

Reto 3 Modelos epidemiológicos SI Y SIR

1st Juan José Bolaños Melo
Ingeniería de sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Cali, Colombia
bolanos.jj@javeriana.edu.co

2nd David Andres Duarte Clavijo
Ingeniería de sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
david-duartec@javeriana.edu.co

3rd David Santiago Saveedra
Ingeniería de sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
david_saavedrar@javeriana.edu.co

Abstract—In the present work, the simulation of a system of equations associated with the SI epidemiological model and the SIR model will be presented. On the other hand, a comparison will be carried out with real data based on public databases related to health issues and especially the COVID-19 pandemic. As a complement, the simulation will be carried out based on two numerical methods, varying the parameters associated with the aforementioned model, all this will be carried out thanks to graphing tools that allow the study and generation of graphs associated with the model to be worked on.

Keywords—Modelo, Epidemia, SI, SIR, método numérico

I. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se expondrá la simulación de un sistema de ecuaciones asociado a el Modelo epidemiológico SI y Modelo SIR. Por otro lado se llevará a cabo una comparación con datos reales basados en bases de datos públicas relacionadas a temas de sanidad y en especial a la pandemia COVID-19. Como complemento se llevará a cabo la simulación en base a dos métodos numéricos, variando los parámetros asociados al modelo antes mencionado, todo esto se llevará a cabo gracias a herramientas de graficación que permiten el estudio y generación de gráficas asociadas al modelo a trabajar.

II. MODELO MATEMÁTICOS

Los modelos matemáticos que encontramos en la actualidad son herramientas matemáticas que nos facilitan el estudio de fenómenos que se presentan en la vida real. Para llevar a cabo estos modelos propuestos se debe entender que estos están expresados mediante una formulación matemática que está siempre relacionada con magnitudes que intervienen en el fenómeno a estudiar.

Cabe aclarar que el correcto uso y éxito de estos métodos viene desde muchos años atrás, gracias a las primeras propuestas de aplicación de modelos matemáticos en

biología y enfermedades infecciosas, llevada a cabo por William Ogilvy Kermack y Anderson Gray McKendrick en el año 1927 y que redactaron en el artículo que lleva el título A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics [1] .

III. MODELO EPIDEMIOLÓGICO SIR

El modelo conocido como SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados) es un sistema considerado dinámico determinista que se basa principalmente de tres ecuaciones diferenciales, que describen el comportamiento de la una determinada población que se encuentra bajo estudio, y donde esta población se divide en diferentes clases epidemiológicas que describen un flujo entre ella.

Este modelo matemático tan interesantes nos habla de que los miembros de una determinada población se pueden clasificar en tres grupos:

- Susceptibles (S) : Es el estado en el cual un individuo de la población puede ser contagiado por otro individuo que se encuentra infectado.
- Infectado (I) : Es el estado en el cual un individuo se encuentra infectado y por tanto el modelo nos explica que este individuo puede contagiar a otro dentro de la población.
- Recuperado (R) : Es el estado durante el cual el individuo está totalmente recuperado y no puede ser infectado esto gracias a que adquirió inmunidad, y por ende no puede infectar.

Como podemos observar en la clasificación, el modelo SIR nos dice que cada miembro de la población pertenece únicamente a uno de los tres grupos en un determinado momento. Sin embargo, cada miembro perteneciente a la población puede pasar de un grupo a otro, aunque este desplazamiento de categoría solo se puede realizar en una única dirección, como podemos apreciar en la Imagen 1 [2] .



Imagen 1. Transición de categorías Modelo SIR [2].

IV. SIMULACIÓN ENFERMEDAD INFECCIOSA COVID-19

Como observamos anteriormente este es un modelo dinámico que nos permite simular una enorme cantidad de enfermedades infecciosas por ende nos permite reproducir manifestación epidémicas como la enfermedad infecciosa causada por el COVID-19 que vamos a tratar en el presente escrito.

A continuación se presenta el modelo que está conformado por 3 estados, 6 variables de flujo, 6 parámetros y 4 variables que se denomina auxiliares. todo esto relacionado a través de de ecuaciones [3] .

