本仓库的数学命题证明：有理数的整数放大性质及其扩充

DavidSciMeow

Oct, 24, 2025

1 记号与补充约定

- $\mathbb{Q}$ 表示有理数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\mathbb{Z}_+$ 表示正整数集，$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$。
- 若 n 为正整数，则写其素因子分解为 $n = \prod_\pi \pi^{e_\pi(n)}$，其中 π 遍历素数，$e_\pi(n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为素数 π 在 n 中的指数。
- 对素数 π 定义 π-adic 指数对整数 $n > 0$ 令 $v_\pi(n) := e_\pi(n)$。对任意有理数 $r = \dfrac{a}{b}$（互素表示，$a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_+$），可推广定义
$$v_\pi(r) := v_\pi(a) - v_\pi(b).$$
- 对固定的进制基数 $p \geq 2$（不必为素数），我们关心是否存在 $k \in \mathbb{N}_0$ 使得 $p^k q \in \mathbb{Z}$。

2 基本命题与证明（有理数情形）

定理 **1.** 对任意 $q \in \mathbb{Q}$，存在正整数 $K \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $Kq \in \mathbb{Z}$。

Proof. 任取 $q \in \mathbb{Q}$，将其表示为最简分数
$$q = \frac{a}{b},$$
其中 $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}_+$，且 $\gcd(a, b) = 1$。取 $K = b$，则
$$Kq = b \cdot \frac{a}{b} = a \in \mathbb{Z}.$$
因此存在正整数 K（例如分母 b）使得 $Kq \in \mathbb{Z}$，证明完毕。 □

定理 **2.** 关于基 p 的等价条件。设固定基数 $p \geq 2$（不必为素数）。令 $q = \dfrac{a}{b}$ 为最简分数，$a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}_+,\ \gcd(a, b) = 1$。下列命题等价：

1. 存在 $k \in \mathbb{N}_0$ 使得 $p^k q \in \mathbb{Z}$。
2. 存在 $k \in \mathbb{N}_0$ 使得 $b \mid p^k$。
3. b 的所有素因子都出现在 p 的素因子分解中：对任意素数 π，若 $v_\pi(b) > 0$ 则 $v_\pi(p) > 0$。

特别地，当 p 为素数时，上述等价于 b 為 p 的幂，即 $b = p^m$ 对某个 $m \in \mathbb{N}_0$。

Proof. (1)⇒(2): 若存在 k 使 $p^k q \in \mathbb{Z}$，则 $p^k \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$，即 $b \mid p^k a$。由于 $\gcd(a, b) = 1$，故 $b \mid p^k$。

(2)⇒(1): 若 $b \mid p^k$，则 $p^k q = p^k \cdot \frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$。

(2)⇔(3): 将 p 与 b 写成素因子分解
$$p = \prod_\pi \pi^{v_\pi(p)}, \qquad b = \prod_\pi \pi^{v_\pi(b)}.$$
条件 $b \mid p^k$ 等价于对每个素数 π 有
$$v_\pi(b) \leq v_\pi(p^k) = k\, v_\pi(p).$$
若存在某素数 π 使 $v_\pi(b) > 0$ 且 $v_\pi(p) = 0$，则右侧恒为 0，不可能 $\geq v_\pi(b) > 0$，故必须有若 $v_\pi(b) > 0$ 则 $v_\pi(p) > 0$。反过来若对所有出现在 b 的素因子 π 都有 $v_\pi(p) \geq 1$，则取
$$k \geq \max_{\pi:\, v_\pi(b)>0} \left\lceil \frac{v_\pi(b)}{v_\pi(p)} \right\rceil,$$
即可保证 $k\, v_\pi(p) \geq v_\pi(b)$ 对所有 π 成立，从而 $b \mid p^k$。 □

