Integración Metodos Numéricos

En general para para aproximar la integral se utiliza una aproximación a traves de integrar un polinomio interpolador es decir: **fórmulas que se basan en la idea de integrar una función polinomial en vez**: **NEWTON-COTES.** Los diferentes métodos de integración numérica dependen del métodos de interpolación, si lo puntos estan igualmente espaciados:diferencias;Newton.

Las fórmulas de Newton-Cotes a desarrollar son las tres primeras, constituidas por las reglas del trapecio y de Simpson (regla de un tercio y de tres octavos). El algoritmo de Romberg forma parte de una técnica conocida como método de extrapolación de Richardson.

Teorema:

Sea $f \in C^{n+1}[a,b]$. Sea $P_n(x)$ el polinomio de grado $\leq n$ que interpola f en los $n+1$ puntos (distintos) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en el intervalo $[a,b]$. Existe $\eta \in]a,b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} y_k \int_a^b \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}\,dx + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx. \tag{7.3}$$

siempre y cuando $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ sea de un mismo signo en $[a,b]$.

Se denomina grado de precisión de la fórmula de integración al **máximo grado de los polinomios** que son integrados exactamente por dicha fórmula. Para calcular numéricamente el valor de una integral se recurre por lo general a un sumatorio de ciertos valores de la función, o de una aproximación de ella, en unos puntos llamados nodos, xi, multiplicados por unos coeficientes de ponderación denominados pesos, wi.

Regla del Trapecio.

En la regla del trapecio, para aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ dividimos el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos: si $h=(b-a)/n$ y $x_i = a + i\,h$, en cada subitervalo $[x_i, x_{i+1}]$, cambiamos la función f por el polinomio interpolante de grado 1 (figura 7.1).

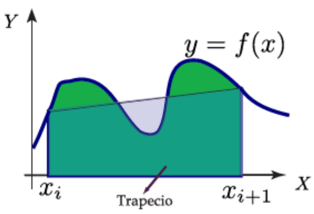


Figura 7.1: Regla del trapecio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$$

Para aproximar cada integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx$ necesitamos el polinomio que interpola a f en $(x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))$:

(Regla compuesta del trapecio).

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)-\frac{(b-a)h^2}{12}\cdot f''(\xi) \qquad (7.6)$$

con $\xi \in]a,b[,\ h=\dfrac{b-a}{n}$ **y** $x_i = a+i\cdot h,\ i=0,1,2,\ldots,n.$

$\int_0^1 \sqrt{x}\,\text{sen}\,x\,dx$

Crear función Trapecio: ↓ Tolerancia

def Trapecio(a, b, f, n)

a: límite inf

b: límite sup

f: función calcular $\int$

n: # subintervalos

\# Partición

S = 0

h = $\dfrac{b-a}{n}$

\# Tamaño paso

\# a+i*h

for i in range(1, n)

i = 1

a+1*h = x_1

S = S + f(a+i*h)

i = 2

a+2*h = x_2

Resultado = (f(a) + f(b) + 2*S)*$\dfrac{h}{2}$

Aunque sabemos que $\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\,dx = 2$, vamos a usar esta integral para ver como funciona la regla compuesta del trapecio. Aproximar $\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\,dx$ con tres subintervalos y estimar el error. Además determinar n tal que el error sea $|E| \leq 0.5\times 10^{-8}$.

Solución: $n=3,\ h=\dfrac{\pi-0}{3}=\dfrac{\pi}{3},\ x_0=0,\ x_1=\dfrac{\pi}{3},\ x_2=\dfrac{2\pi}{3}$ y $x_3=\pi$. Entonces,

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\,dx \approx \frac{\pi/2}{3}\left[\text{sen}(0)+\text{sen}(\pi)+2\cdot(\text{sen}(\pi)+\text{sen}(2\pi/3))\right] = 1.813799364234\ldots$$

El error estimado $|E|$, en valor absoluto, es $\leq \dfrac{\pi\cdot(\pi/3)^2}{12}M$ donde M es el máximo absoluto de $|f''(x)|$ en $[0,\pi]$. En este caso $M=1$ y entonces $|E| \leq 0.287095\ldots$

Para determinar n tal que $|E| \leq 0.5\times 10^{-8}$. Procedemos así: Sabemos que el máximo absoluto de f'' en $[0,\pi]$ es $M=1$, entonces

$$|E| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \cdot M = \pi \cdot \frac{(\pi/n)^2}{12} = \frac{\pi^3}{12n^2}$$

Como queremos $|E| \leq 0.5 \times 10^{-8}$, basta con que $\dfrac{\pi^3}{12n^2} \leq 0.5 \times 10^{-8}$. Despejando obtenemos,

$$n \geq \sqrt{\frac{\pi^3}{12 \cdot 0.5 \times 10^{-8}}} \approx 22732.603$$

Tomando $n = 22732$, obtenemos la aproximación $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\, dx \approx 1.99999999681673$, que efectivamente tiene ocho decimales exactos.

