Instituto Tecnológico Superior del Oriente del Estado De Hidalgo

“ITESA”

Programa Educativo:

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Asignatura y Tema:

Métodos Numéricos, Tema 2

Nombre del Docente:

M.T.I Efrén Rolando Romero León

Nombre y Matricula del Alumno:

Velazquez Solis Mario David

16 de Febrero 2025

Búsqueda de una raíz

Cuarto Semestre 4F21 Grupo I Enero – Junio 2025

Método de Bisección

Definición

El método de bisección es un método numérico que se utiliza para encontrar la raíz de una función continua en un intervalo [a,b] donde se cumple que $f(a)\cdot f(b)<0$. Se basa en el teorema del valor intermedio, que garantiza que si una función cambia de signo en un intervalo, existe al menos una raíz en dicho intervalo.

Características

- Es un método de búsqueda de raíces basado en el corte repetido del intervalo a la mitad.
- Se requiere que la función sea continua en el intervalo dado.
- Siempre converge a una raíz, aunque de forma lenta.
- No requiere derivadas ni cálculos complejos.

Fórmula

El método se basa en la siguiente relación para encontrar el punto medio del intervalo:

$$x_m = \frac{a+b}{2}$$

Pasos del método:

1. Se elige un intervalo inicial [a,b] donde $f(a)\cdot f(b)<0$.
2. Se calcula el punto medio x_m.
3. Se evalúa $f(x_m)$.
    - Si $f(x_m)=0$, se ha encontrado la raíz exacta.
    - Si $f(a)\cdot f(x_m)<0$, la raíz está en el intervalo $[a,x_m]$ por lo que se actualiza $b=x_m$.
    - Si $f(x_m)\cdot f(b)<0$, la raíz está en el intervalo $[x_m,b]$, por lo que se actualiza $a= x_m$.
4. Se repite el proceso hasta que el error sea menor a la tolerancia deseada.

Ventajas

1. Convergencia garantizada si se cumplen las condiciones iniciales.
2. Sencillez en su implementación.
3. No requiere el cálculo de derivadas.
4. Es especialmente útil cuando la función presenta discontinuidades en algunos puntos fuera del intervalo.

Desventajas

- **Convergencia lenta**, especialmente en funciones que se acercan a cero de forma suave.
- Solo encuentra **una raíz** por intervalo, incluso si hay más de una.
- Requiere conocer un intervalo donde la función cambie de signo.

Aplicaciones

1. Cálculo de raíces de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
2. Determinación de puntos de equilibrio en sistemas físicos.
3. Resolución de problemas eléctricos, mecánicos y térmicos.
4. Cálculo de tiempos en circuitos RLC y fenómenos oscilatorios.

Frase para recordar el método

"La bisección divide y vencerá, siempre que el signo sepa cambiar."

Ejemplo:

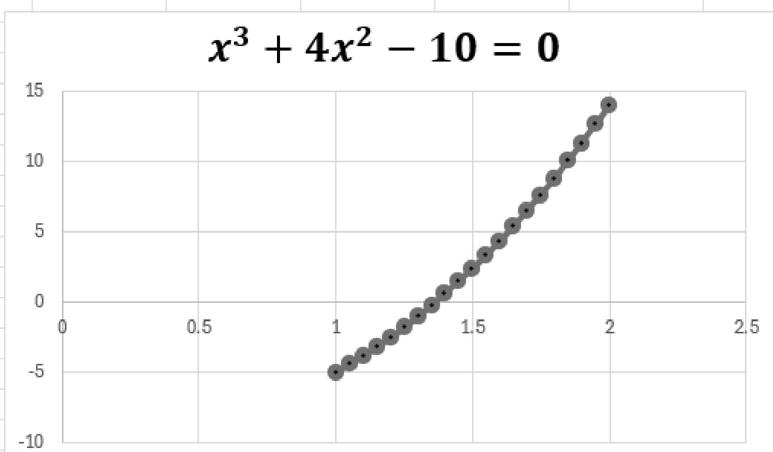
Metodo de Biseccion

Problema 2:

