Segunda hoja de ejercicios

Javier Montoya y David Sola

Junio 2020

¡Buenos dias por la mañana o noche, dependiendo de cuando leas esto! Los ejercicios de hoy son un poco diferentes a los que encontraras en bachillerato, la idea principal es usar la definición formal de derivada para sacar las derivadas de funciones que ya conocemos. En la sección de integrales, aparte de un pequeño repaso de bachillerato, intentaremos algunas integrales más complejas y veremos propiedades muy interesantes de las mismas. Tendremos otros ejercicios tambien mas o menos dificiles, recordad que una estrella "*"marca a aquellos mas complicados.

1. Derivadas

1. Recordad que la definición formal de derivada viene dada de la siguiente manera:
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
Bien, utiliza esta definición para sacar la derivada de las siguientes funciones:

    NOTA: El limite lo escribire solamente al principio pero recuerda que hay que escriibirlo mientras que la h este presente

    - $f(x) = x$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$
    - $f(x) = x^2$:$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{x^2+h^2+2xh-x^2}{h} = \frac{h^2+2xh}{h} = 2x$
    - $f(x) = x^3$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{h^3+3h^2x+3hx^2+x^3-x^3}{h} = 3x^2$
    - $f(x) = x^n$, donde n simboliza cualquier numero : Mirando los ejemplos anteriores vemos que el unico elemento que sobrevive es el que esta siendo multiplicado por h^1, en el caso de $(x+h)^n$ es $(n-1)x^{n-1}$, y es por eso por lo que este es el valor de la derivada
    - $f(x) = 4$: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{4-4}{h} = 0$
    - * $f(x) = e^x$:
    $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x(e^h-1)}{h}$, recuerda que $e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3*2} + ...$ por lo tanto $e^h - 1 = h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3*2} + ...$ y lo que implica : $\lim_{h\to 0} \frac{h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3*2}+...}{h} = 1$, y asi tenemos $\lim_{h\to 0} \frac{e^x(e^h-1)}{h} = e^x$

- $*f(x) = log(x)$
  $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{log(x+h)-log(x)}{h} = \frac{log(\frac{x+h}{x})}{h} = \frac{1}{h}\frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} log(1+\frac{h}{x})^{1/h}$ que es una indeterminacion de tipo 1 elevado a infinito! Os dejo a vosotros que la resolvais pero recordad que el resultado es $\frac{1}{x}$
- Sabiendo cual es la derivada de x^n y que e^x se puede escribir como la serie : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{1} + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \dots$, convencete aun mas de que la derivada de e^x es e^x. Esto lo hemos hecho antes!

2. Ya hemos visto en el anterior set de ejercicios el concepto de serie, el seno y el coseno vienen definidos por una serie de tal manera que :

$$seno(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

   Vamos entonces a escribir la serie del coseno:

   - Escribe los primeros elementos de la serie (es decir, cuando k=0, k=1, etc), esto te ayudara a ver la serie mejor
     $seno(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x}{1} + \frac{-x^3}{(3)!} + \frac{+x^5}{5!} + ...$
   - Sabemos que la derivada del seno es el coseno, utiliza esto para escribir la serie del coseno con una formula parecida a la que tenemos del seno
     $cos(x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} + ... = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} = \frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)!}$

3. Confirma si las siguientes funciones son derivables o no, aunque no es necesario dibujarlas, esto te ayudara a tener mas idea de lo que esta pasando asi que te lo recomiendo!:

   Todas las funciones de abajo son derivables donde son continuas, como veis el caso en el que es continua pero no derivable es un caso mas aislado y que , en general, no vamos a encontrar!

   - $f(x) = \frac{1}{x}$
   - $f(x) = \frac{1}{x^2}$
   - $f(x) = \frac{1}{sin(x)}$
   - $f(x) = \frac{1}{e^x}$
   - $*f(x) = sin(\frac{1}{x})$
   - $*f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{sin(x)}}}$

2. Integrales

Ejercicio 1.

