Tercera hoja de ejercicios

Javier Montoya y David Sola

Junio 2020

¡Llegamos al último set de ejercicios! Este se va a diferenciar de todos los anteriores ya que estos ejercicios no son ejercicios que se ven en bachillerato. Pero si te ha gustado lo que hemos estado haciendo, en estos ejercicios utilizaremos los conocimientos que hemos ido desarollando para llegar a resultados más complejos y bellos. Como en los ejercicios anteriores, una estrella "*"simboliza un ejercicio especialmente difícil.

1. Ecuaciones diferenciales

1. En este ejercicio resolveremos ecuaciónes diferenciales separables, en algunas de ellas obtendremos una condiciones iniciales que nos ayudaran a resolver mas especificamente. De esta manera, resuelve para x las siguientes ecuaciónes diferenciales: $Nota$: Recuerda que $\dot{x}$ simboliza la derivada con respecto al tiempo y utilizaremos $x^{'}$ como la derivada de x respecto a la otra variable que aparezca en la ecuación:

   - $\dot{x} = t + t^2 \implies \int dx = \int (t + t^2) dt = x = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$
   - $\dot{x} = e^t \implies \int dx = \int e^t dt = x = e^t + C$
   - $x^{'} e^{-y} = 1 \implies x^{'} = e^y \implies \int dx = \int e^y dy = x = e^y + C$
   - $\frac{\dot{x}+y}{seno(y)} = 5$ con $x(0) = 5$

     Date cuenta que tenemos la derivada de x con respecto al tiempo $\dot{x}$, por lo tanto esto se soluciona de la siguiente manera:
     $\dot{x} = \frac{5*seno(y)}{y} \implies \int dx = \int (\frac{5*seno(y)}{y}) dt = x = \frac{5*seno(y)}{y} t + C$, ahora las condiciones iniciales nos dicen que $x(0) = 5$, por lo tanto resolvemos que $C = 5$ y la solucion es $x = \frac{5*seno(y)}{y} t + 5$
   - $y^{'} = 2x^2 + seno(x^2)x + 5$ con $y(3) = \frac{1}{2}$

     $\int dy = \int (2x^2 + seno(x^2)x + 5) dx = y = \frac{2x^3}{3} - \frac{cos(x^2)}{2} + 5x + C$, usando la condicion inicial obtenemos que $C = 1/2(-65 + cos(9))$ por lo tanto :
     $y = \frac{2x^3}{3} - \frac{cos(x^2)}{2} + 5x + 1/2(-65 + cos(9))$

2. Ahora añadimos una pequena dificultad, ten en cuenta que ahora tendremos que integrar ambos lados:

   - $\dot{x}x = t + t^2 \implies \int xdx = \int(t+t^2)dt = \frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$
   - $\dot{x} = e^{tx} \implies \dot{x}e^{-x} = e^t \implies \int e^{-x}dx = \int e^t dt = -e^{-x} = e^t + C$
     $-e^{-x} = e^t + C \implies ln(e^{-x}) = ln(-e^t - C) = -x = ln(-e^t - C) \implies x = -ln(-e^t - C)$
   - $x^{'}e^{-xy} = 1 \implies x^{'}e^{-x} = e^y$, si en vez de y tuviesemos t, el resultado seria el mismo que el ejercicio anterior.
   - $\dot{x} = \frac{1+t^3}{tx^2} \implies \dot{x}x^2 = \frac{1+t^3}{t} \implies \int x^2 = \int(\frac{1}{t} + t^2)dt = \frac{x^3}{3} = log(t) + \frac{t^3}{3} + C \implies x = (3 * log(t) + t^3 + C)^{\frac{1}{3}}$
     Al ser C una constante indefininida, podemos absorver el 3 y escribir $3C$ como C
   - $\dot{x}t = x \implies \int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{t}dt = log(x) = log(t) + log(C) = log(t * C) \implies x = t + C$
     De nuevo, podemos escribir la constante como $log(C)$ en lugar de unicamente C al ser esta una constante por definir.
   - $\frac{\dot{x}x}{seno^2(t)} = \frac{t}{cos^2(t)} \implies \dot{x}x = \frac{t*seno^2(t)}{cos^2(t)} \implies \int xdx = \int(tan^2(t) * t)dt = \frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + t * tan(t) + log(cos(t))$
     $x = \sqrt{2 * (-\frac{t^2}{2} + t * tan(t) + log(cos(t)))}$

