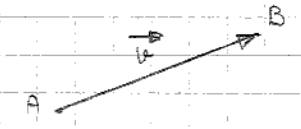
1. ПРЕРАВАЊЕ

Милан Трајковић

Вектори



* Вектори су класа еквиваленције усмерених дужи.
  ↳ векторе који имају исти правац, смер и интензитет идентификујемо
    ↳ представника неке класе називамо вектором представником

Нула вектор је вектор чији је интензитет 0, а правац и смер тог вектора нису дефинисани.

Супротан вектор је вектор који има исти интензитет и правац, а супротан смер.

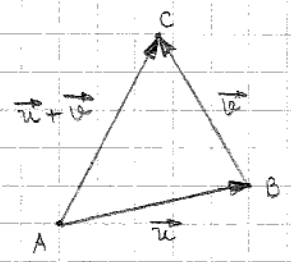
Колинеарни вектори су вектори који имају исти правац, без обзира на интензитет или на смер.

Компланарни вектори су они вектори које можемо транслирати тако да припадају истој равни.

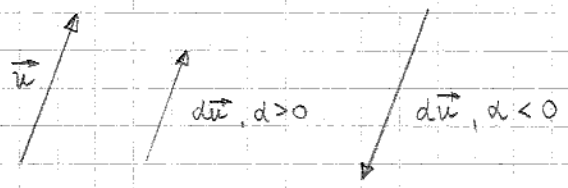
Скуп свих вектора означавамо са $\mathbb{V}$, односно $\mathbb{V}^n$.

Операције над векторима

* Сабирање
  ↳ надовезивање или правило паралелограма

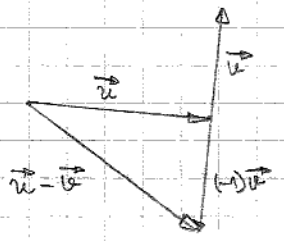


* Множење вектора скаларом

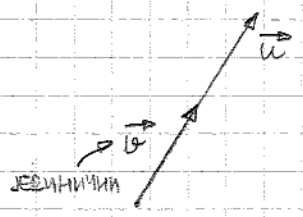


↳ вектору додељујемо вектор колинеаран њему, а интензитет је интензитет почетног вектора помножен апсолутном вредношћу скалара. Ако је скалар негативан мењамо смер.

* Одузимање
  ↳ није операција већ је комбинација претходне две



Јединични вектор је вектор који има исти правац и смер као почетни вектор, али је његова дужина 1.



$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$$

Линеарна комбинација вектора је када узмемо скуп вектора, помножимо их са неким скаларима и саберемо све те векторе.

Линеарно независни вектори

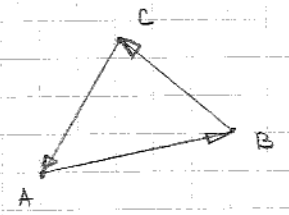
$$\alpha_1 \vec{v_1} + \dots + \alpha_n \vec{v_n} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Линеарно зависни вектори

↳ Ако постоје бар два скалара који су различити од нуле

↳ у скупу постоји један вектор који можемо да напишемо као линеарну комбинацију свих осталих

Пример: вектори одређени страницама троугла су линеарно зависни



$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$$

[Теорема 1.1]: Ненула вектори $\vec{u}$ и $\vec{v}$ су линеарно зависни акко су колинеарни.

[Теорема 1.2]: У равни постоје два линеарно независна вектора, а свака три вектора равни су линеарно зависна.

[Теорема 1.3]: У простору постоје три линеарно независна вектора, а свака четири вектора су линеарно зависна.

Координате

База и димензија векторског простора

Векторски простор је скуп свих вектора на коме дефинишемо операцију сабирања вектора и множења скаларом.

База векторског простора је максималан скуп линеарно независних вектора.

↳ база је минималан генераторни скуп

Димензија векторског простора је број елемената базе.

[Последица 2.1]: Димензија векторског простора равни $\mathbb{V}^2$ је два. Сваки вектор $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ може се написати у облику $\vec{v} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$, где је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ база векторског простора $\mathbb{V}^2$.

$\vec{e_1}, \vec{e_2}$ линеарно независни $\Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ јединствени

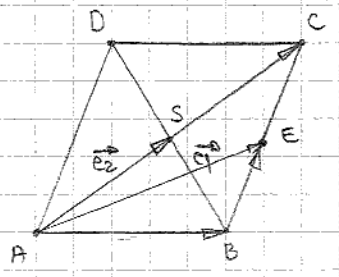
↳ они нам дају координате вектора, зато је битно да су јединствени

Ако је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ база векторског простора $\mathbb{V}^2$, координате вектора $\vec{v} \in \mathbb{V}^2$ у бази e:

$$[\vec{v}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

↳ ово важи у свакој димензији

[Пример]: Дат је паралелограм ABCD. Нека је E средиште странице BC и S пресек дијагонала AC и BD. Одредити координате вектора $\vec{BE}$ у бази $e = (\vec{AE}, \vec{AS})$.



Дигресија → Доказ да се дијагонале полове код паралелограма:

$AC \cap BD = S$

$(\Rightarrow)$ ABCD - паралелограм

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}, \ \vec{AD} = \vec{BC}$

$S \in AC \Rightarrow A, S, C$ су колинеарне

$\Rightarrow \vec{AS} = \alpha \vec{AC}$ } и вектори су колинеарни

$\vec{AS} = \alpha(\vec{AB} + \vec{AD})$

$= \alpha\vec{AB} + \alpha\vec{AD}$

$\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{BS} = \vec{AB} + \beta\vec{BD} = \vec{AB} + \beta(\vec{AD} - \vec{AB})$

$= (1-\beta)\vec{AB} + \beta\vec{AD}$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 1 - \beta \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{AS} = \frac{1}{2}\vec{AC}, \ \vec{BS} = \frac{1}{2}\vec{BD}$

$(\Leftarrow)$ $S = \underset{\text{средиште}}{S(AC)} = S(BD)$

$\Rightarrow \vec{AS} = \vec{SC}, \ \vec{BS} = \vec{SD}$

$\vec{AB} = \vec{AS} + \vec{SB} = \vec{SC} + \vec{DS} = \vec{DC}$ ✓

$\vec{AD} = \vec{AS} + \vec{SD} = \vec{SC} + \vec{BS} = \vec{BC}$ ✓

Решење примера:

$e = (\underset{\vec{e_1}}{\vec{AE}}, \underset{\vec{e_2}}{\vec{AS}})$

$E = S(BC)$

$S = AC \cap BD$

$[\vec{BE}]_e = [\vec{EC}]_e = [\vec{AC} - \vec{AE}]_e$

$= [-\vec{AE} + 2\vec{AS}]_e$ } то су $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$

$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Координате тачке

Ако је $e = (e_1, \ldots, e_n)$ база векторског простора V, фиксирана тачка $O \in E$ назива се координатни почетак.

O_e се назива координатним системом или репером простора E.

↳ ознака за еуклидски простор

[Дефиниција 2.1]: Координате тачке $X \in E$ у реперу O_e дефинишемо као координате вектора $\vec{OX}$ у бази e:

$$[X]_{O_e} := [\vec{OX}]_e$$ } координате њеног вектора положаја у одговарајућој бази

↳ У пракси се координате вектора $\vec{MN}$ добијају "одузимањем координате тачке M од координата тачке N".

Коректност:

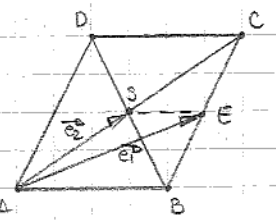
$[\vec{MN}]_e = [\vec{MO} + \vec{ON}]_e$ } то је устварі сабирање матрица па смемо да развијемо

$= [\vec{ON}] - [\vec{OM}]_e$

$= [N]_{O_e} - [M]_{O_e}$

[Пример]: Одредити координате темена паралелограма из претходног примера у реперу A_e.

