Маша Ђорић
Јелена Катић

АНАЛИЗА 3

Уџбеник са збирком решених задатака за информатичаре

Математички факултет
Београд 2016.

Предговор

У писању ове књиге ослонили смо се на предавања и вежбе које смо држали на предмету Анализа 3 за смер Информатика на Математичком факултету у Београду. Анализа 3 је, у својој суштини, базични преглед теорије функција више променљивих уз кратак осврт на методе решавања неких типова диференцијалних једначина. Овај предмет је природни наставак и уопштење обрађених тема диференцирања и интеграције функција једне променљиве. Сличан садржај, али много опширнији и са озбиљнијим приступом, имају предмети Анализа 2а и 2б на модулу Математика. Студентима на овим предметима такође може бити од користи овај текст, као увод и основа за даље изучавање које ови предмети подразумевају. Сматрамо да ће студенти највише користи имати од мноштва решених примера и задатака, као и довољног броја задатака за вежбу (са коначним решенјима) са претходних испитних рокова. Задаци и примери у тексту би требало да објасне дефинисане појмове и тврђења, и олакшају даље читање, док су задаци дати на крају сваке главе замишљени као припрема студента за писмени испит.

Садржај књиге подељен је на седам глава. Првих пет глава представља градиво предмета, при чему се свака глава састоји од теоријског дела, решених задатака и задатака за самостални рад. Решења задатака приказана су у седмој глави, док су у шестој глави доказане теореме чији докази нису обавезни за разумевање градива као целине и могу представљати изазов за читаоца.

Прве две главе посвећене су функцијама више променљивих и диференцијалном рачуну. Метричка својства простора $\mathbb{R}$ пренесена су на простор $\mathbb{R}^n$ и формулисане су познате теореме са курсева Анализа 1 и 2 у општијој ситуацији. Поново говоримо о низовима и непрекидности, али уопштавање појма диференцијабилности захтева озбиљнији приступ и подсећање на појам линеарног оператора. Говоримо о довољним условима диференцијабилности, односу непрекидности и диференцијабилности и први пут се срећемо са изузетно важним оператором ∇ - за почетак са његовим најједноставнијим дејством, градијентом функције. Са функција прелазимо на пресликавања са вредностима у $\mathbb{R}^n$. Као што смо већ навикли, непрекидност се уводи непосредно, док дефинисање диференцијабилности функција више променљивих и вектор-функција доводи до увођења разних нових појмова. Помоћу Јакобијеве матрице лако можемо описати извод сложене вектор-функције више променљивих. Пре него што пређемо на изводе вишег реда, бавимо се геометријским погледом на појам диференцијабилности. Геометријска интерпретација извода функције једне променљиве је коефицијент правца тангенте на график функције у одговарајућој тачки. У случају функција више променљивих, њен градијент биће вектор нормале тангенте на линије нивоа ($f(x, y) = c$) у случају две променљиве, односно тангентне равни на површи нивоа у случају три променљиве ($f(x, y, z) = c$). Након увођења Тејлоровог полинома, прелазимо на важну теорију локалних екстремума. Дефинишемо квадратну форму, и на том језику формулишемо критеријуме када је стационарна тачка тачка локалног екстремума, а када не. Такође се упознајемо са важном техником Лагранжевих множиоца, помоћу које можемо одредити локалне екстремуме функције на „правилном” подскупу домена.

У трећој глави дефинишемо интеграл функције две и три променљиве, тзв. двоструки и троструки интеграл, који представљају природно уопштење интеграла функције једне променљиве. Ако бисмо смели да говоримо о најважнијим теоремама у математици, онда би се на том списку свакако нашла Фубинијева теорема. Овде је формулишемо у једном специјалном облику, али који нам је довољан за успешну интеграцију по великој класи скупова у равни, односно у простору. Строг доказ изведен је када је област по којој интегралимо правоугаоник, а више пажње посвећено је разјашњавању и интуитивном схватању ове теореме у општем случају. Важан алат за израчунавање интеграла је, као што већ знамо, теорема о смени променљиве. Теорему о смени променљиве у вишеструком интегралу доказујемо само у специјалном случају поларне, цилиндричне и сферне смене, сматрајући да је за потребе овог курса то довољно.

Четврту главу започињемо дефинисањем криволинијског интеграла функције, као такође једне врсте уопштења одређеног интреграла. Овог пута сегмент $[a, b]$ нећемо заменити дводимензионалним скупом, већ кривом. Након тога уводимо криволинијски интеграл векторског поља и говоримо о питању оријентације криве. Формулишемо Гринову теорему, која доводи у везу криволинијски и двоструки интеграл, односно извод и границу скупа - баш као Њутн-Лајбницова формула за одређени интеграл. Следи прича о конзервативним векторским пољима, независности интеграла од путање по којој интегралимо и условима под којима се то дешава. Поглавље настављамо увођењем површинског интеграла, најпре функције, а затим векторског поља. Поново разматрамо појам оријентације, овог пута површи, па говоримо о јединичној нормали на површ. Поглавље завршавамо повратком на оператор ∇ и Стоксовом и Гаусовом формулом, које повезују површински интеграл са криволинијским и троструким интегралом, респективно. Ове две теореме, као и Гринова, заправо су специјални случајеви једне дубоке и важне теореме, која успоставља дуалност између једног тополошког појма (границе), с једне стране, и аналитичког (оператора ∇), с друге. У питању је општа Стоксова теорема, која излази из оквира овог курса, а јесте корен многих студентима познатих теорема.

Тема пете главе су диференцијалне једначине, односно једначине у којима фигуришу непозната функција и њени изводи. Већину диференцијалних једначина није могуће експлицитно решити, па издвајамо неколико основних типова диференцијалних једначина првог реда и представљамо технике за њихово решавање. Такође говоримо о линеарној диференцијалној једначини вишег реда која се може решити познатим алгоритмом у великом броју случајева.

Пре свега желимо да се захвалимо Браниславу Првуловићу, који је педантно и посвећено прочитао рукопис у првој верзији и који је својим примедбама допринео да се из текста уклоне многе грешке и недостаци, и тиме значајно поправио квалитет излагања. Током техничке обраде текста од велике помоћи био нам је Славко Моцоња. Посебну захвалност дугујемо Тијани Шукиловић која је имала стрпљења и воље да нацрта све слике, за које сматрамо да много доприносе лакшем читању и разумевању текста. Такође се захваљујемо Милици Јовалекић и Вукашину Стојисављевићу који су, као асистенти на предмету, дали свој допринос у одабиру задатака за вежбу, као и младим колегама Филипу Живановићу, Душану Јоксимовићу и Младену Зекићу на указивању грешака и пропуста у тексту.

Садржај

ГЛАВА 1

Функције више промењљивих

На предмету Анализа 1 смо проучавали низове реалних бројева и нека својства функције једне реалне промењљиве (непрекидност, лимес, диференцијабилност). У овој глави ћемо ове појмове да уопштимо на случај низова у $\mathbb{R}^n$ и функција више реалних промењљивих.

1.1. Простор $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ као векторски простор са скаларним производом

Скуп $\mathbb{R}^n$ је скуп свих n-торки реалних бројева

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\, i = 1, \dots, n\}.$$

За $n = 2$, $\mathbb{R}^n$ је раван, а за $n = 3$, $\mathbb{R}^n$ је простор.

Напомена 1.1. Често ћемо тачку у $\mathbb{R}^n$ означавати само једним словом, али, великим или масним[1] (нпр. $\mathbf{x}$). $\diamond$

На скупу $\mathbb{R}^n$ можемо да дефинишемо сабирање:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

као и множење скаларом (реалним бројем) λ:

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

[1]Масно слово ће увек означавати тачку (или вектор) у $\mathbb{R}^n$.

Посматран заједно са овим операцијама, скуп $\mathbb{R}^n$ је векторски простор. На њему можемо да дефинишемо и *скаларни производ*:[2]

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Сваки скаларни производ дефинише дужину вектора или *норму*[3] (ово смо спомињали и на Анализи 2): ако је $\mathbf{u}$ вектор у произвољном векторском простору са скаларним производом, тада његову дужину дефинишемо као:

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Свака норма дефинише растојање између две тачке или *метрику*[4] као

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

У $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ овако дефинисано растојање је стандардно еуклидско (како смо учили у школи или на курсу из Аналитичке геометрије):

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ у } \mathbb{R}^2$$
$$d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \text{ у } \mathbb{R}^3,$$

док се у $\mathbb{R}^n$ растојање између тачака $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ рачуна као

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Приметимо да се, у случају $n = 1$, растојање у $\mathbb{R}$ своди на апсолутну вредност разлике:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Нека (метричка) својства скупова у $\mathbb{R}^k$

Дефиниција 1.2. *Отворена кугла* или *отворена лопта* са центром у $\mathbf{x}_0$ полупречника $r > 0$ је скуп

$$B(\mathbf{x}_0, r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\}.$$

Затворена кугла или *затворена лопта* са центром у $\mathbf{x}_0$ полупречника $r > 0$ је скуп

$$B[\mathbf{x}_0, r] := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leqslant r\}.$$

$\Diamond$

---

[2] Видети додатак за општу дефиницију скаларног производа.

[3] Видети додатак за општу дефиницију норме.

[4] Видети додатак за општу дефиницију метрике.

Дефиниција 1.3. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Кажемо да је тачка $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ *рубна* или *гранична тачка скупа* A ако за свако $\varepsilon > 0$ постоје

- тачка $\mathbf{x}$ која припада скупу A која је удаљена од $\mathbf{a}$ за мање од ε и
- тачка $\mathbf{y}$ која не припада скупу A која је удаљена од $\mathbf{a}$ за мање од ε.

Скуп рубних тачака зовемо *рубом* или *границом* скупа A и означавамо са ∂A. ♢

Пример 1.4. Руб отворене и затворене лопте је исти скуп тачака који се назива *сфера*:

$$\partial B(\mathbf{x}_0, r) = \partial B[\mathbf{x}_0, r] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\}.$$

✓

Дефиниција 1.5. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Кажемо да је скуп A *затворен* ако садржи све своје рубне тачке, а да је *отворен* ако не садржи ниједну своју рубну тачку. ♢

Пример 1.6. Скуп $A = \{(x, y) \mid x^2 + y < 1\}$ је отворен, а скуп $B = \{(x, y) \mid x^2 + y \leqslant 1\}$ затворен у $\mathbb{R}^2$. Рубне тачке и једног и другог скупа чине параболу $\partial A = \partial B = \{(x, y) \mid x^2 + y = 1\}$. ✓

Пример 1.7. Отворена кугла је отворен, а затворена затворен скуп. Сфера је затворен скуп. ✓

Приметимо да постоје скупови који нису ни затворени ни отворени, то су они скупови који садрже неке, али не и све своје рубне тачке.

Задатак 1.8. Дати (или нацртати) пример скупа који није ни отворен ни затворен. ✓

Дефиниција 1.9. Скуп $A \subseteq \mathbb{R}^k$ је *ограничен* ако постоји $r > 0$ такво да је за свако $\mathbf{x} \in A$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \leqslant r$. ♢

Пример 1.10. Скупови A и B у примеру 1.6 нису ограничени, а кугле и сфера из примера 1.7 јесу.

Дефиниција 1.11. Затворен и ограничен скуп у $\mathbb{R}^n$ називамо и *компактним*. ♢

Задатак 1.12. Који су од скупова из претходних примера компактни, а који нису? ✓

Дефиниција 1.13. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Кажемо да је тачка $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ *тачка нагомилавања скупа* A ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји тачка $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ која припада скупу $B(\mathbf{a}, \varepsilon) \cap A$. ♢

Задатак 1.14. Нека је

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup (\{0\} \times (1,2)) \cup \{(2,3),(0,7)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Нацртати скуп A. Које тачке су тачке нагомилавања скупа A? ✓

1.2. Низови у $\mathbb{R}^n$

Под низом тачака $\mathbf{a}_n$ у равни подразумевамо низ уређених парова (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$, где су x_n и y_n реални бројеви. Слично, низ тачака $\mathbf{a}_n$ у простору је низ уређених тројки (x_n, y_n, z_n), $n \in \mathbb{N}$, за x_n, y_n, $z_n \in \mathbb{R}$. Аналогно, низ у $\mathbb{R}^k$ је низ уређених $k-$торки $(x_{1n}, x_{2n}, \ldots, x_{kn})$. [5] Ми ћемо углавном радити са низовима у $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$.

Дефиниција 1.15. Кажемо да низ $\mathbf{a}_n = (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$ *тежи* или *конвергира* ка тачки $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, кад $n \to \infty$, ако низ растојања $d(\mathbf{a}_n, \mathbf{a})$ (што је низ реалних бројева) тежи нули у $\mathbb{R}$. Као и у реалном случају, пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$. Други начин да се ово запише је

$$\mathbf{a} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n \iff (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0)\,(n \geqslant n_0 \Rightarrow d(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) < \varepsilon)\,.$$

Као и у случају реалних низова, тачку $\mathbf{a}$ зовемо *граничном вредношћу* или *лимесом* низа $\mathbf{a}_n$. $\Diamond$

Тврђење 1.16. Низ $\mathbf{a}_n = (x_n, y_n, z_n)$ тежи ка тачки $\mathbf{a} = (x, y, z)$ ако и само ако је

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y, \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z. \tag{1}$$

Доказ. Како је

$$d(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) = \sqrt{d(x_n, x)^2 + d(y_n, y)^2 + d(z_n, z)^2},$$

то је $d(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) \geqslant d(x_n, x)$, $d(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) \geqslant d(y_n, y)$ и $d(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) \geqslant d(z_n, z)$. Зато, ако низ $\mathbf{a}_n$ тежи ка $\mathbf{a}$, онда важи (1). За доказ другог смера приметимо да, за свака три позитивна броја α, β, γ, важи

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \leqslant \alpha + \beta + \gamma$$

(ова неједнакост се доказује квадрирањем обе стране), тако да имамо

$$d(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}) = \sqrt{d(x_n, x)^2 + d(y_n, y)^2 + d(z_n, z)^2} \leqslant d(x_n, x) + d(y_n, y) + d(z_n, z).$$

Из последње неједнакости следи други смер тврђења. $\square$

[5] Строго говорећи, низ у $\mathbb{R}^k$ је пресликавање $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$.

Пример 1.17. Дат је низ $\mathbf{a}_n = \left(\frac{1}{n}, 1, n(e^{\frac{1}{n}} - 1)\right)$ у $\mathbb{R}^3$. Напишимо првих неколико чланова низа $\mathbf{a}_n$ и одредимо његов лимес кад $n \to \infty$:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_1 = (1, 1, e-1), & \mathbf{a}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1, 2\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right)\right), & \mathbf{a}_3 = \left(\frac{1}{3}, 1, 3\left(e^{\frac{1}{3}} - 1\right)\right), \\ \mathbf{a}_4 = \left(\frac{1}{4}, 1, 4\left(e^{\frac{1}{4}} - 1\right)\right), & \mathbf{a}_5 = \left(\frac{1}{5}, 1, 5\left(e^{\frac{1}{5}} - 1\right)\right), & \mathbf{a}_6 = \left(\frac{1}{6}, 1, 6\left(e^{\frac{1}{6}} - 1\right)\right), \\ \dots & & . \end{array}$$

Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} 1 = 1, \quad \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1,$$

то је

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty} 1, \lim_{n\to\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1)\right) = (0, 1, 1).$$

✓

Задатак 1.18. Дефинисати граничну вредност низа у $\mathbb{R}^2$. Формулисати и доказати тврђење 1.16 у случају $\mathbb{R}^2$. ✓

1.3. Функције са доменом $\mathbb{R}^n$, лимес и непрекидност

У овом поглављу се бавимо лимесом и непрекидношћу функција две или три променљиве. Пре него што уведемо ове појмове, наводимо пар задатака који имају за циљ да читаоцу приближе појам функције више променљивих.

Задатак 1.19. Наћи домен (подскуп од $\mathbb{R}^2$) и скуп вредности (подскуп од $\mathbb{R}$) следећих функција две променљиве:

а) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$;
б) $f(x, y) = \frac{1}{xy}$;
в) $f(x, y) = \sin(xy)$.

Скицирати у равни скупове $\{(x, y) \mid f(x, y) = c\}$, за разне (могуће) вредности $c \in \mathbb{R}$. ✓

Задатак 1.20. Наћи домен и скуп вредности следећих функција три променљиве:

а) $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2 - z^2}$;
б) $f(x, y, z) = \frac{z}{xy}$;
в) $f(x, y, z) = \ln(1 - x^2 - y^2 - 2z^2)$.

Да ли су ови скупови отворени, затворени или ни једно ни друго? Да ли су ограничени? Да ли су компактни? ✓

Лимес функције

Дефиницију лимеса функција више променљивих добијамо када у дефиницији у случају једне променљиве израз $|x - x_0|$ заменимо са $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. [6]

Дефиниција 1.21. Нека је f функција n променљивих и тачка $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ тачка нагомилавања домена D_f функције f. Кажемо да је $L \in \mathbb{R}$ *гранична вредност* или *лимес функције* f кад $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta, \mathbf{x} \in D_f \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon)\,. \tag{2}$$

Као и у реалном случају, пишемо $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$. ◊

Пример 1.22. Ради илустрације технике, докажимо, по дефиницији лимеса, да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2y}{x^2+y^2} = 0$. Хоћемо, за задато $\varepsilon > 0$, да нађемо $\delta > 0$ за које важи

$$d((x,y),(0,0)) = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| = \left|\frac{4x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon.$$

Пошто је израз $\left|\frac{4x^2y}{x^2+y^2}\right|$ компликован, послужићемо се једним триком. Наиме, како је $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leqslant 1$, то је $\left|\frac{4x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqslant |4y|$. Дакле, ако хоћемо да је $\left|\frac{4x^2y}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$, довољно је да буде $|4y| < \varepsilon$ због претходне неједнакости. Проблем смо свели на једноставнији - довољно је да пронађемо $\delta > 0$ за које ће да важи:

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |4y| < \varepsilon.$$

Како је $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$, то видимо да је $\delta := \frac{\varepsilon}{4}$ тражено δ, јер важи:

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| \leqslant |4y| \leqslant 4\sqrt{x^2+y^2} < 4\delta = \varepsilon.$$

✓

Тврђење 1.23. Нека су f и g две функције n променљивих и тачка $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ тачка нагомилавања скупа $D_f \cap D_g$. Претпоставимо да постоје $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ и $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$. Тада је

1) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$;
2) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \cdot \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$;
3) Ако је $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \neq 0$, онда је $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \dfrac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$.

---

[6] Што је природно, јер је у $\mathbb{R}$ растојање баш $d(x,y) = |x-y|$.

Доказ претходног тврђења је потпуно аналоган доказу одговарајућих тврђења у случају једне променљиве. На страни 122, у додатку, дат је (ради илустрације ове аналогије) доказ тачке 1).

Задатак 1.24. Нека функција f има лимес у $\mathbf{x}_0$. Доказати да је она онда ограничена на некој кугли са центром у $\mathbf{x}_0$. ✓

Непрекидност функције

Дефиниција 1.25. Функција f n променљивих је *непрекидна у тачки* $\mathbf{x}_0 \in D_f$ ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, (d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta, \mathbf{x} \in D_f \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon)\,. \tag{3}$$

Функција f је *непрекидна* ако је непрекидна у свим тачкама домена D_f. $\Diamond$

Питање 1.26. Зашто у изразу (2) стоји $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$, а у изразу (3) само $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$?

Задатак 1.27. Доказати да су пројекције $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$ непрекидне на $\mathbb{R}^2$. ✓

Приметимо да је f непрекидна у тачки $\mathbf{x}_0$ ако и само ако је $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$. Из овога и тврђења 1.23 директно следи следеће тврђење.

Тврђење 1.28. Нека су f и g непрекидне у тачки $\mathbf{x}_0$. Тада су и функције $f \pm g$ и $f \cdot g$ непрекидне у $\mathbf{x}_0$. Ако је још и $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, онда је и функција $\frac{f}{g}$ непрекидна у тачки $\mathbf{x}_0$. $\Box$

Лимес и непрекидност функције на језику низова

Тврђење 1.29. Нека је $\mathbf{x}_0$ тачка нагомилавања домена D_f функције f (више променљивих). Тада је $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(x) = A$ ако и само ако, за сваки низ $\mathbf{x}_n \in D_f$ тачака различитих од $\mathbf{x}_0$ који тежи ка $\mathbf{x}_0$, важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(\mathbf{x}_n) = A$.

Доказ тврђења 1.29 је потпуно аналоган одговарајућем тврђењу у случају функције једне променљиве и дат је у додатку, на страни 123.

Из тврђења 1.29 директно следи следеће тврђење.

Тврђење 1.30. Функција f (више променљивих) је непрекидна у тачки $\mathbf{a}$ ако и само за сваки низ тачака $\mathbf{x}_n \in D_f$ који тежи ка $\mathbf{x}_0$, важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x}_0)$.

Следеће тврђење говори о непрекидности сложене функције.

Тврђење 1.31. Нека су $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрекидне у тачки (x_0,y_0) и нека је $u(x_0,y_0)=u_0\in\mathbb{R}$, $v(x_0,y_0)=v_0\in\mathbb{R}$. Ако је функција f непрекидна у тачки (u_0,v_0), онда је и композиција $g(x,y):=f(u(x,y),v(x,y))$ непрекидна у тачки (x_0,y_0).

Доказ. Нека је $g(x_0,y_0)=f(u_0,v_0)=A\in\mathbb{R}$ и нека је (x_n,y_n) низ који тежи ка (x_0,y_0). Како су u и v непрекидне, то из тврђења 1.30 следи да је низ $u(x_n,y_n)$ тежи ка u_0, а низ $v(x_n,y_n)$ ка v_0. Из тврђења 1.16 следи да низ $(u_n,v_n):=(u(x_n,y_n),v(x_n,y_n))$ тежи ка (u_0,v_0), па, због непрекидности функције f имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} f(u(x_n,y_n),v(x_n,y_n))=\lim_{n\to\infty} f(u_n,v_n)=f(u_0,v_0)=A,$$

али то значи да је $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n,y_n)=A$. Из тврђења 1.30 следи да је g непрекидна у (x_0,y_0). □

Задатак 1.32. Формулисати тврђење аналогно претходном у случају када су:

- u и v функције једне променљиве;
- u и v функције три променљиве;
- f функција једне променљиве;
- f функција три променљиве.

✓

Следеће глобално својство непрекидних функција је аналогон Вајерштрасове теореме за непрекидне функције једне променљиве. Наводимо га без доказа (видети [**2, 3, 4**]).

Теорема 1.33. (Вајерштрасова теорема) *Непрекидна функција на компактном скупу достиже свој максимум и минимум. Прецизније, ако је $K\subset\mathbb{R}^n$ компактан и $f:K\to\mathbb{R}$ непрекидна, тада постоје $\mathbf{x}_{\min}\in K$ и $\mathbf{x}_{\max}\in K$ такви да важи*

$$f(\mathbf{x}_{\min})\leqslant f(\mathbf{x})\leqslant f(\mathbf{x}_{\max}),\quad \forall\,\mathbf{x}\in K.$$

□

1.4. Пресликавања са вредностима у $\mathbb{R}^k$

Пресликавање $F:A\to\mathbb{R}^k$ се састоји од k координатних функција, тј. има облик

$$F(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_k(\mathbf{x})).$$

Оваква пресликавања понекад зовемо *векторским функцијама* или *вектор-функцијама* јер имају вредности у векторском простору.

Задатак 1.34. Навести пример пресликавања $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. ✓

Појам лимеса и непрекидности векторских функција није суштински другачији у односу на функције са вредностима у $\mathbb{R}$. Видећемо да се, заправо, ова својства своде на одговарајућа својства координатних функција f_j.

Дефиницију лимеса и непрекидности преносимо из Анализе 1 и на овај случај, тако што апсолутну вредност замењујемо растојањем.

Дефиниција 1.35. Нека $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Тачка $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^{\mathbf{k}}$ је *гранична вредност* или *лимес* пресликавања F кад $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow d(F(\mathbf{x}), \mathbf{y}_0) < \varepsilon).$$

Као и раније, пишемо $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x_0}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{y_0}$. Пресликавање F је *непрекидно* у тачки $\mathbf{x}_0$ ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow d(F(\mathbf{x}), F(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon).$$

◊

Доказ следећег тврђења је сличан доказу тврђења 1.16 и остављамо читаоцу да сам проба да га изведе, за $k = 2, 3$.

Тврђење 1.36. Нека је $F = (f_1, \ldots, f_k)$. Тада је

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 = (y_1, \ldots, y_k) \iff \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_j(\mathbf{x}) = y_j,\ j = 1, \ldots, k.$$

Пресликавање F је непрекидно ако и само ако су све функције f_j, $j = 1, \ldots, k$ непрекидне. □

Задатак 1.37. Дати пример непрекидног и прекидног пресликавања из $\mathbb{R}^3$ у $\mathbb{R}^2$. ✓

Задатак 1.38. Нека је $A \subset \mathbb{R}^m$ и $F : A \to \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$, и $G : B \to \mathbb{R}^k$, $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 \in B$, F непрекидно у $\mathbf{x}_0$, G непрекидно у $\mathbf{y}_0$. Доказати да је $G \circ F$ (шта је домен, а шта кодомен овог пресликавања?) непрекидно у $\mathbf{x}_0$. ✓

1.5. Задаци

1. Одредити домен следећих пресликавања:

а) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$;

б) $f(x,y,z)=\sqrt{x+y+z}$;

в) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}$, $a>0$;

г) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$;

д) $f(x,y)=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$.

2. Нека је $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$, а показати да $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ не постоји.

3. Нека је $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Доказати да је $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$, а да $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ не постоји.

4. Нека је $f(x,y)=x+y\sin\dfrac{1}{x}$. Доказати да постоје $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$, а да не постоји $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)$.

5. Нека је $f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$. Израчунати лимес ове функције дуж произвољне полуправе са почетком у координатном почетку када $r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$.

6. Нека је $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$. Да ли се $f(x,y)$ може додефинисати тако да буде непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$?

7. Доказати да је $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ непрекидна по свакој променљивој посебно, али да није непрекидна по (x,y).

8. Доказати да је $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^4+y^2=0\end{cases}$ непрекидна дуж сваке полуправе са почетком у координатном почетку , али да није непрекидна у $(0,0)$.

9. Испитати непрекидност функције

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

на $\mathbb{R}^2$.

1.6. Задаци за вежбу

10. Навести пример неконстантног пресликавања $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ чија је бар једна координатна функција ненегативна (и у наведеном примеру назначити која је у питању).

11. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са $f(x, y) = \dfrac{\ln(x - y) - 2}{\sqrt{x^2 + y}}$.

а) Скицирати домен дате функције.
б) Да ли постоји тачка $A \in \mathbb{R}^2$ таква да је $f(A) = 0$?
в) Израчунати лимес ове функције дуж полуправе са почетком у координатном почетку која заклапа угао $\frac{\pi}{6}$ са позитивним делом $x-$осе, када $r \to \infty$.

12. Нека је $f(x, y) = \sqrt{y} + \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

а) Скицирати домен D функције $f(x, y)$. Да ли је скуп D компактан?
б) Израчунати лимес функције f дуж полуправе са почетком у $(0, 0)$ која гради угао θ_0, $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi$, са позитивним делом $x-$ осе, када $r \to \infty$.

13. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(y+4)^2}{(x+1)^2 + (y+4)^2}, & (x, y) \neq (-1, -4) \\ 0, & (x, y) = (-1, -4) \end{cases}.$$

а) Да ли је f непрекидна на скупу $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leqslant 1\}$?
б) Да ли је f непрекидна на $\mathbb{R}^2$?

ГЛАВА 2

Диференцијални рачун функција више промењљивих

2.1. Парцијални изводи и изводи у правцу

На курсу Анализа 1 смо дефинисали извод функције у тачки x_0 као

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}. \tag{4}$$

Ова дефиниција нема смисла кад је f функција више промењљивих, јер не знамо шта је $\frac{1}{\mathbf{h}}$ ако је $\mathbf{h}$ вектор. Можемо, међутим да фиксирамо једну промењљиву, а да варирамо другу (тако добијамо парцијални извод), или да фиксирамо правац и посматрамо промену функције по том правцу (тако добијамо извод у правцу). Ево прецизних дефиниција.

Дефиниција 2.1. Нека је f функција две промењљиве.[1] *Парцијални извод функције f по x у тачки* (x_0, y_0) је

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h},$$

ако горњи лимес постоји. Слично, *парцијални извод функције f по y у тачки* (x_0, y_0) је лимес

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h},$$

ако постоји. ◊

Ознака за парцијални извод по x у тачки (x_0, y_0) је $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ или $f'_x(x_0,y_0)$. Слично, за парцијални извод по y користимо ознаке $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ или $f'_y(x_0,y_0)$.

[1] У овом поглављу ћемо углавном радити са функцијама две промењљиве, да бисмо поједноставили запис.

Напомена 2.2. Приметимо да је $f'_x(x_0, y_0)$ обичан извод функције $\varphi(x) := f(x, y_0)$ у тачки x_0. Функција φ је функција једне променљиве која настаје кад другу променљиву (y) фиксирамо ($y = y_0$). То значи да парцијални извод по x тражимо као обичан извод по x, ако y схватимо као константу. $\diamond$

Пример 2.3. Израчунајмо f'_x и f'_y функције $f(x, y) = \sin(xy) + x^2(y^2 + y) - e^{2x-3y}$. Имајући у виду напомену 2.2, добијамо:

$$f'_x = \cos(xy)y + 2x(y^2 + y) - e^{2x-3y} \cdot 2,$$

и

$$f'_y = \cos(xy)x + x^2(2y + 1) - e^{2x-3y} \cdot (-3).$$

$\checkmark$

Пример 2.4. Израчунајмо f'_x и f'_y у тачки $(0, 0)$, где је

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Овде не можемо да фиксирамо једну променљиву и применимо правила диференцирања на другу (као што смо радили у претходном примеру), јер је функција дефинисана на различите начине у различитим тачкама (заправо, на први поглед ми ни не видимо да ли парцијални изводи постоје). Зато радимо по дефиницији:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-0^3}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$$

Слично:

$$f'_y(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^3-h^3}{0^2+h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1.$$

$\checkmark$

Дефиниција 2.5. Нека је $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ произвољан вектор различит од нула вектора. *Извод у правцу вектора* $\mathbf{v}$ *функције* f *у тачки* (x_0, y_0) дефинишемо као

$$\lim_{h\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h\mathbf{v}) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\alpha, y_0 + h\beta) - f(x_0, y_0)}{h},$$

ако он постоји. $\diamondsuit$

За извод у правцу вектора $\mathbf{v}$ функције f у тачки (x_0, y_0) користимо ознаке $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$ или $f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0)$.

Пример 2.6. Израчунајмо извод у тачки $(0,0)$ у правцу вектора $\mathbf{v} = (1,2)$ функције f из примера 2.4:

$$f'_{\mathbf{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h\cdot 1, 0+h\cdot 2) - f(0,0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,2h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3-(2h)^3}{h^2+(2h)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-7h^3}{5h^2}}{h} = -\frac{7}{5}.$$

✓

Напомена 2.7. Ако за вектор $\mathbf{v}$ изаберемо вектор $(1,0)$ добијамо да је $f'_{\mathbf{v}} = f'_x$, а ако изаберемо $(0,1)$, добијамо $f'_{\mathbf{v}} = f'_y$. ◇

Задатак 2.8. Формулисати све дефиниције из овог поглавља у случају функције три или више промењљивих. ✓

2.2. Диференцијабилност

У Анализи 1 смо учили да је функција диференцијабилна у тачки x_0 ако има извод у њој, тј. ако постоји лимес (4). Други начин да се (4) запише је

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h), \quad h \to 0 \tag{5}$$

У случају функције две промењљиве пресликавање $h \mapsto f'(x_0)h$ у услову диференцијабилности (5) ћемо заменити линеарним пресликавањем[2] из $\mathbb{R}^2$ у $\mathbb{R}$.

Дефиниција 2.9. Нека је f дефинисана на неком отвореном скупу $U \subset \mathbb{R}^2$ и тачка $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$. Кажемо да је функција f *диференцијабилна у тачки* $\mathbf{x}_0$ ако постоји линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такво да важи

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x_0}) + L\mathbf{h} + o(\mathbf{h}), \text{ кад } \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}, \tag{6}$$

при чему под $o(\mathbf{h})$ подразумевамо неку функцију облика $\varepsilon(\mathbf{h}) \cdot \|\mathbf{h}\|$, такву да $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ кад $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. ◇

Напомена 2.10. Функција $g(\mathbf{h}) = o(\mathbf{h})$ кад $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ ако $\frac{g(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0$ кад $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, или у координатама, за $\mathbf{h} = (h,k)$:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{g(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

◇

[2] Што није необично, јер је и $h \mapsto f'(x_0)h$ линеарно.

Напишимо једначину (6) у координатама:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+L(h,k)+o(h,k),\ (h,k)\to(0,0).$$

Како су сва линеарна пресликавања $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ облика

$$L:(h,k)\mapsto ah+bk,$$

за неке реалне константе a и b, услов диференцијабилности постаје:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+ah+bk+o(h,k),\ (h,k)\to(0,0). \tag{7}$$

Да бисмо открили нешто више о a и b, узмимо да је $k=0$ у једнакости (7) и напишимо $o(h,k)=\varepsilon(h,k)\|(h,k)\|$. Имамо:

$$f(x_0+h,y_0)=f(x_0,y_0)+ah+o(h,0)=f(x_0,y_0)+ah+\varepsilon(h,0)\|(h,0)\|,$$

$(h,k)\to(0,0)$. У последњој једнакости пребацимо на леву страну израз $f(x_0,y_0)$ и поделимо обе стране са h. Добијамо

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=a+\frac{\varepsilon(h,0)\|(h,0)\|}{h},\ (h,k)\to(0,0). \tag{8}$$

Лева страна последњег очигледно тежи ка $f'_x(x_0,y_0)$. Како је $\|(h,0)\|=|h|$, то је израз $\frac{\|(h,0)\|}{h}$ ограничен, и како $\varepsilon(h,0)$ тежи нули кад $h\to0$, имамо да је

$$\lim_{h\to0}\frac{\varepsilon(h,0)\|(h,0)\|}{h}=0,$$

па десна страна у (8) тежи ка a. Добијамо да је

$$a=f'_x(x_0,y_0),$$

и на исти начин $b=f'_y(x_0,y_0)$. Овим смо доказали следеће тврђење.

Тврђење 2.11. Ако је f диференцијабилна у (x_0,y_0), тада постоје парцијални изводи $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$. □

Из претходне приче закључујемо следеће: ако хоћемо да испитамо диференцијабилност неке функције у (x_0,y_0) (а не можемо да закључујемо на неки посредан начин - користећи неку теорему), прво треба да потражимо парцијалне изводе у тој тачки. Ако неки од њих не постоји, функција није диференцијабилна. Ако постоје оба, онда проверимо да ли израз

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f'_x(x_0,y_0)h-f'_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{9}$$

тежи нули кад $(h,k)\to(0,0)$. Ако то јесте случај, функција јесте диференцијабилна у (x_0,y_0), а ако није, онда није.

Пример 2.12. Испитајмо да ли је функција f из примера 2.4 диференцијабилна у тачки $(0,0)$. Како смо парцијалне изводе већ израчунали:

$$f'_x(0,0)=1, \quad f'_y(0,0)=-1,$$

остаје да проверимо да ли израз (9) тежи нули кад $(h,k)\to(0,0)$. У овом конкретном примеру, израз (9) је једнак:

$$\frac{f(h,k)-f(0,0)-1\cdot h-(-1)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\frac{h^3-k^3}{h^2+k^2}-h+k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^2k-hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{10}$$

Ако изаберемо низ тачака $\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right)$ који тежи $(0,0)$ и заменимо га (уместо (h,k)) у (10), добијамо константан низ $\frac{2}{\sqrt{5^3}}$ који очигледно не тежи нули. Закључујемо да (10) не тежи нули (тврђење 1.29), па f није диференцијабилна у $(0,0)$. ✓

Напомена 2.13. (терминологија:) Линеарно пресликавање L (за које смо видели да је облика $L:(h,k)\mapsto f'_x(x_0,y_0)h+f'_y(x_0,y_0)k$) зовемо *диференцијалом* или *изводом* функције f у тачки (x_0,y_0) и означавамо га са $df(x_0,y_0)$ (или, ређе, са $f'(x_0,y_0)$). Ако линеарна пресликавања $(x,y)\mapsto x$ и $(x,y)\mapsto y$ означимо са dx и dy, имамо

$$df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy.$$

Вектор $(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0))$ зовемо *градијентом* функције f у тачки (x_0,y_0) и означавамо га са $\nabla f(x_0,y_0)$. Из ове дефиниције је очигледно да је, за сваки вектор $\mathbf{v}$:

$$df(x_0,y_0)(\mathbf{v})=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{v},$$

где је $\cdot$ скаларни производ. ◇

Тврђење 2.14. Ако је f диференцијабилна у тачки (x_0,y_0), тада постоји извод $f'_{\mathbf{v}}(x_0,y_0)$ у сваком правцу $\mathbf{v}$ функције f у тачки (x_0,y_0) и једнак је $df(x_0,y_0)(\mathbf{v})$.

Доказ. Нека је $\mathbf{v}=(\alpha,\beta)$. У једначини (7) ставимо да је $(h,k)=t\mathbf{v}=(t\alpha,t\beta)$. Очигледно је да $(h,k)\to(0,0)$ кад $t\to0$. Приметимо и да је

$$o(h,k)=\varepsilon(h,k)\|(h,k)\|=\varepsilon(t\alpha,t\beta)|t|\|\mathbf{v}\|=o(t),$$

јер $\varepsilon(t\alpha,t\beta)\to0$, кад $t\to0$. Имамо:

$$f(x_0+ta,y_0+tb)=f(x_0,y_0)+t(a\alpha+b\beta)+o(t), \quad t\to0,$$

односно

$$\frac{f(x_0+ta,y_0+tb)-f(x_0,y_0)}{t}=a\alpha+b\beta+o(1), \quad t\to0.$$

Ако у последњем изразу пустимо да $t \to 0$, добијамо

$$\begin{aligned} f'_{\mathbf{v}}(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t} = a\alpha + b\beta \\ &= f'_x(x_0, y_0)\alpha + f'_y(x_0, y_0)\beta = df(x_0, y_0)(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

$\square$

Напомена 2.15. Обрнуто не мора да важи: функција f из примера 2.4 има извод у сваком правцу (проверити да је, за $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$, $f'_{\mathbf{v}} = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 + \beta^2}$), али није диференцијабилна (пример 2.12). $\diamond$

Задатак 2.16. Формулисати све дефиниције из овог поглавља у случају функције три или више променљивих. ✓

Диференцијабилност и непрекидност

Тврђење 2.17. Ако је f диференцијабилна у тачки (x_0, y_0), тада је она и непрекидна у тачки (x_0, y_0).

Доказ. Ако у једначини (7) израчунамо $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}$, на десној страни добијамо $f(x_0, y_0)$. То значи да је

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0),$$

а то управо значи да је f непрекидна у (x_0, y_0). $\square$

Напомена 2.18. Обрнуто не мора да важи: показати да је функција из примера 2.4 непрекидна у $(0, 0)$. Штавише, непрекидна функција не мора да има ни парцијалне изводе: доказати да је $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ непрекидна у $(0, 0)$ али да не постоје парцијални изводи у $(0, 0)$. $\diamond$

Задатак 2.19. Формулисати претходно тврђење у случају функције три или више променљивих. ✓

Довољни услови диференцијабилности

У претходним поглављима смо видели да ако је функција диференцијабилна (у некој тачки), тада је она и непрекидна, има парцијалне изводе и изводе у сваком правцу (у тој тачки), али да обратно не мора да важи, тј. да сви ови услови не обезбеђују да функција буде и диференцијабилна. Зато наводимо један довољан услов за диференцијабилност.

Тврђење 2.20. Ако у некој отвореној кугли са центром у тачки (x_0, y_0) функција има парцијалне изводе f'_x и f'_y, и ако су они непрекидни у тачки (x_0, y_0), тада је f диференцијабилна у тачки (x_0, y_0).

Доказ. Треба да докажемо да је

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k = o(h, k),\ (h, k) \to (0, 0).$$

Ако левој страни последње једнакости одузмемо и додамо израз $f(x_0, y_0+k)$ и применимо Лагранжеву теорему о средњој вредности[3] на функције $\varphi(x) := f(x, y_0+k)$ и $\psi(y) := f(x_0, y)$, добијамо:

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)\\
&- f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k =\\
&f'_x(x_0+\xi, y_0+k)h + f'_y(x_0, y_0+\eta)k - f'_x(x_0, y_0)h - f'_y(x_0, y_0)k =\\
&[f'_x(x_0+\xi, y_0+k) - f'_x(x_0, y_0)]h + [f'_y(x_0, y_0+\eta) - f'_y(x_0, y_0)]k
\end{aligned}$$

где је ξ између 0 и h, а η између 0 и k. Пошто су функције f'_x и f'_y непрекидне у (x_0, y_0), и пошто $(x_0+\xi, y_0+k)$ и $(x_0, y_0+\eta)$ теже ка (x_0, y_0), кад $(h, k) \to (0, 0)$, величине

$$\varepsilon_1(h, k) := f'_x(x_0+\xi, y_0+k) - f'_x(x_0, y_0) \quad \text{и} \quad \varepsilon_2(h, k) := f'_y(x_0, y_0+\eta) - f'_y(x_0, y_0)$$

теже нули кад $(h, k) \to (0, 0)$. Зато имамо

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{[f'_x(x_0+\xi, y_0+k) - f'_x(x_0, y_0)]h + [f'_y(x_0, y_0+\eta) - f'_y(x_0, y_0)]k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| =\\
&\left|\frac{\varepsilon_1(h, k)h + \varepsilon_2(h, k)k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leqslant\\
&|\varepsilon_1(h, k)|\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + |\varepsilon_2(h, k)|\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant |\varepsilon_1(h, k)| + |\varepsilon_2(h, k)| \to 0,
\end{aligned}$$

кад $(h, k) \to (0, 0)$. У последњој неједнакости смо користили да је $\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant 1$ и $\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leqslant 1$. □

Задатак 2.21. Доказати да је функција

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0)\\ 0 & (x, y) = (0, 0)\end{cases}$$

диференцијабилна у тачки $(0, 0)$, али да парцијални изводи f'_x и f'_y нису непрекидни у $(0, 0)$, односно, да не важи обрат тврђења 2.20. ✓

Задатак 2.22. Формулисати претходно тврђење у случају функције три или више променљивих. ✓

[3] Подсетимо се да Лагранжева теорема о средњој вредности каже да за функцију φ непрекидну на $[a, b]$ и диференцијабилну на (a, b) постоји $c \in (a, b)$ такво да важи $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

2.3. Пресликавања са вредностима у $\mathbb{R}^n$

Као и у случају лимеса и непрекидности, и диференцијабилност вектор-функције се своди на диференцијабилност координатних функција. Интересантно је, међутим, да видимо шта у овом случају представља извод и шта је извод композиције пресликавања.

Дефиниција 2.23. Нека је $U \subset \mathbb{R}^m$ отворен и $\mathbf{x}_0 \in U$. Вектор-функција $F : U \to \mathbb{R}^n$ је *диференцијабилна у тачки* $\mathbf{x}_0$ ако постоји линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ такво да важи

$$F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = F(\mathbf{x}_0) + L\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}, \tag{11}$$

при чему под $\mathbf{o}(\mathbf{h})$ подразумевамо вектор-функцију $\mathbf{o}(\mathbf{h}) = (\alpha_1(\mathbf{h}), \dots, \alpha_n(\mathbf{h}))$, тако да је $\alpha_j = o(\mathbf{h})$, за $j = 1, \dots, n$. $\Diamond$

Сетимо се да је свако линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ дато са $L\mathbf{h} = A_L\mathbf{h}$, где је A_L матрица типа $n \times m$. Нека је $A_L = [a_{ij}]$ и $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_m)$. Запишимо једнакост (11) у координатама (тј. преко координатних функција $F = (f_1, \dots, f_n)$):

$$\begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \\ f_2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}_0) \\ f_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o(\mathbf{h}) \\ o(\mathbf{h}) \\ \vdots \\ o(\mathbf{h}) \end{bmatrix},$$

кад $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Видимо да је услов диференцијабилности (11) еквивалентан услову

$$f_j(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f_j(\mathbf{x}_0) + L_j\mathbf{h} + o(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0},\ j = 1, \dots, n \tag{12}$$

где су $L_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ линеарна пресликавања чије су матрице:

$$A_{L_j} = \begin{bmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Приметимо да једнакост (12) представља услов диференцијабилности функције f_j. И више, у поглављу 2 видели смо шта су матрице линеарних пресликавања A_{L_j}:

$$A_{L_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}.$$

Одавде и из (13) закључујемо да је $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, тј. да је матрица A_L једнака

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Дефиниција 2.24. Матрицу A_L из једначине (14) зовемо *матрицом извода вектор-функције F у тачки* $\mathbf{x}_0$ или *Јакобијевом матрицом* вектор-функције F у тачки $\mathbf{x}_0$. Линеарно пресликавање L из (11) називамо *изводом вектор-функције F у тачки* $\mathbf{x}_0$ и означавамо са $dF(\mathbf{x}_0)$ или $F'(\mathbf{x}_0)$ или $\frac{dF}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$. ♢

Задатак 2.25. Наћи Јакобијеву матрицу пресликавања $F(x,y) := (x^3 + y^2, \ln(xy), e^{x+y})$ у тачки $(1,1)$ и пресликавања $G(x,y,z) := (xz-3y+1, \sin(x+2z)+\cos(xz))$ у тачки $(\pi, 3, 0)$. ✓

Пример 2.26. Ако је $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линеарно пресликавање, онда је његов извод у свакој тачки баш то пресликавање, тј. $dF(\mathbf{x}) = F$ за свако $\mathbf{x}$, односно, извод му је константан. Заиста, како је

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - F(\mathbf{x}) = F\mathbf{h} = F\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}),$$

кад $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, то је линеарно пресликавање L из израза (11) баш једнако F. Ово је аналогија чињенице да је извод линеарног пресликавања из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$ константна функција. ✓

Задатак 2.27. Доказати трвђење из претходног примера помоћу експлицитног записа пресликавања F и његове Јакобијеве матрице. ✓

Дефиниција 2.28. Ако је $m = n$, онда се детерминанта Јакобијеве матрице (14) назива *јакобијан* пресликавања F у тачки $\mathbf{x}_0$ и означава са $J_F(\mathbf{x}_0)$. Дакле

$$J_F(\mathbf{x}_0) = \det dF(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix}. \tag{15}$$

♢

Пример 2.29. Нађимо јакобијан преликавања

$$F(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Како је $f_1(r,\theta) = r\cos\theta$, а $f_2(\rho,\theta) = r\sin\theta$, то је

$$\frac{\partial f_1}{\partial r} = \cos\theta, \quad \frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \quad \frac{\partial f_2}{\partial r} = \sin\theta, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = r\cos\theta,$$

па је

$$J_F = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Пресликавање F заправо представља везу између Декартових и поларних координата и биће нам од велике важности у глави 3, код поларне смене у двоструком интегралу. ✓

2.4. Извод сложене функције

У случају функција једне променљиве, извод композиције је био производ извода (у одговарајућим тачкама):

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

У случају вектор-функција више променљивих, извод у тачки је линеарно пресликавање, па ће извод сложене функције бити композиција одговарајућих линеарних пресликавања. Ако линеарно пресликавање поистоветимо са матрицом, добијамо да је извод композиције производ одговарајућих матрица.