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	f(a)*f(c)	ER	EA
0	2	1	-10	14	-5	50		
1	2	1.5	-5	14	2.375	-11.875	0.33333333	0.5
1	1.5	1.25	-5	2.375	-1.796875	8.984375	-0.2	-0.25
1.25	1.5	1.375	-1.796875	2.375	0.16210938	-0.2912903	0.09090909	0.125
1.25	1.375	1.3125	-1.796875	0.16210938	-0.8483887	1.52444839	-0.047619	-0.0625
1.3125	1.375	1.34375	-0.8483887	0.16210938	-0.3509827	0.29776972	0.02325581	0.03125
1.34375	1.375	1.359375	-0.3509827	0.16210938	-0.0964088	0.03383783	0.01149425	0.015625
1.359375	1.375	1.3671875	-0.0964088	0.16210938	0.03235579	-0.0031194	0.00571429	0.0078125
1.359375	1.3671875	1.36328125	-0.0964088	0.03235579	-0.03215	0.00309954	-0.0028653	-0.0039063
1.36328125	1.3671875	1.36523438	-0.03215	0.03235579	7.2025E-05	-2.316E-06	0.00143062	0.00195313
1.36328125	1.36523438	1.36425781	-0.03215	7.2025E-05	-0.0160467	0.0005159	-0.0007158	-0.0009766
1.36425781	1.36523438	1.36474609	-0.0160467	7.2025E-05	-0.0079893	0.0001282	0.00035778	0.00048828
1.36474609	1.36523438	1.36499023	-0.0079893	7.2025E-05	-0.0039591	3.163E-05	0.00017886	0.00024414
1.36499023	1.36523438	1.3651123	-0.0039591	7.2025E-05	-0.0019437	7.6951E-06	8.9421E-05	0.00012207
1.3651123	1.36523438	1.36517334	-0.0019437	7.2025E-05	-0.0009358	1.819E-06	4.4709E-05	6.1035E-05
1.36517334	1.36523438	1.36520386	-0.0009358	7.2025E-05	-0.0004319	4.0421E-07	2.2354E-05	3.0518E-05
1.36520386	1.36523438	1.36521912	-0.0004319	7.2025E-05	-0.0001799	7.7723E-08	1.1177E-05	1.5259E-05
1.36521912	1.36523438	1.36522675	-0.0001799	7.2025E-05	-5.396E-05	9.7105E-09	5.5884E-06	7.6294E-06

X	Y
1	-5
1.05	-4.432375
1.1	-3.829
1.15	-3.189125
1.2	-2.512
1.25	-1.796875
1.3	-1.043
1.35	-0.249625
1.4	0.584
1.45	1.458625
1.5	2.375
1.55	3.333875
1.6	4.336
1.65	5.382125
1.7	6.473
1.75	7.609375
1.8	8.792
1.85	10.021625
1.9	11.299
1.95	12.624875
2	14



Método de la Regla Falsa

Definición

El método de la Regla Falsa es un método numérico para encontrar una raíz de una función continua en un intervalo [a,b] donde la función cambia de signo. A diferencia del método de bisección, este método utiliza una recta secante para estimar la raíz.

Características

- Se basa en el cálculo del punto de intersección de la secante con el eje xxx.
- Es un método rápido y eficiente en funciones casi lineales.
- Como el método de bisección, requiere que la función cambie de signo en el intervalo dado.
- Puede ser más rápido que la bisección si la función es suave y cercana a una recta.

Fórmula del Método de la Regla Falsa

1. **Intervalo inicial:** [a,b]
2. **Punto de intersección de la secante (aproximación de la raíz):**

$$x_r = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

3. Evaluar $f(x_r)$:
   - Si $f(x_r)=0$, se ha encontrado la raíz exacta.
   - Si $f(a)\cdot f(x_r)<0$, la raíz está en el intervalo $[a, x_r]$.
   - Si $f(b)\cdot f(x_r)<0$, la raíz está en el intervalo $[x_r,b]$.
4. Repetir el proceso hasta cumplir con la tolerancia deseada.

