

Relazione di progetto didattico
Ricerca Operativa
A.A. 2018/2019

Enrico Cancelli 1143080

February 21, 2019

Contents

1	Abstract	3
2	Descrizione del problema	3
2.1	Altri Vincoli	3
2.2	Funzione Obiettivo	4
3	Modellazione del problema	4
3.1	Principali variabili e definizione generale della funzione obiettivo	4
3.2	Vincoli prodotto/materiale	5
3.3	Vincoli di approvvigionamento e produzione	5
3.4	Vincoli con variabili logiche	6
3.5	Modello generale conclusivo	8
3.5.1	Insiemi(o Set)	8
3.5.2	Costanti(o Parametri)	8
3.5.3	Variabili	8
3.5.4	Funzione Obiettivo e Vincoli	9
4	Note su AMPL	10
4.1	Soluzione ottima al problema	10
4.1.1	Valori delle variabili booleane	10
4.2	Considerazioni sulla soluzione ottima	10

1 Abstract

Lo scopo di questo progetto didattico è modellare un problema di programmazione lineare riguardante una linea di produzione di condensatori, tradurre tale modello in linguaggio *AMPL* e risolverlo. In seguito verrà fatta un'analisi sui dati ottenuti, discutendo di eventuali valori spuri ottenuti.

2 Descrizione del problema

Un'azienda produce condensatori di due tipologie, elettrolitici e ceramici, in 3 differenti formati (o gradi di capacità): $500\mu F$, $1000\mu F$, $1500\mu F$. Ciascun tipo di condensatore viene venduto ad un certo prezzo in euro (generalmente all'aumentare della capacità corrispondono guadagni maggiori) così come riportato nella seguente tabella:

Tipologia/Formato	$500\mu F$	$1000\mu F$	$1500\mu F$
Elettrolitico	30.0	50.0	70.0
Ceramico	20.0	40.0	60.0

Ciascun condensatore, a seconda della tipologia e formato, può essere prodotto utilizzando un certo numero di unità di uno o più materiali tra i seguenti:

- Alluminio(Al)
- Ceramica
- Rame(Cu)

Il numero di unità di materiale necessario alla produzione di una tipologia di condensatore è riportato nella seguente tabella:

Tipologia/Formato	$500\mu F$			$1000\mu F$			$1500\mu F$		
	Al	Cer.	Cu	Al	Cer.	Cu	Al	Cer.	Cu
Elettrolitico	5	0	5	7	0	7	10	0	10
Ceramico	2	2	2	4	4	4	5	5	5

2.1 Altri Vincoli

Il magazzino dell'azienda può contenere 2517 unità di Alluminio, 951 unità di Ceramica e 2439 unità di Rame utilizzabili. L'azienda si rifornisce di materiali tramite tre aziende fornitrici. Ciascuna azienda produce solo certi tipi di materiali e li vende ad un prezzo specifico (in euro). La seguente tabella riporta tali prezzi.

	Al	Cer.	Cu
Azienda 1	3.0	4.0	5.0
Azienda 2	2.0	5.0	3.0
Azienda 3	4.0	3.0	4.0

L'azienda 3 impone al cliente un contratto d'acquisto esclusivo per l'alluminio e in cambio offre un premio in denaro che ammonta a 5000 euro se la quantità di unità complessive supera 220 (Precisazione: questo premio è disponibile solo se si aderisce a tale contratto acquistando alluminio solo dall'azienda 3). L'azienda 1 invece è disposta a vendere soltanto partite in quantità superiori a 100.

In totale è necessario produrre almeno 50 unità di condensatori a $500\mu F$, 100 unità a $1000\mu F$ e 50 unità a $1500\mu F$. Inoltre esistono politiche aziendali che impongono che i condensatori elettrolitici costituiscano almeno il 30% delle unità prodotte e che venga venduta una sola tipologia di condensatori a $1000\mu F$.

2.2 Funzione Obiettivo

L'obiettivo dell'azienda produttrice di condensatori è massimizzare il guadagno (ovvero la differenza tra ricavo e costi).