Regla del Simpson.

En vez de usar interpolación lineal, usamos interpolación cuadrática buscando una mejora en el cálculo. Por simplicidad, vamos a hacer el análisis en el intervalo $[x_0, x_2]$. Para construir la parábola que interpola f necesitamos los puntos x_0, x_1 y x_2.

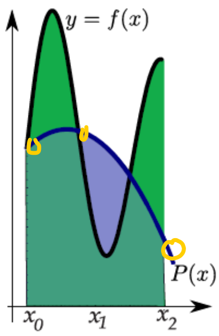
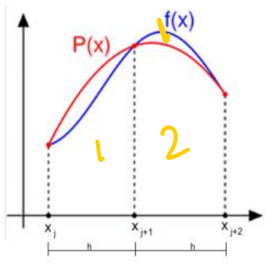
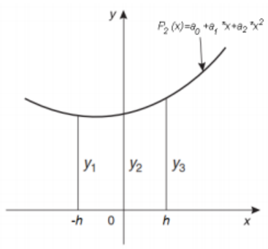


Figura 7.2

Sea $f^{(4)}$ continua en $[a,b]$. Interpolando f en $[a,b]$ con $x_0 = a$, $x_1 = (b+a)/2$ y $x_2 = b$ obtenemos el polinomio de Lagrange $P_2(x)$. Entonces,

$$f(x) = P_2(x) + f[x_0, x_1, x_2, x](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$





(Regla compuesta de Simpson) **Si** n **es par,**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right] - \frac{1}{180}(b-a)h^4 f^{(4)}(\xi)$$

con $\xi \in]a,b[$, $h = \dfrac{b-a}{n}$ **y** $x_i = a + i\cdot h$, $i = 0,1,2,\ldots,n.$

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} \text{sen}\,x\,dx = \int_{-2\pi}^{\pi/4} \text{sen}\,x\,dx + \int_{\pi/4}^{3\pi/2} \text{sen}\,x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \text{sen}\,x\,dx$$

↳ continua $[0, 2\pi]$

Aunque sabemos que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = 2$, vamos a usar esta integral para ver como funciona la regla de Simpson.

a.) Aproximar $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx$ con $n = 4$ y estimar el error.

b.) Estime n de tal manera que la regla de Simpson aproxime la integral con un error $|E| \leq 0.5 \times 10^{-8}$.

a.) **Solución:** Como $n = 4$, calculamos x_0, x_1 x_2 x_3 y x_4.

$n = 4 \implies h = \dfrac{\pi - 0}{4} = \dfrac{\pi}{4}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_3 = \dfrac{3\pi}{4}$ y $x_4 = \pi$ Entonces,

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \approx \frac{\pi/4}{3}[\operatorname{sen}(0) + \operatorname{sen}(\pi) + 4\cdot(\operatorname{sen}(\pi/4) + \operatorname{sen}(3\pi/4)) + 2\cdot \operatorname{sen}(\pi/2)] = 2.004559754984...$$

El error estimado $|E|$, en valor absoluto, es $\leq \dfrac{\pi\cdot(\pi/4)^4}{180}M$ donde M es el máximo absoluto de $|f^{(4)}(x)|$ en $[0,\pi]$. En este caso $M = 1$ y entonces $|E| \leq 0.00664105...$

b.) **Solución:**
Sabemos que el máximo absoluto de $f^{(4)}$ en $[0,\pi]$ es $M = 1$, entonces

$$|E| \leq \frac{(b-a)h^4}{180}\cdot M = \frac{\pi^5}{180n^4}$$

Como queremos $|E| \leq 0.5 \times 10^{-8}$, basta con que $\dfrac{\pi^5}{180n^4} \leq 0.5 \times 10^{-8}$. Despejando obtenemos,

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\pi^5}{180\cdot 0.5 \times 10^{-8}}} \approx 135.79$$

Tomando $n = 136$, obtenemos la aproximación $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx \approx 2{,}00000000316395...$, que efectivamente tiene ocho decimales exactos.