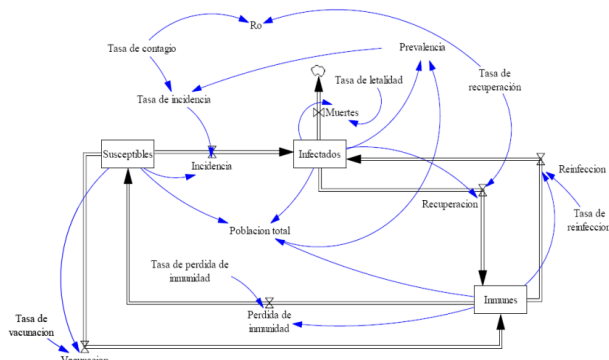


Imagen 2. Modelo SIR manifestaciones epidémicas y endémicas [3] .

Como podemos ver en nuestra Imagen 2, tenemos división de estados, los cuales pertenecen a la división que presenta la población entre (Susceptibles-Infectados-Recuperados).

Las variables de flujo que encontramos en nuestro Modelo de la imagen 2 representa los cambios de estado que se presentan en la población y las muertes como consecuencia de la enfermedad. Entre estas variables de flujo encontramos: reinfección, pérdida de inmunidad, incidencia, muertes y recuperación [3] .

En cuanto a los parámetros, encontramos la tasa de recuperación, tasa de pérdida de inmunidad, tasa de reinfección, etc.

Por tanto, para la simulación que llevamos a cabo, un miembro que se encuentra susceptible se puede contagiar (pasar de $S \rightarrow I$) y un miembro contagiado se puede recuperar (pasar de $I \rightarrow R$) o puede morir [2] .

Cabe aclarar que en nuestro ejemplo las personas que fallecen por la enfermedad COVID-19 pertenecerán al grupo R (Recuperados).

Existen modelos mucho más complejos que abarcan casos como nacimientos y muertes sin embargo para la realización de nuestra simulación no serán tenidos en cuenta.

V. ECUACIONES PARA LA SIMULACIÓN ENFERMEDAD INFECCIOSA COVID-19.

Para la realización de nuestra simulación de la enfermedad infecciosa Covid-19, se obtuvieron las siguiente variables:

- t : Variable encargada de indicarnos el tiempo.
- $S(t)$: Variable que nos indica el número de personas que se encuentran en el grupo de Susceptibles.
- $I(t)$: Variable que nos indica el número de personas que se encuentran en el grupo de Infectados.
- $R(t)$: Variable que nos indica el número de personas que se encuentran en el grupo de Recuperados.
- N : Variable que expresa el tamaño de la población

En base a las variable antes mencionadas tenemos que para todo t :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

Y de igual manera encontramos tres ecuación bases del modelo SIR.

$$\begin{cases} S'(t) = -\frac{a}{N}S(t)I(t) \\ I'(t) = \frac{a}{N}S(t)I(t) - bI(t) \\ R'(t) = bI(t) \end{cases}$$

Imagen 3. Ecuaciones del modelo SIR.

Estas tres ecuaciones se basan en que una población de tamaño (S) se encuentra en un principio sana y a la cual un día 0 se le presentan un determinado número de infectados con una enfermedad contagiosa, para nuestra simulación esta enfermedad será el Covid-19.

Gracias al modelo SIR podemos representar matemáticamente este fenómeno, asumiendo que el número de personas que se cambian de categoría al día siguiente será el producto de los individuos de ambas categorías, de forma que cuanto más infectados haya, más nuevos infectados se encontraran al día siguiente

$$\beta \cdot S \cdot I$$

Ecuación flujo de susceptibles hacia infectados

Donde β es la tasa de infección o también conocida como tasa de transmisión, y la cual nos indicará el número de contactos suficientes para que se logre la transmisión de una persona por unidad de tiempo [3].

Por otro lado tenemos la segunda parte de nuestro Modelo SIR, que no explica que de alguna forma existe el hecho de que hay individuos infectados que se recuperan. Asumiendo que este fenómeno será deducido del producto de los infectados y un parámetro que llamaremos Gamma γ .

$$\gamma \cdot I$$

Ecuación flujo de infectados hacia recuperados

Donde γ es la tasa de recuperación, y la cual nos indica la tasa por unidad de tiempo a la cual los individuos infectados de nuestra población se recuperan [3].

A continuación se presenta un ejemplo de flujo de transición entre el día 1 y el día 2, donde se ejemplifican las dos ecuaciones antes mencionadas que responde al

cambio de categoría entre (Susceptibles-Infectados-Recuperados).