3 Modellazione del problema

3.1 Principali variabili e definizione generale della funzione obiettivo

Inizialmente si stabiliscono le variabili che rappresentano il numero di condensatori prodotti per ogni coppia tipologia-classe :

$$C_{i,j} = \# \text{ condensatori del tipo } i \text{ e di categoria } j \text{ prodotti}$$

$$C_{i,j} \in \mathbb{Z}_+$$

Altre variabili utili a definire la funzione obiettivo sono quelle che rappresentano la quantità di materiali acquistati dai rispettivi produttori:

$$M_{m,a} = \# \text{ unità di materiale } m \text{ acquistato dall'azienda } a$$

$$M_{m,a} \in \mathbb{Z}_+$$

Inoltre definiamo delle costanti $V_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ che rappresentano il prezzo di vendita per unità di prodotto e $A_{m,a} \in \mathbb{R}_+$ che rappresentano il prezzo di acquisto per unità di materiale. La funzione obiettivo può quindi essere

definita così:

$$\max \underbrace{\sum_{i,j} V_{i,j} * C_{i,j}}_{\text{ricavo}} - \underbrace{\sum_{m,a} A_{m,a} * M_{m,a}}_{\text{costi}} \quad (1)$$

3.2 Vincoli prodotto/materiale

Si definisce l'insieme di costanti $E_{m,i,j} \in \mathbb{Z}_+$ che rappresentano il numero di unità di materiale m utilizzate durante la produzione di un condensatore di tipologia i e classe j . I seguenti vincoli legano la quantità di ciascun materiale acquistato al numero di condensatori prodotti:

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_{i,j} E_{m,i,j} * C_{i,j} \leq \sum_a M_{m,a} \\ & \forall m \end{aligned}$$

Nota: i vincoli non sono di uguaglianza. Pertanto è consentito all'azienda di effettuare un approvvigionamento superiore a quanto sia realmente necessario per la produzione (ciò potrebbe essere utile in caso di ottenimento di bonus o sconti sull'intera partita)

3.3 Vincoli di approvvigionamento e produzione

Innanzitutto stabiliamo i vincoli di capienza per i magazzini (le capienze massime fanno riferimento a quelle precedentemente enunciate nella descrizione del problema):

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & \sum_a M_{\text{"Alluminio"},a} \leq 2517 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_a M_{\text{"Ceramica"},a} \leq 951 \\ \text{s.t.} \quad & \sum_a M_{\text{"Rame"},a} \leq 2439 \end{aligned}$$

Stabiliamo inoltre la produzione minima per ogni classe di condensatore...

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \sum_i C_{i, "500\mu F"} &\geq 50 \\ \text{s.t. } \sum_i C_{i, "1000\mu F"} &\geq 100 \\ \text{s.t. } \sum_i C_{i, "1500\mu F"} &\geq 50 \end{aligned}$$

..., la quota di mercato per i condensatori elettrolitici...

$$\text{s.t. } \sum_j C_{ "Elettrolitico", j} \geq \frac{30}{100} * \sum_{i,j} C_{i,j} \quad (2)$$

... e la dimensione della partita minima per l'azienda 1

$$\text{s.t. } \sum_m M_{m, "Azienda1"} \geq 100 \quad (3)$$

3.4 Vincoli con variabili logiche

Può essere prodotta una sola tipologia di condensatori a $1000\mu F$. Definiamo quindi una variabile booleana per ogni tipologia di condensatore:

$$T_i = \begin{cases} 0 & C_{i, "1000\mu F"} = 0 \\ 1 & C_{i, "1000\mu F"} > 0 \end{cases}$$

$$T_i \in \{0, 1\}$$

Attiviamo tali variabili (Big è una costante molto grande):

$$\text{s.t. } C_{i, "1000\mu F"} \leq \text{Big} * T_i$$

$$\forall i$$

Ora possiamo mettere in relazione tra loro le variabili:

$$\text{s.t. } \sum_i T_i = 1 \quad (4)$$

Infine per modellare il contratto di esclusività imposto dall'azienda 3, è necessario introdurre nuove variabili decisionali:

$$U_a = \begin{cases} 0 & M_{ "Alluminio", a} = 0 \\ 1 & M_{ "Alluminio", a} > 0 \end{cases}$$

$$U_a \in \{0, 1\}$$

Attiviamo queste variabili:

$$\begin{aligned} \text{s.t. } M_{\text{"Alluminio"},a} &\leq Big * U_a \\ &\forall a \end{aligned}$$

Dal punto di vista logico imporre l'esclusività per un'azienda equivale a soddisfare la seguente espressione logica:

$$\underbrace{(U_0 \vee \dots U_{\text{"Azienda3"}-1})}_{U_{ex}} \oplus U_{\text{"Azienda3"}} \quad (5)$$

