Primera hoja de ejercicios

Javier Montoya y David Sola

Junio 2020

Buenos dias, los ejercicios que tenemos hoy se dividen de dos formas, los ejercicios sin marcas son ejercicios mas simples, bien que hemos comentado en las clases, o bien ejercicios tipicos del modelo de bachillerato.Los ejercicios marcados con una estrella *, implican un ejercicio mas complejo, en los que se requiere un uso de unas matemáticas mas formales. Los encontraremos de diferentes dificultades, pero los mas complejos tendran diferentes apartados que guiarán al estudiante hacia la respuesta:

Comentar también que durante los dias 20, 21 y 22 de julio de 2020 estaremos online ayudando con los problemas.

1. Límites

1. En este ejercicio resolveremos los límites de la siguiente manera: encontraremos que tipo de indeterminación es, moveremos las funciones hasta obtener una indeterminacion de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ y resolveremos:

   - $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{2x^2+1}$
   - $\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3+4}{\log(x)}$
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{4x+4}{\log(x)}$
   - $\lim_{x\to\infty} e^x - 7x$
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x^2}{x}$
   - $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-10x+2}$
   - $\lim_{x\to\infty} \frac{cos(x)}{e^x}$

2. En este ejercicio veremos un poco mas la idea de utilizar el metodo de logaritmos para resolver limites:

   - $\lim_{x\to -\infty} (1+e^x)^x$
   - $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{cos(x)})^x$
   - $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{sin(x)})^x$

- $\text{lím}_{x\to 0}(\frac{1}{x^2})^{logx}$
- $\text{lím}_{x\to 1}(\frac{x}{2x-1})^{\frac{1}{x-1}}$

3. * Hemos dicho que el numero e viene dado por la siguiente formula=

$$e = lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$$

Otra manera de definirlo (la cual prefiero si me preguntan es la siguiente)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{1} + \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{1\times 2} + \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{x^4}{1\times 2\times 3\times 4} + \dots$$

De tal manera que $e^1 = e$ es:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

En este ejercicio tenemos dos misiones:

- Entender el significado de esta formula $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Especialmente , que significa lo siguiente $\sum_{k=0}^{\infty}$ y $k!$
- Demostrar que efectivamente:

$$lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots$$

$Pista$: El simbolo $\sum$ se llama sumatorio, por otra parte $k!$ se lee como: k factorial.

4. * En este ejercicio nos adentramos un poco en un lenguaje matemático y en el mundo del análisis matematico; supon que tenemos un limite de la siguiente forma:

$$lim_{x\to c}f(x) = L$$

La definición matemática de límite dice lo siguiente :

$$lim_{x\to a}f(x) = L \iff \forall a > 0, \exists b > 0 : 0 < |x-c| < b \implies |f(x)-L| < a$$

Esto esta escrito en notacion matemática:

- $\exists$ se lee como “existe”
- $\forall$ se lee como “para todo”
- $\iff$ se lee como “si y solo si”
- $\implies$ se lee como implica
- $\in$ se lee como “en el conjunto”

- : se lee como “de manera que”
- $>, <$ se leen como “mayor que z “menor querespectivamente
- $|x|$ se lee como “el valor absoluto de x”

De esta manera la siguiente frase: Para todo ”x.$^{\text{en}}$ el conjunto de los reales, existe z.$^{\text{en}}$ el conjunto de los reales de manera que x al cuadrado es igual a y al cuadrado:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : x^2 = y^2$$

Este ejercicio se compone de tres partes:

a) Traduce las siguientes frases de la notacion matematica al espanol, y di si son verdad o mentira (si no sabes lo que significan algunos conjuntos, utiliza internet!)

- $0 \in \mathbf{R}$
- $\exists x \in \mathbf{R} : \forall y \in \mathbf{R}, x > y$
- $\forall y \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R} : x > y$
- $\forall z, w \in \mathbf{Q}, z > w \iff z^2 > w^2$
- $\forall z, w \in \mathbf{Q}, |z| > |w| \implies z^2 > w^2$
- $\exists x \in \mathbf{R} : x^2 \in \mathbf{N}$
- $\forall r \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R} : r \times y > 0 \iff r > 0, y > 0$

b) Escribe en español la definicion de limita expresada arriba en notacion matematica

c) Intenta pensar si esta definicion tiene sentido para ti, un dibujo puede ayudar!

2. Continuidad

Ejercicio 1.

Halla los valores de a y b que la función $f(x)$ sea continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \leq 2 \\ ax^2 + bx + 3 & 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & x \geq 3 \end{cases}$$

Teorema 1. ***Teorema del Valor Intermedio.*** *Considera una función f, continua en el intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. Para cada $u \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < u < f(b)$, existe al menos una $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = u$ [1].*

Vamos, que si me muevo desde el valor $f(a)$ al valor $f(b)$ por un paraje continuo, en algún momento tengo que pasar por todos los valores **intermedios**. Pero, ¿y esta obviedad para qué sirve?

Ejercicio 2.

Demuestra que el polinomio

$$x^5 - 200x^3 + 3x^2 + 5x + 1,$$

tiene al menos una raíz real. Fíjate en que, pese a no tener ni idea de la forma de la función, podemos saber que tiene una raíz, una solución.

Ejercicio 3.

Vamos a hacer un poquito de Física. La Ley de Gravitación Universal nos dice que la energía potencial gravitatoria que tiene un cuerpo de masa m por encontrarse a una distancia r de un cuerpo de masa M ($M >> m$), viene dada por la expresión

$$V_g(r) = \frac{-GMm}{r}.$$

En esta ecuación, G es la constante de Cavendish (un número muy chiquitito, en concreto $6{,}674 * 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$). ¿Qué ocurre con el potencial a medida que

1. $r \to 0$?
2. $r \to \infty$?

¿Para qué intervalo de r está definido este potencial? ¿Dónde situamos normalmente el origen y por qué?

Ejercicio 4.

¿Preparados para la fiesta? Normalmente, las últimas preguntas de cada ficha de ejercicios serán las más interesantes y complejas, así que no te desanimes si no te parece obvia la respuesta, hay que pensar un poco.

En esta pregunta vamos a estudiar la función

$$g(x) = x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right), \tag{1}$$

donde $x \in \mathbb{R}$. ¿Para qué valores de x es la función continua? Halla

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right). \tag{2}$$

Por último, ¿se podría redefinir la función de alguna forma para hacerla continua? (*Pista*: sí, ¿pero cómo? : P).

Referencias

[1] Stewart, James. Essential Calculus: *Early Transcendentals*. Second edition, Brooks/Cole Cengage Learning, 2013.