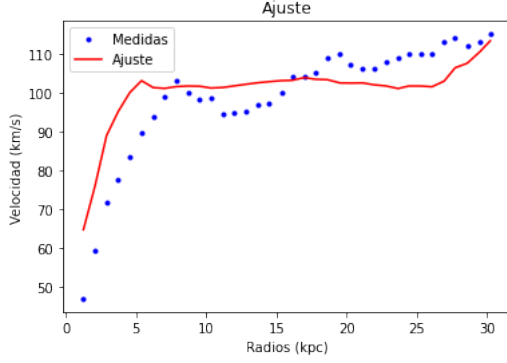
Los ajustes se hicieron sólo con las velocidades de observación y sin incertidumbres en el modelo. Para la velocidad (11) se hizo el mismo ajuste, pero con  $n = 3$  fijo. Las figuras (1) y (2) muestran las estimaciones hechas respectivamente para los parámetros  $a_0$  con  $n$  y  $a_0$  individualmente

Los valores numéricos obtenidos para  $a_0$  y  $n$  con las ecuaciones (10) (figura 1) y (11) (figura 2) fueron los siguientes.

- $a_0 = 7,32873774 \times 10^{-11} ms^{-1}$
- $n = 2,39550921 \times 10^3$  y  $a_0 = 7,81958249 \times 10^{-11} ms^{-1}$

Al observar el comportamiento del ajuste de las figuras (1-2) su naturaleza aparenta tener buen ajuste. Empero, los valores obtenidos

<sup>2</sup> [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve\\_fit.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html)



**Figure 2.** curva de rotación para el ajuste del parámetro  $a_0$  de la ecuación (11).

discrepan de los valores de referencia de (Mendoza et al. 2011), por ejemplo al tomar el caso general para la velocidad de rotación, i.e., (10) el exponente obtenido difiere en tres órdenes de magnitud del esperado. Este resultado nos dice que toda la galaxia se encuentra prácticamente en el régimen profundo de MOND,  $f(x) = x$  (ver límite de la ecuación (8) cuando  $n \gg 1$ ). Por otro lado  $a_0$  difiere en solo un orden de magnitud. Lo mismo ocurre de (11), aunque  $n$  esté fijo. Estos valores podrían deberse a las pocas observaciones tomadas aun lado de que no se está considerando incertidumbre alguna.

Como ejemplo ilustrativo, el ajuste de las ecuaciones (10-11) para la obtención de los parámetros  $n$  y  $a_0$ , sirve como referencia para ver cómo las teorías tipo MOND pueden ser ajustadas a las observaciones.

## 4.2 Gravedad modificada con teorías $f(R)$

Como se mencionó en la introducción, las propuestas de gravedad modificada se dan con la intención de no involucrar al sector oscuro para explicar las observaciones astrofísicas y cosmológicas. Además de MOND, que es una teoría no relativista, existen las llamadas teorías  $f(R)$  que modifican la gravedad a través de la acción de Einstein-Hilbert<sup>3</sup>, que es usualmente definida como:

$$S_{EH} = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (12)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz,  $R$  el escalar de Ricci y  $g$  el determinante de la métrica. Para obtener las ecuaciones de campo gravitacional, o ecuaciones de Einstein, es necesario considerar la acción completa, i.e., a  $S_{EH}$  sumarle la acción debido a la materia.

$$S = -\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R - \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matt}}. \quad (13)$$

Al tomar la variación nula de la acción (13) ( $\delta S = 0$ ) respecto a las componentes de la métrica  $g_{\mu\nu}$  (aproximación “métrica”) nos arroja las ecuaciones usuales del campo gravitacional  $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$ . Por su contra parte, se puede considerar una acción más general al sustituir el escalar de Ricci de (13) por una función  $f(R)$  como se sugiere en (Capozziello & Faraoni 2011), es decir:

$$S = -\kappa \int d^4x \sqrt{-g} f(R) - \frac{1}{c} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matt}}, \quad (14)$$

<sup>3</sup> se usará la notación (+,-,-,-) para la métrica

donde  $\kappa$  es una constante de acoplamiento. La acción (14) representa a las teorías  $f(R)$ . En un intento de una descripción de la gravedad distinta a la usual, esta clase de teorías buscan modificar la acción que conduce a las ecuaciones de campo gravitacional. En adición a esto, nos interesa estudiar estas teorías debido a que uno las puede hacer converger a MOND proponiendo una forma “correcta” de la función  $f(R)$ . Se tiene, por ejemplo, en Bernal et al. (2011) proponen una acción gravitacional como:

$$S = -\kappa \int d^4x \sqrt{-g} \frac{f(\chi)}{L_M^2}, \quad (15)$$

donde  $\chi := L_M^2 R$  y la longitud  $L_M \propto r_g^{1/2} l_M^{1/2}$ , con  $r_g$  el radio gravitacional. Posteriormente se estudia el caso cuando

$$f(\chi) = \chi^b.$$

La función se rige por una potencia. En ese artículo se encuentra que  $b$  debe ser igual a  $b = 3/2$  para que, de las ecuaciones de campo gravitacional, converjan a MOND en el límite no relativista, véase la ecuación (5).

En este orden de ideas, al estudiar el artículo (Barrientos et al. 2020), ya varios autores tienen contemplado una teoría  $f(R)$  aún más general, una tal que  $f(R) \rightarrow f(R, \mathcal{L}_{\text{matt}})$ , en otras palabras, la acción de Einstein-Hilbert (12) que se interpreta como la contribución gravitacional de la acción total (véase ecuación 13), se acopla también con la materia mediante el Lagrangiano de materia  $\mathcal{L}_{\text{matt}}$ . La acción  $S$  queda como:

$$S = \int F(R, \mathcal{L}_{\text{matt}}) \sqrt{-g} d^4x.$$

Al tomar esta última acción más la usual contribución de materia y hacerla variar con respecto a la métrica se obtienen las siguientes ecuaciones de campo:

$$F_R R_{\alpha\beta} + (g_{\alpha\beta} \nabla^\mu \nabla_\mu - \nabla_\alpha \nabla_\beta) F_R - \frac{1}{2} (F - \mathcal{L}_{\text{matt}} F_{\mathcal{L}_{\text{matt}}}) g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} F_{\mathcal{L}_{\text{matt}}} T_{\alpha\beta}, \quad (16)$$

donde  $F_R := \partial F / \partial R$  y  $F_{\mathcal{L}_{\text{matt}}} := \partial F / \partial \mathcal{L}_{\text{matt}}$ . Además, el tensor de energía momento se define como es costumbre:

$$T_{\alpha\beta} := -\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matt}})}{\delta g^{\alpha\beta}}.$$

Por otro lado, podemos proponer que  $F$  adquiera la forma  $F(\chi, \xi)$  donde  $\chi = \alpha R$ ,  $\xi = \mathcal{L}_{\text{matt}} / \lambda$  y  $\alpha$  y  $\lambda$  son constantes de acoplamiento que pueden ser determinadas de un análisis dimensional (Barrientos et al. 2020) y toman los valores de

$$\alpha = k \frac{c^4}{a_0^2}, \quad (17)$$

$$\lambda = k' \frac{a_0^2}{G}, \quad (18)$$

con  $k$  y  $k'$  constantes de proporcionalidad. La ecuación (16) queda entonces como:

$$\alpha F_\chi R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (F - F_\xi \xi) + \alpha (g_{\mu\nu} \Delta - \nabla_\mu \nabla_\nu) F_\chi = \frac{F_\xi T_{\mu\nu}}{2\lambda}, \quad (19)$$

donde  $F_\chi := \partial F / \partial \chi$ ,  $F_\xi := \partial F / \partial \xi$  y  $\Delta = \nabla^\mu \nabla_\mu$ . La última ecuación se reescribe como:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{\alpha F_\chi} \left[ \frac{F_\xi T_{\mu\nu}}{2\lambda} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}F_\xi \xi + T_{\mu\nu}^{\text{curv}} \right], \quad (20)$$

donde se define:

$$T_{\mu\nu}^{\text{curv}} := \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(F - \chi F_\chi) - \alpha(g_{\mu\nu}\Delta - \nabla_\mu \nabla_\nu)F_\chi. \quad (21)$$

Podemos considerar al universo como un fluido perfecto, en términos generales, se habla de isotropía y homogeneidad en el cosmos. De aquí que también esto nos permite caracterizar al espacio tiempo mediante la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Para un fluido perfecto, se sabe que matemáticamente se describe mediante el tensor de energía momento como:

$$T_{\mu\nu} = (e + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}.$$

En este trabajo se estudió el caso particular de un universo dominado por polvo ( $P = 0$ , presión nula) y plano. Para el caso de polvo, la densidad total (densidad de masa en reposo más densidad de energía interna) toma el valor de  $e = c^2 \rho$ , para la densidad de materia  $\rho$  (Barrientos et al. 2020). Así, el tensor  $T_{\mu\nu}$  queda como:

$$T_{\mu\nu} = \rho c^2 u_\mu u_\nu. \quad (22)$$

El Lagrangiano de materia, entre sus muchas apariencias, para el caso de polvo durante los últimos años se ha determinado que posee la forma (Barrientos et al. 2020):

$$\mathcal{L}_{\text{matt}} = \rho c^2. \quad (23)$$

Con esto en mente, conviene definir los parámetros cosmológicos que serán ajustados, por no mencionar la relevante información que proporcionan. Definimos a:

$$H = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (24)$$

$$q = -\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} H^{-2}, \quad (25)$$

$$j = \frac{1}{a} \frac{d^3 a}{dt^3} H^{-3}, \quad (26)$$

$$\Omega = \frac{8\pi G \rho}{3H^2}, \quad (27)$$

como el parámetro de: Hubble, desaceleración, jerk y de densidad respectivamente.  $a = a(t)$  representa el llamado factor de escala, y nos provee información acerca de la expansión de nuestro Universo. Vale la pena hacer una mención especial al parámetro de densidad  $\Omega$  pues este suele estar compuesto de varias contribuciones; tales como:  $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa$ , donde  $\Omega_m$  es el parámetro de densidad de materia,  $\Omega_\Lambda$  es el parámetro de densidad atribuido a la energía oscura y  $\Omega_\kappa$  es el parámetro de densidad de curvatura (Barrientos et al. 2020).