Теорема 2.30. *Нека су $A\subset\mathbb{R}^m$, $B\subset\mathbb{R}^n$ отворени, $F: A\to\mathbb{R}^n$, $G: B\to\mathbb{R}^k$, $\mathbf{x}_0\in A$, $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0\in B$. Ако је пресликавање F диференцијабилно у $\mathbf{x}_0$, а пресликавање G диференцијабилно у $\mathbf{y}_0$, онда је и пресликавање $G\circ F$ диференцијабилно у $\mathbf{x}_0$ и његов извод се рачуна по правилу:*

$$d(G\circ F)(\mathbf{x}_0) = dG(\mathbf{y}_0)\circ dF(\mathbf{x}_0). \tag{16}$$

Доказ. Означимо са $\mathbf{k} := F(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - \mathbf{y}_0$, тј. нека је $F(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = \mathbf{y}_0+\mathbf{k}$. Због непрекидности функције F у $\mathbf{x}_0$, имамо да $\mathbf{k}\to\mathbf{0}$, кад $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$. Напишимо разлику прираштаја пресликавања $G \circ F$:

$$\begin{aligned}
&G \circ F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - G \circ F(\mathbf{x}_0) = G(F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})) - G(F(\mathbf{x}_0)) = \\
&G(\mathbf{y}_0 + \mathbf{k}) - G(\mathbf{y_0}) \overset{(\heartsuit)}{=} dG(\mathbf{y}_0)\mathbf{k} + \mathbf{o}(\mathbf{k}) = \\
&dG(\mathbf{y}_0)[F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{y}_0] + \mathbf{o}(F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{y}_0) = \\
&dG(\mathbf{y}_0)[F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)] + \mathbf{o}(F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)) \overset{(\clubsuit)}{=} \\
&dG(\mathbf{y}_0)[dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h})] + \mathbf{o}(dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h})) = \\
&dG(F(\mathbf{x}_0))dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \underbrace{dG(\mathbf{y}_0)\mathbf{o}(\mathbf{h}) + \mathbf{o}(dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}))}_{\mathbf{a}(\mathbf{h})}, \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Једнакост ($\heartsuit$) важи јер је G диференцијабилна у $\mathbf{y}_0$, а једнакост ($\clubsuit$) јер је F диференцијабилна у $\mathbf{x}_0$. Остало је да проверимо да је израз $\mathbf{a}(\mathbf{h}) = \mathbf{o}(\mathbf{h})$. У то није тешко поверовати, јер су $dG(\mathbf{y}_0)$ и $dF(\mathbf{x}_0)$ линеарна пресликавања (ово је аналогија правила $c \cdot o(f(x)) = o(f(x))$ и $o(c \cdot f(x)) = o(f(x))$ у случају једне променљиве). Зато овај технички детаљ доказујемо у додатку, на страни 123.
□

Напомена 2.31. Посматрајмо Јакобијеве матрице које одговарају линеарним пресликавањима $d(G \circ F)(\mathbf{x}_0)$, $dG(F(\mathbf{x}_0))$, $dF(\mathbf{x}_0)$. Како је матрица која одговара композицији линеарних пресликавања једнака производу одговарајућих матрица, имамо:

$$d(G \circ F)(\mathbf{x}_0) = dG(F(\mathbf{x}_0)) \cdot dF(\mathbf{x}_0). \tag{18}$$

◇

Последица 2.32. (Извод инверзне функције) *Нека је $U \subset \mathbb{R}^n$ и $F : U \to \mathbb{R}^n$ и нека је $G = F^{-1}$ њена инверзна функција (дефинисана на некој кугли са центром у тачки $\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)$). Ако су F и G диференцијабилне, тада је*

$$dG(F(\mathbf{x}_0)) = dF(\mathbf{x}_0)^{-1}.$$

Доказ. Нека је $F(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$. Како је $F \circ G = \mathrm{Id}$ и $G \circ F = \mathrm{Id}$, где је $\mathrm{Id}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, и како је $d(\mathrm{Id}) = E$, где је E јединична матрица (видети пример 2.26 на страни 21), то, због теореме 2.30 имамо

$$dF(\mathbf{x}_0) \cdot dG(\mathbf{y}_0) = E, \quad dG(\mathbf{y}_0) \cdot dF(\mathbf{y}_0) = E,$$

одакле следи тврђење. □

Пример 2.33. Нека $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ и $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и нека је $g := f \circ \mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Изведимо формулу за извод функције g из формуле (18). Овде је

$$df = \begin{bmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \end{bmatrix}, \quad d\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix},$$

па је

$$g' = f'_x x' + f'_y y' + f'_z z'. \tag{19}$$

Формула (19) се зове и *правило ланца.* ✓

Задатак 2.34. Написати формулу (правило ланца) за g'_u, g'_v, ако је $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g = f \circ F$, за

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ F : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

✓

Тангенте и тангентне равни

Дефиниција 2.35. Нека је $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$ диференцијабилно преликавање, где је $I \subseteq \mathbb{R}$ неки интервал. Пресликавање $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ се зове и *крива у простору.* Некад под кривом подразумевамо и скуп у $\mathbb{R}^3$ који је слика интервала I при пресликавању $\mathbf{r}$. Непрекидно-диференцијабилне криве зовемо и *глатким* кривама. Кажемо да је права t *тангента на криву* $\mathbf{r}$ у тачки $\mathbf{a} = \mathbf{r}(t_0)$ ако пролази кроз $\mathbf{a}$, а вектор правца јој је $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. Да би ова дефиниција имала смисла, неопходно је да извод $\mathbf{r}'(t_0)$ буде различит од нула-вектора. Криве за које ово важи називамо и *регуларним у тачки* t_0. ♢

Пример 2.36. Нека је $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2t)$. Ова крива је регуларна у свакој тачки јер је

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 2), \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5} \neq 0.$$

Тангента у тачки $\mathbf{r}(\pi)$ је дата једначинама:

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 2\pi}{2}.$$

✓

Дефиниција 2.37. *Регуларна површ* у простору је скуп

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\},$$

где је функција $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *регуларна* на скупу $\mathcal{P}$, што (по дефиницији) значи да је[4] $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, за свако $\mathbf{a} \in \mathcal{P}$. ♢

Касније ћемо видети још неке описе регуларних површи.

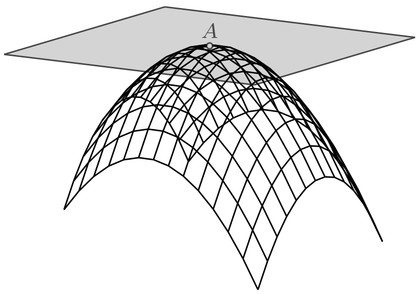
[4]Градијент функције три промењљиве је $\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z)$.

Пример 2.38. Јединична сфера $\mathbb{S}^2 := \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ је регуларна површ: приметимо да је $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$, при чему је $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$. Како је

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) = (0,0,0) \iff (x,y,z) = (0,0,0),$$

а тачка $(0,0,0)$ не припада сфери $\mathbb{S}^2$, то је f регуларна на $\mathbb{S}^2$, па је сфера регуларна површ. ✓

Дефиниција 2.39. Нека је $\mathcal{P}$ регуларна површ. Унија свих тангенти на све криве $\mathbf{r}$ које пролазе кроз тачку $\mathbf{a} \in \mathcal{P}$ и које припадају површи $\mathcal{P}$ називамо *тангентном равни у тачки* $\mathbf{a}$ *на површ* $\mathcal{P}$. $\Diamond$



Слика 2.1: Тангентна раван површи

Тврђење 2.40. Нека је $\mathcal{P} = \{f(x,y,z) = 0\}$ регуларна површ, и нека је $\mathbf{a} = \mathbf{r}(t_0)$, а крива $\mathbf{r}$ припада површи $\mathcal{P}$. Тада је $\nabla f(\mathbf{a}) \perp \mathbf{r}'(t_0)$.

Доказ. Услов да крива $\mathbf{r}$ припада површи $\mathcal{P}$ се изражава једнакошћу

$$f(\mathbf{r}(t)) = 0, \quad \forall t.$$

Нађимо извод последње једнакости у $t = t_0$, помоћу правила ланца (19):

$$f'_x(\mathbf{a})x'(t_0) + f'_y(\mathbf{a})y'(t_0) + f'_z(\mathbf{a})z'(t_0) = 0.$$

Приметимо да је лева страна последње једнакости управо скаларни производ $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$, одакле следи тврђење. $\square$

Из претходног тврђења следи да тангенте у $\mathbf{a}$ на све криве које припадају површи $\mathcal{P}$ леже у равни кроз $\mathbf{a}$ са вектором нормале $\nabla f(\mathbf{a})$. Може се доказати и да унија свих оваквих тангенти заиста чини раван ако је површ регуларна (овде то нећемо радити). Дакле, важи следеће тврђење.

Тврђење 2.41. Ако је површ $\mathcal{P} = \{f(x,y,z) = 0\}$ регуларна у тачки $\mathbf{a}$, онда је њена тангентна раван у $\mathbf{a}$ заиста раван, чији је вектор нормале $\nabla f(\mathbf{a})$. □

Напомена 2.42. Тангентну раван на $\mathcal{P}$ у тачки $\mathbf{a}$ означавамо и са $T_{\mathbf{a}}\mathcal{P}$. ◇

Задатак 2.43. Које од површи другог реда имају тангенту раван у свакој тачки, а које немају, и у којим тачкама? ✓

Задатак 2.44. Доказати да је вектор нормале на тангентну раван на сферу $\mathbb{S}^2$ у тачки $\mathbf{a}$ колинеаран са вектором $\mathbf{a}$. Наћи једначину тангентне равни на сферу $\mathbb{S}^2$ у тачки $\mathbf{a}\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. ✓

Напомена 2.45. Некада је крива у простору задата као пресек две површи $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ (нпр. круг је пресек равни и сфере). На који начин можемо да нађемо једначину тангенте у некој тачки $\mathbf{a}$, ако не умемо да нађемо експлицитну једначину криве? Пошто тражена тангента припада обема тангентним равнима $T_{\mathbf{a}}\mathcal{P}_1$ и $T_{\mathbf{a}}\mathcal{P}_2$, то је она једнака њиховом пресеку $t = T_{\mathbf{a}}\mathcal{P}_1 \cap T_{\mathbf{a}}\mathcal{P}_2$. ◇

Пример 2.46. Нађимо једначину тангенте на криву која се добија као пресек параболоида $\mathcal{P} = \{x^2 + y^2 = z\}$ и сфере $\mathcal{S} = \{(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ у тачки $\mathbf{a} = (0,0,0)$. Нека је $f(x,y,z) := x^2 + y^2 - z$, а $g(x,y,z) := (x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1$. Тада је

$$\begin{aligned} &\nabla f = (2x, 2y, -1), \quad &&\nabla g = (2(x-1), 2y, 2z), \\ &\nabla f(\mathbf{a}) = (0,0,-1), \quad &&\nabla g(\mathbf{a}) = (-2,0,0). \end{aligned}$$

Како је вектор пресечне праве ортогоналан на нормале обе равни, то њега можемо да израчунамо као векторски производ тих нормала: $\mathbf{t} = (0,0,-1) \times (-2,0,0) = (0,2,0)$. Зато су једначине тражене тангенте дате са $\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$. ✓

2.5. Изводи вишег реда

Дефиниције и примери

Нека је $f(x,y)$ функција две реалне променљиве која има парцијалне изводе $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$. Тада су и $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ функције две реалне променљиве, па има смисла говорити и о њиховим парцијалним изводима.

Дефиниција 2.47. *Парцијални изводи другог реда* функције f су парцијални изводи функција $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, у ознаци:

$$f''_{xx} := (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad f''_{xy} := (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$
$$f''_{yx} := (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad f''_{yy} := (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$\diamondsuit$

Користе се и ознаке $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
Изводи f''_{xy} и f''_{yx} се зову *мешовити* парцијални изводи.
Јасно је како бисмо дефинисали парцијалне изводе трећег и вишег реда.

Пример 2.48. Нека је $f(x,y) = x^2(2y+1) + e^{2x}y$. Нађимо изводе другог реда функције f. Како је

$$f'_x = 2x(2y+1) + 2e^{2x}y, \quad f'_y = 2x^2 + e^{2x},$$

то је

$$\begin{array}{ll} f''_{xx} = 2(2y+1) + 4e^{2x}y, & f''_{yx} = 4x + 2e^{2x}, \\ f''_{xy} = 4x + 2e^{2x}, & f''_{yy} = 0. \end{array}$$

Приметимо да је $f''_{xy} = f''_{yx}$ (ово није случајност). ✓

Задатак 2.49. Наћи мешовите изводе трећег реда функције f из претходног задатка: f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{yxx}, f'''_{xyy}, f'''_{yxy} и f'''_{yyx}. Који су међу њима једнаки?
✓

Тврђење 2.50. Ако функција f има дефинисане мешовите парцијалне изводе f''_{xy} и f''_{yx} у некој отвореној кугли са центром у тачки (x_0, y_0) и ако су они непрекидни у тачки (x_0, y_0), тада су они и једнаки у тој тачки.

Доказ претходног тврђења се изводи помоћу Лагранжеве теореме о средњој вредности, два пута примењене на погодно изабране функције. Пошто смо сличну идеју већ видели у доказу довољног услова диференцијабилности (тврђење 2.20), доказ дајемо у додатку, на страни 124.

Комутативност мешовитих извода не мора да важи увек. Пример функције за коју је $f''_{xy} \neq f''_{yx}$ дајемо у додатку, на страни 125.

Напомена 2.51. Јасно је како дефинишемо изводе вишег реда функција више од две реалне променљиве: ако је f функција од n реалних променљивих $(x_1, \ldots, x_n)$, тада је

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Осим ових, користимо и ознаке $f''_{x_i x_j}$ или само f''_{ij}. $\diamond$

Дефиниција 2.52. Квадратну матрицу

$$\begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(A) & f''_{x_1x_2}(A) & \cdots & f''_{x_1x_n}(A) \\ f''_{x_2x_1}(A) & f''_{x_2x_2}(A) & \cdots & f''_{x_2x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(A) & f''_{x_nx_2}(A) & \cdots & f''_{x_nx_n}(A) \end{bmatrix}$$

називамо *матрицом другог извода функције* f *у тачки* A или *хесијаном функције* f *у тачки* A и означавамо са $d^2f(A)$, $D^2f(A)$ или $Hf(A)$. $\diamondsuit$

Приметимо да је, ако f задовољава услове тврђења 2.50, матрица $d^2f(A)$ симетрична.

Тејлоров полином

Дефиниција 2.53. Нека функција f две променљиве има све парцијалне изводе до реда n који су непрекидне функције. *Тејлоров полином* степена n функције f у тачки (x_0, y_0) је полином (по h и k):

$$P_n(x_0,y_0)(h,k) := f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\right) +$$
$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2\right) + \ldots +$$
$$\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0,y_0)h^{n-j}k^j.$$

$\diamondsuit$

Задатак 2.54. Написати трећи и четврти члан Тејлоровог полинома. ✓

Задатак 2.55. Написати Тејлоров полином степена три функције $f(x,y) = x^y$ у околини тачке $(1,1)$. ✓

Дефиниција 2.56. Разлика

$$R_n(x_0,y_0)(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - P_n(x_0,y_0)(h,k)$$

се назива *остатком у Тејлоровој формули.* $\diamondsuit$

Теорема 2.57. *Нека функција* f *две променљиве има непрекидне све парцијалне изводе до реда* $n+1$ *у некој отвореној кугли* $B((x_0,y_0),r)$ *са центром у тачки*[5] (x_0, y_0)*. Тада је остатак Тејлоровог полинома*

$$R_n(x_0,y_0)(h,k) = o(\|(h,k)\|^n),$$

кад $(h,k) \to (0,0)$.

[5] Теорема важи и под слабијим претпоставкама.

Доказ. Нека је (h,k) такво да је $(x_0,y_0)+t(h,k)\in B((x_0,y_0),r)$ за свако $t\in[0,1]$. Из услова теореме следи да функција

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R};\quad \varphi(t):=f((x_0,y_0)+t(h,k))=f(x_0+th,y_0+tk)$$

има непрекидне изводе до реда $n+1$. Применимо на њу Тејлорову формулу у околини тачке $t_0=0$ са остатком у Лагранжевом облику (видети [**3**] или [**1**]):

$$\varphi(t)=\varphi(0)+\varphi'(0)t+\frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2+\ldots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(c)t^{n+1},\tag{20}$$

за неко c између 0 и t. Приметимо да је (као извод сложене функције):

$$\varphi'(t)=f'_x(x_0+th,y_0+tk)h+f'_y(x_0+th,y_0+tk)k,$$

па је:

$$\begin{aligned}&\varphi''(t)=f''_{xx}(x_0+th,y_0+tk)h^2+f''_{xy}(x_0+th,y_0+tk)hk+\\&f''_{yx}(x_0+th,y_0+tk)kh+f''_{yy}(x_0+th,y_0+tk)k^2=\\&f''_{xx}(x_0+th,y_0+tk)h^2+2f''_{xy}(x_0+th,y_0+tk)hk+f''_{yy}(x_0+th,y_0+tk)k^2.\end{aligned}$$

Индукцијом по m се може доказати да је[6]

$$\varphi^{(m)}(t)=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}(x_0+th,y_0+tk)h^{m-j}k^j.\tag{21}$$

Одавде следи

$$\varphi^{(n+1)}(c)=\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x_0+ch,y_0+ck)h^{n+1-j}k^j=o(\|(h,k)\|^n).\tag{22}$$

Последња једнакост важи јер је сваки од сабирака у суми

$$\binom{n+1}{j}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1-j}\partial y^j}(x_0+ch,y_0+ck)h^{n+1-j}k^j=o(\|(h,k)\|^n).$$

Да бисмо ово видели, довољно је да покажемо да је сваки $h^jk^{n+1-j}=o(\|(h,k)\|^n)$, јер су парцијални изводи по претпоставци непрекидни, дакле и ограничени на некој кугли са центром у (x_0,y_0).[7] Како је $|h|,|k|\leqslant\sqrt{h^2+k^2}=\|(h,k)\|$, то је

$$\left|\frac{h^jk^{n+1-j}}{\|(h,k)\|^n}\right|=\frac{|h|^j|k|^{n+1-j}}{\|(h,k)\|^n}\leqslant\frac{\|(h,k)\|^j\|(h,k)\|^{n+1-j}}{\|(h,k)\|^n}=\|(h,k)\|\to 0,$$

кад $(h,k)\to(0,0)$ па је $h^jk^{n+1-j}=o(\|(h,k)\|^n)$, $(h,k)\to(0,0)$. Ако у једначину (20) убацимо (21) за $t=1$, и искористимо (22), добијамо тврђење теореме. □

---

[6] Покушати, за вежбу. Упутство: видети доказ биномне формуле.

[7] Видети задатак 1.24 на страни 7.

Напомена 2.58. На сличан начин се дефинише Тејлоров полином функције m променљивих. Нека је $\mathbf{x}_0, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ и $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_m)$. Дефинишимо

$$P_n(\mathbf{x_0})(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^j f(\mathbf{x}_0),$$

при чему је[8]

$$\begin{aligned} &\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^j f(\mathbf{x}_0) := \\ &\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = j} \frac{j!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} h_1^{\alpha_1} \cdots h_m^{\alpha_m} \frac{\partial^j f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} (\mathbf{x}_0). \end{aligned} \tag{23}$$

Може се доказати, исто као и у случају функције две променљиве, да је, под одређеним претпоставкама, остатак у Тејлоровој формули:

$$R_n(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) := f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - P_n(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = o(\|\mathbf{h}\|^n).$$

$\diamond$

Задатак 2.59. Написати Тејлоров полином степена три функције три реалне променљиве. ✓

2.6. Локални екстремуми

Локални максимум или минумум функције више променљивих се дефинише слично као у случају једне.

Дефиниција 2.60. Нека је f функција више променљивих са доменом $D_f \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{x}_0 \in D_f$. Кажемо да је $\mathbf{x}_0$ тачка *локалног максимума* (*минимума*) ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$) за свако $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \cap D_f$. Кажемо да је $\mathbf{x}_0$ тачка *локалног екстремума* ако је тачка локалног максимума или минимума (видети слику 2.2 на страни 34). $\diamondsuit$

Локални екстремуми и диференцирање

У случају диференцијабилне функције f једне променљиве, ако је тачка x_0 тачка локалног екстремума (у унутрашњости интервала), тада важи $f'(x_0) = 0$. У случају функција више променљивих, важиће исто тврђење.

[8] Коефицијенти $\frac{j!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}$ у претходној формули су исти као и коефицијенти уз члан $a_1^{\alpha_1} \cdots a_m^{\alpha_m}$ у изразу $(a_1 + \ldots + a_m)^j$, одатле и ознака на левој страни (23).

Дефиниција 2.61. Кажемо да је тачка $\mathbf{x_0}$ *унутрашња тачка* скупа A ако постоји $r > 0$ такво да је $\mathbf{x}_0 \in B(\mathbf{x}_0, r) \subset A$. Скуп унутрашњих тачака скупа A се зове *унутрашњост* скупа A и означава са $\operatorname{int} A$.

Тврђење 2.62. Нека је тачка $\mathbf{x}_0$ унутрашња тачка домена функција f, и нека је f диференцијабилна у $\mathbf{x}_0$. Тада је $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, тј. $f'_{x_j}(\mathbf{x}_0) = 0$ за свако $j = 1, \dots, n$.

Доказ. Ради једноставности записа, доказаћемо тврђење за случај функције две променљиве (у случају више променљивих доказ је потпуно исти). Ако је у тачки (x_0, y_0), нпр, локални максимум функције f, тада је $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ за свако $(x, y) \in B((x_0, y_0), \varepsilon)$, па је, специјално и $f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$, за $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, тј. функција једне променљиве

$$\varphi(x) := f(x, y_0)$$

има локални максимум у x_0. Како је φ диференцијабилна у x_0, то је $\varphi'(x_0) = 0$. Али

$$\varphi'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) = 0,$$

и тиме је тврђење доказано. □

Дефиниција 2.63. Тачка $\mathbf{x}_0$ за коју важи $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ се зове *критична* или *стационарна* тачка. ♢

Претходно тврђење нам даје потребне, али не и довољне услове да тачка буде локални екстремум: нпр, за $f(x, y) = x^3 + y^3$ тачка $(0, 0)$ jесте стационарна, али није тачка локалног екстремума (исто као што је, у случају функције једне променљиве, нула стационарна, али не и тачка екстремума функције $x \mapsto x^3$). Као и у случају функција једне променљиве, постоји критеријум који укључује и други извод, и који даје довољне услове да тачка буде локални екстремум. Да бисмо га формулисали, потребно је прво да уведемо неке појмове.

Дефиниција 2.64. *Квадратна форма* је пресликавање $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ облика

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_j x_i.$$

♢

Пример 2.65. $q_1(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $q_2(x, y, z) = x^2 - xy + 2yz + z^2$, $q_3(x, y) = x^2 + y^2$, $q_4(x, y, z) = -(x + y)^2 - x^2 - (z - y)^2$ су примери квадратних форми две или три променљиве. ✓

Напомена 2.66. Свакој симетричној квадратној матрици $A = [a_{ij}]$ можемо да придружимо квадратну форму q_A, $q_A(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i,j} a_{ij} x_j x_i$. И обратно, свакој квадратној форми $q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_j x_i$ можемо придружити симетричну матрицу коефицијената $A_q = [\alpha_{ij}]$, где је $\alpha_{ii} := a_{ii}$, а $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$. Ову матрицу зовемо *матрицом квадратне форме* q. $\diamond$

Напомена 2.67. Свака квадратна форма је одређена својим вредностима на јединичној сфери:

$$\mathbf{S}^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Заиста, за сваки ненула вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, вектор $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ је јединични, па, како је $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left(\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|}, \dots, \frac{x_n}{\|\mathbf{x}\|}\right)$, то је

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \|\mathbf{x}\|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|} \frac{x_j}{\|\mathbf{x}\|} = \|\mathbf{x}\|^2 q\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right).$$

$\diamond$

Дефиниција 2.68. Квадратна форма q је:

- *позитивно полудефинитна* ако је $q(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ за свако $(x_1, \dots, x_n)$;
- *негативно полудефинитна* ако је $q(x_1, \dots, x_n) \leqslant 0$ за свако $(x_1, \dots, x_n)$;
- *позитивно дефинитна* ако је $q(x_1, \dots, x_n) > 0$ за свако $(x_1, \dots, x_n)$ различито од $(0, \dots, 0)$;
- *негативно дефинитна* ако је $q(x_1, \dots, x_n) < 0$ за свако $(x_1, \dots, x_n)$ различито од $(0, \dots, 0)$;
- *променљивог знака* ако је $q(x_1, \dots, x_n) < 0$ за неко $(x_1, \dots, x_n)$, а $q(y_1, \dots, y_n) > 0$ за неко $(y_1, \dots, y_n)$. $\Diamond$

Пример 2.69. Квадратна форма q_1 из примера 2.65 је позитивно полудефинитна јер је $q_1(x, y) = (x + y)^2 \geqslant 0$, а није позитивно дефинитна јер је $q_1(1, -1) = 0$. Форма q_2 је променљивог знака јер је $q_2(1, 2, 0) = -1$, а $q_2(1, 0, 0) = 1$. Квадратне форме q_3 и q_4 су (строго) дефинитне, и то q_3 позитивно, а q_4 негативно. ✓

Наводимо сада довољне услове за локални екстремум.

Тврђење 2.70. Нека функција f има непрекидне парцијалне изводе до реда 3, у некој кугли са центром у $\mathbf{x}_0$ и нека је $\mathbf{x}_0$ стационарна тачка. Означимо са q квадратну форму придружену матрици другог извода у тачки $\mathbf{x}_0$, $d^2 f(\mathbf{x}_0)$. Тада важи:

(1) Ако је q позитивно дефинитна, тада је тачка $\mathbf{x}_0$ тачка локалног минимума;
(2) Ако је q негативно дефинитна, тада је тачка $\mathbf{x}_0$ тачка локалног максимума;

(3) Ако је q промењљивог знака, тада у тачки $\mathbf{x}_0$ није локални екстремум.

Доказ. Развијмо f у Тејлоров полином другог степена у околини тачке $\mathbf{x}_0$. Нека је $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$. Имамо:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(\mathbf{x}_0)h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)h_i h_j + o(\|\mathbf{h}\|^2), \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Како је тачка $\mathbf{x}_0$ стационарна, тј. $f'_{x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$, биће:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)h_i h_j + o(\|\mathbf{h}\|^2).$$

Приметимо да, као у напомени 2.67, израз на десној страни претходне једнакости можемо да напишемо као

$$\|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)\frac{h_i}{\|\mathbf{h}\|}\frac{h_j}{\|\mathbf{h}\|} + o(1) \right),$$

при чему је вектор $\left(\frac{h_1}{\|\mathbf{h}\|}, \dots, \frac{h_n}{\|\mathbf{h}\|}\right)$ елемент јединичне сфере $\mathbb{S}^{n-1}$. Како је $\mathbb{S}^{n-1}$ затворен и ограничен скуп (дакле, компактан), а функција q непрекидна, то, на основу теореме 1.33, функција q достиже свој максимум и минимум на $\mathbb{S}^{n-1}$. Означимо са

$$m = \min_{\mathbb{S}^{n-1}} q = q(\mathbf{x}_{\min}), \quad M = \max_{\mathbb{S}^{n-1}} q = q(\mathbf{x}_{\max}).$$

(1) Ако је q позитивно дефинитна, онда је $m = q(\mathbf{x}_{\min}) > 0$, па имамо

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f''_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)\frac{h_i}{\|\mathbf{h}\|}\frac{h_j}{\|\mathbf{h}\|} + o(1) \right) =$$

$$\|\mathbf{h}\|^2 \frac{1}{2} q\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) + o(1) \geqslant \|\mathbf{h}\|^2 \left(\frac{1}{2}m + o(1)\right) > 0,$$

за довољно мало $\|\mathbf{h}\|$, јер $o(1)$ тежи нули кад $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Закључујемо да је у $\mathbf{x}_0$ локални минимум.

(2) Исто као претходно.

(3) Нека су $\mathbf{h_0}$ и $\mathbf{k_0}$ такви да је

$$a := q(\mathbf{h_0}) > 0, \quad b := q(\mathbf{k_0}) < 0.$$

Приметимо (исто као у напомени 2.67) да је тада, за свако ε, $q(\varepsilon\mathbf{h_0}) = \varepsilon^2 a > 0$, и слично $q(\varepsilon\mathbf{k_0}) = \varepsilon^2 b < 0$. Имамо

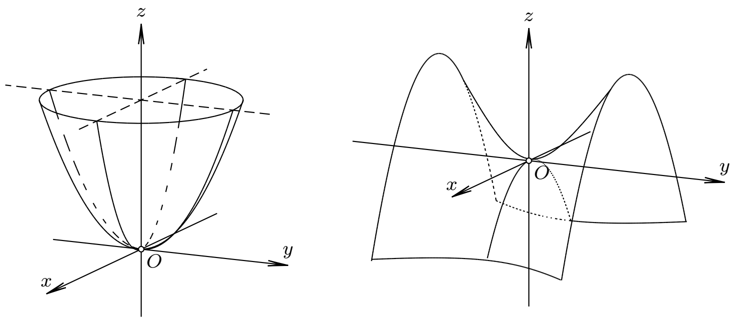
$$f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{h_0}) - f(\mathbf{x}_0) = \varepsilon^2 a + o(\varepsilon^2) = \varepsilon^2(a + o(1)) > 0, \quad \text{за довољно мало } \varepsilon,$$

и, слично

$$f(\mathbf{x}_0 + \varepsilon \mathbf{k_0}) - f(\mathbf{x}_0) < 0, \quad \text{за довољно мало } \varepsilon.$$

Одавде следи да не постоји кугла на којој је $f(\mathbf{x}_0)$ веће или једнако, а ни мање или једнако, од $f(\mathbf{x})$, тј. $\mathbf{x}_0$ није тачка локалног екстремума. □

Дефиниција 2.71. Ако је $\mathbf{x}_0$ стационарна тачка, али у свакој њеној околини постоје тачке у којима f узима и веће и мање вредности од $f(\mathbf{x}_0)$, онда $\mathbf{x}_0$ називамо и *тачком седла* или *седлом*[9] (видети слику 2.1). ◊



Слика 2.2: Минимум и седло

У случају квадратне форме две променљиве, наводимо један оперативни тест дефинитности квадратне форме.

Тврђење 2.72. Нека је $A_q = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ симетрична матрица придружена квадратној форми q. Тада важи:

(i) ако је $a > 0$, $\det A_q = ac - b^2 > 0$, форма q је позитивно дефинитна;
(ii) ако је $a < 0$, $\det A_q > 0$, форма q је негативно дефинитна;
(iii) ако је $\det A_q < 0$, форма q је променљивог знака.

Доказ. Нека је $a \neq 0$. Имамо:

$$\begin{aligned} q(h,k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 &= a\left(h^2 + 2h\frac{bk}{a} + \frac{b^2k^2}{a^2}\right) - a\frac{b^2k^2}{a^2} + ck^2 \\ &= a\left(\left(h + \frac{bk}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}k^2\right). \end{aligned} \tag{24}$$

[9] Сетимо се изгледа хиперболичког параболоида $z = f(x,y) = x^2 - y^2$, којем је, стационарна тачка $(0,0)$ седло.

(i) и (ii) Ако је $\det A_q = ac - b^2 > 0$, тада је очигледно, горња квадратна форма дефинитна, и то позитивно ако је $a > 0$, а негативно ако је $a < 0$.

(iii) Ако је $ac - b^2 < 0$, тада су вредности форме q у тачкама $\left(-\frac{b}{a}, 1\right)$ и $(1, 0)$ супротног знака (проверава се убацивањем у (24)).

Ако је $a = 0$ и $ac - b^2 < 0$, онда је $b \neq 0$. Квадратна форма има облик $q(h, k) = 2bhk + ck^2$. Ако је $c = 0$, она је очигледно променљивог знака, а ако је $c \neq 0$, имамо да је $q(c, b) = 3b^2c$, док је $q(c, -b) = -b^2c$. □

Пример 2.73. Пронађимо локалне екстремуме функције

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 1$$

на $\mathbb{R}^2$. Како су стационарне тачке решења система:

$$f'_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f'_y = x - 2y - 2 = 0,$$

добијамо само једну стационарну тачку, $(-2, -2)$. Матрица другог извода у тачки $(-2, -2)$ је

$$d^2 f(-2, -2) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

тј. $a = c = -2$, $b = 1$. На основу тврђења 2.72, како је $a < 0$, $ac - b^2 = 3 > 0$, закључујемо да је форма другог извода негативно дефинитна, па f има локални максимум у $(-2, -2)$. ✓

Напомена 2.74. Приметимо да у случају у ком је форма $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ полудефинитна, претходно тврђење не даје одговор. Заиста, нека је $f(x, y) = x^2 + y^3$. Стационарна тачка је решење система $f'_x = f'_y = 0$, тј. то је тачка $(0, 0)$, док је матрица другог извода у $(0, 0)$:

$$d^2 f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Њој придружена форма је $q(h, k) = 2h^2$ која је позитивно полудефинитна. Међутим, f не достиже ни максимум ни минимум у $(0, 0)$, јер је $f(0, \varepsilon) = \varepsilon^3 > 0$, $f(0, -\varepsilon) = -\varepsilon^3 < 0$, за произвољно мало $\varepsilon > 0$.

На исти начин проверамо да функција $g(x, y) = x^2 + y^4$ има $(0, 0)$ за стационарну тачку, као и да је квадратна форма другог извода у $(0, 0)$ позитивно полудефинитна. Међутим, функција g очигледно у тачки $(0, 0)$ достиже строги минимум. ◇

Наводимо, без доказа, критеријум за испитивање дефинитности квадратне форме у случају више променљивих, познат и као Силвестеров критеријум.

Тврђење 2.75. Нека је $A = [a_{ij}]$ симетрична квадратна матрица и A_1, …, A_n њени *главни минори*:

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ A_3 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \dots, A_n = \det A.$$

Тада је

- форма q_A позитивно дефинитна ако и само ако су сви главни минори позитивни:
$$A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0;$$
- форма q_A негативно дефинитна ако и само ако главни минори наизменично мењају знак, с тим да је први негативан:
$$A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots, (-1)^n A_n > 0.$$

□

Задатак 2.76. Наћи локалне екстремуме функције три променљиве
$$f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y - y^3 + z^2.$$

✓

Условни екстремуми. Лагранжеви множиоци

Посматрајмо функцију f дефинисану на неком подскупу $S \subset \mathbb{R}^n$, који је дефинисан системом једначина
$$S := \{\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = \dots = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$
Циљ нам је да нађемо локалне екстремуме рестрикције $f|_S$.

Пример 2.77. Неке скупове већ знамо да опишемо једном или двема једначинама.

(1) Права у равни $\mathbb{R}^2$ је дефинисана једном једначином $\varphi(x, y) = 0$, где је $\varphi(x, y) = ax + by + c$.
(2) Елипса у равни је дефинисана једном једначином $\varphi(x, y) = 0$, где је $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$.
(3) Раван у $\mathbb{R}^3$ је дефинисана једном једначином $\varphi(x, y, z) = 0$, за $\varphi(x, y, z) = ax + bx + cz + d$.
(4) Јединична сфера у $\mathbb{R}^3$ је дефинисана једном једначином $\varphi(x, y, z) = 0$, где је $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
(5) Права у простору је дефинисана двема једначинама $\varphi_1(x, y, z) = \varphi_2(x, y, z) = 0$, за $\varphi_1(x, y, z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1$, $\varphi_2(x, y, z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$.

Приметимо да су једнодимензиони објекти (праве, криве) дефинисани једном једначином у равни, а двема једначинама у простору, док су дводимензиони објекти (равни, површи) у простору дефинисани само једном једначином. Ово је углавном[10] правило: број једначина k плус димензија објекта једнако је броју променљивих n. Овде димензију објекта можемо да схватимо као број параметара који учествују у параметарској једначини објекта: праву и криву и у равни и у простору можемо да параметризујемо једним параметром, док раван и површи другог реда можемо да параметризујемо помоћу два параметра. О овоме ће још бити речи касније. ✓

Дефиниција 2.78. Функција f има *условни локални максимум (минимум)* на скупу S у тачки $\mathbf{x}_0 \in S$ ако постоји $\varepsilon > 0$ такво да је $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$ ($f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$) за свако $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon) \cap S$. ♢

Дефиниција 2.79. Кажемо да су диференцијабилне функције $\varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$, *независне у тачки* $\mathbf{x}_0$ ако су вектори $\nabla\varphi_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, \ldots, k$, линеарно независни. ♢

Следећа теорема нам даје неопходне услове под којима је тачка локални екстремум рестрикције $f|_S$.

Теорема 2.80. *Нека је скуп S дефинисан једначинама*

$$S := \{\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = \ldots = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0\} \tag{25}$$

и нека су функције φ_j диференцијабилне и независне у свакој тачки $\mathbf{x} \in S$. Нека је функција f диференцијабилна на неком отвореном скупу који садржи S и нека је $\mathbf{x}_0$ тачка локалног екстремума рестрикције $f|_S$. Тада постоје реални бројеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, такви да је

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla\varphi_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla\varphi_k(\mathbf{x}_0). \tag{26}$$

Доказ. Доказаћемо теорему у случајевима $n = 3$, $k = 1$ (површ у простору) и $n = 3$, $k = 2$ (крива у простору), ради поједностављивања записа, као и зато што ове две слике можемо да замислимо (или нацртамо). Доказ у општем случају се не разликује суштински.

Нека је површ S у простору дата једначином $\varphi(x, y, z) = 0$. Услов линеарне независности овде значи да је вектор $\nabla\varphi(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ за свако $(x, y, z) \in S$, тј. да је површ регуларна. Нека је $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ тачка локалног екстремума функције $f|_S$ и нека је $\mathbf{r} : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ регуларна крива на површи S (тј. $\mathbf{r}(t) \in S$) која пролази кроз $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Из дефиниције условног локалног екстремума, и чињенице да је $\mathbf{r}(t) \in S$ следи

[10] Ако су функције φ_j независне у свакој тачки поменутог скупа, видети дефиницију 2.79.

да реална функција $f \circ \mathbf{r}$ има локални екстремум у тачки $t = t_0$. Како је $f \circ \mathbf{r}$ диференцијабилна, то је $(f \circ \mathbf{r})'(t_0) = 0$. То значи да је

$$0 = (f \circ \mathbf{r})'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0),$$

тј. да су вектори $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{r}'(t_0)$ ортогонални. Како ово важи за сваку регуларну криву $\mathbf{r}$ која припада површи S и пролази кроз $\mathbf{x}_0$, закључујемо да је $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ ортогоналан на тангентну раван $T_{\mathbf{x}_0}S$. Али, како је $\nabla \varphi(\mathbf{x}_0)$ вектор нормале на раван $T_{\mathbf{x}_0}S$ (видети тврђење 2.41), и како је овај вектор различит од нула-вектора, то постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ такво да је $\nabla f(\mathbf{x_0}) = \lambda \nabla \varphi(\mathbf{x_0})$.

Нека је сада S крива у простору $\mathbb{R}^3$ дефинисана једначинама $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и нека је $\mathbf{r}(t)$ њена регуларна параметризација, тј. регуларна крива која припада површима $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$. Тада је $\mathbf{r}'(t_0) \perp \nabla \varphi_1(\mathbf{x}_0)$ и $\mathbf{r}'(t_0) \perp \nabla \varphi_2(\mathbf{x}_0)$ (тврђење 2.41). Претпоставимо да је $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{x}_0$ тачка локалног есктремума. Како диференцијабилна реална функција $f \circ \mathbf{r}$ има локални есктремум у тачки $t = t_0$, то је, исто као и малопре, $\nabla f(\mathbf{x}_0) \perp \mathbf{r}'(t_0)$. То значи да су вектори $\nabla \varphi_1(\mathbf{x}_0)$, $\nabla \varphi_2(\mathbf{x}_0)$ и $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ линеарно зависни (будући да су сви ортогонални на исти вектор), али, како су $\nabla \varphi_1(\mathbf{x}_0)$ и $\nabla \varphi_2(\mathbf{x}_0)$ линеарно независни, то постоје $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ такви да важи:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(\mathbf{x}_0) + \lambda_2 \nabla \varphi_2(\mathbf{x}_0).$$

□

Напомена 2.81. Бројеви $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ из претходне теореме се називају *Лагранжеви множиоци.* ◇

Напомена 2.82. Услове

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla \varphi_1 + \ldots + \lambda_k \nabla \varphi_k, \\ \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

можемо да заменимо једним:

$$\nabla F = 0, \tag{27}$$

где је F нова, помоћна функција $n + k$ промењљивих, коју дефинишемо са

$$\begin{aligned} &F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) := \\ &f(x_1, \ldots, x_n) - [\lambda_1 \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_k \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)]\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Векторска једначина (27) је уствари систем од $n + k$ једначина по $n + k$ непознатих: $x_1, \ldots, x_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Првих n једначина (парцијални изводи по x_j) представљају једначину (26), а последњих k (парцијални изводи по λ_j) – услов (25). Решавањем система (27) по x_j, λ_j, добијамо потенцијалне тачке локалних условних екстремума. ◇

Пример 2.83. Елипса $\mathcal{E}$ је дата као пресек равни $x+y+z=1$ и цилиндра $x^2+y^2=1$. Нађимо на њој тачку која је најближа координатном почетку и тачку која је од њега најудаљенија. Функција чији максимум и минимум тражимо је растојање

$$d(\mathbf{x},\mathbf{0})=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=:g(x,y,z),$$

међутим, како је корен монотона функција, то функције g и

$$f(x,y,z):=g^2(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$$

имају заједничке тачке максимума и минимума (а лакше ћемо тражити нуле извода ако немамо корен). Како је елипса $\mathcal{E}$ ограничен и затворен скуп, а функција f непрекидна, то се максимум и минимум достижу (теорема 1.33). Пронађимо, методом Лагранжевих множилаца, потенцијалне тачке локалних екстремума. Функције φ_1 и φ_2 које дефинишу скуп су овде:

$$\varphi_1(x,y,z)=x+y+z-1,\quad \varphi_2(x,y,z)=x^2+y^2-1,$$

па је помоћна функција F из (28):

$$F(x,y,z,\lambda,\mu):=x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+z-1)-\mu(x^2+y^2-1),$$

а њен градијент

$$\nabla F=(2x-\lambda-2\mu x,2y-\lambda-2\mu y,2z-\lambda,-(x+y+z-1),-(x^2+y^2-1)).$$

Потенцијалне тачке екстремне вредности добијамо решавањем система:

$$\begin{aligned}
&2x-\lambda-2\mu x=0,\\
&2y-\lambda-2\mu y=0,\\
&2z-\lambda=0,\\
&x+y+z-1=0,\\
&x^2+y^2-1=0.
\end{aligned}$$

Добијамо четири тачке на елипси које задовољавају овај систем:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1-\sqrt{2}\right),\quad B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2}\right),\quad C(1,0,0),\quad D(0,1,0).$$

Како је $f(A)=4-2\sqrt{2}$, $f(B)=4+2\sqrt{2}$, $f(C)=f(D)=1$, и како се (као што смо објаснили), максимум и минимум достижу, то су тачке C и D најближе координатном почетку, а тачка B је најудаљенија. ✓

На крају, наводимо без доказа и један критеријум помоћу којег можемо проверити да ли је стационарна тачка заиста тачка условног локалног екстремума (доказ се може наћи у [**2**]).

Тврђење 2.84. Нека је $\mathbf{x}_0 \in S$ стационарна тачка, тј. решење система (27). Посматрајмо квадратну форму $n-k$ променљивих

$$q(h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_n) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j,$$

при чему се, заправо, на десној страни горње једначине јављају само h_{k+1}, …, h_n, док се променљиве $h_1, \dots, h_k$ изражавају преко $h_{k+1}, \dots, h_n$ из система

$$d\varphi_j(\mathbf{x}_0)(h_1, \dots, h_n) = 0, \quad j = 1, \dots k.$$

Тада важи:

- Ако је форма q позитивно дефинитна, тада је $\mathbf{x}_0$ тачка условног локалног минимума функције f.
- Ако је форма q негативно дефинитна, тада је $\mathbf{x}_0$ тачка условног локалног максимума функције f.
- Ако је форма q променљивог знака, тада $\mathbf{x}_0$ није тачка условног локалног екстремума функције f. □

2.7. Задаци

1. Одредити све парцијалне изводе првог реда следећих функција:

а) $f(x,y) = 5xy + 6y - 10$;
б) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$;
в) $f(x,y,z) = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}$.

2. Доказати да $z = y\ln(x^2-y^2)$ задовољава једначину $\dfrac{1}{x}z'_x + \dfrac{1}{y}z'_y = \dfrac{z}{y^2}$.

3. Нека је $f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$. Одредити $f'_x(x,1)$ по дефиницији када тачка $(x,1)$ припада домену функције.

4. Нека је $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

а) Испитати непрекидност функције f.
б) Наћи парцијалне изводе $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$.
в) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

5. Нека је $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

а) Испитати непрекидност функције f.
б) Наћи извод функције f у сваком правцу кроз $(0,0)$.
в) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.
г) Наћи извод функције f у правцу вектора $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ кроз $(1,1)$.

6. Одредити Јакобијеву матрицу пресликавања

$$F(x,y) = (x^2+2y, e^{2x+3y}, \sqrt[3]{xy})$$

у тачки $(2,-1)$.

7. Трансформисати једначину $2z''_{xx} + z''_{xy} - z''_{yy} + z'_x + z'_y = 0$ узимајући да је $u = x+2y+2$, $v = x-y-1$ и $z = z(u,v)$.

8. Нека је $z(x,y)$ имплицитно задата једначином $x^3+yz^2-3xy^2 = 3$. Одредити z'_x, z'_y и z''_{xx} у тачки $(-1,1,1)$.

9. Одредити једначину тангентне равни на елипсоид $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ у тачки (x_0, y_0, z_0).

10. Одредити једначину тангентне равни на површ $z = x^2+4y^2$ у тачки $(2,1,8)$.

11. Нека је $f(x,y) = e^{2x}\sin(3y)$. Наћи Тејлоров полином трећег степена у околини тачке $A(0,0)$.

12. Нека је $z = z(x,y)$ имплицитно задата једначином $2x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + yz^2 = 0$, $z > 0$. Наћи Тејлоров полином другог степена функције $z(x,y)$ у околини тачке $A(0,2)$.

13. Одредити локалне екстремне вредности функције $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$.

14. Одредити локалне екстремне вредности функције $f(x,y) = x^4+y^4-2x^2$.

15. Одредити локалне екстремне вредности функције $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$.

16. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ на скупу $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant 0, y \leqslant 0, x + y + 5 \geqslant 0\}$.

17. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ на скупу $D = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

18. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y$ на скупу $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

19. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x,y,z) = x + y + z$ на скупу $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$.

20. У дату купу (r и H су задати) уписати квадар највеће запремине тако да једна страна лежи у основи купе.

2.8. Задаци за вежбу

21. Нека је $f(x,y) = e^{\frac{x^3}{y^2}}$.

а) Нека је D скуп тачака у којима се функција може додефинисати да буде непрекидна. Доказати да је $D = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 | x < 0\}$.

б) Израчунати f'_x и f'_y у тачкама скупа D.

22. Нека је функција $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y^3 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

а) Показати да $f'_y(0,0)$ не постоји.

б) Да ли је функција f диференцијабилна? Образложити.

23. Нека је $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$.

а) Одредити домен дате функције.

б) Испитати диференцијабилност функције f на домену.

24. Нека је $f(x,y) = x\sqrt[3]{1+y}$.

а) Одредити домен функције $f(x,y)$ и испитати непрекидност на домену.

б) Испитати диференцијабилност функције $f(x,y)$ на домену.

25. Нека je $f(x,y)=\begin{cases} (1-\cos\frac{x^2}{y})\sqrt{x^2+y^2}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$.