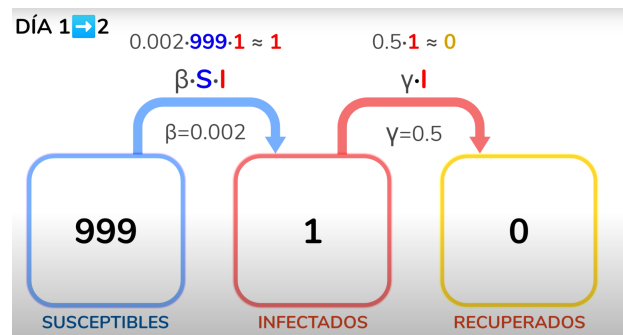


Imagen 4. Ejemplo uso de Ecuaciones para el flujo entre el día 1 y 2.

VI. MÉTODO NUMÉRICO RUNGE KUTTA ORDEN 4

El método numérico Runge Kutta de cuarto orden hace parte de los métodos de Runge Kutta, este es el de uso más común y más exacto para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. La solución que brinda este método es una tabla de la función solución con valores de “y” correspondientes a valores específicos de “x”[4], así como podemos observar a continuación:

x	y(x)
x0	y0
x1	y1
x2	y2
..	..
xn	yn

Imagen 5. Ejemplo de Runge Kutta.

Las requerimientos para hacer uso de este método son los siguientes:

- Es necesario especificar el intervalo de “x”.
- Una ecuación diferencial de primer orden

$$y' = f(x, y)$$

- La condición inicial, es decir, el valor de “y” en un punto conocido x0.

$$y(x_0) = y_0$$

- El método consiste en determinar constantes apropiadas de modo que una fórmula como:

$$y_{i+1} = y_i + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4$$

Las ecuaciones del método Runge Kutta de cuarto orden son las siguientes:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

VII. SIMULACIÓN MÉTODO NUMÉRICO RUNGE KUTTA ORDEN 4 (MODELO SI)

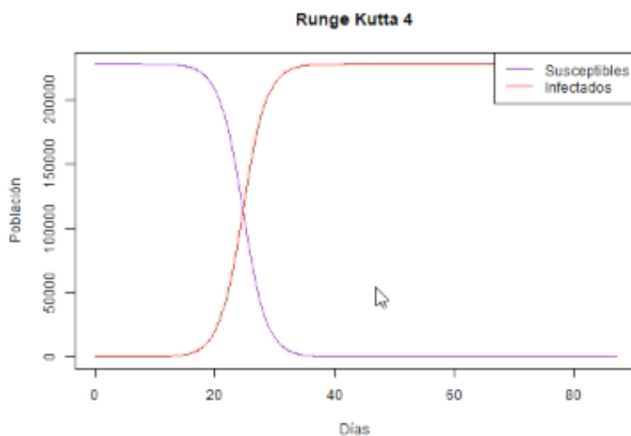


Imagen 6. Modelo SI método Runge Kutta.

Como observamos en la simulación de la imagen 6 del modelo SI. Utilizamos el método numérico Runge Kutta 4, con los siguientes parámetros:

- Días: 1 hasta 87
- Población: 228.006
- Tasa de Transmisión: 0,5
- Tasa de Recuperación: 0,1
- Infectados Dia 1: 1

- Recuperado Dia 1: 1

Como acabamos de ver en nuestra simulación vemos como la variable de susceptibles decrece hasta estabilizarse todo lo opuesto a lo que ocurre con la variable infectados, la cual observamos que aumenta hasta estabilizarse.

VIII. MÉTODO NUMÉRICO EULER

El método de Euler es uno de los métodos más sencillos para resolver EDO's con condiciones iniciales. La solución que ofrece este método, es una tabla de la función solución, con valores de "y" correspondientes a valores específicos de "x"[5].

Para el método de Euler los requerimientos son los mismos que en el ya mencionado método Runge Kutta de cuarto orden.

La ecuación de Euler es la siguiente:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

IX. SIMULACIÓN MÉTODO NUMÉRICO EULER (MODELO SI)

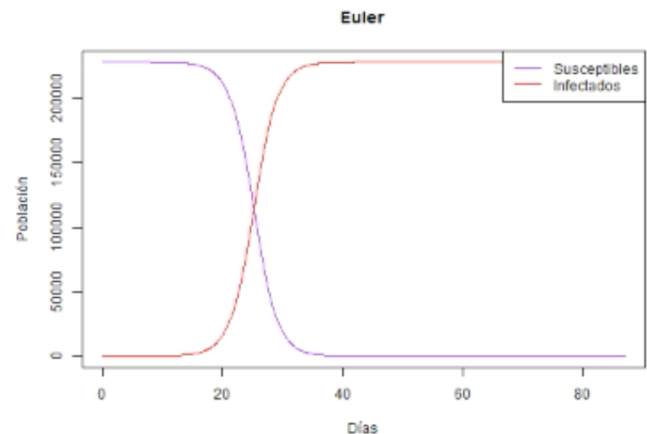


Imagen 7. Modelo SI método Euler.