Cuando se esté trabajando sin energía oscura, entonces  $\Omega_\Lambda = 0$ , y sin incluir la presencia de materia oscura tendríamos que  $\Omega_m = \Omega_b$ , es decir, un parámetro de densidad de materia totalmente bariónica. Cuando se escriba  $\Omega$  sin subíndice, estamos haciendo referencia a un parámetro de densidad efectiva sin contribuciones oscuras.

Para el tiempo presente ( $t = 0$ ), se tomarán como valores de referencia los encontrados en (Collaboration et al. 2020), que están basados en  $\Lambda$ CDM. Tenemos por consiguiente:  $H_0 = (67,4 \pm$

0,5)kms<sup>-1</sup>Mpc<sup>-1</sup>,  $\Omega_{m_0} = 0,315 \pm 0,007$  y  $\Omega_{\kappa_0} = 0,0007 \pm 0,0019$ . Además, tal modelo estima que los valores para los parámetros (25 y 26) para un universo plano son:  $q_0 = -0,527 \pm 0,0105$  y  $j_0 = 1$ . Los subíndices 0 indica que los valores de los parámetros cosmológicos fueron calculados en el presente.

## 5 COSMOLOGÍA

Como se pudo advertir de los cálculos hechos en la sección 4 para teorías  $f(R)$ , es de nuestro interés trabajar con acoplamiento de materia-curvatura, la cual como se verá más adelante, puede ser un acoplamiento “débil” o “fuerte”. Como se mencionó en la sección anterior, de utilizará la métrica FLRW definida como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (28)$$

Apoyándonos de las relaciones (22) y (23) uno puede calcular la primera componente del tensor (21) ( $T_{00}$ ), dando lugar a:

$$T_{00}^{\text{curv}} = \frac{1}{2}(F - \chi F_\chi) - \frac{3\alpha}{c^2} H \dot{F}_\chi, \quad (29)$$

donde la notación  $\dot{\{ \}}$  indica derivada respecto del tiempo. Ahora, la primera componente del tensor de Ricci ( $R_{00}$ ) y su escalar ( $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ ) de (20) son:

$$R = -6 \left( \frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + \kappa c^2}{c^2 a^2} \right),$$

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a}.$$

Usando las relaciones anteriores, la componente 00 de la ecuación (20) nos arroja el parámetro de Hubble como:

$$H^2 = \frac{c^2}{3\alpha F_\chi} \left[ \frac{\rho c^2 F_\xi}{2\lambda} + \frac{F - \chi F_\chi - \xi F_\xi}{2} - \frac{3H\alpha}{c^2} \dot{F}_\chi \right] - \frac{\kappa c^2}{a^2}. \quad (30)$$

### 5.1 Modelo de acoplamiento “débil” de curvatura-materia

En este modelo se construye a  $F(\chi, \xi)$  como,

$$F(\chi, \xi) = f(\chi) + g(\xi), \quad (31)$$

entonces, la ecuación para el parámetro de Hubble (30) queda como (Barrientos et al. 2020),

$$H^2 = \frac{c^2}{3\alpha f_\chi} \left[ \frac{\rho c^2 g_\xi}{2\lambda} + \frac{f + g - \chi f_\chi - \xi g_\xi}{2} - \frac{3H\alpha}{c^2} \dot{f}_\chi \right] - \frac{\kappa c^2}{a^2}. \quad (32)$$

Al suponer que  $F(\chi, \xi)$  en este modelo se escribe como una suma de potencias  $F(\chi, \xi) = \chi^\gamma + \xi^\beta$  la expresión (32) se vuelve a reescribir de la forma,

$$H^2 = \frac{c^2}{3\alpha \gamma \chi^{\gamma-1}} \left[ \frac{(1-\gamma)\chi^\gamma + \xi^\beta}{2} - \frac{3H\alpha\gamma}{c^2} \frac{d}{dt} \chi^{\gamma-1} \right]. \quad (33)$$

Como se requiere simplificar la anterior expresión, es conveniente utilizar los parámetros de desaceleración y jerk definidos en (25)



y (26) para poder poner el escalar de Ricci en términos de  $q$  y  $j$ . Después de simplificar y manipular la expresión (33) uno puede obtener:

$$H^{2\gamma} = \frac{(q-1)^{1-\gamma} c^{2(\gamma+\beta)}}{6^\gamma \gamma \lambda^\beta \alpha^\gamma Z} \rho^\beta, \quad (34)$$

donde,

$$Z := 1 + (\gamma - 1) \left( \frac{q-1}{\gamma} + \frac{j-q-2}{1-q} \right). \quad (35)$$

Al recurrir a la definición del parámetro de densidad (27) con (17) y (18); el parámetro de Hubble escrito en (34) es:

$$H = \frac{a_0}{c} \left[ \frac{(q-1)^{1-\gamma}}{6^\gamma \gamma k^\gamma k'^\beta Z} \left( \frac{3\Omega}{8\pi} \right)^\beta \right]^{1/2(\gamma-\beta)}. \quad (36)$$

Es conveniente además, escribir el parámetro de Hubble normalizado  $E = H/H_0$  como:

$$E^2(z) = \left( \frac{H}{H_0} \right)^2 = \left( \frac{a_0}{cH_0} \right)^2 \left[ \frac{(q-1)^{1-\gamma}}{6^\gamma \gamma k^\gamma k'^\beta Z} \left( \frac{3\Omega}{8\pi} \right)^\beta \right]^{1/(\gamma-\beta)}. \quad (37)$$

donde  $z$  representa el corrimiento al rojo.

## 5.2 Modelo de acoplamiento “fuerte” de curvatura-materia

Como es estudiado en (Barrientos et al. 2020), la función  $F(\chi, \xi)$  propuesta para el acoplamiento fuerte, que es, en principio debido al producto presente, queda definida nuevamente en función de potencias y sumas.

$$F(\chi, \xi) = \chi^\gamma \xi^\beta + \xi. \quad (38)$$

Al sustituir (38) en (30), nos queda:

$$H^2 = \frac{c^2}{3\alpha\gamma\chi^{\gamma-1}\xi^\beta} \left[ \frac{8\pi G\alpha}{c^2} \rho + \frac{1}{2}(1-\gamma)\chi^\gamma \xi^\beta - \frac{3H\alpha\gamma}{c^2} \frac{d}{dt} (\chi^{\gamma-1} \xi^\beta) \right]. \quad (39)$$

Suponiendo que la densidad y el factor de escala poseen la forma,

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a(t_0)} \right)^\tau \quad \text{and} \quad a = a(t_0) \left( \frac{t}{t_0} \right)^\sigma, \quad (40)$$

con  $\tau = -3$ , cuyo valor proviene de la ecuación de continuidad de Friedmann para el caso de polvo;  $\sigma$  es una constante a determinar. Siguiendo un procedimiento análogo al caso de acoplamiento débil, uno llega a que el parámetro de Hubble puede ser reescrito como:

$$H^{2\gamma} = [6(q-1)]^{1-\gamma} \frac{8\pi G}{3\gamma Z'} \frac{\lambda^\beta \alpha^{1-\gamma}}{c^{2(1-\gamma+\beta)}} \rho^{1-\beta}, \quad (41)$$

donde,

$$Z' := 1 + (1-\gamma) \left[ \frac{1-q}{\gamma} - \frac{j-q-2}{1-q} \right] + \tau\beta. \quad (42)$$

Nuevamente, con los valores de las constantes de acoplamiento, dadas en (17) y (18), junto con el parámetro de densidad, introducido en (27), la ecuación (43) se reduce a (Barrientos et al. 2020):

$$H = \frac{a_0}{c} \left[ [6(q-1)]^{1-\gamma} \frac{8\pi k^{1-\gamma} k'^\beta}{3\gamma Z'} \left( \frac{3\Omega}{8\pi} \right)^{1-\beta} \right]^{1/2(\gamma+\beta-1)}, \quad (43)$$

tomando el parámetro de Hubble normalizado, se consigue finalmente:

$$E^2(z) = \left( \frac{a_0}{cH_0} \right)^2 \left[ [6(q-1)]^{1-\gamma} \frac{8\pi k^{1-\gamma} k'^\beta}{3\gamma Z'} \left( \frac{3\Omega}{8\pi} \right)^{1-\beta} \right]^{1/(\gamma+\beta-1)}. \quad (44)$$

## 6 CÓDIGO SIMPLEMC

El código que se implementará en Python para el ajuste de parámetros cosmológicos es el llamado *SimpleMC* que puede ser consultado en (Slosar & Vazquez 2020; Padilla et al. 2019).

