Análisis Método del punto fijo

Juan José Bolaños, David Andres Duarte, David Saavedra

21 de Febrero del 2021

1 Introducción

Punto Fijo es uno de los diversos métodos que encontramos para hallar las raıces de una función, este método nos permite calcular las raıces de forma eficientes y efectiva.

El método numérico del punto fijo es un algoritmo iterativo que dada una función continua y derivable en un intervalo $[a, b]$, podemos hallar la raíces de dicha ecuación $f(x) = 0$. A la respectiva solución de esta ecuación le llamamos punto fijo de la función $g(x)$. Por ende encontrar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, equivale a hallar los puntos fijos de $g(x)$.

2 Condiciones para aplicar el método

- Si g ϵ C[a,b] y g(x) ϵ [a,b] para todo x [a,b], entonces g posee un punto fijo en [a,b]. Este punto fijo generalmente no tiene que ser único.
- Además, si la derivada de g(x) existe en (a,b) y |g'(x)| $\leq$ k $<$ 1, $\forall$ x ϵ (a,b), entonces g posee un fijo único en [a,b].

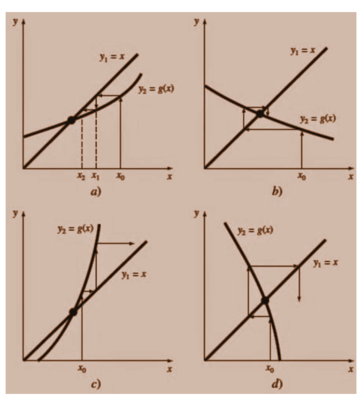


Figure 1: Intersección donde se encuentra la raíz

3 Diagrama de flujo Método del punto fijo

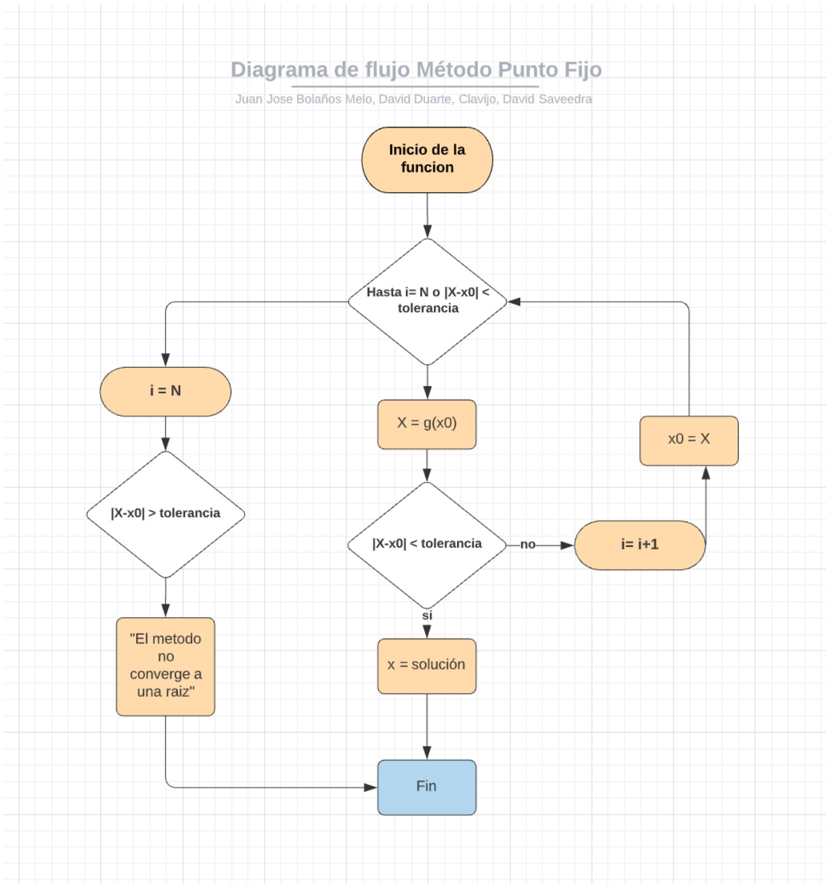


Figure 2: Diagrama de flujo del método del punto fijo

4 Comportamiento del método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia

Observamos anteriormente que entre más grande es el número de iteraciones la pérdida de significancia es mucho menor, sin embargo, en algunos casos la cantidad de iteraciones que se hacen para encontrar la raíz de una función es bastante y en esta situación la pérdida de significancia es notable.