$e = (\vec{AE}, \vec{AS})$



A_e - репер

$[A]_{A_e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [\overset{\vec{0}}{\vec{AA}}]_{A_e}$

$[B]_{A_e} = [\vec{AB}]_e = [2\vec{SE}]_e = [2(-\vec{e_2} + \vec{e_1})] = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$[C]_{A_e} = [\vec{AC}]_e = [2\vec{AS}]_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = [2\vec{e_2}]_e$

$[D]_{A_e} = [\vec{AD}]_e = [2\vec{BE}]_e = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ } изр. смо координате $\vec{BE}$ у претходном примеру

(*) Ако имамо координате тачака D, C, B можемо одредити координате тачке A у паралелограму јер

$\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow D - A = C - B$

$\Rightarrow A = B - C + D$

Скаларни, векторски и мешовити производ

[Дефиниција 3.1]: Скаларни производ за $\vec{v}, \vec{u} \in V$ (добро је деф. у свакој димензији)

$$\vec{v} \circ \vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}| \cos \sphericalangle(\vec{v}, \vec{u})$$

} добар особине скаларног производа кад будеш спремао за испит

Примене скаларног производа:

- дужине: $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$
- углови: $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u}) = \arccos \dfrac{\vec{v} \circ \vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}$

Ортонормирана база је база чији су базни вектори јединични међусобно ортогонални вектори. Ако је база $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n})$: $\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{ij}$

Скаларно множење се може представити као матрично множење:
↳ само искључиво у ортонормираној бази

$\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$ и ако је $e = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ ортонормирана база

$\vec{v} \circ \vec{u} = (v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n)(u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n)$

$= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$

$= (v_1, \dots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = [\vec{v}]_e^T \cdot [\vec{u}]_e$

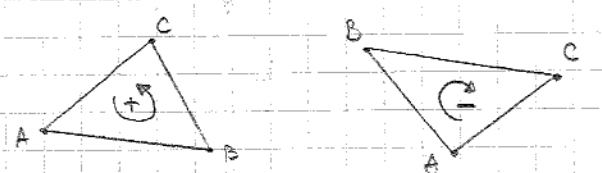
матрично множење

} множимо сваки са сваким, тамо где се множе исте базе биће 1, а где различите 0, јер је ортонормирана база

Оријентација равни

↳ уводимо сат

↳ биће позитивна ако је супротна кретању казаљке на сату, а негативна ако је у смеру кретања казаљке на сату



База $e = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ је позитивне оријентације, ако је троугао OAB позитивне оријентације.

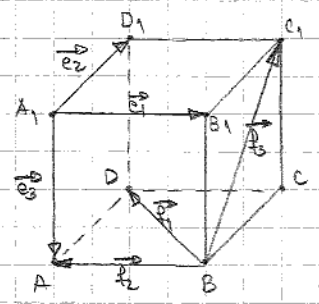
↓

имплицитно даје смер сам запис

Оријентација простора

База $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ је позитивне оријентације ако важи правило руке:
„Ако испружени кажипрст руке представља вектор $\vec{e_1}$, средњи прст вектор $\vec{e_2}$, а палац вектор $\vec{e_3}$, онда је база $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ позитивне оријентације".

[Пример 4]: Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Одредити оријентацију ортонормиране базе $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{A_1B_1}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{A_1D_1}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{A_1A}$ ако је база $f = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC_1})$ позитивне оријентације.



Негативна. Бази f одговара десна рука, док бази e одговара лева.
$\Rightarrow$ база e је обрнуте оријентације него база f

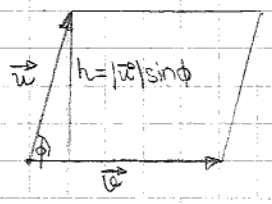
Векторски производ

[Дефиниција 3.2]: Векторски производ (постоји искључиво у димензији 3) за $\vec{v}, \vec{u} \in V^3$: $\vec{v} \times \vec{u} := \vec{w}$, где је $\vec{w}$ вектор који има:

- интензитет: $|\vec{w}| = |\vec{v}||\vec{u}| \sin\measuredangle(\vec{v}, \vec{u})$
- правац: $\vec{w} \perp \vec{v}, \vec{u}$
- смер: база $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ је позитивне оријентације.

Особине векторског производа:
(ово сам нашао)

Геометриски приказ:



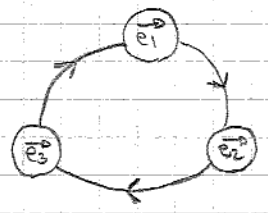
$$\underbrace{|\vec{v} \times \vec{u}|}_{\text{ово је интензитет}} = P_{(\vec{v}, \vec{u})}$$

Векторски производ у ортонормираној бази

Ако је $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ ортонормирана база позитивне оријентације

$\times$	$\vec{e_1}$	$\vec{e_2}$	$\vec{e_3}$
$\vec{e_1}$	$\vec{0}$	$\vec{e_3}$	$-\vec{e_2}$
$\vec{e_2}$	$-\vec{e_3}$	$\vec{0}$	$\vec{e_1}$
$\vec{e_3}$	$\vec{e_2}$	$-\vec{e_1}$	$\vec{0}$

Не мора да се памти има фора:
Ако идемо супротно смеру потребан је минус.



МАТРИЧНА РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА ВЕКТОРСКОГ МНОЖЕЊА

→ $\vec{v} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$, $\vec{u} = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ v_1 & v_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (*)$$

→ МНОЖЕЊЕ ВЕКТОРОМ $\vec{v}$, $[\vec{v}]_e = (v_1, v_2, v_3)$

$$\vec{v} \times \vec{u} := v_\times \cdot [\vec{u}]_e$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Ове две матрице су исто као и ова (*) детерминанта.

ПРИМЕНЕ ВЕКТОРСКОГ ПРОИЗВОДА

– НА ПРОВЛЕЧЕ У РАВНИ

$A, B, C \in \mathbb{E}^2$: $A(a_1, a_2, 0)$, $B(b_1, b_2, 0)$, $C(c_1, c_2, 0)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix} \vec{e_3} =: D_{ABC} \vec{e_3}$$

Важи:

→ $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |D_{ABC}|$

→ A, B, C колинеарне $\iff D_{ABC} = 0$

→ ΔABC је позитивне оријентације ако $D_{ABC} > 0$

[Пример 5]: Одредити површину ΔABC, $A(1,3)$, $B(4,0)$, $C(2,3)$. Да ли је троугао позитивне оријентације?

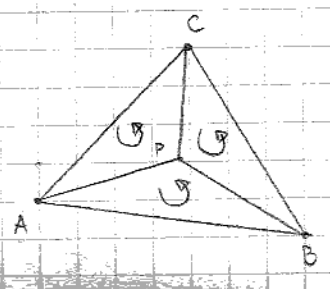
$A(1,3)$ $B(4,0)$ $C(2,3)$

$P_{\Delta ABC} = \frac{3}{2}$

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow AB \\ \leftarrow AC \end{matrix}$$

$= 3 > 0 \Rightarrow \Delta ABC$ позитивно оријентисан

[Теорема 3.1]: Тачка P припада троуглу ABC акко $\operatorname{sign}(D_{ABP}) = \operatorname{sing}(D_{BCP}) = \operatorname{sign}(D_{CAP})$



[Пример 6]: Да ли тачка $P(3,2)$ припада ΔABC из Примера 5?

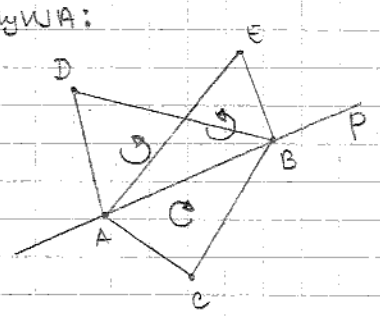
$P(3,2)$

$$D_{ABP} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow AB \\ \leftarrow AP \end{matrix} = 3 < 0 \qquad D_{BCP} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow BC \\ \leftarrow BP \end{matrix} = -1 < 0$$

$$\Rightarrow P \in \operatorname{ext} \Delta ABC$$

Наставак на теорему: Тачке C и D су исте стране праве p акко су троуглови ABC и ABD, $A, B \in p$, истих оријентација:

$$\operatorname{sign}(D_{ABC}) = \operatorname{sing}(D_{ABD})$$

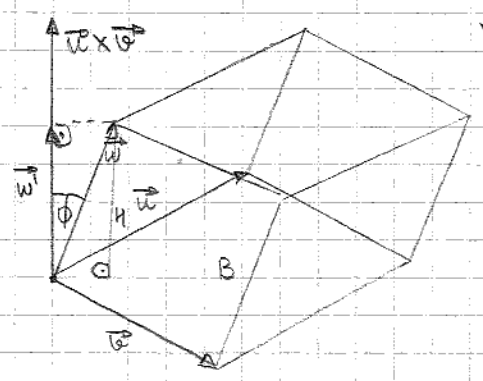


Мешовити производ

[Дефиниција 3.3]: Мешовити производ за $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \in V^3$: (искључиво у димензији 3)