3. * En este ejercicio vamos a resolver una ecuación diferencial que requiere un *Ansantz*, una solucion estimada de lo que en realidad es la ecuación. Resolveremos la sigueinte ecuación por pasos:

$$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$$

   - Observa la ecuación, no podemos separarla y no podemos integrar como hemos hecho en pasados ejercicios, por lo tanto necesitamos estimar una solucion que se pueda parecer. Ten en cuenta que estamos derivando con respecto al tiempo, piensa en una funcion no muy compleja que conocemos y que al derivarla varias veces (en concreto dos veces) llegamos a algo muy parecido. $Pista$: A mi se me ocurren dos, dos **cos**as que funcionan, **se** (que) **no** es facil.
     El seno y el coseno valen!
   - Escribe una solucion estimada para x que sea parecida a $x = Af(a * t) + Bg(b * t)$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son las dos funciones del aparto anterior , A y B , y a y b son constantes que vamos a sacar.
     $x = A * sin(a * t) + Bcos(b * t)$
     $Nota$: $f(a * t)$ significa que si $f(t) = e^t$, $f(a * t) = e^{a*t}$
   - Introduce nuestra solucion estimada en la ecuación que queremos resolver, de esta manera obtendremos una serie de ecuaciónes que podemos reslver para conseguir los valores de a y b

$$x = A * sin(a * t) + B * cos(b * t) \tag{1}$$
$$\dot{x} = A * a * cos(a * t) - b * B * sin(b * t) \tag{2}$$
$$\ddot{x} = -a^2 * A * sin(a^* t) - b^2 * B * cos(b * t) \tag{3}$$

En el caso que $a \neq b$:
$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0 = -a^2 * A * sin(a^* t) - b^2 * B * cos(b * t) - A * a * cos(a * t) + b * B * sin(b * t) + 2 * (A * sin(a * t) + B * cos(b * t)) \implies$

$$sin(a * t)(-A * a^2 + 2A) = 0 \tag{4}$$
$$cos(b * t)(-B * b^2 + 2B) = 0 \tag{5}$$
$$A * a * cos(a * t) = 0 \tag{6}$$
$$B * b * sin(b * t) = 0 \tag{7}$$

La unica solucion que tiene esta serie de ecuaciones es $x = 0$, la cual a pesar de ser verdad no tiene chicha, tenemos que encontrar otra:
En el caso de que $a = b$, reescribimos:

$$x = A * sin(w * t) + B * cos(w * t) \tag{8}$$
$$\dot{x} = A * w * cos(w * t) - w * B * sin(w * t) \tag{9}$$
$$\ddot{x} = -w^2 * A * sin(w^* t) - w^2 * B * cos(w * t) = -w^2 * x \tag{10}$$

$\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0 = -w^2 - \dot{x} + 2x = (2 - w^2)x - \dot{x} =$
$(2-w^2)(A*sin(w*t)+B*cos(w*t))-A*w*cos(w*t)+w*B*sin(w*t)$

$$sin(w * t)(A(2 - w^2) + w * B) = 0 \tag{11}$$
$$cos(w * t)(B(2 - w^2) - w * A) = 0 \tag{12}$$

Por lo tanto hay que resolver para w el sistema de ecuaciones:

$$(A(2 - w^2) + w * B) = 0 \tag{13}$$
$$(B(2 - w^2) - w * A) = 0 \tag{14}$$

Que tiene cuatro soluciones complejas, como aun no hemos terminado de resolver el problema y seguimos teniendo dos incognitas (A y B) podemos elegir cualquiera de las soluciones, yo he elegido $w = \sqrt{\frac{3+i\sqrt{7}}{2}}$ al ser esta la mas positiva de las cuatro