SimpleMC fue creado con la intención de estimar parámetros cosmológicos donde sólo importa la expansión del universo (Padilla et al. 2019). Uno puede calcular parámetros como por ejemplo  $\Omega$ ,  $q$  y  $j$  de las ecuaciones (37) y (44). Con tal fin, el código nos permite utilizar distintas técnicas estadísticas para estimar los valores que deseamos, pero con la que se trabajó fue el método llamado MCMC, por sus siglas significa: Markov Chain Monte Carlo. Este método, por medio de cadenas de Markov y simulación de Monte Carlo, obtiene numéricamente los valores para los parámetros que le solicitemos. Este método se estudia con más detalle en la siguiente subsección.

El código SimpleMC contiene, además distintos modelos cosmológicos con los que se pueden trabajar, de los cuales la gran mayoría están basados en  $\Lambda$ CDM; se tienen por ejemplo: modelos CDM es decir, sin considerar la constante cosmológica, modelos que consideran algunos parámetros constantes, como el parámetro de densidad, entre otros. La utilidad en este código es que uno puede implementar su propia propuesta en base a los que vienen por defecto realizando algunas modificaciones, o elaborar uno nuevo. De aquí que SimpleMC se encarga de ajustar los parámetros cosmológicos que proponamos con el algoritmo MCMC.

Por medio del código SimpleMC, fue posible ajustar los parámetros cosmológicos  $\Omega$ ,  $q$  y  $j$ , presentes en las ecuaciones (37) y (44) a través de MCMC, el cual es un método estadístico muy fiable para el ajuste de parámetros. En términos generales, las modificaciones realizadas a SimpleMC fueron hechas a partir de introducir los parámetros de Hubble normalizados modificados (véase ecs.37 y 44), primero, para el acoplamiento débil y después para el acoplamiento fuerte de curvatura-materia. En otras palabras, los parámetros cosmológicos fueron ajustados en base a dos modelos.

### 6.1 Markov Chain Monte Carlo

El algoritmo que se implementará en Python para el ajuste de parámetros cosmológicos, fue MCMC. Ya en los artículos (Padilla et al. 2019) y (Conchi 2012) describen muy bien en qué consiste este método y cómo implementarlo. Este algoritmo, grosso modo, se basa en dos métodos: el primero, simulación de Monte carlo utiliza valores aleatorios para estimar una cantidad; el segundo, llamado cadenas de Markov, se basa en simular una distribución de valores que dependen de sus antecesores. Por ejemplo si se tiene un conjunto de elementos  $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$ , se dice que es una cadena de Markov si para estimar el elemento  $t_n$  se requiere del elemento  $t_{n-1}$ . Esto último no aplica necesariamente para elementos, sino

también para distribuciones. El método MCMC es una fusión de Monte Carlo y cadenas de Markov.

El método MCMC genera una distribución *a posteriori* de una serie de datos. De manera equivalente, estima los posibles valores futuros de una serie de eventos y nos proporciona un rango de probabilidades de las cuales los valores pueden tomar. A los nuevos puntos y/o estimaciones que genera este método se les denomina cadena, o *chain*. El “nacimiento” de este método lo encontramos en la estadística bayesiana, donde se utiliza el conocido teorema de Bayes:

$$P(\theta | D, H) = \frac{P(D | \theta, H)P(\theta | H)}{P(D | H)},$$

dada una hipótesis  $H$ , una serie de datos  $D$  y un vector de parámetros  $\theta$ . Este teorema nos da una idea de lo que hace MCMC pues cada probabilidad correspondiente a un evento o distribución de probabilidad está condicionada al valor anterior. Cada valor nuevo generado depende sólo del valor anterior simulado como se describe en (Conchi 2012).

Para continuar es conveniente mencionar algunas ideas generales de las cadenas de Markov. Como se describe en Conchi (2012), una cadena de Markov es una secuencia de variables  $\Theta_0, \Theta_1, \dots$ , tal que la distribución de  $\Theta_t$  dados los valores previos  $\Theta_0, \Theta_1, \dots, \Theta_{t-1}$  solo depende de  $\Theta_{t-1}$ . Además, bajo ciertas condiciones una cadena de Markov converge a su distribución estacionaria (Conchi 2012):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pr(\Theta_t = \theta | \Theta_0 = \theta_0) = \pi(\theta),$$

donde  $t$  representa el tiempo y la notación  $\Pr$  denota probabilidad (que puede referirse a una sola una cadena o un conjunto de ellas). El objetivo de MCMC es estimar y simular los valores futuros de una distribución  $\pi(\theta | \mathbf{x})$  que además converja a una distribución estacionaria. Vale la pena mencionar que los primeros valores simulados (iteraciones de *burn-in*) se eliminan porque no están en el estado estacionario (Conchi 2012). Como en todo método numérico se requiere un valor inicial para una estimación posterior de los siguientes valores, se requiere de un criterio para saber si aceptar o no el valor posterior (Padilla et al. 2019). El algoritmo que nos provee de esta información es el llamado algoritmo *Metropolis-Hastings* que se describirá en la siguiente subsección.

## 6.2 Algoritmo Metropolis-Hastings

El algoritmo de Metropolis-Hastings simula una cadena de Markov con una distribución estacionaria  $\pi(\theta | \mathbf{x})$  a partir de una distribución propuesta  $q$ . Supongamos que  $\theta_t$  es el valor actual de donde se está trabajando, ahora, el siguiente valor estimado será  $\theta_e$ . Así, la distribución propuesta se define como:  $q(\theta_e | \theta_t)$ .

La probabilidad de aceptar el valor estimado está dado por (Padilla et al. 2019; Conchi 2012):

$$\Pr = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta_e | \mathbf{x}) q(\theta_t | \theta_e)}{\pi(\theta_t | \mathbf{x}) q(\theta_e | \theta_t)} \right\}.$$

En el caso particular en que la distribución propuesta sea simétrica, la probabilidad anterior se reduce a:

$$\alpha = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta_e) f(\mathbf{x} | \theta_e)}{\pi(\theta_t) f(\mathbf{x} | \theta_t)} \right\}.$$

En tal caso se dice que es el *algoritmo Metrópolis*. El procedimiento a seguir para MCMC hasta ahora es simple; se toma o elije

un valor inicial  $\theta_0$  y se calcula el valor posterior  $\theta_1$  ( $\theta_e$ , el estimado), después se estudia si este valor es aceptado o no, con ayuda del algoritmo de Metropolis-Hastings. En caso afirmativo se estima el siguiente valor o distribución, en caso negativo se genera otro valor inicial o del cual partir.

## 6.3 Criterio de convergencia

Nuevamente, como todo método numérico, ahora se requiere tener un método de convergencia para nuestras distribuciones de probabilidad a estimar. El criterio que se ocupará es el llamado *criterio de Gelman-Rubin*. Como describen en Padilla et al. (2019), si se inicia con  $M$  cadenas con distintos puntos iniciales y  $N$  puntos por cadena, si  $\theta_i^j$  representa un punto en el espacio de parámetros  $i$  proveniente de la cadena  $j$ , el promedio de cada cadena estará dado por (Padilla et al. 2019):

$$\langle \theta^j \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i^j, \quad (45)$$

y el promedio de las cadenas,

$$\langle \theta \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \theta_i^j. \quad (46)$$

Luego, la varianza entre cadenas, denotada por  $B$  es:

$$B = \frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M \left( \langle \theta^j \rangle - \langle \theta \rangle \right)^2, \quad (47)$$

después, el promedio de la varianza de cada cadena, denotado por  $W$ , está dado por (Padilla et al. 2019):

$$W = \frac{1}{M(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left( \theta_i^j - \langle \theta^j \rangle \right)^2. \quad (48)$$

Como se estudia en (Padilla et al. 2019), para que las cadenas converjan:  $W$  y  $B/N$  deben coincidir. Estrictamente se dice que las cadenas convergen cuando se satisface el criterio  $0.97 < \hat{R} < 1.03$ , donde,

$$\hat{R} = \frac{\frac{N-1}{N} W + B \left( 1 + \frac{1}{M} \right)}{W}. \quad (49)$$

## 7 AJUSTE DE PARÁMETROS COSMOLÓGICOS CON MCMC

Una vez teniendo las herramientas físicas, matemáticas y computacionales, se procede a hacer el ajuste de los parámetros  $\Omega$ ,  $q$  y  $j$  de las ecuaciones (37) y (44). Para estimar los valores de los parámetros deseados, se usaron las observaciones de oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) de (Font-Ribera et al. 2014; Delubac et al. 2015; Anderson et al. 2014) además de supernovas tipo Ia (SNIa) de (Betoule et al. 2014).