Como observamos en la simulación de la imagen 7 del modelo SI. Utilizamos el método numérico de Euler, con los siguientes parámetros:

- Días: 1 hasta 87
- Población: 228.006
- Tasa de Transmisión: 0,5
- Tasa de Recuperación: 0,1

- Infectados Dia 1: 1
- Recuperado Dia 1: 1

Como acabamos de ver en nuestra simulación vemos como la variable de susceptibles decrece hasta estabilizarse todo lo opuesto a lo que ocurre con la de infectados, la cual observamos que aumenta hasta estabilizarse.

X. SIMULACIÓN MÉTODO NUMÉRICO EULER (MODELO SI)

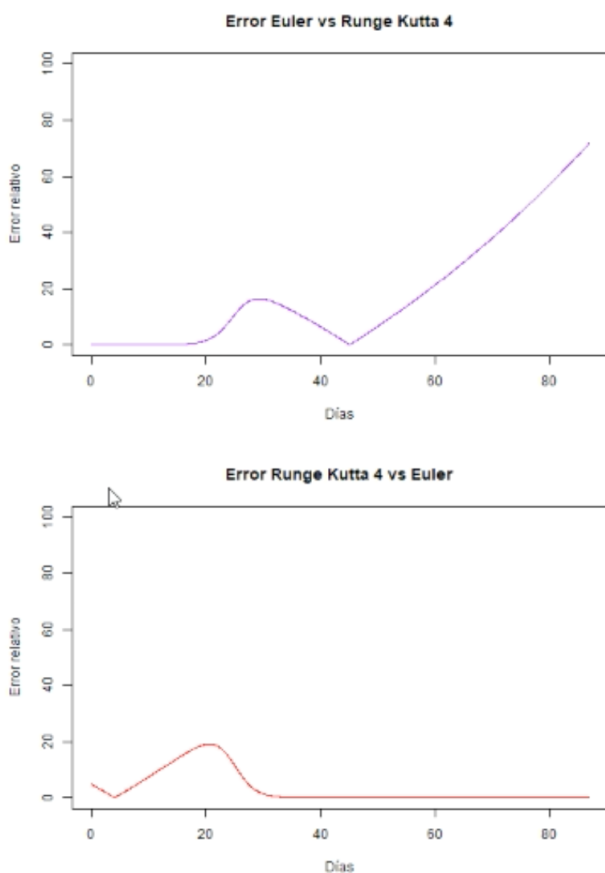


Imagen 8 y 9. Errores Vs.

En la primera gráfica observamos el error relativo del método numérico de Euler y en la segunda el de Runge Kutta 4. En primera vemos que el error aumenta conforme la cantidad de días aumentan a partir de un punto, se establece una relación directamente proporcional.

En la segunda se observa que a partir de un punto el error relativo se mantiene constante aproximadamente en un 0% conforme los días avanzan.

Con esto concluimos que el método de Runge Kutta de cuarto orden es más eficiente que el método de Euler, es más exacto en cuanto a la obtención de soluciones aproximadas (Comparación con los datos reales).