- Utiliza ahora las condiciones iciales $x(0) = 8$ y $\dot{x}(0) = 5$ para encontrar los valroes de A y B. NOTA: En la pagina de ejercicios hay una errata en la cual las condiciones iniciales no estan bien puestas, lo siento.

$$x(0) = A * sin(0) + B * cos(0) = B = 8 \tag{15}$$
$$\dot{x} = A * w * cos(0) = A * w = 5 \implies A = \frac{5}{w} \tag{16}$$

Por lo tanto nuestra solucion es:

$$x = \frac{5}{w} sin(w * t) + 8 * cos(w * t), \, donde \; w = \sqrt{\frac{3 + i\sqrt{7}}{2}}$$

- Perfecto! Ahora tan solo nos falta comprobar que la solucion que hemos escrito para x es la correcta. Vuelve a introducirla en la ecuación principal y compruebalo!
  ATACA!!

2. Un nuevo potencial gravitatorio

En esta segunda parte de la hoja de ejercicios vamos a trabajar con un potencial gravitatorio un poco distinto al que vimos en la clase. Empleando unos métodos similares a los de la clase, se obtienen, para describir la órbita en un plano de una partícula con masa, las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{d\tau}(2c^2\alpha\dot{t}) = 0,$$
$$\frac{d}{d\tau}(-2r^2\dot{\theta}) = 0.$$

En las ecuaciónes de arriba, $\alpha = 1 - \frac{2GM}{rc^2}$, aunque para lo que nos importa, es una constante. Además, t es el tiempo medido por un reloj a muchísima distancia del origen del campo gravitatorio, τ es el tiempo propio, es decir, el medido por un reloj estacionario en una posición concreta;r es la distancia radial respecto al origen del potencial gravitatorio; y θ es ángulo polar, lo que hemos "girado". Finalmente, r, θ y t son funciones de τ únicamente.

- Establece las cantidades conservadas del movimiento, e intenta averiguar lo que representan físicamente. *Pista*: una de ellas tiene que ver con cómo varía el tiempo. *Solución.* Las cantidades conservadas vienen dadas por

  $$\frac{d}{d\tau}(2c^2\alpha\dot{t}) = 0 \implies \alpha\dot{t} = \text{constante} = k,$$
  $$\frac{d}{d\tau}(-2r^2\dot{\theta}) = 0 \implies r^2\dot{\theta} = h.$$

  La primera de ellas nos indica que el tiempo medido por el reloj a muchísima distancia varía de forma constante con el tiempo propio, tómalo como una manifestación de la dilatación temporal. La segunda constante es nuestro viejo amigo el momento angular dividido por la masa m, tal y como vimos en clase $h = \frac{L}{m}$.

- Empleando las cantidades conservadas del apartado anterior, partiendo de la ecuación de la energía

  $$c^2 = \alpha c^2\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{\alpha} - r^2\dot{\theta}^2,$$

reescribe todo en términos de derivadas de r, y luego expande α para obtener la ecuación radial del movimiento de la partícula:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GMh^2}{r^3c^2} = \frac{c^2(k^2-1)}{2}, \tag{17}$$

donde h y k también son constantes que deberías haber asignado en el apartado anterior.

Solución. Despejando para $\dot{r}$ y $\dot{\theta}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \frac{k}{\alpha}, \\ \dot{\theta} &= \frac{h}{r^2}. \end{aligned}$$

Y sustituyendo esto en la ecuación dada, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GMh^2}{r^3c^2} &= \frac{c^2(k^2-1)}{2} \\ \iff c^2 &= \alpha c^2 \frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{\dot{r}^2}{\alpha} - \frac{h^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando por α, sustituyendo su definición en términos de otras constantes y despejando da como resultado

$$\begin{aligned} \alpha c^2 &= c^2 \frac{k^2}{} \dot{r}^2 - \alpha \frac{h^2}{r^2} \\ \iff \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)c^2 &= c^2k^2 - \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{h^2}{r^2} \\ \iff c^2 - \frac{2GM}{r} &= c^2k^2 - \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)\frac{h^2}{r^2} \\ \iff \dot{r}^2 - \frac{2GM}{r} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GMh^2}{r^3c^2} &= c^2(k^2-1). \end{aligned}$$

Y por último, diviendo entre 2, llegamos al resultado definitivo

$$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GMh^2}{r^3c^2} = \frac{c^2(k^2-1)}{2}.$$

- Compara la ecuación anterior con la que obtuvimos empleando la mecánica clásica. ¿Qué término domina para $r \to 0$? ¿Qué significa esto?