En primer lugar, las oscilaciones acústicas bariónicas (BAO) surgen de cierto tipo de ondas electromagnéticas, las cuales fueron creadas en el universo primigenio, cuando los fotones y materia bariónica estaban acopladas en forma de plasmas. En las zonas de alta densidad de plasma se generaba presión que empujaba la materia en

contra de la atracción gravitacional; este vaivén dio fruto a las oscilaciones acústicas bariónicas que, entre otras cosas, proporcionan información sobre la tasa de crecimiento de la estructura cósmica a la par de la expansión del universo. Para su descripción matemática y uso en SimpleMC, debemos definir algunas cantidades que nos servirán para limitar o constreñir nuestros parámetros cosmológicos, además de caracterizar las observaciones de BAO. Usamos en primer lugar el radio de horizonte de sonido  $r_d$ , que cuantifica la distancia máxima a la cual las ondas de “sonido” podrían viajar a través del plasma primordial antes de volverse a combinar, se define como:

$$r_d = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s(z)}{H(z)} dz, \quad (50)$$

donde la velocidad del sonido en un fluido donde están acoplados los bariones y fotones es  $c_s(z) = 3^{-1/2} c \left[ 1 + \frac{3}{4} \rho_b(z)/\rho_\gamma(z) \right]^{-1/2}$  y  $z_d$  es el corrimiento al rojo cuando los fotones y bariones están desacoplados (Padilla et al. 2019). La escala de BAO se determina adoptando un modelo fiducial (“fid”). Por otro lado, la información de las mediciones se encuentra en la relación  $\alpha$  de la medida de escala de BAO. En un ajuste anisótropo se ocupan dos razones, una perpendicular  $\alpha_\perp$  y otra paralela  $\alpha_\parallel$  en la línea de visión. Una medición de  $\alpha_\perp$  restringe la razón de la distancia del diámetro del observador comóvil (Aubourg et al. 2015).

$$\frac{D_M(z)}{r_d} = \alpha_\perp \frac{D_{M,\text{fid}}(z)}{r_{d,\text{fid}}}, \quad (51)$$

donde la distancia del diámetro angular comóvil es,

$$D_M(z) = \frac{c}{H_0} S_k \left( \frac{D_c(z)}{c/H_0} \right). \quad (52)$$

La distancia comóvil de la línea de visión se define como,

$$D_c(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z dz' \frac{H_0}{H(z')} \quad (53)$$

y  $S_k(z)$  es:

$$S_k(z) = \begin{cases} \sinh(\sqrt{\Omega_k} x)/\sqrt{\Omega_k} & \Omega_k > 0 \\ x & \Omega_k = 0 \\ \sin(\sqrt{-\Omega_k} x)/\sqrt{-\Omega_k} & \Omega_k < 0 \end{cases}. \quad (54)$$

El parámetro de Hubble puede ser restringido por las medidas de  $\alpha_\parallel$  usando análogamente (51), entonces nos queda como,

$$\frac{D_H(z)}{r_d} = \alpha_\parallel \frac{D_{H,\text{fid}}(z)}{r_{d,\text{fid}}}, \quad (55)$$

con  $D_H(z) = c/H(z)$ . Si la distorsión del espacio y corrimiento al rojo es débil, un análisis isotrópico mide una combinación efectiva de (51) y (55), y el volumen de la distancia promedio  $D_V(z)$  (Aubourg et al. 2015) es:

$$\frac{D_V(z)}{r_d} = \alpha \frac{D_{V,\text{fid}}(z)}{r_{d,\text{fid}}}, \quad (56)$$

con  $D_V(z) = [z D_H(z) D_M^2(z)]^{1/3}$ . Las mediciones tomadas de BAO limitan los parámetros cosmológicos que se ajustaron por medio del radio de horizonte de sonido  $r_d$ , distancia de Hubble  $D_H(z)$  y la distancia comóvil del diámetro angular  $D_M(z)$ , además de  $D_V(z)$ .

Segundo, la información proveniente de los datos de supernovas, que son del tipo Ia, que denotaremos por SN, nos provee de datos como el corrimiento al rojo y distancias. A partir de estos datos

el algoritmo de MCMC de SimpleMC se encargará de hacer una estimación de los valores a futuro que puedan existir, y en base a ellos, hacer el mejor ajuste para los parámetros cosmológicos impuestos. Como en el caso de BAO, es de utilidad definir distancias que limitarán a nuestros parámetros cosmológicos, pues estos deben ajustarse de acuerdo a las observaciones.

En primer lugar, básicamente una supernova es una explosión de una estrella, existen varias maneras de clasificarlas, pero en términos generales podemos hacerlo en dos tipos. La primera ocurre en un sistema binario de estrellas. Cuando una enana blanca roba la suficiente materia de su compañera como para que su presión interna no lo soporte y haga que explote. El segundo tipo ocurre cuando a una estrella se le termina el combustible, el cual hacía una fuerza debido a la presión que contrarresta a la gravedad; debido a esto se dice que la estrella colapsa gravitacionalmente, resultando en una explosión (Nasa 2013). Estamos interesados en el primer tipo de supernova SNIa, debido a que empíricamente están muy bien estudiadas, y su pico de luminosidad puede ser usado como un indicador de distancia de las ya conocidas relaciones entre el corrimiento al rojo y distancia (Yao et al. 2006).

Estas estrellas nos permiten hacer mediciones relativas de distancias usando la distancia de luminosidad dada por,

$$D_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi S}}, \quad (57)$$

donde  $L$  es la luminosidad definida como la energía emitida por unidad de ángulo sólido por unidad de segundo,  $S$  es el flujo de la densidad de radiación definido como la energía recibida por unidad de área por unidad de segundo (A. Liddle 2013). Otra razón para usar supernovas es que estas tienen la misma luminosidad estando a distintas distancias (Padilla et al. 2019), lo que nos permite calcular la densidad lumínica. Incluso si la luminosidad es desconocida. La relación entre  $D_L$  y los parámetros cosmológicos está dado por,

$$D_L = D_M(1+z). \quad (58)$$

Otra cantidad importante que va a limitar a nuestros parámetros cosmológicos en la observación de supernovas es el estandarizado *módulo de distancia* definido como:

$$\mu = m_b^* - M_B + \alpha X_1 - \beta C, \quad (59)$$

donde  $m_b^*$  es la magnitud del pico observada en un marco de referencia inercial de la banda azul (B),  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $M_B$  son parámetros que dependen de las propiedades de la galaxia anfitriona (Betoule et al. 2014),  $X_1$  es la dilatación del tiempo de la curva de luz y  $C$  es el color de la supernova en su máxima luminosidad. La relación entre el módulo de distancia y su luminosidad está dado por:

$$\mu = 5 \log_{10} \left( \frac{D_L}{10 \text{ pc}} \right). \quad (60)$$

Con la finalidad de verificar qué tan bien ajustan los parámetros cosmológicos del acoplamiento débil y fuerte con respecto a  $\Lambda$ CDM, es decir, nos interesa confirmar qué tan viable es usar estos dos modelos para la estimación de parámetros sin considerar al sector oscuro, se ajustaron los parámetros cosmológicos típicos de  $\Lambda$ CDM con las propuestas de acoplamiento fuerte y débil en la curvatura-materia. Estos fueron:  $\Omega_m$ , que corresponde a la densidad de materia, luego  $h$  que es la constante de Hubble normalizada y definida como  $h = H_0/100 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ , y la densidad física de



bariones  $\Omega_b h^2$ .

Para implementar nuestros modelos: el acoplamiento débil y fuerte descritos en las subsecciones 5.1 y 5.2, basta con introducir los parámetros de Hubble normalizados en el código SimpleMC por (37) y (44); se estudiarán ambos casos por separado. En el apéndice A, se muestra más en concreto qué parte del código se cambió. Con esto en mente se procede a hacer la simulación. Para el primer modelo, *acoplamiento débil en la curvatura-materia* se toma (37) como base y se ajustan:  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_0$  (nuestra  $\Omega$  efectiva),  $q_0$  y  $j_0$ , utilizando las observaciones de BAO. La figura (5) muestra los mejores ajustes para cada uno de los parámetros cosmológicos propuestos y su distribución de probabilidad respecto de unos a otros.

Para el modelo de *acoplamiento fuerte en la curvatura-materia* se toma (44) como referencia y se ajustan nuevamente los mismos parámetros que en el caso de acoplamiento débil. En este modelo, aparte de tomar los datos de BAO, se utilizaron los datos de supernovas SN. La figura (4) muestra el comportamiento de  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_0$ ,  $q_0$  y  $j_0$  para tales observaciones.

A manera resumida, la tabla (1) refleja los mejores ajustes para los parámetros cosmológicos propuestos, usando SimpleMC con MCMC, donde los valores iniciales para cada parámetro fueron los siguientes; para el acoplamiento débil:  $q_0 = -0,5$ ,  $j_0 = -0,3$ ,  $\Omega_0 = 0,8$ ,  $\Omega_m = 0,3038$ ,  $\Omega_b h^2 = 0,02234$  y  $h = 0,6821$  y para el acoplamiento fuerte  $q_0 = -0,3$ ,  $j_0 = 0,5$ ,  $\Omega_0 = 1,0$ ,  $\Omega_m = 0,3038$ ,  $\Omega_b h^2 = 0,02234$  y  $h = 0,6821$ . Es importante mencionar que las constantes  $\beta$  y  $\gamma$  presentes en (37), (44), (38) y (31), fueron calculadas en (Barrientos et al. 2020), en este trabajo no se volvieron a calcular.