Criterios de Paro

El proceso se detiene cuando:

- $|f(x_r)| < \epsilon$ (la función evaluada en el punto es suficientemente cercana a cero).
- $| x_r - x_r - 1| < \delta$ (la diferencia entre iteraciones es pequeña).
- Se alcanza el número máximo de iteraciones.

Ventajas

- Es más rápido que la bisección en muchas funciones.
- Converge rápido si la función es cercana a una recta.
- No requiere derivadas ni cálculos complejos.

Desventajas

- Puede ser lento si la función es muy curva.
- No siempre garantiza la convergencia si hay raíces múltiples.
- En algunos casos, se queda "atorado" en un extremo del intervalo.

Aplicaciones

- Cálculo de valores críticos en ingeniería.
- Determinación de soluciones en circuitos eléctricos.
- Cálculo de tasas de crecimiento en biología y economía.
- Resolución de ecuaciones químicas en equilibrio.

Frases para recordar

“La recta secante lleva la delantera”.
“Encuentra la raíz donde la línea cruza el eje”.
“Rápido, pero a veces se estanca”.

Ejemplo:

Metodo de Regla Falsa

Problema 2:

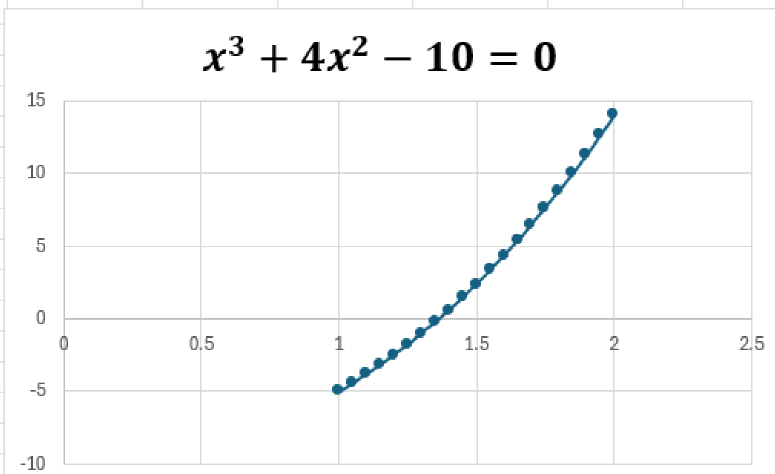
$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Formula:

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

Iteracion	xl	xu	f(xl)	f(xu)	xr	f(xr)	f(xl)*f(xr)	Error
1	0	2	-10	14	0.83333333	-6.6435185	66.4351852	
2	0.83333333	2	-6.6435185	14	1.20879121	-2.3890383	15.8716204	0.31060606
3	1.20879121	2	-2.3890383	14	1.32412611	-0.6651567	1.5890848	0.08710266
4	1.32412611	2	-0.6651567	14	1.35478122	-0.1716623	0.11418234	0.02262735
5	1.35478122	2	-0.1716623	14	1.3625968	-0.0434271	0.0074548	0.0057358
6	1.3625968	2	-0.0434271	14	1.36456787	-0.0109306	0.00047469	0.00144447
7	1.36456787	2	-0.0109306	14	1.36506361	-0.0027477	3.0034E-05	0.00036316
8	1.36506361	2	-0.0027477	14	1.3651882	-0.0006905	1.8973E-06	9.1264E-05
9	1.3651882	2	-0.0006905	14	1.36521951	-0.0001735	1.1981E-07	2.2933E-05
10	1.36521951	2	-0.0001735	14	1.36522737	-4.36E-05	7.5644E-09	5.7624E-06

