Instituto Tecnológico Superior del Oriente del Estado De Hidalgo

“ITESA”

Programa Educativo:

Ingeniería en Sistemas Computacionales

Asignatura y Tema:

Métodos Numéricos, Tema 1

Nombre del Docente:

M. T. I. Efrén Rolando Romero León

Nombre y Matricula del Alumno:

Velazquez Solis Mario David – 23030006

3 de febrero de 2025

Tipos de Errores

Cuarto Semestre 4F21 Grupo I Enero - Junio 2025

Error absoluto

El error absoluto es la diferencia entre el valor real o exacto (xr) y el valor aproximado (xa) obtenido mediante un método numérico. Representa la magnitud del error sin considerar su dirección (si el valor aproximado es mayor o menor que el real).

Este error es clave en el análisis de precisión de los métodos numéricos, ya que nos indica cuánto se aleja un resultado obtenido del valor verdadero.

Características:

- Siempre positivo o cero: Como se usa el valor absoluto, nunca es negativo.
- Expresado en las mismas unidades que la cantidad que se está midiendo o calculando.
- No tiene en cuenta la escala del número: Un mismo error absoluto puede ser despreciable en valores grandes, pero significativo en valores pequeños.
- Afecta la precisión del método numérico: Cuanto menor sea el error absoluto, mayor será la precisión del método utilizado.

Fórmula:

$$Ea = |xr - xa|$$

donde:

- Ea: es el error absoluto.
- xr: es el valor real o exacto.
- xa: es el valor aproximado.

Aplicaciones e importancia:

- Medición de la precisión: Se usa en cualquier disciplina que requiera mediciones precisas, como física, química, ingeniería y economía.
- Evaluación de métodos numéricos: Ayuda a determinar la calidad de un método de aproximación.
- Errores en datos experimentales: Se utiliza en el análisis de errores en experimentos científicos.
- Optimización de algoritmos: Permite mejorar la precisión de algoritmos en computación numérica.

Error relativo

Definición:

El error relativo mide el error absoluto en proporción al valor real. Es útil porque permite comparar errores en distintas escalas, ya que expresa el error en términos relativos a la magnitud del número medido.

$$E_r = \frac{|x_r - x_a|}{|x_r|}$$

Si se expresa en porcentaje, se multiplica por 100:

$$E_r(\%) = \left(\frac{|x_r - x_a|}{|x_r|}\right) \times 100$$

Características:

- Adimensional: No depende de unidades, ya que es un cociente de dos valores con la misma unidad.
- Permite comparar errores en datos con diferentes magnitudes.
- Más representativo que el error absoluto cuando se trabaja con números muy grandes o muy pequeños.
- Se usa para evaluar precisión relativa en cálculos científicos e ingeniería.

Fórmula:

$$E_r = \frac{|x_r - x_a|}{|x_r|}$$

Aplicaciones e importancia:

- Comparación de precisión en distintas magnitudes: En ingeniería y física, permite evaluar la precisión en datos de distinta escala.
- Validación de modelos numéricos: Se usa en simulaciones computacionales para verificar la exactitud de los modelos.
- Control de calidad en mediciones: Es clave en calibración de instrumentos científicos.
- Evaluación de algoritmos: En análisis numérico, se usa para medir la estabilidad de métodos computacionales.

Error de truncamiento

Definición:

El error de truncamiento surge cuando una expresión matemática exacta se aproxima mediante un número finito de términos, omitiendo los términos restantes. Es común en métodos numéricos donde se requiere una aproximación finita para resolver ecuaciones o integrales.

Por ejemplo, en la serie de Taylor para ex:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Si se detiene en el tercer término, se introduce un error de truncamiento al omitir los términos superiores.

Características:

- Depende del número de términos usados: Más términos significan menor error.
- Se reduce aumentando la precisión de la aproximación.
- Presente en la mayoría de los métodos numéricos como integración numérica, diferencias finitas y métodos iterativos.
- Difiere del error de redondeo, ya que se debe a la omisión de términos y no a la representación numérica limitada.