Es digno de mencionar que las gráficas (4) y (5), fueron elaboradas con el graficador *simpleCorner*. Si uno desea una distribución más homogénea en las distribuciones de probabilidad en las gráficas, podemos usar el graficador *GetDist* de Python, usando previamente las cadenas obtenidas con MCMC. Las figuras (6) y (7) son el resultado de usar *getdist* para el modelo débil y fuerte respectivamente. Los valores obtenidos para los parámetros cosmológicos fueron distintos debido a que se usaron distintos *burn-in* y combinaciones de datos. Los dos graficadores son igual de viables, aunque si uno desea más precisión en los ajustes, puede optar por usar *simpleCorner* en lugar de *getdist*, pues este último *suaviza* las distribuciones de probabilidad, analizando de manera distinta a las cadenas.

Para poder comparar los resultados de los parámetros cosmológicos  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$  y  $h$  obtenidos mediante un acoplamiento fuerte y débil, estos fueron estimados con MCMC usando SimpleMC, por medio del conjunto de datos BAO+SN, usando el modelo  $\Lambda$ CDM (considerando materia y energía oscuras). Estos valores están presentes en la tabla (1), en  $\Lambda$ CDM. Finalmente, se realizó una gráfica de las distribuciones de probabilidad para los parámetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$  y  $h$ . Al introducir los dos modelos propuestos de acoplamiento curvatura-materia, nos percatamos que las probabilidades son similares en el sentido de entrar en el rango de los valores aceptados (con  $\Lambda$ CDM como referencia) para  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$  y  $h$ . De aquí advertimos que modelos sin considerar al sector oscuro y con acoplamiento, resultan rentables para la descripción de un universo plano y dominado por polvo, pues, parámetros cosmológicos importantes como los antes mencionados, pueden ser obtenidos sin problema con estos dos modelos, aunque con errores más grandes debidos a la forma de los parámetros de Hubble (37) y (44).

## 8 CONCLUSIONES

Las teorías de gravedad modificada sin duda alguna, nos han proporcionado una manera diferente de plantearnos la naturaleza de la gravedad. Al hacer la revisión de  $\Lambda$ CDM y teorías de gravedad modificada, notamos que ambas tienen sus pros y contras. Aunque  $\Lambda$ CDM es la más aceptada debido a su buen ajuste a las observaciones cosmológicas, sigue teniendo algunos problemas. Teorías de gravedad modificada y otras intentan no solo ajustarse bien a las observaciones, sino también dar solución a los problemas de  $\Lambda$ CDM.

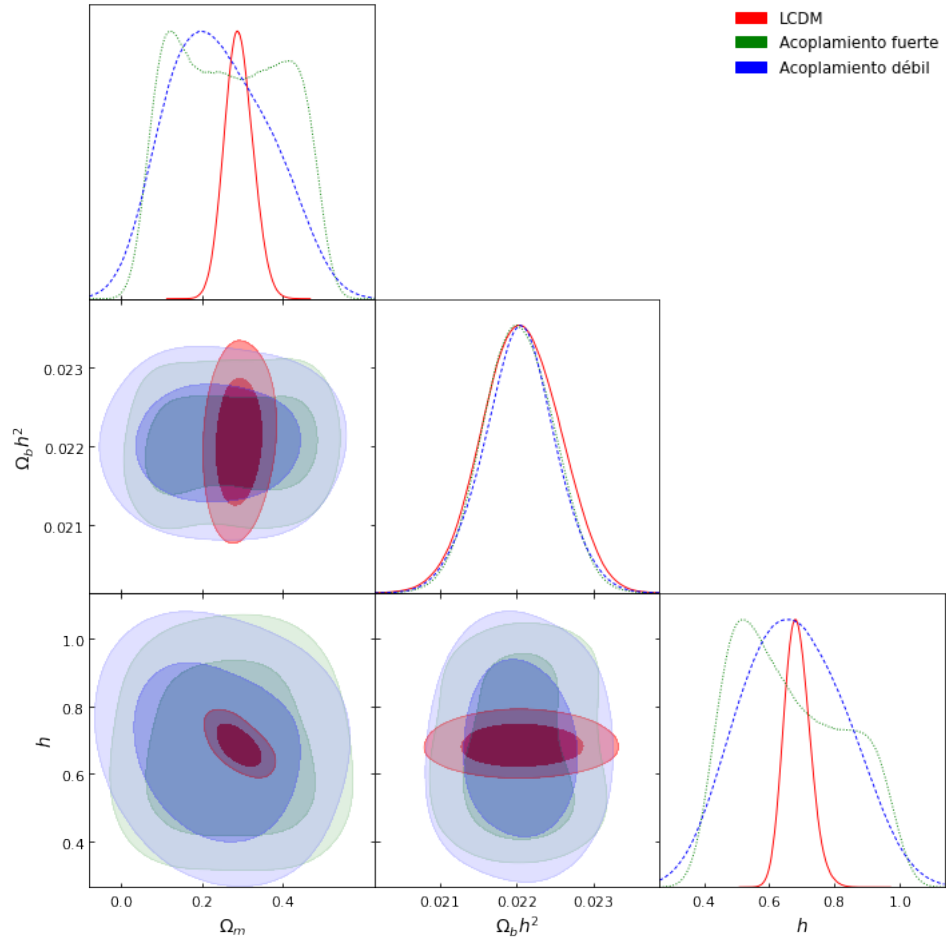
Como se estudio en la subsección 4.1, MOND es una teoría que se puede ajustar fácilmente a las observaciones astrofísicas de curvas de rotación, introduciendo una constante universal nueva,  $a_0$ . Aunque nuestros ajustes para la determinación de  $n$  y  $a_0$  difieren del valor  $a_0 = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$  aceptado (ver por ejemplo Famaey & Binney 2005) y del valor  $n = 3$  usado en (Mendoza et al. 2011), esto se debe a que ajustamos únicamente una galaxia, obteniendo que se encuentra completamente en el régimen MONDiano. Sin embargo, se cumplió el objetivo de implementar una rutina en Python para ajustar estas curvas. Era de esperarse la diferencia en las magnitudes de  $n$  y  $a_0$  debido a la carencia de datos, esto puede ser corroborado tomando un mayor número de observaciones. De hecho se ha observado que el valor de  $n$  difiere entre distintos tipos de sistemas astrofísicos (galaxias espirales, elípticas, cúmulos globulares, etc.).

Al proponer dos alternativas de acoplamiento en la curvatura-materia descritas en la subsecciones 5.1 y 5.2, nos proporciona un mayor rango de probabilidad de generalizar la acción (14) para una correcta descripción del campo gravitacional. Por otro lado, al usar la metodología de SimpleMC implementando el algoritmo MCMC, nos proporciona una técnica robusta para la determinación de parámetros cosmológicos. El método Markov-Chain-Monte-Carlo, estudiado a detalle en las subsecciones 6.1, 6.2 y 6.3, nos provee una alta fiabilidad en la probabilidad de que nuestros parámetros cosmológicos adquieran el valor que adquieren. Cuantitativamente, al hacer la comparación de los valores de  $\Omega_m = 0,2918^{+0,0537}_{-0,0456}$ ,  $\Omega_b h^2 = 0,0221^{+0,0007}_{-0,0007}$  y  $h = 0,6889^{+0,0641}_{-0,0517}$  de  $\Lambda$ CDM con respecto a los obtenidos de los modelos de acoplamiento débil y fuerte :  $\Omega_m = 0,2803^{+0,1370}_{-0,1413}$ ,  $\Omega_b h^2 = 0,0220 \pm 0,0006$  y  $h = 0,71113^{+0,1803}_{-0,1839}$ ;  $\Omega_m = 0,2884^{+0,1294}_{-0,1474}$ ,  $\Omega_b h^2 = 0,0220 \pm 0,0007$  y  $h = 0,6793^{+0,1891}_{-0,1780}$  respectivamente. Se aprecia que estos entran en el rango de los valores de referencia de  $\Lambda$ CDM, por lo que podemos concluir de aquí, que ambos modelos propuestos son igual de viables para la descripción de un universo plano y dominado por polvo que  $\Lambda$ CDM. Adicionalmente, la figura (3) nos proporciona una visión de cómo se distribuyen las densidades de probabilidad para los parámetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$  y  $h$  en el modelo  $\Lambda$ CDM (en rojo) y en los modelos de acoplamiento en curvatura-materia fuerte (verde) y un modelo de acoplamiento en curvatura-materia débil (azul); como se aprecia, al usar un modelo sin materia ni energía oscura, ajustan a valores iguales a un modelo con componentes oscuras. De esto concluimos que parámetros cosmológicos como  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$  y  $h$  pueden ser calculados con modelos con acoplamiento curvatura-materia débil y fuerte sin tomar en cuenta al sector oscuro, por lo que resulta igual de viable este tipo de modelos que  $\Lambda$ CDM.

