Tercera hoja de ejercicios

Javier Montoya y David Sola

Junio 2020

¡Llegamos al último set de ejercicios! Este se va a diferenciar de todos los anteriores ya que estos ejercicios no son ejercicios que se ven en bachillerato. Pero si te ha gustado lo que hemos estado haciendo, en estos ejercicios utilizaremos los conocimientos que hemos ido desarollando para llegar a resultados más complejos y bellos. Como en los ejercicios anteriores, una estrella "*"simboliza un ejercicio especialmente difícil.

1. ecuaciónes diferenciales

1. En este ejercicio resolveremos ecuaciónes diferenciales separables, en algunas de ellas obtendremos una condiciones iniciales que nos ayudaran a resolver mas especificamente. De esta manera, resuelve para x las siguientes ecuaciónes diferenciales: $Nota$: Recuerda que $\dot{x}$ simboliza la derivada con respecto al tiempo y utilizaremos $x^{'}$ como la derivada de x respecto a la otra variable que aparezca en la ecuación:

   - $\dot{x} = t + t^2$
   - $\dot{x} = e^t$
   - $x^{'}e^{-y} = 1$
   - $\frac{\dot{x}+y}{seno(y)} = 5$ con $x(0) = 5$
   - $y^{'} = 2x^2 + seno(x^2)x + 5$ con $y(3) = \frac{1}{2}$

2. Ahora añadimos una pequena dificultad, ten en cuenta que ahora tendremos que integrar ambos lados:

   - $\dot{x}x = t + t^2$
   - $\dot{x} = e^{tx}$
   - $x^{'}e^{-xy} = 1$
   - $\dot{x} = \frac{1+t^3}{tx^2}$
   - $\dot{x}t = x$
   - $\frac{\dot{x}x}{seno^2(t)} = \frac{t}{cos^2(t)}$

3. * En este ejercicio vamos a resolver una ecuación diferencial que requiere un *Ansantz*, una solucion estimada de lo que en realidad es la ecuación. Resolveremos la sigueinte ecuación por pasos:

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$$

   - Observa la ecuación, no podemos separarla y no podemos integrar como hemos hecho en pasados ejercicios, por lo tanto necesitamos estimar una solucion que se pueda parecer. Ten en cuenta que estamos derivando con respecto al tiempo, piensa en una funcion no muy compleja que conocemos y que al derivarla varias veces (en concreto dos veces) llegamos a algo muy parecido. $Pista$: A mi se me ocurren dos, dos **cos**as que funcionan, **se** (que) **no** es facil.
   - Escribe una solucion estimada para x que sea parecida a $x = Af(a * t) + Bg(b * t)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son las dos funciones del aparto anterior , A y B , y a y b son constantes que vamos a sacar.
     $Nota$: $f(a * t)$ significa que si $f(t) = e^t$, $f(a * t) = e^{a*t}$
   - Introduce nuestra solucion estimada en la ecuación que queremos resolver, de esta manera obtendremos una serie de ecuaciónes que podemos reslver para conseguir los valores de a y b
   - Utiliza ahora las condiciones iciales $x(0) = 0$ y $\dot{x} = 5$ para encontrar los valroes de A y B
   - Perfecto! Ahora tan solo nos falta comprobar que la solucion que hemos escrito para x es la correcta. Vuelve a introducirla en la ecuación principal y compruebalo!

2. Un nuevo potencial gravitatorio

En esta segunda parte de la hoja de ejercicios vamos a trabajar con un potencial gravitatorio un poco distinto al que vimos en la clase. Empleando unos métodos similares a los de la clase, se obtienen, para describir la órbita en un plano de una partícula con masa, las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{d\tau}(2c^2\alpha\dot{t}) = 0,$$
$$\frac{d}{d\tau}(-2r^2\dot{\theta}) = 0.$$

En las ecuaciónes de arriba, $\alpha = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$, aunque para lo que nos importa, es una constante. Además, t es el tiempo medido por un reloj a muchísima distancia del origen del campo gravitatorio, τ es el tiempo propio, es decir, el medido por un reloj estacionario en una posición concreta;r es la distancia radial respecto al origen del potencial gravitatorio; y θ es ángulo polar, lo que hemos "girado". Finalmente, r, θ y t son funciones de τ únicamente.

- Establece las cantidades conservadas del movimiento, e intenta averiguar lo que representan físicamente. *Pista*: una de ellas tiene que ver con cómo varía el tiempo.

- Empleando las cantidades conservadas del apartado anterior, partiendo de la ecuación de la energía

$$c^2 = \alpha c^2 \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\alpha} - r^2 \dot{\theta}^2,$$

  reescribe todo en términos de derivadas de r, y luego expande α para obtener la ecuación radial del movimiento de la partícula:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GMh^2}{r^3 c^2} = \frac{c^2(k^2-1)}{2}, \tag{1}$$

  donde h y k también son constantes que deberías haber asignado en el apartado anterior.

- Compara la ecuación anterior con la que obtuvimos empleando la mecánica clásica. ¿Qué término domina para $r \to 0$? ¿Qué significa esto?

- Nombrando $r_g = \frac{GM}{c^2}$, tras los cambios de variable para el radio $R = \frac{r}{r_g}$ y el momento angular $H = \frac{h}{r_g * c}$, expresa el potential efectivo V_{eff} (simplemente el Newtoniano más el término adicional), como

$$\frac{V_{eff}}{c^2} = \frac{-1}{R} + \frac{H^2}{2R^2} - \frac{H^2}{R^3}. \tag{2}$$

- Tomando la derivada con respecto r del potencial efectivo ($\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$), intenta hacerte una idea de la forma del mismo. Deberías obtener dos puntos extremos, un máximo y un mínimo, que dependen de H y R. ¿Qué representa cada uno de estos puntos a nivel orbital? ¿Cuándo se fusionan los dos puntos? ¿Qué órbita en concreto es esta? Es conveniente que vayas probando varios valores de R y H y dibujes varias órbitas para tener una mejor idea de lo que está ocurriendo.

  Damas y caballeros, las ecuaciones con las que han estado trabajando durante todo esta hoja de ejercicio no son otras que las que provienen de la métrica de Schwarzschild, de la Relatividad General. Esta métrica describe el espacio vacío pero curvado por una distribución esférica de masa, es decir, un planeta muy masivo e incluso un **agujero negro**. De hecho, como ejercicio adicional, considera la ecuación radial para el fotón

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{c^2 k^2}{2} - \frac{h^2 \alpha}{2r^2}. \tag{3}$$

  Identifica el potencial efectivo, e impón la condición para una órbita CIRCULAR. El valor de R que obtienes representa el anillo de fotones, una sección esférica del espacio en el que la gravedad es tan fuerte que, pese a no tener masa, los fotones se ven obligados a moverse en órbita, aunque con el paso del tiempo acabarán por abandonarla.