$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] := (\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}$$

Геометриски приказ:



$V = BH \qquad B = |\vec{u} \times \vec{v}|$

$$H = |\vec{w}'| = |\operatorname{proj}_{\vec{v} \times \vec{u}} \vec{w}|$$

$$= |\vec{w}| \cos\phi = |\vec{w}| \cos \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$$

$$\Rightarrow V = \left| |\vec{u} \times \vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \measuredangle(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) \right|$$

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

} апсолутну дајемо да не мислимо о знаку

Рачунање и примене мешовитог производа

→ Мешовити производ у ортонормираној бази

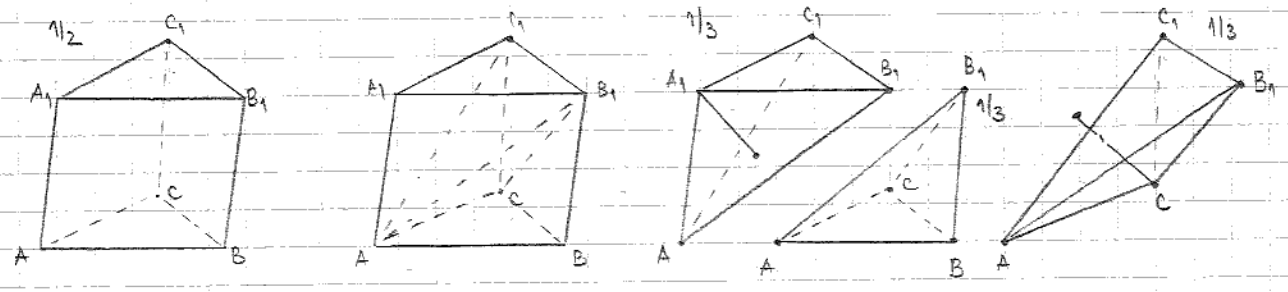
$$[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

→ Особине мешовитог производа (то сами)

[Последица 3.1]: Вектори су линеарно независни акко: $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] \neq 0$

[Последица 3.2]: Вектори $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ простора, чине базу позитивне оријентације ако је $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] > 0$, а негативне оријентације ако је $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}] < 0$.

→ Запремина тетраедра $ABCA_1$ једнака је шестини запремине паралелепипеда одређеног векторима $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AA_1}$.



[Пример 7]: Одредити запремину тетраедра чија су темена $A(1,0,0)$, $B(3,4,6)$, $C(0,1,0)$, $D(1,1,3)$?

– одаберемо једну тачку из које ћемо посматрати векторе, нпр A

$\vec{AB} = (2,4,6)$

$\vec{AC} = (-1,1,0)$

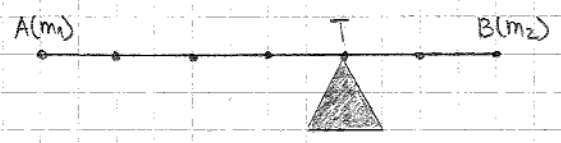
$\vec{AD} = (0,1,3)$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 12 = 2$$

2. ПРЕДАВАЊЕ

ЦЕНТАР МАСЕ

ЦЕНТАР МАСА ТАЧАКА



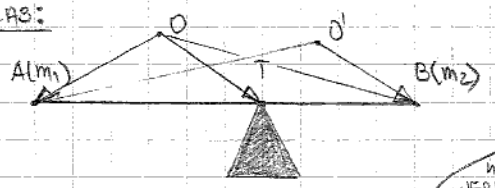
$$|AT| : |TB| = m_2 : m_1 \iff m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$

ЈЕДНАЧИНА РАВНОТЕЊЕ

Ако је O произвољна тачка. Центар маса тачака $A(m_1)$ и $B(m_2)$:

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right)$$

Доказ:



$$m_1\overrightarrow{TA} + m_2\overrightarrow{TB} = \vec{0}$$

из ове једначине

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{TB} = \overrightarrow{OA} + \frac{m_1}{m_2}\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OT}\right)$$

$\overrightarrow{OT}$ пребацујемо на леву страну

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{OB}$$

$$(m_1+m_2)\overrightarrow{OT} = m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right)$$

Тврдимо да ова дефиниција не зависи од избора тачке O. Ако узмемо неку другу тачку O' и за њу дефиницију центра масе, тврдимо да ће се тај центар масе поклопити са тачком T.

$$\overrightarrow{O'T'} = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\overrightarrow{O'A} + m_2\overrightarrow{O'B}\right)$$

желимо да покажемо да не зависи од избора тачке T.

$$T \equiv T' \iff \overrightarrow{TT'} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{TT'} = \overrightarrow{TO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'T'} =$$

$\overrightarrow{TO} = -\overrightarrow{OT}$

$$= -\frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OO'} + \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\overrightarrow{O'A} + m_2\overrightarrow{O'B}\right)$$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(\overrightarrow{O'A} - \overrightarrow{OA}\right) + \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(\overrightarrow{O'B} - \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OO'}$$

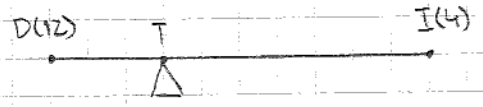
$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{O'O} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OO'}$$

$$= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{O'O'} = \vec{0} \Rightarrow T \equiv T'$$

$\square$

[Пример 1]: На једном крају полуге дужине 3m седи дете масе 12kg, а на другом крају је чак са играчкама масе 4kg.

a) На ком растојању од детета треба поставити ослонац да би полуга била у равнотежи?



$l = |DI| = 3m$

$|DT| : |TI| = 4 : 12 = 1 : 3$

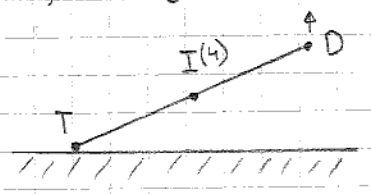
$|DT| + |TI| = |DI| = 3$

$\Rightarrow |TI| = 3|DT|$

$\Rightarrow 3 = |DT| + 3|DT| = 4|DT|$

$\Rightarrow \boxed{|DT| = 3/4m = 75cm}$

b) Ако се један крај полуге постави на земљу, а чак са играчкама помери на средину, колику масу подиже дете држећи други крај полуге?



$|TI| = |ID|$

$m\overrightarrow{TD} + 4\overrightarrow{TI} = \vec{0}$

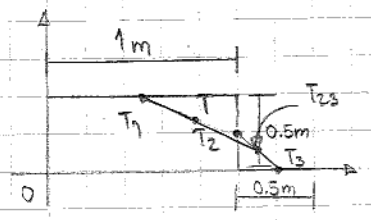
$2m\overrightarrow{TI} + 4\overrightarrow{TI} = \vec{0}$

$(2m+4)\overrightarrow{TI} = \vec{0}$

$\Rightarrow 2m+4=0 \quad m=-2<0$ } јер делују силе различитог смера

$\Rightarrow \boxed{m=2}$

[Пример 2]: Хомогена кипка масе 4kg савијена је као на слици испод. Одредити јој центар масе.



$m = 4kg \quad l = 1m$

$m_1 + m_2 + m_3 = m$

$m_1 + m_2 + m_3 = l : 1/2 l : 1/2 l$

$T_1(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}) \quad m_1 = 2$

$T_2(l, \frac{l}{4}) \quad m_2 = 1$

$T_3(5/4 l, 0) \quad m_3 = 1$

T_{23} – центар масе T_2, T_3

$m_2 = m_3 \Rightarrow T_{23} = S(T_2T_3)$

$T_{23}(9/8 l, l/8)$ } средиште, сабирамо координате и поделимо са 2

$m_{23} = m_2 + m_3 = 2$

T – центар масе T_1, T_{23}

$m_1 = m_{23} \Rightarrow T = S(T_1T_{23})$

$T(\frac{13}{16}l, \frac{5}{16}l)$

$\Rightarrow \boxed{T(13/16, 5/16)}$

ТЕЖИШТЕ И ЦЕНТАР МАСЕ ТРОУГЛА

Сад имамо три тачке $A(m_1)$, $B(m_2)$ и $C(m_3)$. Ако одредимо центар масе тачака B и C, означимо га са A_1.
Тада се AA_1 назива <u>тежишна дуж</u> из тачке A.

