Segunda hoja de ejercicios

Javier Montoya y David Sola

Junio 2020

¡Buenos dias por la mañana o noche, dependiendo de cuando leas esto! Los ejercicios de hoy son un poco diferentes a los que encontraras en bachillerato, la idea principal es usar la definición formal de derivada para sacar las derivadas de funciones que ya conocemos. En la sección de integrales, aparte de un pequeño repaso de bachillerato, intentaremos algunas integrales más complejas y veremos propiedades muy interesantes de las mismas. Tendremos otros ejercicios tambien mas o menos dificiles, recordad que una estrella "*"marca a aquellos mas complicados.

1. Derivadas

1. Recordad que la definición formal de derivada viene dada de la siguiente manera:
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
Bien, utiliza esta definición para sacar la derivada de las siguientes funciones:
   - $f(x) = x$
   - $f(x) = x^2$
   - $f(x) = x^3$
   - $f(x) = x^n$, donde n simboliza cualquier numero
   - $f(x) = 4$
   - * $f(x) = e^x$
   - *$f(x) = log(x)$
   - Sabiendo cual es la derivada de x^n y que e^x se puede escribir como la serie : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{1} + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1\times2} + \frac{x^3}{1\times2\times3} + \frac{x^4}{1\times2\times3\times4} + \dots$, convencete aun mas de que la derivada de e^x es e^x.
2. Ya hemos visto en el anterior set de ejercicios el concepto de serie, el seno y el coseno vienen definidos por una serie de tal manera que :
$$seno(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Vamos entonces a escribir la serie del coseno:

- Escribe los primeros elementos de la serie (es decir, cuando k=0, k=1, etc), esto te ayudara a ver la serie mejor
- Sabemos que la derivada del seno es el coseno, utiliza esto para escribir la serie del coseno con una formula parecida a la que tenemos del seno

3. Confirma si las siguientes funciones son derivables o no, aunque no es necesario dibujarlas, esto te ayudara a tener mas idea de lo que esta pasando asi que te lo recomiendo!:

- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \frac{1}{x^2}$
- $f(x) = \frac{1}{sin(x)}$
- $f(x) = \frac{1}{e^x}$
- $*f(x) = sin(\frac{1}{x})$
- $*f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{sin(x)}}}$

2. Integrales

Ejercicio 1.

Antes de entrar en materia, un par de integrales para calentar esos cerebros. Evalúa

$$\int_0^3 (x^2 - 3x)dx, \tag{1}$$

$$\int_2^5 (1 + 6w^2 - 7w)dw, \tag{2}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3(\theta)d\theta, \tag{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}dx, \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta, \tag{5}$$

$$*\int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}du. \tag{6}$$

Pista. Para la quinta integral, la ecuación de suma de ángulos

$$\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = cos(2\theta), \tag{7}$$

debe ser utilizada para reescribir el integrando. Para la última, intenta reescribir el integrando como “1+üna función racional que deberías saber integrar aplicando una regla para las trigonométricas.

Ejercicio 2.

Hay ocasiones en las que pararse a evaluar el tipo de función que queremos integrar y el intervalo sobre el que integramos nos permite ahorrar muchísimo esfuerzo. Evalúa, evitando cálculos cuando sea posible

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(\theta) d\theta, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta. \tag{9}$$

Pensemos un poco de forma general. Si $f(x)$ es impar, ¿a qué es igual

$$\int_{-a}^{a} f(x) dx, \tag{10}$$

donde $a \in \mathbb{R}$? ¿Y si $f(x)$ es par?

Ejercicio 3.

Cuando evaluamos una integral, también podemos encontrar $\pm\infty$ en los límites de integración. Este tipo de integrales, conocidas como **impropias**, están definidas de modo que

$$\int_{0}^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \to \infty} \int_{0}^{t} f(x) dx. \tag{11}$$

¡OJO! El límite puede diverger (¿qué crees que significa esto?). Sabiendo esto, evalúa

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \tag{12}$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{-1}{x^2} dx. \tag{13}$$

Ejercicio 4.

Si has estudiado algo de estadística o probabilidad, habrás visto Campanas de Gauss por todas partes. En este ejercicio vamos a calcular el área bajo esta maravillosa curva, y dar una justificación a la definición de media y varianza de una distribución normal. Durante esta pregunta, emplearemos el resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{14}$$

1. Calcula la constante de normalización A tal que

$$A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1. \tag{15}$$

2. La media de una variable aleatoria que tiene una función de distribución de probabilidad $f(x)$, se define como

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{16}$$

Halla $\bar{x}$ para el caso de una distribución normal.

3. * De forma similar, la varianza viene dada por

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2. \tag{17}$$

Halla la varianza para el caso de una distribución normal.

Ejercicio 5.

** Aparte de para calcular áreas, las integrales son empleadas con muchísimos otros fines. Cuando evaluamos el producto escalar de dos vectores en n dimensiones de $\mathbb{R}$, tenemos que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i * b_i$, donde a_i y b_i representan el i-ésimo componente de cada vector, respectivamente. Pero, ¿qué ocurre si empiezo a aumentar el número de dimensiones hasta que $n \to \infty$? ¿Qué es un vector de infinitas dimensiones? Pues... Tendría infinitamente muchas dimensiones. ¿Cómo escribe una persona eso? Tranquil@, ya lo has escrito. Miles de veces, incluso durante esta hoja de ejercicios. Se trata de una función, tu amiga $f(x)$ en $\mathbb{R}$, y x en este caso, es la "etiqueta"que nos permite acceder a cada entrada, pudiendo tomar infinitos valores en el dominio de f. Pero podemos ir un pasito más allá, y generalizar, multiplicando por una cantidad "ínfima"de x, la noción de producto escalar. Para ello, tomamos el límite de infinitas dimensiones, y escribimos

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i * b_i \xrightarrow[n\to\infty]{} < a, b >= \int_{-\infty}^{\infty} a(x) b(x) dx. \tag{18}$$

¿Mola eh? Pues agárrate que vienen curvas. Con esta noción de producto escalar para funciones, podemos decir que dos funciones $a(x)$ y $b(x)$ son **ortogonales** $\iff < a, b >= 0$. Y podemos proyectar unas funciones sobre otras. ¿Y esto para qué sirve? AYYYYY SI TÚ SUPIERAS. De momento, para $L \in \mathbb{R}$, calcula

$$\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \tag{19}$$

$$\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \tag{20}$$

$$\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{21}$$

En las tres integrales $m, n \in \mathbb{Z}$. Tienes que reescribir los productos de senos y cosenos como algo que puedas integrar. Las siguientes fórmulas son tus mejores aliadas:

$$\cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B) = \sin(A + B), \tag{22}$$

$$-\cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B) = \sin(A - B), \tag{23}$$

$$\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B) = \cos(A - B), \tag{24}$$

$$\cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) = \cos(A + B). \tag{25}$$

Considera los casos $m \neq n$ y $m = n$ por separado. ¿Qué está pasando aquí?