Писмени испит из Анализе 1 за И смер **СЕПТЕМБАР 1 2021**

1. (15 поена) Нека је низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дат са $a_{n+1} = 4a_n - 3a_n^2$ за свако $n \in \mathbb{N}$, при чему је $a_1 < 0$.

(а) Испитати конвергенцију овог низа.

(б) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{1-a_n}}$.

2. (15 поена)

(а) Одредити константе $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in \mathbb{R}$ тако да важи

$$\ln(\cos x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + o(x^6),\ \ x \to 0.$$

(б) Одредити константу $b \in \mathbb{R}$ такву да функција $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\cos x) + \sqrt{1+x^2} - 1}{x^4}, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ b, & x = 0 \end{cases}$$

буде непрекидна на свом домену.

(в) Испитати диференцијабилност функције f за тако добијену константу b.

3. (20 поена) Дата је функција $f(x) = \ln \dfrac{|2x-1|-1}{2x-1} - 2x$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.

(б) Одредити број решења једначине $f(x) = a$ у зависности од реалног параметра a.

4. (10 поена)

(а) Доказати да једначина $x^3 = 6\,\mathrm{arctg}\, x + 1$ има тачно три решења на скупу $\mathbb{R}$.

(б) Одредити број решења једначине $x^3 = 6\,\mathrm{arctg}\, x + \lambda$ у зависности од параметра $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)