5 Gráfica relación entre ϵ_{i+1} y ϵ_i

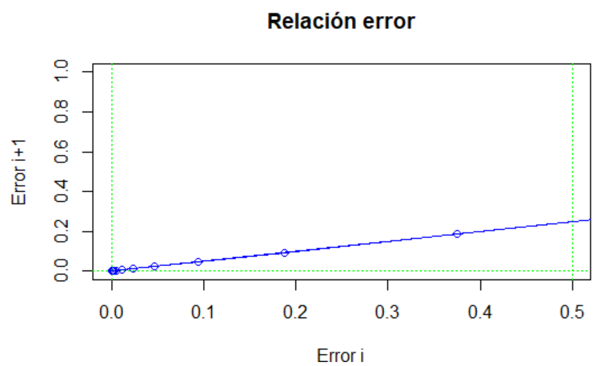


Figure 3: relación entre ϵ_{i+1} y ϵ_i

6 Cómo se puede solucionar el problema de significancia

En el método de punto fijo resolver el problema de significancia resulta complejo, ya que este está relacionado con la cantidad de iteraciones realizadas por el algoritmo para hallar el resultado, mientras más iteraciones se realizan, hay mayor pérdida de significancia. La única manera de remediar esto sería empezar con un X0 aproximado que nos permita calcular la raíz con menos iteraciones o limitando más el intervalo donde se quiera hallar la raíz.

7 Método cuando hay más de dos raíces

Cuando existen dos raíces o más el método de punto fijo es ineficiente, el método se va a centrar en encontrar la raíz que esté relacionada con el g(x) que se despeja a partir de la función f(x).

Un ejemplo es la función trabajada $f(x) = (cos(x)^2 - x^2)$. Donde si despejamos el $g(x)$, nos sale una raíz, la cual puede tomar un valor positivo o negativo: $x^2 = cos(x)^2$.Por lo tanto el g(x) puede ser $cos(x)o - cos(x)$.Si utilizamos el g(x) positivo podremos encontrar la raíz positiva, y por el contrario si tomamos el $g(x)$ negativo obtendremos la raíz negativa, teniendo en cuenta también los intervalos dados.

8 Explicación geométrica del algoritmo

La resolución de la ecuación $g(x) = x$ se apoya en descubrir la intersección de la gráfica de $y = g(x)$ con la recta de pendiente unidad $y = x$. A esta intersección se le conoce como punto fijo de $g(x)$.

Se puede revisar que una vez que la derivada de $g(x)$ es más grande que la unidad en un intervalo que tiene al punto fijo, la sucesión de valores calculados diverge, alejándose de la solución.

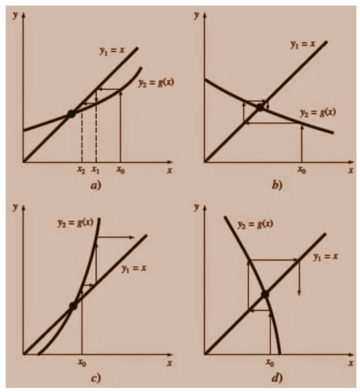


Figure 4: Intersección donde se encuentra la raíz

9 Método cuando la función es periódica, par o impar

El método no tiene problemas en encontrar la raíz de funciones periódicas, pares o impares, es muy efectivo; son características que no influyen, aunque podría pasar que en algún caso pueden ocurrir problemas con el $x0$ inicial que se escoge para evaluar el $g(x)$ e iniciar la interacción, sin embargo el algoritmo calcula este x0 inicial basado en los intervalos dados $[a, b]$: calculando el punto medio: $(a + b/2)$.

Un problema que puede presentar el algoritmo es encontrar el g(x) para funciones complejas, si el g(x) de la función es el incorrecto, no se va a poder encontrar la raíz.

10 Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

El método de punto fijo como pudimos observar es un método iterativo para hallar la raíz de una función. basado en el teorema de punto fijo que tiene las tres condiciones fundamentales antes mencionadas. Al comparar su comportamiento con respecto a la solución de Taylor trabajada en clases. nos encontramos con que el método del punto fijo es un método que se puede decir que converge con rapidez y cuando converge, es de mucha precisión. otra ventaja con respecto a Taylor es que no necesita de un intervalo para funcionar sino de únicamente un punto perteneciente al intervalo donde esté la raíz. Por otro lado encontramos problemas ya que este método no garantiza la convergencia. y en algunos casos la función g(x) correcta puede ser muy compleja de despejar y por ende encontrar. también nos encontramos con que hay demasiadas formas de g(x) y no existe regla para escoger la correcta.