Antes de entrar en materia, un par de integrales para calentar esos cerebros. Evalúa

$$\int_0^3 (x^2 - 3x)dx, \tag{1}$$

$$\int_2^5 (1 + 6w^2 - 7w)dw, \tag{2}$$

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^3(\theta)d\theta, \tag{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}dx, \tag{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta, \tag{5}$$

$$* \int_{2x}^{3x} \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}du. \tag{6}$$

Pista. Para la quinta integral, la ecuación de suma de ángulos

$$\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta), \tag{7}$$

debe ser utilizada para reescribir el integrando. Para la última, intenta reescribir el integrando como "1+ una función racional", que deberías saber integrar aplicando una regla para las trigonométricas. *Solución:*

$$\int_0^3 (x^2 - 3x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{3 * 3^2}{2} = \frac{-9}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int_2^5 (1 + 6w^2 - 7w)dw &= w + \frac{6w^3}{3} - \frac{7w^2}{2}\Big|_2^5 \\ &= \big(5 + 2 * 5^3 - \frac{7 * 5^2}{2}\big) - \big(2 + 2 * 2^3 - \frac{7 * 2^2}{2}\big) = \frac{327}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{sen}^3(\theta)d\theta = \int_0^\pi \operatorname{sen}(\theta)(1 - \cos^2(\theta))d\theta &= \int_0^\pi \operatorname{sen}(\theta)d\theta - \int_0^\pi \cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta)d\theta \\ = -\cos(\theta) + \frac{\cos^3(\theta)}{3}\Big|_0^\pi = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Para la siguiente, coviene reescribir el integrando utilizando la definición de secante. Tenemos que $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$, luego

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\tan^2(\theta)}{\sec^2(\theta)}d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2(\theta)\operatorname{sen}(\theta)d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3(\theta),\end{aligned}$$

y utilizando los resultados anteriores, podemos concluir que

$$\frac{-\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta) + \frac{\cos^3(\theta)}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Para esta última integral, hay que emplear la pista. Reescribiendo el integrando:

$$\begin{aligned} & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = \cos(2\theta) \\ \iff & \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) = \cos(2\theta) \\ & \iff 2\cos^2(\theta) = \cos(2\theta) + 1 \iff \cos^2(\theta) \quad = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en la integral, y realizando la sustitución $u = 2\theta$, podemos concluir

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\theta)d\theta = \pi + \frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \cos(u)du = \pi + \frac{1}{4}\sin(u)\Big|_0^{4\pi} = \pi.$$

Para la última hay que ser un poco ingenioso y acordarse de la integral de la arcotangente (jejejeje).

$$\int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}du = \int_{2x}^{3x} (\frac{u^2+1}{u^2+1} + \frac{-2}{u^2+1})du = \int_{2x}^{3x} \big(1 + \frac{-2}{u^2+1}\big) = x - 2\arctan(3x) + 2\arctan(2x).$$

Ejercicio 2.

Hay ocasiones en las que pararse a evaluar el tipo de función que queremos integrar y el intervalo sobre el que integramos nos permite ahorrar muchísimo esfuerzo. Evalúa, evitando cálculos cuando sea posible

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)d\theta, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta)d\theta. \tag{9}$$

Pensemos un poco de forma general. Si $f(x)$ es impar, ¿a qué es igual

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx, \tag{10}$$

donde $a \in \mathbb{R}$? ¿Y si $f(x)$ es par?

Solución. Viendo las gráficas del seno y del coseno, y comparando áreas bajo la curva, inmediatamente podemos deducir que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)d\theta = 0,$$

puesto que el área negativa de la izquierda (de $-\pi$ a 0) coincide exactamente con el área positiva bajo la izquierda (de 0 a π), y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta) d\theta = 2 \int_{-\pi}^{0} \cos(\theta) d\theta = 0,$$

puesto que estamos sumando dos veces el mismo área (que en este caso es 0). Ahora, en general, si una función es impar, tenemos que $-f(x) = f(-x)$, luego

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{a}^{0} f(-x)dx,$$

tras hacer el cambio a $-x$ en la segunda integral, y usando la definición de función impar y las propiedades de los límites de una integral, obtenemos dos signos $-$ que se cancelan y