а) Испитати непрекидност функције f у тачки $(0,0)$.
б) Наћи извод функције f у сваком правцу кроз $(0,0)$.
в) Испитати диференцијабилност функције f у тачки $(0,0)$.

26. Нека je $f(x,y)=\sqrt[4]{(x+1)^4+(y-1)^4}$.

а) У којим тачкама постоје парцијални изводи првог реда функције $f(x,y)$?
б) У којим тачкама je $f(x,y)$ диференцијабилна?
в) Наћи извод функције $f(x,y)$ у правцу вектора $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ кроз $(0,1)$.

27. Нека je $f(x)=\begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$.

а) Да ли je дата функција непрекидна у свим тачкама домена?
б) Да ли je дата функција диференцијабилна у свим тачкама домена?
в) За које $\alpha\in\mathbb{R}$ важи $f_x'(0,\alpha)=f_y'(\alpha,\alpha^2)=\alpha$?

28. Нека je $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

а) Испитати непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.
б) Одредити f_x' и f_y' у свим тачкама у којима постоје.
в) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

29. Нека je $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

а) Испитати непрекидност функције f на $\mathbb{R}^2$.
б) Испитати диференцијабилност функције f на $\mathbb{R}^2$.

30. Нека je $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

а) Израчунати лимес $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$, а показати да $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ не постоје.
б) Израчунати парцијалне изводе f_x' и f_y' у свим тачкама у којима постоје.

31. Наћи тангентну раван на површ $z=\sin(x^2+y^2)$ у тачки $(\sqrt{\pi},0)$.

32. Одредити једначину тангентне равни на површ $\cos(\pi x)-x^2y+e^{xz}+yz=4$ у тачки $M(0,1,2)$.

33. Наћи једначину тангенте на криву која се добија као пресек конуса $x^2 + y^2 = z^2$ и хиперболоида $x^2 + y^2 - \frac{3}{4}z^2 = 1$ у тачки $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$.

34. Нека је $f(x, y) = (2x + y)e^{x+y}$. Наћи Тејлоров полином другог степена у околини тачке $A(1, 1)$.

35. Нека су $z = 4e^x \ln y$, $x = \ln u \cos v$ и $y = u \sin v$. Ирачунати $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$:

а) изражавајући z преко u и v;

б) користећи правило ланца.

36. Одредити локалне екстремуме функције $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

37. Одредити локалне екстремуме функције $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

38. Одредити локалне екстреме функције $z = f(x, y)$ задате са $z^3 + z^2y - x^2 - y^2 + 4x - 4 = 0$, $z \neq 0$.

39. Одредити најмању вредност функције $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2013$ на скупу $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 3\}$.

40. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ на скупу $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant x^2\}$.

41. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x, y) = xye^{-2x-3y}$ на квадрату $[0, 1] \times [0, 1]$.

42. Одредити најмању и највећу вредност функције $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{1-x^2-y^2}$ на скупу $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

43. Наћи минималну површину квадра ако је његова запремина 125.

44. На кривој $13x^2 + 13y^2 + 10xy - 72 = 0$ одредити тачке чија је удаљеност од координатног почетка најмања и највећа.

45. На сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ одредити тачку такву да је збир квадрата њених растојања од тачака $(1, 0, -1)$ и $(0, -1, -1)$ најмањи.

ГЛАВА 3

Двоструки и троструки интеграли

У Анализи 2 смо дефинисали интеграл функције на интервалу $[a, b]$, као граничну вредност збира површина малих правоугаоника, који су за основицу имали $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, а за висину вредност $f(\xi_j)$ функције f у некој тачки $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$. Двоструки и троструки интеграл ћемо дефинисати слично. Двоструки интеграл ће бити дефинисан за функције две променљиве, а троструки за функције три променљиве. Дужину основице малог правоуганика који је учествовао у дефиницији једноструког интеграла ћемо заменити површином малог правоугаоника у случају двоструког, тј. запремином малог квадра у случају троструког интеграла.

3.1. Двоструки интеграли

Интеграл на правоугаонику, дефиниција и израчунавање

Нека је функција f две променљиве дефинисана на правоугаонику $\Pi := [a, b] \times [c, d]$ (са вредностима у $\mathbb{R}$).

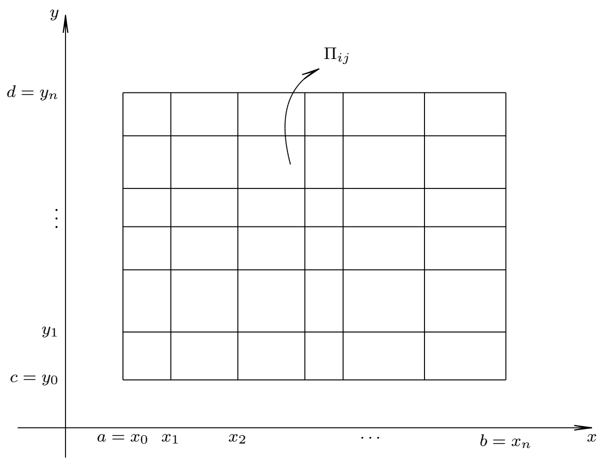
Подсетимо се да смо поделу интервала $[a, b]$ дефинисали као скуп $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Слично ћемо дефинисати поделу правоуганика у равни.

Дефиниција 3.1. Нека је $\Pi = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ и нека је

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d. \tag{29}$$

Означимо са Π_{ij} правоугаоник $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. *Подела* $\mathcal{P}$ правоугаоника Π је скуп правоугаоника

$$\{\Pi_{ij} \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}.$$



Слика 3.1: Подела правоугаоника Π

Дијаметар поделе $\mathcal{P}$ је вредност

$$\delta(\mathcal{P}) := \max\{|x_1 - x_0|, \ldots, |x_n - x_{n-1}|, |y_1 - y_0|, \ldots, |y_m - y_{m-1}|\}.$$

Подела са уоченим тачкама $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ правоугаоника Π је подела $\mathcal{P}$ заједно са скупом тачка $A_{ij} \in \Pi_{ij}$. $\Diamond$

Очигледно важи $\Pi = \bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}$.

Напомена 3.2. Приметимо да је задавање поделе $\mathcal{P}$ правоугаоника Π еквивалентно задавању скупа тачака

$$\{(x_i, y_j) \mid i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m\}\} \tag{30}$$

у равни таквих да важи (29), тако да ћемо под поделом некад подразумевати и скуп (30). $\diamond$

Дефиниција 3.3. *Интегрална сума* функције f која одговара подели $\mathcal{P}$ са уоченим тачкама је величина

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{A}) := \sum_{i,j} f(A_{ij}) \Delta_{ij},$$

где је

$$\Delta_{ij} := P(\Pi_{ij}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

површина правоугаоника Π_{ij}. $\Diamond$

Дефиниција 3.4. Ако постоји број $I \in \mathbb{R}$ такав да за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$, такво да, за произвољну поделу са уоченим тачкама за коју важи $\delta(\mathcal{P}) < \delta$, важи $|S(f, \mathcal{P}, \mathcal{A}) - I| < \varepsilon$, тада кажемо да је функција f *интеграбилна* на правоугаонику Π, а број I зовемо *двоструким интегралом* функције f на правоугаонику Π и пишемо

$$I = \iint_{\Pi} f(x, y) dx dy.$$

Број I зовемо и *лимесом у простору подела.* $\Diamond$

Напомена 3.5. У Анализи 2 смо учили да су све непрекидне функције интеграбилне, као и да су интеграбилне оне које „немају много тачака прекида” и чији су прекиди само прве врсте. За двоструки интеграл важи слично: ограничена функција је интеграбилна ако и само ако је њен скуп тачака прекида површине нула. $\diamond$

Напомена 3.6. Овде нисмо дали прецизну дефиницију површине. Јасно је како дефинишемо површину правоугаоника - као производ дужина страница. Нека је D подскуп равни садржан у правоуганику Π, и нека је Π подељен на мале правоуганике Π_{ij} као у дефиницији 3.1. Површину скупа D можемо да дефинишемо као лимес[1] сума

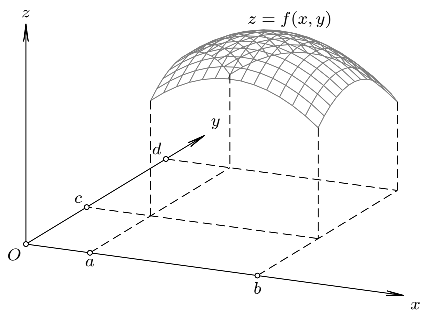
$$S(D, \mathcal{P}) := \sum \delta_{ij} P(\Pi_{ij}) \tag{31}$$

при чему је δ_{ij} једнако нули ако је $\mathbf{P}_{ij} \cap D \neq \emptyset$, а јединици иначе (тј. у суми (31) узимамо само оне правоугаонике који се секу са D).

Општија дефиниција површине (или *Лебегове мере*), која би нам омогућила да меримо велику класу скупова (укључујући веома необичне и неправилне), јесте доста сложена и овде је не наводимо, сматрајући да је наведена дефиниција површине довољна. Међутим, општа дефиниција скупа површине нула је доста једноставнија, и може се видети у [**2**] или [**4**]. $\diamond$

Напомена 3.7. Геометријска интерпретација двоструког интеграла је следећа. Нека је f позитивна функција. Тада је интегрална сума на правоугаонику $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ једнака збиру запремина малих квадара који за основицу имају површину Δ_{ij}, а за висину $f(A_{ij})$. Зато је двоструки интеграл запремина испод графика функције f дефинисане на правоугаонику Π (видети слику 3.2). $\diamond$

[1] у простору подела



Слика 3.2: Двоструки интеграл је запремина испод графика

Ако је функција f интеграбилна на правоугаонику Π, тада је интеграл $\iint_\Pi f(x,y)dxdy$ једнак лимесу низа

$$S_n(f,\Pi,\mathcal{A}) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}, c+j\frac{d-c}{n}\right).$$

Наиме, за поделу можемо узети правоугаонике који су добијени дељењем дужи $[a,b]$ и $[c,d]$ на n једнаких делова (дијаметар ове поделе очигледно тежи нули), а за тачке A_{ij} горњи десни угао правоугаоника Π_{ij}, тј. $A_{ij} := \big(a+i\frac{b-a}{n}, c+j\frac{d-c}{n}\big)$. Из линеарности лимеса низа[2] следе следећа својства интеграла.

Тврђење 3.8. (**Линеарност и монотоност интеграла**) Ако су функције f и g интеграбилне на правоугаонику Π, и $\lambda \in \mathbb{R}$, тада су и функције $f+g$ и λf интеграбилне и важи:

$$\iint_\Pi (f(x,y)+g(x,y))dxdy = \iint_\Pi f(x,y)dxdy + \iint_\Pi g(x,y)dxdy,$$
$$\iint_\Pi (\lambda f(x,y))dxdy = \lambda\iint_\Pi f(x,y)dxdy.$$

Ако је $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, тада је $\iint_\Pi f(x,y)dxdy \leqslant \iint_\Pi g(x,y)dxdy$. □

Као и у случају једне промењиве, интеграл ретко израчунавамо помоћу дефиниције. Вишеструке интеграле рачунамо тако што их сводимо на поновљене (ово је садржај следеће теореме). Пре свега, приметимо да израз $\int_a^b f(x,y)dx$

[2] и чињенице да је скуп тачака прекида функције $f+g$ садржан у унији скупова тачака прекида функција f и g

има разне вредности, за разне вредности y, тј. да га можемо схватити као функцију од y и слично за израз $\int_c^d f(x,y)dy$. Означимо

$$\alpha(y) := \int_a^b f(x,y)dx, \quad \beta(x) := \int_c^d f(x,y)dy. \tag{32}$$

Теорема 3.9. (Фубинијева теорема на правоугаонику) *Нека је функција f непрекидна на правоугаонику* Π. *Тада су, за фиксиране y и x функције*

$$\varphi_y(x) := f(x,y), \quad \psi_x(y) := f(x,y)$$

непрекидне на интервалима $[a,b]$ и $[c,d]$, а функције α и β дефинисане у (32) непрекидне на интервалима $[c,d]$ и $[a,b]$. При том важи:

$$\iint_\Pi f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy. \tag{33}$$

Напомена 3.10. Десне интеграле у једнакости (33) схватамо као поновљене, нпр. у интегралу $\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ прво рачунамо унутрашњи интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$, за y фиксирано, тј. рачунамо $\int_a^b \varphi_y(x)dx$. Резултат је функција по y, тј. $\alpha(y)$, коју затим интегралимо од c до d (и тако добијамо број као резултат). $\diamond$

Напомена 3.11. Формула (33) важи и под слабијим претпоставкама, када је функција f само интеграбилна на Π. $\diamond$

Доказ теореме 3.9 дајемо у додатку, на страни 125. Интуитивни доказ Фубинијеве теореме у општијем случају (када област интеграције није правоугаоник) дат је на страни 53.

Пример 3.12. Израчунајмо $\iint_\Pi (1-6x^2y)dxdy$, где је $\Pi = [0,2]\times[-1,1]$ и проверимо да се вредност интеграла не мења при замени поретка интеграције. С једне стране:

$$\iint_\Pi (1-6x^2y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_{-1}^1 (1-6x^2y)dy\right)dx =$$
$$\int_0^2 \left[y - 3x^2y^2\right]_{y=-1}^1 dx = \int_0^2 2dx = 4.$$

Ако израчунамо интеграл у другом поретку, имамо:

$$\iint_\Pi (1-6x^2y)dxdy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (1-6x^2y)dx\right)dy =$$
$$\int_{-1}^1 \left[x - 2x^3y\right]_{x=0}^2 dy = \int_{-1}^1 (2-16y)dy = 4.$$

$\square$

Интеграл по произвољном (мерљивом) скупу

Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ неки ограничен скуп. Хоћемо да дефинишемо интеграл функције f по скупу D. Посматрајмо његову *карактеристичну функцију*, тј. функцију $\chi_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дефинисану са

$$\chi_D(x,y) := \begin{cases} 1, & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Није тешко видети да су прекиди ове фукције управо тачке које припадају рубу ∂D. Као што смо споменули у напомени 3.5, нису само непрекидне функције интеграбилне, већ све оне које имају „мало” тачака прекида. Зато, уколико је руб скупа D површине (мере) нула, и ако је D садржан у неком правоугаонику Π, функција χ_D ће бити интеграбилна на правоугаонику Π. Овакве скупове зовемо *мерљивим*.

Пример 3.13. Већина скупова који нам падну на памет јесте мерљива. На пример, скупови $\{x^2 + (y-1)^2 < 5\}$, $\{\frac{x^2}{9} + (y+1)^2 \leqslant 4\}$, $\{|x| + |y| \leqslant 1\}$, $[0,5]\times[-2,-1]$ су мерљиви јер им је руб површине нула. Заправо, сви скупови који имају за руб део-по-део глатку границу јесу мерљиви. У додатку, на страни 127 је дат пример скупа који није мерљив. ✓

Ако је функција f непрекидна на правоугаонику Π, и $D \subset \Pi$ мерљив, тада је скуп тачака прекида функције $f \cdot \chi_D$ садржан у ∂D, дакле површине нула, па је функција $f \cdot \chi_D$ интеграбилна на правоугаонику Π. Приметимо да је

$$f(x,y) \cdot \chi_D(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D, \\ 0, & (x,y) \notin D. \end{cases}$$

Зато је природно дефинисати интеграл по D на следећи начин.

Дефиниција 3.14. Нека је $D \subset \Pi$ мерљив и f непрекидна. Тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Pi f(x,y)\chi_D(x,y)dxdy.$$

$\diamondsuit$

На исти начин се дефинише интеграл по мерљивом скупу D интеграбилне функције f.

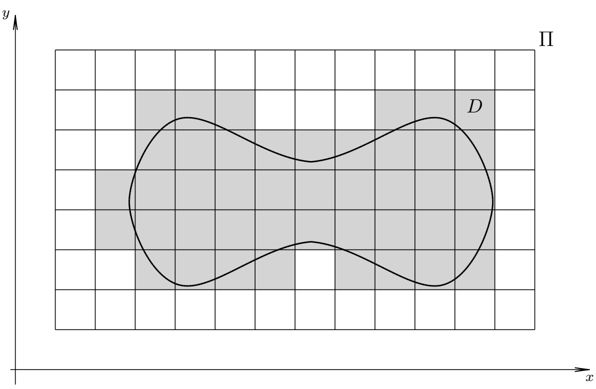
Напомена 3.15. Може се показати да је горња дефиниција еквивалентна следећој. Нека је $\mathcal{P}$ подела правоугаоника Π са уоченим тачкама $\mathcal{A}$. Интегрална сума на D је

$$S(f,\mathcal{P},\mathcal{A},D) := \sum_{i,j} \theta_{ij} f(A_{ij})\Delta_{ij},$$

при чему је

$$\theta_{ij} = \begin{cases} 0, & \Pi_{ij} \cap D = \emptyset, \\ 1, & \Pi_{ij} \cap D \neq \emptyset, \end{cases}$$

тј. у интегралној суми $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{A})$ бројимо само оне $f(A_{ij})\Delta_{ij}$, за које правоугаоници Π_{ij} секу D (видети слику 3.3). Ако је I лимес оваквих интегралних сума, дефинисан као и до сад (тј. лимес у простору подела), може се показати да је $I = \iint_D f(x, y)dxdy$, у смислу дефиниције 3.14. $\diamond$



Слика 3.3: Интеграција по произвољном скупу

Тврђење 3.16. (Својства интеграла) Нека су функције f и g интеграбилне на Π и нека су $D, D_1 \subset \Pi$ мерљиви. Тада важи

(1) $\displaystyle\iint_D (f(x, y) + g(x, y))dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_D g(x, y)dxdy,$
$\displaystyle\iint_D \lambda f(x, y)dxdy = \lambda \iint_D f(x, y)dxdy$ (линеарност);

(2) $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ за свако $(x, y) \in D$
$\displaystyle\Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy \leqslant \iint_D g(x, y)dxdy$ (монотоност);

(3) $\displaystyle\iint_D 1dxdy = P(D)$ (где је P површина);

(4) $\displaystyle P(D) = 0 \Rightarrow \iint_D f(x, y)dxdy = 0;$

(5) $D \cap D_1 = \emptyset$ или $P(D \cap D_1) = 0 \Rightarrow$

$$\iint_{D \cup D_1} f(x, y)dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy + \iint_{D_1} f(x, y)dxdy$$

(адитивност по скупу);

(6) $\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)P(D)$, за неко $(x_0,y_0) \in D$, ако је f непрекидна, а скуп D компактан и повезан[3] (Теорема о средњој вредности).

Доказ. Својства (1) и (2) следе из одговарајућих својстава интеграла на Π и једнакости:

$$(f+g)\chi_D = f\chi_D + g\chi_D,\ (\lambda\chi_D f) = \lambda(\chi_D f); \quad f \leqslant g \Rightarrow f\chi_D \leqslant g\chi_D.$$

Тачка (3) следи директно из напомене 3.6 и напомене 3.15.
Доказ тачке (4): пошто је f интеграбилна на Π, тада је она и ограничена[4], тј $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$. Из тачке (2) је

$$\iint_D mdxdy \leqslant \iint_D f(x,y)dxdy \leqslant \iint_D Mdxdy.$$

Из тачака (1) и (3) и услова $P(D) = 0$, имамо да је $\iint_D mdxdy = \iint_D Mdxdy = 0$, па је и $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$.
Доказ тачке (5): Ако је $D \cap D_1 = \emptyset$, онда је $\chi_{D\cup D_1}(x,y) = \chi_D(x,y) + \chi_{D_1}(x,y)$, па је

$$\iint_{D\cup D_1} f(x,y)dxdy = \iint_\Pi (\chi_D(x,y) + \chi_{D_1}(x,y))f(x,y)dxdy =$$
$$\iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

због већ доказаних својстава.

Нека је $P(D\cap D_1) = 0$. Како је

$$\chi_{D\cup D_1}(x,y) = \chi_D(x,y) + \chi_{D_1}(x,y) - \chi_{D\cap D_1}(x,y),$$

[3]Видети страну 128 у додатку.

[4]јер ако то не би било тачно, онда би за сваку поделу $\mathcal{P}$ (произвољног дијаметра) постојао $\Pi_{i_0j_0}$ који сече део скупа D на ком је f неограничена, па би било:

$$S(f,\mathcal{P},\mathcal{A},D) = f(A_{i_0j_0})P(\Pi_{i_0j_0}) + \sum_{(i,j)\neq(i_0,j_0)} \Delta_{ij} f(A_{ij})P(\Pi_{ij}) = f(A_{i_0j_0})P(\Pi_{i_0j_0}) + const.$$

Како избором тачке $A_{i_0j_0}$ израз $f(A_{i_0j_0})P(\Pi_{i_0j_0})$ можемо направити произвољно великим, то $S(f,\mathcal{P},\mathcal{A},D)$ може бити произвољно велико, па не постоји лимес интегралних сума.

то је

$$\iint_{D\cup D_1} f(x,y)dxdy = \iint_{\Pi}(\chi_D(x,y)+\chi_{D_1}(x,y)-\chi_{D\cap D_1}(x,y))f(x,y)dxdy =$$
$$\iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D_1} f(x,y)dxdy - \iint_{D\cap D_1} f(x,y)dxdy =$$
$$\iint_D f(x,y)dxdy + \iint_{D_1} f(x,y)dxdy - 0$$

због тачке (4).

Тачка (6) се доказује на исти начин као и Теорема о средњој вредности за једноструки интеграл (видети [**2, 4**]). □

Следећа теорема нам омогућава да двоструки интеграл по произвољној области израчунамо тако што га сведемо на поновљени, као и у случају правоугаоника.

Теорема 3.17. (Фубинијева теорема) *Нека је област $D \subset \mathbb{R}^2$ дефинисана на следећи начин:*

$$D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\}.$$

Тада је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Доказ. Доказ следи из теореме 3.9. Наиме,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{\Pi} \chi_D(x,y)f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \chi_D(x,y)f(x,y)dy\right)dx.$$

За фиксирано x_0, подинтегрална функција у унутрашњем интегралу $\int_c^d \chi_D(x_0,y)f(x_0,y)dy$ је једнака $f(x_0,y)$, за $(x_0,y)\in D$, а нули, за $(x_0,y)\notin D$. Како, за фиксирано x_0, $(x_0,y)\in D \Leftrightarrow y\in[\alpha(x_0),\beta(x_0)]$, то је

$$\int_c^d \chi_D(x,y)f(x_0,y)dy = \int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0,y)dy,$$

одакле следи тврђење теореме.

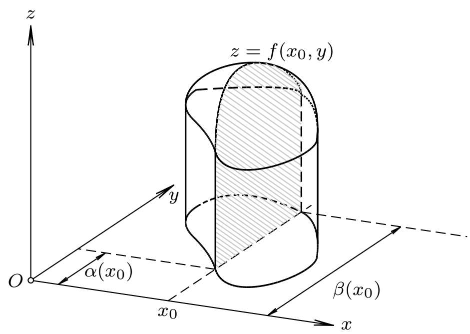
Наводимо једно интуитивније објашњење Фубинијеве теореме. По Кавалијеријевом принципу запремина области $T \subset \mathbb{R}^3$ може да се израчуна као интеграл $\int_a^b A(x)dx$, где је $A(x)$ површина пресека $\pi(x)\cap T$, где је $\pi(x)$ раван нормална на x- осу, која пролази кроз тачку $(x,0,0)$. Број a је најмања вредност x за коју раван $\pi(x)$ сече тело T, а b највећа. Заиста, ако интервал $[a,b]$ поделимо на n једнаких делова, и означимо $x_i := a + i\frac{b-a}{n}$, запремину $V(T)$ можемо апроксимирати сумом V_n запремина малих цилиндара који за основу имају област $\pi(x_i) \cap T$, а за висину $\frac{b-a}{n}$. Како је запремина ваљка једнака површини базе помноженој са висином ($V = B \cdot H$), добијамо

$$V_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} A(x_i) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b A(x)dx.$$

Како је, за фиксирано x_0, $A(x_0) = \displaystyle\int_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x_0, y)dy$ (видети слику 3.4), добијамо:

$$V(T) = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

□



Слика 3.4: Запремина је интеграл површине

Напомена 3.18. Ако је област D описана са:

$$D = \{(x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\, \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\},$$

онда је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Уколико је област D могуће написати на два начина:

$$\begin{aligned} D =& \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\, \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\} = \\ & \{(x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d,\, \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\}, \end{aligned}$$

онда је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

$\diamond$

Напомена 3.19. Уместо ознаке $\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy \right) dx$ често се користи практичнија и сугестивнија ознака:

$$\int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy$$

и слично за други поредак. $\diamond$

Пример 3.20. Израчунајмо интеграл $\iint_D (x+y)dxdy$ као поновљени у оба поретка, где је D троугао са теменима $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$. Приметимо да је

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\, 0 \leqslant y \leqslant x\} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1,\, y \leqslant x \leqslant 1\}$$

(нацртати слику!). Зато је, с једне стране

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^x dx =$$
$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{2},$$

односно

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^1 (x+y)dx =$$
$$\int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=y}^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{2} - y^2 \right) dy = \frac{1}{2}.$$

$\square$

3.2. Троструки интеграл

Троструки интеграли се дефинишу потпуно аналогно двоструким. Прво посматрамо квадар у простору, на којем је дефинисана функција (три променљиве), и на исти начин као код двоструког интеграла дефинишемо интегралне суме, с тим да реч „правоугаоник” замењујемо речју „квадар”, а реч „површина” речју „запремина”. Ознака за троструки интеграл по квадру K је

$$\iiint_K f(x,y,z)dxdydz.$$

Фубинијева теорема за троструки интеграл гласи ($K = [a,b] \times [c,d] \times [e,g]$):

$$\iiint_K f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx =$$
$$\int_a^b \left(\int_e^g \left(\int_c^d f(x,y,z)dy \right) dz \right) dx,$$

односно, у складу са ознакама из напомене 3.19:

$$\iiint\limits_K f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^g f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_e^g dz \int\limits_c^d f(x,y,z)dy.$$

Задатак 3.21. Написати преостала четири поретка у којима интеграл $\iiint_K f(x,y,z)dxdydz$ може да се напише као поновљени. ✓

Затим дефинишемо мерљив скуп као ограничен скуп чија граница има *запремину* нула, и интеграл по мерљивом скупу $D \subset K$ као

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz := \iiint_K \chi_D(x,y,z)f(x,y,z)dxdydz.$$

Својства троструког интеграла су аналогна својствима двоструког, наведеним у тврђењу 3.16, с тим да се површина P замењује запремином V.

Задатак 3.22. Написати својства $(1)-(5)$ из тврђења 3.16 за троструки интеграл. ✓

Наведимо, на крају, како гласи Фубинијева теорема у случају троструког интеграла.

Теорема 3.23. (Фубинијева теорема) *Нека је област $D \subset \mathbb{R}^3$ дефинисана на следећи начин:*

$$D = \{(x,y,z) \mid a \leqslant x \leqslant b,\, \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x),\, \varphi(x,y) \leqslant z \leqslant \psi(x,y)\}.$$

Тада је

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

□

Пример 3.24. Израчунајмо запремину тела T која ограничавају координатне равни и раван $x+y+z=2$. Приметимо да T можемо да опишемо као

$$T = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2-x,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-x-y\}$$

(ово се најлакше види тако што се нацрта слика). Како је

$$V(T) = \iiint\limits_T 1 dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} 1\, dz =$$

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (2-x-y)dy = \int\limits_0^2 \frac{(2-x)^2}{2} dx = \frac{8}{6}.$$

✓

3.3. Смена промењиве у вишеструким интегралима

Код интеграла функције једне промењиве смена се врши помоћу правила

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

У случају функција више промењивих, пресликавање φ ће имати онолико координатних функција колико и промењивих (тј. биће $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), а извод φ' замениће јакобијан.[5] Теорему о смени промењиве нећемо доказати у пуној општости, али хоћемо у неким специјалним (и за нас најважнијим) случајевима.

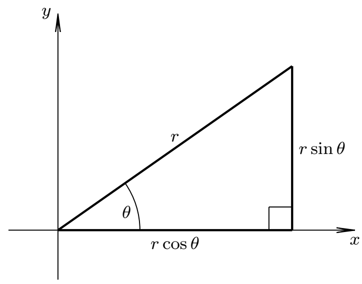
Поларна смена

Поларне координате у равни су одређене једном полуправом p (поларном осом) и њеним почетком O (центром). Свака тачка P у равни, осим центра, на јединствен начин је одређена паром (r, θ), где је r растојање од тачке до центра, а $\theta \in [0, 2\pi)$ усмерен угао између полуправе p и полуправе OP. Дужина r се зове *радијална координата* или *радијус*, а угао θ *угаона координата* или *азимут*. Ако у Декартовом координатном систему изаберемо координатни почетак за центар, а позитиван део x-осе за полуправу p, тада је веза између Декартових и поларних координата дата са

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

[5] тј. његова апсолутна вредност

(видети слику 3.5.)



Слика 3.5: Поларне координате

Приметимо да су координатне линије у случају поларних координата (тј. криве $r = const$, $\theta = const$) кругови и полуправе.

Напомена 3.25. Није тешко проверити (видети Додатак, страну 128) да у дефиницији интеграла непрекидне функције, уместо поделе скупа на правоугаонике, можемо узети поделу на произвољне мерљиве скупове који се секу евентуално по граници:

$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \quad D_i \cap D_j \subset \partial(D_i \cap D_j),$$

с тим да дијаметар поделе дефинишемо као

$$\delta(\mathcal{P}) := \max\{\operatorname{diam}(D_i) \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Ознака diam је ознака за *дијаметар скупа*, који се дефинише као

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

◇

Нека је

$$S := \{(r, \theta) \mid \tilde{r}_1 \leqslant r \leqslant \tilde{r}_2,\, \tilde{\theta}_1 \leqslant \theta \leqslant \tilde{\theta}_2)\}$$

део кружног исечка подељен на коначно много делова линијама $r = r_j$ и $\theta = \theta_j$, за $j = 0, 1, \ldots, n$, где је

$$r_i = \tilde{r}_1 + i\Delta r, \qquad \Delta r := \frac{\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1}{n};$$

$$\theta_j := \tilde{\theta}_1 + j\Delta\theta, \quad \Delta\theta := \frac{\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1}{n}.$$

Имамо

$$S = \bigcup_{i,j=1}^{n} S_{ij}, \quad S_{ij} := \{(r,\theta) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i,\, \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j\}$$

и нека је $D \subset S$ (видети слику 3.6).

Приметимо да је површина дела равни (пресек кружног прстена и исечка)

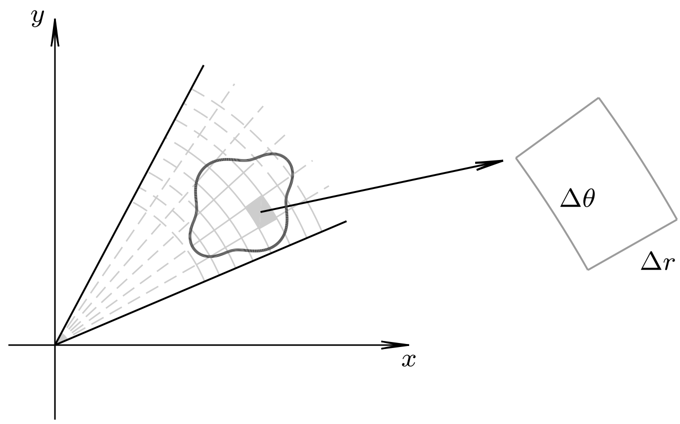
$$\{(r,\theta) \mid r_0 \leqslant r \leqslant r_0 + \Delta r,\, \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \Delta\theta\}$$

на слици 3.6 једнака

$$\frac{1}{2}\Delta\theta((r_0+\Delta r)^2 - r_0^2) = \left(r_0 + \frac{\Delta r}{2}\right)\Delta r \Delta\theta,$$

па је

$$P(S_{ij}) = \left(r_{i-1} + \frac{\Delta r}{2}\right)\Delta r \Delta\theta.$$



Слика 3.6: Подела скупа D поларним координатним линијама

Имајући у виду напомену 3.25 и напомену 3.15, интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ можемо да израчунамо као $\lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} f(A_{ij})P(S_{ij})$, при чему бројимо само оне S_{ij} који се секу са D. Изаберимо тачку A_{ij} чије су поларне координате $\left(r_{i-1} + \frac{\Delta r}{2}, \hat{\theta}_j\right)$ где је $\hat{\theta}_j$ било који угао између θ_{j-1} и θ_j ($r_{i-1} + \frac{\Delta r}{2}$ је очигледно између r_{i-1} и r_i). Имамо

$$\iint_D f(x,y)dxdy =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n} f\left(\left(r_{i-1}+\frac{\Delta r}{2}\right)\cos\hat{\theta}_j, \left(r_{i-1}+\frac{\Delta r}{2}\right)\sin\hat{\theta}_j\right)\left(r_{i-1}+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta r\Delta\theta$$

при чему се, као и пре, у горњој суми појављују само они сабирци по i, j за које $S_{ij}\cap D\neq\emptyset$. Међутим, последњи лимес је очигледно једнак

$$\iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta,$$

где је скуп D_1 дефинисан са

$$(r,\theta)\in D_1 \Longleftrightarrow (r\cos\theta, r\sin\theta)\in D.$$

Овиме смо доказали следећу теорему.

Теорема 3.26. *Нека поларна смена $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ слика мерљив скуп D_1 на мерљив скуп D и f непрекидна на D. Тада је*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta. \tag{34}$$

□

Напомена 3.27. Приметимо да је r које се појавило у подинтегралној функцији на десној страни једнакости (34) јакобијан пресликавања

$$F:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

(видети пример 2.29). ◇

Пример 3.28. Израчунајмо запремину тела између параболоида $z = x^2+y^2$ и конуса $z^2 = x^2+y^2$, тј. скупа $T := \{x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\}$. Како се ове две површи секу по кружници $z = x^2+y^2 = 1$, то је пројекција тела T на Oxy-раван скуп $D:\{x^2+y^2\leqslant 1\}$. Зато је, због Фубинијеве теореме

$$V(T) = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz = \iint\limits_D (\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2))dxdy.$$

Пређимо на поларне координате у последњем интегралу. Како је скуп D у поларним координатама описан са $\{r\leqslant 1\}$, и $\sqrt{x^2+y^2} = r$, $x^2+y^2 = r^2$, то је последњи интеграл једнак

$$\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 (r-r^2)rdr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

✓

Пример 3.29. Израчунајмо, помоћу поларних координата, Пуасонов интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt,$$

који не може да се реши помоћу техника из Анализе 2, јер функција $t \mapsto e^{-t^2}$ нема примитивну која је елементарна функција.

Пре свега, због парности подинтегралне функције, имамо да је $I = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, и знамо да је

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt.$$

Означимо $I(R) := \int_0^R e^{-t^2} dt$. Из Фубинијеве теореме следи да је

$$I(R)\cdot I(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \iint\limits_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

Означимо са K_R део круга полупречника R у првом квадранту:

$$K_R := \{(x,y) \mid x \geqslant 0,\, y \geqslant 0,\, x^2+y^2 \leqslant R^2\}.$$

Пошто је

$$K_R \subset [0,R]\times[0,R] \subset K_{\sqrt{2}R},$$

и како је $e^{-(x^2+y^2)}$ позитивна функција, то је

$$\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \leqslant I(R)^2 \leqslant \iint\limits_{K_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy. \tag{35}$$

Први и последњи интеграл се лако решавају поларном сменом.[6] За први имамо:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, \quad r\in[0,R],\ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \quad J = r,$$

па је

$$\iint\limits_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int\limits_0^R re^{-r^2} dr = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right).$$

Слично, $\iint_{K_{\sqrt{R}}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right)$. Како је

$$\lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) = \lim_{R\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

то преласком на лимес у једначини (35) добијамо да је $\lim\limits_{R\to\infty} I(R) = \frac{\pi}{4}$, одакле добијамо да је Пуасонов интеграл $I = 2\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}$. ✓

[6] Видети и задатак 8 у поглављу Задаци.

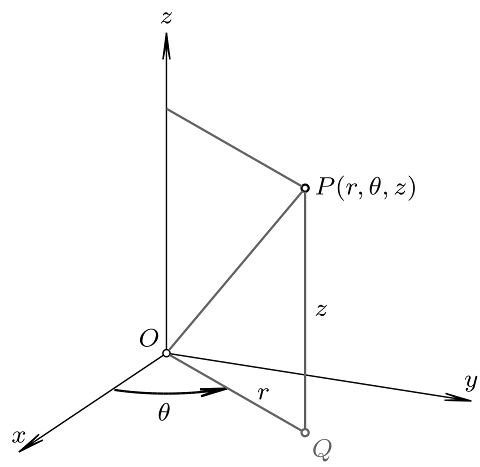
Цилиндричне координате

Нека је у простору задата раван α и у њој полуправа. *Цилиндричне координате* тачке P у простору су (r, θ, z), где су (r, θ) поларне координате пројекције Q тачке P на дату раван, а z растојање између тачака P и Q или *висина* (која може бити и негативна, у зависности од тога са које стране равни α је тачка P).

Ако у Декартовом координатном систему за раван α изаберемо Oxy-раван, и, као малопре, позитиван део x-осе за полуправу, тада је веза између Декартових и цилиндричних координата дата са

$$F : (r, \theta, z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z), \tag{36}$$

видети слику 3.7.



Слика 3.7: Цилиндричне координате

Координатне цилиндричне површи (тј. површи које се добијају ако фиксирамо једну цилиндричну координату) су цилиндри, полуравни које садрже z-осу и равни паралелне Oxy равни у простору. Сличним поступком као у случају поларних координата, тј. дељењем области T на скупове

$$S_{ijk} := \{(r, \theta, z) \mid r_{i-1} \leqslant r \leqslant r_i, \quad \theta_{j-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_j, \quad z_{k-1} \leqslant z \leqslant z_k\}$$

као на слици 3.8, добијамо формулу за цилиндричну смену у троструком интегралу:

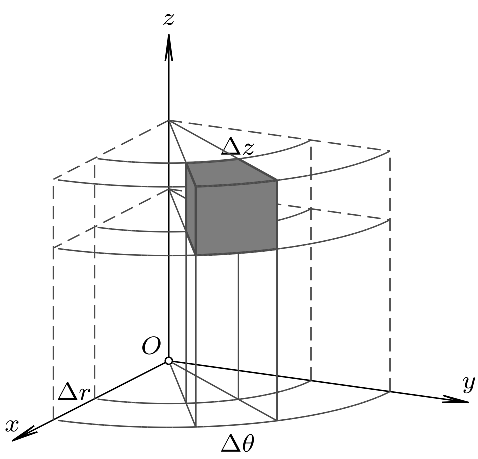
$$\iiint_{F(D)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdrd\theta dz.$$

Задатак 3.30. Доказати да је запремина скупа S_{ijk}

$$V(S_{ijk}) = \left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right)\Delta r\Delta\theta\Delta z =$$

$$\left(r_i + \frac{r_i - r_{i-1}}{2}\right)(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})(z_k - z_{k-1}).$$

✓



Слика 3.8: Подела скупа T цилиндричним координатним површима

Приметимо да је $J_F(r,\theta,z) = r$, за F из (36).

Пример 3.31. Ако опишемо тело T из примера 3.28 у цилиндричим координатама, добијамо

$$T = \{(r,\theta,z) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1,\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\, r^2 \leqslant z \leqslant r\},$$

па је

$$V(T) = \iiint_T dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{r^2}^r r\,dz = \frac{\pi}{6}.$$

✓

Сферне координате

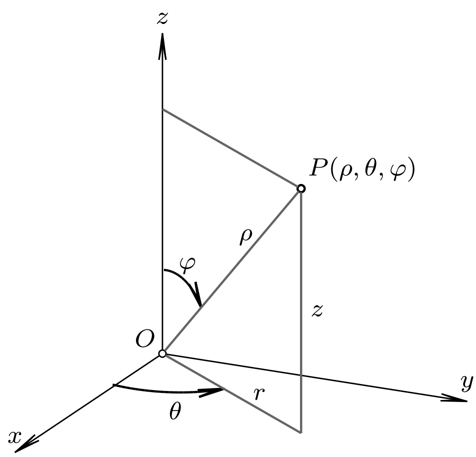
Нека је у простору фиксирана једна раван α и полуправа t нормална на њу, тако да је $t \cap \alpha = \{O\}$. Нека је p полуправа која пролази кроз O у равни α. *Сферне координате* тачке P у простору су уређена тројка (ρ, θ, φ), где је ρ растојање између тачка O и P, θ угаона координата пројекције P на раван α, а φ усмерен угао између полуправих t и OP. Координата ρ се зове *радијална координата* или *радијус*, θ *азимут*, а φ *зенитни угао*. Ако са r означимо радијалну поларну координату у равни α, а полуправу t изаберемо за позитиван део z-осе у Декартовим координатама, тада је, очигледно:

$$r = \rho \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Пошто већ знамо везу између Декартових и поларних координата, закључујемо да је веза између Декартових и сферних координата дата са

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ y &= \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= \rho \cos \varphi \end{aligned}$$

(видети слику 3.9).



Слика 3.9: Сферне координате

Координатне површи код сферних координата су: сфере ($\rho = const.$), полуконуси ($\varphi = const.$) и полуравни које садрже z-осу ($\theta = const.$).

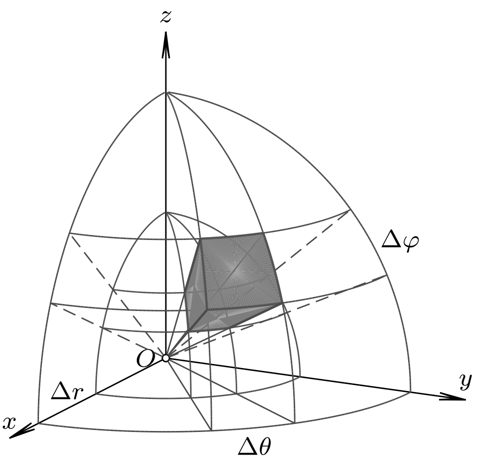
Задатак 3.32. Доказати да је запремина скупа

$$S := \{(\rho, \theta, \varphi) \mid \rho \in [\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2],\ \theta \in [\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2],\ \varphi \in [\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2]\}$$

једнака

$$V(S) = \frac{1}{3}(\tilde{\rho}_2^3 - \tilde{\rho}_1^3)(\tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1)(\cos\tilde{\varphi}_1 - \cos\tilde{\varphi}_2)$$

(видети слику 3.10). [Упутство: за фиксиране ρ_0, φ_0, израчунати запремину скупа $\{(\rho, \theta, \varphi), \mid \rho \leqslant \rho_0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0\}$. Ова се запремина може израчунати помоћу формуле за запремину ротационог тела, и то ротацијом дела D равни Oxz, задатом у поларним координатама са $D = \{(\rho, \varphi), \mid 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0\}$, око z-осе. Формула за запремину у овом случају је $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$.]
✓



Слика 3.10: Део простора између сферних координатних површи

Као у претходним ситуацијама, нека је скуп T по којем интегралимо функцију f садржан у скупу S из претходног задатка, за неке $\tilde{\rho}_1$, $\tilde{\rho}_2$, $\tilde{\theta}_1$, $\tilde{\theta}_2$, $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$. Поделимо скуп S на скупове

$$S_{ijk} := \{(\rho, \theta, \varphi) \mid \rho \in [\rho_{i-1}, \rho_i],\ \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j],\ \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}$$

где је $\rho_i := \tilde{\rho}_1 + i\frac{\tilde{\rho}_2 - \tilde{\rho}_1}{n}$, итд. Из задатка 3.32 следи да је

$$V(S_{ijk}) = \frac{1}{3}(\rho_i^3 - \rho_{i-1}^3)\Delta\theta_j(\cos\varphi_{k-1} - \cos\varphi_k),$$

а из Лагранжеве теореме о средњој вредности примењене на функције $x \mapsto x^3$ и $x \mapsto \cos x$ следи да је

$$V(S_{ijk}) = \frac{1}{3} 3\hat{\rho}_i^2 \Delta\rho_i \Delta\theta_j (-\sin\hat{\varphi}_k)(-\Delta\varphi_k),$$

за неке $\hat{\rho}_i \in (\rho_{i-1}, \rho_i)$, $\hat{\varphi}_k \in (\varphi_{k-1}, \varphi_k)$. Имамо дакле

$$V(S_{ijk}) = \sin\hat{\varphi}_k \hat{\rho}_i^2 \Delta\rho_i \Delta\theta_j \Delta\varphi_k.$$

Резонујући као у случају поларне смене, имајући у виду напомену 3.15, изводимо следећу теорему.

Теорема 3.33. *Нека је*

$$F : (\rho, \theta, \varphi) \mapsto (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi),$$

T и мерљив скуп у $\mathbb{R}^3$ и f непрекидна на $F(T)$. Тада је

$$\iiint\limits_{F(T)} f(x,y,z)dxdzdz = \iiint\limits_{T} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\theta d\varphi.$$

□

Задатак 3.34. Шта је јакобијан пресликавања F из претходне теореме?
✓

Наводимо Теорему о смени променљиве у троструком интегралу у општем случају.

Теорема 3.35. *Нека су $D, D_1 \subset \mathbb{R}^3$ мерљиви ограничени скупови и $F : D \cup \partial D \to D_1 \cup \partial D_1$ бијекција скупова D на D_1 таква да и F и F^{-1} имају све непрекидне парцијалне изводе на $D \cup \partial D$ и $D_1 \cup \partial D_1$. Тада је, за непрекидну функцију f:*

$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)dxdzdy = \iiint_{D} f(F(u,v,w))|J_F(u,v,w)|dudvdw.$$

□

Задатак 3.36. Формулисати претходну теорему за случај две променљиве.
✓

Није тешко доказати Теорему о смени променљиве у случају када је $F = L$ линеарно пресликавање. Наиме, Јакобијева матрица J_L линеарног пресликавања L је иста као и матрица полазног пресликавања L (зашто?), а однос површина слике $L(\Pi)$ и оригинала правоугаоника Π (тј. запремине слике $L(K)$ и оригинала квадра K) је једнак апсолутној вредности детерминанте прeликавања L. Ако F није линеарно, потребно је доказати да се, приликом израчунавања површина, тј. запремина нових малих области (добијених као $F(\Pi)$, тј. $F(K)$), у процесу сумирања и рачунања интеграла, F може заменити својим изводом. Овде то нећемо радити (видети [**2, 4**]).

Пример 3.37. Нађимо запремину дела лопте $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2$ изван цилиндра $x^2 + y^2 = 1$. Координата θ очигледно узима све вредности из $[0, 2\pi]$. Координата φ најмању и највећу вредност има на пресецима сфере и цилиндра, тј. тамо где је $z = \pm 1$, тј. $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, па $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Горња граница за ρ је очигледно $\sqrt{2}$, доњу границу одређујемо из једначине цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, тј, у сферним координатама: $\rho^2 \sin^2 \varphi = 1$, дакле $\frac{1}{\sin\varphi} \leqslant \rho \leqslant \sqrt{2}$. Добијамо

$$V(T) = \iiint_T 1\, dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sin\varphi}}^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin\varphi\, d\rho =$$
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{3} \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{\sin^3 \varphi}\right) \sin\varphi\, d\varphi =$$
$$\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[-2\sqrt{2}\cos\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \operatorname{ctg}\varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \right\} d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

✓

3.4. Задаци

1. Израчунати интеграл $\iint\limits_D xydxdy$, ако је скуп D ограничен кривама $xy = 1$ и $x + y = \dfrac{5}{2}$.

2. Одредити границе за оба поретка интеграције у интегралу $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$, ако је D троугао са теменима $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ и $B(1, 2)$.

3. Заменити поредак интеграције у интегралу $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{1} f(x, y)dy$.