3 关于最小的的显式公式

设 p 的素因子集合为 $\{\pi_1,\dots,\pi_r\}$，且 $v_{\pi_i}(p)=f_i\ge 1$。把 b 在这些素因子下的指数记作 $e_i:=v_{\pi_i}(b)$（若某 π_i 未出现在 b 中则 $e_i=0$）。若存在 $\pi\notin\{\pi_1,\dots,\pi_r\}$ 使 $v_\pi(b)>0$，则不存在 k 使 $b\mid p^k$。若所有出现在 b 中的素因子都包含于 $\{\pi_1,\dots,\pi_r\}$，则最小的符合条件的 k 为

$$k_{\min}=\max_{1\le i\le r}\left\lceil\frac{e_i}{f_i}\right\rceil.$$

特别地，当 p 为素数时只有一项，$f_1=1$，因此 $k_{\min}=e_1=v_p(b)$，此时 b 必为 p 的幂。

4 基下有限小数表示的等价性

在基 p 的位置表示中，右移小数点 k 位相当于乘以 p^k。因此：

$$q\text{ 在基}p\text{ 下有有限小数表示}\quad\Longleftrightarrow\quad\exists k\in\mathbb{N}_0\text{ 使得}p^kq\in\mathbb{Z}.$$

结合前述定理可得到判定条件：$q=a/b$ 在基 p 下有有限小数表示当且仅当 b 的所有素因子都出现在 p 的素因子分解中。对十进制（$p=10$）而言，这意味着分母 b 只包含素因子 2 与 5。

5 关于把命题推广到实数集的不可能性

我们不能把“任意数都能被某个整数放大为整数”这一性质推广到整个实数集。更精确地，固定 $p\ge 2$，定义集合

$$S_p:=\{x\in\mathbb{R}:\exists k\in\mathbb{N}_0,\ p^kx\in\mathbb{Z}\}.$$

显然 $S_p=\bigcup_{k\ge 0}p^{-k}\mathbb{Z}$，每个 $p^{-k}\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{Z}$ 基数相同（可数），因此 S_p 为可数并集，亦可数。由 Cantor 的定理（对角线论证）可知 $\mathbb{R}$ 是不可数的，所以 $S_p\neq\mathbb{R}$，亦即不能对所有实数都成立。

具体反例也很简单：任取无理数（如 $\sqrt{2}$），若存在非零整数 K 使 $K\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$，则 $\sqrt{2}$ 为有理数，矛盾。因此对 $\sqrt{2}$ 不存在这样的 K。

5.1 Cantor 对角线论证

Cantor 的经典证明给出 $\mathbb{R}$ 不可数：若假设存在将所有实数与自然数一一对应的枚举，那么可以构造一个与任一枚举中第 n 个数在第 n 位小数处不同的新实数，从而得到矛盾。该论证说明了 $\mathbb{R}$ 的势大于 $\mathbb{N}$，从而不可能包含在任何可数集合之中。这里正是用于说明 S_p（可数）不可能等于 $\mathbb{R}$（不可数）的根本原因。

5.2 实数的稠密性

补充说明：尽管 $\mathbb{Q}$ 是可数集，但在实数轴中稠密。即对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和任意 $\varepsilon>0$，存在 $q\in\mathbb{Q}$ 使 $|x-q|<\varepsilon$。证明可用阿基米德性：取 $n\in\mathbb{N}$ 使 $1/n<\varepsilon$，令 $k=\lfloor nx\rfloor$，则 $k/n\le x<(k+1)/n$，从而 $|x-k/n|<\varepsilon$。这解释了为什么任意实数任意小邻域内都包含有理数，但并不意味着可以把所有实数都写成分母为某固定形式的有理数（或者说，都能被某个整数放大为整数）。

6 参考资料

- D. S. Dummit, R. M. Foote, "Abstract Algebra"（关于整环与分式域的章节）。
- T. W. Hungerford, "Algebra"（分式域与局部化的处理）。
- W. Rudin, "Principles of Mathematical Analysis"（实数与有理数、稠密性的讨论）。

结论

$$\forall q \in \mathbb{Q}\ \exists K \in \mathbb{Z}_+ :\ Kq \in \mathbb{Z}.$$

设$q = a/b$ (最简), $p \geq 2$ 固定，则

$$\big(\exists k \in \mathbb{N}_0 :\ p^k q \in \mathbb{Z}\big) \iff \big(\exists k \in \mathbb{N}_0 :\ b \mid p^k\big) \iff \big(\forall \pi \text{ prime},\ v_\pi(b) > 0 \Rightarrow v_\pi(p) > 0\big).$$