Primera hoja de ejercicios

Javier Montoya y David Sola

Junio 2020

Buenos dias, los ejercicios que tenemos hoy se dividen de dos formas, los ejercicios sin marcas son ejercicios mas simples, bien que hemos comentado en las clases, o bien ejercicios tipicos del modelo de bachillerato.Los ejercicios marcados con una estrella *, implican un ejercicio mas complejo, en los que se requiere un uso de unas matemáticas mas formales. Los encontraremos de diferentes dificultades, pero los mas complejos tendran diferentes apartados que guiarán al estudiante hacia la respuesta:

Comentar también que durante los dias 20, 21 y 22 de julio de 2020 estaremos online ayudando con los problemas.

1. Límites

1. En este ejercicio resolveremos los límites de la siguiente manera: encontraremos que tipo de indeterminación es, moveremos las funciones hasta obtener una indeterminacion de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y resolveremos:

   - $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2+1}$: Tenemos una indeterminacion de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ Podemos ver que tanto el numerador como el denominador incrementan a la misma velovidad que viene dada por x^2, este limite por tanto lo podriamos entender como $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = 3/2$
   - $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$: Tenemos una indeterminacion de tipo $\frac{0}{0}$, intentemos encontrar la raiz que el numerador y el denominador tienen en comun: $\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$, por lo tanto el valor del limite es 8
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4}{\log(x)}$:Tenemos una indeterminacion de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Vemos si el numerador o el denominador incrementa mas rapido, podemos hacerlo de diferentes maneras, prueba por ejemplo a meter numeros en la funcion, empieza con numeros pequenos y continua con mas grandes para convencerte que el valor del limite es ∞
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{4x+4}{\log(x)}$ Caso similar al anterior,en este caso dibujar ambas funciones es una buena opcion, puesto que son sencillas y el dibujo tambien lo es, te recomendaria hacerlo para que estuvieses convencido de que x aumenta mas rapido y por lo tanto el valor de este limite es ∞

- $\lim_{x\to\infty} e^x - 7x$: Este caso es de $\infty - \infty$ En vez de dibujar una funcion y dibujar la otra y comparas dibuja la funcion $e^x - 7x$, y deduce que el valor del limite es ∞
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x^2}{x}$: Caso de $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso tenemos x^2 dentro del logaritmo, pero usando las propiedades de los logaritmos podemos recordar que $log(x^2 = 2log(x)$ y en este caso si sabemos cual incrementa mas rapido, y por tanto sabemos que el valor del linite es 0.
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-10x+2}$:Tenemos una indeterminacion de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. :Tenemos una indeterminacion de tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Es facil de ver que x^3 incrementa mas rapido que el denominador por lo tanto el valor del limtie es ∞
- $\lim_{x\to\infty} \frac{cos(x)}{e^x}$: Que tipo de indeterminacion es esta? Vamos a utilizar nuestros conocimientos de estas funciones, el valor del $cos(x)$ esta limitado por -1 y +1, es decir, el coseno de x puede tomar como maximo el valro 1 y como minimo el valor -1. Si tuviesemos el caso en el que el coseno es mayor tendriamos que el limite se convierte en $\lim_{x\to\infty} \frac{a}{e^x}$ Donde a es como maximo 1, tenemos que concluir por lo tanto que el valor del limite es 0.

2. En este ejercicio veremos un poco mas la idea de utilizar el metodo de logaritmos para resolver limites:

   - $\lim_{x\to-\infty}(1+e^x)^x$ En verdad el resultado de este limite es ∞^∞, que bueno, es igual a infinito.
   - $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{cos(x)})^x$ Tristemente este limite esta inderterminado :(, puesto que cuando x tiende a infinito el coseno no esta determinado.
   - $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{sin(x)})^x$ Un ejemplo de ∞^0. Digamos que el valor del limite es L, por lo que podemos escribir:

     $$L = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{sin(x)})^x$$
     $$lnL = \lim_{x\to 0} ln(\frac{1}{sin(x)})^x = \lim_{x\to 0} x(ln(\frac{1}{sin(x)})$$

     Ahora tenemos una indeterminacion de tipo $0 * \infty$, el seno(x) tiende a 0 conforme x tiende a 0, por lo tanto $ln(1\sin(x))$ tiende a infinito, pero como hemos visto antes, el logaritmo no es una funcion que tienda a infinito mas rapido que x, por lo tanto vemos que $\lim_{x\to 0} x(ln(\frac{1}{sin(x)}) = 0$. Utiliza valores en la calculadora y dibuja la ecuacion para que estes seguro de este paso.
     Ahora, $lnL = 0 \implies L = e^0 \implies L = 1$, el valor del limite es 1.
   - $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2})^{logx}$ Usa logaritmos para escribir $lnL = \lim_{x\to 0} log(x)ln(\frac{1}{x^2})$ y trabaja con esto o, date cuenta que el valor del limite es $\infty^{-\infty}$ es decir, $\frac{1}{\infty^\infty}$ que es igual a 0.