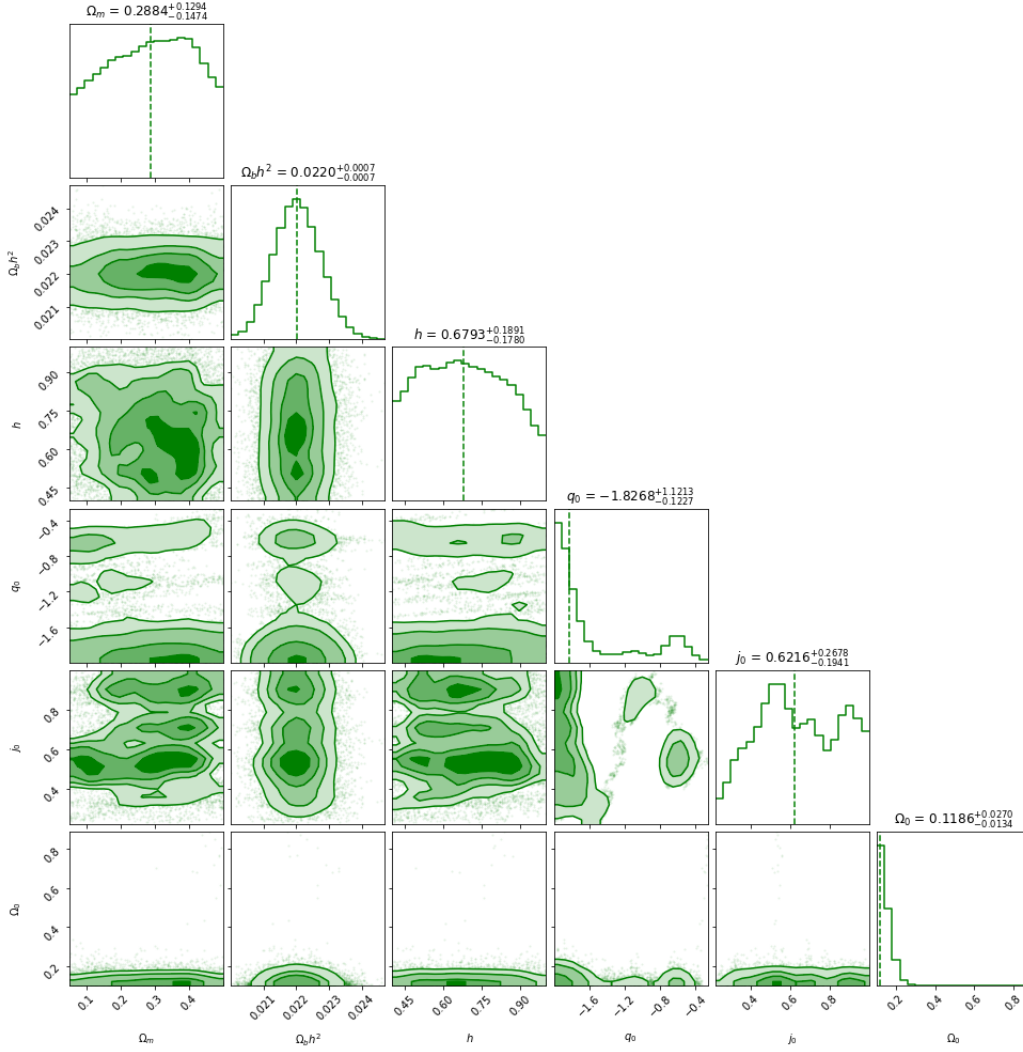
En cuanto a los parámetros  $q_0$ ,  $j_0$  y  $\Omega_0$ , como era de esperarse se consigue  $q_0 < 0$ , lo que nos asegura que el universo se encuentra en expansión. Los valores numéricos obtenidos en este trabajo para estos parámetros difieren un poco de (Barrientos et al. 2020), sin

Modelo/Parámetros	$\Omega_m$	$\Omega_b h^2$	$h$	$\Omega_0$	$q_0$	$j_0$
$\Lambda$ CDM	$0,2918^{+0,0537}_{-0,0456}$	$0,0221^{+0,0007}_{-0,0007}$	$0,6889^{0,0641}_{0,0517}$	...	...	...
Weak						
Barrientos, Bernal & Mendoza	...	...	...	$1,85257 \pm 0,28900$	$-0,428081 \pm 0,05646$	$-0,345827 \pm 0,08342$
T. Bernal & D. Márquez	$0,2803^{+0,1370}_{-0,1413}$	$0,0220 \pm 0,0006$	$0,71113^{+0,1803}_{-0,1839}$	$0,7589^{+0,0413}_{-0,0558}$	$-0,1921^{+0,1483}_{-0,1605}$	$-0,3095^{+0,0534}_{-0,0562}$
Strong						
Barrientos, Bernal & Mendoza	...	...	...	$79,0745 \pm 1,632$	$-0,417946 \pm 0,06891$	$-0,240291 \pm 0,1493$
T. Bernal & D. Márquez	$0,2884^{+0,1294}_{-0,1474}$	$0,0220 \pm 0,0007$	$0,6793^{+0,1891}_{-0,1780}$	$0,1186^{+0,0270}_{-0,0134}$	$-1,8268^{+1,1213}_{-0,1227}$	$0,6216^{+0,2678}_{-0,1941}$

**Table 1.** Mejores ajustes obtenidos para los parámetros cosmológicos  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $h$ ,  $\Omega_0$ ,  $q_0$  y  $j_0$ . Las primeras dos columnas hacen alusión al modelo utilizado con sus respectivos autores y los valores obtenidos para cada parámetro. Para los modelos débil (Weak) y fuerte (Strong) de Barrientos, Bernal & Mendoza los valores para los parámetros fueron obtenidos del artículo (Barrientos et al. 2020). Para los modelos débil (Weak) y fuerte (Strong) de T. Bernal & D. Márquez, los valores fueron obtenidos en este artículo.



**Figure 3.** Comparación de las distribuciones de probabilidad de los parámetros  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $h$  de  $\Lambda$ CDM, modelo débil y modelo fuerte en base a las observaciones BAO+SN para  $\Lambda$ CDM, SN para el acoplamiento fuerte y BAO para el acoplamiento débil, con 100000 muestras y haciendo un *burn-in* de 1000 puntos, usando el graficador *GetDist*.



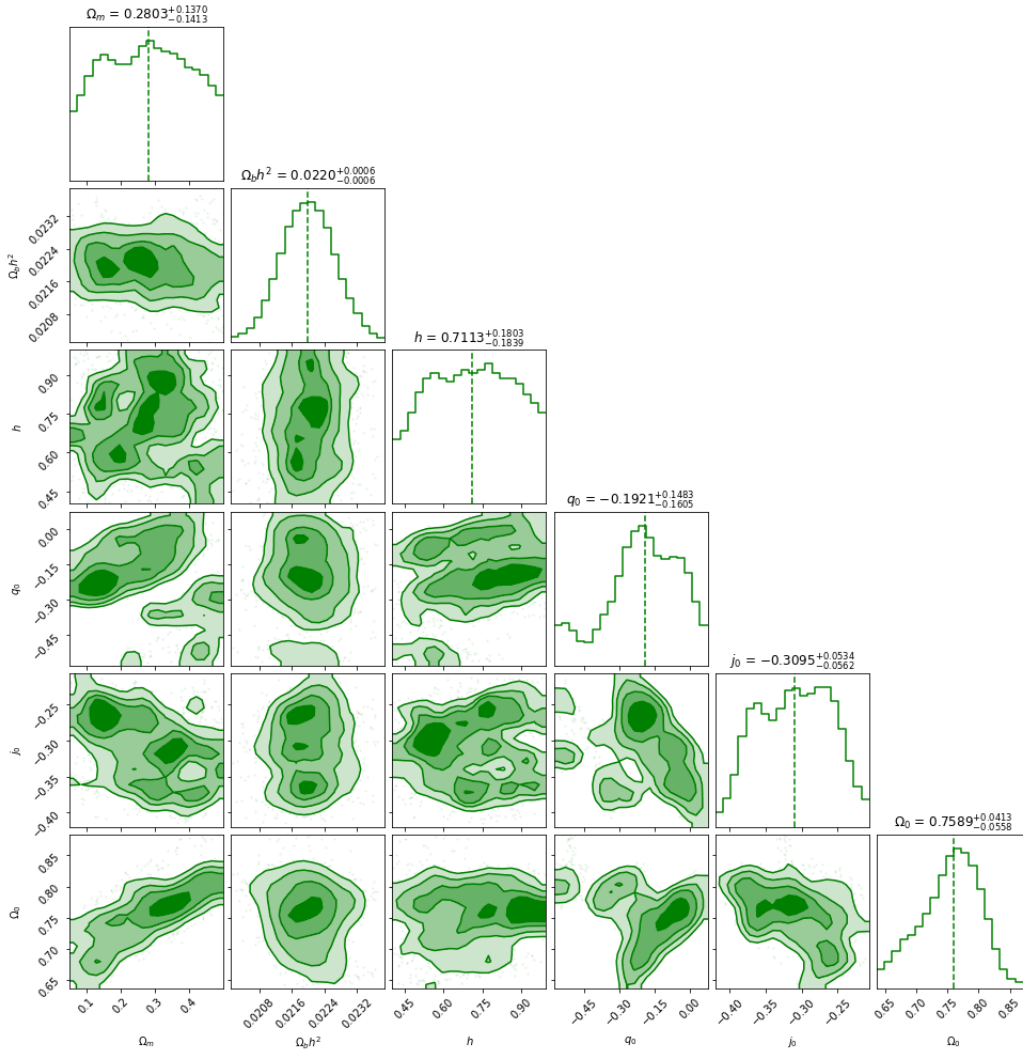
**Figure 4.** Ajuste de  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_0$ ,  $q_0$  y  $j_0$  con las observaciones BAO+SN para el acoplamiento fuerte con 100,000 muestras y haciendo un burn-in de 700 puntos, usando el graficador *simpleCorner*.

embargo la mayoría de ellos se encuentran cercanos o iguales debido a las incertidumbres. Esto puede deberse a varios factores, como por ejemplo, las observaciones tomadas, el número de ensayos o muestras hechas, el burn-in, el método de ajuste usado, entre otros. Aún queda mucho por discutir para estos parámetros y su igualdad con  $\Lambda$ CDM, por mientras se queda como un reto a superar.