Resumen:

Regla del trapecio polinomio de primer grado	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$	error $= -\frac{h^3}{12} f''(\zeta)$
Regla de Simpson polino. segundo grado	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$	error $= -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\zeta)$
Regla de Simpson $\frac{3}{8}$ polino. tercer grado	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$	error $= -\frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\zeta)$
Regla de Boole polino. cuarto grado	$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4)$	error $= -\frac{8h^7}{945} f^{(6}(\zeta)$

donde f_k indica $f(x_0 + kh)$.

Integral de Romberg

Está basado conceptualmente en la extrapolación de Richardson. Permite mejorar recursivamente la aproximación de las fórmulas compuestas con poco trabajo adicional.

El intervalo original $[a, b]$ se divide en un número de **subintervalos potencia de 2** —1, 2, 4, 8, ...— y se calculan las integrales *con la fórmula del trapecio*. Los resultados se denominan $R_{11}, R_{21}, R_{31}, \ldots R_{i1}$. A partir de estas integrales, mediante *extrapolación de Richardson*, se calculan otras $R_{22}, R_{32}, \ldots, R_{i2}$, de error menor, tipo $\mathcal{O}(h^4)$.

Matriz de Romberg

El método de Romberg es una aplicación sistemática de esta idea de obtener una aproximación mejorada a partir de aproximaciones anteriores, iniciando con estimaciones de la regla del Trapecio para $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots$

Sea $h_k = \frac{b-a}{2^{k-1}}$, $I = \int_a^b f(x)\,dx$ y $T(h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$. Para aplicar el proceso de extrapolación de Richardson necesitamos

$$I = T(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \cdots + a_{2m-2}h^{2m-2} + a_{2m}h^{2m}f^{(2m)}(\varepsilon) \tag{7.9}$$

El método de Romberg construye una matriz $R = (R_{i,j})$ en la que todas sus columnas convergen a I (las entradas son sumas de Riemann) pero la rapidez de convergencia crece de una columna a otra y esto se logra usando extrapolación de Richardson.

$$\begin{array}{cccccc}
\text{Trapecio} & \text{Extrapolación} & \text{Extrapolación} & & & \\
R_{1,1} & & & & & \\
R_{2,1} & R_{2,2} & & & & \\
R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
R_{n,1} & R_{n,2} & R_{n,3} & R_{n,4} & \cdots & R_{n,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
I & I & I & I & I & I
\end{array}$$

La primera columna de la matriz son los resultados de aplicar regla compuesta del trapecio: Se elige $h = b - a$ y se aplica regla del trapecio con $h_k = \dfrac{b-a}{2^{k-1}}$, $k = 1, 2, \ldots$. La notación $R_{k,1}$ corresponde a la aproximación por Trapecios.

- $R_{1,1} = \dfrac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \dfrac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$
- $R_{k,1} = \dfrac{1}{2}\left[R_{k-1,1} + h_{k-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f[\,a + (2i-1)\cdot h_k\,]\right], \ k = 2, 3, \ldots, n.$

Observe que $R_{k,1}$ es un fórmula recursiva para la regla compuesta del trapecio.

En particular,

$$R_{1,1} = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

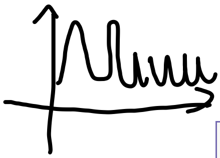
$$R_{2,1} = \frac{(b-a)}{4}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

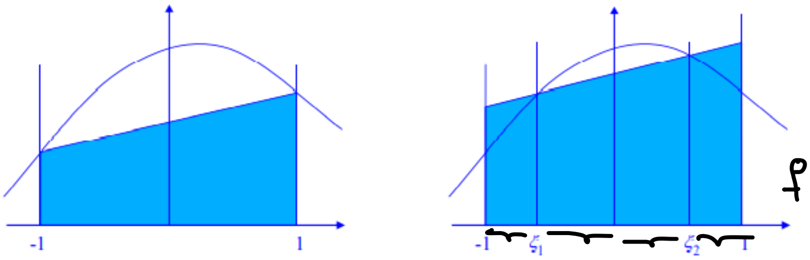
$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[R_{2,1} + \frac{a+b}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]\right]$$

Cuadratura de Gauss

En este procedimiento se permite variar la posición de los nodos para mejorar la precisión del resultado. En la figura se muestra cómo se puede obtener una mejor aproximación con sólo dos nodos haciendo que no sean los extremos del intervalo. Se trabaja en un intervalo de integración normalizado [-1,1]:

* $f(x)$: en $[a,b]$
variación alta





* Partición regular *
NO
$f^{(n+1)} = ?$

(**Cuadratura Gaussiana**).