- $\lim_{x\to 1}(\frac{x}{2x-1})^{\frac{1}{x-1}}$ Es una indeterminacionde tipo 1 elevado a infinito, pero antes de intentar encontrar el valor usando la definicion del numero e, ten en cuenta que los limites por ambos lados no coinciden, por lo tanto el limite no esta definido

3. * Hemos dicho que el numero e viene dado por la siguiente formula=

$$e = lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

Otra manera de definirlo (la cual prefiero si me preguntan es la siguiente)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{1} + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \dots$$

De tal manera que $e^1 = e$ es:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

En este ejercicio tenemos dos misiones:

- Entender el significado de esta formula $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Especialmente , que significa lo siguiente $\sum_{k=0}^{\infty}$ y $k!$:
  $\sum_{k=0}^{\infty}$ se llama el sumatorio y precisamente te indica una suma , $k = 0$ significa que estamos sumando cambiando el valor del numero k, el cual empieza en 0, por otra parte el hecho de que tengamos un infinito encima del sumatorio significa que estamos sumando hasta que k sea igual a infinito, por lo tanto primero $k = 0$, luego $k = 1$,... hasta llegar a lo que tengamos encima del sumatorio, ten en cuenta que nunca llegaremos hasta infinito, por lo que esta suma es infinita.
  $k!$ se lee como k factorial, esta funcion esta definida para numeros enteros unicamente, y es la multiplicacion del numero k con todos los numeros enteros anteriores a el. Es decir, 2!=2*1, 5!=5*4*3*2*1, tambien comentar que 0!=1, en otro de estos casos interesantes de las mates que dices, bueno vale.
- Demostrar que efectivamente:

$$lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

  Resuelve el limite de la izquierda para obtener que efectivamente tenemos el valor de e!

Pista : El simbolo $\sum$ se llama sumatorio, por otra parte $k!$ se lee como: k factorial.

4. * En este ejercicio nos adentramos un poco en un lenguaje matemático y en el mundo del análisis matematico; supon que tenemos un limite de la siguiente forma:

$$lim_{x \to c} f(x) = L$$

La definición matemática de límite dice lo siguiente :

$$lim_{x \to a} f(x) = L \iff \forall a > 0, \exists b > 0 : 0 < |x - c| < b \implies |f(x) - L| < a$$

Esto esta escrito en notacion matemática:

- $\exists$ se lee como "existe"
- $\forall$ se lee como "para todo"
- $\iff$ se lee como "si y solo si"
- $\implies$ se lee como implica
- $\in$ se lee como "en el conjunto"
- : se lee como "de manera que"
- $>, <$ se leen como "mayor que z "menor querespectivamente
- $|x|$ se lee como "el valor absoluto de x"

De esta manera la siguiente frase: Para todo "x.^{en} el conjunto de los reales, existe z.^{en} el conjunto de los reales de manera que x al cuadrado es igual a y al cuadrado:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x^2 = y^2$$

Este ejercicio se compone de tres partes:

a) Traduce las siguientes frases de la notacion matematica al espanol, y di si son verdad o mentira (si no sabes lo que significan algunos conjuntos, utiliza internet!)

- $0 \in \mathbf{R}$: 0 existe en el conjunto de los numeros reales. Verdad
- $\exists x \in \mathbf{R} : \forall y \in \mathbf{R}, x > y$: Existe una x en los numeros reales de tal manera que para todo y que existe en los numeros reales, x es mayor que y. Mentira, elige y=x+1, este argumento no es verdad.
- $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : x > y$: Para todo y en los numeros reales, existe una x en los numeros reales de tal manera que x es mayor que y. Verdad
- $\forall z, w \in \mathbf{Q}, z > w \iff z^2 > w^2$:Para todo z,w en los numero racionales, z es mayor que w si y solo si z al cuadrado es mayor que w al cuadrado. Mentira, z=0 y w=-1 es un ejemplo que no cuimple esta regla.
- $\forall z, w \in \mathbf{Q}, |z| > |w| \implies z^2 > w^2$:Para todo z,w en los numero racionales, el valor absoluto de z es mayor que el de w implica que z al cuadrado es mayor que w al cuadrado. Verdad