Центар масе троугла деф. потпуно аналогно центру масе тачака (у све димензије):

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$$

T је центар масе.

[Теорема 1.1]: Тежишне дужи се секу у центру масе. } даје геометриску интерпретацију

Доказ:

По деф: $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB} + m_3\overrightarrow{OC}\right)$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OA} + \frac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}\left(\frac{m_2}{m_2+m_3}\overrightarrow{OB} + \frac{m_3}{m_2+m_3}\overrightarrow{OC}\right)$$ } Помножили са $\frac{m_2+m_3}{m_2+m_3}$

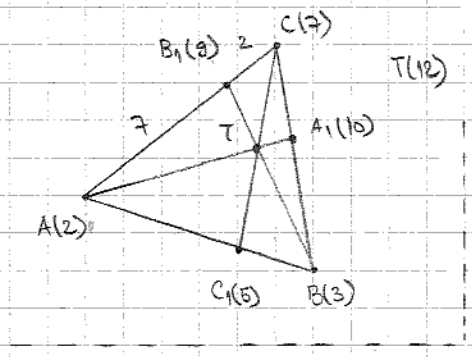
$$= \frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OA} + \frac{m_2+m_3}{m_1+m_2+m_3}\overrightarrow{OA_1}$$ } Ово у загради је центар масе тачака B и C

$$= \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA} + (m_2+m_3)\overrightarrow{OA_1}\right) \Rightarrow TEAA_1$$

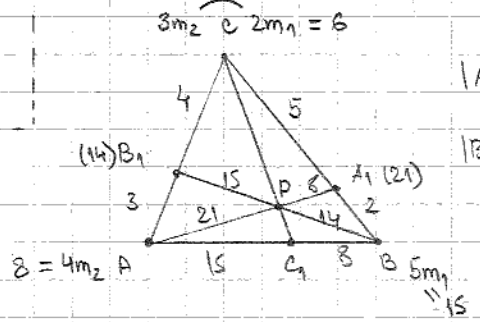
Слично, $TEBB_1$ и $TECC_1$ □

(*) Специјални случај: $m_1 = m_2 = m_3$ онда центар масе = <u>тежиште троугла</u>

[Пример 3]: Дате су тачке са масама $A(2)$, $B(3)$, $C(7)$. Одредити у ком односу центар масе дели тежишне дужи ΔABC?



[Пример 4]: Дат је ΔABC и на његовим ивицама тачке A_1 и B_1 такве да $|AB_1| : |B_1C| = 3:4$, $|BA_1| : |A_1C| = 2:5$.
a) Ако је $\{P\} = AA_1 \cap BB_1$, у ком односу P дели AA_1 и BB_1?
b) Ако је $\{C_1\} = CP \cap AB$, у ком односу C_1 дели AB?



$|AB_1| : |B_1C| = 3:4$

$|BA_1| : |A_1C| = 2:5$

a) $P = AA_1 \cap BB_1$ } желимо да P буде центар масе

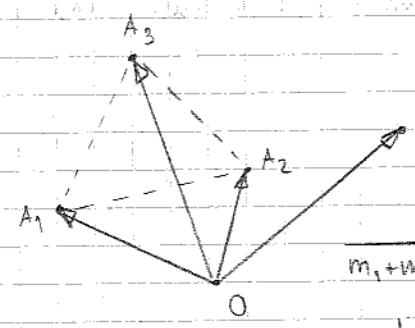
$|AP| : |PA_1| = 21 : 8$

$|BP| : |PB_1| = 14 : 15$

b) $C_1 = CP \cap AB$

$|AC_1| : |C_1B| = 15 : 8$

БАРИЦЕНТРИЧКЕ КООРДИНАТЕ



ХОМОГЕНЕ КООРДИНАТЕ

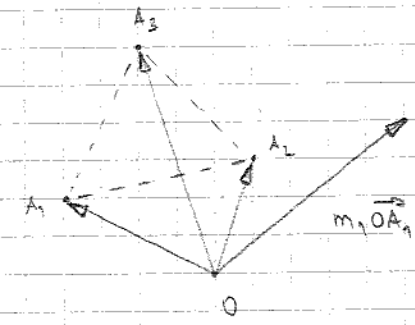
$M(m_1 : m_2 : m_3) \sim (\lambda m_1, \lambda m_2, \lambda m_3),\ \lambda \neq 0$

$$\frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3}\right)$$

↳ ОВАЈ ИЗРАЗ СЕ НЕ МЕЊА АКО СВАКУ ОД МАСА ПОМНОЖИМО НЕКИМ ЕНУЛА СКАЛАРОМ λ, ИЗАЋИ ЋЕ ИСПРЕД ЗАГРАДЕ И СКРАТИТИ СЕ

↳ ЗАТО СУ ХОМОГЕНЕ

фиксирамо $\Delta A_1A_2A_3$ и у односу на њега ми посматрамо координате неких тачака



НЕХОМОГЕНЕ КООРДИНАТЕ

} Ово су јединствене координате

$M(m_1, m_2, m_3),\ m_1+m_2+m_3 = 1$

$$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3}$$

СМИСАО БАРИЦЕНТРИЧКИХ КООРДИНАТА

Одредити барицентричке координате тачке M значи одредити масе које треба ставити у темена $\Delta A_1A_2A_3$ да би центар да би центар масе тог система била тачка M.

[Пример 5]: За ΔABC барицентричке координате теништа су $T(1:1:1)$ (хомогене), тј. $T(1/3, 1/3, 1/3)$ (нехомогене).

[Произвољан пример]:

$A_1(2,3)$ $M(10,7)$
$A_2(4,2)$
$A_3(6,9)$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + m_3\overrightarrow{OA_3}\right)$$

$$10 = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(2m_1 + 4m_2 + 6m_3\right)$$

$$7 = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}\left(3m_1 + 2m_2 + 9m_3\right)$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} 5 &= m_1 + 2m_2 + 3m_3 \\ 7 &= 3m_1 + 2m_2 + 9m_3 \\ 1 &= m_1 + m_2 + m_3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} m_1 &= -2 \\ m_2 &= 2 \\ m_3 &= 1 \end{aligned}$$

} M ће бити изван троугла

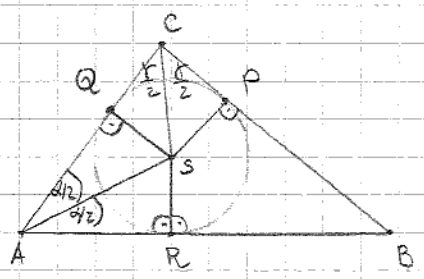
$\Rightarrow$ M ∈ ext ΔA_1A_2

$M(-2, 2, 1)$

[Пример 6]: Одредити координате центра уписаног круга у ΔABC.

[Теорема]: Центар уписаног круга је пресек симетрала унутрашњих углова.

Доказ:



→ Обратимо пажњу на ΔARS

$\Delta ARS \cong \Delta AQS$

$$\left(\begin{array}{l} AS \cong AS \\ \sphericalangle SRA \cong \sphericalangle SQA \text{ - прави} \\ \sphericalangle RAS \cong \sphericalangle QAS \text{ - симетрала} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{SQ \cong SR}$$

Слично: $\Delta SQC \cong SPC \Rightarrow \boxed{SQ \cong SP}$

$\Rightarrow SP \cong SQ \cong SR \ (*)$

$\Rightarrow S$ - центар уписаног круга

} Показали смо да је тачка S једнако удаљена од све три странице.