Fórmula:

El error de truncamiento se puede estimar como el primer término descartado en una serie. En la serie de Taylor, por ejemplo:

$$E_t = \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

donde n es el último término considerado.

Aplicaciones e importancia:

- Análisis de convergencia: Se usa para determinar cuántos términos se requieren para alcanzar una precisión deseada en métodos de aproximación.
- Métodos de integración numérica: Como la regla del trapecio o Simpson, donde la precisión depende del número de subintervalos.

- Simulación numérica: Se usa en modelos físicos y matemáticos donde se requiere aproximación discreta.
- Cálculo de derivadas e integrales numéricas: Los métodos de diferencias finitas dependen de la reducción del error de truncamiento.

Error de redondeo

Definición:

El error de redondeo ocurre debido a la limitación en la representación numérica de los números en una computadora o calculadora. Como la mayoría de los sistemas computacionales trabajan con una cantidad finita de dígitos significativos, algunos valores no pueden representarse exactamente y deben redondearse o truncarse.

Características:

- Provocado por la representación finita de los números en sistemas digitales.
- Aparece al operar con números flotantes, especialmente en sumas o restas con valores de magnitudes muy diferentes.
- Se acumula en cálculos iterativos o con muchas operaciones.
- Puede causar errores significativos en algoritmos numéricos, especialmente en aquellos que requieren alta precisión.

Fórmula:

El error de redondeo para un número representado con n dígitos en base 10 se puede estimar como:

$$E_r = \frac{1}{2} \times 10^{-n}$$

Siendo n la cantidad de cifras decimales consideradas.

Aplicaciones e importancia:

- Cómputo científico y simulaciones: Afecta algoritmos en inteligencia artificial, gráficos computacionales y modelos físicos.
- Cálculo de expresiones matemáticas: Al operar con sumas y restas de números muy cercanos, puede producir cancelación catastrófica.
- Análisis financiero: Los errores de redondeo pueden afectar cálculos de tasas de interés o valores monetarios en grandes volúmenes de datos.
- Criptografía y seguridad informática: En algoritmos criptográficos, la precisión de los cálculos puede ser fundamental.

Error de convergencia

Definición:

El error de convergencia ocurre cuando un método numérico no logra acercarse a la solución exacta, ya sea porque diverge o porque la tasa de convergencia es demasiado lenta. Esto sucede comúnmente en métodos iterativos como Newton-Raphson, el método de bisección y los métodos de diferencias finitas.

Características:

- Depende del método numérico utilizado: Algunos métodos convergen más rápido que otros.
- Puede ser causado por una mala elección de los parámetros iniciales en métodos iterativos.
- Si un método diverge, el error crece en cada iteración en lugar de reducirse.
- Un método con convergencia lenta puede necesitar muchas iteraciones para obtener un resultado aceptable.

Fórmula:

El error en una iteración n está dado por:

$$E_n = |x_n - x_r|$$

Donde xn es la aproximación en la iteración n y xr es el valor real.

Si el método es convergente, se cumple:

$$lim_{n\to\infty}E_n = 0$$

Si el método no converge, el error permanece constante o incluso aumenta con cada iteración.

Aplicaciones e importancia:

- Métodos iterativos en álgebra lineal: Como el método de Jacobi o Gauss-Seidel, donde la convergencia depende de la matriz del sistema.
- Optimización numérico: En problemas de minimización, la convergencia lenta puede hacer que los algoritmos sean ineficientes.
- Resolución de ecuaciones no lineales: Métodos como Newton-Raphson pueden divergir si el punto inicial está mal elegido.
- Simulaciones computacionales: En ecuaciones diferenciales, una mala elección del tamaño de paso puede evitar la convergencia.

Error de cancelación

Definición:

El error de cancelación ocurre cuando se restan dos números muy cercanos entre sí, lo que reduce drásticamente la cantidad de cifras significativas del resultado y, por lo tanto, disminuye su precisión.