X	Y
1	-5
1.05	-4.432375
1.1	-3.829
1.15	-3.189125
1.2	-2.512
1.25	-1.796875
1.3	-1.043
1.35	-0.249625
1.4	0.584
1.45	1.458625
1.5	2.375
1.55	3.333875
1.6	4.336
1.65	5.382125
1.7	6.473
1.75	7.609375
1.8	8.792
1.85	10.021625
1.9	11.299
1.95	12.624875
2	14



Método de Punto Fijo

Definición

El método de punto fijo es un método numérico que encuentra una raíz de una ecuación f(x)=0 transformándola en una forma equivalente x=g(x). Se basa en encontrar un valor que al evaluarse en g(x) dé el mismo resultado:

$$x=g(x)$$

Características

- Se necesita que la función esté en forma x=g(x)
- Converge solo si $|g'(x)|<1$ en el intervalo de análisis.
- Es un método que **no siempre converge**, pero cuando lo hace, suele ser rápido.
- La elección de la función x=g(x) es clave para el éxito del método.

Fórmula del Método de Punto Fijo

1. Transformar la ecuación f(x)=0 en x=g(x).
2. Elegir un valor inicial x_0.
3. Iterar utilizando la fórmula:

$$|x_{n+1}-x_n|<\epsilon$$

Criterios de Paro

El proceso se detiene cuando:

- $|x_{n+1}-x_n|<\epsilon$ (la diferencia entre iteraciones es menor a la tolerancia).
- El número máximo de iteraciones se ha alcanzado.

Ventajas

- Sencillo de implementar.
- Puede ser rápido si se elige bien la función g(x).
- Útil en problemas donde derivadas o integrales no son fáciles de calcular.

Desventajas

- Requiere que $|g'(x)|<1$ para garantizar convergencia.
- Si g(x) no es bien elegida, el método puede divergir.
- En algunos casos, encontrar una función g(x) adecuada es complicado.

Aplicaciones

- Resolución de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
- Cálculo de flujos eléctricos y mecánicos.
- Estimaciones en modelos económicos y poblacionales.
- Aproximación de soluciones en ecuaciones diferenciales.

Frase para recordar

"El punto fijo solo se queda si su pendiente no se va."

Ejemplo:

Metodo de Punto Fijo

Problema 1:

$$f(x) = 3x - e^{-2x} = 0 \qquad x = \frac{e^{-2x}}{3}$$

iteracion	x	f(x)	ER	EA
0	0	0.33333333		
1	0.33333333	0.17113904	1	0.33333333
2	0.17113904	0.2367169	-0.94773404	-0.16219429
3	0.2367169	0.20761994	0.27703075	0.06557786
4	0.20761994	0.22006063	-0.14014531	-0.02909696
5	0.22006063	0.21465278	0.05653303	0.01244069
6	0.21465278	0.216987	-0.02519351	-0.00540786
7	0.216987	0.21597637	0.01075744	0.00233422
8	0.21597637	0.21641335	-0.00467936	-0.00101063
9	0.21641335	0.2162243	0.00201922	0.00043699
10	0.2162243	0.21630607	-0.00087436	-0.00018906
11	0.21630607	0.2162707	0.00037804	8.1773E-05
12	0.2162707	0.216286	-0.00016356	-3.5373E-05
13	0.216286	0.21627938	7.0744E-05	1.5301E-05
14	0.21627938	0.21628224	-3.0602E-05	-6.6186E-06
15	0.21628224	0.216281	1.3237E-05	2.863E-06
16	0.216281	0.21628154	-5.7259E-06	-1.2384E-06
17	0.21628154	0.21628131	2.4768E-06	5.3569E-07
18	0.21628131	0.21628141	-1.0714E-06	-2.3172E-07
19	0.21628141	0.21628136	4.6344E-07	1.0023E-07
20	0.21628136	0.21628138	-2.0047E-07	-4.3357E-08

Método de Newton-Raphson

Definición

El método de Newton-Raphson es un método numérico iterativo utilizado para encontrar aproximaciones de las raíces de una función real f(x). Se basa en la idea de aproximar la función por su tangente en un punto cercano a la raíz.