→ Треба још показати да је SB симетрала угла β

$\Delta SRB \cong SPB$

$$\left(\begin{array}{l} BS \cong BS \\ \sphericalangle SRB \cong \sphericalangle SPB \text{ - прави} \\ SR \cong SP \ (*) \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\sphericalangle RBS \cong \sphericalangle PBS}$$

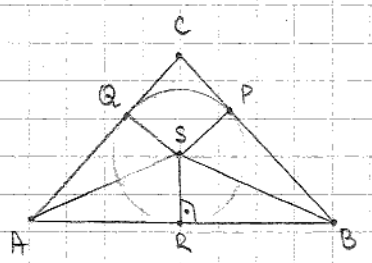
↳ према ставовима о подударности троугла □

Изоставили тачку O

↑

посматрамо у стандардном координатном систему

Решење примера: $S = m_1 A + m_2 B + m_3 C$ ← у барицентричним координатама



$P_{\Delta ABS} = \frac{r}{2}|AB| = m_c P_{\Delta ABC}$

$P_{\Delta BCS} = \frac{r}{2}|BC| = m_a P_{\Delta ABC} \Rightarrow$

$P_{\Delta CAS} = \frac{r}{2}|AC| = m_b P_{\Delta ABC}$

} Однос између $P_{\Delta ABS}$ и површине целог троугла ће управо бити маса коју ћемо сместити у тачку C. $1 : m_c$

↓ Зашто?

Ако поставимо у тачку S ослонац а концентришемо масу у ΔABS, па да би стајало у равнотежи морамо оптеретити тачку C онолико колику смо масу сместили у ΔABS.

$$m_c = \underbrace{\frac{r}{2P_{\Delta ABC}}}_{=\lambda}|AB|$$

$\Rightarrow$

$$m_a = \frac{r}{2P_{\Delta ABC}}|BC|$$

$$m_c = \frac{r}{2P_{\Delta ABC}}|AC|$$

→ Хомогене барицентричке координате:

$S(m_a : m_b : m_c)$

$\sim (|BC| : |AC| : |AB|)$

→ Нехомогене барицентричке координате:

$$m_a + m_b + m_c = 1 \Rightarrow \frac{r}{2P_{ABC}}(|BC| + |AC| + |AB|) = 1$$

$$\Rightarrow r = \frac{2P_{\Delta ABC}}{O_{\Delta ABC}}$$

$$S\left(\frac{|BC|}{O_{\Delta ABC}}, \frac{|AC|}{O_{\Delta ABC}}, \frac{|AB|}{O_{\Delta ABC}}\right)$$

→ Стандардне координате:

$$S = m_a A + m_b B + m_c C, \quad m_a + m_b + m_c = 1$$

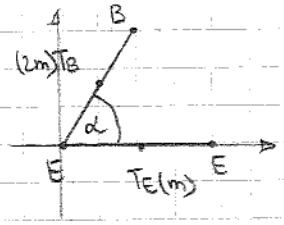
$$S(x, y)$$

$$x = \frac{1}{O_{\Delta ABC}} \left(|BC| x_A + |AC| x_B + |AB| x_C \right)$$

$$y = \frac{1}{O_{\Delta ABC}} \left(|BC| y_A + |AC| y_B + |AB| x_C \right)$$

} За одређивање координата центра су нам потребне само дужине страница.

[Пример 7]: Пс. да је лаптоп направљен од хомогеног материјала и да је основа лаптопа тежа од поклопца. Како год отворили поклопац лаптопа он ће стабилно стајати на столу. С друге стране, ако лаптоп ослонимо поклопцем на сто и подигнемо основу лаптопа у једном тренутку лаптоп ће се "претурити". Колики је угао између основе и поклопца у том моменту? (Занемарити дебљину основе и поклопца)

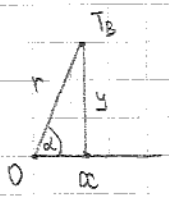


$$m_{baza} = 2m_{ekrana}$$

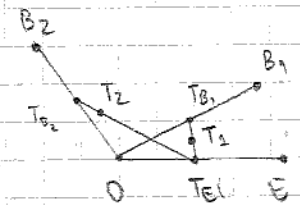
$$r = |T_E O| = |T_B O|$$

} зато што су истих дужина

$$T_E(r, 0)$$
$$T_B(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$$



$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \sin\alpha = \frac{y}{r}$$



↳ Кад год се тежиште система нађе са друге стране тачке O у односу на тачку E

↳ добијамо нестабилан положај

↳ $T_x \leq 0$

$$T = \frac{1}{3m}\left(m T_E + 2m T_B \right)$$

} Небитно је колика је маса

$$= \frac{1}{3}\left(T_E + 2T_B \right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(r + 2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha \right)$$

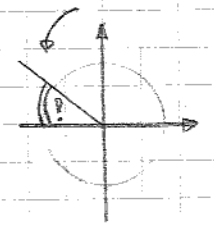
$$r + 2r\cos\alpha \leq 0$$

$$\Rightarrow \cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha \geq \frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{\alpha \in \left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right)}$$

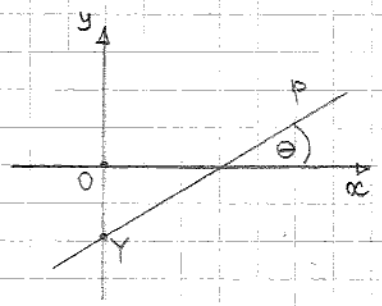
критични угао



3. ПРЕДАВАЊЕ

ПРАВА У РАВНИ

ЈЕДНАЧИНА ПРАВЕ У РАВНИ

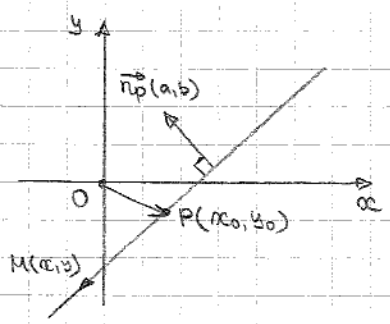


ЕКСПЛИЦИТНА ЈЕДНАЧИНА

$$p: y = kx + n$$

$k = tg\,\theta \qquad n = |OY|$

↳ ОВОМ ЈЕДНАЧИНОМ НЕ МОЖЕМО ПРЕДСТАВИТИ ВЕРТИКАЛНЕ ПРАВЕ



ИМПЛИЦИТНА ЈЕДНАЧИНА

$$p: ax + by + c = 0$$

a, b – КООРДИНАТЕ ВЕКТОРА НОРМАЛЕ НА ПРАВУ p

c – ДОБИЈАМО КАДА КООРДИНАТЕ НЕКЕ ПРОИЗВОЉНЕ ТАЧКЕ СА ПРАВЕ ЗАМЕНИМО У ЈЕДНАЧИНУ
НПР. ТАЧКА $P(x_0, y_0)$

↳ $P \in p \Rightarrow ax_0 + by_0 + c = 0$

$\Rightarrow c = -(ax_0 + by_0)$

$= -(a,b) \circ (x_0, y_0)$

$= -\vec{n_p} \circ \vec{OP}$

↳ ПРОБЛЕМ СА ОВОМ ЈЕДНАЧИНОМ ЈЕ КАД ЈЕ ГОД ПОМНОЖИМО СА НЕКИМ НЕНУЛА СКАЛАРОМ ($\lambda \neq 0$) ДОБИЈАМО ДРУГУ ЈЕДНАЧИНУ КОЈА ПРЕДСТАВЉА ЈЕДНУ ТЕ ИСТУ ПРАВУ

↓ ДА БИСМО ТО РЕШИЛИ ЗАХТЕВАМО ДОДАТИ УСЛОВ

$|\vec{n_p}| = 1$

$\sqrt{a^2+b^2} = 1$

$a^2 + b^2 = 1$ } ОДАВДЕ ДОБИЈАМО НОРМАЛИЗОВАНУ ЈЕДНАЧИНУ ПРАВЕ

↳ САДА ЋЕ САМО ДВЕ ЈЕДН. ПРЕДСТАВЉАТИ ИСТУ ПРАВУ (ОВА И МИНУС ТА)

↳ $\vec{n_p}$ МОЖЕ ПОКАЗИВАТИ У ДРУГОМ СМЕРУ

↓ ДОДАТНО МОЖЕМО

$\underbrace{a}_{\cos\theta}{}^2 + \underbrace{b}_{\sin\theta}{}^2 = 1 \qquad c = -r$

НОРМАЛНА ЈЕДНАЧИНА

$$x\cos\theta + y\sin\theta = r$$

$\theta \in [0, 2\pi)$ } ОГРАНИЧЕНИ ИНТЕРВАЛ

$d \geq r \geq 0$
(*)

У РАЧУНАРСКОЈ ГРАФИЦИ ЕКРАН ОГРАНИЧАВА ПАРАМЕТАР ОДОЗГО НА ДИЈАГОНАЛУ ЕКРАНА: $d \geq r \geq 0$ (*)

САДА СЕ ПАРАМЕТРИ БИРАЈУ ИЗ ОГРАНИЧЕНОГ БЕСКОНАЧНОГ СКУПА И ТО ДОСТА ЛАКШЕ.