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

Esta propiedad nos permite ahorrar muchísimos cálculos. De forma similar, para una función par tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{a}^{0} f(-x)dx \\ &= \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.\end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Cuando evaluamos una integral, también podemos encontrar $\pm\infty$ en los límites de integración. Este tipo de integrales, conocidas como **impropias**, están definidas de modo que

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} f(x)dx. \tag{11}$$

¡OJO! El límite puede diverger (¿qué crees que significa esto?). Sabiendo esto, evalúa

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x} dx, \tag{12}$$

$$\int_{2}^{\infty} \frac{-1}{x^2} dx. \tag{13}$$

Solución. Evaluamos ambas integrales

$$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x| \Big|_{2}^{t},$$

esto claramente diverge, porque el logaritmo diverge. Diverge en este contexto quiere decir que el área bajo la curva no tiende a un número finito, la puedes hacer tan grande cómo quieras (cogiendo más función). Sin embargo, aunque el dominio de integración sea infinito, podemos tener un área finita, por ejemplo, la segunda integral

$$\int_2^\infty \frac{-1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{x}\Big|_2^t = \lim_{t\to\infty} \big(\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\big) = \frac{-1}{2}.$$

Ejercicio 4.

Si has estudiado algo de estadística o probabilidad, habrás visto Campanas de Gauss por todas partes. En este ejercicio vamos a calcular el área bajo esta maravillosa curva, y dar una justificación a la definición de media y varianza de una distribución normal. Durante esta pregunta, emplearemos el resultado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}. \tag{14}$$

1. Calcula la constante de normalización A tal que

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1. \tag{15}$$

2. La media de una variable aleatoria que tiene una función de distribución de probabilidad $f(x)$, se define como

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx. \tag{16}$$

   Halla $\bar{x}$ para el caso de una distribución normal.

3. * De forma similar, la varianza viene dada por

$$\Delta x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right)^2. \tag{17}$$

   Halla la varianza para el caso de una distribución normal.

Solución. Vayamos por partes.

1.

$$\begin{aligned} &A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = 1 \\ \iff &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{A}. \end{aligned}$$

Para evaluar la integral de la derecha, hacemos el cambio de variable $u = \frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$. Luego $du = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}dx \implies \sqrt{2\sigma^2}du = dx$, y la integral se convierte en

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\sigma^2}e^{-u^2}du = \sqrt{2\sigma^2} * \sqrt{\pi} = \frac{1}{A} \implies A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

2.

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \implies du\sqrt{2\sigma^2} = dx$, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\sigma^2}(u\sqrt{2\sigma^2} + \mu)e^{-u^2}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\sigma^2}ue^{-u^2}du + \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-u^2}du\Big), \end{aligned}$$

y dado que el primer integrando es una función impar, por el ejercicio anterior y usando el resultado de la pregunta, podemos concluir que

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-u^2}du = \mu.$$

3. Empleando el resultado de justo el apartado anterior, tenemos que

$$\Delta x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \right)^2 \Big) \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx\Big) - \mu^2. \tag{19}$$

Nos centraremos en la integral que queda por computar. Hacemos el cambio habitual de variable $u = \frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}} \implies du\sqrt{2\sigma^2} = dx$, y expandiendo el cuadrado que nos sale por x^2, tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (2u^2\sigma^2 + 2u\sqrt{2\sigma^2}\mu + \mu^2)e^{-u^2}du.$$

Utilizando las propiedades de las funciones impares, la integral resultante de multiplicar por el término con u se cancela, dando como resultado

$$= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^2e^{-u^2}du + \mu^2.$$

Y por último, la integral de la izquierda hay que integrarla por partes, derivando u e integrando ue^{-u^2}, lo cual da como resultado

$$= \frac{-ue^{-u^2}}{2}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{2} du = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Luego la integral que empezamos a evaluar nos da como resultado

$$\frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx\Big) = \sigma^2 + \mu^2,$$

y podemos concluir que, sustituyendo en (eq. 19):

$$\Delta x^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2.$$

Como nos llevan diciendo todos estos años, jeje.

Ejercicio 5.