XI. SIMULACIÓN MÉTODO NUMÉRICO RUNGE KUTTA ORDEN 4 Y MÉTODO EULER (MODELO SIR)

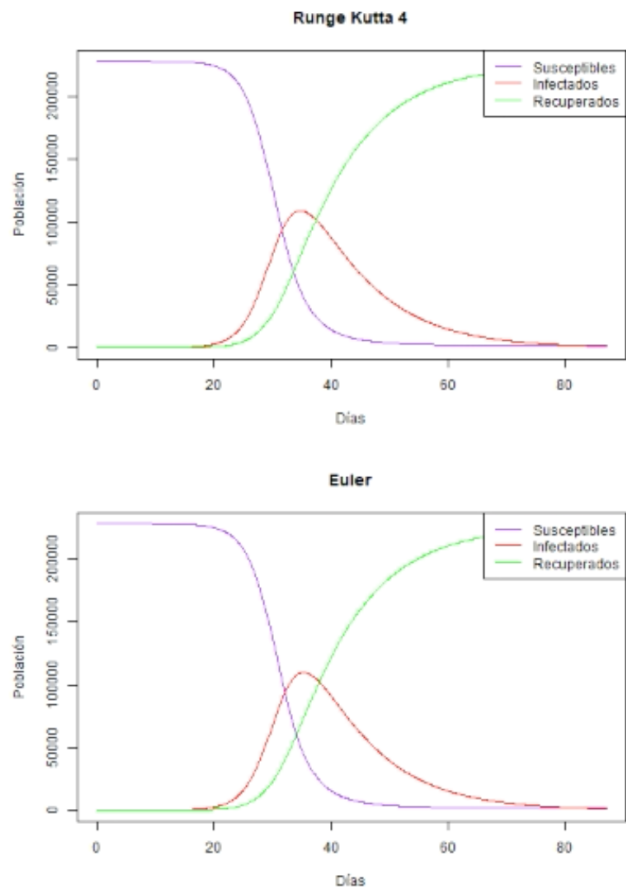


Imagen 9 y 10. Modelo SIR métodos Runge Kutta y Euler.

Como observamos en la simulación de la imagen 9 y 10 del modelo SIR. Utilizamos el método numérico Runge Kutta 4 y el método de Euler, con los siguientes parámetros:

- Días: 1 hasta 87
- Población: 228.006
- Tasa de Transmisión: 0,5
- Tasa de Recuperación: 0,1
- Infectados Dia 1: 1

- Recuperado Dia 1: 1

Como acabamos de ver en nuestra simulación vemos como la variable de susceptibles decrece hasta estabilizarse todo lo opuesto a lo que ocurre con la variable recuperados, la cual observamos que aumenta hasta estabilizarse. Ambas variables siempre referenciadas de la variable Infectados la cual observamos como tiende a generar un pico, denominado comúnmente como pico de contagio, lo que nos dice que el número de infectados llegó a su número máximo por ende se espera que reduzca con el pasar de los días.

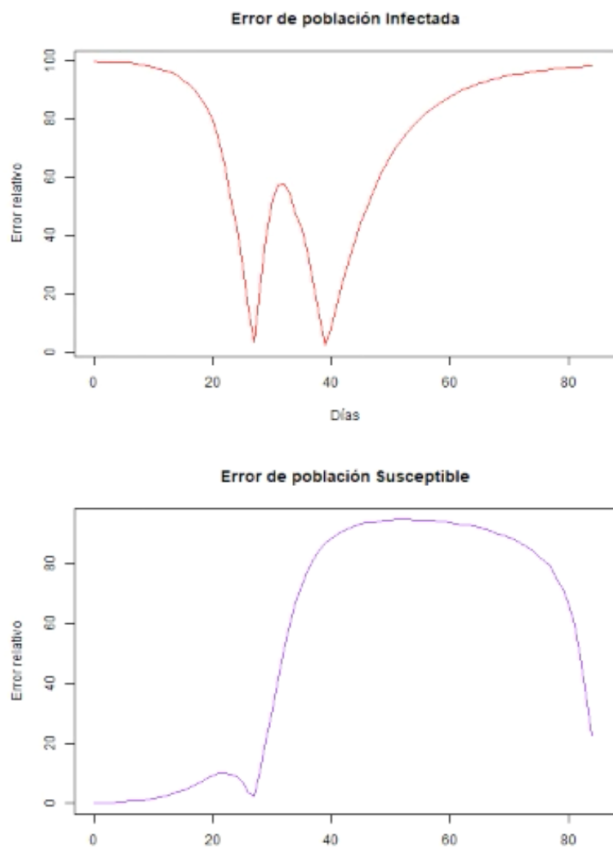


Imagen 11 y 12. Errores de la población infectada y susceptible.