- $\exists x \in \mathbf{R} : x^2 \in \mathbf{N}$: Existe una x en los numeros reales tal que x al cuadraro existe en los numeros naturales: Verdad , ejemplo, x=1
- $\forall r \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : r \times y > 0 \iff r > 0, y > 0$: Para todo r que existe en los reales existe una y en los reales de tal manera que r multiplicado por y es mayor que 0 si y solo si r es mayor que 0 e y es mayor que 0. Mentira: Si r e y son menor que 0 esto no se cumple

b) Escribe en español la definicion de limita expresada arriba en notacion matematica : El limite cuando x tiende a a de f(x) es igual a L si y solo si para todo a mayor que 0, existe una b mayor que 0 de tal mante que el valor absoluto de x menos c es mayor que 0 y menor que b esto implica que el valor absoluto de f(x) menos L es menor que a

c) Intenta pensar si esta definicion tiene sentido para ti, un dibujo puede ayudar! En este no te ayudo! Te recomendaria coger una funcion simple para f(x) por ejemplo x, y empezar con una a y b grandes (quizas a=1?) y empezar a hacer los numeros mas pequenos

2. Continuidad

Ejercicio 1.

Halla los valores de a y b que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x < 2 \\ ax^2 + bx + 3 & 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & x \geq 3 \end{cases}$$

Solución. Este es un ejercicio típico de Bachillerato, que sirve de calentamiento. Las tres funciones son continuas en su dominio, puesto que tenemos una racional y dos polinomios. Los únicos dos puntos que quedan por comprobar son los puntos en los que pasamos de una función a la otra, que son $x = 2$ y $x = 3$. Para que la función sea continua, ambos “trozos”deben coincidir, luego tenemos que

1. $x = 2$. La racional

   $$\frac{x^2-4}{x-2},$$

   toma los mismos valores que $x + 2$ (OJO, NO ES LA MISMA FUNCIÓN, PORQUE LA RACIONAL NO ESTÁ DEFINIDA PARA $x = 2$), así que su límite cuando $x \to 2$ es 4. El polinomio evaluado en $x = 2$ da como resultado $4a + 2b + 3 = 4$. Luego tenemos la primera ecuación

   $$4a + 2b + 3 = 4 \tag{1}$$
   $$\iff 4a + 2b = 1. \tag{2}$$

2. $x = 3$. Ambos polinomios deben coincidir para este punto, luego tenemos que

$$9a + 3b + 3 = 6 - a + b \iff 10a + 2b = 3. \tag{3}$$

Luego, tenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 10a + 2b = 3. \\ 4a + 2b = 1. \end{cases}$$

Aplicando reducción (primera ecuación menos la segunda), tenemos que

$$6a = 2 \iff a = \frac{1}{3}.$$

Y sustituyendo para b en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} 4 * \frac{1}{4} + 2b = 1 \\ \iff 2b = \frac{-1}{3} \\ \iff b = \frac{-1}{6}. \end{aligned}$$

Y para esos valores de a y b la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Teorema 1. ***Teorema del Valor Intermedio.*** *Considera una función f, continua en el intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. Para cada $u \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < u < f(b)$, existe al menos una $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = u$ [1].*

Vamos, que si me muevo desde el valor $f(a)$ al valor $f(b)$ por un paraje continuo, en algún momento tengo que pasar por todos los valores **intermedios**. Pero, ¿y esta obviedad para qué sirve?

Ejercicio 2.

Demuestra que el polinomio

$$x^5 - 200x^3 + 3x^2 + 5x + 1,$$

tiene al menos una raíz real. Fíjate en que, pese a no tener ni idea de la forma de la función, podemos saber que tiene una raíz, una solución.

Solución. El truco de esta pregunta está en evaluar los límites $x \to \pm\infty$, para los que domina x^5, que nos preserva el signo. Es decir que cogiendo x lo suficientemente negativo, el polinomio será negativo, y cogiendo x lo suficientemente positivo, el polinomio será positivo. Como la función es continua, podemos aplicar el Teorema del Valor Intermedio, tomando los siguientes puntos:

1. $a = -100 \implies f(a) = f(-100) = -9799970449$.
2. $b = 100 \implies f(b) = f(100) = 9800030501$.

Y como $f(-100) < 0 < f(100)$, tenemos que existe una $c \in [-100, 100]$ tal que el polinomio es igual a 0, es decir, tiene una raíz.

Ejercicio 3.

