Писмени испит из Анализе 1 за И смер **СЕПТЕМБАР 2 2020**

1. (15 поена)

(а) Одредити реалне константе a, b и c за које важи $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to +\infty$.

(б) Одредити реалне константе a, b и c за које важи $\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to +\infty$.

(в) Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

2. (15 поена) Нека је $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$ и $g(x) = ([f(x)]+1)\sqrt[3]{x^2-x}$.

(а) Одредити $[f(x)]$ за свако x из домена функције f.
(б) Испитати непрекидност функције g.
(в) Одредити скуп свих тачака у којима је функција g диференцијабилна.

3. (20 поена) Дата је функција $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.
(б) Одредити број тачака у којима је тангента на график функције f паралелна са x-осом.

4. (10 поена) Нека је функција f непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и нека је $f(a)=a$ и $f(b)=b$.

(а) Доказати да постоји $c \in (a,b)$ тако да је $f(c) = \frac{a+b}{2}$.

(б) Показати да за произвољне $x<y<z$ важи $\frac{y-x}{\frac{x+z}{2}-x} + \frac{z-y}{z-\frac{x+z}{2}} = 2$.

(в) Доказати да постоје t и s такви да важи $a<s<c<t<b$ и $\frac{1}{f'(s)} + \frac{1}{f'(t)} = 2$.

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)

Писмени испит из Анализе 1 за И смер **СЕПТЕМБАР 2 2020**

1. (15 поена)

(а) Одредити реалне константе a, b и c за које важи $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to +\infty$.

(б) Одредити реалне константе a, b и c за које важи $\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ кад $x \to +\infty$.

(в) Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

2. (15 поена) Нека је $f(x) = \frac{4}{x^2+3}$ и $g(x) = ([f(x)]+1)\sqrt[3]{x^2-x}$.

(а) Одредити $[f(x)]$ за свако x из домена функције f.
(б) Испитати непрекидност функције g.
(в) Одредити скуп свих тачака у којима је функција g диференцијабилна.

3. (20 поена) Дата је функција $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.
(б) Одредити број тачака у којима је тангента на график функције f паралелна са x-осом.

4. (10 поена) Нека је функција f непрекидна на $[a,b]$, диференцијабилна на (a,b) и нека је $f(a)=a$ и $f(b)=b$.

(а) Доказати да постоји $c \in (a,b)$ тако да је $f(c) = \frac{a+b}{2}$.

(б) Показати да за произвољне $x<y<z$ важи $\frac{y-x}{\frac{x+z}{2}-x} + \frac{z-y}{z-\frac{x+z}{2}} = 2$.

(в) Доказати да постоје t и s такви да важи $a<s<c<t<b$ и $\frac{1}{f'(s)} + \frac{1}{f'(t)} = 2$.

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)