  Solución. Comparando la ecuación que acabamos de obtener con la de la mecánica clásica, la energía viene dada por la velocidad de la luz c y la constante k, mientras que el lado izquierdo de la ecuación es prácticamente el mismo pero con un término adicional: $\frac{-GMh^2}{r^3c^2}$.

  Para $r \to 0$ domina el término que depende de $\frac{1}{r^3}$, que es NEGATIVO. Esto implica que ahora las órbitas en las que la partícula colapsa en el cuerpo que está originando el campo gravitatorio son posibles, porque el potencial tiende a $-\infty$ a medida que nos acercamos al origen.

- Nombrando $r_g = \frac{GM}{c^2}$, tras los cambios de variable para el radio $R = \frac{r}{r_g}$ y el momento angular $H = \frac{h}{r_g * c}$, expresa el potential efectivo V_{eff} (simplemente el Newtoniano más el término adicional), como

$$\frac{V_{eff}}{c^2} = \frac{-1}{R} + \frac{H^2}{2R^2} - \frac{H^2}{R^3}. \tag{18}$$

Solución. En problemas como este viene mejor trabajar al revés. Tenemos que, dadas las definiciones

$$\begin{aligned} R = \frac{r}{r_g} &= \frac{rc^2}{GM}, \\ \frac{H^2}{2R^2} = \frac{h^2}{2r_g c^2} * \frac{{r_g}^2}{r^2} &= \frac{h^2}{2r^2}, \\ \frac{H^2}{R^3} = \frac{h^2}{{r_g}^2 c^2} * \frac{{r_g}^3}{r^3} = \frac{h^2}{c^2 r^3} * r_g &= \frac{GMh^2}{r^3 c^4}. \end{aligned}$$

Y empleando estas ecuaciones, tenemos que

$$\frac{V_{eff}}{c^2} = -\frac{GM}{r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GMh^2}{r^3 c^2} = \frac{-1}{R} + \frac{H^2}{2R^2} - \frac{H^2}{R^3}.$$

- Tomando la derivada con respecto r del potencial efectivo ($\frac{dV_{eff}}{dr} = 0$), intenta hacerte una idea de la forma del mismo. Deberías obtener dos puntos extremos, un máximo y un mínimo, que dependen de H y R. ¿Qué representa cada uno de estos puntos a nivel orbital? ¿Cuándo se fusionan los dos puntos? ¿Qué órbita en concreto es esta? Es conveniente que vayas probando varios valores de R y H y dibujes varias órbitas para tener una mejor idea de lo que está ocurriendo. *Solución.* Fíjate que empleando la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dV_{eff}}{dR} = \frac{dr}{dR}\frac{dV_{eff}}{dr} = r_g \frac{dV_{eff}}{dr}.$$

Luego, basta con que $\frac{dV_{eff}}{dR}$ sea 0. Tomando la derivada de la expresión del apartado anterior

$$\begin{aligned} \frac{dV_{eff}}{dR} &= \frac{1}{R^2} + \frac{-2H^2}{2R^3} - \frac{3H^2}{R^4} \\ &= \frac{1}{R^2} - \frac{H^2}{R^3} - \frac{3H^2}{R^4}, \end{aligned}$$