- Para calcular en un intervalo $[a,b]$ usando cuadratura Gausiana hacemos el cambio de variable $x = \dfrac{a+b+(b-a)u}{2}$ y teniendo en cuenta que $dx = \dfrac{b-a}{2}du$, obtenemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b+(b-a)u}{2}\right) du \;=\; c_0\, g(x_0) + c_1\, g(x_1) + \ldots + c_n\, g(x_n) \;+\; E_n$$

donde, por supuesto, $g(u) = \dfrac{b-a}{2} f\left(\dfrac{a+b+(b-a)u}{2}\right)$.

- Si $g \in C^{2n}[-1,1]$, el error en la fórmula de cuadratura Gaussiana es ([13]),

$$E_n = \frac{2^{2n+1}[(n)!]^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}\, g^{(2n)}(\xi) \quad \text{con} \quad \xi \in]-1,1[.$$

Definición: Fórmula de cuadratura de Gauss con dos puntos

$$A = \int_{-1}^{1} f(t)dt = c_0 f(t_0) + c_1 f(t_1) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Esta simple fórmula es exacta si **f** es un polinomio de grado menor o igual a tres. Para otra **f** es una aproximación equivalente a sustituir **f** con un polinomio de grado tres.

Ejemplo. Calcule $A = \int_{-1}^{1} (2t^3 + t^2 - 1)dt$ con la Cuadratura de Gauss

Solución

$$A = \int_{-1}^{1} f(t)dt = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left[2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right] + \left[2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1\right] = -4/3$$

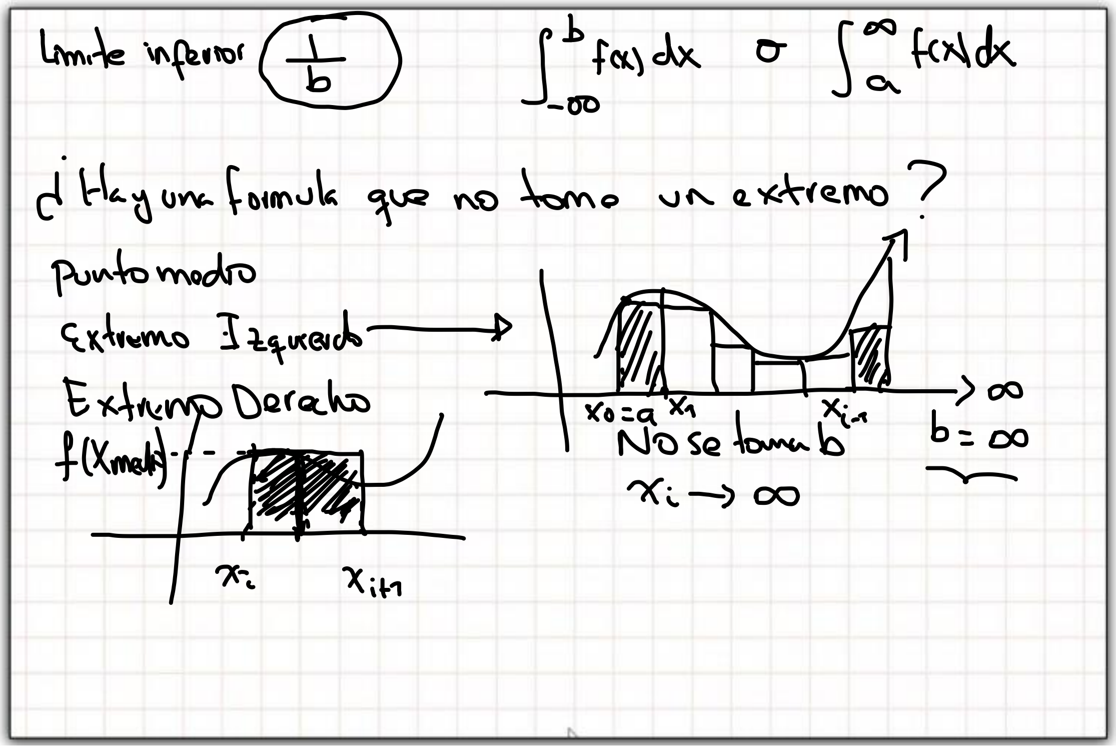
Integrales Impropias.