4. Заменити поредак интеграције у интегралу $\displaystyle\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)dy$, $a > 0$.

5. Израчунати интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, ако је скуп D ограничен кривама $y^2 = 2x$, $x+y=4$ и $x+y=12$.

6. Израчунати интеграл $\iiint\limits_A zdxdydz$, ако је $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant 0\}$.

7. Одредити запремину тела T које је ограничено површима $z = x^2+y^2$, $y = x^2$, $y = 1$ и $z = 0$.

8. Израчунати интеграл $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, ако је

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant b^2, x \geqslant 0, y \geqslant \frac{x}{\sqrt{3}}\right\}.$$

9. Израчунати интеграл $\iint\limits_D \frac{1}{2x^2+y^2}dxdy$, ако је

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant x\}.$$

10. Израчунати интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, ако је $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leqslant x+y\}$.

11. Израчунати интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, ако је $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+6x-4y+9 \leqslant 0, y \geqslant 2\}$.

12. Израчунати интеграл $\iint\limits_D \frac{1}{xy}dxdy$, ако је $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x+y \leqslant b, \alpha x \leqslant y \leqslant \beta x\}$, $a, b, \alpha, \beta > 0$.

13. Одредити запремину тела $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2+y^2}{a} \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$, $a > 0$.

14. Израчунати запремину тела $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \geqslant z^2, x^2+y^2 \leqslant 2x, z \geqslant 0\}$.

15. Израчунати запремину тела $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 9, z^2 \geqslant \frac{x^2+y^2}{3}, z \geqslant 0\}$.

16. Израчунати интеграл $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, ако је D унутрашњост сфере

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

3.5. Задаци за вежбу

17. Израчунати $\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}(x^2+y^3+xy)dxdy$.

18. Представити збир:

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)dydx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\int\limits_{0}^{x} f(x,y)dydx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx$$

као један двојни интеграл, а затим га израчунати за $f(x,y) = xy^3$.

19. Скицирати област интеграције, изменити поредак интеграције и израчунати интеграле:

а) $\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{x}^{\pi}\frac{\sin y}{y}dydx$;

б) $\int\limits_{0}^{3}\int\limits_{\sqrt{\frac{\pi}{3}}}^{1} e^{y^3}dydx$.

20. Израчунати интеграл $\iint\limits_D (y^2+x+1)dxdy$ ако је $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+(y+2)^2 \leqslant 4,\ y \geqslant -2,\ x \geqslant 1\}$.

21. Израчунати $\iint\limits_D \frac{y-2}{x} \ln\sqrt{x^2+(y-2)^2}dxdy$ ако је $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2+(y-2)^2 \leqslant 4\,,\ 0 \leqslant y-2 \leqslant x\}$.

22. Израчунати $\iint\limits_D (xy-y)dxdy$ ако је D област ограничена кривама $y^2+2y-4x+5=0$ и $x+y=0$.

23. Израчунати $\iint\limits_D (x-y)dxdy$ ако је D област ограничена кривама $y^2=3x$, $y^2=4-x$ и x-осом.

24. Нека су (ρ,θ,φ) сферне координате (θ је равански, а φ просторни угао).

а) Скицирати $\rho=5$.

б) Скицирати $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

в) Скицирати $\rho=2$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

25. Израчунати $\iiint\limits_T x\mathrm{d}xdydz$, ако је $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$.

26. Израчунати интеграл $\iiint\limits_T xyzdxdydz$, где је тело T део јединичне лопте $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ у првом октанту.

27. Одредити запремину тела ограниченог површима $z=x^2+y^2-2$ и $y+z-4=0$.

28. а) Одредити Јакобијан пресликавања $F(\rho,\theta)=(a\rho\cos\theta, b\rho\sin\theta)$.
б) Одредити запремину дела цилиндра $9x^2+4y^2=36$ ограниченог равнима $z=0$ и $z=y+3$.

29. а) Израчунати Јакобијан пресликавања

$$F(\rho,\varphi)=(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi)),$$

ако су x и y дате са

$$x=a\rho\cos\varphi\,, y=b\rho\sin\varphi\,(a,b>0).$$

б) Израчунати запремину тела ограниченог површима $z=1-x^2$ и $z=x^2+y^2$.

ГЛАВА 4

Криволинијски и површински интеграли

У овој глави ћемо уопштити појам једноструког и двоструког интеграла тако што ћемо проширити класу скупова по којој је могуће интегралити. То више неће бити подскупови реалне осе или равни (дакле равни објекти), већ и „криви” објекти, односно криве и површи. Видећемо да у овом случају можемо да интегралимо функције као и раније, али и векторска поља,[1] и да су у оба случаја ови појмови уопштења интеграла које већ познајемо.

4.1. Криволинијски интеграли

Нека је крива $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ дефинисана помоћу глатког пресликавања $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = \mathbf{r}(I)$ где је $I \subset \mathbb{R}$ интервал. Пресликавање $\mathbf{r}$ називамо и *параметризацијом криве*,[2] а аргумент $t \in \mathbb{R}$ пресликавања $\mathbf{r}$ *параметром.* Ако је $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, где су a и b крајеви интервала I, онда се крива $\mathcal{C}$ назива *затвореном.* Крива без самопресека је она за коју је $\mathbf{r}$ $1-1$ пресликавање, осим можда у крајевима. Овакве криве зовемо и *простим.*

Хоћемо да уопштимо појам интеграла по $[a, b] \subset \mathbb{R}$ на интеграл по кривој $\mathcal{C}$, тако да, ако је $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$, добијамо обичан Кошијев интеграл. Посматраћемо два случаја:

- интеграл скалар-функције дуж $\mathcal{C}$, $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$;
- интеграл векторске функције $\mathbf{F} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^3$ дуж $\mathcal{C}$.

---

[1] Видети напомену 4.1 испод.

[2] Приметимо да **скуп тачака** $\mathcal{C}$ у простору не мора да буде дефинисан јединственом једначином (то можемо видети већ на примеру праве), зато назив **параметризација** подвлачи да је крива дата као скуп заједно са пресликавањем које је дефинише.

Напомена 4.1. Векторске функције које имају исти број променљивих и димензију кодомена, тј. функције облика:

$$\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^k$$

називамо *векторским пољима.* $\diamond$

Задатак 4.2. Скицирати у равни (у неколико тачака) векторска поља $\mathbf{F}(x,y) = (1,0)$, $\mathbf{G}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{H}(x,y) = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\mathbf{J}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y,x)$. ✓

Криволинијски интеграл скалар-функције

Нека је функција f дефинисана на кривој $\mathcal{C} = \mathbf{r}([a,b])$ и непрекидна.[3] У дефиницији Кошијевог (или Римановог) интеграла појављивао се израз облика

$$\sum f(\xi_j)\Delta t_j,$$

који смо називали интегралном сумом. Приметимо да је Δt_j дужина дела интервала $[t_{j-1}, t_j]$. Овде ћемо поступити на следећи начин. Изаберимо $n+1$ тачку на кривој $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} &A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{C},\ A_j = \mathbf{r}(t_j) = (x(t_j), y(t_j), z(t_j)), \\ &\text{за} \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b. \end{aligned}$$

Означимо са $\mathcal{P}$ претходну поделу интервала $[a,b]$ и посматрајмо интегралну суму

$$S(f, \mathcal{C}, \mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n} f(C_j)\Delta s_j, \tag{37}$$

где је Δs_j дужина дела криве $\mathcal{C}$ од тачке A_{j-1} до A_j, а C_j произвољна тачка на кривој $\mathcal{C}$ „између” A_{j-1} и A_j.[4]

Дефиниција 4.3. Ако постоји број I такав да за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ такво да је $|S(f, \mathcal{C}, \mathcal{P}) - I| < \varepsilon$ кад год је $\max\{\Delta s_j \mid j = 1, \ldots, n\} < \delta$, тада I називамо *криволинијским интегралом* функције f дуж $\mathcal{C}$ и означавамо са $\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\, ds$. $\Diamond$

Напомена 4.4. Дужина дужи $A_{j-1}A_j$ је једнака

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x(t_{j-1}) - x(t_j))^2 + (y(t_{j-1}) - y(t_j))^2 + (z(t_{j-1}) - z(t_j))^2} \overset{(\Diamond)}{=} \\ &\sqrt{x'(a_j)^2(t_j - t_{j-1})^2 + y'(b_j)^2(t_j - t_{j-1})^2 + z'(c_j)^2(t_j - t_{j-1})^2} = \\ &\sqrt{x'(a_j)^2 + y'(b_j)^2 + z'(c_j)^2} \cdot \Delta t_j \end{aligned} \tag{38}$$

[3] Криволинијски интеграл се може дефинисати и за ширу класу функција.

[4] То значи да је $C_j = \mathbf{r}(\xi_j)$, за неко $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$.

за неке $a_j, b_j, c_j \in (t_{j-1}, t_j)$. Једнакост ($\diamondsuit$) је Лагранжева теорема о средњој вредности. Из једначине (38) није тешко извести[5] формулу за дужину параметарски задате криве:

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt. \tag{39}$$

$\diamondsuit$

Вратимо се интегралној суми (37). Имамо

$$S(f, \mathcal{C}, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} f(C_j)\Delta s_j = \sum_{j=1}^{n} f(C_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt = \sum_{j=1}^{n} f(C_j)\|\mathbf{r}'(\xi_j)\|\Delta t_j, \tag{40}$$

при чему последња једнакост важи за неко $\xi_j \in (t_{j-1}, t_j)$, по Теореми о средњој вредности за интеграле.[6] Ако криволинијски интеграл функције f дуж $\mathcal{C}$ постоји, ми можемо изабрати да тачке C_j у свакој подели буду баш $\mathbf{r}(\xi_j)$, тако да добијемо

$$S(f, \mathcal{C}, \mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{r}(\xi_j))\|\mathbf{r}'(\xi_j)\|\Delta t_j, \tag{41}$$

и да горња сума тежи (у описаном смислу) ка $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds$. Ако је параметризација $\mathbf{r}$ још и регуларна, није тешко проверити да $\max\{\Delta s_j \mid j = 1, \ldots, n\}$ тежи нули ако и само ако $\operatorname{diam}\mathcal{P}$ тежи нули.[7] Како је израз (41) интегрална сума функције $f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|$ (која је очигледно интеграбилна, будући непрекидна) на интервалу $[a, b]$, добијамо формулу из следећег тврђења.

Тврђење 4.5. Ако је f непрекидна, а $\mathbf{r}$ регуларна параметризација криве $\mathcal{C}$,[8] тада криволинијски интеграл f дуж $\mathcal{C}$ постоји и рачуна се по формули

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\, dt. \tag{42}$$

$\square$

---

[5] Овај доказ је сличан доказу формуле за дужину лука дела графика $l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$, из Анализе 2, видети и [**1**].

[6] која, подсетимо се, каже да је $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, за неко $\xi \in [a, b]$ и f непрекидно.

[7] Доказати, за вежбу. Упутство: ако је $m := \min\limits_{\mathcal{C}} \|\mathbf{r}'\| > 0$, $M := \max\limits_{\mathcal{C}} \|\mathbf{r}'\|$, онда је $m\Delta t \leqslant \Delta s \leqslant M\Delta t$.

[8] Или, $\mathbf{r}$ је регуларна крива.

У претходној дискусији смо доказали формулу (42) у случају да **постоји** криволинијски интеграл у смислу дефиниције 4.3. Доказ да под наведеним претпоставкама криволинисјки интеграл заиста постоји је дат у додатку, на страни 129.

Формула (42) може да се узме и за дефиницију криволинијског интеграла.

Напомена 4.6. Из формуле (39) видимо да, за произвољно $c_j \in (t_{j-1}, t_j)$, величина $\|\mathbf{r}'(c_j)\|\Delta t_j$ апроксимира дужину дела криве Δs_j, и да је ова апроксимација тачнија, што је подела гушћа (тј. што су Δt_j мањи). Заиста:

$$|\Delta s_j - \|\mathbf{r}'(c_j)\|\Delta t_j| = \left|\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\mathbf{r}'(t)\|\,dt - \|\mathbf{r}'(c_j)\|\Delta t_j\right| = \big|\|\mathbf{r}'(\xi_j)\| - \|\mathbf{r}'(c_j)\|\big|\Delta t_j,$$

при чему последња једнакост важи због Теореме о средњој вредности за интеграле.

Приметимо још и да је

$$\mathbf{r}'(t) = \mathrm{d}\mathbf{r}(t)(\mathbf{e}),$$

где је $\mathbf{e}$ (јединични) базни вектор у $\mathbb{R}$, тако да дужину дела криве (који одговара делу $[t_{j-1}, t_j]$) можемо да апроксимирамо величином

$$\|\mathrm{d}\mathbf{r}(c_j)(\Delta t_j \mathbf{e})\|,$$

за неко $c_j \in [t_{j-1}, t_j]$). (Сличну ствар ћемо радити код површинских интеграла.) ◇

Напомена 4.7. Израз $\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$ означавамо са ds и називамо *елементом дужине.* ◇

Напомена 4.8. Ако је крива дата са $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, онда је $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, па је $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$, и

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dt. \tag{43}$$

Израз

$$\mathbf{r}'(t)\,dt = (x'(t), y'(t), z'(t))\,dt = (dx, dy, dz) \tag{44}$$

означавамо са $\mathrm{d}\mathbf{r}$, а $\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt$ и са $\|\mathrm{d}\mathbf{r}\|$ (тј. $ds = \|\mathrm{d}\mathbf{r}\|$). ◇

Напомена 4.9. Ако је крива $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$, тј. $z(t) = 0$, онда је

$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

◇

Пример 4.10. Израчунаћемо криволинијски интеграл функције $f(x, y) = x + y^2 - 1$ дуж јединичног круга у равни $\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1\}$. Параметризација круга је $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, за $t \in [0, 2\pi)$, па је $\mathrm{d}\mathbf{r} = (-\sin t, \cos t)\, dt$, а $ds = \|\mathrm{d}\mathbf{r}\| = 1\, dt$. Зато је

$$\int_{\mathcal{C}} (x + y^2 - 1)\, ds = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin^2 t - 1)\, dt = \pi - 2\pi = -\pi.$$

✓

Следећа својства криволинијског интеграла следе непосредно из формуле за израчунавање криволинијског интеграла.

Тврђење 4.11. (1) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (f + g)\, ds = \int_{\mathcal{C}} f\, ds + \int_{\mathcal{C}} g\, ds$;

(2) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (\lambda f)\, ds = \lambda \int_{\mathcal{C}} f\, ds$;

(3) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} 1\, ds = l(\mathcal{C})$, где је $l(\mathcal{C})$ дужина криве $\mathcal{C}$;

(4) ако је $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$, за свако $(x, y, z) \in \mathcal{C}$, онда је $\int_{\mathcal{C}} f\, ds \leq \int_{\mathcal{C}} g\, ds$;

(5) ако се криве $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ „надовезују” једна на другу, тј. ако је $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, где је пресек кривих $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ једна тачка, тада је

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_{\mathcal{C}_1} f\, ds + \int_{\mathcal{C}_2} f\, ds.$$

(6) (Теорема о средњој вредности) $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds = f(x_0, y_0, z_0)\, l(\mathcal{C})$ за неко $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{C}$. □

Дефиниција 4.12. Кажемо да је крива $\mathcal{C}$ *део-по-део глатка* ако је $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_k$ где је

$$\mathcal{C}_j = \mathbf{r}_j([a_j, b_j]),\ \mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_{j+1} = \{A_j\},\ \text{где је } A_j = \mathbf{r}_j(b_j) = \mathbf{r}_{j+1}(a_{j+1})$$

и $\mathbf{r}_j$ глатке криве. ◊

Дефинишимо криволинијски интеграл функције f дуж део-по-део глатке криве $\mathcal{C}$ из претходне дефиниције као:

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds := \int_{\mathcal{C}_1} f(x, y, z)\, ds + \cdots + \int_{\mathcal{C}_k} f(x, y, z)\, ds.$$

Очигледно је да и овако дефинисан интеграл задовољава својства из тврђења 4.11.

Криволинијски интеграл векторског поља

Нека је на регуларној кривој $\mathcal{C}$ дефинисано непрекидно векторско поље $\mathbf{F}(x, y, z)$. Означимо са $\mathbf{T}$ јединични вектор тангенте на криву (који је добро дефинисан јер је крива регуларна):

$$\mathbf{T} := \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}.$$

Дефиниција 4.13. *Криволинијски интеграл векторског поља* $\mathbf{F}$ дуж криве $\mathcal{C}$ дефинишемо као криволинијски интеграл скалар-функције

$$f(x, y, z) := \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$$

(где је $\cdot$ скаларни производ), која је дефинисана (и непрекидна) на кривој $\mathcal{C}$. $\diamondsuit$

Ознака за криволинијски интеграл векторског поља $\mathbf{F}$ дуж криве $\mathcal{C}$ је

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Како је

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds = \int_a^b \left(\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)\right) \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt,$$

а $\mathbf{T}(t)\|\mathbf{r}'(t)\| = \mathbf{r}'(t)$, то је формула за рачунање криволинијског интеграла векторског поља $F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} =$$
$$\int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right] dt. \tag{45}$$

Осим поменуте, користимо и ознаку:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'\, ds = \int_{\mathcal{C}} P dx + Q dy + R dz.$$

Приметимо да је последња ознака у складу са ознаком (44), тј.

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = P dx + Q dy + R dz.$$

Ако је крива $\mathcal{C}$ затворена (тј. ако је $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$), онда криволинијски интеграл називамо и *циркулацијом* векторског поља $\mathbf{F}$ дуж $\mathcal{C}$ и пишемо

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Из саме дефиниције интеграла векторског поља видимо да својства (1), (2) и (5) из тврђења 4.11 важе и у овом случају.

Напомена 4.14. (оријентација) Приметимо да сваку криву $\mathcal{C}$ можемо да оријентишемо на два начина.[9] Ако је $\mathbf{r}$ регуларна параметризација дате криве, тј. ако је $\mathcal{C} = \mathbf{r}([a,b])$, тада је

$$\mathbf{r}^-(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{r}^-(t) := \mathbf{r}(a+b-t),$$

такође регуларна параметризација. При том важи $\mathbf{r}^-([a,b]) = \mathcal{C}$ и ова крива је супротно оријентисана у односу на $\mathbf{r}$ (ако је $A := \mathbf{r}(a)$ почетна тачка, а $B := \mathbf{r}(b)$ крајња, при првој параметризацији, тада је $B = \mathbf{r}^-(a)$, а $A = \mathbf{r}^-(b)$, тј. код друге параметризације је обрнуто). Изразимо $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^-$ преко $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$. Из формуле за израчунавање криволинијског интеграла имамо

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}^- = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}^-(t)) \cdot (\mathbf{r}^-)'(t)\, dt =$$

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(a+b-t)) \cdot (-\mathbf{r}'(a+b-t))\, dt \overset{(\spadesuit)}{=} -\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Једнакост ($\spadesuit$) се добија сменом $s = a+b-t$ у интегралу. Дакле, ако променимо оријентацију криве, интеграл промени знак. $\diamond$

Пример 4.15. Израчунајмо $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, где је $\mathcal{C}$ пресечна крива цилиндра $x^2 + y^2 = 12$ и равни $2x + 3y - z = 0$ оријентисана позитивно кад се гледа са позитивног дела z-осе, а $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,x)$. Ако знамо параметризацију круга $x^2 + y^2 = 12$ у равни, лако добијамо параметризацију криве $\mathcal{C}$:

$$x = \sqrt{12}\cos t, \quad y = \sqrt{12}\sin t, \quad z = 2x+3y = \sqrt{12}(2\cos t + 3\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Под позитивном оријентацијом се подразумева кретање по кривој (како параметар t расте) у смеру супротном од смера кретања казаљке на сату. Видимо да овако изабрана параметризација даје тражену оријентацију. Даље рачунамо:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathbf{r}'(t)\, dt = \Big(-\sqrt{12}\sin t, \sqrt{12}\cos t, \sqrt{12}(-2\sin t + 3\cos t)\Big)\, dt,\\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \Big(\sqrt{12}\cos t, \sqrt{12}\sin t, \sqrt{12}\cos t\Big),\\
\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = 12(-2\sin t\cos t + 3\cos^2 t)\, dt.
\end{aligned}$$

Зато је

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 12\int_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + 3\cos^2 t)\, dt = 36\pi.$$

✓

[9] Интуитивно је јасно шта ово значи, нпр, избор почетне и крајње тачке између A и B, где је $\{A, B\} = \mathbf{r}(\{a, b\})$ нам задаје оријентацију, уколико крива није затворена, тј. уколико није $A = B$. Ако је $A = B$, тј. уколико је крива затворена, оријентацију ћемо описивати помоћу смера кретања казаљке на сату.

Напомена 4.16. Из формуле (45) и Теореме о смени променљиве у Римановом (Кошијевом) интегралу следи да криволинијски интеграл векторског поља не зависи од избора регуларне параметризације, до на знак. Исто важи и за криволинијски интеграл фукције, доказ следи из формуле (43) (и Теореме о смени променљиве). ◇

Напомена 4.17. (терминологија) Криволинијски интеграл функције $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ се назива и *криволинијским интегралом прве врсте*, а криволинијски интеграл векторског поља $\int_{\mathcal{C}} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ се назива и *криволинијским интегралом друге врсте.* ◇

Задатак 4.18. Нека је крива $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$, тј. интервал $[a, b]$. Доказати да је криволинијски интеграл $\int_{\mathcal{C}} f(s)ds$ једнак Римановом интегралу $\int_a^b f(t)dt$. Уверити се да исто важи и у случају векторској поља (које је у случају димензије 1 реална функција), односно да је појам криволинијског интеграла заиста уопштење појма Римановог интеграла. ✓

Гринова формула

Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathbf{F}$ векторско поље дефинисано на D. Гринова формула нам даје везу између криволинијског интеграла $\mathbf{F}$ дуж **границе** области D, и двоструког интеграла по D функције f која ће бити нека врста извода поља $\mathbf{F}$. Ово није први пут да доведемо у везу извод и границу скупа, наиме, Њутн-Лајбницова формула

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

нам даје управо везу тог типа: тачке a и b су граница интервала $[a, b]$ по ком рачунамо интеграл од f'.

Теорема 4.19. (Гринова формула). *Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ компактан скуп, такав да му је граница $\mathcal{C} := \partial D$ део-по-део глатка крива, и нека је $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ векторско поље дефинисано на D такво да су P, Q, P'_y и Q'_x непрекидне функције на D. Нека је $\mathcal{C}$ оријентисана тако да, приликом обиласка криве, област D „остаје" са леве стране, тј. позитивно. Тада важи формула:*

$$\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \iint_D (Q'_x - P'_y)dxdy. \tag{46}$$

Доказ. Доказаћемо формулу у случају када је $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_4$, при чему је

$$\begin{aligned}
&\mathcal{C}_1 \text{ график функције } y = f(x),\ x \in [a,b],\\
&\mathcal{C}_2 \text{ график функције } y = g(x),\ x \in [a,b],\\
&\mathcal{C}_3 \text{ график функције } x = h(y),\ y \in [c,d],\\
&\mathcal{C}_4 \text{ график функције } x = k(y),\ y \in [c,d]
\end{aligned}$$

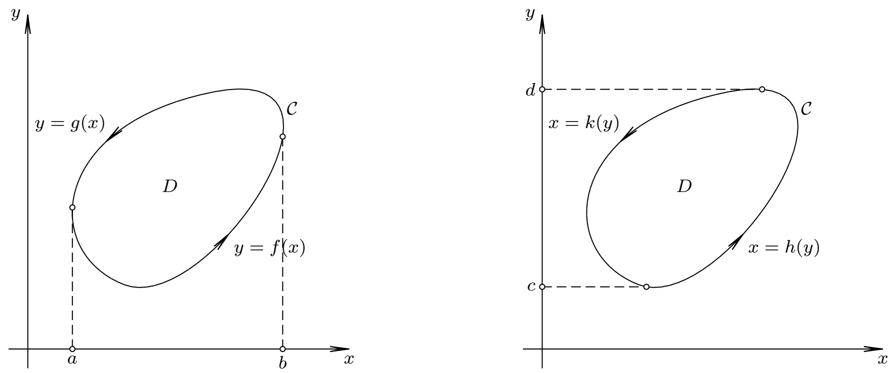
(видети слику 4.1). Пре свега, имамо

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} ((P,0) + (0,Q)) \cdot (dx, dy) = \oint_{\mathcal{C}} P dx + \oint_{\mathcal{C}} Q dy.$$

Доказаћемо да је

$$\oint_{\mathcal{C}} P dx = -\iint_D P'_y\, dxdy, \quad \oint_{\mathcal{C}} Q dy = \iint_D Q'_x\, dxdy,$$

одакле следи формула (заправо, доказаћемо само прву једнакост, друга се доказује аналогно).



Слика 4.1: Област D и крива $\mathcal{C}$ као унија два графика на два начина

Једна параметризација криве $\mathcal{C}_1$ је $(t, f(t))$, кад $t \in [a,b]$, а криве $\mathcal{C}_2^-$ је $(t, g(t))$, $t \in [a,b]$ (видети слику 4.1). Ознака $^-$ означава исту криву, само супротно оријентисану. Зато је

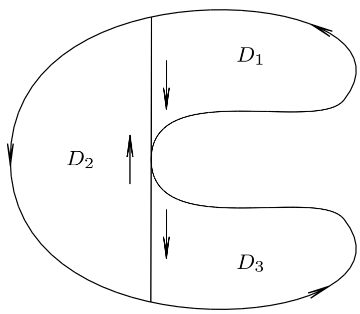
$$\begin{gathered}
\oint_{\mathcal{C}} P dx = \int_{\mathcal{C}_1} P dx + \int_{\mathcal{C}_2^-} P dx = \\
\int_a^b P(t, f(t))\, dt - \int_a^b P(t, g(t))\, dt = \int_a^b (P(t, f(t) - P(t, g(t))\, dt.
\end{gathered} \tag{47}$$

С друге стране, из Фубинијеве теореме имамо

$$\iint_D P'_y\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} P'_y(x,y)dy\right)dx \overset{(\heartsuit)}{=} \int_a^b (P(x,g(x)) - P(x,f(x))dx. \tag{48}$$

Једнакост ($\heartsuit$) је Њутн-Лајбницова формула. Из једнакости (47) и (48) следи да је $\oint_{\mathcal{C}} P dx = -\iint_D P'_y\,dxdy$.

На исти начин се доказује да формула важи и у случају када је $\mathcal{C}$ унија графика и хоризонталних и вертикалних линија.[10]



Слика 4.2: Област D као унија три специјалне области

Ако област D није оваквог облика, али јесте унија коначно много области на које можемо да применимо доказано (видети слику 4.2), тада, из адитивности двоструког и криволинијског интеграла добијамо (46). Нпр, у случају приказаном на слици 4.2 бисмо имали ($\mathcal{C}_j = \partial D_j$):

$$\oint_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy \overset{(\clubsuit)}{=} \oint_{\mathcal{C}_1} Pdx + Qdy + \oint_{\mathcal{C}_2} Pdx + Qdy + \oint_{\mathcal{C}_3} Pdx + Qdy =$$
$$\iint_{D_1} (Q'_x - P'_y)\,dxdy + \iint_{D_2} (Q'_x - P'_y)\,dxdy + \iint_{D_3} (Q'_x - P'_y)\,dxdy =$$
$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy.$$

[10]На слици 4.2 области D_1, D_2 и D_3 имају границу која је унија графика и вертикалних линија. Доказати Гринову формулу за област D_1 за вежбу.

Једнакост (♣) је тачна јер се обе додате усправне линије у интегралима дуж $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ појављују тачно два пута и то супротно оријентисане, па се скраћују, дакле, остаје само интеграл по спољашњим контурама које заједно сачињавају $\mathcal{C}$. □

Независност интеграције од путање

У овом поглављу даћемо још једно уопштење Њутн-Лајбницове формуле: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. Наиме, она нам каже да, ако интегралимо извод неке функције, онда интеграл зависи само од вредности функције у крајевима, штавише, само од разлике тих вредности. Слична ствар важи и код криволинијског интеграла, у случају када је векторско поље које интегралимо градијент неке функције.

Дефиниција 4.20. Ако је векторско поље $\mathbf{F}$ градијент функције f, $\mathbf{F} = \nabla f$, тада се оно назива *конзервативним* или *градијентним* пољем, а функција f се назива *потенцијалом* поља $\mathbf{F}$. ◊

Прво ћемо доказати једно једноставно тврђење.

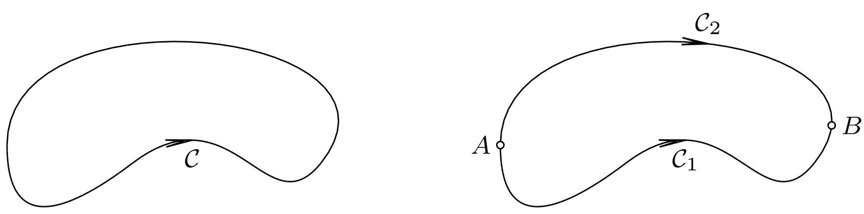
Тврђење 4.21. Нека је $\mathbf{F}$ непрекидно векторско поље у некој области D. Тада су следећа два тврђења еквивалентна:

(1) За сваке две тачке $A, B \in D$, интеграл векторског поља $\mathbf{F}$ дуж сваке део-по-део глатке криве у D која спаја A и B има исту вредност;

(2) За сваку затворену део-по-део глатку криву $\mathcal{C}$ у D важи $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2): Нека је $\mathcal{C}$ затворена крива и $A \neq B$ произвољне две тачке на њој. Означимо са $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ делове криве $\mathcal{C}$ које спајају тачке A и B „са различитих страна” (видети слику 4.3). Како је, због претпоставке (1), $\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, то је

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2^-} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0.$$



Слика 4.3: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^-$

(2) $\Rightarrow$ (1): Нека су $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ две криве које спајају A и B и нека је $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2^-$. Крива $\mathcal{C}$ је очигледно затворена, па је, због претпоставке (2):

$$0 = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \oint_{\mathcal{C}_2^-} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \oint_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

□

Следеће тврђење је поменуто уопштење Њутн-Лајбницове формуле.

Тврђење 4.22. Нека је непрекидно векторско поље $\mathbf{F}$ конзервативно, тј. нека је $\mathbf{F} = \nabla f$ у области $D \subset \mathbb{R}^3$. Тада је интеграл поља $\mathbf{F}$ дуж произвољне криве $\mathcal{C} \subset D$ која спаја тачке A и B једнак:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = f(B) - f(A),$$

тј. не зависи од путање $\mathcal{C}$.

Доказ. Ако је $\mathbf{F} = (P, Q, R)$, тада је

$$P = f'_x, \quad Q = f'_y, \quad R = f'_z.$$

Нека је $\mathbf{r}$ параметризација криве $\mathcal{C}$ и нека је $\mathbf{r}(a) = A$, $\mathbf{r}(b) = B$. Имамо

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b \left[P(\mathbf{r}(t))x'(t) + Q(\mathbf{r}(t))y'(t) + R(\mathbf{r}(t))z'(t)\right] dt =$$
$$\int_a^b \left[f'_x(\mathbf{r}(t))x'(t) + f'_y(\mathbf{r}(t))y'(t) + f'_z(\mathbf{r}(t))z'(t)\right] dt =$$
$$\int_a^b \frac{d}{dt}(f(\mathbf{r}(t)))\, dt = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = f(B) - f(A).$$

□

Следећа теорема нам даје потребне и довољне услове да неко векторско поље буде конзервативно.[11]

Теорема 4.23. *Нека је* $\mathbf{F}$ *непрекидно векторско поље у области*[12] $D \subset \mathbb{R}^3$. *Тада су следећа два услова еквивалентна:*

(1) $\mathbf{F}$ *је конзервативно;*
(2) $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ *за сваку затворену део-по-део глатку криву* $\mathcal{C} \subset D$.

---

[11] Приметимо да оваквих појава немамо у $\mathbb{R}$: свака непрекидна функција је примитивна функција неке функције.

[12] Овде под облашћу подразумевамо отворен скуп у којем сваке две тачке могу да се споје глатком кривом.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2): Ово следи директно из тврђења 4.21 и 4.22. Ако је $\mathbf{F}$ конзервативно, тада, из тврђења 4.22 следи да су за сваке две тачке, свака два криволинијска интеграла дуж кривих које их спајају једнака, па из тврђења 4.21 следи да је интеграл дуж сваке затворене криве једнак нули.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Нека је $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$ за сваку затворену део-по-део глатку криву $\mathcal{C} \subset D$. Фиксирајмо тачку $A_0(x_0, y_0, z_0) \in D$. За другу, произвољну, тачку $A(x, y, z) \in D$ дефинишимо функцију f као

$$f(x, y, z) := \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

где је $\mathcal{C}$ произвољна глатка крива у D која спаја A_0 и A. Пре свега, приметимо да ова дефиниција функције f не зависи од избора криве $\mathcal{C}$, јер по претпоставци је интеграл поља $\mathbf{F}$ дуж сваке затворене криве једнак нули, а из тврђења 4.21 следи да интеграл дуж произвољне криве од A_0 до A не зависи од избора саме криве.

Докажимо још да је $\nabla f = \mathbf{F}$. Доказаћемо да је $f'_x = P$, доказ преосталих двеју једнакости $f'_y = Q$ и $f'_z = R$ је исти. Имамо

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}{h}, \quad (49)$$

где је $\mathcal{C}_1$ произвољна крива која спаја A_0 и $A(x, y, z)$, а $\mathcal{C}_2$ произвољна крива која спаја A_0 и $A_h(x+h, y, z)$. Спојимо тачке A и A_h кривом која је дуж AA_h, тј. кривом γ која има параметризацију

$$\gamma(t) = (x + th, y, z), \quad t \in [0, 1].$$

Како је крива

$$\mathcal{C}_1 \cup \gamma \cup \mathcal{C}_2^-$$

затворена, то је интеграл поља $\mathbf{F}$ дуж ње једнак нули, па је

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.$$

Како је $\gamma'(t) = (h, 0, 0)$, то је $\mathrm{d}\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = (h, 0, 0)\, dt$, па имамо

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 P(x + th, y, z)\, dt.$$

Зато, из (49) имамо

$$f'_x(x, y, z) = \lim_{h\to 0} \frac{h\int_0^1 P(x+th, y, z)\, dt}{h} \stackrel{(\heartsuit)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{P(x+ch, y, z)h}{h} = \lim_{h\to 0} P(x+ch, y, z) \stackrel{(\diamondsuit)}{=} P(x, y, z).$$

Једнакост ($\heartsuit$) важи за неко $c \in [0,1]$, због Теореме о средњој вредности за интеграле, док једнакост ($\diamondsuit$) важи јер је функција P непрекидна. $\square$

Задатак 4.24. Нека је област $D \subset \mathbb{R}^2$ просто-повезана (видети дефиницију 4.48 на страни 94). Доказати да је $\mathbf{F} = (P, Q)$ конзевативно поље на D ако и само важи $P'_y = Q'_x$. [Упутство: Гринова теорема и теорема 4.23.] ✓

4.2. Површински интеграли

Дефиниција 4.25. $\mathcal{S}$ је *параметризована површ* ако је $\mathcal{S} = \mathbf{r}(D)$, где је $\mathbf{r} : D \to \mathbb{R}^3$ $1-1$ пресликавање, непрекидно заједно са својим парцијалним изводима, а $D \subset \mathbb{R}^2$ отворен скуп (дакле $\mathbf{r}$ је сада функција од две променљиве, које називамо *параметрима*). Кажемо да је параметризација $\mathbf{r}$ *регуларна* ако су вектори $\mathbf{r}'_u(u,v)$ и $\mathbf{r}'_v(u,v)$ линеарно независни за свако $(u,v) \in D$. $\diamondsuit$

Напомена 4.26. У Поглављу 2 дефинисали смо регуларну површ као скуп решења одређене једначине, $\mathcal{S} := \{f(x,y,z) = 0\}$, где је f регуларна на $\mathcal{S}$, тј. $\nabla f \neq \mathbf{0}$ на $\mathcal{S}$. Може се доказати да су ове две дефиниције (локално[13]) еквивалентне. $\diamond$

Пример 4.27. График било које глатке функције $z = \varphi(x,y)$ је регуларна површ. Заиста, једна њена параметризација је

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \varphi(u,v),$$

па је

$$\mathbf{r}'_u = (1, 0, \varphi'_u), \quad \mathbf{r}'_v = (0, 1, \varphi'_v),$$

а ова два вектора су очигледно линеарно независна. С друге стране, ако хоћемо да график запишемо као скуп нула функције f, тада је $f(x,y,z) := \varphi(x,y) - z$, па је $\nabla f = (\varphi'_x, \varphi'_y, -1) \neq \mathbf{0}$. ✓

Пример 4.28. Наведимо неке параметризације површи другог реда:

(1) сфера полупречника R, дата једначином $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$:

$$x(u,v) = R\cos u \sin v, \quad y(u,v) = R\sin u \sin v, \quad z(u,v) = R\cos v,$$
$$u \in [0, 2\pi), \ v \in [0, \pi];$$

[13] Ако је $\mathcal{S}$ регуларна у смислу једне од ове две дефиниције, онда свака тачка има околину која задовољава другу од те две дефиниције.

(2) елипсоид дефинисан једначином $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$:

$$x(u,v)=a\cos u\sin v,\quad y(u,v)=b\sin u\sin v,\quad z(u,v)=c\cos v,$$
$$u\in[0,2\pi),\ v\in[0,\pi];$$

(3) једнограни хиперболоид дефинисан једначином $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$:

$$x(u,v)=a\cos u\sec v,\quad y(u,v)=b\sin u\sec v,\quad z(u,v)=c\cdot\operatorname{tg} v,$$
$$u\in[0,2\pi),\ v\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

($\sec=\frac{1}{\cos}$ је функција *секанс*);

(4) двограни хиперболоид дефинисан једначином $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$:

$$x(u,v)=a\cos u\operatorname{tg} v,\quad y(u,v)=b\sin u\operatorname{tg} v,\quad z(u,v)=\pm c\sec v,$$
$$u\in[0,2\pi),\ v\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right);$$

(5) конус дефинисан једначином $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$:

$$x(u,v)=au\cos v,\quad y(u,v)=bu\sin v,\quad z(u,v)=cu,\quad u\in\mathbb{R},v\in[0,2\pi);$$

(6) хиперболички цилиндар дефинисан једначином $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$x(u,v)=\pm a\sec u,\quad y(u,v)=b\operatorname{tg} u,\quad z(u,v)=v,\quad u\in[0,2\pi),\ v\in\mathbb{R};$$

(7) елиптички цилиндар дефинисан једначином $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$x(u,v)=a\cos u,\quad y(u,v)=b\sin u,\quad z(u,v)=v,\quad u\in[0,2\pi),\ v\in\mathbb{R};$$

(8) параболички цилиндар $y^2=2px$:

$$x(u,v)=\frac{u^2}{2p},\quad y(u,v)=u,\quad z(u,v)=v,\quad u,v\in\mathbb{R};$$

(9) параболоиди $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (елиптички) и $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ (хиперболички) су графици, па је њихова параметризација објашњена у претходном примеру.

✓

Задатак 4.29. Које су од наведених параметризација регуларне? Оне које нису, у којим тачкама то нису? Колика је површина скупа тачака у којима се евентуално нарушава регуларност датих параметризација? ✓

У наставку поглавља ћемо да дефинишемо интеграл по регуларној површи. Као и у случају криволинијског интеграла, разликоваћемо интеграл функције и интеграл векторског поља.

Површински интеграл функције

Подсетимо се да смо дужину дела криве параметризоване са $\mathbf{r}$ апроксимирали величином $\|\mathrm{d}\mathbf{r}(\Delta t\mathbf{e})\|$, где је Δt (одговарајући) део дужине интервала (дакле, домена пресликавања $\mathbf{r}$), $\mathbf{e}$ јединични вектор у $\mathbb{R}$ (видети напомену 4.6). Дакле, дужину смо апроксимирали сликом дужине у домену, при пресликавању $\mathrm{d}\mathbf{r}$. У случају површине ћемо урадити исту ствар, Наиме, ако је

$$\Delta_{ij} = \Delta u_i \Delta v_j = P(\Pi_{ij}), \quad \Pi_{ij} \subset D$$

површина правоуганика са страницама Δu_i и Δv_j, површину дела површи $\mathbf{r}(\Pi_{ij}) \subset \mathcal{S}$ ћемо апроксимирати површином ΔS_{ij} паралелограма P_{ij} разапетим векторима

$$\mathrm{d}\mathbf{r}(A_{ij})(\Delta u_i \mathbf{e}) \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\mathbf{r}(A_{ij})(\Delta v_j \mathbf{f}),$$

где су $\mathbf{e}$ и $\mathbf{f}$ базни вектори у $\mathbb{R}^2$, а A_{ij} произвољна тачка из правоугаоника Π_{ij}. Како је

$$\mathrm{d}\mathbf{r}(A_{ij})(\Delta u_i \mathbf{e}) = \Delta u_i \mathrm{d}\mathbf{r}(A_{ij})(\mathbf{e}) = \Delta u_i \mathbf{r}'_u(A_{ij}),$$
$$\mathrm{d}\mathbf{r}(A_{ij})(\Delta v_j \mathbf{f}) = \Delta v_j \mathrm{d}\mathbf{r}(A_{ij})(\mathbf{f}) = \Delta v_j \mathbf{r}'_v(A_{ij}),$$

имамо

$$P(\mathbf{r}(\Pi_{ij})) \approx \Delta S_{ij} = P(P_{ij}) =$$
$$\|\Delta u_i \mathbf{r}'_u(A_{ij}) \times \Delta v_j \mathbf{r}'_v(A_{ij})\| = \|\mathbf{r}'_u(A_{ij}) \times \mathbf{r}'_v(A_{ij})\| \Delta_{ij}.$$

Површину површи $\mathcal{S}$ дефинишемо као лимес (у простору подела) $\sum \Delta S_{ij}$:

$$P(\mathcal{S}) := \lim \sum \Delta S_{ij} = \lim \sum \|\mathbf{r}'_u(A_{ij}) \times (A_{ij}) \mathbf{r}'_v(A_{ij})\| \Delta_{ij}.$$

Како је последњи израз интегрална сума за двоструки интеграл функције $\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|$, добијамо формулу

$$P(\mathcal{S}) = \iint_D \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \, dudv. \tag{50}$$

Напомена 4.30. Израз $\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \, dudv$ означавамо са dS и називамо *елементом површине.* ◇

Пример 4.31. Израчунајмо dS у случају сфере полупречника R параметризоване као у примеру 4.28. Имамо

$$\mathbf{r}(u,v) = (R\cos u \sin v, R\sin u \sin v, R\cos v),$$
$$\mathbf{r}'_u = (-R\sin u \sin v, R\cos u \sin v, 0),$$
$$\mathbf{r}'_v = (R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, -R\sin v),$$

па је

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = R^2(-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\sin v \cos v), \; \|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| = R^2 \sin v,$$

односно

$$dS = R^2 \sin v \, dudv.$$

$\checkmark$

Задатак 4.32. Израчунати dS за остале параметризације из примера 4.28. $\checkmark$

Слично криволинијском, површински интеграл скалар-функције дефинишемо као лимес у простору подела интегралне суме:

$$S(f, \mathcal{S}, \mathcal{P}) := \sum f(\mathbf{r}(A_{ij}))\Delta S_{ij} = \sum f(\mathbf{r}(A_{ij}))P(P_{ij}),$$

где је, као малочас, $P_{ij} = \mathbf{r}(\Pi_{ij})$, а $A_{ij} \in \Pi_{ij} \subset D$ произвољна тачка. Користимо ознаку

$$\iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) \, dS.$$

Као код криволинијског интеграла, користећи Теорему о средњој вредности за двоструке интеграле, добијамо формулу за израчунавање површинског интеграла:

$$\iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) \, dS = \iint_{D} f(\mathbf{r}(u, v))\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\| \, dudv, \tag{51}$$

где је на десној страни горње једнакости двоструки интеграл. Наводимо својства површинског интеграла која су директна последица, или дефиниције, или горње формуле за израчунавање.

Тврђење 4.33. Нека су f и g непрекидне на регуларној параметризованој површи $\mathcal{P}$. Тада важи

(1) (линеарност) $\iint_{\mathcal{P}} (\lambda f(x, y, z) + \mu g(x, y, z)) \, dS = \lambda \iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) \, dS + \mu \iint_{\mathcal{P}} g(x, y, z) \, dS$;

(2) $\iint_{\mathcal{P}} 1 \, dS = P(\mathcal{P})$ (где је P површина);

(3) (адитивност по скупу) ако је $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, при чему се површи $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ секу по регуларној кривој (тј. скупу површине нула), онда је

$$\iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) \, dS = \iint_{\mathcal{P}_1} f(x, y, z) \, dS + \iint_{\mathcal{P}_2} f(x, y, z) \, dS;$$

(4) $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z) \Rightarrow \iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) \, dS \leqslant \iint_{\mathcal{P}} g(x, y, z) \, dS$;

(5) (Теорема о средњој вредности) $\iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z) \, dS = f(x_0, y_0, z_0)P(\mathcal{P})$ за неко $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$. $\square$

Пример 4.34. Израчунајмо dS, тј. изведимо формулу за рачунање површинског интеграла по површи која је график функције $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. Као што смо већ видели, за параметре можемо узети x и y (и нећемо уводити нова слова u и v). Имамо

$$dS = \|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\|\, dxdy = \| \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{bmatrix} \|\, dxdy =$$

$$\|(-z'_x, -z'_y, 1)\|\, dxdy = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy,$$

па је

$$\iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z)\, dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy.$$

✓

Поново, ако је површ $\mathcal{P}$ унија коначно много параметризованих регуларних површи $\mathcal{P}_j$ од којих се сваке две или не секу, или се секу по регуларној кривој, површински интеграл по $\mathcal{P}$ дефинишемо као збир $\iint_{\mathcal{P}} f(x, y, z)\, dS := \sum \iint_{\mathcal{P}_j} f(x, y, z)\, dS$.

Површински интеграл векторског поља

Означимо са $\mathrm{d}\mathbf{S} := \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\, dudv$. Веза између претходних и ове ознаке је, као и код криволинијског интеграла: $\|\mathrm{d}\mathbf{S}\| = dS$.

Приметимо да већина површи има две стране, нпр. сфера, елипсоид и хиперболоид имају унутрашњу и спољашњу страну, параболоиди имају горњу и доњу итд.[14] Приметимо такође да је вектор $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v$ нормалан на тангентну раван $T\mathcal{P}$ у свакој тачки, јер је нормалан на два линеарно независна вектора $\mathbf{r}'_u$ и $\mathbf{r}'_v \in T\mathcal{P}$. Вектор $\mathbf{r}'_u$ припада $T\mathcal{P}$ јер је вектор тангенте на криву која лежи на површи $\mathcal{P}$. Наиме, ако дефинишемо[15]

$$\gamma(t) := \mathbf{r}(t + u_0, v_0),$$

тада је $\gamma'(0) = \mathbf{r}'_u(u_0, v_0)$. Исто важи за $\mathbf{r}'_v$.

Означимо са $\mathbf{n}$ јединични вектор нормале на површ:

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v}{\|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\|}.$$

Можемо да дефинишемо страну површи која је индукована параметризацијом $\mathbf{r}$ као ону на коју вектор $\mathbf{n}$ „показује”.[16] Ову страну површи називамо

[14] Све регуларне параметризоване површи имају две стране.

[15] за неку фиксирану тачку из домена пресликавања $\mathbf{r}$

[16] Или, ако замислимо вектор $\mathbf{n}$ као човека коме је стрелица глава, онда је ова страна површи она по којој човек хода.

страном индукованом датом параметризацијом $\mathbf{r}$. Приметимо да замена места параметара u и v мења смер вектора $\mathbf{n}$.