Vamos a hacer un poquito de Física. La Ley de Gravitación Universal nos dice que la energía potencial gravitatoria que tiene un cuerpo de masa m por encontrarse a una distancia r de un cuerpo de masa M ($M >> m$), viene dada por la expresión

$$V_g(r) = \frac{-GMm}{r}.$$

En esta ecuación, G es la constante de Cavendish (un número muy chiquitito, en concreto $6{,}674 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$). ¿Qué ocurre con el potencial a medida que

1. $r \to 0$?

2. $r \to \infty$?

¿Para qué intervalo de r está definido este potencial? ¿Dónde situamos normalmente el origen y por qué?

Solución. A la hora de evaluar los límites, basta con comprobar la típica función $\frac{1}{x}$, con el signo cambiado. Tenemos que

$$\lim_{r \to 0} \frac{-GMm}{r} = -\infty, \tag{4}$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{-GMm}{r} = 0. \tag{5}$$

Normalmente el origen del potencial está situado en el infinito, y esto tiene bastante sentido, porque únicamente a una distancia tan grande cómo se pueda, los cuerpos dejarán de sentir la atracción gravitatoria mutua. Además, poniendo el origen en ∞, evitamos lidiar con $r = 0$ (que tampoco tendría sentido, porque dos masas diferentes no pueden estar a una distancia "nula"). ¿Y el signo "-¿ Una forma de darle sentido a ese signo es emplear la propiedad de que **la gravedad es una fuerza conservativa**, luego el trabajo realizado tras fijar la masa M y mover la masa m del punto a al b viene dado por $W_{a \to b} = V_g(a) - V_g(b) = -GMm\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$. Tenemos que mirar dos casos fundamentales:

1. Si $a > b$, tenemos que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$, luego el trabajo es POSITIVO. Si la partícula se acerca, hacemos trabajo a favor del campo (la gravedad tiende a atraer las cosas).

2. Si $a < b$, tenemos que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$, luego el trabajo es NEGATIVO. Si la partícula se aleja, hacemos trabajo en contra del campo (la gravedad tiende a atraer las cosas).

Ejercicio 4.

¿Preparados para la fiesta? Normalmente, las últimas preguntas de cada ficha de ejercicios serán las más interesantes y complejas, así que no te desanimes si no te parece obvia la respuesta, hay que pensar un poco.

En esta pregunta vamos a estudiar la función

$$g(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right), \tag{6}$$

donde $x \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de x es la función continua? Halla

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right). \tag{7}$$

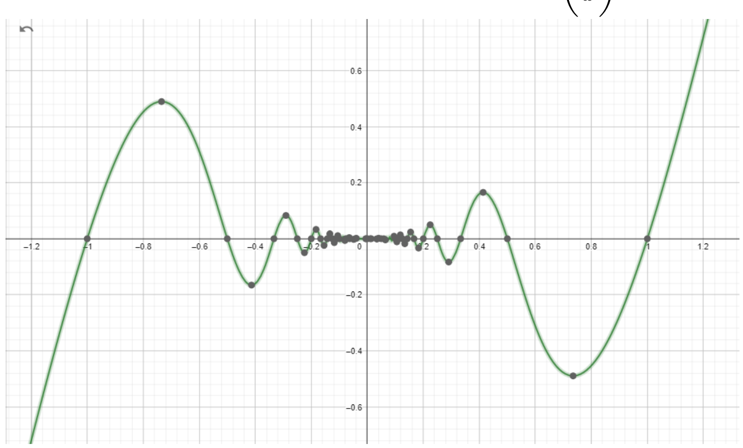
Por último, ¿se podría redefinir la función de alguna forma para hacerla continua? (*Pista*: sí, ¿pero cómo? : P).

Solución. Lo vital de esta pregunta es saber que la imagen del seno está en $[-1, 1]$. En $x = 0$, como lo que está dentro del seno no está definido, la función $g(x)$ no está definida. Para el resto de valores, no tenemos ningún problema, así que para $\mathbb{R} - \{0\}$ la función está definida. A la hora de mirar el límite, como la imagen del seno está entre $[-1, 1]$, da igual cómo fluctúe lo que está dentro del seno, lo vamos a multiplicar por el 0 de fuera. Y utilizando los teoremas para la composición de funciones y el producto de límites, tenemos que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right). \tag{8}$$

Si no me crees, mira la gráfica jeje. Por último, como conocemos el límite y la

Figura 1: Gráfica de la función $x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)$.



función dada no está definida para $x = 0$, BASTA CON DEFINIRLA CON EL

VALOR DEL LÍMITE:

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Este tipo de discontinuidad se conoce como evitable, porque con un poco de ingenio, podemos redefinir la función para evitarla.

Referencias

[1] Stewart, James. Essential Calculus: *Early Transcendentals*. Second edition, Brooks/Cole Cengage Learning, 2013.