Este tipo de error es problemático porque puede llevar a una pérdida importante de información en cálculos numéricos.

Características:

- Aparece en la resta de números casi iguales, lo que puede provocar que los dígitos significativos se cancelen.
- Se amplifica en cálculos iterativos, como en diferencias finitas o métodos para resolver ecuaciones no lineales.
- Afecta directamente la estabilidad numérica de ciertos algoritmos.
- Es una de las principales causas de errores catastróficos en cálculos numéricos mal diseñados.

Fórmula:

Si tenemos dos valores aproximados xa y ya de los valores reales xr y yr, su resta genera un error de cancelación cuando:

$$(x_r - y_r) - (x_a - y_a) \approx 0$$

Es decir, si xr y yr son muy cercanos, el resultado tendrá menos cifras significativas.

Aplicaciones e importancia:

- Métodos de diferencias finitas: En derivadas numéricas, si el incremento es muy pequeño, el error de cancelación afecta la precisión del cálculo.
- Cálculo de raíces de ecuaciones: En métodos iterativos, puede provocar una mala convergencia.
- Modelado computacional: Afecta cálculos de física computacional, gráficos por computadora y simulaciones.
- Análisis financiero y estadístico: Puede generar errores en cálculos con tasas de cambio pequeñas o en datos de alta precisión.

Error por Overflow

Definición:

El error por Overflow ocurre cuando un número es demasiado grande para ser representado dentro del rango permitido por el sistema numérico de la computadora. Esto suele generar un resultado infinito o un valor erróneo.

Características:

- Ocurre cuando un cálculo excede la capacidad de almacenamiento del sistema.
- Común en operaciones con exponenciales grandes o productos sucesivos de números grandes.
- En muchos lenguajes de programación, provoca una excepción o se redondea a un valor máximo representable.
- En sistemas de punto flotante, el Overflow puede dar como resultado Infinity (∞).

Ejemplo:

Si el sistema representa números hasta 10^{308}, entonces calcular 10^{309} produciría Overflow.

Fórmula relacionada:

$$x_{\text{real}} > x_{\text{máximo representable}} \Rightarrow \text{Overflow}$$

Si x es el mayor número representable en la computadora, cualquier operación que intente superar x causa Overflow:

Aplicaciones e importancia:

- En cálculo científico, puede arruinar simulaciones si no se maneja correctamente.
- En criptografía, Overflow puede generar errores críticos en algoritmos matemáticos.
- En gráficos por computadora, Overflow puede hacer que los valores de color o coordenadas sean inválidos.

Error por Underflow

Definición:

El error por Underflow ocurre cuando un número es demasiado pequeño para ser representado dentro del rango permitido por el sistema numérico. En estos casos, el número se redondea a cero o a un número subnormal.

Características:

- Aparece cuando los cálculos generan números cercanos a cero, pero que no pueden representarse con la precisión del sistema.
- Común en restas de números casi iguales, divisiones de números muy pequeños y operaciones con exponenciales negativos grandes.
- Puede generar pérdida de precisión si el resultado esperado es un número muy pequeño pero significativo.
- En sistemas de punto flotante, el Underflow suele resultar en 0.0 o en valores subnormales.

Ejemplo:

Si el sistema más pequeño representable es 10^{-308}, entonces calcular 10^{-309} produciría Underflow, redondeando a 0.

Fórmula relacionada:

Si xminimo el menor número representable, cualquier número menor a este se redondea a cero:

$$x_{\text{real}} < x_{\text{mínimo representable}} \Rightarrow \text{Underflow}$$

Aplicaciones e importancia:

- En cálculo de derivadas numéricas, Underflow puede hacer que pequeños cambios en los valores sean ignorados.
- En modelado financiero, errores por Underflow pueden alterar predicciones y cálculos de tasas de interés.
- En simulación de partículas y mecánica cuántica, los valores extremadamente pequeños pueden ser importantes y perderse por Underflow.