Esprimiamo U_{ex} tramite un vincolo:

$$\text{s.t. } \sum_{a \in \{\text{"Azienda3"}\}} U_a \leq \underbrace{\text{card}(a - \{\text{"Azienda3"}\})}_{\text{oppure } \#a - 1} * U_{ex} \quad (6)$$

Ora che abbiamo attivato U_{ex} , esprimiamo il vincolo di esclusività con $U_{\text{"Azienda3"}}:$

$$U_{ex} + U_{\text{"Azienda3"}} = 1 \quad (7)$$

Ora che abbiamo modellato la condizione di esclusività, è necessario modellare la condizione di superamento della soglia minima per la ricezione del premio in denaro. Chiamiamo P una variabile booleana così definita:

$$P = \begin{cases} 0 & \sum_m M_{m,\text{"Azienda3"}} < 220 \\ 1 & \sum_m M_{m,\text{"Azienda3"}} \geq 220 \end{cases} \\ P \in \{0, 1\}$$

Attiviamo P :

$$\sum_m M_{m,\text{"Azienda3"}} - 220 \leq Big * P \quad (8)$$

Creiamo un'ultima variabile decisionale $S = U_{\text{"Azienda3"}} \wedge P$:

$$U_{\text{"Azienda3"}} + P \geq 2 * S \quad (9)$$

Nota: in caso $U_{\text{"Azienda3"}}$ e P siano entrambi uguali a 1, S può assumere il valore spurio 0. Tuttavia siccome se $S = 1$ viene garantito uno sconto sull'acquisto delle merci da Azienda 3, il valore spurio non verrà mai considerato perchè condurrà ad una soluzione sub-ottima.

Essendo S la variabile decisionale che stabilisce se il premio sia applicabile o meno, modifichiamo la funzione obiettivo in questo modo:

$$\max \underbrace{\sum_{i,j} V_{i,j} * C_{i,j}}_{\text{ricavo}} - \underbrace{\sum_{m,a} A_{m,a} * M_{m,a}}_{\text{costi}} + \underbrace{Bonus * S}_{\text{premio}} \quad (10)$$

3.5 Modello generale conclusivo

In conclusione il modello, generalizzando opportunamente alcune costanti, si presenta così:

3.5.1 Insiemi(o Set)

$I = \{"Elettrolitico", "Ceramico"\}$: insieme di tipologie di condensatore

$J = \{"500\mu F", "1000\mu F", "1500\mu F"\}$: insieme di classi di capacità

$M = \{"Alluminio", "Ceramica", "Rame"\}$: insieme dei tipi di materiali

$A = \{"Azienda1", "Azienda2", "Azienda3"\}$: insieme di aziende fornitrici

3.5.2 Costanti(o Parametri)

$V_{i,j} : i \in I, j \in J =$ prezzo per unità di prodotto di tipo i e classe j

$(V_{i,j} \in \mathbb{R}_+)$

$A_{m,a} : m \in M, a \in A =$ prezzo per unità di materiale m presso l'azienda a

$(A_{m,a} \in \mathbb{R}_+)$

$E_{m,i,j} : m \in M, i \in I, j \in J =$ numero di unità di m utilizzate per la produzione di un condensatore di tipo i e classe j

$(E_{m,i,j} \in \mathbb{Z}_+)$

$X_m : m \in M =$ capienza massima del magazzino per il materiale m

$(X_m \in \mathbb{Z}_+)$

$M_j : j \in J =$ produzione minima per condensatori di classe j

$(M_j \in \mathbb{Z}_+)$

$Per =$ quota di mercato minima per i condensatori elettrolitici (in percentuale)

$(Per \in \{0, 100\})$

$K =$ partita minima acquistabile da Azienda 1

$(K \in \mathbb{Z}_+)$

$L =$ grandezza minima per la partita da Azienda 3 per ottenere il premio

$(L \in \mathbb{Z}_+)$

$Bonus =$ valore del bonus

$(Bonus \in \mathbb{R}_+)$

$Big =$ valore molto grande

$(Big \in \mathbb{R}_+)$

3.5.3 Variabili

$C_{i,j} : i \in I, j \in J = \#$ condensatori del tipo i e di categoria j prodotti