11 Gráfica comportamiento con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

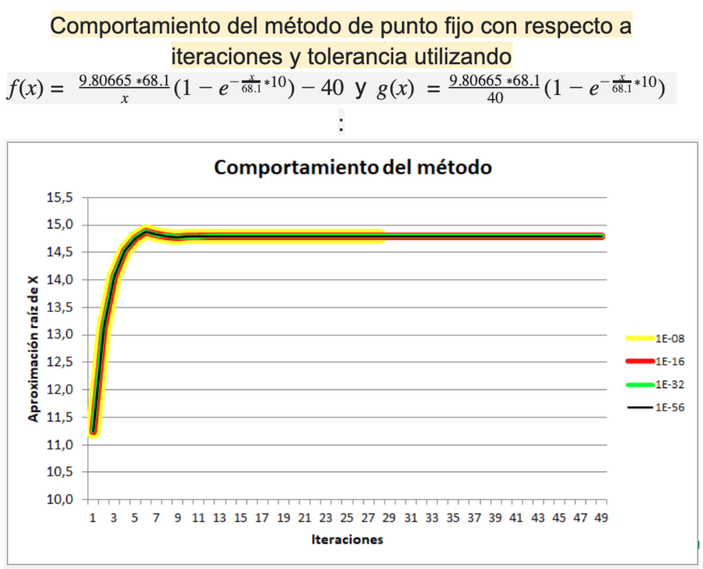


Figure 5: comportamiento tolerancia vs el número de iteraciones

12 Como se comporta el método con respecto al de bisección

Graficamos la función $f(x) = cos^2(x) - x^2$, donde nos muestra su raíz tomando como intervalo $[0, 3]$:

El método de punto fijo en comparación al método de bisección, resulta menos eficiente si nos centramos en la cantidad de iteraciones; el método de bisección realiza menos iteraciones, sin embargo, el método de punto fijo encuentra un resultado más exacto en cuanto al de bisección si lo comparamos con el resultado de Geogebra.

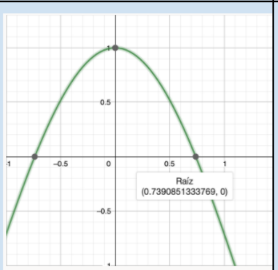
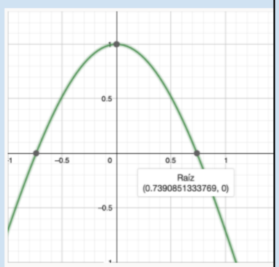
<table>
<tr><td>$f(x) = cos^2(x) - x^2$
$g(x) = cos(x)$</td><td>Método de bisección en R</td><td>Método de punto fijo en R</td></tr>
<tr><td>
</td><td>i = 1 X=0.5 E=0.5
i = 2 X=0.75 E=0.25
i = 3 X=0.625 E=0.125
i = 4 X=0.6875 E=0.0625
i = 5 X=0.71875 E=0.03125
i = 6 X=0.734375 E=0.015625
i = 7 X=0.7421875 E=0.0078125
i = 8 X=0.7382812 E=0.00390625
i = 9 X=0.7402344 E=0.001953125
i = 10 X=0.7392578 E=0.0009765625
i = 11 X=0.7387695 E=0.0004882812
i = 12 X=0.7390137 E=0.0002441406
i = 13 X=0.7391357 E=0.0001220703
i = 14 X=0.7390747 E=6.103516e-05</td><td>35 0.73908513320202
36 0.73908513320930
37 0.73908513321294
38 0.73908513321476
39 0.73908513321567
40 0.73908513321521
41 0.73908513321499
42 0.73908513321510
43 0.73908513321516
44 0.73908513321518
45 0.73908513321517
46 0.73908513321516
47 0.73908513321516
48 0.73908513321516
49 0.73908513321516
50 0.73908513321516
51 0.73908513321516
51 Raíz = 0.73908513321516 con error menor que -> 1e-56</td></tr>
</table>

Figure 6: Bisección vs Punto fijo

13 Como se comporta el método con respecto al de Δ^2Aitken

El método o proceso Δ^2 de Aitken es un método de aceleración de la convergencia, como el de punto fijo el cual como vimos en el código consiste en hallar la raíz de una ecuación en un número de iteraciones. En comparación con el de Aitken vemos que el de punto fijo tiene una mayor cantidad de iteraciones para encontrar las raíz de la función G(x) que se le pasa, en cambio el método de Aitken consigue una cantidad menor de iteraciones puesto que la convergencia rápida permite que en cada iteración, el número de dígitos correctos en la respuesta se duplique y generando así doble evaluación de la función tanto para $f(x_n)$ como para $f(x_n + h)$.