y concluimos que

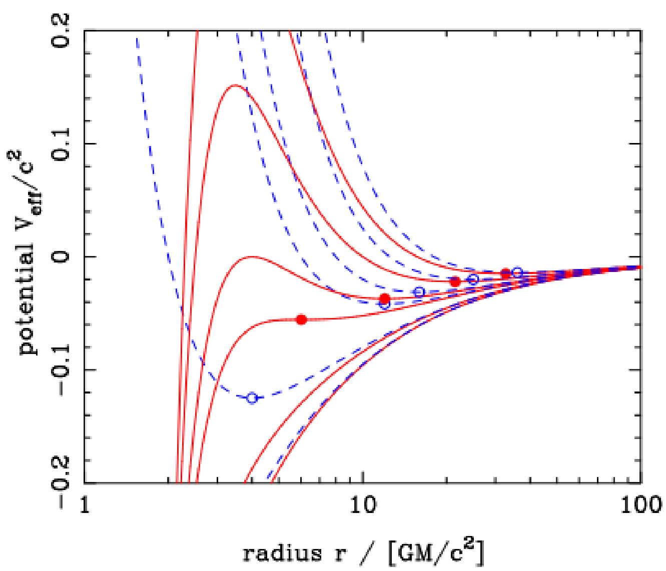
$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} - \frac{H^2}{R^3} - \frac{3H^2}{R^4} &= 0 \\ \iff R^2 - H^2 R - 3H^2 &= 0 \\ \iff R = \frac{H^2 \pm \sqrt{H^4 - 12H^2}}{2}&. \end{aligned}$$

Luego tenemos dos puntos extremos, uno para una órbita inestable (el menor, mira la gráfica (fig.1)), y otro para una órbita estable (el mayor). Para que ambos coincidan, el discriminante debe ser 0, luego

$$H^4 - 12H^2 = 0$$
$$\iff H = \sqrt{12}.$$

Para este valor, $R = 6 \implies r = 3r_s$, y representa la última órbita estable. En el caso de que estemos hablando de un agujero negro de Schwarzschild, es el lugar más cercano a la singularidad en el que las partículas con masa orbitan de forma estable, dando lugar al disco de acreción.

Figura 1: Potencial efectivo Newtoniano (azul) y de Relatividad General (rojo) alrededor de una masa puntual. Están representados para valores diferentes de H, los cuales son, de abajo a arriba: $H = 1, 2, \sqrt{12}, 4, 5, 6$. Las órbitas circulares vienen indicadas por puntos. Para $H < 12$, V_{eff} no tiene mínimo en el caso de Relatividad General, y por eso la última órbita estable viene dada por ese preciso valor.



Damas y caballeros, las ecuaciones con las que han estado trabajando durante todo esta hoja de ejercicio no son otras que las que provienen de la métrica de Schwarzschild, de la Relatividad General. Esta métrica describe el espacio vacío pero curvado por una distribución esférica de masa, es decir, un planeta muy masivo e incluso un **agujero negro**. De hecho, como ejercicio adicional, considera la ecuación radial para el fotón

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{c^2k^2}{2} - \frac{h^2\alpha}{2r^2}. \tag{19}$$

Identifica el potencial efectivo, e impón la condición para una órbita CIRCULAR. El valor de R que obtienes representa el anillo de fotones, una sección esférica del espacio en el que la gravedad es tan fuerte que, pese a no tener masa, los fotones se ven obligados a moverse en órbita, aunque con el paso del tiempo acabarán por abandonarla.

Solución. Ahora el potencial efectivo es mucho más sencillo. Viene dado por

$$V_{eff} = \frac{h^2\alpha}{2r^2} = \frac{h^2}{2r^2}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) = \frac{h^2}{2r^2} - \frac{GMh^2}{r^3c^2}.$$

Luego, tomando la derivada

$$\begin{aligned} \frac{dV_{eff}}{dr} &= \frac{-h^2}{r^3} + \frac{3GMh^2}{r^4c^2} = 0 \\ &\iff \frac{r}{r_g} = R = 3. \end{aligned}$$

Esto se conoce cómo el **anillo de fotones**, y fíjate en cómo esta última órbita está cuando $r = \frac{3r_s}{2}$, un poquito más adentro de la órbita del disco de acreción. Si quieres ver un maravilloso vídeo de cómo visualizar un agujero negro con todo lo que hemos hecho, te recomiendo encarecidamente que le eches un ojo a `https://www.youtube.com/watch?v=zUyH3XhpLTo&t=473s`.

Referencias

[1] Peacock, John. *General Relativity*, lecture notes. University of Edinburgh, 2020.