Дефиниција 4.35. Нека је $\mathbf{F}$ непрекидно векторско поље на $\mathcal{P}$. *Површински интеграл* или *флукс* векторског поља $\mathbf{F}$ дуж параметризоване површи $\mathcal{P}$ је површински интеграл функције $f := \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$. Користимо ознаку

$$\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} := \iint_{\mathcal{P}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS,$$

као и (ређе)

$$\iint_{\mathcal{P}} P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy,$$

ако је $\mathbf{F} = (P, Q, R)$. $\diamondsuit$

Приметимо да је

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \|\mathrm{d}\mathbf{S}\|\mathbf{n} = dS\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v}{\|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\|}\|\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\| dudv = \mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\, dudv,$$

па се површински интеграл векторског поља рачуна као

$$\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\cdot(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)\, dudv. \tag{52}$$

Напомена 4.36. Ако је $\mathcal{P}$ део регуларне површи $\{(x,y,z) \mid \varphi(x,y,z) = 0\}$, онда је $\mathbf{n} = \pm\frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}$, па је

$$\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \pm\iint_{\mathcal{P}}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}\right) dS.$$

Знак $+$ или $-$ бирамо у зависности од тога о којој се страни површи ради. $\diamond$

Ако је непараметризована површ задата заједно са избором једне стране, онда кажемо да је она *оријентисана*. Ако треба да интегралимо векторско поље по задатој страни оријентисане површи, онда бирамо параметризацију $\mathbf{r}$ такву да страна која долази са $\mathbf{r}$ буде она задата. Из претходне дискусије видимо да је

$$\iint_{\mathcal{P}^-} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

где је $\mathcal{P}^-$ иста површ, само са изабраном супротном страном (тј. супротно оријентисана).

Пример 4.37. Израчунајмо интеграл векторског поља $F(x,y,z) = (x,y,z)$ по спољашњој страни сфере са центром у $(0,0,0)$ полупречника 2.[17] У примеру 4.31

[17] Иако параметризација из примера 4.28 није регуларна у свакој тачки, она то јесте свуда сем на скупу површине нула, који нема утицаја на површинске и двоструке интеграле.

смо видели да је

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathbf{S} &= 4(-\cos u \sin^2 v, -\sin u \sin^2 v, -\sin v \cos v)\, dudv = \\ &- 4\sin v(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)\, dudv = -2\sin v\, \mathbf{F}\, dudv,\end{aligned}$$

(јер је $\mathbf{F} = 2(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$) па је

$$\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -2\sin v\, (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F})\, dudv = -8\sin v\, dudv.$$

Приметимо да овај избор параметара не даје тражену оријентацију. Заиста, ако, нпр, ставимо $u = v = \frac{\pi}{4}$, добијамо да је $\mathrm{d}\mathbf{S}$ усмерен као и вектор $-4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, тј. да не показује на спољашњост сфере, па ћемо, у наставку задатка, интеграл рачунати са знаком $-$. Имамо

$$\iint_{\mathbb{S}^2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint\limits_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} (-8\sin v)\, dudv = 32\pi.$$

✓

Напомена 4.38. Помоћу формула (52), (51) и Теореме о смени промењиве у двоструком интегралу може да се докаже да површински интеграл не зависи од избора регуларне параметризације, до на знак. ◇

Као и за површински интеграл скалар-функције, можемо дефинисати површински интеграл векторског поља по површи која је унија регуларних које се секу по регуларним кривама. Такође, линеарност и адитивност по скупу важе и у овом случају.

Напомена 4.39. (терминологија) Површински интеграл функције $\iint_{\mathcal{P}} f\, ds$ се назива и *површинским интегралом прве врсте*, а површински интеграл векторског поља $\iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ се назива и *површинским интегралом друге врсте.* ◇

Задатак 4.40. Нека је површ $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$. Изразити преко двоструког површински интеграл функције $f(x, y)$ и векторског поља $\mathbf{F}(x, y)$ дуж $\mathcal{P}$. ✓

4.3. Стоксова и Гаусова формула

У овом поглављу ћемо доказати још две интегралне формуле које, попут Гринове и Њутн-Лајбницове, дају везу између (неког) интеграла пресликавања $\mathbf{F}$ по рубу скупа ∂D и (неког) интеграла по скупу D неке врсте извода пресликавања $\mathbf{F}$. Кратак начин да се ово запише је

$$\int_{\partial D} \cdot = \int_D \nabla \cdot$$

(ова формула прави дуалност између ∂ и ∇). Пре свега, треба да објаснимо шта све оператор ∇ може да представља.

Оператор ∇ (набла)

Ми смо се са оператором ∇ већ сусрели, кад смо дефинисали градијент функције. Дакле ако ∇ делује на скалар-функцију f, резултат је векторско поље, и то:

$$\nabla f(x,y,z) = (f'_x(x,y,z), f'_y(x,y,z), f'_z(x,y,z)). \tag{53}$$

Ако уведемо ознаку

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

тада формулу (53) можемо да упоредимо са множењем скалара и вектора, с тим да функцију f схватамо као скалар, а ∇ као вектор:

$$f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f, \frac{\partial}{\partial y} f, \frac{\partial}{\partial z} f\right) = (f'_x, f'_y, f'_z).$$

Ако векторско поље $\mathbf{F}$, у складу са претходним коментаром, схватимо као вектор, тада спаривање оператора ∇ и поља $\mathbf{F}$ можемо да дефинишемо на два начина: један који ће по свом облику одговарати скаларном множењу вектора и други који ће одговарати векторском производу.

Дефиниција 4.41. Ако оператор ∇ делује на векторско поље $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ по правилу

$$\nabla \cdot \mathbf{F} := P'_x + Q'_y + R'_z,$$

тада се резултат (који је скалар-функција) зове *дивергенција* поља $\mathbf{F}$. Користи се и ознака (осим горње) $\operatorname{div} \mathbf{F}$. $\Diamond$

Приметимо да, у случају дивергенције, оператор ∇ дејствује као скаларни производ:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = P'_x + Q'_y + R'_z.$$

Дефиниција 4.42. Ако оператор ∇ делује на векторско поље $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ по правилу

$$\nabla \times \mathbf{F} := (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y),$$

тада се резултат (који је векторско поље) зове *ротор* поља $\mathbf{F}$ и понекад се (осим горње ознаке) означава и са $\operatorname{rot} \mathbf{F}$. $\Diamond$

У случају ротора, оператор ∇ дејствује као векторски производ:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{bmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}R - \frac{\partial}{\partial z}Q, \frac{\partial}{\partial z}P - \frac{\partial}{\partial x}R, \frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P\right) = (R'_y - Q'_z, P'_z - R'_x, Q'_x - P'_y).$$

Пример 4.43. Докажимо да, за скалар-функцију f важи $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$, тј. $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = \mathbf{0}$ (ово одговара особини векторског производа $\mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{u}) = \mathbf{0}$). Имамо

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (f'_x, f'_y, f'_z) =$$
$$(f''_{zy} - f''_{yz}, f''_{xz} - f''_{zx}, f''_{yx} - f''_{xy}) = (0,0,0),$$

ако је f „довољно глатка”. ✓

Задатак 4.44. Доказати да је $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ (тј. $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$). Ком својству векторског производа одговара ова формула? ✓

Стоксова формула

Теорема 4.45. *Нека је проста, део-по-део глатка, затворена крива $\mathcal{C}$ граница површи $\mathcal{P}$, тако да је површ $\overline{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \cup \mathcal{C}$ параметризована регуларном параметризацијом $\mathbf{r}$. Нека је $\mathcal{C}$ оријентисана тако да приликом обиласка по $\mathcal{C}$, она страна површи $\mathcal{P}$ која је индукована параметризацијом $\mathbf{r}$ остаје са леве стране.*[18] *Ако је $\mathbf{F}$ глатко векторско поље*[19] *на $\overline{\mathcal{P}}$, тада важи формула*

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{54}$$

(Стоксова формула). Интеграција на десној страни се врши по оној страни површи $\mathcal{P}$ коју индукује параметризација $\mathbf{r}$.

Доказ. Из линеарности оба интеграла у (54) следи да је довољно да докажемо да формула (54) важи ако је $\mathbf{F}$ облика $(P,0,0)$, $(0,Q,0)$ и $(0,0,R)$. Ми ћемо то урадити за случај $\mathbf{F} = (P,0,0)$, остала два случаја се доказују на исти начин и остављамо их за вежбу.

Претпоставимо, дакле, да је $\mathbf{F} = (P,0,0)$.

Нека је $D \subset \mathbb{R}^2$ скуп параметара, тј. $\mathbf{r}(D) = \mathcal{P}$. Означимо криву $L := \partial D$ оријентисану тако да D остаје с леве стране. Тада је $\mathbf{r}(L) = \mathcal{C}$ и ова параметризација нам даје оријентацију из формулације теореме.

[18] Ово правило називамо и *правилом десне руке*, јер, ако замишљамо да ходамо по кривој, тада нам палац десне руке показује ка глави, а остали прсти смер кретања.

[19] Тј. $\mathbf{F} = (P,Q,R)$, и парцијални изводи функција P, Q и R су непрекидни.

У наставку доказа ћемо свести криволијски интеграл у (54) на криволинијски по L, а површински у (54) свести на двоструки по D и видети да су, по Гриновој формули (46), ова два интеграла једнака.

Нека је $L \subset \mathbb{R}^2$ параметризована са $(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$. Како је $\mathcal{C}$ параметризована као део површи $\mathcal{P}$, то је параметризација криве $\mathcal{C}$ дата са

$$\mathbf{r}(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))), \quad t \in [a, b].$$

Имамо:

$$\begin{aligned}
&\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b (P(x, y, z), 0, 0) \cdot (x'_t, y'_t, z'_t)\, dt = \\
&\int_a^b P\big(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))\big) x'_t \, dt = \\
&\int_a^b P(\cdots)(x'_u u' + x'_v v')\, dt = \\
&\oint_L P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) x'_u du + P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) x'_v dv.
\end{aligned}$$

Ако на последњи израз применимо Гринову формулу, добијамо:

$$\begin{aligned}
&\oint_L P(\cdots)x'_u du + P(\cdots)x'_v dv = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}(P(\cdots)x'_v) - \frac{\partial}{\partial v}(P(\cdots)x'_u) \right) dudv = \\
&\iint_D [(P'_x x'_u + P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v + P x''_{uv} - (P'_x x'_v + P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u - P x''_{uv}]\, dudv \\
&= \iint_D [(P'_y y'_u + P'_z z'_u)x'_v - (P'_y y'_v + P'_z z'_v)x'_u]\, dudv \\
&= \iint_D [P'_y (y'_u x'_v - y'_v x'_u) + P'_z (z'_u x'_v - z'_v x'_u)]\, dudv.
\end{aligned} \tag{55}$$

Што се тиче површинског интеграла у (54) имамо:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \\
&\iint_D [(0, P'_z, -P'_y) \cdot (y'_u z'_v - y'_v z'_u, x'_v z'_u - x'_u z'_v, x'_u y'_v - x'_v y'_u)]\, dudv = \\
&\iint_D [P'_z (x'_v z'_u - x'_u z'_v) - P'_y (x'_u y'_v - x'_v y'_u)]\, dudv.
\end{aligned} \tag{56}$$

Из једнакости подинтегралних функција у последњим интегралима у (55) и (56) следи тврђење теореме. □

Пример 4.46. Нека је $\mathcal{C}$ проста затворена крива у равни $\alpha : 2x+2y+z = 2$. Доказаћемо да $\oint_{\mathcal{C}} 2ydx + 3zdy - xdz$ зависи само од површине области $\mathcal{D}$ у равни α коју ограничава $\mathcal{C}$, а не од облика криве $\mathcal{C}$. Из Стоксове формуле је

$$\oint_{\mathcal{C}} 2ydx + 3zdy - xdz = \iint_{\mathcal{D}} (-3, 1, -2) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}.$$

Пошто је $dS = \|\mathrm{d}\mathbf{S}\|$, то је $\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathbf{n}\, dS$, где је $\mathbf{n}$ јединична нормална на раван α усмерена као и $\mathrm{d}\mathbf{S}$. Како је $\mathbf{n} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$ то је

$$\iint_{\mathcal{D}} (-3, 1, -2) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{D}} (-3, 1, -2) \cdot \mathbf{n}\, dS = -2 \iint_{\mathcal{D}} dS = -2P(\mathcal{D}).$$

✓

Задатак 4.47. Доказати да се у равном случају, тј. у случају $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$, $\mathcal{C} = \partial\mathcal{P}$, $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$, Стоксова формула своди на Гринову. ✓

Конзервативна поља у просто-повезаним областима

Подсетимо се да смо у примеру 4.43 видели да је $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$, што значи да ако је $\mathbf{F} = \nabla f$ (овакво векторско поље смо звали конзервативним), онда обавезно важи $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Међутим, ако област D у $\mathbb{R}^3$ има нека посебна својства, тада је овај услов ($\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$) и довољан да поље буде конзервативно, и то је последица Стоксове формуле и теореме 4.23.

Да бисмо дефинисали појам просто-повезане области, пре свега приметимо да затворена крива $\mathcal{C}$, тј. она за коју постоји параметризација $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ тдј. $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, има то својство да је слика јединичног круга $\mathbb{S}^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ при неком пресликавању.[20]

Дефиниција 4.48. Нека је $D \subset \mathbb{R}^n$ област са следећим својством: за сваку непрекидну затворену криву $\mathbf{r} : \mathbb{S}^1 \to D$ постоји непрекидно пресликавање $\mathbf{d} : \mathbb{D}^2 \to D$ такво да је рестрикција $\mathbf{d}|_{\mathbb{S}^1} = \mathbf{r}$, где је $\mathbb{D}^2 := \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Кажемо да је област D *просто-повезана*. ♢

Неформално говорећи, просто повезана област је она код које свака затворена крива може да се „попуни” непрекидном површи. У равни, просто повезане области су оне које „немају рупа”. Нпр. $\{x^2 + y^2 < 1\}$ је просто повезана у $\mathbb{R}^2$, а $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ и $\{1 < x^2 + y^2 < 2\}$ нису. У $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ јесте просто повезана, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ није просто повезана.

Ми ћемо овде подразумевати нешто јачу дефиницију, наиме, претпоставићемо да се свака део-по-део глатка затворена крива може проширити на површ која је такође глатка.

[20] И то, непрекидна затворена крива је непрекидна слика јединичног круга, а део-по-део глатка затворена крива је део-по-део глатка слика јединичног круга. Овде нисмо прецизно дефинисали непрекидна или глатка пресликавања из круга у $\mathbb{R}^n$, али интуитивно је јасно шта то значи.

Следећа теорема је последица Стоксове формуле и теореме 4.23.

Теорема 4.49. *Нека је $D \subset \mathbb{R}^3$ просто-повезана и $\mathbf{F}$ глатко векторско поље дефинисано у D. Тада су следећи услови еквивалентни:*

(1) $\mathbf{F}$ *је конзервативно;*
(2) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Доказ. (1) $\Rightarrow$ (2) је пример 4.43.
(2) $\Rightarrow$ (1): Нека је $\mathcal{C}$ произвољна део-по-део глатка затворена крива и $\mathcal{P}$ глатка површ чија је граница $\mathcal{C}$ (која постоји због просте повезаности). Из Стоксове теореме имамо

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{P}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{P}} \mathbf{0} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0,$$

а како је $\mathcal{C}$ произвољна, из теореме 4.23 следи да је $\mathbf{F}$ конзервативно. □

Пример 4.50. За векторско поље $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ важи $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Међутим, интеграл по кругу $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $t \in [0, 2\pi]$, поља $\mathbf{F}$ није једнак нули, већ 2π. Ово није у контрадикцији са теоремом 4.49, јер је област у којој је дефинисано поље $\mathbf{F}$ скуп $\mathbb{R}^3$ без z-осе, која није просто повезана (видети и задатак 10 поглавља 4). ✓

Гаусова формула

Последња интегрална формула са којом завршавамо ову главу је Гаусова, која доводи у везу површински интеграл по рубу области у простору и троструки интеграл по тој области.

Теорема 4.51. *Нека је регуларна површ $\mathcal{S}$ граница компактног скупа $T \subset \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{F}$ глатко векторско поље на T. Тада важи формула:*

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{T} \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz,$$

при чему се на левој страни интеграли по спољашњој страни површи $\mathcal{S}$.

Доказ. Доказ је сличан доказу Гринове формуле, само у једној димензији више. Претпоставићемо, као и тамо, да је $\mathcal{S}$ могуће написати као унију два графика, и то на три начина:

$$\mathcal{S} = \mathcal{P} \cup \mathcal{Q} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{Q}_2,$$

где је

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}, \quad \mathcal{Q} = \{(x, y, z) \mid z = g(x, y)\}, \quad (x, y) \in D \\
\mathcal{P}_1 &= \{(x, y, z) \mid x = f_1(y, z)\}, \quad \mathcal{Q}_1 = \{(x, y, z) \mid x = g_1(y, z)\}, \quad (y, z) \in D_1 \\
\mathcal{P}_2 &= \{(x, y, z) \mid y = f_2(z, x)\}, \quad \mathcal{Q}_2 = \{(x, y, z) \mid y = g_2(z, x)\}, \quad (z, x) \in D_2
\end{aligned}$$

тј. да је скуп T описан као

$$\begin{aligned}T &= \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ f(x,y) \leqslant z \leqslant g(x,y)\}\\ &= \{(x,y,z) \mid (y,z) \in D_1,\ f_1(y,z) \leqslant x \leqslant g_1(y,z)\}\\ &= \{(x,y,z) \mid (z,x) \in D_2,\ f_2(z,x) \leqslant y \leqslant g_2(z,x)\}.\end{aligned}$$

(Пример овакве површи је сфера или елипсоид.) Нека је

$$\mathbf{F} = (P,Q,R) = (P,0,0) + (0,Q,0) + (0,0,R).$$

Довољно је да докажемо да тврђење важи ако $\mathbf{F}$ има један од наведена три облика, због линеарности површинског и троструког интеграла. Нека је, зато $\mathbf{F} = (0,0,R)$ (преостала два случаја се доказују слично, само што се бирају преостала два разлагања површи $\mathcal{S}$). У примеру 4.34 смо видели да је на површи $\mathcal{Q}$ (будући графику), $\mathrm{d}\mathbf{S} = (-g'_x, -g'_y, 1)\,dxdy$. За површ $\mathcal{P}$ ће бити $\mathrm{d}\mathbf{S} = (f'_x, f'_y, -1)\,dxdy$ (овде смо узели супротан знак због оријентације, јер хоћемо да интегралимо по спољашњости површи, што за доњу површ значи да $\mathrm{d}\mathbf{S}$ треба да буде усмерен „на доле”, односно, да z координата вектора $\mathrm{d}\mathbf{S}$ буде негативна). Имамо:

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\mathcal{P}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \iint_{\mathcal{Q}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} =\\ &\iint_D (0,0,R)\cdot(f'_x, f'_y, -1)\,dxdy + \iint_D (0,0,R)\cdot(-g'_x, -g_y, 1)\,dxdy =\\ &\iint_D \big[R\big(x,y,g(x,y)\big) - R\big(x,y,f(x,y)\big)\big]\,dxdy.\end{aligned}$$

С друге стране, имамо $\nabla\cdot\mathbf{F} = R'_z$, па је, због Фубинијеве теореме и Њутн-Лајбницове формуле:

$$\begin{aligned}&\iiint_T \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_T R'_z(x,y,z)\,dxdydz =\\ &\iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} R'_z(x,y,z)dz\right) dxdy =\\ &\iint_D \big[R\big(x,y,g(x,y)\big) - R\big(x,y,f(x,y)\big)\big]\,dxdy.\end{aligned}$$

□

4.4. Задаци

1. Израчунати $\int\limits_{\gamma} z\,ds$, ако је крива γ дата својом параметризацијом $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, за $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

2. Израчунати $\int\limits_{c} (x+y)\,ds$, где је c руб троугла $\triangle OAB$: $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

3. Израчунати $\int\limits_{\gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, ако је $\gamma : x^2+y^2 = ax$, $a > 0$.

4. Израчунати $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$, ако је γ позитивно оријентисан руб квадрата $ABCD$, где је $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ и $D(0,-1)$.

5. Израчунати $\oint\limits_{\gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$ и γ контура која ограничава део сфере $x^2+y^2+z^2 = 1$ у првом октанту, при чему је смер обиласка криве супротан смеру казаљке на сату ако се гледа из тачке $(100,100,0)$.

6. Нека је крива c пресек површи $S_1 : z = 1-x^2$ и $S_2 : z = x^2+y^2$, оријентисана супротно од смера казаљке на сату ако се посматра из тачке $(0,0,2013)$. Израчунати интеграл $\oint\limits_{c} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$.

7. Израчунати $\oint\limits_{\gamma} x^2y dx + xy^2 dy$, ако је γ позитивно оријентисана кружница $x^2+y^2 = a^2$.

8. Израчунати $\oint\limits_{\gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је γ позитивно оријентисана граница области $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi, 0 < y < \sin x\}$ и $\mathbf{F}(x,y) = (e^x(1-\cos y), -e^x(y-\sin y))$.

9. Израчунати $\int\limits_{\gamma} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је γ крива $y = -\sqrt{2x-x^2}$, при чему се интеграција врши од тачке $A(2,0)$ до тачке $B(0,0)$ и $\mathbf{F}(x,y) = (e^{x+y}\sin 2y + x + y, e^{x+y}(2\cos 2y + \sin 2y) + 2x)$.

10. Израчунати $\oint\limits_{\gamma} \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, ако је γ затворена проста крива која не пролази кроз $(0,0)$, оријентисана позитивно (супротно од казаљке на сату).

11. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(3,-4)} x\,dx + y\,dy.$

12. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$ дуж путање која не сече y-осу.

13. Израчунати $\displaystyle\iint_S (x+y+z)\,dS$, где је $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = a^2, z \geqslant 0\}$, $a > 0$.

14. Израчунати $\displaystyle\iint_S z\,dS$, ако је површ S дата својом параметризацијом $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $0 < u < a$, $0 < v < 2\pi$, $a > 0$.

15. Израчунати $\displaystyle\iint_S (xy+yz+zx)\,dS$, где је S део конуса $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ограничен цилиндром $x^2+y^2 = 2ax$, $a > 0$.

16. Израчунати $\displaystyle\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, где је S граница тела $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

17. Израчунати површину сфере $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = R^2\}$.

18. Израчунати $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ и S спољашња страна сфере $S : x^2+y^2+z^2 = a^2$.

19. Израчунати $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, где је S спољашња страна елипсоида $S : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ и $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{z}\right)$.

20. Израчунати $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, где је S спољашња страна границе тела $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$, $x^2+y^2 \leqslant z^2$, $a > 0$ и $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$.

21. Израчунати $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ и S спољашња страна конуса $S : z^2 = x^2+y^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$.

22. Израчунати $\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z)=(x-y+z, y-z+x, z-x+y)$ и S спољашња страна површи $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$.

23. Израчунати $\oint\limits_\gamma ydx+z^2dy+x^2dz$, ако је γ кружница $x^2+y^2+z^2=4$, $z=\sqrt{3}$. Смер кретања је супротан од кретања казаљке на сату ако се гледа из тачке $(0,0,2016)$.

24. Израчунати $\oint\limits_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z)=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$ и γ пресек омотача коцке $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ и равни $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$, $a>0$. Смер кретања је супротан од кретања казаљке на сату ако се гледа из тачке $(50,50,50)$.

4.5. Задаци за вежбу

25. Навести параметарске једначине две различите криве са почетком у тачки $A(0,1,0)$ и крајем у тачки $B(0,0,1)$.

26. Израчунати $\int\limits_c \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z)=(e^x+y+z, x+e^y+z, x+y+e^z)$ и c крива добијена у пресеку површи $z=\sqrt{x^2+3y^2}$ и $x^2+y^2=2x$, од тачке $A(0,0,0)$ до тачке $B(1,1,2)$.

27. Израчунати $\int\limits_c \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y)=(4y+e^{\sin x+\cos x}, 2x-\sqrt{y^6+2})$ и c позитивно оријентисана кружница $x^2+y^2=9$.

28. Израчунати $\displaystyle\int\limits_{(1,0)}^{(0,1)} \frac{(5x+1)dy-(5y+1)dx}{(2x+3y+1)^2}$ дуж путање која не сече праву $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$.

29. Израчунати $\int\limits_c \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z)=(z,x,y)$ и ако је крива c добијена у пресеку површи $x^2+y^2+z=4$ и $x^2+y^2+z^2=4z$. Дата крива је оријентисана позитивно ако се гледа из тачке $(0,0,100)$.

30. Израчунати $\int\limits_c \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,y)$, а c крива која се добија у пресеку површи $x^2+y^2=4$ и $x+z=2$. Крива c је оријентисана позитивно ако се гледа из координатног почетка.

31. Израчунати $\int\limits_c \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z^2,x)$, а c крива која се добија у пресеку равни $2x+z=0$ и елипсоида $x^2+5y^2+z^2=1$ и оријентисана је позитивно ако се гледа из тачке $(0,0,2015)$.

32. Израчунати $\int\limits_c y^2dx + x^2dy$, ако је крива c позитивно оријентисана граница троугла $\triangle OAB$: $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$, и то:

а) не користећи Гринову формулу;

б) користећи Гринову формулу.

33. Израчунати $\int\limits_c y^4dx + 2xy^3dy + z^2dz$, ако је c крива која се добија у пресеку површи $x^2+2y^2-z=0$ и равни $z=2$, а оријентисана је позитивно ако се гледа из тачке $(0,0,0)$.

34. а) Доказати да је површина области D дата са $P(D) = \int\limits_{\partial D} xdy$, при чему је крива ∂D оријентисана тако да област D остаје са леве стране.
б) Показати да је површина елипсе $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\leqslant 1$ једнака $ab\pi$.
в) Користећи Стоксову формулу (или другачије) израчунати
$\int\limits_c (x^2-y)dx + (y^2+z)dy + (x+ze^z)dz$, где је c је крива која је оријентисана супротно од казаљке на сату ако се гледа из $(0,0,2014)$ и која се добија у пресеку површи $x^2+y^2+z^2=2z$ и $z=x$.

35. Израчунати површину дела сфере $x^2+y^2+(z-5)^2=20$ изнад параболоида $z-5=x^2+y^2$.

36. Израчунати $\iint\limits_S dS$, где је S део параболоида $z=2-x^2-y^2$ изнад xy - равни и објаснити шта представља добијени резултат.

37. Израчунати $\iint\limits_S x^2\sqrt{5-4z}\,dS$, ако је S део површи $z=1-x^2-y^2$ изнад равни $z=0$.

38. Израчунати површину дела сфере $x^2+y^2+z^2=36$ изнад равни $z=0$, а унутар цилиндра $x^2+y^2=6y$.

39. Нека је дата параметризована површ $f(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 5u)$, $(u,v) \in (0,+\infty) \times (0,2\pi)$. Показати да је дата површ конус и скицирати векторе нормале индуковане оријентације.

40. Израчунати $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, а S спољашња страна површи $x^2+y^2+z^2=4$, $z \geqslant 0$.

41. а) Наћи дивергенцију векторског поља $\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{\rho^3}$, где је $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

б) Доказати да интеграл векторског поља $\mathbf{F}$ по спољашњој страни сфере $x^2+y^2+z^2=r^2$ не зависи од $r>0$.

в) Зашто ипак не можемо да закључимо да је тај интеграл нула?

42. Израчунати $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (5x+y^2-z^3, x-z^2, 2y-z)$, а S спољашња страна границе тела $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, (x-1)^2+y^2 \leqslant 1\,,\, -x \leqslant z \leqslant x\}$.

43. Израчунати $\displaystyle\iint\limits_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, ако је $\mathbf{F}(x,y,z) = (-x+y, -y+e^z, z+x)$, а S спољашња страна границе тела $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, z^2 \geqslant x^2+y^2, 1 \leqslant z \leqslant 2\}$.

ГЛАВА 5

Диференцијалне једначине

Диференцијална једначина је једначина у којој је непозната функција f, а у којој се појављују изводи функције f. Ако је f функција једне променљиве, тада се диференцијална једначина назива *обичном*, а ако је f функција више променљивих (па се у једначини појављују парцијални изводи), тада се једначина зове *парцијалном* диференцијалном једначином. Нпр, једначина:

$$F(x, x', t) = mx''$$

(Други Њутнов закон), у којој је $x = x(t)$ непозната функција, јесте обична диференцијална, а једначина у којој је $u = u(x, y, z, t)$ непозната функција

$$u'_t = a(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz})$$

(једначина провођења топлоте) је парцијална диференцијална једначина. *Ред* диференцијалне једначине је ред највећег извода који се у њој појављује. Тако је ред диференцијалних једначина из наведених примера два. Решити диференцијалну једначину значи одредити све функције f које је задовољавају. Већину диференцијалних једначина је тешко или није могуће решити. Ми ћемо се овде бавити само обичним диференцијалним једначинама, и то неким најједноставнијим облицима, који могу непосредно да се реше.

5.1. Диференцијалне једначине првог реда - неки случајеви који се непосредно решавају

Обична диференцијална једначина првог реда је једначина по $y = y(x)$ (тј. y је непозната функција) облика

$$F(x, y, y') = 0.$$

Овде ћемо објаснити неколико ситуација у којима ова једначина може да се реши. Претпоставићемо да су све функције које се појављују у једначини непрекидне, и где год је потребно довољно пута диференцијабилне, тако да сви изрази које напишемо имају смисла (па се у даљем тексту нећемо задржавати на овим претпоставкама).

Једначина која раздваја променљиве

Ово је једначина облика

$$y' = f(x)g(y).$$

Једначину решавамо тако што запишемо y' као $\frac{dy}{dx}$ и dx и dy третирамо као независне изразе:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx,$$

што нам задаје везу између y и x.

Пример 5.1. Решимо једначину $y' = (1+y^2)e^x$. Имамо

$$\frac{dy}{dx} = (1+y^2)e^x \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = e^x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx \Rightarrow \operatorname{arctg} y = e^x + c,$$

тј. $y = \operatorname{tg}(e^x + c)$. ✓

Треба још да образложимо зашто смо могли да третирамо изразе dx и dy као бројеве и шта смо заправо на тај начин урадили. Наиме, ако кренемо од интеграла $\int \frac{dy}{g(y)}$ и у њему направимо смену променљиве $y = y(x)$, како је $dy = y'dx$, имамо:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{y'dx}{g(y)} = \int \frac{f(x)g(y)dx}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

Ово оправдава поступак који смо објаснили.

Задатак 5.2. Решити једначину $(x+1)y' = x(y^2+1)$, $x > -1$. [Решење: $y = \operatorname{tg}(x - \ln(x+1) + c)$.] ✓

Линеарна диференцијална једначина првог реда

Линеарна једначина је једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{57}$$

Пример 5.3. Нађимо решење једначине

$$3xy' - y = \ln x + 1, \tag{58}$$

које задовољава услов $y(1) = -2$. Ако поделимо једначину (58) са $3x$ добијамо једначину:

$$y' - \frac{1}{3x}y = \frac{\ln x + 1}{3x}. \tag{59}$$

Покушаћемо да решимо једначину (59) на следећи начин. Одредићемо помоћну функцију $u(x)$ којом ћемо да помножимо обе стране једначине (59), тако да после тога на левој страни буде извод производа $y(x)u(x)$. То значи да је

$$uy' + u'y = uy' - u\frac{1}{3x}y,$$

па зато тражимо u као решење једначине

$$u' = -u\frac{1}{3x}, \quad \text{тј.} \quad \frac{du}{u} = -\frac{dx}{3x}.$$

Одавде добијамо да је $\ln u = -\frac{1}{3}\ln x$, па је $u = x^{-\frac{1}{3}}$. Даље, множењем једначине (59) са $u = x^{-\frac{1}{3}}$, добијамо

$$(x^{-\frac{1}{3}}y)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(\ln x + 1) \Rightarrow$$
$$x^{-\frac{1}{3}}y = \frac{1}{3}\int x^{-\frac{4}{3}}(\ln x + 1)dx = -x^{-\frac{1}{3}}(\ln x + 1) - 3x^{-\frac{1}{3}} + c,$$

па је

$$y = -\ln x - 4 + cx^{\frac{1}{3}}.$$

Да бисмо нашли решење за које важи $y(1) = -2$, у последњој једначини заменићемо вредности $x = 1$, $y = -2$:

$$-2 = -\ln 1 - 4 + c1^{\frac{1}{3}} \Rightarrow c = 2,$$

па је тражено решење

$$y = -\ln x - 4 + 2x^{\frac{1}{3}}.$$

✓

Изведимо формулу за решење диференцијалне једначине (57) у општем случају, понављајући поступак из претходног примера. Хоћемо да одредимо помоћну функцију $u(x)$ којом ћемо да помножимо обе стране једначине (57), тако да после тога на левој страни буде извод производа $y(x)u(x)$. Ако ово успемо, имамо:

$$(y(x)u(x))' = Q(x)u(x),$$

па је

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}\left(\int Q(x)u(x)dx + c\right). \tag{60}$$

Да бисмо експлицитно одредили овакво u, написаћемо како смо до њега дошли:

$$y'u + Pyu = (yu)' = y'u + u'y \Longleftrightarrow Pyu = u'y,$$

а ово ће бити тачно ако је

$$Pu = u'.$$

Ово је једначина која раздваја променљиве и решавамо је као што смо описали у претходној секцији:

$$\frac{du}{dx} = Pu \Rightarrow \frac{du}{u} = Pdx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int Pdx \Rightarrow \ln u = \int Pdx,$$

тако да бирамо да $u(x)$ буде

$$u(x) = e^{\int P(x)dx},$$

па убацивањем у (60) добијамо:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(c + \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right). \tag{61}$$

Напомена 5.4. Свака константа c у изразима (60) и (61) одређује једно решење диференцијалне једначине (57). Конкретно решење, односно, конкретну вредност броја c најчешће одређујемо из услова

$$y_0 = y(x_0), \tag{62}$$

као што смо радили у претходном примеру. Услов (62) се зове *почетни* или *Кошијев услов*. Проблем решавања диференцијалне једначине заједно са почетним условом се зове и *Кошијев проблем* или *Кошијев задатак*. ◇

Напомена 5.5. Поред питања о егзистенцији (постојању) решења диференцијалне једначине, природно се намеће питање јединствености таквог решења, тј. ако смо неку једначину успели некако да решимо, да ли смо тим поступком нашли сва могућа решења? На оба ова питања одговор у општем случају даје Теорема о егзистенцији и јединствености решења обичних диференцијалних једначина, која излази из оквира овог курса. Међутим, у једноставној ситуацији линеарне једначине (57), можемо лако доказати јединственост решења без позивања на општу теорему. Наиме, ако је $u(x)$ произвољно решење једначине (57) дефинисано на неком интервалу, тада је

$$\begin{aligned}
&\left(ue^{\int P(x)dx} - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)' = \\
&u'(x)e^{\int P(x)dx} - u(x)e^{\int P(x)dx}P(x) - Q(x)e^{\int P(x)dx} = \\
&e^{\int P(x)dx}\left[u'(x) - P(x)u(x) - Q(x)\right] = 0,
\end{aligned}$$

јер је $u'(x) - P(x)u(x) - Q(x) = 0$, пошто је u решење. Одавде закључујемо да је $ue^{\int P(x)dx} - \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx = c$, за неку константу $c \in \mathbb{R}$, односно да је

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}\left(c + \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right).$$

◇

Задатак 5.6. Нaћи решење једначине $\cos x \cdot y' + \sin x \cdot y = 2\cos^3 x \sin x - 1$, $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, које задовољава услов $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}$. [Решење: $y = -\frac{1}{2}\cos x \cos(2x) - \sin x + c\cos x$, $c = 7$.] ✓

Бернулијева једначина

Бернулијева једначина је диференцијална једначина облика

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \tag{63}$$

где је $\alpha \in \mathbb{R}$. Пре свега, приметимо да је, за $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, једначина (63) линеарна, зато претпоставимо да је $\alpha \neq 0, 1$. Множењем (63) са $y^{-\alpha}$ добијамо:

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x). \tag{64}$$

Уведимо смену $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$. Имамо $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, па једначина (64) постаје

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + P(x)z = Q(x), \quad \text{или} \quad z' + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x),$$

тј. линеарна, коју знамо да решимо.

Пример 5.7. Нађимо решење једначине

$$y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2, \tag{65}$$

за $x > 0$, које задовољава почетни услов $y(2) = -1$. После множења са y^{-2}, једначина (65) постаје

$$y^{-2}y' + \frac{4}{x}y^{-1} = x^3.$$

Ако уведемо смену $y^{-1} = z$, имамо $z' = -y^{-2}y'$, па проблем сводимо на линеарну једначину

$$-z' + \frac{4}{x}z = x^3, \quad \text{тј.} \quad z' - \frac{4}{x}z = -x^3.$$

Последњу једначину решавамо поступком описаним у претходној секцији, и добијамо $z = cx^4 - x^4\ln x$. Одавде налазимо да је

$$y(x) = \frac{1}{cx^4 - x^4\ln x}.$$

Конкретно решење са задатим почетним условом, тј. константу c, налазимо замењивањем $x = 2$, $y = -1$ у претходно решење, па имамо

$$-1 = \frac{1}{c2^4 - 2^4\ln 2} \Rightarrow c = \ln 2 - \frac{1}{16}.$$

Тражено решење је, дакле:

$$y(x) = \frac{1}{\left(\ln 2 - \frac{1}{16}\right) x^4 - x^4 \ln x}.$$

✓

Задатак 5.8. Наћи решење једначине $y' = 5y + e^{-2x} y^{-2}$, које задовољава услов $y(0) = 2$. [Решење: $y = \left(ce^{15x} - \frac{3}{17} e^{-2x}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \frac{139}{17}$.] ✓

Тотални диференцијал

Посматрајмо једначину

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{66}$$

Ако постоји функција $f = f(x,y)$ за коју важи

$$f'_x(x,y) = M(x,y), \quad f'_y(x,y) = N(x,y), \tag{67}$$

тада нам једначина

$$f(x,y) = c = const.$$

даје имплицитно решење једначине (66), тј. даје нам везу између y и x.[1] Заиста, ако је $f(x, y(x)) = c$, и ако важи (67), имамо

$$0 = \frac{d}{dx}c = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f'_x + f'_y y' = M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx}.$$

Напомена 5.9. Израз $f'_x\,dx + f'_y\,dy$ (који бисмо добили формалним множењем леве стране једначине (66) са dx) назива се *тоталним диференцијалом* функције f. Ово је управо извод функције f, ако dx и dy схватимо као линеарна пресликавања

$$dx : (h,k) \mapsto h, \quad dy : (h,k) \mapsto k,$$

тј. пројекције. Зато га и означавамо са df, тј:

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy.$$

◇

[1] Пример једне везе између y и x је $x^2 + y^2 = 1$. Функција $y(x)$ је **локално** дефинисана у околини сваке тачке јединичне кружнице, осим две: $(1,0)$ и $(-1,0)$. Очигледно, за сваку тачку A са кружнице, осим за те две, постоји кугла $B(A,r)$ тако да за сваку тачку (x,y) из $B(A,r) \cap k$ важи $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ или $y(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Међутим, не постоји функција $y = \varphi(x)$ за коју важи $x^2 + \varphi(x)^2 = 1$, чији би график био цела кружница.

Ми знамо да, ако је f два пута непрекидно диференцијабилна, важи $f''_{xy} = f''_{yx}$, па је

$$f''_{xy} = M'_y,\ f''_{yx} = N'_x \Rightarrow M'_y = N'_x,$$

односно, ако услов $M'_y = N'_x$ није испуњен, не можемо очекивати да ћемо наћи решење у описаном облику.[2]

Пример 5.10. Нађимо решење једначине

$$2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

које задовољава почетни услов $y(0) = -3$. Овде је $M(x, y) = 2xy - 9x^2$, а $N(x, y) = 2y + x^2 + 1$, па је

$$M'_y = 2x = N'_x,$$

тј. можемо да тражимо функцију f са описаним својствима. Како је $f'_x = M(x, y) = 2xy - 9x^2$, то је

$$f(x, y) = \int (2xy - 9x^2)dx = x^2y - 3x^3 + \varphi(y).$$

(Овде треба да пазимо да код интеграла не додајемо константу c, већ константу по x, што може бити функција по y, јер је f функција две променљиве x и y.) Како је $f'_y = N(x, y)$, имамо

$$f'_y = \frac{d}{dy}(x^2y - 3x^3 + \varphi(y)) = x^2 + \varphi'(y) = N(x, y) = 2y + x^2 + 1,$$

одакле је $\varphi'(y) = 2y + 1$, па је $\varphi(y) = y^2 + y + c_1$. Одавде је имплицитно решење задатка

$$f(x, y) = x^2y - 3x^3 + y^2 + y + c_1 = c_2, \quad \text{тј.} \quad x^2y - 3x^3 + y^2 + y = c.$$

Конкретно решење тражимо убацивањем $x = 0$, $y = -3$ у претходну једначину:

$$0^2(-3) - 3 \cdot 0^3 + (-3)^2 - 3 = c \Rightarrow c = 6,$$

тј.

$$x^2y - 3x^3 + y^2 + y = 6.$$

✓

Задатак 5.11. Наћи решење једначине $2xy^2 + 4 - 2(3 - x^2y)y' = 0$ које задовољава услов $y(-1) = 8$. [Решење: $x^2y^2 - 6y + 4x = c$, $c = 12$.] ✓

[2]Ако су M и N непрекидно диференцијалне на $\mathbb{R}^2$, или на некој другој просто-повезаној области на којој решавамо проблем, тада је услов $M'_y = N'_x$ и довољан за постојање функције f за коју важи $f'_x = M$, $f'_y = N$. Заиста, ово је садржај теореме 4.49, у случају $\mathbf{F}(x, y, z) = (M, N, 0)$, при чему функције M и N не зависе од z.

Смене променљивих

Навешћемо две смене које нам, у неким случајевима, могу свести дату једначину на једноставнији облик који знамо да решимо. Први случај је ако је једначина облика

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{68}$$

Тада уводимо смену $z(x) := \frac{y}{x}$ (z нам је нова непозната функција). Имамо

$$y = xz(x) \Rightarrow y' = z(x) + xz'(x),$$

па једначина (68) постаје

$$z + xz' = f(z), \qquad z' = \frac{1}{x}(f(z) - z),$$

а ово је једначина која раздваја променљиве.

Пример 5.12. Одредимо решење једначине $xyy' + 4x^2 + y^2 = 0$, $x > 0$, са почетним условом $y(2) = -7$. Како је

$$y' = -\frac{4x^2 + y^2}{xy} = -4\frac{x}{y} - \frac{y}{x},$$

уводимо смену $z := \frac{y}{x}$, тако да нам задатак постаје:

$$z + xz' = -4\frac{1}{z} - z, \quad \text{тј.} \quad z' = -\frac{1}{x}\left(\frac{4}{z} + 2z\right) \quad \text{тј.} \quad \frac{zdz}{2z^2+4} = -\frac{dx}{x}.$$

Одавде интеграљењем добијамо

$$\frac{1}{4}\ln(z^2+2) = -\ln x + c_1 \Rightarrow \sqrt[4]{z^2+2} = \frac{c_2}{x}$$
$$\Rightarrow z^2 = \frac{c}{x^4} - 2 \Rightarrow y^2 = x^2z^2 = \frac{c}{x^2} - 2x^2.$$

Како је за $x = 2$ и $y = -7$, $c = 228$, добијамо да је тражено решење

$$y^2 = \frac{228}{x^2} - 2x^2.$$

✓

Задатак 5.13. Наћи решење једначине $xy' = y(\ln x - \ln y)$, $x > 0$ које задовољава услов $y(1) = 4$. [Решење: $y = xe^{\frac{1+\ln 4}{x} - 1}$.] ✓

Друга смена коју ћемо овде споменути је $z := ax + by + c$, у случају једначине облика

$$y' = f(ax + by + c),$$

$a, b, c \in \mathbb{R}$. Тада је $z' = a + by'$, тј. $y' = \frac{z'-a}{b}$, па једначина постаје

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \Rightarrow \frac{z'}{a + bf(z)} = 1 \Rightarrow \frac{dz}{a+bf(z)} = dx,$$

а ово је једначина која раздваја промењљиве.

Пример 5.14. Решимо једначину $y' = (4x-y+1)^2$ и нађимо решење које задовољава почетни услов $y(0) = 2$. Ако је $z = 4x - y + 1$, онда је $z' = 4 - y'$, па је $y' = 4 - z' = z^2$, тј.

$$\frac{dz}{4-z^2} = dx \Rightarrow \frac{1}{4}\ln\frac{z+2}{2-z} = x + c_1 \Rightarrow \frac{z+2}{2-z} = ce^{4x}$$
$$\Rightarrow z = 2\frac{ce^{4x}-1}{ce^{4x}+1} \Rightarrow y = 4x + \frac{3-ce^{4x}}{1+ce^{4x}}.$$

Заменом $x = 0$, $y = 2$ добијамо да је $c = \frac{1}{3}$, па је решење:

$$y = 4x + \frac{9-e^{4x}}{3+e^{4x}}.$$

✓

Задатак 5.15. Наћи оно решење једначине $y' = e^{9y-x}$ које задовољава услов $y(0) = 0$. [Решење: $y = \frac{1}{9}(x - \ln(9 - 8e^x))$.] ✓

5.2. Линеарна диференцијална једначина вишег реда

У овом поглављу посматрамо једначину реда n:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{69}$$

Ова једначина се зове *линеарна* диференцијална једначина реда n јер је пресликавање

$$L : y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

линеарно по y (будући да је извод линеаран), тј. важи

$$L(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda L(y_1) + \mu L(y_2),$$

за $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Ако је $b(x) = 0$, тада једначина (69) постаје

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{70}$$

и зове се *хомогена* линеарна једначина.

Хомогена линеарна једначина

Приметимо да, пошто је оператор L линеаран, важи:

$$L(y_1) = 0,\ L(y_2) = 0 \Rightarrow L(y_1 + y_2) = 0; \quad L(y) = 0 \Rightarrow L(\lambda y) = 0,$$

тј. да скуп решења хомогене једначине (70) чини векторски простор. Важи и више, тј. важи следећа теорема коју наводимо без доказа.

Теорема 5.16. *Скуп решења једначине (70) чини n-димензиони векторски простор. Ако имамо n решења једначине (70): $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ тада скуп $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ чини базу овог простора ако и само ако је*

$$W(y_1, \ldots, y_n) := \det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \neq 0. \tag{71}$$

□

Дефиниција 5.17. Детерминанта $W(y_1, \ldots, y_n)$ се зове *детерминанта Вронског* или *вронскијан.* Скуп решења $\{y_1, \ldots, y_n\}$ за који важи (71) се зове *фундаментални систем решења.* ♢

Приметимо да, ако је $\{y_1, \ldots, y_n\}$ фундаментални систем решења, сва решења једначине (70) су облика

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x), \tag{72}$$

за неке константе c_j.

Ако су функције $a_j(x)$ у (70) константне, тј. $a_j(x) = a_j \in \mathbb{R}$, тада једначину

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{73}$$

зовемо *хомогеном линеарном диференцијалном једначином са константним коефицијентима.* Потражимо решење једначине (73) у облику $y(x) = e^{\lambda x}$. Како је $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$, имамо

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \cdots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0,$$

тј. λ је нула полинома

$$\mathcal{K}(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0. \tag{74}$$

Полином (74) се назива *карактеристичним полиномом* једначине (73).

Ако хоћемо да нађемо сва решења једначине (73), довољно је да одредимо n решења $y_1, \ldots, y_n$ која задовољавају (71). Метод тражења таквих n решења зависи од нула карактеристичног полинома (74), односно од тога да ли су његове нуле реалне или комплексне, једноструке (међусобно различите) или вишеструке. Разликујемо следеће случајеве.