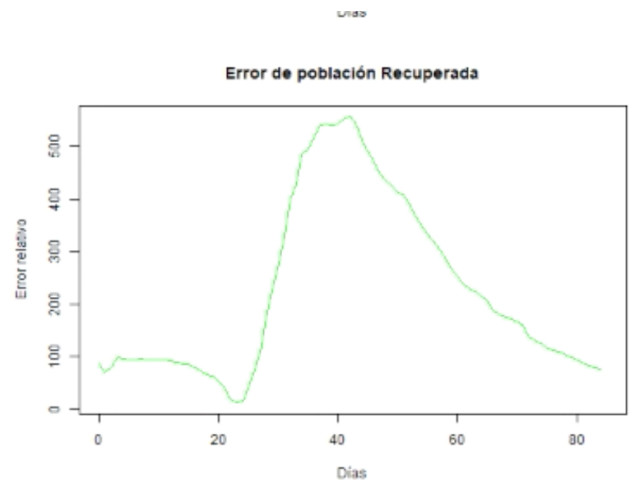


Imagen 13. Error de población recuperada.

En las anteriores gráficas observamos los errores relativos de la población susceptible, la población infectada y la población recuperada respectivamente; se compararon los resultados de las soluciones aproximadas con los datos reales teniendo en cuenta los días.

XII. SIMULACIÓN CON DATOS REALES

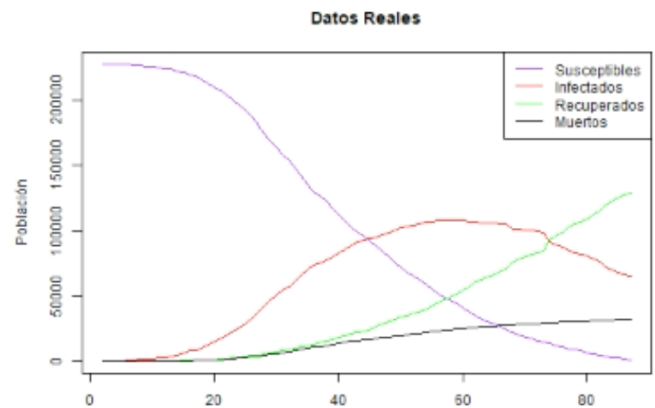


Imagen 14. Datos reales.

Por último se llevó a cabo la simulación del modelo SIR, en este caso nos basamos en datos reales tomados de bases de datos de la salud (públicas).

Para este caso observamos como la variable de susceptibles inicia en su valor máximo y con el paso del tiempo empieza a decrecer, todo lo contrario que ocurre con la de recuperados la cual inicia en 0 y con el pasar de los días empieza a aumentar en base al comportamiento de la variable infectados.

En esta simulación observamos un fenómeno muy conocido en esta época y es el pico que vemos que tiene la variable de infectados, lo que nos dice que se se llegó a

un pico de contagio en este caso de la pandemia Covid-19.

XIII. CONCLUSIÓN SIMULACIONES

Por último concluimos que ambas simulaciones llevadas a cabo con los métodos de Runge Kutta y Euler, se adaptan y por ende se parecen mucho a la simulación que realizamos con datos reales. En ambas gráficas observamos comportamientos idénticos como por ejemplo el pico de contagio.

Si bien este pico de contagio en la simulación Real se considera más aplanado que el de las otras dos simulaciones, este fenómeno se da gracias a que los gobiernos buscan aplanar el pico de contagio con el fin de que los Hospitales no colapsen y por ende prefieren que este número máximo de contagiados llegue en varios momentos y no en un solo que haga colapsar los centro de salud de las ciudades.

REFERENCIAS

[1]. Javier Duo. Modelo SIR, un enfoque matemático de la propagación de infecciones. [En línea]. Disponible en: <https://culturacientifica.com/2020/08/24/el-modelo-sir-un-enfoque-matematico-de-la-propagacion-de-infecciones/> [Último acceso: 01 06 2021]

[2]. Rev cubana salud pública. [En línea]. Disponible en: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-34662020000500013. [Último acceso: 01 06 2021]

[3]. IQEN, Informe epidemiológico Nacional [En línea]. Disponible en: <https://www.ins.gov.co/buscador/IQEN/IQEN%20vol%2019%202014%20num%202.pdf>. [Último acceso: 01 06 2021]

[4]. UAM. (s. f.). Métodos Numéricos. Casa Abierta al Tiempo [En línea]. Disponible en: <http://test.cua.uam.mx/MN/Methods/EcDiferenciales/Runge-Kutta/RungeKutta.php>. [Último acceso: 01 06 2021]

[7]. UAM. (s. f.). Métodos Numéricos. Casa Abierta al Tiempo [En línea]. Disponible en: <http://test.cua.uam.mx/MN/Methods/EcDiferenciales/Euler/Euler.php>. [Último acceso: 01 06 2021]