Características

- Utiliza la derivada de la función para mejorar la aproximación.
- Es un método **rápido** cuando se encuentra cerca de la raíz.
- Puede **divergir** si se elige un valor inicial inadecuado o si la función presenta puntos críticos.
- Requiere que la función sea **diferenciable** en el intervalo de análisis.

Fórmula del Método de Newton-Raphson

Partiendo de un valor inicial x_0, la fórmula iterativa es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde:

- x_n = Aproximación actual.
- f(x) = Función a analizar.
- f ´(x) = Derivada de la función.

Pasos del Método

1. Elegir un valor inicial x_0.
2. Evaluar $f(x_0)$ y $f'(x_0)$.

3. Calcular la siguiente aproximación usando la fórmula.
4. Repetir el proceso hasta que el error sea menor a la tolerancia deseada:

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

Criterios de Paro

El proceso se detiene cuando:

- $|f(x_{n)}| < \epsilon$ (la función evaluada es suficientemente cercana a cero).
- $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ (las iteraciones se estabilizan).
- Se alcanza el número máximo de iteraciones.

Ventajas

- Rápido en la mayoría de los casos.
- Requiere pocas iteraciones para alcanzar resultados precisos.
- Es ideal para funciones suaves y derivables.

Desventajas

- Puede divergir si se elige mal el valor inicial.
- No funciona si f'(x)=0 en algún punto cercano.
- No es recomendable para funciones no derivables o con raíces múltiples muy cercanas.

Aplicaciones

- Resolución de ecuaciones algebraicas y trascendentes.
- Determinación de puntos críticos en física y mecánica.
- Cálculo de parámetros en modelos económicos y financieros.
- Optimización de funciones en problemas de ingeniería.

Frase para recordar

"Con tangentes se avanza veloz, pero ojo si la pendiente es feroz."

Ejemplo:

Metodo de Newton Raphson

Problema 1:

$$f(x) = 3x - e^{-2x}$$

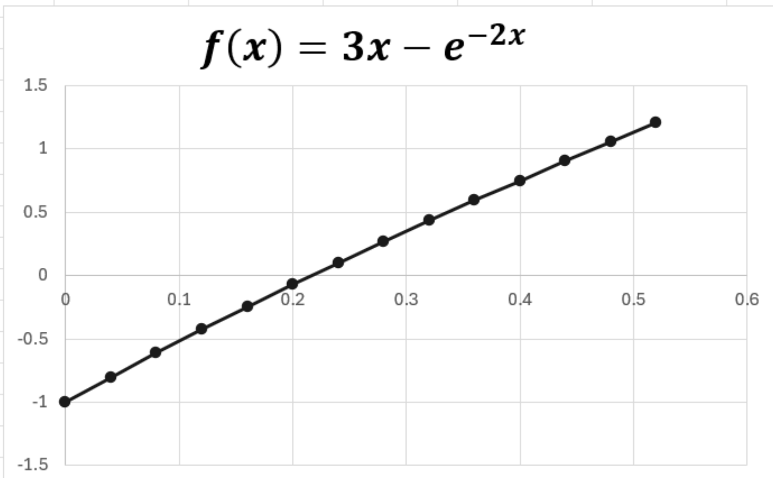
$$f'(x) = 3 + 2e^{-2x}$$

Formula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

xi	f(x)	f´(x)	xn	ER	EA
1	2.86466472	3.27067057	0.12413535		
0.12413535	-0.4077427	4.56029744	0.21354677	0.41869712	0.08941142
0.21354677	-0.0117622	4.30480504	0.21627912	0.01263341	0.00273234
0.21627912	-9.724E-06	4.29769414	0.21628138	1.0461E-05	2.2625E-06
0.21628138	-6.643E-12	4.29768827	0.21628138	7.1465E-12	1.5457E-12
0.21628138	0	4.29768827	0.21628138	0	0