## Referencias

- A. Liddle 2013, An Introduction to Modern Cosmology, 2 edn. Wiley, <https://www.wiley.com/en-us/An+Introduction+to+Modern+Cosmology+%2C+2nd+Edition-p-9781118723418>
- Anderson L., et al., 2014, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441, 24
- Aubourg É., et al., 2015, *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 92
- Barrientos E., Bernal T., Mendoza S., 2020
- Bernal T., Capozziello S., Hidalgo J. C., Mendoza S., 2011, *European Physical Journal C*, 71, 1
- Betoule M., et al., 2014, *Astronomy and Astrophysics*, 568
- Capozziello S., Faraoni V., 2011, *Beyond Einstein Gravity*. Springer, doi:10.1007/978-94-007-0165-6

- Collaboration P., et al., 2020, *Astronomy & Astrophysics*
- Conchi A., 2012, Tema 8: Métodos de cadenas de Markov Monte Carlo, <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/causin/esp/2012-2013/SMB/Tema8.pdf>
- Del Popolo A., Le Delliou M., 2017, *Galaxies*, 5
- Delubac T., et al., 2015, *Astronomy and Astrophysics*, 574
- Famaey B., Binney J., 2005, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 363, 603
- Font-Ribera A., et al., 2014, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014
- M. M., 1983, *The Astrophysical Journal*, 270, 365
- Márquez Castillo D. R., 2020, Repositorio - XXX Verano de la investigación científica, <https://github.com/DavidRogelioMC/XXX-Verano-de-investigacion>
- Mendoza S., Hernandez X., Hidalgo J. C., Bernal T., 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 411, 226
- Milgrom M., 1983, *The Astrophysical Journal*, 270, 371
- NASA SCIENCE 2020, Dark Energy, Dark Matter, <https://science.nasa.gov/astrophysics/focus-areas/what-is-dark-energy>
- Nasa 2013, What Is a Supernova?, <https://www.nasa.gov/audience/forstudents/5-8/features/nasa-knows/what-is-a-supernova.html>
- Padilla L. E., Tellez L. O., Escamilla L. A., Vazquez J. A., 2019
- Slosar A., Vazquez J., 2020, *simplemc* 1.9.0, <https://github.com/>



**Figure 5.** Ajuste de  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_0$ ,  $q_0$  y  $j_0$  con las observaciones BAO para el acoplamiento débil con 100, 000 muestras y haciendo un *burn-in* de 700 puntos, usando el graficador *simpleCorner*.

[slosar/april](https://doi.org/10.1088/0034-4885/79/9/096901)

Sofue Y., Rubin V., 2001, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 39, 137

Wang B., Abdalla E., Atrio-Barandela F., Pavón D., 2016, Dark matter and dark energy interactions: Theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures ([arXiv:1603.08299](https://arxiv.org/abs/1603.08299)), doi:10.1088/0034-4885/79/9/096901, <http://arxiv.org/abs/1603.08299> <http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/79/9/096901>

Yao W. M., et al., 2006, *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 33

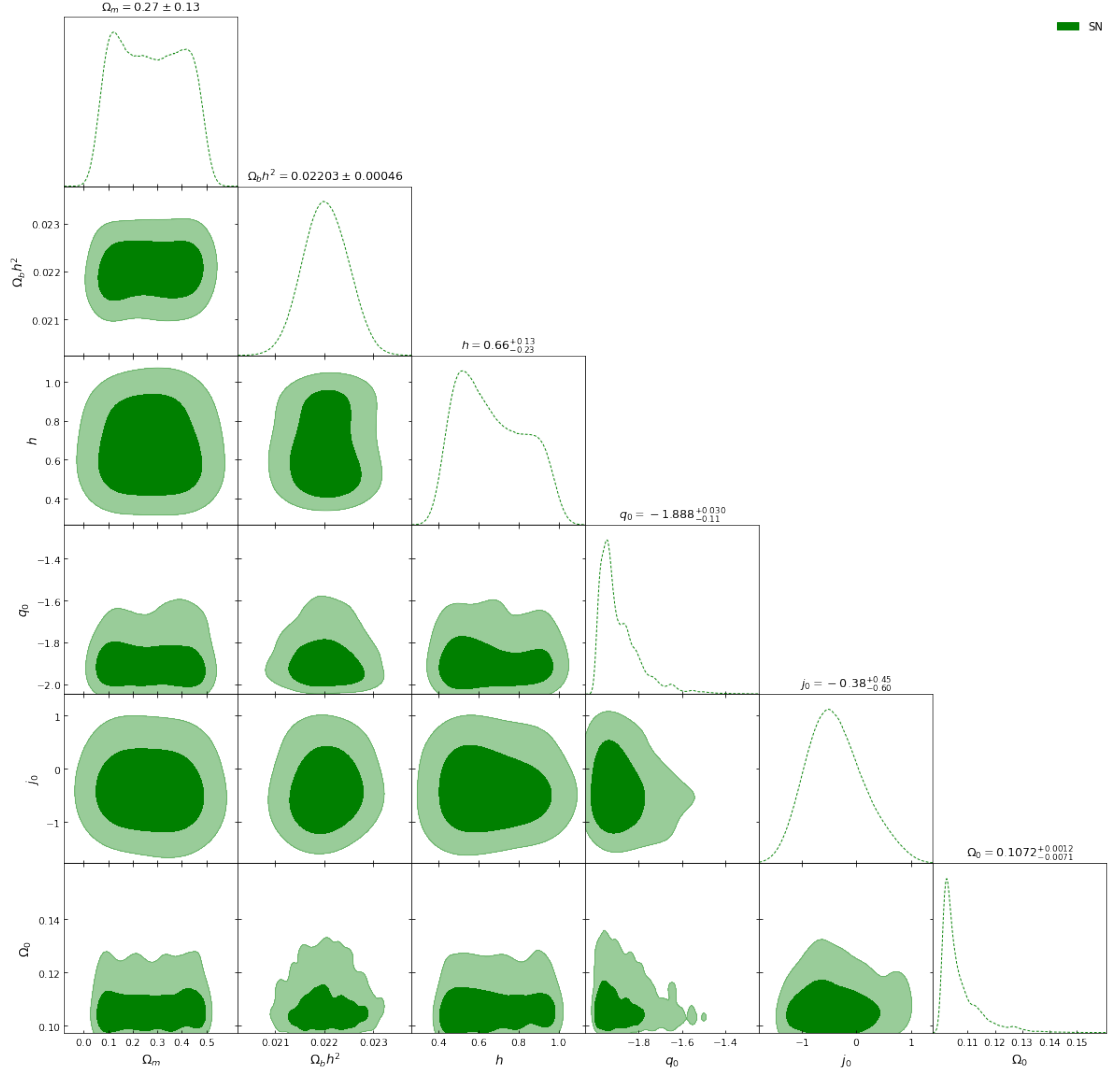
## APÉNDICE A: MODIFICACIONES AL CÓDIGO SIMPLEMC

Las modificaciones al código pueden ser consultadas en (Márquez Castillo 2020). Se introdujeron primero nuestros parámetros cosmológicos a estimar:  $\Omega$ ,  $q$  y  $j$  en el presente. Para esto los definimos en el archivo *paramDefs.py* ubicado en la carpeta de *cosmo* de (Slosar & Vazquez 2020). Las figuras (A1) y (A2) muestran explícitamente las definiciones: uno para el acoplamiento débil y otro para el acoplamiento fuerte; este último solo se cambió el rango de búsqueda

del parámetro  $\Omega_0$ . La primera entrada de *Parameter*, es el nombre que se le asignó al parámetro, la segunda entrada es el valor inicial, la tercera es el tamaño de los pasos que hará el código en el intervalo dado en la tercera entrada. La última entrada corresponde a la escritura en LaTeX.

Posteriormente en la carpeta *models* de Slosar & Vazquez (2020), se modifica un modelo genérico para introducir los parámetros de Hubble de cada teoría, en este caso utilicé el modelo *owaCDM* ubicado en el archivo *owa0CMDCosmology.py*. Primero se llaman nuestros parámetros de *paramDefs.py* como *from simplemc.cosmo.paramDefs import w\_par, wa\_par, Ok\_par, q0, j0, Omega0*. Después, como se aprecia en las figuras (A3) y (A4), se introducen nuestros parámetros y actualizan con cada iteración; además, como se había mencionado en la sección 6, las variaciones o estimaciones de los parámetros por defecto que optimiza el modelo *owaCMD*; se descartan haciendo *varyw=False*, *varywa=False*, *varyOk=False*.