Las integrales impropias (convergentes) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$, $(a>0)$ y $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, $(b<0)$; se pueden calcular usando un cambio de variable.

Si $a>0$ y $b=\infty$ o si $b<0$ y $a=-\infty$ entonces,

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx = \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{t^2} f\left(\frac{1}{t}\right) dt}$$

Como $1/a$ o $1/b$ es cero, $f\left(\frac{1}{t}\right)$ se indefine. Así que no podemos considerar métodos de integración que evalúen los extremos (como Simpson o Trapecio) sino más bien, de acuerdo a lo que tenemos hasta aquí, cuadratura Gaussiana.



7.3 Considere las integrales de Fresnel, $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt$ y $Cx) = \int_0^x \cos(t^2)\,dt$. Se sabe que existe un valor $\xi \in [1,2]$ tal que $S(\xi) = C(\xi)$. Aproxime este valor usando el método de la secante.

* **7.4** La "función error" se define como $\operatorname{Erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Aproximar Erf(1.5) usando los cuatro métodos de integración hasta que la diferencia en cada resultado sea $\leq 0.5 \times 10^{-5}$. Tolerancia

* **7.5** De una función f, conocemos la siguiente información

$f(x) = ?$

x	$f(x)$
0	3.592
0.2	3.110
0.4	3.017
0.6	2.865
0.8	2.658

Tabla 7.5

a.) Aproximar $\int_0^{0.8} f(x)\,dx$ usando regla del Trapecio.

b.) Aproximar $\int_0^{0.8} f(x)\,dx$ usando regla del Simpson.

c.) Aproximar $\int_0^{0.8} f(x)\,dx$ usando Romberg (interpolar con polinomios de grado 2).

7.6 Aproxime $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$ con $n = 6$.

7.7 Aproxime $\int_1^{5} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$ con $n = 6$.

7.8 La función de Bessel de orden cero se define como

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen} t)\,dt$$

Derivando bajo el signo integral obtenemos $\dfrac{d}{dx} J_0(x) = \dfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \dfrac{d}{dx}[\cos(x \operatorname{sen} t)]\,dt$

* $\int_{-1}^{1} (1 + \operatorname{sen} e^{3x})\,dx$ — Trapecio compuesta * Adaptativas

Simpson " *

$$
\begin{aligned}
J_0'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} t)\,dt \\
J_0''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} t)^2 \cos(x \operatorname{sen} t)\,dt \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\left|J_0^{(n)}(x)\right| &= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \left|(\operatorname{sen} t)^n \cos(x \operatorname{sen} t)\right|\,dt & \text{si n es par} \\[2ex] \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \left|(\operatorname{sen} t)^n \sin(x \operatorname{sen} t)\right|\,dt & \text{si n es impar} \end{cases}
\end{aligned}
$$

a.) Muestre que $|J_0^{(n)}(x)| \le \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dt = 1, \ n = 0,1,2,\ldots$. Sugerencia: Si f es continúa en $[a,b]$ entonces $\text{mín} f \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \text{máx} f$

b.) Dado $\delta > 0$, determine n de tal manera que si aproximamos $J_0(x)$ con la regla compuesta de Simpson, el error sea $\le \delta$.

c.) Implemente en R , una función `J0Simpson(x,delta)` para aproximar $J_0(x)$, usando la regla de Simpson, con un error estimado $\le \delta$.

d.) Realice la representación gráfica de $J_0(x)$ con $x \in [-5,5]$.

e.) La función $J_0(x)$ tiene un cero x^* en $[2,3]$. Implemente una versión del método de bisección y una versión del método de Newton que operen con la función `J0Simpson(x,0.5*1e-5)` y aproxime en cada caso x^* con un error estimado $\le 0.5 \times 10^{-8}$.

7.9 Considere la integral $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

a.) Aproximar la integral con la regla compuesta de Simpson con $n = 4$

b.) Estime el error en la aproximación anterior.