X	Y
0	-1
0.04	-0.8031163
0.08	-0.6121438
0.12	-0.4266279
0.16	-0.246149
0.2	-0.07032
0.24	0.10121661
0.28	0.26879094
0.32	0.43270758
0.36	0.59324774
0.4	0.75067104
0.44	0.90521709
0.48	1.05710711
0.52	1.20654532



Método de la Secante

Definición

El método de la secante es un método numérico iterativo utilizado para encontrar la raíz de una función f(x)=0. Se asemeja al método de Newton-Raphson, pero en lugar de usar la derivada, utiliza una recta secante que pasa por dos puntos cercanos en la función.

Características

- No requiere calcular la derivada, lo que lo hace ideal para funciones complejas.
- Utiliza dos aproximaciones iniciales distintas para comenzar el proceso.
- Puede converger más rápido que la bisección, pero no siempre garantiza estabilidad.

Fórmula del Método de la Secante

Partiendo de dos valores iniciales x_0 y x_1, la fórmula iterativa es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Donde:

x_n = Aproximación actual.

x_{n-1} = Aproximación anterior.

f(x) = Función a analizar.

Pasos del Método

1. Elegir dos valores iniciales x_0 y x_1.

2. Evaluar $f(x_0)$ y $f(x_1)$.
3. Calcular la siguiente aproximación usando la fórmula.
4. Repetir el proceso hasta que se cumpla la condición de convergencia:

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$$

Criterios de Paro

El proceso se detiene cuando:

- $|f(x_n)| < \epsilon$ (la función evaluada es suficientemente cercana a cero).
- $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ (las iteraciones se estabilizan).
- Se alcanza el número máximo de iteraciones.

Ventajas

- No requiere derivadas, ideal para funciones difíciles de derivar.
- Puede ser más rápido que Newton-Raphson en ciertos casos.
- Es eficiente en funciones con formas irregulares.

Desventajas

- Puede divergir si los puntos iniciales no son adecuados.
- Es menos estable que la bisección.
- No garantiza convergencia en todos los casos.

Aplicaciones

- Resolución de ecuaciones en ingeniería eléctrica y mecánica.
- Cálculo de tasas de interés o flujo de efectivo en finanzas.
- Optimización de funciones en sistemas complejos.
- Estimación de parámetros en modelos físicos y químicos.

Frase para recordar

"Dos puntos y una recta guían el camino a la meta."

Ejemplo:

Metodo de Secante

Problema 1:

$$f(x) = e^{-x} - x$$

Formula:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_l - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Criterio de Paro:

$$|x_{i+1} - x_i| < E$$

$$x_{i-1} = 0 \quad x_i = 1 \quad i = 1 \quad E = 0.0001$$

Iteracion	xi	f(xi)	f(xi-1)	(xi-xi-1)	|xi+1-xi|	Observacion
0	0					
1	1	-0.63212056	1	1		
2	0.61269984	-0.07081395	-0.63212056	-0.38730016	0.38730016	Continuar
3	0.56383839	0.00518235	-0.07081395	-0.04886145	0.04886145	Continuar
4	0.56717036	-4.2419E-05	0.00518235	0.00333197	0.00333197	Continuar
5	0.56714331	-2.538E-08	-4.2419E-05	-2.7052E-05	2.7052E-05	Continuar
6	0.56714329	1.2423E-13	-2.538E-08	-1.6195E-08	1.6195E-08	Continuar
7	0.56714329	0	1.2423E-13	7.927E-14	7.927E-14	Fin

X	Y
0	1
0.05	0.90122942
0.1	0.80483742
0.15	0.71070798
0.2	0.61873075
0.25	0.52880078
0.3	0.44081822
0.35	0.35468809
0.4	0.27032005
0.45	0.18762815
0.5	0.10653066
0.55	0.02694981
0.6	-0.05118836
0.65	-0.12795422
0.7	-0.2034147
0.75	-0.27763345
0.8	-0.35067104
0.85	-0.42258507