1. Све нуле карактеристичног полинома (74) су реалне и различите. У овом случају се може показати да

$$\{y_j(x) = e^{\lambda_j x}, \quad j = 1, \dots, n\}$$

чини фундаментални систем решења, где су λ_j нуле карактеристичног полинома.[3] Зато су сва решења једначине (73) облика

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x},$$

за неке константе $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Пример 5.18. Одредимо сва решења једначине $y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0$. Како је карактеристични полином једначине

$$\mathcal{K}(t) = t^3 - 5t^2 - 22t + 56 = (t+4)(t-2)(t-7),$$

то су сва решења дата са

$$y(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{7x}$$

за разне вредности c_1, c_2 и c_3. ✓

Напомена 5.19. *Кошијев проблем* у овом случају чине једначина (70), заједно са *почетним* или *Кошијевим условима:*

$$y(x_0) = d_0,\ y'(x_0) = d_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = d_{n-1}. \tag{75}$$

Да бисмо решили Кошијев проблем, треба прво да нађемо решење у облику (72), а затим из система (75) да одредимо константе $c_1, \dots, c_n$. ◇

Пример 5.20. Одредимо оно решење једначине $y''' - 5y'' - 22y' + 56y = 0$ које задовољава почетни услов $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = -4$. Како смо једначину већ решили у претходном примеру, решење са задатним почетним условом се своди на одређивање константи c_1, c_2 и c_3, које налазимо из система

$$\begin{array}{rcrcr} y(0) & = & 1 & = & c_1 + c_2 + c_3 \\ y'(0) & = & -2 & = & -4c_1 + 2c_2 + 7c_3 \\ y''(0) & = & -4 & = & 16c_1 + 4c_2 + 49c_3, \end{array}$$

тј. $c_1 = \frac{14}{33}$, $c_2 = \frac{13}{15}$, $c_3 = -\frac{16}{55}$. Тражено решење је

$$y(x) = \frac{14}{33} e^{-4x} + \frac{13}{15} e^{2x} - \frac{16}{55} e^{7x}.$$

✓

[3] Доказати у случају $n = 2$.

Задатак 5.21. Одредити оно решење једначине $y'' + 11y' + 24y = 0$ које задовољава почетни услов $y(0) = 0$, $y'(0) = -7$. (Решење: $y = \frac{7}{5}(e^{-8x} - e^{-3x})$.) ✓

2. Све нуле карактеристичног полинома (74) су различите, али међу њима има и комплексно-конјугованих $\lambda = \alpha \pm i\beta$. У овом случају реалним нулама λ_j, као и раније, придружујемо решење $y_j(x) = e^{\lambda_j x}$. Комплексно-конјугованим нулама $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ придружујемо реални и имагинарни део решења[4]

$$e^{\lambda_k x} = e^{\alpha_k x} e^{\pm i\beta_k x} = e^{\alpha_k}(\cos(\beta_k x) \pm i \sin(\beta_k x)),$$

тј. два решења

$$y_{k1}(x) = e^{\alpha_k x} \cos(\beta_k x) \quad \text{и} \quad y_{k2}(x) = e^{\alpha_k x} \sin(\beta_k x).$$

Може се показати да и у овом случају функције y_j, $j = 1, \ldots, n$, (приметимо да их има тачно n) чине фундаментални систем решења.[5]

Пример 5.22. Решимо Кошијев проблем $y'' - 8y' + 17y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = -1$. Карактеристични полином је $t^2 - 8t + 17$ и његове нуле су $4 \pm i$. Зато су сва решења облика

$$y(x) = c_1 e^{4x} \cos x + c_2 e^{4x} \sin x$$

за разне вредности константи c_1 и c_2. Решење Кошијевог проблема, односно константе c_1 и c_2, налазимо из система

$$\begin{array}{rcccl} y(0) & = & -4 & = & c_1 \\ y'(0) & = & -1 & = & 4c_1 + c_2. \end{array}$$

Одавде је $c_1 = -4$, $c_2 = 15$, па је тражено решење

$$y(x) = -4e^{4x} \cos x + 15e^{4x} \sin x.$$

✓

3. Неке нуле карактеристичног полинома (74) се јављају са вишеструкошћу $\geqslant 2$. Ако је λ реална нула вишеструкости k, тада њој придружујемо k решења

$$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, \ldots, y_k = x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

[4]Приметимо да, ако је $y = u + iv$ решење једначине (73), при чему су коефицијенти a_j реални, онда су и u и v решење једначине (73).

[5]Доказати у случају $n = 2$.

Ако је $\lambda = \alpha \pm i\beta$ комплексна нула вишеструкости k онда њој придружујемо $2k$ решења:

$$\begin{array}{ll} y_{11} = e^{\alpha x}\cos(\beta x), & y_{12} = e^{\alpha x}\sin(\beta x), \\ y_{21} = xe^{\alpha x}\cos(\beta x), & y_{22} = xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ \vdots & \vdots \\ y_{k1} = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), & y_{k2} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x). \end{array}$$

Ова решења (којих има тачно n) задовољавају услов (71),[6] па чине фундаментални систем решења.

Пример 5.23. Нађимо сва решења једначине $2y^{(4)} + 11y^{(3)} + 18y'' + 4y' - 8y = 0$. Карактеристични полином је $2t^4 + 11t^3 + 18t^2 + 4t - 8 = (2t-1)(t+2)^3$, па су сва решења дата са

$$y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x} + c_4 x^2 e^{-2x}.$$

✓

Задатак 5.24. Наћи сва решења једначине $y^{(5)} - 15y^{(4)} + 84y^{(3)} - 220y'' + 275y' - 125y = 0$. (Решење: $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + c_3 x e^{5x} + c_4 e^{2x}\cos x + c_5 e^{2x}\sin x$.) ✓

Нехомогена линеарна једначина

Нека је y_0 произвољно (конкретно) решење једначине (69). Тада је y решење једначине (69) ако и само ако је $y - y_0$ решење хомогене једначине (70). Заиста[7]

$$L(y) = b(x) \iff L(y) = L(y_0) \iff L(y - y_0) = 0.$$

Зато, да бисмо одредили сва решења једначине (69), довољно је да одредимо сва решења хомогене једначине (70) и само једно конкретно решење y_0 једначине (69).

Већ смо видели како одређујемо сва решења хомогене линеарне једначине са константним коефицијентима. Посматрајмо сада једначнину

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x). \tag{76}$$

Због малопре реченог, да бисмо нашли сва решења једначине (76), довољно је да погодимо само једно y_0 (јер хомогену знамо да решимо). Ево неколико ситуација у којима знамо облик решења y_0 ($P_m(x)$, $Q_m(x)$, $R_m(x)$ и $S_m(x)$ означавају полиноме степена m).

(1) Ако је $b(x) = Ae^{\alpha x}$, решење y_0 тражимо у облику:
- $y_0(x) = ae^{\alpha x}$, ако α није корен карактеристичног полинома (74);

---

[6] Проверити за $n = 2$.

[7] То значи да је скуп решења нехомогене једначине афини простор димензије n, односно скуп $y_0 + V$, где је $V = \operatorname{Ker} L$ векторски простор димензије n.

- $y_0(x) = ax^k e^{\alpha x}$, ако је α корен карактеристичног полинома (74) вишеструкости k.

(2) Ако је $b(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$, решење y_0 тражимо у облику:
- $y_0(x) = a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)$, ако βi није корен карактеристичног полинома (74);
- $y_0(x) = x^k(a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x))$, ако је βi корен карактеристичног полинома (74) вишеструкости k.

(3) Ако је $b(x) = P_m(x)$, решење y_0 тражимо у облику:
- $y_0(x) = Q_m(x)$, ако нула није корен карактеристичног полинома (74);
- $y_0(x) = x^k Q_m(x)$, ако је нула корен карактеристичног полинома (74) вишеструкости k.

(4) Ако је $b(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, решење y_0 тражимо у облику:
- $y_0(x) = Q_m(x)e^{\alpha x}$ ако α није корен карактеристичног полинома (74);
- $y_0(x) = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}$, ако је α корен карактеристичног полинома (74) вишеструкости k.

(5) Ако је $b(x) = P_m(x)(a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x))$, решење тражимо у облику:
- $y_0 = Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x)$, ако βi није корен карактеристичног полинома (74);
- $y_0 = x^k\left[Q_m(x)\cos(\beta x) + R_m(x)\sin(\beta x)\right]$, ако је βi корен карактеристичног полинома (74) вишеструкости k.

(6) Ако је $b(x) = e^{\alpha x}\big(P_m(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\big)$,
- $y_0(x) = e^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + S_m(x)\sin(\beta x))$, ако $\alpha + \beta i$ није корен карактеристичног полинома (74);
- $y_0 = x^k e^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + S_m(x)\sin(\beta x))$, ако је $\alpha + \beta i$ корен карактеристичног полинома (74) вишеструкости k.

Приметимо да су тачке (1) – (5) специјални случајеви тачке (6).

Пример 5.25. Одредимо једно конкретно, а потом и сва решења једначина

(1) $y'' - 4y' - 12y = xe^{4x}$;
(2) $y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x} + \sin(2x) + xe^{4x}$;
(3) $y'' - 4y' - 12y = e^{6x}$.

Како је карактеристични полином свих једначина $t^2 - 4t - 12 = (t-6)(t+2)$, то су сва решења хомогене једначине $y'' - 4y' - 12y = 0$ облика $y = c_1e^{6x} + c_2e^{-2x}$.

(1) Како је $b(x) = xe^{4x}$, и 4 није корен карактеристичног полинома, потражимо y_0 у облику $Q_1(x)e^{4x}$, где је Q_1 полином степена 1 (случај (4), за $\alpha = 4$, $\beta = 0$). Нека је, зато $y_0(x) = (ax + b)e^{4x}$. Одатле је $y_0'(x) =$

$(4ax + a + 4b)e^{4x}$ и $y_0''(x) = (16ax + 8a + 16b)e^{4x}$, па је

$$y_0'' - 4y_0' - 12y_0 = (-12ax + 4a - 12b)e^{4x} = xe^{4x} \iff a = -\frac{1}{12},\ b = -\frac{1}{36}.$$

Зато је $y_0(x) = \left(-\frac{1}{12}x - \frac{1}{36}\right)e^{4x}$, па су сва решења дате једначине облика

$$y(x) = c_1e^{6x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{36}(3x+1)e^{4x}.$$

(2) Овде имамо случај када је

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + b_3(x),$$

где су ситуације кад је нехомогени део једнак b_1, b_2 или b_3 разматране. Приметимо да, ако нађемо по једно конкретно решење y_j једначина

$$L(y) = b_j(x), \quad \text{за} \quad j = 1, 2, 3,$$

имамо једно конкретно решење једначине $L(y) = b(x)$. Заиста, то је $y_0(x) := y_1(x) + y_2(x) + y_3(x)$, јер је

$$L(y_0) = L(y_1) + L(y_2) + L(y_3) = b_1(x) + b_2(x) + b_3(x) = b(x).$$

Пронађимо, зато, по једно решење једначина

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5x}, \tag{$\spadesuit$}$$

$$y'' - 4y' - 12y = \sin(2x), \tag{$\diamondsuit$}$$

$$y'' - 4y' - 12y = xe^{4x}. \tag{$\heartsuit$}$$

Како 5 није нула карактеристичног полинома, једно решење једначине ($\spadesuit$) тражимо у облику $y_0 = ae^{5x}$. Имамо $y_0' = 5ae^{5x}$ и $y_0'' = 25ae^{5x}$, па је

$$y_0'' - 4y_0' - 12y_0 = 25ae^{5x} - 20ae^{5x} - 12ae^{5x} = -7ae^{5x} = 3e^{5x} \iff a = -\frac{3}{7}.$$

Што се тиче једначине ($\diamondsuit$), како $2i$ није корен карактеристичног полинома, решење тражимо у облику $a\cos(2x) + b\sin(2x)$ (случај (2)). Имамо $y_0' = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)$, $y_0'' = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$, па је

$$y_0'' - 4y_0' - 12y_0 = (-16a - 8b)\cos(2x) + (8a - 16b)\sin(2x) = \sin(2x)$$
$$\iff$$
$$a = \tfrac{1}{40},\ b = -\tfrac{1}{20}.$$

Како смо једначину ($\heartsuit$) већ решили у претходној тачки, имамо да су сва решења дата са

$$y(x) = c_1e^{6x} + c_2e^{-2x} - \frac{3}{7}e^{5x} + \frac{1}{40}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) - \frac{1}{36}(3x+1)e^{4x}$$

за разне вредности константи c_1 и c_2.

(3) Како је 6 корен, и то вишеструкости 1, карактеристичног полинома, потражимо једно решење у облику $y_0 = axe^{6x}$. Како је $y_0' = a(6x+1)e^{6x}$, а $y_0'' = 6a(6x+2)e^{6x}$, то је

$$y_0'' - 4y_0' - 12y_0 = 8ae^{6x} = e^{6x} \Longleftrightarrow a = \frac{1}{8},$$

па свако решење има облик

$$y(x) = c_1e^{6x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{8}xe^{6x}.$$

✓

5.3. Задаци

1. Решити диференцијалну једначину $y' - xy^2 = 2xy$.

2. Одредити решење једначине $\cos xy' - 2y \sin x = \cos x$ које задовољава услов $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi+2}{4}$.

3. Решити диференцијалну једначину $3xy' - 3x \ln xy^4 - y = 0$.

4. Решити диференцијалну једначину $x(y^2+1)\,dx + (x^2y + 2y^3)\,dy = 0$.

5. Решити диференцијалну једначину $y' = \sqrt{\dfrac{y}{x}}$, $x > 0$.

5.4. Задаци за вежбу

6. Увођењем смене $z(x) = x \cdot y(x)$ решити диференцијалну једначину $y'(x) = \dfrac{1}{2}y^2(x) + \dfrac{1}{2x^2}$.

7. Решити диференцијалну једначину $y' = \dfrac{x - y^2\cos^2 x}{2xy\cos^2 x}$.

8. Решити диференцијалну једначину $xy' = y \cos \ln \dfrac{y}{x}$.

9. Увођењем смене $z(x) = \ln y(x)$ решити диференцијалну једначину $\dfrac{y'}{y} + \ln y - x(\ln y)^{2013} = 0$.

10. Увођењем смене $z(x) = \cos y(x)$ решити диференцијалну једначину $y' \sin y + \dfrac{\cos y}{x+1} + \dfrac{1}{x} = 0$, $x > 0$.

11. Решити диференцијалну једначину
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}y = 0.$$

12. Решити диференцијалну једначину $y' - 9x^2 y = (x^5 + x^2) y^{\frac{2}{3}}$.

13. Решити диференцијалну једначину $(2xy + 4x^3)y' + y^2 + 12x^2 y = 0$.

14. Решити диференцијалну једначину $y''' - 12y'' + 48y' - 64y = 12 - 32e^{-8x} + 2e^{4x}$.

15. Решити диференцијалну једначину $y''' - 2y'' - 21y' - 18y = 3 + 4e^{-x}$.

16. Наћи сва решења једначина

а) $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 2xe^{-x}$;
б) $4y'' + 16y' + 17y = e^{-2x} \sin \frac{x}{2} + 6x \cos \frac{x}{2}$;
в) $y'' + 8y' + 16y = e^{-4x}(x^2 + 6)$;
г) $y'' - 100y = 9x^2 e^{10x} + \cos x - x \sin x$.

ГЛАВА 6

Додатак

6.1. Додатак уз главу 1

Дефиниција 6.1. Нека је V векторски простор. *Скаларни производ* $\cdot$ је функција дефинисана на скупу $V \times V$ (дакле промењиве су уређени парови $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$), са вредностима у $\mathbb{R}$, која има следећа својства:

(i) $(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v} = \lambda_1 (\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}) + \lambda_2 (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v})$, за све скаларе λ_1 и λ_2 (линеарност);

(ii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ (симетричност);

(iii) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geqslant 0$ (позитивност);

(iv) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ ако и само ако је $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, где је $\mathbf{0}$ нула - вектор (недегенерисаност).

Тврђење 6.2. За сваки скаларни производ важи

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leqslant \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\, \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{77}$$

(Коши-Шварцова неједнакост).

Доказ. Посматрајмо квадратну функцију

$$\varphi(x) := (x\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (x\mathbf{u} + \mathbf{v}) = x^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})x + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Из аксиоме позитивности скаларног производа следи да је $\varphi(x) \geqslant 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$, а то је, за квадратну функцију могуће само ако је дискриминанта једначине $D = b^2 - 4ac \leqslant 0$. У нашем случају то значи:

$$4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 - 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \leqslant 0,$$

одакле, кад пребацимо $4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$ на десну страну, поделимо са 4 и коренујемо обе стране, добијамо неједнакост (77). $\square$

Дефиниција 6.3. *Норма* је функција дефинисана на векторском простору, са вредностима у $\mathbb{R}$, која има следећа својства:

(i) $\|\mathbf{u}\| \geqslant 0$ (позитивност);
(ii) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (неједнакост троугла);
(iii) $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$ за сваки скалар λ;
(iv) $\|\mathbf{u}\| = 0$ ако и само ако је $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (недегенерисаност).

Векторски простор са нормом се зове *нормиран (векторски) простор.* ♢

Дефиниција 6.4. Нека је M произвољан скуп. *Метрика* на M је функција d дефинисана на скупу $M \times M$ (дакле, на уређеним паровима (a, b), где су $a, b \in M$), са вредностима у $\mathbb{R}$, која задовољава следећа својства:

(i) $d(a, b) \geqslant 0$ (позитивност);
(ii) $d(a, b) = d(b, a)$ (симетричност);
(iii) $d(a, c) \leqslant d(a, b) + d(b, c)$ (неједнакост троугла);
(iv) $d(a, b) = 0$ ако и само ако је $a = b$ (недегенерисаност).

Скуп на коме је задата метрика се зове *метрички простор.* ♢

Приметимо да се норма дефинише на векторским просторима, док се у аксиомама метрике не помињу структуре векторског простора (сабирање и множење скаларом). Метрика може да се дефинише и на скупу који није векторски простор, а, с друге стране, сваки нормиран простор јесте и метрички. Зато је појам метричког простора општији од појма нормираног простора. Слично, како сваки векторски простор са скаларним производом задаје норму, а није свака норма настала од скаларног производа, то је појам норме општији од појма скаларног производа.

Доказ тачке 1.) тврђења 1.23

Нека је

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B \in \mathbb{R}.$$

Нека је $\varepsilon > 0$ дато, и нека су δ_1 и δ_2 изабрани тако да важи:

$$0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_1 \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta_2 \Rightarrow |g(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека је $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$. Како је

$$|f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - (A + B)| \leqslant |f(\mathbf{x}) - A| + |g(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

то је

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = A + B.$$

□

Доказ тврђења 1.29.

($\Rightarrow$) Нека је $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A$ и нека је $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ низ такав да је

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0. \tag{78}$$

За дато $\varepsilon > 0$, изаберимо $\delta > 0$ такво да је

$$0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon \tag{79}$$

Из (78) следи да за $n \geqslant n_0$ важи $0 < d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) < \delta$, а из (79) следи да за $n \geqslant n_0$ важи $|f(\mathbf{x}_n) - A| < \varepsilon$. Али то управо значи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = A$.

($\Leftarrow$) Да бисмо доказали други смер, претпоставимо супротно, тј. да није $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A$. То значи да постоји $\varepsilon > 0$ такво да за свако $\delta > 0$ постоји $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ за које важи

$$0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta, \quad \text{али} \quad |f(\mathbf{x}) - A| \geqslant \varepsilon. \tag{80}$$

За овакво ε, бирајмо да δ буде $\frac{1}{n}$, а одговарајуће $\mathbf{x}$ које задовољава (80) за $\delta = \frac{1}{n}$ означимо са $\mathbf{x}_n$. Конструисали смо низ тачака $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ који тежи ка $\mathbf{x}_0$, такав да низ $f(\mathbf{x}_n)$ не тежи ка A, што је у контрадикцији са претпоставком. $\square$

6.2. Додатак уз главу 2

Доказ да је $\mathbf{a}(\mathbf{h}) = \mathbf{o}(\mathbf{h})$ у теореми 2.30.

Како је $\mathbf{o}(\mathbf{h}) = (\alpha_1(\mathbf{h}), \ldots, \alpha_m(\mathbf{h}))$, а $dG(\mathbf{y}_0)$ линеарно пресликавање, то је израз $dG(\mathbf{y}_0)\mathbf{o}(\mathbf{h})$ вектор функција чије су координатне функције линеарне комбинације функција $\alpha_j(\mathbf{h}) = o(\mathbf{h})$, па су и саме $o(\mathbf{h})$. Тиме смо доказали да је

$$dG(\mathbf{y}_0)\, \mathbf{o}(\mathbf{h}) = \mathbf{o}(\mathbf{h}), \quad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

Што се тиче другог сабирка у једнакости (17) претпоставимо да је $H = \mathbf{o}(dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}))$. То значи да је $H = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ где су α_j функције облика

$$\alpha_j = \varepsilon_j(dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}))\|dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h})\|,$$

при чему $\varepsilon_j(dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}))$ тежи нули кад $dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}) \to \mathbf{0}$. Како

$$\mathbf{h} \to \mathbf{0} \Rightarrow dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}) \to \mathbf{0},$$

то $\varepsilon_j(dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}))$ тежи нули кад $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Да бисмо завршили доказ тврђења, довољно је да докажемо да важи

$$\|dF(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h})\| \leqslant c\|\mathbf{h}\|$$

(јер је тада $|\alpha_j| \leqslant |c\varepsilon_j|\|\mathbf{h}\|$, тј. $\alpha_j = o(\mathbf{h})$.) Али за свако линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ важи $\|L\mathbf{h}\| \leqslant c\|\mathbf{h}\|$. Заиста $L\mathbf{h}$ је вектор чија је j-та координата облика $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^j h_i$, где је $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$. Из Коши-Шварцове неједнакости (видети тврђење 6.2) следи да је

$$\left|\sum_{i=1}^{m} a_i^j h_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(a_i^j)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} h_i^2} = c_j\|\mathbf{h}\|.$$

Ако је свака координата вектора мања од $c_j\|\mathbf{h}\|$, тада је и његова норма мања од $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} c_j^2}\|\mathbf{h}\| = c\|\mathbf{h}\|$. Остављамо читаоцу да сам провери да је и $\|\mathbf{o}(\mathbf{h})\| \leqslant const\|\mathbf{h}\|$. $\square$

Доказ тврђења 2.50

За фиксиране h и k, посматрајмо функцију реалне променљиве

$$\varphi(t) := f(x_0 + th, y_0 + k) - f(x_0 + th, y_0)$$

на интервалу $t \in [0, 1]$ и применимо Лагранжеву теорему о средњој вредности на њу:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = [f'_x(x_0 + ch, y_0 + k) - f'_x(x_0 + ch, y_0)]h,$$

за неко $c \in (0, 1)$. Означимо, сада, са $\psi(t)$ функцију $f'_x(x_0 + ch, y_0 + tk)h$, за $t \in [0, 1]$ и на њу применимо Лагранжеву теорему. Добијамо:

$$\begin{aligned}&[f'_x(x_0 + ch, y_0 + k) - f'_x(x_0 + ch, y_0)]h = \psi(1) - \psi(0) = \\ &\psi'(d) = f''_{xy}(x_0 + ch, y_0 + dk)hk\end{aligned}$$

за неко $d \in (0, 1)$, па је

$$\varphi(1) - \varphi(0) = [f''_{xy}(x_0 + ch, y_0 + dk)]hk,$$

за неке $c, d \in (0, 1)$. На потпуно исти начин, примењујући два пута Лагранжеву теорему на функцију:

$$\chi(t) := f(x_0 + h, y_0 + tk) - f(x_0, y_0 + tk),$$

добијамо

$$\chi(1) - \chi(0) = f''_{yx}(x_0 + ah, y_0 + bk)kh,$$

за неке $a, b \in (0, 1)$. Међутим, приметимо да је

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \chi(1)-\chi(0) = f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)+f(x_0, y_0),$$

па имамо

$$f''_{xy}(x_0 + ch, y_0 + dk)hk = f''_{yx}(x_0 + ah, y_0 + bk)kh,$$

тј.

$$f''_{xy}(x_0 + ch, y_0 + dk) = f''_{yx}(x_0 + ah, y_0 + bk).$$

Како су и f''_{xy} и f''_{yx} непрекидни у (x_0, y_0), кад у последњој једнакости пустимо да $(h, k) \to (0, 0)$, добијамо

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

$\square$

Пример функције са различитим мешовитим изводима:

Нека је

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Тада имамо да је, за $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$f'_x = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f'_y = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

док је

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Зато је

$$f''_{xy}(0, 0) = (f'_x)'_y(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_x(0, h) - f'_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\frac{-h^4}{h^4} - 0}{h} = -1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = (f'_y)'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'_y(h, 0) - f'_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h\frac{h^4}{h^4} - 0}{h} = 1$$

$\square$

6.3. Додатак уз главу 3

Доказ теореме 3.9

Функције φ_y и ψ_x су очигледно непрекидне. За наставак доказа нам је потребно следеће помоћно тврђење чији доказ изостављамо (видети [**1, 3**]):

Тврђење 6.5. Непрекидна функција f на правоугаонику Π је и *равномерно непрекидна*, што значи да важи: за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ такво да, за све $\mathbf{z}_1$,$\mathbf{z}_2 \in \Pi$ важи

$$d(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{z}_1) - f(\mathbf{z}_2)| < \varepsilon.$$

$\square$

Из тврђења 6.5 следи да су α и β (равномерно) непрекидне јер:

$$\begin{aligned}|\alpha(y_1) - \alpha(y_2)| &= \left|\int_a^b f(x,y_1)dx - \int_a^b f(x,y_2)dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(x,y_1) - f(x,y_2)|dx < \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

за y_1, y_2 довољно близу. На исти начин се доказује да је β непрекидна.

Докажимо формулу (33). Из неједнакости троугла, имамо:

$$\begin{aligned}&\left|\iint_\Pi f(x,y)dxdy - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\right| \leqslant \\ &\left|\iint_\Pi f(x,y)dxdy - \sum_{ij} f(\mathbf{z_{ij}})\Delta_{ij}\right| + \left|\sum_{ij} f(\mathbf{z_{ij}})\Delta_{ij} - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\right| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{ij} f(\mathbf{z_{ij}})\Delta_{ij} - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\right|\end{aligned} \tag{81}$$

за неку поделу $\mathcal{P}$ довољно малог дијаметра. Приметимо да је

$$\Delta_{ij} = P(\Pi_{ij}) = \Delta x_i \Delta y_j,$$

па је

$$\sum_{ij} f(\mathbf{z_{ij}})\Delta_{ij} = \sum_i \left(\sum_j f(\mathbf{z}_{ij})\Delta y_j\right)\Delta x_i.$$

Проценимо даље други сабирак у последњем реду у (81) (нека је $\mathbf{z}_{ij} = (x_i, y_j)$):

$$\begin{aligned}&|\textstyle\sum_{ij} f(\mathbf{z_{ij}})\Delta_{ij} - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx| = \\ &|\textstyle\sum_i \left(\sum_j f(\mathbf{z}_{ij}\Delta y_j)\right)\Delta x_i - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx| \leqslant \\ &|\textstyle\sum_i \left(\sum_j f(\mathbf{z}_{ij})\Delta y_j\right)\Delta x_i - \sum_i \beta(x_i)\Delta x_i| + \\ &|\textstyle\sum_i \beta(x_i)\Delta x_i - \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx|.\end{aligned} \tag{82}$$

Остало је да докажемо да су последња два сабирка у изразу (82) мања од $\frac{\varepsilon}{3}$, за поделу довољно малог дијаметра. Што се тиче првог сабирка, имамо:

$$
\begin{aligned}
&|\sum_i \left(\sum_j f(\mathbf{z}_{ij})\Delta y_j\right) \Delta x_i - \sum_i \beta(x_i)\Delta x_i| = \\
&|\sum_i \left(\sum_j f(\mathbf{z}_{ij})\Delta y_j - \beta(x_i)\right) \Delta x_i| = \\
&|\sum_i \left(\sum_j f(\mathbf{z}_{ij})\Delta y_j - \int_c^d f(x_i, y)dy\right) \Delta x_i| \leqslant \\
&\sum_i |\sum_j \left(f(\mathbf{z}_{ij})\Delta y_j - \beta(x_i)\right)| \Delta x_i = \\
&\sum_i |\sum_j f(\mathbf{z}_{ij})\Delta y_j - \int_c^d f(x_i, y)dy| \Delta x_i = \\
&\sum_i \left|\int_c^d g(x, y)dy - \int_c^d f(x_i, y)dy\right| \Delta x_i,
\end{aligned}
$$

где је $g(x, y)$ функција дефинисана са $g(x, y) := f(x_i, y_j)$, за $y \in [y_{i-1}, y_i]$. Изаберимо дијаметар поделе δ тако да важи: $|y-\tilde{y}| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x,\tilde{y})| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)(d-c)}$, за све $x \in [a, b]$ (ово може због тврђења 6.5). Имамо

$$
\begin{aligned}
&\sum_i \left|\int_c^d g(x, y)dy - \int_c^d f(x_i, y)dy\right| \Delta x_i \leqslant \sum_i \int_c^d |g(x, y) - f(x_i, y)| dy \Delta x_i < \\
&\sum_i \int_c^d \frac{\varepsilon}{3(b-a)(d-c)} dy \Delta x_i = (d-c) \frac{\varepsilon}{3(b-a)(d-c)} \sum_i \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

Остало је да проценимо други сабирак у (82). Имамо

$$
\left|\sum_i \beta(x_i)\Delta x_i - \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx\right| = \left|\sum_i \beta(x_i)\Delta x_i - \int_a^b \beta(x)dx\right|.
$$

Али израз $\sum_i \beta(x_i)\Delta x_i$ је подеона сума за функцију β, за коју смо показали да је непрекидна (дакле интеграбилна), тако да горњу разлику можемо направити произвољно малом, смањујући дијаметар поделе $\mathcal{P}$. Доказали смо да је за свако $\varepsilon > 0$:

$$
\left|\iint_\Pi f(x, y)dxdy - \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx\right| < \varepsilon
$$

што је могуће само ако је

$$
\left|\iint_\Pi f(x, y)dxdy - \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy\right) dx\right| = 0.
$$

Друга једнакост у (33) се доказује на исти начин. □

Пример немерљивог скупа.

Нека је A скуп свих тачака у квадрату који имају рационалне обе координате:

$$
A := \{(x, y) \mid x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}.
$$

Показаћемо да је руб скупа A цео квадрат $[0,1]\times[0,1]$. Заиста, било која тачка (a,b) из квадрата $[0,1]\times[0,1]$ има то својство да у свакој њеној околини постоји тачка $(p,q)\in[0,1]\times[0,1]$ таква да су p,q рационални (јер је скуп $\mathbb{Q}$ густ у $\mathbb{R}$, али и да у свакој њеној околини постоји тачка (c,d) тако да c није у $\mathbb{Q}$, јер су и ирационални бројеви густи у $\mathbb{R}$. То значи да у свакој околини тачке $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$ постоје и тачке из A и оне које нису у A. То значи да је

$$[0,1]\times[0,1]\subset\partial A.$$

С друге стране, ако $(a,b)\notin A$, тада очигледно постоји околина тачке (a,b) која се не сече са A, па је

$$[0,1]\times[0,1]=\partial A.$$

Како скуп $[0,1]\times[0,1]$ очигледно није површине нула, то скуп A није мерљив. $\square$

Доказ да се у дефиницији интеграла може узети произвољнија подела (у случају поделе на повезане компактне скупове).

Теорема о средњој вредности за двоструки интеграл (тачка (6) у тврдјењу 3.16 на страни 51) каже да је, ако је f непрекидна на компактном повезаном скупу D, тада постоји $\mathbf{c}\in D$ такво да важи:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=f(\mathbf{c})P(D), \tag{83}$$

где је $P(D)$ површина скупа D. Појам повезаног скупа је дат у следећој дефиницији.

Дефиниција 6.6. Кажемо да је скуп $A\subset\mathbb{R}^n$ *повезан* ако не постоје два отворена скупа $U,V\subset\mathbb{R}^n$ таква да важи $U\cap A\neq\emptyset$, $V\cap A\neq\emptyset$, $U\cap V\cap A=\emptyset$, $A\subset U\cup V$. $\Diamond$

Примери повезаног скупа у равни су кружница, круг (са или без границе), правоугаоник, права, унија две праве које се секу, полураван, парабола, итд, а примери скупа који није повезан су унија две паралелне праве, унија две дискунктне кружнице, хипербола, итд.

Ако је скуп $A\subset\mathbb{R}^n$ такав да сваке две тачке у њему могу да се повежу непрекидном кривом, онда кажемо да је A *путно повезан*. Важи да је сваки путно повезан скуп обавезно и повезан. Како је својство путне повезаности интуитивније од повезаности, можемо (барем за потребе овог курса) да замишљамо повезане скупове као оне код којих сваке две тачке можемо да повежемо непрекидном кривом (а да останемо у скупу).

Нека је f непрекидна на компакту D и $\varepsilon > 0$ произвољно. Како је f и равномерно непрекидна (тврђење 6.5) на D, то постоји $\delta > 0$ за које важи

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D,\, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \frac{\varepsilon}{P(D)}.$$

Нека је $\mathcal{P}$ подела скупа D на повезане компактне скупове $D = \bigcup_i^n D_i$, чије су границе скупови мере нула,[1] који се секу евентуално по граници $D_i \cap D_j \subset \partial(D_i \cap D_j)$, таква да је дијаметар поделе мањи од δ. Како је скуп пресечних тачака $D_i \cap D_j$ мере нула, то је

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x,y)dxdy,$$

па је

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy - S(f,\mathcal{P},\mathbf{z},D)\right| = \left|\sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x,y)dxdy - \sum_{i=1}^n f(\mathbf{z}_i)P(D_i)\right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^n \left|\iint_{D_i} f(x,y)dxdy - f(\mathbf{z}_i)P(D_i)\right| \overset{(\heartsuit)}{=} \sum_{i=1}^n |f(\mathbf{c_i})P(D_i) - f(\mathbf{z}_i)P(D_i)|$$
$$= \sum_{i=1}^n |f(\mathbf{c_i}) - f(\mathbf{z}_i)|P(D_i) \overset{(\clubsuit)}{\leqslant} \frac{\varepsilon}{P(D)} \sum_{i=1}^n P(D_i) = \varepsilon.$$

Једнакост ($\heartsuit$) следи из (83), а неједнакост ($\clubsuit$) из равномерне непрекидности. $\square$

6.4. Додатак уз главу 4

Доказ тврђења 4.5.

Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Изаберимо $\delta_1 > 0$ тако да важи:

$$\max_j \Delta t_j < \delta_1 \Rightarrow \left|\sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(\xi_j))\|\mathbf{r}'(\xi_j)\|\Delta t_j - \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (84)$$

Функција $\|\mathbf{r}'\|$ је непрекидна, па достиже максимум на $[a,b]$, означимо га са M. Функција $f \circ \mathbf{r}$ је непрекидна на интервалу $[a,b]$, па је она и равномерно

[1] Пошто су, по претпоставци, мерљиви.

непрекидна (аналогија тврђења 6.5, видети [**3, 1**]), тј. постоји $\delta_2 > 0$ такво да важи:

$$|t-s| < \delta_2 \Rightarrow |f(\mathbf{r}(t)) - f(\mathbf{r}(s))| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}. \tag{85}$$

Нека је $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и δ такво да је, за $A_j = \mathbf{r}(t_j)$:

$$\max \Delta s_j < \delta \Longleftrightarrow \max \Delta t_j \leqslant \delta_0$$

где је Δs_j дужина криве $\mathcal{C}$ између тачака A_{j-1} и A_j. Нека је $\{A_0, \dots, A_n\}$ подела криве $\mathcal{C}$ за коју важи $\max \Delta s_j < \delta$. Нека су $C_j = \mathbf{r}(\eta_j)$, за $\eta_j \in [t_{j-1}, t_j]$. Имамо

$$\begin{aligned}
&\left| S(f,\mathcal{C},\mathcal{P}) - \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \right| \overset{(\clubsuit)}{=} \\
&\left| \sum_{j=1}^n f(C_j) \|\mathbf{r}'(\xi_j)\| \Delta t_j - \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \right| \overset{(\spadesuit)}{\leqslant} \\
&\left| \sum_{j=1}^n f(C_j) \|\mathbf{r}'(\xi_j)\| \Delta t_j - \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(\xi_j)) \|\mathbf{r}'(\xi_j)\| \Delta t_j \right| + \\
&\left| \sum_{j=1}^n f(\mathbf{r}(\xi_j)) \|\mathbf{r}'(\xi_j)\| \Delta t_j - \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt \right| \overset{(\heartsuit)}{<} \\
&\sum_{j=1}^n |f(\mathbf{r}(\eta_j)) - f(\mathbf{r}(\xi_j))| \, \|\mathbf{r}'(\xi_j)\| \Delta t_j + \frac{\varepsilon}{2} \overset{(\diamondsuit)}{<} \\
&\sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} M \Delta t_j + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

.

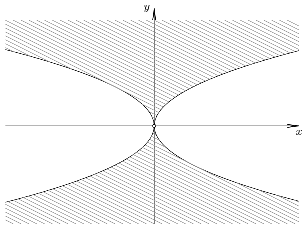
Једнакост ($\clubsuit$) је доказана у (40), ($\spadesuit$) је неједнакост троугла, неједнакост ($\heartsuit$) следи из (84), а ($\diamondsuit$) из (85). $\square$

ГЛАВА 7

Решења задатака

7.1. Функције више промењљивих

1. а) Због области дефинисаности логаритамске функције мора бити $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, тј. $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Још би требало узети у обзир да је функција задата као разломак, односно $\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2) \neq 0$. Одавде добијамо да је $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. Коначно, домен дате функције је унутрашњост јединичне сфере са центром у координатном почетку, не укључујући координатни почетак.
б) Израз под кореном мора бити ненегативан, тј. $x + y + z \geqslant 0$. Дакле, домен је полупростор чија је граница раван $x + y + z = 0$.
в) Због корене функције која учествује у дефиницији функције f, и још је у имениоцу, мора бити $x^2 + y^2 - a^2 > 0$, односно $x^2 + y^2 > a^2$. Тражени домен је спољашњост круга са центром у $(0, 0)$ полупречника a не укључујући саму кружницу.
г) Функција f је добро дефинисана ако је именилац различит од нуле, тј. $xy \neq 0$. Домен је цела раван без координатних оса.
д) Функција $\arcsin(t)$ је дефинисана за $-1 \leqslant t \leqslant 1$. Дакле, $-1 \leqslant \dfrac{x}{y^2} \leqslant 1$, односно $-y^2 \leqslant x \leqslant y^2$. Још би требало одбацити тачке чија је друга координата једнака нули, јер је израз $\dfrac{x}{y^2}$ добро дефинисан само за $y \neq 0$.



Слика 7.1: уз задатак 1.д)

✓

2.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{x\to 0}1=1$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1$$

Довољно је наћи два низа у $\mathbb{R}^2$ који теже ка тачки $(0,0)$, а да њихове слике при пресликавању f не теже ка истим вредностима. У том случају двојни лимес неће постојати. Узмимо следећа два низа:

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0),$$
$$(z_n,d_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)\to(0,0).$$

У том случају је $f(x_n,y_n)=f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=0$, а $f(z_n,d_n)=f(\frac{1}{n},\frac{2}{n})=-\frac{1}{3}$, па лимес не постоји. ✓

3.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to 0}0=0,$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{y\to 0}0=0.$$

Као и у претходном задатку, погодно одаберимо низове у $\mathbb{R}^2$. Нека је:

$$(x_n,y_n)=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0),$$
$$(z_n,d_n)=\left(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}\right)\to(0,0).$$

Тада је $f(x_n, y_n) = f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1$, а $f(z_n, d_n) = f(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}) = \dfrac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{4n^2}{n^4}} \to 0$, па двојни лимес не постоји. ✓

4.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ не постоји, јер не постоји ни $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$. То, опет, можемо показати преко низова, али ће то сада бити низови у $\mathbb{R}$ (функцију $f(x,y)$ посматрамо као функцију од x). Нека је $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$. Тада је

$$f(x_n, y) = \frac{1}{n\pi} + y\cdot 0 \to 0.$$

Узмимо сада $y_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$. Тада је

$$f(y_n, y) = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + y\cdot 1 \to y,$$

па заиста не постоји $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$.

Постојање двојног лимеса доказаћемо уз помоћ теореме "о два полицајца". Наиме, важи следећи низ неједнакости:

$$0 \leqslant \left|x + y\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x| + |y|,$$

па коначан закључак изводимо на основу тога што $|x|+|y| \to 0$ када $(x,y) \to (0,0)$. (Користили смо неједнакост троугла, као и $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$.) ✓

5. Ове полуправе можемо згодно описати следећим једначинама (преко поларних координата):

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi,$$

за фиксирано φ. Након "увођења смене", добијамо

$$f(x,y) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^2\cos^2\varphi}{e^{r^2\cos^2\varphi - r\sin\varphi}}.$$

Добијену функцију посматрамо као функцију једне променљиве r (јер је φ фиксирано) и тражимо њен лимес када $r \to \infty$.

Ако је $\cos^2\varphi \neq 0$, онда је тражени лимес облика $\frac{\infty}{\infty}$, па можемо применити Лопиталово правило (два пута). Након друге примене добићемо да је тражени лимес једнак нули.
Ако је $\cos^2\varphi = 0$, тј. $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, (полуправе одређене y-осом), онда је $f \equiv 0$. И у овом случају је тражени лимес тривијално једнак нули. ✓

6. Функција f није дефинисана на правој $y = x$ (јер је тада именилац једнак нули), а свуда ван те праве је непрекидна као композиција непрекидних функција. Дакле, испитујемо да ли се функција може додефинисати да буде непрекидна у тачкама облика (x_0, x_0), за $x_0 \in \mathbb{R}$. Како је

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{x-y}{x^3-y^3} = \lim_{(x,y)\to(x_0,x_0)} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = \frac{1}{3x_0^2},$$

за $x_0 \neq 0$ функцију f можемо додефинисати да буде непрекидна:

$$f(x_0, x_0) = \frac{1}{3x_0^2}.$$

Ипак,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+xy+y^2} = +\infty,$$

па се дата функција не може додефинисати да буде непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$. ✓

7. Доказаћемо да је дата функција непрекидна по променљивој x, а слично се ради за променљиву y. Задатак је еквивалентан испитивању да ли за произвољно $x_0 \in \mathbb{R}$ важи једнакост:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0, y).$$

Разликујемо неколико случајева:

1° $x_0 \neq 0$, $y \neq 0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x_0y}{x_0^2+y^2} = f(x_0, y);$$

2° $x_0 \neq 0$, $y = 0$:

$$\lim_{x\to x_0} f(x,0) = \lim_{x\to x_0} 0 = 0 = f(x_0, 0);$$

3° $x_0 = 0$, $y \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{0}{y^2} = 0 = f(0, y);$$

4° $x_0 = 0$, $y = 0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = f(0,0).$$

Дата функција је непрекидна у свим тачкама осим у $(0,0)$ као композиција непрекидних. За низ $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ важи да $f(x_n, y_n) \to 1 \neq 0 = f(0,0)$, па функција f није непрекидна по (x,y). ✓

8. Непрекидност функције f дуж сваке полуправе са почетком у координатном почетку еквивалентна је са:

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = 0 = f(0,0).$$

Ако је $\sin\varphi \neq 0$, последњи лимес је облика $\dfrac{0}{0+\sin^2\varphi}$, што је једнако нули. Ако је $\sin\varphi = 0$, онда је $f \equiv 0$, па је тражени лимес свакако једнак нули. Закључујемо да је f непрекидна дуж свих ових полуправих. Међутим, функција f није непрекидна у $(0,0)$, јер ако узмемо низ $(x_n, y_n) = \left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right) \to (0,0)$, видимо да је $f(x_n, y_n) \to \dfrac{1}{2} \neq 0$. ✓

9. Дата функција је непрекидна у свим тачкама као композиција непрекидних осим можда у тачки $(0,0)$. Важи следећи низ неједнакости (користимо неједнакост троугла, $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$ и $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$):

$$0 \leqslant \left|\frac{2x^2y + y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} + \frac{y^2|y|}{x^2+y^2} \leqslant 3|y|,$$

што тежи нули када $(x,y) \to (0,0)$. Закључујемо да је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, па функција f јесте непрекидна и у тачки $(0,0)$. ✓

10. $F(x,y,z) = (xy+1, x^2+5, z, 11, z^3)$, а ненегативна је $f_2(x,y,z) = x^2+5$. ✓ **11.** Домен је скуп строго испод праве $y = x$, а строго изнад параболе $y = -x^2$. Постоји бесконачно много таквих тачака, на пример $A(1+e^2, 1)$. Тражени лимес је једнак нули. ✓ **12.** Домен је спољашњост јединичног круга у горњој полуравни, не укључујући кружницу. Није компактан (није ни затворен, ни ограничен). Тражени лимес је једнак $+\infty$. ✓ **13.** У делу а) јесте непрекидна као количник непрекидних (тачка $(-1,-4)$ не припада датом скупу). Дата функција није непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$. ✓

7.2. Диференцијални рачун функција више промењивих

1. а) $f'_x = 5y, \quad f'_y = 5x+6;$

б) $f'_x = e^{x^2-y^2} \cdot 2x, \quad f'_y = e^{x^2-y^2} \cdot (-2y);$

в) $f'_x = \dfrac{y}{\sqrt{x}}, \quad f'_y = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}, \quad f'_z = \dfrac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}.$

Напомена. У делу в) јасно је да прва формула не важи за тачке облика $(0,y,z)$, а последња за тачке облика $(x,y,0)$, $y,z \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Може се показати по дефиницији да не постоје одговарајући парцијални изводи у овим тачкама. ✓

2. Израчунајмо парцијалне изводе првог реда z'_x и z'_y јер се они појављују у датој једначини:

$$z'_x = \frac{2xy}{x^2-y^2},$$

$$z'_y = \ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

Сада је

$$\frac{1}{x}z'_x + \frac{1}{y}z'_y = \frac{1}{x}\frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{1}{y}\left(\ln(x^2-y^2) - \frac{2y^2}{x^2-y^2}\right) = \frac{y\ln(x^2-y^2)}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

✓

3.

$$f'_x(x,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,1)-f(x,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = 1.$$

✓

4. а) Дата функција је непрекидна у свим тачкама као композиција непрекидних осим евентуално у тачки $(0,0)$. Важи следећи низ неједнакости (користимо $x^4+y^2 \geqslant y^2$):

$$0 \leqslant \left|\frac{xy^3}{x^4+y^2}\right| \leqslant \frac{|xy^3|}{y^2} = |xy|,$$

што тежи нули када $(x,y) \to (0,0)$. Закључујемо да је

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

па функција f јесте непрекидна и у тачки $(0,0)$.

б) За све тачке $(x,y) \neq (0,0)$ парцијалне изводе функције f по промењљивама x и y можемо израчунати користећи правила диференцирања:

$$f'_x = \frac{-3y^3x^4+y^5}{(x^4+y^2)^2}, \quad f'_y = \frac{xy^4+3x^5y^2}{(x^4+y^2)^2}.$$

У тачки $(0,0)$ одговарајуће парцијалне изводе рачунамо по дефиницији:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

в) Функција f је диференцијабилна у свим тачкама као композиција диференцијабилних осим можда у тачки $(0,0)$. Функција f је диференцијабилна у $(0,0)$ ако и само ако важи

$$f(x,y) = f(0,0) + 0\cdot x + 0\cdot y + o(\sqrt{x^2+y^2}), (x,y) \to (0,0)$$

Дакле, треба испитати да ли је $f(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2})$, $(x,y) \to (0,0)$, односно да ли је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Важи следећи низ неједнакости (користимо $\left|\dfrac{y^3}{x^4+y^2}\right| \leqslant \dfrac{|y^3|}{y^2} = |y|$ и $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant 1$):

$$0 \leqslant \left|\frac{xy^3}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant |y|,$$

што тежи нули када $(x,y) \to (0,0)$. Закључујемо да је f диференцијабилна на целом $\mathbb{R}^2$.