$f(x) = cos^2(x) - x^2$ $g(x) = cos(x)$	Método Δ^2 de Aitken en R	Método de punto fijo en R



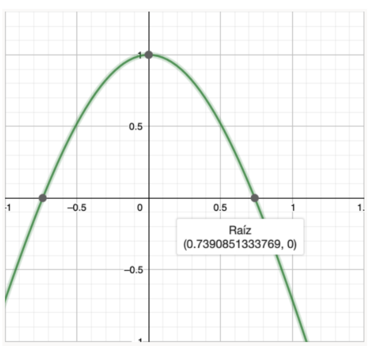

```
======================================
Iteración       Aitken
======================================
   1          0.500000000000000
   2          0.750000000000000
   3          0.750000000000000
   4          0.750000000000000
   5          0.750000000000000
   6          0.734375000000000
   7          0.734375000000000
   8          0.738281250000000
   9          0.740234375000000
   10          0.739257812500000
   11          0.738769531250000
   12          0.739013671875000
   13          0.739135742187500
   14          0.739074707031250
   15          0.739074707031250
   16          0.739089965820312
   17          0.739089965820312
   18          0.739086151123046
   19          0.739084243774414
   20          0.739085197448730
   21          0.739085197448730
   22          0.739084959030151
   23          0.739085078239440
   24          0.739085137844085
   25          0.739085137844085
   26          0.739085137844085
   27          0.739085137844085
   28          0.739085134118795
   29          0.739085132256150
   30          0.739085133187472
   31          0.739085133187472
   32          0.739085133187472
   33          0.739085133187472
   34          0.739085133187472
   35          0.739085133216576
   36          0.739085133216576
   37          0.739085133216576
   38          0.739085133216576
   39          0.739085133214757
   40          0.739085133214757
   41          0.739085133215212
   42          0.739085133215212
   43                         NA
```

```
ación         x
------------------------------
1      1.250000000000000
2      0.875000000000000
3      0.687500000000000
4      0.781250000000000
5      0.734375000000000
6      0.757812500000000
7      0.746093750000000
8      0.740234375000000
9      0.737304687500000
10      0.738769531250000
11      0.739501953125000
12      0.739135742187500
13      0.738952636718750
14      0.739044189453125
15      0.739089965820312
16      0.739067077636718
17      0.739078521728515
18      0.739084243774414
19      0.739087104797363
20      0.739085674285888
21      0.739084959030151
22      0.739085316658020
23      0.739085137844085
24      0.739085048437118
25      0.739085093140602
26      0.739085115492343
27      0.739085126668214
28      0.739085132256150
29      0.739085135050118
30      0.739085133653134
31      0.739085132954642
32      0.739085133303888
33      0.739085133129265
34      0.739085133216576
35      0.739085133172920
36      0.739085133194748
37      0.739085133205662
38      0.739085133211119
39      0.739085133213848
40      0.739085133215212
41      0.739085133214530
42      0.739085133214871
43      0.739085133215041
44      0.739085133215127
44  Raíz =  0.7390851332151698  con error menor que ->  1e-16
```

Figure 7: Aitken vs Punto fijo

14 Resultados raíces y validación

$f(x) = cos^2(x) - x^2$ $g(x) = cos(x)$	Resultado Algoritmo en R




```
I =  33  Raíz =  0.73908513  con error menor que ->  1e-08
I =  44  Raiz =  0.7390851332155108  con error menor que ->  1e-16
I =  44  Raiz =  0.73908513321551083663507597520947  con error menor que ->  1e-32
I =  44  Raíz =  0.73908513321551083663507597520947456359863281250000000000  con error menor que ->  1e-56
```

Figure 8: Resultado raíz comparado con resultado en R punto a

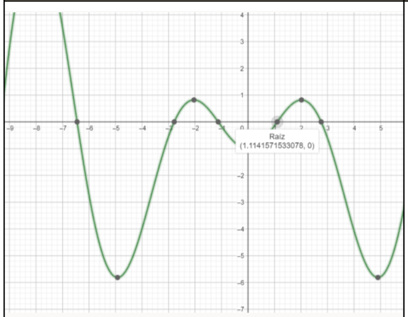
$f(x) = x\,sin(x) - 1\ en\ [-1,2]$ $g(x) = \frac{1}{sin(x)}$	Resultado Algoritmo en R
	I = 32 Raíz = 1.11415714 con error menor que -> 1e-08 I = 44 Raíz = 1.1141571408716828 con error menor que -> 1e-16 I = 44 Raíz = 1.11415714087168282730999635532498 con error menor que -> 1e-32 I = 44 Raíz = 1.11415714087196704440430039539933204650878906250000000000 con error menor que -> 1e-56