Finalmente se coloca el parámetro de Hubble normalizado para el acoplamiento débil (ecuación 37) y fuerte (ecuación 44) en el código, como se vislumbra en las figuras (A4) y (A5). Las observaciones

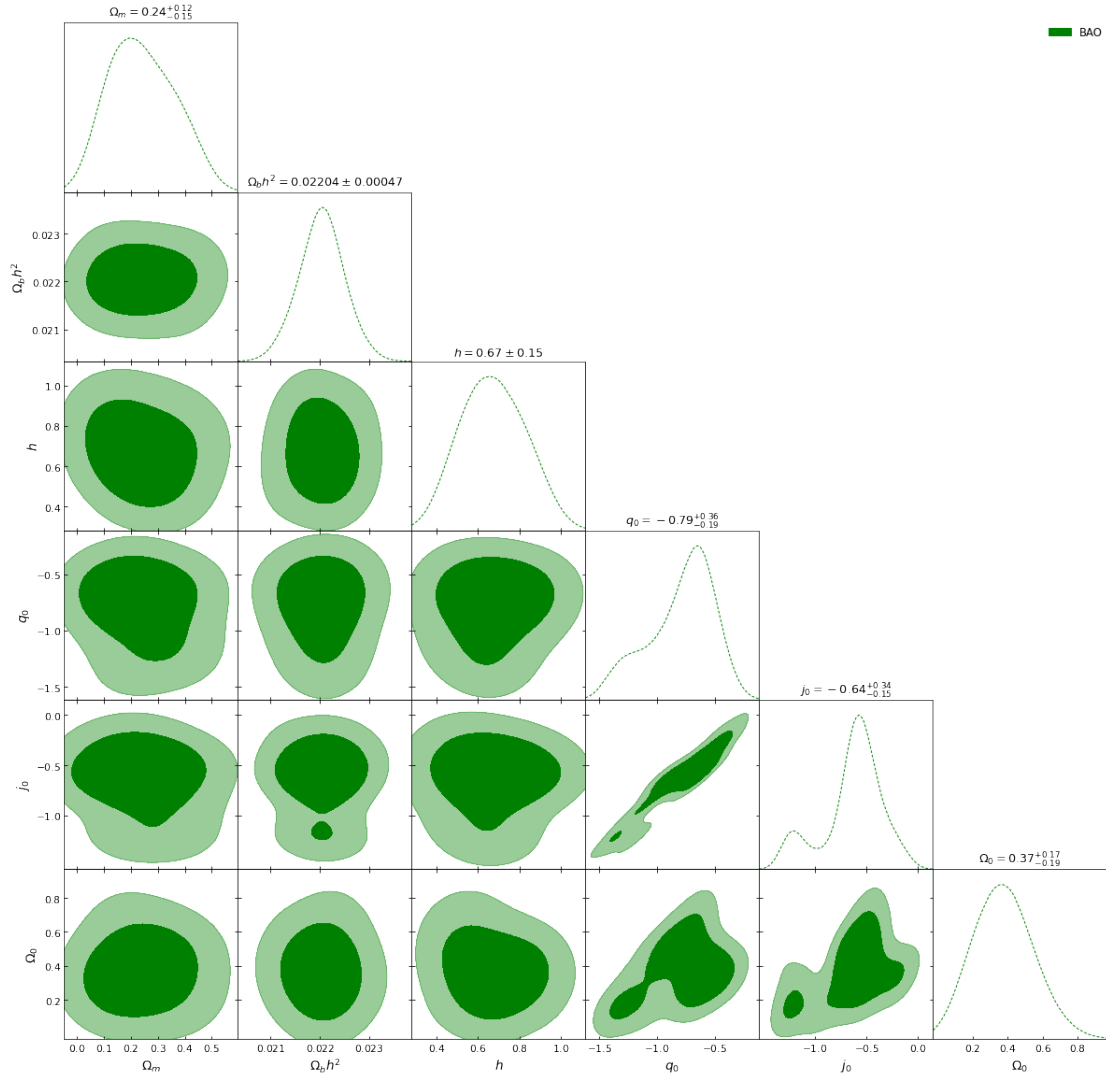


**Figure 6.** Ajuste de  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_0$ ,  $q_0$  y  $j_0$  con las observaciones SN para el acoplamiento fuerte con 100, 000 muestras y haciendo un *burn-in* de 5000 puntos, usando el graficador *GetDist*.

utilizadas se introdujeron en *dataset* del archivo *baseConfig.ini*; para el caso del modelo débil, *dataset* = *BBAO+LBAO+LaBAO+LxBAO*, es decir, solo se ocuparon observaciones BAO. Mientras que para el modelo fuerte, se utilizaron las observaciones de BAO+SN, esto es *dataset* = *SN+BBAO+LBAO+LaBAO+LxBAO*.

This paper has been typeset from a  $\text{\LaTeX}$  file prepared by the author.





**Figure 7.** Ajuste de  $\Omega_m$ ,  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_0$ ,  $q_0$  y  $j_0$  con las observaciones BAO para el acoplamiento débil con 100,000 muestras y haciendo un *burn-in* de 1000 puntos, usando el graficador *GetDist*.

```
q0 = Parameter("q0", -0.5, 0.01, (-2.0, 0.5), "q_0")
j0 = Parameter("j0", -0.3, 0.01, (-2.0, 1.0), "j_0")
Omega0 = Parameter("Omega0", 0.8, 0.01, (0.1, 2.0), "\Omega_0")
```

**Figure A1.** Definición de parámetros en SimpleMC para el acoplamiento débil.

```
q0 = Parameter("q0", -0.3, 0.02, (-2.0, 0.5), "q_0")
j0 = Parameter("j0", 0.5, 0.02, (-2.0, 1.0), "j_0")
Omega0 = Parameter("Omega0", 1.0, 0.1, (0.1, 90.0), "\Omega_0")
```

**Figure A2.** Definición de parámetros en SimpleMC para el acoplamiento fuerte.

```

class owa0CDMCosmology(LCDMCosmology):
    def __init__(self, varyw=False, varywa=False, varyOk=False, varyq0=True, varyj0=True, varyOmega0=True):
        # three parameters: w, wa, Ok

        self.varyw = varyw
        self.varywa = varywa
        self.varyOk = varyOk

        self.varyq0 = varyq0
        self.varyj0 = varyj0
        self.varyOmega0 = varyOmega0

        self.Ok = Ok_par.value
        self.w0 = w_par.value
        self.wa = wa_par.value

        self.q0=q0.value
        self.j0=j0.value
        self.Omega0 = Omega0.value

        LCDMCosmology.__init__(self)

    # my free parameters. We add Ok on top of LCDM ones (we inherit LCDM)
    def freeParameters(self):
        l = LCDMCosmology.freeParameters(self)
        if (self.varyw): l.append(w_par)
        if (self.varywa): l.append(wa_par)
        if (self.varyOk): l.append(Ok_par)
        if (self.varyq0): l.append(q0)
        if (self.varyj0): l.append(j0)
        if (self.varyOmega0): l.append(Omega0)
        return l

```

Figure A3. Primera modificación a SimpleMC.

```

def updateParams(self, pars):
    ok = LCDMCosmology.updateParams(self, pars)
    if not ok:
        return False
    for p in pars:
        if p.name == "w":
            self.w0 = p.value
        elif p.name == "wa":
            self.wa = p.value
        elif p.name == "Ok":
            self.Ok = p.value
            self.setCurvature(self.Ok)
            if (abs(self.Ok) > 1.0):
                return False
        elif p.name == "q0":
            self.q0 = p.value
        elif p.name == "j0":
            self.j0 = p.value
        elif p.name == "Omega0":
            self.Omega0 = p.value
    return True

#Weak
def RHSquared_a(self,a):
    c=3e8 # m/s
    beta = -2
    gamma = -3
    H0 = 67.4*1000/3.085e22
    kk = -2.3e-5 #Producto de la k y k^prime cuando gamma=-3 y beta = -2
    a0 = 1.2e-10 # m/s^2
    Z= 1 + (gamma-1)*((self.q0-1)/gamma + (self.j0-self.q0-2)/(1-self.q0))
    return ((a0/H0*c)**2)*(((kk*(self.q0-1)**(1-gamma))/((6*gamma)*gamma*Z))*((3*self.Omega0/(8*N.pi))**beta))**(1/(gamma-beta))

```

Figure A4. Segunda modificación a SimpleMC. Parámetro de Hubble normalizado para el acoplamiento débil.

```

#Strong
def RHSquared_a(self,a):
    c=3e8 # m/s
    beta = 3
    gamma = -3
    tau=-3.0
    H0 = 70*1000/3.085e22
    kk = 9/(((N.pi)**2)*(4**5)) #Producto de la k y k^prime cuando gamma=-3 y beta = 3
    a0 = 1.2e-10 # m/s^2
    Z= 1 + (1-gamma)*((1-self.q0)/gamma - (self.j0-self.q0-2)/(1-self.q0))+tau*beta
    return ((a0/H0*c)**2)*(((6*(self.q0-1))**(1-gamma))*((8*N.pi*kk)/(3*gamma*Z))*((3*self.Omega0/(8*N.pi))**(1-beta))**(1/(gamma+beta-1)))

```

**Figure A5.** Modificación al parámetro de Hubble normalizado para el acoplamiento fuerte con SimpleMC.



Vo. Bo.  
**Dra. Tula Bernal Marín**  
**Profesora Investigadora C2 Tiempo Completo**  
**Universidad Autónoma Chapingo**