Писмени испит из Анализе 1 за И смер **ЈУН 1 2020**

1. (15 поена) Низ x_n је задат са: $x_1 \in (0, \pi)$, $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$, за $n \geq 1$.

(а) Показати да је x_n низ са позитивним члановима и испитати његову конвергенцију. Ако конвергира одредити $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(б) Доказати да важи $x_{n+1} = \frac{x_n^3}{6} + o(x_n^3)$, кад $n \to \infty$.

(в) Одредити $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^3}{x_{n+1}}$.

2. (15 поена) Нека је $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функција задата на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ b, & x = 0. \end{cases}$$

(а) Одредити $b \in \mathbb{R}$ тако да функција f буде непрекидна на $\mathbb{R}$.

(б) Испитати диференцијабилност функције f.

(в) Уколико је функција f диференцијабилна у тачки $x = 0$, испитати да ли постоји $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Да ли је f' непрекидна функција ?

3. (20 поена) Дата је функција $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1} \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.

(б) Да ли график функције f сече y-осу? Ако не сече, одредити под којим углом прилази y-оси са леве стране.

(в) Скицирати график функције $g(x) = f(-x)$.

4. (10 поена)

(а) Доказати да једначина $x^3 - 15x + 1 = 0$ има 3 решења на скупу $(-4, 4)$.

(б) Колико решења може имати једначина $x^3 - 15x + \lambda = 0$ (у зависности од параметра $\lambda \in \mathbb{R}$)?

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)