Figure 9: Resultado raíz comparado con resultado en R punto b

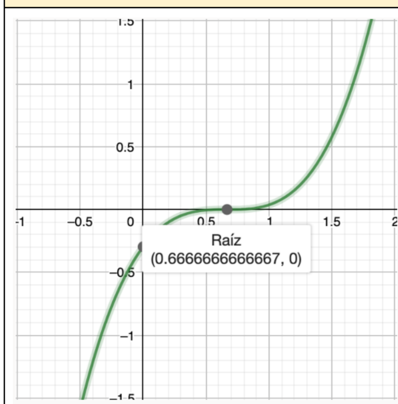
$f(x) = x^3 + 2x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{27}$ $g(x) = \frac{(-x^3+2x^2+\frac{8}{27})*3}{4}$	Resultado Algoritmo en R
	I = 9 Raíz = 0.66699219 con error menor que -> 1e-08 I = 18 Raíz = 0.6666660308837891 con error menor que -> 1e-16 I = 18 Raíz = 0.66666603088378906250000000000000 con error menor que -> 1e-32 I = 18 Raíz = 0.66666603088378906250000000000000000000000000000000000 con error menor que -> 1e-56

Figure 10: Resultado raíz comparado con resultado en R punto c

15 Referencia

References

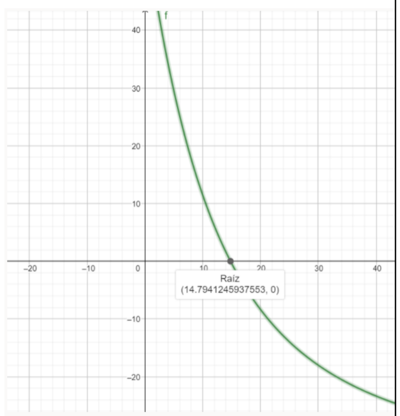
[1] Herrera Daza, E., *Raıces de una Funcion* 1ª ed. Bogotá, 2020

[2] B, L., *El teorema del punto fijo* 1ª ed. Valencia: Universidad de Murcia, 2012

$f(x) = \frac{9.80665 * 68.1}{x}(1 - e^{-\frac{x}{68.1} * 10}) - 40$

$g(x) = \frac{9.80665 * 68.1}{40}(1 - e^{-\frac{x}{68.1} * 10})$

Resultado Algoritmo en R



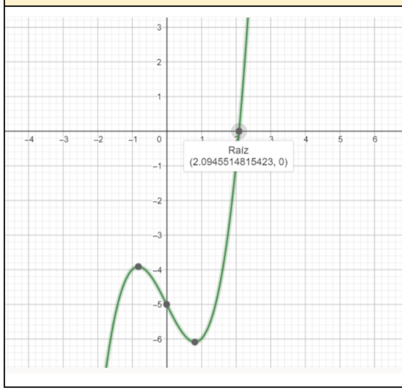

```
I =  28  Raíz =  14.79412462  con error menor que ->  1e-08
I =  49  Raíz =  14.7941246213717257  con error menor que ->  1e-16
I =  49  Raíz =  14.79412462137172568077403411734849  con error menor que ->  1e-32
I =  49  Raíz =  14.794124621371725680774034117348492145538330078125000000000  con error menor que ->  1e-56
```

Figure 11: Resultado raíz comparado con resultado en R punto d

$f(x) = x^3 - 2x - 5$

$g(x) = \frac{2x+5}{x^2}$

Resultado Algoritmo en R




```
I =  28  Raíz =  1.99999999  con error menor que ->  1e-08
I =  44  Raíz =  1.9999999999999574  con error menor que ->  1e-16
I =  44  Raíz =  1.99999999999995736743585439398885  con error menor que ->  1e-32
I =  44  Raíz =  1.9999999999999573674358543939888477325439453125000000  con error menor que ->  1e-52
```

Figure 12: Resultado raíz comparado con resultado en R punto e

[3] MARÍN HERNÁNDEZ, A., *Métodos Numéricos* 1ª ed. Xalapa, Veracruz :Universidad Veracruzana , 2019