[Пример 1]: Одредити нормализовану ј-ну праве која садржи тачку $M(1,1)$ и чији је нормални вектор $\vec{n_p} = (4,-3)$.

$|\vec{n_p}| = 5$

$4x - 3y - 1 = 0 \;/ :5$

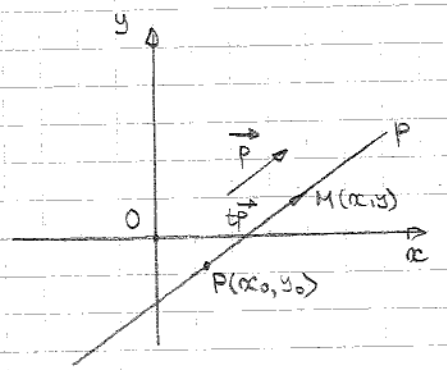
$$\boxed{\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{5} = 0}$$

$$\underbrace{\frac{4}{5}}_{\cos\theta}x - \underbrace{\frac{3}{5}}_{\sin\theta}y = \underbrace{\frac{1}{5}}_{r}$$

ПАРАМЕТАРСКА ЈЕДНАЧИНА

$$\boxed{p:\ M(t) = P + t\vec{p},\ t \in \mathbb{R}}$$

} НАЈБОЉА
↳ МОЖЕ СЕ ЈОШ НА ВЕЋЕ ДИМЕН.



$\vec{p}$ – можемо сматрати брзином кретања

$x = x_0 + t p_x$

$y = y_0 + t p_y,\ t \in \mathbb{R}$

} Ова једначина је управо равномерно праволинијско кретање

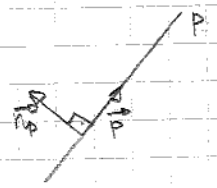
ПАРАМЕТАРСКИ → ИМПЛИЦИТНИ ОБЛИК

$x = x_0 + t p_x,\quad y = y_0 + t p_y,\ t \in \mathbb{R}$

$$\boxed{t = \frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}},\quad p_x^2 + p_y^2 \neq 0 \iff \vec{p} \neq \vec{0}$$

КАНОНСКА ЈЕДНАЧИНА

$$\underbrace{p_y}_{a}x \underbrace{- p_x}_{b}y + \underbrace{(p_x y_0 - p_y x_0)}_{c} = 0$$



} КООРДИНАТЕ $\vec{n_p}$ СМО ПРОЧИТАЛИ ИЗ $p_x y_0 - p_y x_0$ (c)

} ЗАМЕНИМО МЕСТА И ПРОМЕНИМО ЗНАК ЈЕДНОМ

$\vec{p}(p_x, p_y)\qquad \vec{n_p}(p_y, -p_x)$

$\vec{p} \circ \vec{n_p} = 0 \iff \vec{p} \perp \vec{n_p}$

ИМПЛИЦИТНИ → ПАРАМЕТАРСКИ ОБЛИК

$ax + by + c = 0$

$\vec{n_p}(a,b) \Rightarrow \vec{p}(-b,a),\quad P\left(-\frac{ac}{a^2+b^2}, -\frac{bc}{a^2+b^2}\right)$

} P је произвољна тачка, можемо само наћи било које решење ј-не и узети то за тачку

$P + t\vec{p},\ t \in \mathbb{R}$

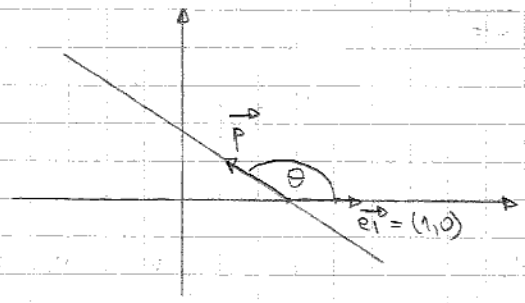
[Пример 2]: Дата је права $p: 3x+4y+6=0$. Одредити параметарски облик праве p и угао који права p заклапа са x-осом.

$p: 3x-4y+6=0$

$\vec{n_p}(3,-4) \Rightarrow \vec{p}(4,3)$ $\quad P(-2,0)$ } решимо за $y=0$

$M(t) = P + t\vec{p}, \ t\in\mathbb{R}$

$x = -2+4t$
$y = 3t, \ t\in\mathbb{R}$



$$\cos\theta = \frac{\vec{p}\circ\vec{e_1}}{|\vec{p}|\cdot|\vec{e_1}|}$$

$$= \frac{|p_x|}{|\vec{p}|} = \frac{4}{5}$$

[Пример 3]: Одредити експлицитну ј-ну праве која садржи тачку $M(1,2)$ и паралелна је са y-осом.

$M(1,2) \ni \underbrace{m \parallel y\text{-осом}}$

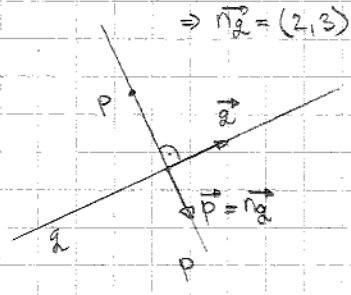
m - вертикална $\Rightarrow m: x=const$

$M\in m \Rightarrow x=1$

[Пример 4]: Одредити параметарску ј-ну праве која садржи тачку $P(-2,3)$ и нормална је на праву $q: 2x+3y-1=0$.

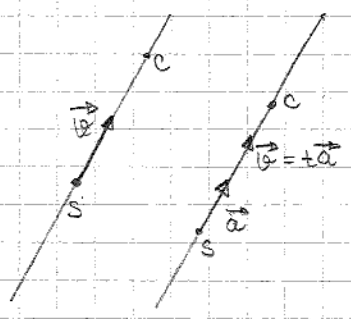
$P(-2,3)$ $\quad q: 2x+3y-1=0$
$\Rightarrow \vec{n_q}=(2,3)$ $\quad p: P+t\vec{n_q}, \ t\in\mathbb{R}$

$P\in p \perp q$



$x = -2+2t$
$y = 3+3t, \ t\in\mathbb{R}$

РАВНОМЕРНО И УБРЗАНО ПРАВОЛИНИЈСКО КРЕТАЊЕ

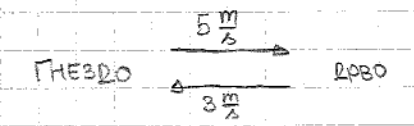


$C(t) = S + t\vec{v}, \ t\in\mathbb{R}$

$C(t) = S + t^2\vec{a}, \ t\in\mathbb{R}$

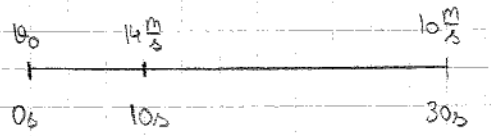
} уместо вектора правца можемо посматрати вектор убрзања
↳ ово је пре полуправа јер због квадрата само позитивно можемо да се крећемо

[Пример 5]: По изласку из гнезда, веверица донесе лешник са дрвета у гнездо за 40s. Одредити колико је удаљено стабло лешника од гнезда ако се зна да се веверица кретала брзином 5m/s без лешника, а 3m/s са лешником. Пос. да се веверица није успут задржавала и да није губила време за узимање лешника.



$$t = 40s = \underset{(Г\to Д)}{t_1} + \underset{(Д\to Г)}{t_2} = \frac{s}{5} + \frac{s}{3} = \frac{8}{15}s\,\frac{m}{s} \Rightarrow \underline{s = 75m}$$

[Пример 6]: Аутобус се креће равномерно променљиво (константним убрзањем) и након 10s достиже брзину од $14\frac{m}{s}$. Ако је након 30s брзина кретања аутобуса $10\frac{m}{s}$, колика је његова почетна брзина?