Напомена: Диференцијабилност се може показати и тако што се покаже непрекидност парцијалних извода f'_x и f'_y. ✓

5. а) В. девети задатак из прве главе.
б) Нека је $\mathbf{l} = (l_1, l_2) \neq (0,0)$ произвољан правац, односно вектор. Тада је:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tl_1, tl_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2(2l_1^2 l_2 + l_2^3)}{t^2(l_1^2 + l_2^2)} = \frac{2l_1^2 l_2 + l_2^3}{l_1^2 + l_2^2}.$$

в) Да бисмо испитали диференцијабилност функције f у тачки $(0,0)$ прво је потребно да израчунамо парцијалне изводе првог реда у тачки $(0,0)$.

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$
$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1.$$

Сада се задатак своди на испитивање да ли је $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Након сређивања видимо да за низ $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$ функција унутар лимеса тежи ка $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0$. Дакле, лимес не може бити једнак нули, па функција није диференцијабилна у $(0,0)$.

г) Функција f је диференцијабилна у тачки $(1,1)$, па можемо употребити формулу за извод функције f у правцу вектора $\mathbf{v}$ у тачки a:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(a) = \langle \nabla f(a), \mathbf{v} \rangle.$$

У нашем случају је $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1.$ ✓

6. Координатне функције пресликавања $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ су $f_1(x,y) = x^2 + 2y$, $f_2(x,y) = e^{2x+3y}$ и $f_3(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Парцијални изводи првог реда су:

$$(f_1)'_x = 2x, \qquad (f_1)'_y = 2;$$
$$(f_2)'_x = 2e^{2x+3y}, \qquad (f_2)'_y = 3e^{2x+3y};$$
$$(f_3)'_x = \frac{\sqrt[3]{y}}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad (f_3)'_y = \frac{\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{y^2}};$$

Јакобијева матрица у тачки $(2,-1)$ је:

$$J_F(2,-1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2e & 3e \\ \frac{-1}{3\sqrt[3]{4}} & \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \end{bmatrix}.$$

✓

7. На основу правила ланца за функције више променљивих важи:

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x = z'_u + z'_v,$$
$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y = 2z'_u - z'_v.$$

Да бисмо изразили $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$, применићемо основна правила диференцирања, као и правило ланца на функције z'_u и z'_v:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = (z'_u + z'_v)'_x = z''_{uu} + 2z''_{uv} + z''_{vv},$$
$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = (z'_u + z'_v)'_y = 2z''_{uu} + z''_{uv} - z''_{vv},$$
$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = (2z'_u - z'_v)'_y = 4z''_{uu} - 4z''_{uv} + z''_{vv}.$$

Ако добијене изразе заменимо у полазну једначину, добићемо једначину еквивалентну полазној:

$$9z''_{uv} + 3z'_u = 0, \text{ тј.} \quad 3z''_{uv} + z'_u = 0.$$

✓

8. Диференцирањем $x^3 + yz^2 - 3xy^2 = 3$ по x добијамо

$$3x^2 + 2yzz'_x - 3y^2 = 0 \Rightarrow z'_x = \frac{3y^2 - 3x^2}{2yz},$$

па је $z'_x(-1, 1, 1) = 0$. Диференцирањем $x^3 + yz^2 - 3xy^2 = 3$ по y добијамо

$$z^2 + 2yzz'_y - 6xy = 0 \Rightarrow z'_y = \frac{6xy - z^2}{2yz},$$

па је $z'_y(-1, 1, 1) = -\dfrac{7}{2}$. Други парцијални извод z''_{xx} можемо добити диференцирањем експлицитног израза за z'_x (извод количника) или имплицитног израза за z'_x, тј. $3x^2 + 2yzz'_x - 3y^2 = 0$. На други начин добија се

$$6x + 2y((z'_x)^2 + zz''_{xx}) = 0 \Rightarrow z''_{xx}(-1, 1, 1) = 3.$$

✓

9. Како је елипсоид задат једначином $f(x, y, z) = 0$, где је

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

имамо да су координате вектора нормале тангентне равни

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{2x_0}{a^2},\quad f'_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{2y_0}{b^2},\quad f'_z(x_0,y_0,z_0)=\frac{2z_0}{c^2}.$$

Једначина тангентне равни је

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

Када искористимо чињеницу да тачка (x_0,y_0,z_0) припада елипсоиду, тј. задовољава његову једначину, добијамо да је $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$. Једначина тангентне равни на елипсоид у произвољној тачки (x_0,y_0,z_0) је

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1.$$

✓

10. Површ је задата једначином $f(x,y,z)=0$, где је

$$f(x,y,z)=x^2+4y^2-z,$$

па су координате вектора нормале тангентне равни

$$(f'_x,f'_y,f'_z)|_{(2,1,8)}=(4,8-1).$$

(Код експлицитно задате површи увек ће бити $f'_z(x_0,y_0,z_0)=-1$ у произвољној тачки (x_0,y_0,z_0).) Једначина тангентне равни у тачки $(2,1,8)$ је

$$4x+8y-z=8.$$

✓

11. Лако се добија да је:

$$\begin{aligned}
&f(0,0)=0, && f'_x(0,0)=0, && f'_y(0,0)=3;\\
&f''_{xx}(0,0)=0, && f''_{yy}(0,0)=0, && f''_{xy}(0,0)=6;\\
&f'''_{xxx}(0,0)=0, && f'''_{xxy}(0,0)=12, && f'''_{xyy}(0,0)=0, && f'''_{yyy}(0,0)=-27.
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\begin{aligned}
&T_3(x,y)=0+0\cdot(x-0)+3(y-0)+\\
&\frac{1}{2}\left[0\cdot(x-0)^2+2\cdot 6(x-0)(y-0)+0\cdot(y-0)^2\right]+\\
&\frac{1}{6}\left[0\cdot(x-0)^3+3\cdot 12(x-0)^2(y-0)+3\cdot 0(x-0)(y-0)^2+(-27)(y-0)^3\right]\\
&=3y+6xy+6x^2y-\frac{9}{2}y^3.
\end{aligned}$$

Напомена. Приметимо да је задата функција облика $f(x,y) = g(x)h(y)$. Ако функције $g(x)$ и $h(y)$ (као функције једне промењљиве) развијемо у Тејлоров полином трећег степена и помножимо, добићемо исти резултат. ✓

12. Ако у једначину заменимо да је $x = 0$ и $y = 2$, и узмемо у обзир да је $z > 0$, добијамо први члан у Тејлоровом развоју: $z(0,2) = 2$. Диференцирањем једначине по x и по y, добијамо

$$\begin{aligned} 4x - 2zz_x^{'} - 2y + 2yzz_x^{'} &= 0, \\ -2y - 2zz_y^{'} - 2x + z^2 + y \cdot 2zz_y^{'} &= 0. \end{aligned}$$

Замењујући да је $x = 0$, $y = 2$ и $z(0,2) = 2$, имамо $z_x^{'}(0,2) = 1$, $z_y^{'}(0,2) = 0$. На исти начин (диференцирањем горњих једначина по одговарајућим промењљивим), добијамо

$$z_{xx}^{''}(0,2) = -\frac{3}{2}, \quad z_{xy}^{''}(0,2) = -\frac{1}{2}, \quad z_{yy}^{''}(0,2) = \frac{1}{2}.$$

Тејлоров полином другог степена задате функције у тачки $A(0,2)$ је

$$\begin{aligned} T_2(x,y) = 2 &+ 1 \cdot (x-0) + 0 \cdot (y-2) + \\ &\frac{1}{2}\left[-\frac{3}{2}(x-0)^2 + 2(-\frac{1}{2})(x-0)(y-2) + \frac{1}{2}(y-2)^2\right] \\ &= 3 + 2x - y - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}xy. \end{aligned}$$

✓

13. Потражимо стационарне тачке:

$$\begin{aligned} f_x' &= 3y - 3x^2 = 0, \\ f_y' &= 3x - 3y^2 = 0. \end{aligned}$$

Замењујући у другу једначину да је $y = x^2$, добијамо $x(1 - x^3) = 0$, односно добијамо две стационарне тачке $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$. За утврђивање да ли су оне и екстремне вредности биће нам потребни парцијални изводи другог реда:

$$f_{xx}'' = -6x, \qquad f_{xy}'' = 3, \qquad f_{yy}'' = -6y.$$

У тачки $M_1(0,0)$ је $d^2f(M_1) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, па како је $\triangle_2 = -9 < 0$, M_1 није тачка локалног екстремума.
У тачки $M_2(1,1)$ је $d^2f(M_1) = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$, па како је $\triangle_1 = -6 < 0$ и $\triangle_2 = 27 > 0$, M_2 јесте тачка локалног максимума и $f(M_2) = 1$. ✓

14. Стационарне тачке добићемо решавањем система:

$$f'_x = 4x^3 - 4x = 0,$$
$$f'_y = 4y^3 = 0.$$

Кандидати за тачке локалних екстремума су $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$ и $M_3(-1,0)$. Израчунајмо и парцијалне изводе другог реда:

$$f''_{xx} = 12x^2 - 4, \qquad f''_{xy} = 0, \qquad f''_{yy} = 12y^2.$$

У тачки $M_1(0,0)$ је $d^2f(M_1) = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, па како је $\triangle_2 = 0$, Силвестеров критеријум нам не даје одговор. Посматраћемо прираштај функције $f(x,y)$ у тачки $M_1(0,0)$:

$$f(0+h, 0+k) - f(0,0) = h^4 + k^4 - 2h^2 = h^2(h^2-2) + k^4.$$

Покажимо да претходни израз мења знак.

$$\text{за правац } k = 0 : f(h,0) - f(0,0) = h^2(h^2-2) < 0 \text{ за } 0 < |h| < \sqrt{2}$$
$$\text{за правац } h = 0 : f(0,k) - f(0,0) = k^4 > 0 \text{ за } k \neq 0$$

Закључујемо да M_1 није тачка локалног екстремума.
У тачки $M_2(1,0)$ је $d^2f(M_2) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, па како је $\triangle_2 = 0$, посматраћемо прираштај функције $f(x,y)$ у тачки $M_2(1,0)$:

$$f(1+h, 0+k) - f(1,0) = ((1+h)^2 - 1)^2 + k^4 \geqslant 0.$$

Закључујемо да је $M_2(1,0)$ тачка локалног минимума и $f(1,0) = -1$.
У тачки $M_3(-1,0)$ је $d^2f(M_3) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, па како је $\triangle_2 = 0$, посматраћемо прираштај функције $f(x,y)$ у тачки $M_3(-1,0)$:

$$f(-1+h, 0+k) - f(-1,0) = ((-1+h)^2 - 1)^2 + k^4 \geqslant 0.$$

Закључујемо да је $M_3(-1,0)$ тачка локалног минимума и $f(-1,0) = -1$. ✓

15. Стационарне тачке су решења система:

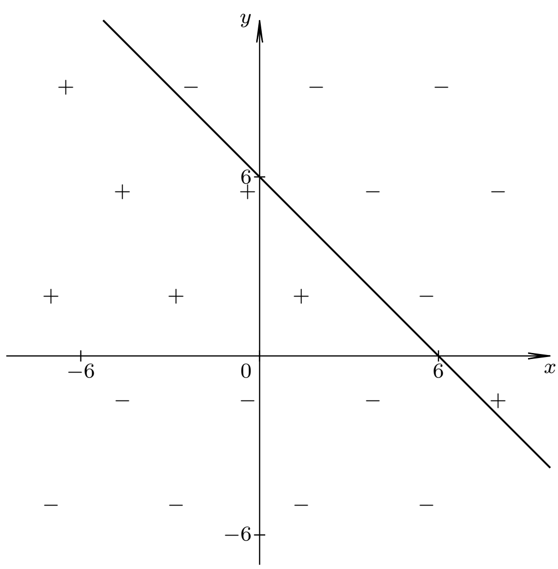
$$f'_x = xy^3(-3x - 2y + 12) = 0,$$
$$f'_y = x^2y^2(-3x - 4y + 18) = 0.$$

Укрштањем решења прве једначине и решења друге једначине добијамо фамилије тачака $M_t(0,t)$ и $N_t(t,0)$, $t \in \mathbb{R}$, као и тачку $S(2,3)$. Израчунајмо и друге парцијалне изводе како бисмо формирали квадратну форму d^2f:

$$f''_{xx} = 2y^3(6 - y - 3x), \quad f''_{xy} = xy^2(36 - 8y - 9x), \quad f''_{yy} = 6x^2y(6 - x - 2y).$$

У тачки $S(2,3)$ је $d^2f(M_1) = \begin{bmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{bmatrix}$, па како је $\triangle_1 = -162 < 0$ и $\triangle_2 = 162 \cdot 144 - 108^2 > 0$, S је тачка локалног максимума и $f(S) = 108$.

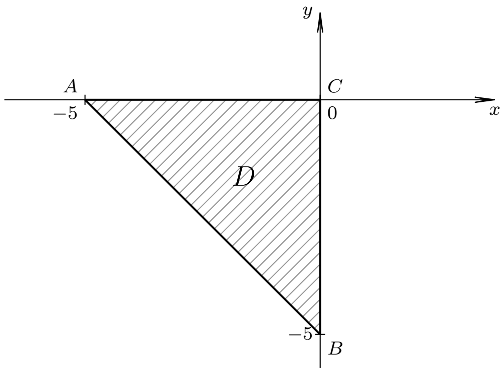
У случају обе фамилије тачака M_t и N_t, Силвестеров критеријум не даје одговор јер је $\triangle_2 = 0$. Задатак се може решити испитивањем прираштаја као у претходном задатку. Међутим, може се лепо искористити чињеница да је $f(M_t) = f(N_t) = 0$, јер је довољно испитати знак функције у околини ових тачака. Наиме, ако је функција позитивна у околини неке M_{t_0}, а знамо да је $f(M_{t_0}) = 0$, онда је M_{t_0} тачка локалног минимума. Слично када је функција негативна у околини неке од ових тачака - у том случају је у питању тачка локалног максимума.
Знак функције $f(x,y) = x^2y^3(6-x-y)$ зависи од знака израза y и $6-x-y$, и то:



Слика 7.2: уз задатак 15

Сада је јасно да су за $t > 6$ и $t < 0$ тачке M_t тачке локалног максимума, а за $0 < t < 6$ тачке локалног минимума. За $t = 0$ и $t = 6$ очигледно немамо локалну екстремну вредност, јер ма колико малу околину ових тачака узели, функција f ту узима и позитивне и негативне вредности. Слично се закључује да ниједна од тачака N_t није тачка локалног екстремума. ✓

16. Дати скуп је затворен и ограничен, па је компактан. Функција $f(x, y)$ је непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$, самим тим и на D, па достиже своју најмању и највећу вредност.



Слика 7.3: уз задатак 16

У унутрашњости скупа D решавањем система:

$$f'_x = 2x - y + 3 = 0,$$
$$f'_y = -x + 4y + 2 = 0,$$

добијамо стационарну тачку $M_1(-2, -1)$, која заиста припада $\operatorname{int} D$.

• На дужи AB: $y = -x - 5$, $-5 < x < 0$ је

$$\varphi(x) = f(x, -x-5) = 4x^2 + 26x + 41$$
$$\varphi'(x) = 8x + 26 = 0,$$

па је $M_2(-\frac{13}{4}, -\frac{7}{4})$ стационарна тачка која заиста припада дужи AB.

• На дужи BC: $x = 0$, $-5 < y < 0$ је

$$\psi(y) = f(0, y) = 2y^2 + 2y + 1,$$
$$\psi'(y) = 4y + 2 = 0$$

па је $M_3(0, -\frac{1}{2})$ стационарна тачка која заиста припада дужи BC.

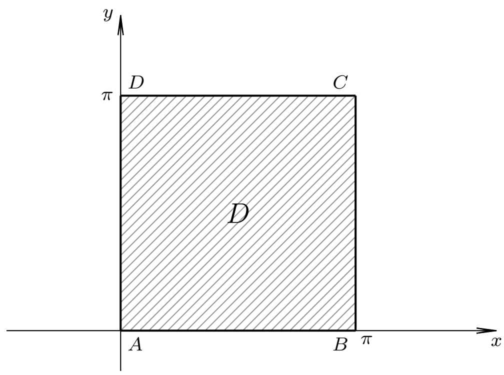
• На дужи AC: $y = 0$, $-5 < x < 0$ је

$$\chi(x) = f(x, 0) = x^2 + 3x + 1,$$
$$\chi'(x) = 2x + 3 = 0,$$

па је $M_4(-\frac{3}{2}, 0)$ стационарна тачка која заиста припада дужи AC.

Узимајући у обзир и темена A, B, C, односно вредности функције у њима, добијамо да је најмања вредност функције f на скупу D $f(M_1) = -3$, а највећа $f(B) = 41$. ✓

17. Дати скуп је затворен и ограничен, па је компактан. Функција $f(x, y)$ је непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$, самим тим и на D, па достиже своју најмању и највећу вредност.



Слика 7.4: уз задатак 17

У унутрашњости скупа D стационарне тачке су решења система:

$$f'_x = \cos x - \cos(x + y) = 0,$$
$$f'_y = \cos y - \cos(x + y) = 0$$

Одузимајући ове једначине добијамо да је $\cos x = \cos y$, одакле даље следи да за $x, y \in (0, \pi)$ мора бити $x = y$. Замењујући $x = y$ у прву једначину и користећи идентитет $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, добијамо $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Ако ставимо да је $t = \cos x$ и решимо квадратну једначину, добићемо два решења, односно две тачке $(0, 0)$ и $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$. Како прва тачка не припада унутрашњости квадрата D, одбацујемо је, па је за сада једина стационарна тачка $M_1(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$.

• На дужи AB: $y = 0$, $0 < x < \pi$ је

$$\varphi(x) = f(x, 0) = \sin x - \sin x = 0,$$

па је овде и најмања и највећа вредност једнака нули.

• На дужи BC: $x = \pi$, $0 < y < \pi$ је

$$\psi(y) = f(\pi, y) = \sin y - \sin(y + \pi) = 2\sin y,$$
$$\psi'(y) = 2\cos y = 0,$$

па је $M_2(\pi, \frac{\pi}{2})$ стационарна тачка која заиста припада дужи BC.
• На дужи CD: $y = \pi$, $0 < x < \pi$ је

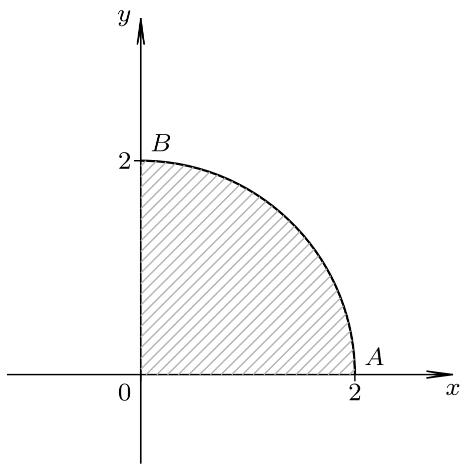
$$\chi(x) = f(x, \pi) = \sin x - \sin(x + \pi) = 2\sin x,$$
$$\chi'(x) = 2\cos x = 0,$$

па је $M_3(\frac{\pi}{2}, \pi)$ стационарна тачка која заиста припада дужи CD.
• На дужи AD: $x = 0$, $0 < y < \pi$ је

$$\theta(y) = f(0, y) = \sin y - \sin y = 0,$$

па је овде и најмања и највећа вредност једнака нули.
Узимајући у обзир вредност функције у теменима A, B, C, D, добијамо да је најмања вредност функције f на скупу D $f(A) = 0$, а највећа $f(M_1) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
✓

18. Дати скуп је затворен и ограничен, па је компактан. Функција $f(x, y)$ је непрекидна на целом $\mathbb{R}^2$, самим тим и на D, па достиже своју најмању и највећу вредност.



Слика 7.5: уз задатак 18

У унутрашњости скупа D решење система:

$$f'_x = 2x + y - 3 = 0,$$
$$f'_y = x + 2y - 3 = 0,$$

је стационарна тачка $M_1(1,1)$ која заиста припада $\operatorname{int} D$.

• На дужи OA: $y = 0$, $0 < x < 2$ је

$$g(x) = f(x,0) = x^2 - 3x,$$
$$g'(x) = 2x - 3 = 0,$$

па је $M_2(\frac{3}{2}, 0)$ стационарна тачка која заиста припада дужи OA.

• На дужи OB: $x = 0$, $0 < y < 2$ је

$$h(y) = f(0,y) = y^2 - 3y,$$
$$h'(y) = 2y - 3 = 0,$$

па је $M_3(0, \frac{3}{2})$ стационарна тачка која заиста припада дужи OB.

• На луку $\widehat{AB}$: $y = \sqrt{4 - x^2}$, $0 < x < 2$ је

$$l(x) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = 4 - 3x + (x - 3)\sqrt{4 - x^2},$$

па су стационарне тачке оне чије су x- координате решења једначине:

$$l'(x) = \frac{4 + 3x - 2x^2 - 3\sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} = 0,$$

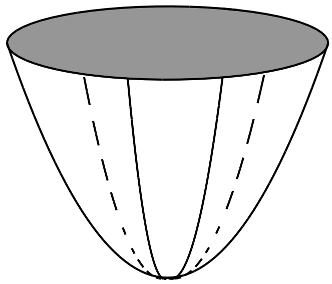
односно нуле полинома $2x^4 - 6x^3 + x^2 + 12x - 10 = (x^2 - 2)(2x^2 - 6x + 5)$. Услов $0 < x < 2$ задовољава тачка $M_4(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

У овом случају је, као што видимо, задатак могуће решити без коришћења Лагранжеве функције, али није једноставно. Решимо га сада користећи Лагранжеву функцију $F(x, y, \lambda) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$.

$$F'_x = 2x + y - 3 + 2\lambda x = 0,$$
$$F'_y = x + 2y - 3 + 2\lambda y = 0,$$
$$F'_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0,$$

па је једина стационарна тачка $M_4(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Овај систем се свакако лакше решава него што се одређују нуле полинома четвртог степена. Узимајући у обзир вредност функције у теменима O, A, B добијамо да је најмања вредност функције f на скупу D $f(M_4) = 6 - 6\sqrt{2}$, а највећа $f(O) = 0$. ✓

19. Дати скуп је затворен и ограничен, па је компактан. Функција $f(x, y, z)$ је непрекидна на целом $\mathbb{R}^3$, самим тим и на D, па достиже своју најмању и највећу вредност.



Слика 7.6: уз задатак 19

• Унутрашњост тела ограниченог параболоидом и равни: $x^2+y^2<z<1$

$$f'_x = 1, \quad f'_y = 1, \quad f'_z = 1,$$

па нема стационарних тачака у $\operatorname{int} D$.

• Унутрашњост круга у равни (на слици је сив): $z=1$, $x^2+y^2<1$

Задатак се своди на тражење најмање и највеће вредности функције $g(x,y) = f(x,y,1) = x+y+1$ на скупу $x^2+y^2<1$.

$$f'_x = 1, \quad f'_y = 1,$$

па овде нема кандидата.

• Кружница у равни: $z=1$, $x^2+y^2=1$

Задатак се своди на тражење најмање и највеће вредности функције $g(x,y) = f(x,y,1) = x+y+1$ при услову $x^2+y^2=1$. Формирајмо Лагранжеву функцију:

$$F(x,y,\lambda) = x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1).$$

Стационарне тачке су решења система:

$$\begin{aligned} F'_x &= 1+2\lambda x = 0,\\ F'_y &= 1+2\lambda y = 0\\ F'_\lambda &= x^2+y^2-1 = 0. \end{aligned}$$

Лако се види да је $x=y$, па су $M_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ и $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ стационарне тачке.

• Део параболоида: $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2<1$

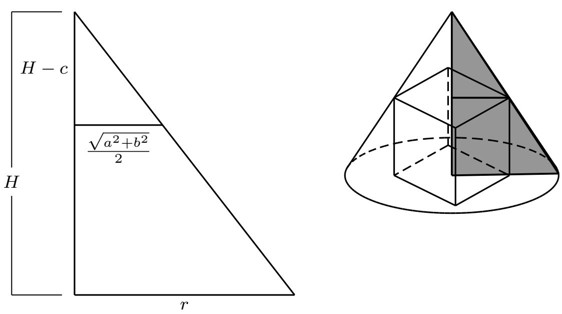
Задатак се своди на тражење најмање и највеће вредности функције $g(x,y) =$

$f(x, y, x^2+y^2) = x+y+x^2+y^2$ на отвореном скупу $x^2+y^2 < 1$. Стационарне тачке су решења система:

$$g'_x = 1 + 2x = 0,$$
$$g'_y = 1 + 2y = 0,$$

па добијамо и последњу тачку $M_3(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Највећа вредност функције је $f(M_1) = \sqrt{2}+1$, а најмања $f(M_3) = -\dfrac{1}{2}$. ✓

20. Ако са r означимо полупречник основе, са H висину купе и са a, b, c странице квадра, из сличности троуглова добијамо "везу" $\dfrac{H}{H-c} = \dfrac{r}{\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$, односно $2r(H-c) = H\sqrt{a^2+b^2}$.



Слика 7.7: уз задатак 20

Уведимо функцију $f(x, y, z) = xyz$ (формула за запремину квадра). Потребно је наћи њен максимум при услову $2r(H-z) = H\sqrt{x^2+y^2}$. Формирајмо Лагранжеву функцију:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(2r(H-z) - H\sqrt{x^2+y^2}).$$

Стационарне тачке су решења система:

$$\begin{aligned}
F'_x &= yz - \lambda H \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,\\
F'_y &= xz - \lambda H \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\\
F'_z &= xy - 2r\lambda = 0,\\
F'_\lambda &= 2r(H-z) - H\sqrt{x^2+y^2} = 0.
\end{aligned}$$

Ако прву једначину помножимо са x, другу са y и одузмемо, добићемо да је $x = y$ $(x, y > 0)$. Из треће једначине следи да је $x = y = \sqrt{2r\lambda}$, док замењујући у четврту добијамо да је $z = \dfrac{H(\sqrt{r}-\sqrt{\lambda})}{\sqrt{r}}$. На крају је још $\lambda = \dfrac{4}{9}r$. За ове вредности добија се максимална запремина квадра:

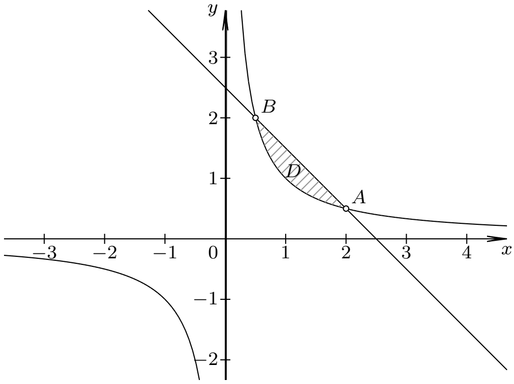
$$V_{\max} = xyz = \frac{8r^2H}{27}.$$

✓

21. Додефинишемо да је $f(x,0)=0$, за $x<0$. $f'_x(x_0,0) = f'_y(x_0,0) = 0$. ✓ **22.** Функција није диференцијабилна у $(0,0)$ јер не постоји парцијални извод $f'_y(0,0)$. ✓ **23.** Домен је скуп ограничен правама $y=x$ и $y=-x$ који садржи x-осу. Функција је диференцијабилна јер су јој парцијални изводи непрекидни. ✓ **24.** Функција је непрекидна на домену $\mathbb{R}^2$. Функција није диференцијабилна у тачкама облика $(x,-1)$, за $x \neq 0$. ✓ **25.** Функција јесте непрекидна, али није диференцијабилна у $(0,0)$. Извод у свим правцима кроз $(0,0)$ једнак је нули. ✓ **26.** Парцијални изводи првог реда не постоје у тачки $(-1,1)$. У тој тачки функција није диференцијабилна; у свим осталим јесте, јер су парцијални изводи непрекидни. Тражени извод у правцу је једнак $\frac{\sqrt{3}}{2}$. ✓ **27.** Функција је непрекидна и диференцијабилна на целом $\mathbb{R}^2$. Једнакост важи за све α. ✓ **28.** Функција је непрекидна и диференцијабилна на целом $\mathbb{R}^2$. $f'_x(x,y) = y(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ и $f'_y(x,y) = x(x^2-y^2)/(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ за $(x,y) \neq (0,0)$. У тачки $(0,0)$ су оба парцијална извода једнака нули. ✓ **29.** Функција је непрекидна и диференцијабилна на целом $\mathbb{R}^2$. ✓ **30.** Тражени лимес је једнак 1. $f'_x(x,y) = (x\cos(x+y) - \sin(x+y))/x^2$, $x \neq 0$, а када је $x=0$ не постоји. $f'_y(x,y) = \cos(x+y)/x$, $x \neq 0$ и $f'_y(0,y) = 0$. ✓ **31.** $2\sqrt{\pi}x + z - 2\pi = 0$. ✓ **32.** $2x+2y+z-4=0$. ✓ **33.** $\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \frac{z-2}{0}$. ✓ **34.** $T_2(x,y) = e^2(3+5(x-1)+4(y-1)+\frac{7}{2}(x-1)^2+6(x-1)(y-1)+\frac{5}{2}(y-1)^2)$. ✓ **35.** $z'_u(u,v) = 4\cos v(\ln(u\sin v)+1)$ и $z'_v(u,v) = 4u\big(-\sin v\ln(u\sin v) + \frac{\cos^2 v}{\sin v}\big)$. ✓ **36.** У тачкама $(-1,-1)$ и $(1,1)$ постиже се локални минимум који је једнак -2. Тачка $(0,0)$ није тачка локалног екстремума. ✓ **37.** Локални минумум постиже се у тачки $(2,1)$ и једнак је -28. Локални максимум постиже се у тачки $(-2,-1)$ и једнак је 28. ✓ **38.** У јединој стационарној тачки $(2,8)$ постиже се локални максимум који је једнак -4. ✓ **39.** Најмања вредност постиже се у координатном почетку и једнака је 2013. ✓ **40.** У тачки $(0,0)$ постиче се најмања вредност и једнака је 0. Највећа вредност постиже се у тачки $(\sqrt{t}, t)$, где је $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, и једнака је $t + t\sqrt{t} + t^2$. ✓ **41.** Највећа вредност $\frac{1}{6e^2}$ постиже се у тачки $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, најмања $\frac{1}{2e^4}$ у тачки $(\frac{1}{2}, 1)$. ✓ **42.** Од девет стационарних тачака, највећа вредност (која износи 1) постиже се у тачкама $(1, 0)$ и $(-1, 0)$, најмања вредност (која износи -1) у тачкама $(0, 1)$ и $(0, -1)$. ✓ **43.** $P = 150$. ✓ **44.** На најмањој удаљености ($d = 2$) су тачке $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, а на највећој ($d = 3$) $(\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}})$ и $(-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$. ✓ **45.** $F(x, y, z, \lambda) = (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 + x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. ✓

7.3. Двоструки и троструки интеграли

1. Да бисмо одредили границе за x и y потребно је да нађемо пресечне тачке ове две криве, као и да скицирамо скуп D.



Слика 7.8: уз задатак 1

Замењујући $y = \dfrac{5}{2} - x$ у $xy = 1$, добијамо квадратну једначину по x:

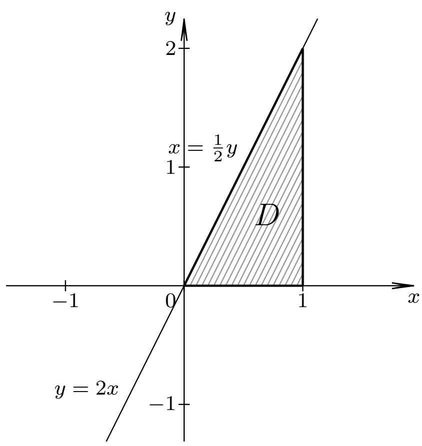
$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

чија су решења $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 2$. Дакле, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{5}{2} - x\}$. Сада можемо прећи на рачунање двојног интеграла, сводећи га на поновљени интеграл:

$$\iint\limits_D xydxdy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\Bigg(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} xydy\Bigg)dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\Bigg(x\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x}\Bigg)dx = \frac{165}{128} - \ln 2$$

✓

2. Област D је скицирана на слици испод.



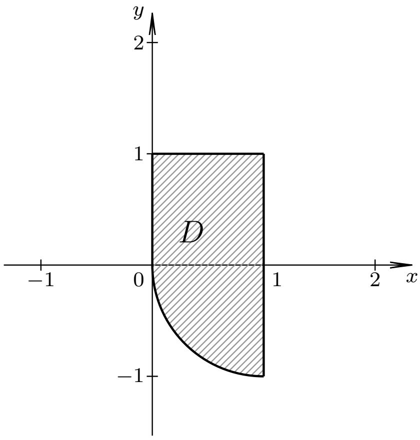
Слика 7.9: уз задатак 2

Сада се лако види да важе следеће једнакости:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1\Bigg(\int\limits_0^{2x} f(x,y)dy\Bigg)dx = \int\limits_0^2\Bigg(\int\limits_{\frac{y}{2}}^{1} f(x,y)dx\Bigg)dy.$$

✓

3. Сведимо прво дати интеграл на двојни, односно одредимо скуп D. Јасно је да је $0 \leqslant x \leqslant 1$, док је $-\sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant 1$. Након краћег сређивања добијамо да је $y = -\sqrt{2x-x^2}$ заправо доња полукружница круга $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Сада можемо скицирати скуп D:



Слика 7.10: уз задатак 3

Ако покушамо да одредимо границе за x као функције од y, видећемо да то не можемо учинити у једном кораку, већ морамо у два:

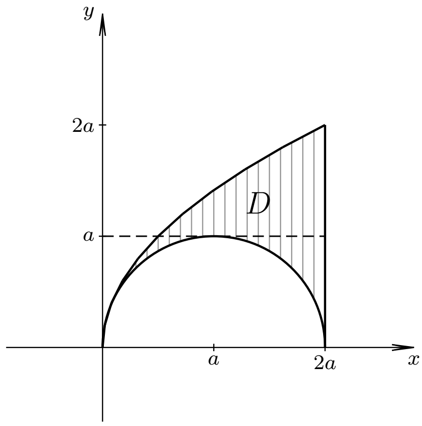
$$\begin{aligned} -1 \leqslant{} & y \leqslant 0, & \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 1-\sqrt{1-y^2} \leqslant{} & x \leqslant 1; & \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{aligned}$$

Преостаје само да запишемо добијено:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^1 f(x,y)dy = \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^1 f(x,y)dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx.$$

✓

4. Слично претходном задатку, скицирајмо прво скуп D. Знамо да је $0 \leqslant x \leqslant 2a$, док је $-\sqrt{2ax-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{2ax}$.



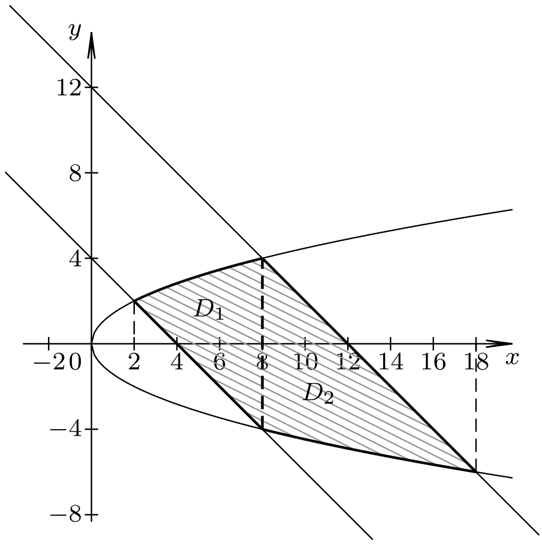
Слика 7.11: уз задатак 4

Ако покушамо да заменимо поредак интеграције, видећемо да се скуп D мора поделити на (бар) три дела:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & y \leqslant a, & 0 \leqslant & y \leqslant a, & a \leqslant & y \leqslant 2a, \\ \frac{y^2}{2a^2} \leqslant & x \leqslant a - \sqrt{a^2 - y^2}; & a + \sqrt{a^2 - y^2} \leqslant & x \leqslant 2a; & \frac{y^2}{2a^2} \leqslant & x \leqslant 2a; \end{aligned}$$

Дакле, дати интеграл би након замене поретка био једнак збиру три интеграла са границама које смо управо одредили. ✓

5. Скуп D је ограничен параболом $y^2 = 2x$ и двема паралелним правама $x + y = 4$, $x + y = 12$. Пресечне тачке параболе и правих добијају се заменом $x = 4 - y$, тј. $x = 12 - y$ у $y^2 = 2x$ и решавањем одговарајућих квадратних једначина. Те тачке су $(8, -4)$ и $(2, 2)$ са прве праве, односно $(18, -6)$ и $(8, 4)$ са друге праве. Због тога можемо скуп D поделити на два подскупа D_1 и D_2, као на слици, и рачунати одвојено одговарајуће интеграле.

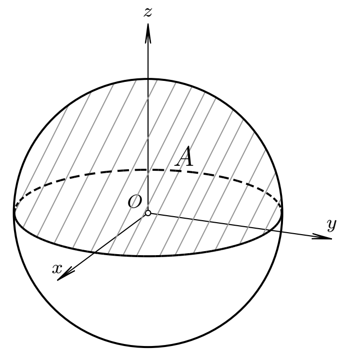


Слика 7.12: уз задатак 5

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D}(x+y)dxdy &= \iint\limits_{D_1}(x+y)dxdy + \iint\limits_{D_2}(x+y)dxdy\\
&= \int_2^8\left(\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)dy\right)dx + \int_8^{18}\left(\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)dy\right)dx\\
&= \frac{8156}{15}
\end{aligned}
$$

✓

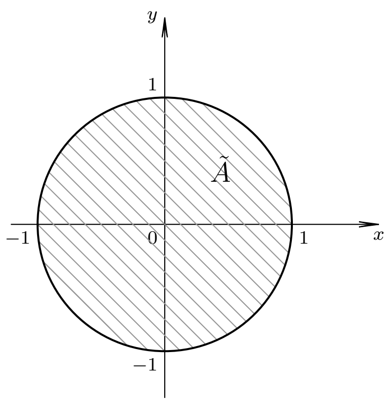
6. Скуп A је скициран на слици испод.



Слика 7.13: уз задатак 6

Дати тројни интеграл једнак је двојном интегралу по пројекцији $\tilde{A}$ тела A, при чему је $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$:

$$\iiint\limits_A z dx dy dz = \iint\limits_{\tilde{A}} \Big(\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \Big) dx dy = \frac{1}{2} \iint\limits_{\tilde{A}} (1-x^2-y^2) dx dy.$$



Слика 7.14: уз задатак 6

Како се горња полукружница описује једначином $y = \sqrt{1-x^2}$, а доња $y = -\sqrt{1-x^2}$, можемо прећи на поновљени интеграл:

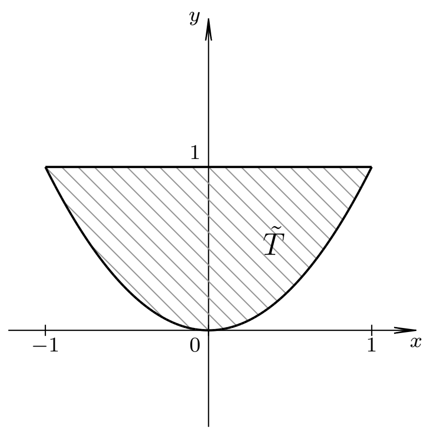
$$\iiint\limits_A z dx dy dz = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)dydx = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Приметимо да је подинтегрална функција у последњем интегралу парна и уведимо смену $x = \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$
$$= \frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt = \frac{\pi}{4}.$$

Напомена. Овај задатак се природније и лакше решава увођењем поларних координата. ✓

7. Запремина тела T је тројни интеграл $V(T) = \iiint\limits_T dx dy dz$. На основу пројекције тела одређујемо границе за x и y.



Слика 7.15: уз задатак 7

Иако није лако скицирати тродимензионалну слику, јасно је да је $0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2$. Дакле, тражене границе су:

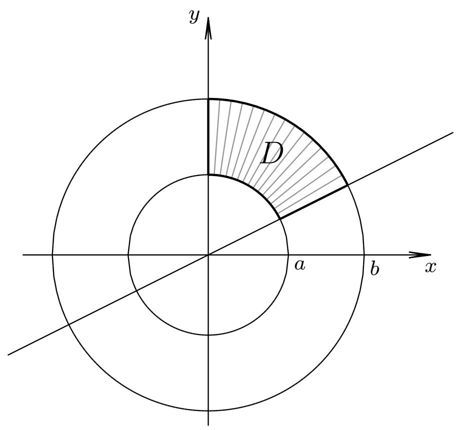
$$\begin{aligned} -1 &\leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 &\leqslant y \leqslant 1, \\ 0 &\leqslant z \leqslant x^2 + y^2. \end{aligned}$$

Преостаје још да израчунамо интеграл:

$$V(T) = \iint\limits_{\widetilde{T}} dxdy \int\limits_0^{x^2+y^2} dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (x^2 + y^2) dy = \frac{88}{105}.$$

✓

8. Скуп D је скициран на слици испод.



Слика 7.16: уз задатак 8

Због „облика” скупа D, задатак је погодно решавати увођењем поларних координата. Ако ставимо да је

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

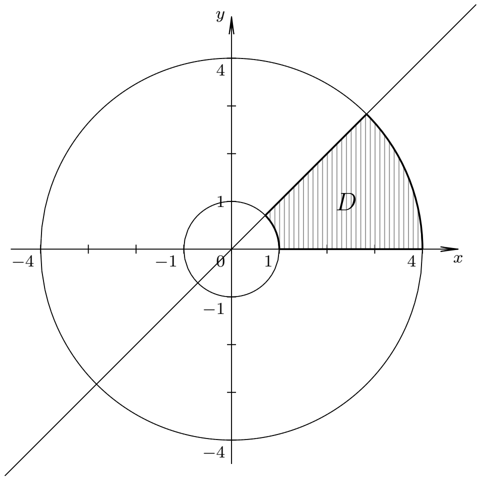
потребно је још одредити границе за r и θ. Са слике видимо да је $a \leqslant r \leqslant b$, док је $\frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Како је Јакобијан $J = r$ и $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta +$

$\sin^2\theta) = r^2$, имамо:

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_a^b e^{r^2} r dr d\theta = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_a^b d\theta = \frac{\pi}{6}(e^{b^2} - e^{a^2}).$$

✓

9. Скуп D је скициран на слици испод.



Слика 7.17: уз задатак 9

Ако уведемо поларне координате

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

са слике можемо видети да је $1 \leqslant r \leqslant 2$, док је $0 \leqslant \theta \leqslant \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Како је $\dfrac{1}{2x^2+y^2} = \dfrac{1}{r^2(1+\cos^2\theta)}$, то је:

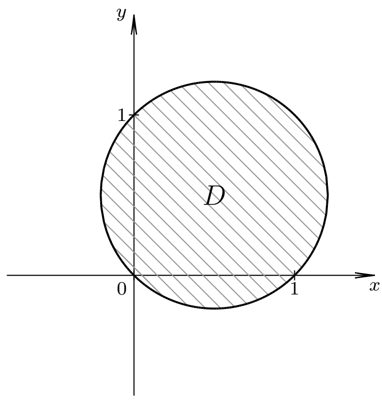
$$\iint\limits_D \frac{1}{2x^2+y^2}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\int\limits_1^2 \frac{rdr}{r^2(1+\cos^2\theta)}d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2\theta}\ln r\Big|_1^2 d\theta$$
$$= \ln 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta.$$

Подинтегрална функција је парна по $\cos\theta$, па можемо увести смену $t = \operatorname{tg}\theta$. Тада је $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+t^2}$ и $d\theta = \dfrac{1}{1+t^2}dt$, па се интеграл, након краћег сређивања, своди на:

$$\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2\theta}d\theta = \ln 2\int_0^1 \frac{1}{2+t^2}dt = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

✓

10. Како је $x^2+y^2 \leqslant x+y$ еквивалентно са $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2 \leq (\frac{1}{\sqrt{2}})^2$, видимо да је D круг као на слици:



Слика 7.18: уз задатак 10

Пошто центар круга по коме интегралимо није координатни почетак, увешћемо транслиране поларне координате, како бисмо лакше одредили границе за r и θ. Дакле, ако ставимо да је

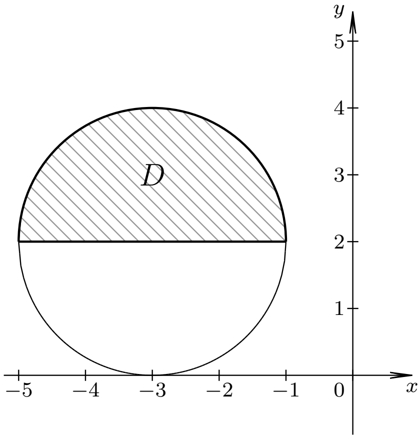
$$x = \frac{1}{2} + r\cos\theta,$$
$$y = \frac{1}{2} + r\sin\theta,$$

границе ће бити $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, док Јакобијан $J = r$ остаје исти.

$$\iint_D (x+y)dxdy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r(\cos\theta+\sin\theta)+1)rdrd\theta = \frac{\pi}{2}.$$

✓

11. Како је $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 \leqslant 0$ еквивалентно са $(x+3)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4$, закључујемо да је скуп по коме интегралимо полукруг као на слици:



Слика 7.19: уз задатак 11

Ако уведемо транслиране поларне координате:

$$x = -3 + r\cos\theta,$$
$$y = 2 + r\sin\theta,$$

са слике се може видети да су границе за r и θ дате са:

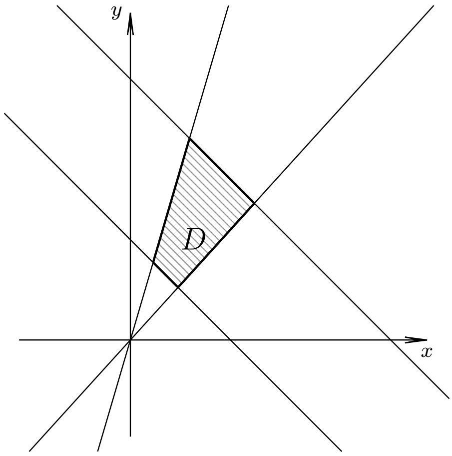
$$0 \leqslant r \leqslant 2,$$
$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Преостаје само једноставан рачун:

$$\iint\limits_D y\,dxdy = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^2 (2 + r\sin\theta) r\,dr\,d\theta = 4\pi + \frac{16}{3}.$$

✓

12. Скуп D је ограничен са четири праве и представља један трапез у равни као на слици:



Слика 7.20: уз задатак 12

Један начин решавања овог задатка јесте дељењем скупа D на више мањих, али се овај начин не препоручује јер је компликованији и оставља много могућности за грешке. Уместо тога, приметимо да је:

$$\alpha \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \beta, \qquad a \leqslant x + y \leqslant b.$$

Сада можемо увести нове координате:

$$u = x + y, \qquad v = \frac{y}{x},$$

за које већ знамо границе (зато смо их овако и одабрали). Преостаје да израчунамо Јакобијан за ову смену, што није тешко урадити када изразимо x и y преко u и v:

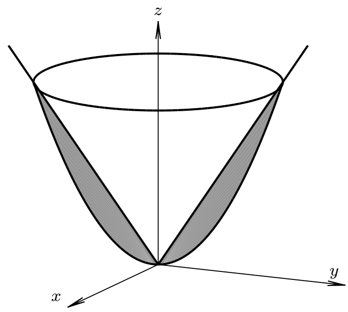
$$x = \frac{u}{v+1}, \qquad y = \frac{uv}{v+1}.$$

Након одређивања парцијалних извода првог реда по u и v и рачунања детерминанте, добија се да је $J = \dfrac{u}{(v+1)^2}$, па је:

$$\iint\limits_D \frac{1}{xy} dxdy = \int\limits_a^b \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{\frac{u}{v+1} \cdot \frac{uv}{v+1}} \frac{u}{(v+1)^2} dvdu = \int\limits_a^b \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{uv} dvdu = \ln \frac{\beta}{\alpha} \ln \frac{b}{a}.$$

✓

13. Дато тело је са горње стране ограничено конусом, а са доње параболоидом.