** Aparte de para calcular áreas, las integrales son empleadas con muchísimos otros fines. Cuando evaluamos el producto escalar de dos vectores en n dimensiones de $\mathbb{R}$, tenemos que $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i * b_i$, donde a_i y b_i representan el i-ésimo componente de cada vector, respectivamente. Pero, ¿qué ocurre si empiezo a aumentar el número de dimensiones hasta que $n \to \infty$? ¿Qué es un vector de infinitas dimensiones? Pues... Tendría infinitamente muchas dimensiones. ¿Cómo escribe una persona eso? Tranquil@, ya lo has escrito. Miles de veces, incluso durante esta hoja de ejercicios. Se trata de una función, tu amiga $f(x)$ en $\mathbb{R}$, y x en este caso, es la "etiqueta"que nos permite acceder a cada entrada, pudiendo tomar infinitos valores en el dominio de f. Pero podemos ir un pasito más allá, y generalizar, multiplicando por una cantidad "ínfima"de x, la noción de producto escalar. Para ello, tomamos el límite de infinitas dimensiones, y escribimos

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i * b_i \xrightarrow[n\to\infty]{} < a, b >= \int_{-\infty}^{\infty} a(x)b(x)dx. \tag{20}$$

¿Mola eh? Pues agárrate que vienen curvas. Con esta noción de producto escalar para funciones, podemos decir que dos funciones $a(x)$ y $b(x)$ son **ortogonales** $\iff < a, b >= 0$. Y podemos proyectar unas funciones sobre otras. ¿Y esto para qué sirve? AYYYYY SI TÚ SUPIERAS. De momento, para $L \in \mathbb{R}$, calcula

$$\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \tag{21}$$

$$\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \tag{22}$$

$$\int_{-L}^{+L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{23}$$

En las tres integrales $m, n \in \mathbb{Z}$. Tienes que reescribir los productos de senos y cosenos como algo que puedas integrar. Las siguientes fórmulas son tus mejores aliadas:

$$\cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B) = \sin(A+B), \tag{24}$$
$$-\cos(A)\sin(B) + \sin(A)\cos(B) = \sin(A-B), \tag{25}$$
$$\cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B) = \cos(A-B), \tag{26}$$
$$\cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) = \cos(A+B). \tag{27}$$

Considera los casos $m \neq n$ y $m = n$ por separado. ¿Qué está pasando aquí?

Solución. La tercera integral no hace falta ni intentar evaluarla. Puesto que tenemos un producto de una función par y otra impar, lo cual da como resultado una función impar, y dado que el dominio de la integral es de $-L$ a L, por el ejercicio 2, la tercera integral es 0. En cuanto a la primera y la segunda, dan el mismo resultado y los procedimientos son iguales, así que evaluaré solo la primera. Sumando las ecuaciones (eq.26) y (eq.27), se tiene que

$$2\cos(A)\cos(B) = \cos(A-B) + \cos(A+B) \tag{28}$$
$$\iff \cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]. \tag{29}$$

Empleando esta propiedad para reescribir el producto de cosenos, tenemos

$$\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{+L}\left(\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi(n-m)x}{L}) + \cos(\frac{\pi(n+m)x}{L})]\right).$$

Consideramos los dos casos. Si $n = m$, el primer coseno se convierte en 1, y tenemos que

$$\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{+L}\left(\frac{1}{2}[1 + +\cos(\frac{2\pi n x}{L})]\right) = L + L\frac{\sin(\frac{2\pi n x}{L})}{2\pi n}\Big|_{-L}^{L} = L.$$

Porque el seno de $2\pi n$, para cualquier n, es siempre 0. En caso de que $n \neq m$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{+L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx &= \int_{-L}^{+L}\left(\frac{1}{2}[\cos(\frac{\pi(n-m)x}{L}) + \cos(\frac{\pi(n+m)x}{L})]\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(\frac{\pi(n+m)x}{L})}{2\pi(n+m)} + \frac{\sin(\frac{\pi(n-m)x}{L})}{2\pi(n-m)}\Big]\Big|_{-L}^{L} = 0.\end{aligned}$$

En conclusión, tenemos que

$$\int_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi x}{L})\cos(\frac{n\pi x}{L})dx = \begin{cases} L & \text{if } n = m \\ 0 & \text{if } n \neq m \end{cases}$$