$a = const$

$$v_1 = v_0 + 10a$$
$$v_2 = v_1 + 20a \quad \} (30-10)$$

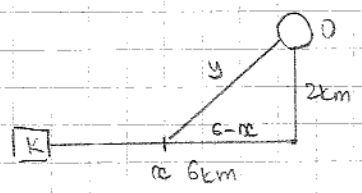
$$\Rightarrow a = -\frac{1}{5}\frac{m}{s^2}$$

$$14 = v_0 + 10a = v_0 - 2$$

$$\Rightarrow \underline{v_0 = 16\frac{m}{s}}$$

[Пример 7]: Острво се налази 2km северно у односу на најближу приобалну тачку. Туриста осећа у кућици на обали која је удаљена 6km западно од те тачке и планира да посети острво. Пос. да он трчи брзином од 8km/h и плива брзином 3km/h. Циљ је да најкраће време стићи до острва.

Колики пут треба да претрчи пре него што крене са пливањем? Колико времена треба да плива након што заврши са трчањем?



$v_{трчања} = 8\,km/h$
$v_{пливања} = 3\,km/h$

$$t = t_{трчања} + t_{пливања} = \frac{x}{v_{трчања}} + \frac{y}{v_{пливања}}$$

$$t(x) = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{2^2 + (6-x)^2}}{3} \quad \} \text{ треба минимизирати}$$

x – тачка у којој се достиже минимум

$x \in [0,6]$

x_{min} је или 0 или 6 или $t'(x) = 0$

$$x = 6 - \frac{6}{\sqrt{65}} \quad \text{па изр. } y$$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ДУЖИ И ПОЛУПРАВЕ

Нека је [AB] дуж: ЗАТВОРЕНЕ

$$\boxed{M(t) = A + t\overrightarrow{AB},\ t\in[0,1]}$$

} НЕ МОРА УВЕК ДА БУДЕ ОД 0 ДО 1, ЗАВИСИ ОД КОЈЕ ТАЧКЕ СМО КРЕНУЛИ И КОЈИ ВЕКТОР СМО УЗЕЛИ

= ДА СМО ИМАЛИ НПР. $t\in(-2,0)$ ДОБИЛИ БИ ДУЖ [AB)

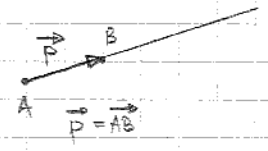
= $t\in[-2,0)$ ДУЖ (AB]

↳ ТО СУ ПОЛУОТВОРЕНЕ ДУЖИ

= $t\in(-2,0)$ ДУЖ (AB) → ОТВОРЕНА

Нека је [AB) полуправа:

$$\boxed{M(t) = A + t\overrightarrow{AB},\ t\in[0,+\infty)}$$



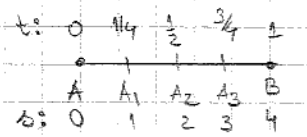
} ТАКОЂЕ И ОВДЕ ПАРАМЕТАР МОЖЕ БИТИ ДРУГАЧИЈИ

$M(s) = B + s\vec{p},\ s\in[-1,+\infty)$

[Пример 8]: Одредити параметарску ј-ну дужи [AB] ако је $A(2,-3)$, $B(10,9)$. Одредити тачке A_1, A_2 и A_3 које дужи [AB] деле на четири једнака дела. Да ли тачка $C(2/3,-5)$ припада полуправој [AB)?

$A(2,-3)$ $B(10,9)$

$\overrightarrow{AB} = (8,12) = 4(2,3) = 4\vec{p}$



$AA_1 \cong A_1A_2 \cong A_2A_3 \cong A_3B$

1) $M(t) = A + t\overrightarrow{AB},\ t\in[0,1]$ } $x = 2+8t$, $y = -3+2t$, $t\in[0,1]$

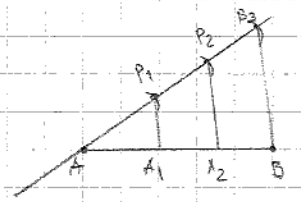
2) $M(s) = A + s\vec{p},\ s\in[0,4]$ } $x = 2+2s$, $y = 3+3s$, $s\in[0,4]$

} ОБА СУ ТАЧКА

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= (4,0)\\ A_2 &= (6,3)\\ A_3 &= (8,6)\end{aligned}}$$

Дигресија:

↳ како дуж поделити на 3 дела шестаром



} Повучемо праву из тачке A (која не садржи B), на њој шестаром конструишемо 3 дужи једнаке дужине. Последњу тачку спојимо са B и паралелно са том дужи спојимо P_2 и P_1 са AB

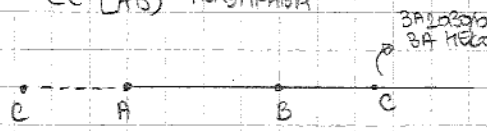
↳ Талесова теорема нам тврди да ће ово поделити дуж на 3 једнака дела

↳ УГАО НЕ МОЖЕ КОНСТРУКТИВНО ДА СЕ ПОДЕЛИ, ОСИМ АКО НИЈЕ НЕКИ СТЕПЕН ДВОЈКЕ

$C(\frac{2}{3},5)$

$C\in[AB)$ – полуправа

[AB) : $A + t\overrightarrow{AB}$, $t\geq 0$



$x = 2+8t$, $y = -3+12t$, $t\geq 0$

$\frac{2}{3} = 2+8t \Rightarrow t = -\frac{1}{6}$ ✓

$-5 = -3+12t \Rightarrow t = -\frac{1}{6}$ ✓

⇒ A, B, C КОЛИНЕАРНЕ

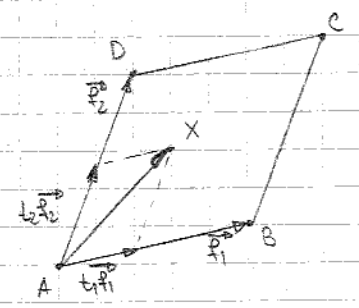
$t<0$

↳ $C\notin[A,B)$

C ЗАДОВОЉАВА ЗА НЕКО $t<0$

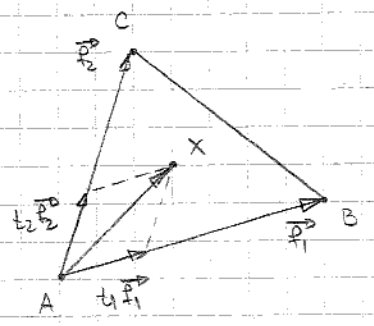
C ↳ C НЕ ЗАДОВОЉАВА ј-НУ ни ЗА ЈЕДНО t

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ПАРАЛЕЛОГРАМА



$$\boxed{X(t_1,t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AD}, \quad 0 \le t_1, t_2 \le 1}$$

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ТРОУГЛА



$$\boxed{X(t_1,t_2) = A + t_1\overrightarrow{AB} + t_2\overrightarrow{AC}, \quad 0 \le t_1, t_2 \le 1, \quad t_1 + t_2 \le 1}$$

ПОЛУРАВАН

- C и D су <u>СА ИСТЕ СТРАНЕ</u> ПРАВЕ p АКО: $[CD] \cap p = \{0\}$.

<u>ПОЛУРАВАН</u> ЈЕ СКУП ТАЧАКА СА ИСТЕ СТРАНЕ ПРАВЕ p.

КАКО ПРОВЕРАВАМО ДА СЕ НЕКЕ ДВЕ ТАЧКЕ НАЛАЗЕ СА ИСТЕ СТРАНЕ ПРАВЕ?

$\rightarrow p: \; f(x,y) = ax + by + c$

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \operatorname{sing}(f(C)) = \operatorname{sing}(f(D))$$

$\overset{\cdot\cdot}{-}$ → СА ИСТЕ СТРАНЕ ПРАВЕ

Посетане:

$p: A, B \in p$

$$C, D \overset{\cdot\cdot}{-} p \iff \operatorname{sing}(D_{ABC}) = \operatorname{sing}(D_{ABD})$$

ОВО СМО РЕКЛИ НА ПРЕДАВАЊУ

$\rightarrow p: \; P, \vec{p}, \; A \equiv P, \; B = A + \vec{p}$

↳ АКО СМО ЗАДАЛИ ПРАВУ ПАРАМЕТАРСКИ, ЗА ТАЧКУ A ЋЕМО УЗЕТИ ТАЧКУ P, А ЗА B ЋЕМО НПР. УЗЕТИ $A + \vec{p}$ (БИЛО КОЈИ УМНОЖАК)

[Пример]: Испитати да ли се тачке $A(1,3)$ и $B(-2,1)$ налазе са исте стране праве:

a) $p: 2x + y = 0$ b) $q: Q(0,1), \; \vec{q} = (2,-3)$

$f(A) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 > 0$
$f(B) = -2 \cdot 2 + 1 = -3 < 0$ } СА РАЗНИХ СТРАНА p

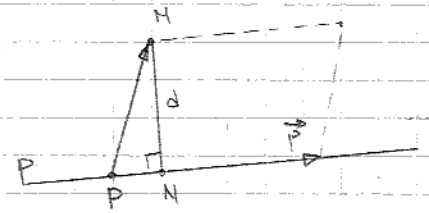
b) ДОМАЋИ

РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД ПРАВЕ

[Теорема 2.1]: (важи и у простору) Растојање тачке од праве рачунамо као

$$d(M,p) = d = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}$$

} када је права дата параметарски



[Пример 10]: Одредити растојање тачке $M(1,1)$ од праве $p: P(-2,0)$, $\vec{p} = (3,4)$.