$(C_{i,j} \in \mathbb{Z}_+)$

$M_{m,a} : m \in M, a \in A = \#$ unità di materiale m acquistato dall'azienda a

$(M_{m,a} \in \mathbb{Z}_+)$

$T_i =$ vera se vengono prodotti condensatori a $1000\mu F$ di tipo i

$$(T_i \in \{0, 1\})$$

$U_a : a \in A =$ vera se vengono acquistato dell'alluminio dall'azienda a

$$(U_a \in \{0, 1\})$$

U_{ex} = vera se viene acquistato alluminio da almeno un azienda diversa da Azienda 3

$$(U_{ex} \in \{0, 1\})$$

P = vera se il numero di unità di materiale acquistato da Azienda 3 è maggiore o uguale a L

$$(P \in \{0, 1\})$$

$S = U_{\text{"Azienda3"}} \wedge P$, vera se è possibile ottenere il premio di Azienda 3

$$(S \in \{0, 1\})$$

3.5.4 Funzione Obiettivo e Vincoli

$$\begin{aligned}
& \max \underbrace{\sum_{i \in I, j \in J} V_{i,j} * C_{i,j}}_{\text{ricavo}} - \underbrace{\sum_{m \in M, a \in A} A_{m,a} * M_{m,a}}_{\text{costi}} + \underbrace{Bonus * S}_{\text{premio}} \\
& \text{s.t.} \quad \sum_{i \in I, j \in J} E_{m,i,j} * C_{i,j} \leq \sum_{a \in A} M_{m,a} : \forall m \in M \\
& \quad \sum_{a \in A} M_{m,a} \leq X_m : \forall m \in M \\
& \quad \sum_{i \in I} C_{i,j} \geq M_j : \forall j \in J \\
& \quad \sum_{j \in J} C_{\text{"Elettrolitico"},j} \geq \frac{Per}{100} * \sum_{i \in I, j \in J} C_{i,j} \\
& \quad \sum_{m \in M} M_{m,\text{"Azienda1"}} \geq K \\
& \quad C_{i,\text{"1000}\mu F"} \leq Big * T_i : \forall i \in I \\
& \quad \sum_{i \in I} T_i = 1 \\
& \quad M_{\text{"Alluminio"},a} \leq Big * U_a : \forall a \in A \\
& \quad \sum_{a \in A - \{\text{"Azienda3"}\}} U_a \leq \text{card}(A - \{\text{"Azienda3"}\}) * U_{ex} \\
& \quad U_{ex} + U_{\text{"Azienda3"}} = 1 \\
& \quad \sum_{m \in M} M_{m,\text{"Azienda3"}} - L \leq Big * P \\
& \quad U_{\text{"Azienda3"}} + P \geq 2 * S
\end{aligned}$$

4 Note su AMPL

Per il calcolo della soluzione ottima è stato utilizzato il solver cplex.

Elenco dei File:

- File del Modello: CondensSrl.mod
- File dei Dati: CondensSrl.dat
- File dei Comandi: CondensSrl.run

I nomi delle variabili e dei parametri differiscono da quelli presenti in questa relazione per esigenze di spazio. Tuttavia essendo sia il file del modello che quello dei dati adeguatamente commentati, il codice AMPL risulta sufficientemente espressivo.

4.1 Soluzione ottima al problema

Valore ottimo della funzione obiettivo o guadagno massimo: 6812

Valori ottimi di $C_{i,j}$ o numero di condensatori venduti:

	Elettrolitico	Ceramico
$500\mu F$	0	50
$1000\mu F$	212	0
$1500\mu F$	0	170

Valori ottimi di $M_{m,a}$ o numero di materiali acquistati:

	Alluminio	Ceramica	Rame
Azienda1	0	100	0
Azienda2	0	0	2434
Azienda3	2434	850	0

4.1.1 Valori delle variabili booleane

- $T_{\text{Elettrolitico}} = 1, T_{\text{Ceramico}} = 0$
- $U_{\text{Azienda1}} = 0, U_{\text{Azienda2}} = 0, U_{\text{Azienda3}} = 1, U_{ex} = 0$
- $P = 1, S = 1$

4.2 Considerazioni sulla soluzione ottima

Come previsto nessuna variabile booleana ha assunto valori spuri in quanto condurrebbero a soluzioni ammissibili ma non ottime.

Nonostante Azienda 3 venda alluminio ad un prezzo superiore rispetto alla concorrenza, il contratto di esclusività risulta vantaggioso e quindi, pur di ottenere il premio, si è disposti ad avere dei costi maggiori.