Слика 7.21: уз задатак 13

Пројекцију тела можемо видети са слике или добити рачунским путем. Ако потражимо пресек ове две површи, добићемо да је:

$$\frac{x^2+y^2}{a} = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = a,$$

односно, пресек је круг $x^2+y^2=a^2$ на висини $z=a$, па је пројекција $\widetilde{T}: x^2+y^2=a^2$.
Сада је

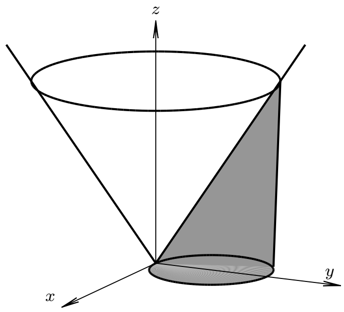
$$\begin{aligned} V(T) &= \iiint\limits_T dxdydz = \iint\limits_{\widetilde{T}} (\int\limits_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz)dxdy \\ &= \iint\limits_{\widetilde{T}} \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{a}\right) dxdy. \end{aligned}$$

Како је $\widetilde{T}$ круг са центром у координатном почетку полупречника a, увођењем обичних поларних координата, дати интеграл се своди на:

$$\iint\limits_{\widetilde{T}} \left(\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2+y^2}{a}\right) dxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{0}^{a} \left(r - \frac{r^2}{a}\right) r dr d\theta = \frac{a^3\pi}{6}.$$

✓

14. Како је $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ и $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$, тело T ограничено је конусом, цилиндром и равни.



Слика 7.22: уз задатак 14

Пројекција на раван $z = 0$ је круг $\widetilde{T} : (x-1)^2 + y^2 = 1$ и важи

$$V(T) = \iiint\limits_{T} dxdydz = \iint\limits_{\widetilde{T}} \Bigg(\int\limits_{0}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \Bigg) dxdy = \iint\limits_{\widetilde{T}} \sqrt{x^2+y^2} dxdy.$$

Уведимо обичне поларне координате (са транслираним бисмо добили компликованије подинтегралне изразе). Тада је $\sqrt{x^2+y^2} = r$, границе за θ су $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, а границе за r добијају се из услова

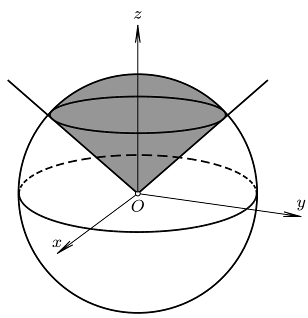
$$r^2 = x^2 + y^2 = 2x = 2r\cos\theta,$$

тј. $0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta$. Тражена запремина је

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Bigg(\int\limits_{0}^{2\cos\theta} dr \Bigg) d\theta = \frac{8}{3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{16}{3} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{16}{3} \int\limits_{0}^{1} (1-t^2) dt = \frac{32}{9}.$$

Напомена. Иако можда тако делује на слици, тело T није купа! ✓

15. Дато тело T ограничено је сфером $x^2+y^2+z^2 = 9$ и конусом $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.



Слика 7.23: уз задатак 15

Први начин (преко пројекције)

Пресек сфере и конуса је кружница $x^2+y^2=\frac{27}{4}$ у равни $z=\frac{3}{2}$, па је пројекција тела T на $xy-$раван круг $\widetilde{T}: x^2+y^2=\frac{27}{4}$. Уведимо обичне поларне координате (r,θ) у пројекцији. Очигледно су границе $0\leqslant r\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, па је тражена запремина:

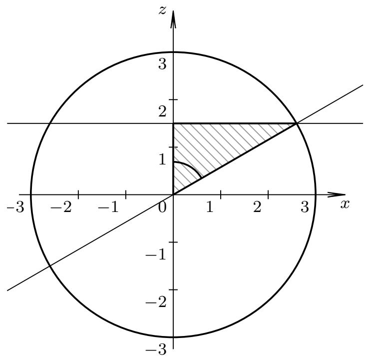
$$\begin{aligned}
V(T)=\iint\limits_{\widetilde{T}}\Bigg(\int\limits_{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}dz\Bigg)dxdy &= \iint\limits_{\widetilde{T}}\Bigg(\sqrt{9-x^2-y^2}-\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\Bigg)dxdy\\
&=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\int\limits_{0}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}(\sqrt{9-r^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}r)rdr\Bigg)d\theta\\
&=2\pi\Bigg(\int\limits_{0}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\sqrt{9-r^2}rdr-\frac{1}{\sqrt{3}}\int\limits_{0}^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}r^2dr\Bigg)\\
&=9\pi.
\end{aligned}$$

Други начин (преко сферних координата)

Уведимо сферне координате (ρ,θ,φ). Веза са Декартовим координатама дата је формулама

$$\begin{aligned}
x&=\rho\sin\varphi\cos\theta,\\
y&=\rho\sin\varphi\sin\theta,\\
z&=\rho\cos\varphi,
\end{aligned}$$

док је Јакобијан код ове смене $J = \rho^2 \sin\varphi$. Следећи корак је одређивање граница за сва три параметра. Јасно је да важи $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Из једначине сфере добијамо $0 \leqslant \rho \leqslant 3$, док из једначине конуса и пресека са сфером добијамо $0 \leqslant \varphi \leqslant \arccos\frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{\pi}{3}$. Прецизније, границе за угао φ могу се добити из троугла на слици:



Слика 7.24: уз задатак 15

Тражена запремина износи

$$V(T) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\int_{0}^{3} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta = 18\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin\varphi d\varphi = 9\pi.$$

✓

16. Јасно је да за углове важе границе $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, док границе за ρ добијамо из једначине сфере

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = z = \rho\cos\varphi,$$

тј. $0 \leqslant \rho \leqslant \cos\varphi$. Вредност интеграла је

$$\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\Bigg(\int_{0}^{\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi d\rho\Bigg)d\varphi d\theta =$$

$$\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^4\varphi d\varphi\Bigg)d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigg(\int_{0}^{1} t^4 dt\Bigg)d\theta = \frac{\pi}{10}.$$

✓

17. $\frac{4}{3}$. ✓ **18.** Област по којој се интеграли је $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant x\}$, а тражени интеграл је $\frac{511}{768}$. ✓ **19.** а) 2, б) $e - 1$. ✓ **20.** $7\pi - 8$. ✓ **21.** $\frac{\ln 2}{2}(\ln 4 - \frac{3}{4})$. ✓ **22.** $-\frac{224}{15}$. ✓ **23.** $\frac{24\sqrt{3}}{5} - 3$. ✓ **25.** $\frac{4\pi}{3}$. ✓ **26.** $\frac{1}{48}$. ✓ **27.** $\frac{625\pi}{32}$. ✓ **28.** а) $J = ab\rho$, б) 18π. ✓ **29.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. ✓

7.4. Криволинијски и површински интеграли

1. Тражени интеграл је криволинијски интеграл скалар функције по кривој $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ и једнак је Римановом интегралу

$$\int\limits_{\gamma} z ds = \int\limits_{0}^{t_0} t\|\gamma'(t)\| dt.$$

Како је

$$\gamma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1),$$
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^2+2},$$

вредност интеграла је

$$\int\limits_{\gamma} z ds = \int\limits_{0}^{t_0} t\sqrt{t^2+2} dt = \frac{1}{3}(t^2+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}((t_0^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}).$$

✓

2. Како се крива по којој интегралимо састоји од три дужи (странице троугла), задати интеграл ћемо израчунати као збир три криволинијска интеграла дуж страница датог троугла:

$$\int\limits_{c} (x+y) ds = \int\limits_{OA} (x+y) ds + \int\limits_{AB} (x+y) ds + \int\limits_{BO} (x+y) ds.$$

Након једноставне параметризације одговарајућих дужи добија се:

$$\int\limits_{c} (x+y) ds = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = \sqrt{2} + 1.$$

✓

3. Једначина криве γ у Декартовим координатама је $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=(\frac{a}{2})^2$, па је у питању кружница са центром у тачки $(\frac{a}{2},0)$ полупречника $\frac{a}{2}$. Њена параметризација је

$$\gamma(t)=\Big(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t,\frac{a}{2}\sin t\Big),\quad -\pi\leqslant t\leqslant\pi,$$

па је

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{\Big(-\frac{a}{2}\sin t\Big)^2+\Big(\frac{a}{2}\cos t\Big)^2}=\frac{a}{2}.$$

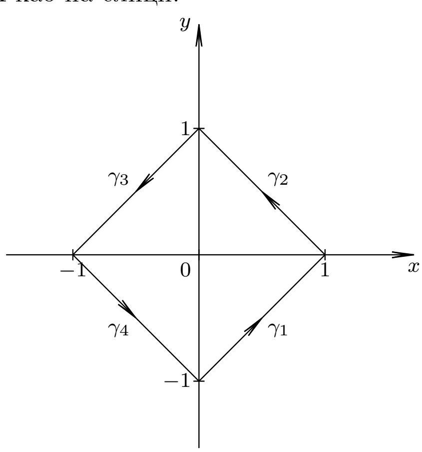
Вредност интеграла је

$$\int\limits_{\gamma}\sqrt{x^2+y^2}ds=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\Big(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\Big)^2+\big(\frac{a}{2}\sin t\big)^2}\cdot\frac{a}{2}dt=$$

$$\frac{a^2}{4}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sqrt{2+2\cos t}dt=a^2\int\limits_{0}^{\pi}\Big|\cos\frac{t}{2}\Big|dt=2a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^{\pi}=2a^2.$$

✓

4. Крива γ је оријентисана позитивно, што значи да област коју ограничава остаје са леве стране када се крећемо по њој, и састоји се од четири различите криве γ_i, $i=1,2,3,4$ као на слици:



Слика 7.25: уз задатак 4

Криве γ_i су делови правих, па их можемо лако параметризовати:

$$\gamma_1: x = t, \quad y = t - 1, 0 \leqslant t \leqslant 1; \qquad \gamma_2: x = t \quad y = 1 - t, 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$\gamma_3: x = t, \quad y = t + 1, -1 \leqslant t \leqslant 0; \qquad \gamma_4: x = t, \quad y = -1 - t, -1 \leqslant t \leqslant 0;$$

Још би требало обратити пажњу на оријентацију. Раст параметра одговара задатој оријентацији у случају кривих γ_1 и γ_4, док је супротан код кривих γ_2 и γ_3, па морамо додати минус испред одговарајућих интеграла. Сада можемо прећи на израчунавање интеграла:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_0^1 \left(\frac{1}{|t| + |t-1|} \cdot 1 + \frac{1}{|t| + |t-1|} \cdot 1 \right) dt = 2$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = -\int_0^1 \left(\frac{1}{|t| + |1-t|} \cdot 1 + \frac{1}{|t| + |1-t|} \cdot (-1) \right) dt = 0$$

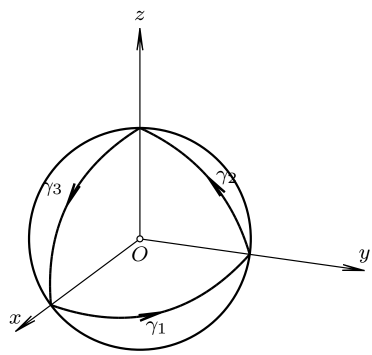
$$\int_{\gamma_3} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = -\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{|t| + |t+1|} \cdot 1 + \frac{1}{|t| + |t+1|} \cdot 1 \right) dt = -2$$

$$\int_{\gamma_4} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_0^1 \left(\frac{1}{|t| + |-1-t|} \cdot 1 + \frac{1}{|t| + |-1-t|} \cdot (-1) \right) dt = 0$$

Коначан резултат једнак је збиру ова четири интеграла, тј. $\oint\limits_{\gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = 0.$

✓

5. Крива γ састоји се од три различите криве γ_i, $i = 1, 2, 3$ као на слици:



Слика 7.26: уз задатак 5

Свака крива γ_i је део јединичног круга у одговарајућој координатној равни, па их на основу тога можемо параметризовати:

$$\gamma_1 : \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ z &= 0; \end{aligned} \qquad \gamma_2 : \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ z &= \sin t; \end{aligned} \qquad \gamma_3 : \begin{aligned} x &= \cos t, \\ y &= 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ z &= \sin t; \end{aligned}$$

Оријентација кривих γ_1 и γ_2 слаже се са растом параметра, док то није случај код криве γ_3, па морамо додати минус испред одговарајућег интеграла.

$$\int\limits_{\gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt$$

$$\int\limits_{\gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt$$

$$\int\limits_{\gamma_3} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt$$

Како је $\sin^3 t = \sin^2 t \sin t = (1-\cos^2 t)\sin t$ и, слично, $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$, увођењем смена $u = \cos t$, односно $s = \sin t$ добијамо:

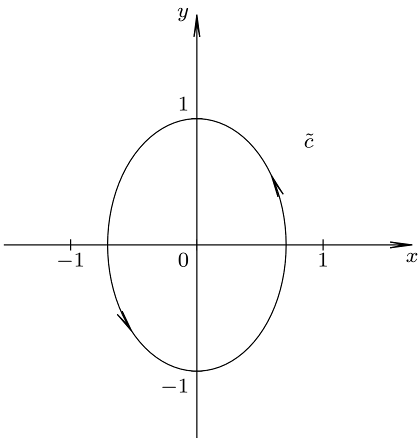
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t)dt = -4.$$

✓

6. Ако потражимо пресек датих површи:

$$1 - x^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

видимо да је пројекција криве c елипса.



Слика 7.27: уз задатак 6

Дакле, параметризација криве c дата је са:

$$c: \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y &= \sin t, \qquad -\pi \leqslant t \leqslant \pi \\ z &= 1 - \frac{1}{2}\cos^2 t. \end{aligned}$$

Задата оријентација слаже се са растом параметра t. Сада је

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= \big(\sin t, 1-\frac{1}{2}\cos^2 t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\big),\\ \mathbf{r}'(t) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t, \cos t \sin t\right),\end{aligned}$$

па је $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \cos t - \frac{1}{2}\cos^3 t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\cos^2 t$. Коначно, тражени интеграл је

$$\int\limits_c y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t + \cos t - \frac{1}{2}\cos^3 t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\cos^2 t\right)dt = -\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

✓

7. Задата крива је кружница, па је

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = (a\cos t, a\sin t), \quad -\pi \leqslant t \leqslant \pi,\\ &dx = -a\sin t\,dt, \quad dy = a\cos t\,dt,\end{aligned}$$

па је

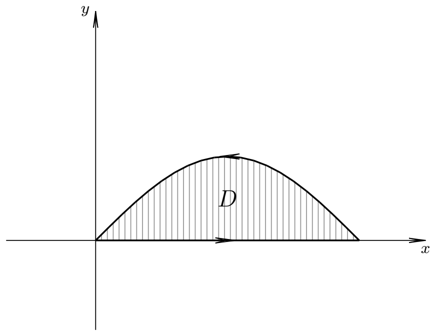
$$\oint\limits_\gamma x^2ydx + xy^2dy = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2a^4\cos^2 t\sin^2 t dt = \frac{a^4\pi}{2}.$$

Како је задата крива затворена (ограничава област D) и позитивно оријентисана, и како су $P(x,y) = -x^2y$, $Q(x,y) = xy^2$, P'_y и Q'_x непрекидне на $\bar{D}$, можемо применити и Гринову формулу:

$$\oint\limits_\gamma x^2ydx + xy^2dy = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_0^a r^3drd\theta = \frac{a^4\pi}{2}.$$

✓

8. Крива γ је приказана на слици испод.



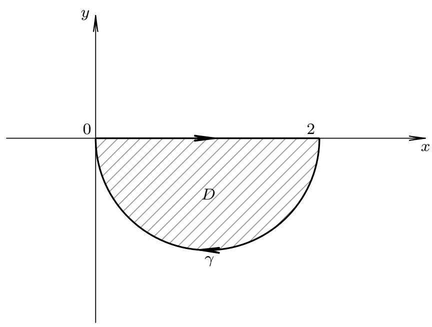
Слика 7.28: уз задатак 8

Јасно је да су испуњени услови Гринове теореме, па је

$$\int\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint\limits_{D} -e^x y dx dy = -\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} e^x y dy$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} e^x \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1-e^{\pi}}{5}.$$

Овај задатак би се много теже (ако икако) решавао по дефиницији, јер $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ у комбинацији са параметризацијом дате криве дају превише компликоване подинтегралне функције. ✓

9. Након краћег сређивања види се да је крива $y = -\sqrt{2x - x^2}$ заправо доња полукружница оријентисана као на слици:



Слика 7.29: уз задатак 9

Функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ нису једноставне и ако бисмо покушали, брзо бисмо увидели да је овај задатак врло непријатно решавати по дефиницији. Међутим, задата крива није затворена и за сада не можемо применити Гринову формулу. Што се тиче осталих услова неопходних за примену Гринове теореме, испуњени су, јер су P, Q, P'_y и Q'_x непрекидне свуда. Дакле, преостаје само да некако затворимо дату криву, па да после одузмемо оно што смо додали. Најједноставнији начин (после треба интегралити по овој кривој) за то је да полукружници додамо дуж $c(t) = (t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$ на $x-$оси као на слици. Она мора бити и оријентисана као на слици, јер нам то индукује већ задата оријентација криве γ.
Сада је јасно да крива $\gamma \cup c$ ограничава област D, али да је негативно оријентисана. Дакле

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} &= \int\limits_{\gamma\cup c} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \\ &= -\iint\limits_{D} (Q'_x - P'_y)dxdy = -\iint\limits_{D} dxdy = -P(D) = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Површину скупа D знамо да израчунамо без употребе интеграла јер је у питању полукруг. Сада смо израчунали $\int\limits_{\gamma\cup c}$, а како важи „линеарност интеграла по скупу по ком се интеграли", имамо:

$$\begin{aligned}-\frac{\pi}{2} = \int\limits_{\gamma\cup c} Pdx + Qdy &= \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + \int\limits_{c} Pdx + Qdy \\ \Rightarrow \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy &= -\frac{\pi}{2} - \int\limits_{c} Pdx + Qdy.\end{aligned}$$

Преостаје да израчунамо криволинијски интеграл по кривој c. Ако је $\mathbf{F} = (P, Q)$, важи да је $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = tdt$, па је коначно

$$\int\limits_{\gamma} (e^{x+y}\sin 2y + x + y)dx + (e^{x+y}(2\cos 2y + \sin 2y) + 2x)dy = -\frac{\pi}{2} - 2.$$

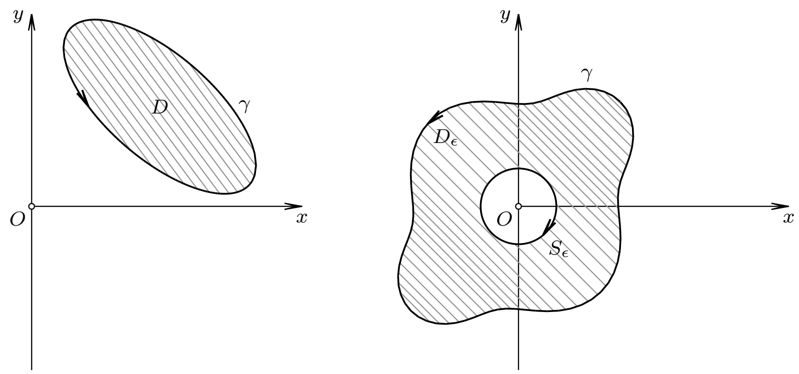
✓

10. Пре свега, приметимо да је $P'_y = Q'_x$, где је $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ и $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, кад год то има смисла, односно где су P, Q, P'_y и Q'_x дефинисани (тј.

на $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$). Ово, као и чињеница да је крива γ произвољна, указује на то да бисмо могли да применимо Гринову формулу. Означимо са D област чија је граница γ и која приликом обиласка око криве остаје са њене леве стране.

Разликујемо два случаја - када крива γ не обилази координатни почетак и када га обилази. У случају када крива γ не обилази координатни почетак услови за примену Гринове формуле су испуњени јер су P и Q у D добро дефинисане и бесконачно диференцијабилне функције. Имамо:

$$\oint_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint_{D} (Q'_x - P'_y)\, dxdy = 0.$$



Слика 7.30: уз задатак 10

У другом случају, односно када крива обилази $(0,0)$, не можемо, као малопре, да закључимо да је интеграл једнак нули, наиме, сада област D садржи тачку $(0,0)$ у којој функције P и Q нису дефинисане. Уклонимо, зато, из области D унутрашњост круга полупречника ε, за довољно мало ε (тако да се γ и $S_\varepsilon := \{x^2+y^2 = \varepsilon^2\}$ не секу). Означимо овако добијену област са D_ε:

$$D_\varepsilon := D \setminus \{x^2 + y^2 < \varepsilon^2\},$$

и применимо на њу Гринову формулу. Видимо да је граница ∂D_ε унија криве γ и кружнице S_ε, при чему ћемо криву γ обилазити у позитивном, а S_ε у негативном смеру. Нека је S_ε оријентисана позитивно, и нека S_ε^- означава исту криву са супротном оријентацијом. Имамо:

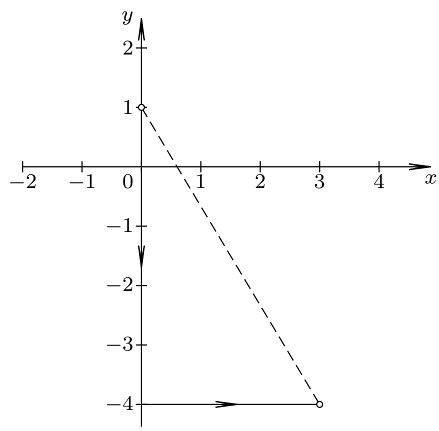
$$\oint_{\gamma \cup S_\varepsilon^-} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \iint_{D_\varepsilon} (Q'_x - P'_y) dxdy = 0,$$

па је

$$\oint_{\gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{S_\varepsilon} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

Последња једнакост се добија директним израчунавањем (параметризација $x(t) = \varepsilon \cos t$, $y(t) = \varepsilon \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$). ✓

11. Прво што треба приметити у формулацији задатка јесте да крива по којој интегралимо уопште није задата. Задате су само почетна и крајња тачка. Како је $P'_y = Q'_x$ у просто повезаној области $\mathbb{R}^2$, испуњен је услов за независност интеграције од пута, односно, свеједно је по којој кривој са задатим крајњим тачкама ћемо интегралити. Најлакше је да се крећемо паралелно координатним осама, јер ће се тада неки делови анулирати:



Слика 7.31: уз задатак 11

Нека је $l_1(t) = (0, t)$, $-4 \leqslant t \leqslant 1$ и $l_2(t) = (t, -4)$, $0 \leqslant t \leqslant 3$, при чему се код прве криве не слаже оријентација, а код друге се слаже. Сада је

$$\int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy = \int_{l_1} xdx + ydy + \int_{l_2} xdx + ydy = 12.$$

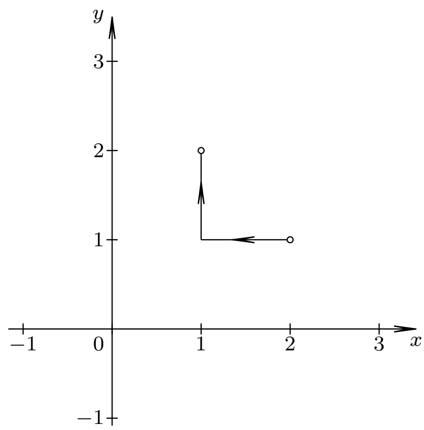
Како овај интеграл није тежак, можемо задате тачке спојити и једном кривом, на пример, дужи.

Други начин, на основу теореме о независности интеграције од пута, јесте да пронађемо u тако да је $du = xdx + ydy$. Јасно је да је у овом случају $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$, па је опет

$$\int\limits_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy = u(3,-4) - u(0,1) = 12.$$

✓

12. Као и у претходном задатку, важи да је $P'_y = Q'_x$ у просто повезаној области (било којој која не садржи тачке $y-$ осе), па интеграл не зависи од криве по којој интегралимо, а којој су почетна и крајња тачка редом $(2,1)$ и $(1,2)$. Бирамо криве као на слици:



Слика 7.32: уз задатак 12

Након параметризације се лако добије

$$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = -\frac{3}{2}.$$

Задатак можемо решити и на други начин, тако што ћемо одредити u за које је $du = \dfrac{ydx - xdy}{x^2}$. Јасно је да је $u = -\dfrac{y}{x} + C$, па је

$$\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} = u(1,2) - u(2,1) = -\frac{3}{2}.$$

✓

13. Наш задатак је да израчунамо површински интеграл функције по површи која представља горњу полусферу. Дата површ може се параметризовати као график функције (за разлику од целе сфере) са $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in D$, при чему је D област по којој се крећу параметри x и y, а добија се као пројекција површи. Овде је $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$. На основу примена 4.34 на страни 88 имамо да је

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dxdy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy,$$

па је

$$\iint\limits_S (x + y + z) dS = \iint\limits_D \left(x + y + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy.$$

Ако уведемо обичне поларне координате и искористимо да је $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\theta d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\theta d\theta = 0$, добићемо да је

$$\iint\limits_S (x + y + z) dS = 2\pi a \int\limits_0^a r dr = a^3 \pi.$$

✓

14. Дата површ је већ параметризована:

$$\mathbf{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, v), \quad (u, v) \in (0, a) \times (0, 2\pi),$$

па је $dS = ||\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v||\, dudv = \sqrt{u^2+1}dudv$. Сада можемо прећи на израчунавање интеграла:

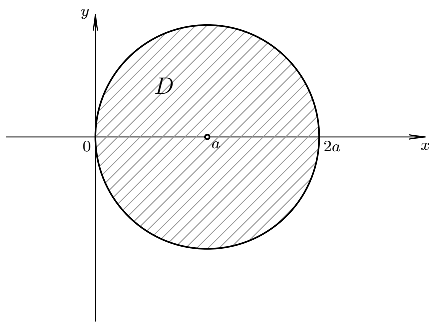
$$\iint\limits_S z\, dS = \iint\limits_D v\sqrt{u^2+1}\, dudv = \int\limits_0^a du \int\limits_0^{2\pi} v\sqrt{u^2+1}\, dv$$
$$= \pi^2(a\sqrt{a^2+1} + \ln(a + \sqrt{a^2+1})).$$

Интеграл $I = \int\limits_0^a \sqrt{u^2+1}\, du$ решава се сменом $u = \operatorname{tg} t$, $u = \sinh t$ или парцијалном интеграцијом. ✓

15. Површ по којој интегралимо је, дакле, део конуса, па је тако можемо параметризовати:

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y) \in D.$$

Скуп D је пројекција површи на $xy-$ раван, а како је у питању део конуса унутар цилиндра $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, јасно је да је пројекција D баш круг $(x-a)^2 + y^2 \leqslant a^2$.



Слика 7.33: уз задатак 15

Још је

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy,$$

па је

$$\iint_S (xy+yz+zx)dS = \sqrt{2}\int_D \left(xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy.$$

Због „облика” подинтегралне функције, уводимо обичне поларне координате, а како је центар круга по коме интегралимо у $(a,0)$, границе за r и θ су:

$$0 \leqslant r \leqslant 2a\cos\theta$$
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Ако искористимо да су функције $\sin\theta\cos^4\theta$ и $\sin\theta\cos^5\theta$ непарне и да су њихови интеграли по симетричном скупу $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$ једнаки нули, добићемо:

$$\iint_S (xy+yz+zx)dS = \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^3(\cos\theta+\sin\theta)drd\theta = \frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.$$

✓

16. Граница тела T састоји се од „омотача” S_1:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad (x,y)\in D,$$

и „поклопца” S_2:

$$z=1, \quad (x,y)\in D,$$

при чему је D пројекција тела T, односно круг $x^2+y^2 \leqslant 1$. Зато ћемо тражени интеграл рачунати као збир два:

$$\iint_S (x^2+y^2)dS = \iint_{S_1}(x^2+y^2)dS + \iint_{S_2}(x^2+y^2)dS.$$

Како смо већ параметризовали дате површи, можемо прећи на израчунавање интеграла:

$$\iint_{S_1}(x^2+y^2)dS = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 r^3\,drd\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2},$$
$$\iint_{S_2}(x^2+y^2)\,dS = \iint_D (x^2+y^2)\cdot 1\,dxdy = \frac{\pi}{2}.$$

Коначно је

$$\iint_S (x^2+y^2)dS = \frac{(\sqrt{2}+1)\pi}{2}.$$

✓

17. Површина површи S једнака је површинском интегралу $P(S) = \iint_S dS$, па прво морамо параметризовати дату сферу:

$$\mathbf{r}(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\varphi), \quad (\theta,\varphi)\in(-\pi,\pi)\times(0,\pi).$$

Сада је $dS = R^2\sin\varphi d\theta d\varphi$, па је коначно, као што већ знамо, површина дате сфере

$$P(S) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\varphi d\theta d\varphi = 4R^2\pi.$$

✓

18. Како се сфера не може представити као график једне функције, морамо поделити површ по којој интегралимо на два дела - на горњу и доњу полусферу. Овај задатак се, између осталог, може решити и помоћу сферних координата, односно помоћу параметризације из претходног задатка (оставља се за вежбу).
За горњу полусферу S_1 важи да је $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, па је вектор нормале дат са

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = (-z'_x, -z'_y, 1)dxdy = (\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1)dxdy.$$

Сада је, по дефиницији површинског интеграла векторског поља:

$$\iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_D (x\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + y\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + \sqrt{a^2-x^2-y^2})dxdy.$$

Оријентација индукована параметризацијом је сагласна са задатом оријентацијом. Ово се може видети на више начина. На пример, у тачки $(0,0,a)$ је $\vec{\mathbf{n}} = (0,0,1)$, односно вектор нормале је усмерен ка споља, као што и треба. Област D је пројекција горње полусфере на $xy-$ раван, односно, то је круг полупречника a са центром у координатном почетку.
За доњу полусферу S_2 важи да је $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, па је слично вектор

нормале дат са

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1)dxdy.$$

Интеграцијом по S_2 добијамо:

$$\iint\limits_{S_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint\limits_{D} (x\cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + y\cdot \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dxdy.$$

Знак минус је додат јер индукована оријентација није сагласна са задатом. У тачки $(0, 0, -a)$ вектор нормале је $(0, 0, 1)$, односно усмерен је ка унутра, а требало би ка споља. Коначно имамо:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} \\ &= 2\iint\limits_{D} (\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2})dxdy.\end{aligned}$$

Увођењем обичних поларних координата у претходни интеграл добија се

$$\iint\limits_{D} \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a^2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} d\theta dr,$$

а након увођења смене $t = a^2 - r^2$ добија се коначан резултат $4a^3\pi$. ✓

19. И овај задатак се може решити тако што се елипсоид подели на два дела. Овог пута задатак ћемо решити преласком на нове (елипсоидне) координате:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta\sin\varphi, \\ y &= b\sin\theta\sin\varphi, \\ z &= c\cos\varphi, \end{aligned}$$

при чему је $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Након краћег рачуна добија се да је вектор нормале дат са:

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = (-bc\sin^2\varphi\cos\theta, -ac\sin^2\varphi\sin\theta, -ab\sin\varphi\cos\varphi)d\varphi d\theta.$$

Сада имамо да је

$$\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \left(\frac{1}{a\cos\theta\sin\varphi}, \frac{1}{b\sin\theta\sin\varphi}, \frac{1}{c\cos\varphi}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \left(-\frac{bc}{a} - \frac{ac}{b} - \frac{ab}{c}\right)\sin\varphi d\varphi d\theta,$$

па је

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\Big(-\frac{bc}{a}-\frac{ac}{b}-\frac{ab}{c}\Big)\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi d\theta d\varphi.$$

Знак минус је додат због оријентације. У тачки $\theta = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ вектор нормале је $(-bc, 0, 0)$. Како је прва координата вектора негативна, он је усмерен ка унутра, а требало би ка споља. На крају је

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 4\pi\Big(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\Big).$$

✓

20. Задато тело састоји се из два дела - доњи део је конус, а горњи део је полулопта. Дакле, интеграл морамо рачунати као збир два интеграла. Прво ћемо интегралити по горњој полусфери S_1, а затим по спољашњем делу конуса S_2. Не можемо радити одједном, јер су у питању две различите површи. И S_1 и S_2 можемо параметризовати као графике функција:

$$S_1 : z = a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D,$$
$$S_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in D,$$

где је D пројекција површи на $xy-$ раван, односно круг са центром у координатном почетку полупречника a. Вектори нормале дати су са:

$$S_1 : \mathrm{d}\mathbf{S} = \Big(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1\Big)dxdy,$$
$$S_2 : \mathrm{d}\mathbf{S} = \Big(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\Big)dxdy,$$

Оријентација индукована параметризацијом слаже се са задатом у случају површи S_1 (узети, на пример, тачку $(0, 0, 2a)$ и видети да је у њој $\vec{\mathbf{n}}_1 = (0, 0, 1)$), док се у случају површи S_2 не слаже (за вектор нормале $\vec{\mathbf{n}}_2$ у произвољној тачки важи да је $(0, 0, 1)\cdot\vec{\mathbf{n}}_2 = 1 > 0$, одакле би следило да је угао између ова два вектора оштар; међутим, угао између ова два вектора је, због задате оријентације, туп). Сада је:

$$\iint\limits_{S_1} = \iint\limits_{D} \Big[(x+y)\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + (y+a+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$
$$+(x+a+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\cdot 1\Big]\,dxdy,$$

$$\iint\limits_{S_2} = \iint\limits_{D} \Big[(x+y)\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}+$$
$$(y+\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + (x+\sqrt{x^2+y^2})\cdot 1\Big]dxdy,$$

па би требало прећи на поларне координате и решити дате интеграле (интеграли нису тешки, али има посла док се све израчуна). Међутим, задатак се може једноставније решити применом формуле Гаус-Остроградског (теорема о дивергенцији). Како су испуњени сви услови за примену теореме, имамо да је:

$$\iint\limits_{S} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint\limits_{T}(1+1+1)dxdydz = 3V(T) = 3\left(\frac{a^3\pi}{3}+\frac{2a^3\pi}{3}\right) = 3a^3\pi.$$

✓

21. Конус је параметризован као график функције $z=\sqrt{x^2+y^2}$, при чему због услова $0\leqslant z\leqslant h$ параметри припадају скупу

$$(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leqslant h^2\}.$$

Вектор нормале је дат са

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)dxdy,$$

па је угао између овог вектора и $z-$осе оштар (скаларни производ овог вектора и вектора $(0,0,1)$ је позитиван). Како се интеграли по спољашњој страни конуса, оријентација индукована датом параметризацијом се не поклапа са задатом (иначе би поменути угао требало да буде туп) и зато је додат предзнак минус код рачунања интеграла:

$$\iint\limits_{S}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = -\iint\limits_{D}[(y-\sqrt{x^2+y^2})\cdot\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (\sqrt{x^2+y^2}-x)\cdot\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$+(x-y)\cdot 1]dxdy = -2\iint\limits_{D}(x-y)dxdy = 0.$$

✓

22. Дата површ ограничава тело $T : |x-y+z| + |y-z+x| + |z-x+y| \leqslant 1$. Испуњени су сви услови за примену теореме Гаус-Остроградског (теореме о дивергенцији), па је

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 3 \iiint_T dxdydz.$$

Уводећи нове координате у претходни интеграл:

$$\begin{aligned} u &= x-y+z, \\ v &= y-z+x, \\ w &= z-x+y, \end{aligned}$$

добијамо да је $\iiint_T dxdydz = \iiint_{\tilde{T}} |J| dudvdw$, где је J Јакобијан дате смене, а тело $\tilde{T} : |u| + |v| + |w| \leqslant 1$. Након једноставног рачуна добија се да је $J = \dfrac{1}{4}$. Још би требало израчунати тројни интеграл по телу $\tilde{T}$, а то је заправо запремина тела $\tilde{T}$. Ако приметимо да је дато тело симетрично у односу на координатне равни и означимо са $\tilde{T_1}$ део тела у првом октанту (у питању је ортогонални тетраедар), добићемо да је

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot V(\tilde{T_1}) = 1.$$

✓

23. Кружница γ задата је као пресек сфере и равни. Овај задатак се може решити на два начина - по дефиницији и помоћу Стоксове теореме. Криву γ можемо параметризовати на следећи начин:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sqrt{3}), \ -\pi \leqslant t \leqslant \pi.$$

Како се оријентација криве слаже са растом параметра, задати интеграл једнак је

$$\oint_\gamma ydx + z^2dy + x^2dz = \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin^2 t + 3\cos t)dt = -\pi.$$

Ако бисмо хтели да применимо Стоксову формулу и тако решимо задатак, прво би требало да одаберемо једну површ чија је граница крива γ. Одабир није јединствен, а било би добро изабрати површ по којој ће се касније лако интегралити. У овом случају најбољи избор је раван, јер задата крива лежи у једноставној равни $z = \sqrt{3}$. Примењујући Стоксову формулу, са криволинијског интеграла прелазимо на површински и добијамо да је:

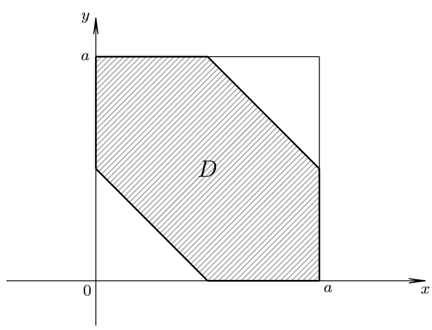
$$\oint_\gamma ydx + z^2dy + x^2dz = \iint_K (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

при чему је $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z) = (-2z, -2x, -1)$ и $K : z = \sqrt{3}$, $(x, y) \in D$, $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$. Вектор нормале је $\vec{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$, па је оријентација површи K сагласна са правилом десне руке. Преостаје да решимо једноставан површински интеграл:

$$\iint_K (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -P(D) = -\pi.$$

✓

24. Одређујући пресек са сваком од равни $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$, $z = 0$, $z = a$, добијамо да се крива γ састоји од шест дужи. Иако је могуће решити задатак тако што би се крива поделила на шест делова и рачунало шест интеграла, брже је применити Стоксову формулу. За површ S чија је граница задата крива изабраћемо део равни $x + y + z = \dfrac{3a}{2}$ који ограничава крива γ. Задати криволинијски интеграл се, након примене Стоксове формуле, своди на површински: $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$, где је $\mathbf{F}(x, y, z) = (-2y - 2z, -2z - 2x, -2x - 2y)$. Површ S параметризујемо као график функције $z = \dfrac{3a}{2} - x - y$, при чему се (x, y) крећу по пројекцији D на $xy-$ раван шестоугла који ограничава крива γ.



Слика 7.34: уз задатак 24

Вектор нормале површи S је дат са $\mathrm{d}\mathbf{S} = (1,1,1)dxdy$, па је оријентација сагласна са правилом десне руке. Након једноставног рачуна добијамо да је

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -6aP(D) = -\frac{9a^3}{2}.$$

✓

25. На пример $\mathbf{r}(t) = (0, 1-t, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\mathbf{l}(s) = (0, 1-s, s^2)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. ✓ **26.** e^2+2e+2. ✓ **27.** -18π. ✓ **28.** $\frac{7}{12}$. ✓ **29.** 3π. ✓ **30.** -4π. ✓ **31.** $-\frac{\pi}{5}$. ✓ **32.** 0. ✓ **33.** 0. ✓ **34.** в) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$. ✓ **35.** $4\sqrt{5}\pi(2\sqrt{5}-4)$. ✓ **36.** $\frac{13}{3}\pi$. ✓ **37.** $\frac{11}{12}\pi$. ✓ **38.** $36(\pi-2)$. ✓ **39.** 16π. ✓ **40.** Задовољава једначину конуса $z = 5\sqrt{(x^2+y^2)}$. Вектори нормале показују унутра. ✓ **41.** а) 0, б) Применити Гаусову формулу на област $r_1^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq r_2^2$. в) Сфера $x^2+y^2+z^2 = r^2$ је граница лопте $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$ којој припада тачка $(0,0,0)$, а векторско поље $\mathbf{F}$ није дефинисано у $(0,0,0)$. ✓ **42.** 8π. ✓ **43.** $-\frac{7}{3}\pi$. ✓

7.5. Диференцијалне једначине

1. Дата диференцијална једначина је са раздвојеним променљивама јер се може написати у облику

$$\frac{dy}{y^2+2y} = xdx.$$

Интеграцијом обе стране ове једнакости добијамо

$$C + \ln\sqrt{\frac{y}{y+2}} = \frac{x^2}{2}, \qquad C = \text{const},$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} = C_1\sqrt{\frac{y}{y+2}}, \qquad C_1 = e^C > 0.$$

Након квадрирања претходне једнакости, лако се добија решење дате једначине

$$y = \frac{2}{C_2 e^{-x^2} - 1}, \qquad C_2 = \frac{1}{C_1}.$$

Приметимо да неки од израза нису дефинисани за $y = 0$ и $y = -2$. Функција $y = 0$ јесте решење полазне диференцијалне једначине (проверава се директном заменом), па ћемо га додати, јер се не добија ни за једну вредност константе C_2. Функција $y = -2$ такође јесте решење дате диференцијалне једначине, али се може добити за конкретну вредност параметра $C_2 = 0$. ✓

2. Дата диференцијална једначина је линеарна диференцијална једначина јер је (након дељења са $\cos x$) облика

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

где је $P(x) = -2\text{tg}\, x$, $Q(x) = 1$. При томе се, због $\cos x \neq 0$, ограничавамо на $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Користећи формулу

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C\right]$$

и чињеницу да је $\int \text{tg}\, x dx = -\ln|\cos x|$, добијамо да је решење дате једначине

$$y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\right), \qquad C = \text{const}.$$

Решење које задовољава почетни услов $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi+2}{4}$ очигледно се добија за $C = 0$. ✓

3. Дата диференцијална једначина је Бернулијева диференцијална једначина јер је (након дељења са $3x$) облика

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \qquad \alpha \neq 0, 1,$$

при чему је $P(x) = -\dfrac{1}{3x}$, $Q(x) = \ln x$ и $\alpha = 4$.
Оваква једначина се сменом $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$ своди на линеарну диференцијалну једначину. У нашем случају је $z = y^{-3}$, $z' = -3y^{-4}y'$, па једначина постаје

$$z' + \frac{1}{x}z = -3\ln x.$$

Користећи формулу дату у решењу претходног задатка, добијамо

$$z(x) = \frac{1}{x}\left(-\frac{3}{4}x^2(2\ln x - 1) + C\right), \qquad C = \mathrm{const}$$

и коначно

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{-\frac{3}{4}x^2(2\ln x - 1) + C}}, \qquad C = \mathrm{const}.$$

✓

4. Дата диференцијална једначина је једначина са тоталним диференцијалом јер је облика

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

за $M(x,y) = x(y^2+1)$, $N(x,y) = x^2y + 2y^3$ које заиста испуњавају следеће услове: M, N, M'_y и N'_x су непрекидне функције у просто повезаној области $\mathbb{R}^2$ и важи $M'_y = N'_x$. Због тога постоји диференцијабилна функција $f(x,y)$ дефинисана на $\mathbb{R}^2$ за коју је $f'_x(x,y) = M(x,y)$, $f'_y(x,y) = N(x,y)$.
Из услова $f'_x = x(y^2+1)$ добијамо

$$f(x) = (y^2+1)\frac{x^2}{2} + \varphi(y),$$

где је $\varphi(y)$ непозната непрекидно-диференцијабилна функција. Диференцирањем добијамо да је

$$x^2y + 2y^3 = f'_y = x^2y + \varphi',$$

одакле је $\varphi(y) = \frac{y^4}{2} + C$ и

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2}(y^2+1) + \frac{y^4}{2} + C, \qquad C = \text{const.}$$

Имплицитно решење овакве диференцијалне једначине је дато са $f(x,y) = C$, односно

$$x^2y^2 + x^2 + y^4 = C, \qquad C = \text{const.}$$

✓

5. Дата диференцијална једначина је очигледно хомогена јер је десна страна глатка функција од $\dfrac{y}{x}$. Увођењем смене $z(x) = \dfrac{y}{x}$, тј. $y = xz$, добијамо $y' = z + xz'$ и једначина се своди на диференцијалну једначину која раздваја променљиве. У нашем случају добија се

$$\frac{dz}{\sqrt{z} - z} = \frac{dx}{x},$$

одакле након интеграције следи

$$(1 - \sqrt{z})^{-2} = |x| \cdot C = x \cdot C, \qquad C > 0.$$

Решење дате једначине је

$$y = (\sqrt{x} - C)^2, \qquad C > 0.$$

✓

6. $y = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x(\frac{\ln x}{2} + C)}$ и $y = -\frac{1}{x}$. ✓ **7.** $y = \sqrt{\frac{C + x\operatorname{tg} x + \ln(\cos x)}{x}}$. ✓ **8.** $\operatorname{ctg}(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}) = \ln|x| + C$. ✓ **9.** $(\ln y)^{-2013} = x + \frac{1}{2013} + Ce^{2013x}$. ✓ **10.** $y = \arccos((x+1)(\ln\frac{x}{x+1} + C))$. ✓ **11.** $\frac{x}{y} = Ce^{-\frac{xy}{x-y}}$. ✓ **12.** $y = (-x^3 - 10 + Ce^{\frac{x^3}{9}})^3$. ✓ **13.** $y^2x + 4yx^3 = C$. ✓ **14.** $y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + c_3x^2e^{4x} - \frac{3}{16} + \frac{1}{54}e^{-8x} + \frac{1}{3}x^3e^{4x}$. ✓ **15.** $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-x} + c_3e^{6x} - \frac{1}{6} - \frac{2}{7}xe^{-x}$. ✓ **16.** а) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + e(x^2/3 + 11x/9 + 85/54)$; б) $y = c_1e^{-2x}\sin(x/2) + c_2e^{-2x}\cos(x/2) + (3/20)x\sin(x/2) - (39/200)\sin(x/2) - (1/4)xe^{-2x}\cos(x/2) + (3/10)x\cos(x/2) - (6/25)\cos(x/2)$; в) $y = c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x} + (1/12)x^4e^{-4x} + 3x^2e^{-4x}$; г) $y = c_1e^{10x} + c_2e^{-10x} + (3/20)x^3e^{10x} - (9/400)x^2e^{10x} + (9/4000)xe^{10x} + (1/100)x\sin x - (99/10201)\cos x$. ✓

Литература

[1] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, Математички факултет у Београду, 2008.
[2] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа II*, Математички факултет у Београду, 2008.
[3] Д. Милинковић, *Математичка анализа 1 (скрипта)*, http://poincare.matf.bg.ac.rs/˜milinko// skripta/analiza1.pdf
[4] Д. Милинковић, *Математичка анализа 2 (скрипта)*, http://poincare.matf.bg.ac.rs/˜milinko// skripta/Analiza2.pdf
[5] Џ. Ф. Томас, Р. Л. Фини, *Томасова математичка библија*, Грађевинска књига, 2007.

Индекс