$M(1,1)$

$p: P(-2,0) \quad \vec{p} = (3,4)$

$\vec{PM} = (3,1)$

$$|\vec{PM} \times \vec{p}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12-3 = 9 \qquad |\vec{p}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \qquad \Rightarrow d(M,p) = \frac{9}{5}$$

[Теорема 2.2]: Растојање тачке од праве задате имплицитно рачунамо као

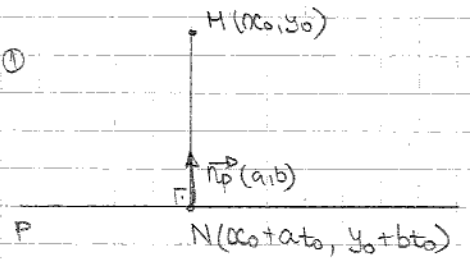
$$d(M,p) = d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$p: ax+by+c=0$

① $d(M,p) = |\vec{MN}|$

$= |t| \cdot |\vec{n_p}|$

апсолутна интензитет



Зашто?

② $MN: \ M + t\vec{n_p}, \ t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

$N = M + t_0\vec{n_p}$ $\quad t_0$ - конкретна вредност

③ $N \in p \Rightarrow a(x_0+at_0) + b(y_0+bt_0) + c = 0$

$ax_0 + by_0 + c + (a^2+b^2)t_0 = 0$

$$t_0 = -\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

А пошто смо: $d(M,p) = |t_0| \cdot |\vec{n_p}|$

$$= \frac{|-(ax_0+by_0+c)|}{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

? Како се скратило

[Пример 11]: Одредити растојање тачке $M(1,1)$ од праве $p: 3x+4y-5=0$.

$$d(M,p) = \frac{|3\cdot1+4\cdot1-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{2}{5}$$

ПРЕСЕЦИ ПРАВИХ, ПОЛУПРАВИХ И ДУЖИ

ПРЕСЕК ИМПЛИЦИТНО ЗАДАТИХ ПРАВИХ

→ РЕШИТИ СИСТЕМ

$$p: \ a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$q: \ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

↳ ЈЕДИНСТВЕНО РЕШЕЊЕ = ПРАВЕ СЕ СЕКУ
↳ БЕСКОНАЧНО МНОГО РЕШЕЊА = ПРАВЕ СЕ ПОКЛАПАЈУ
↳ НЕМА РЕШЕЊА = ПРАВЕ СУ ПАРАЛЕЛНЕ

→ КРАМЕРОВО ПРАВИЛО

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

↳ $\Delta \neq 0$ – ПРАВЕ СЕ СЕКУ У $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$
↳ $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ – ПРАВЕ СЕ ПОКЛАПАЈУ
↳ $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ – ПАРАЛЕЛНЕ

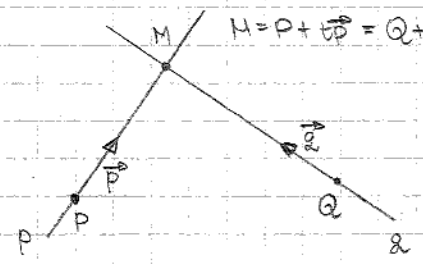
Интересија:

→ Δ није ништа више од векторског производа вектора нормале праве p и вектора нормале праве q: $\vec{n_p} \times \vec{n_q}$

↳ АКО ЈЕ $\vec{n_p} \times \vec{n_q} = 0$ ОНДА СУ $\vec{n_p}$ и $\vec{n_q}$ ЛИНЕАРНО ЗАВИСНИ, ТЈ. КОЛИНЕАРНИ СУ ПА ЋЕ ПРАВЕ ИЛИ БИТИ ПАРАЛЕЛНЕ ИЛИ ДА СЕ ПОКЛАПАЈУ

↳ АКО ЈЕ $\vec{n_p} \times \vec{n_q} \neq 0$ ОНДА МОРАЈУ ДА СЕ СЕКУ

ПРЕСЕК ПАРАМЕТАРСКИ ЗАДАТИХ ПРАВИХ



$$M = P + t\vec{p} = Q + s\vec{q}$$

$$P + t\vec{p} = Q + s\vec{q}$$ } ПРЕБАЦУЈМО НА ДЕСНУ

$$Q - P - t\vec{p} + s\vec{q} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{PQ} - t\vec{p} + s\vec{q} = \vec{0} \quad / \cdot \vec{q} \ / \cdot \vec{p}$$

} ЧЕСТ ТРИК КАДА СЕ РЕШАВАЈУ ВЕКТОРСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЈЕСТЕ ДА ИХ ВЕКТОРСКИ ПОМНОЖИТЕ СА НЕЧИМ

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{q} - t\vec{p} \times \vec{q} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \vec{p} + s\vec{q} \times \vec{p} = \vec{0}$$

$$D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q}) - t\,D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

$$D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p}) - s\,D(\vec{p}, \vec{q}) = 0$$

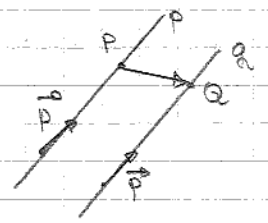
1. случај) $D(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$

$$t = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{q})}{D(\vec{p}, \vec{q})} \qquad s = \frac{D(\overrightarrow{PQ}, \vec{p})}{D(\vec{p}, \vec{q})}$$

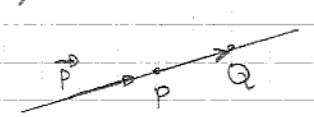
$$M = P + t\vec{p} = Q + s\vec{q}$$

} добијемо је користећи или t или s које смо изр.

2. случај) $D(\vec{p},\vec{q})=0 \Rightarrow \vec{p},\vec{q}$ - колинеарни



$\vec{p}, \overrightarrow{PQ}$ - нису колинеарни
тј. $D(\overrightarrow{PQ},\vec{p})\neq 0 \Rightarrow p \parallel q$



$p\equiv q$

$\vec{p}, \overrightarrow{PQ}$ јесу колинеарни $\Rightarrow p\equiv q$
тј. $D(\overrightarrow{PQ},\vec{p})=0$

[Пример 12]: Одредити пресек правих p и q које су задате тачком и вектором правца:
a) $P(3,1)$, $\vec{p}=(1,0)$, $Q(2,3)$, $\vec{q}=(1,1)$
b) $P(3,1)$, $\vec{p}=(1,0)$, $Q(2,3)$, $\vec{q}=(-2,0)$
c) $P(3,1)$, $\vec{p}=(1,-2)$, $Q(2,3)$, $\vec{q}=(-2,4)$

a) $\vec{p}$ и $\vec{q}$ очигледно нису колинеарни (јер нису пропорционални) $\vec{p}\neq\lambda\vec{q} \Rightarrow p\cap q=\{M\}$
$\Rightarrow$ праве се секу

$$D(\vec{p},\vec{q})=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad D(\overrightarrow{PQ},\vec{p})=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2$$

$$\Rightarrow s=-2 \Rightarrow M=Q-2\vec{q}$$
$$\boxed{M(0,1)}$$

Пресек дужи

→ Нека су: $[AB]: A+t\overrightarrow{AB}$, $[CD]: C+s\overrightarrow{CD}$, $t,s\in[0,1]$. Дужи се секу ако је $D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\neq 0$ и

$$0\le t=\frac{D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})},\quad s=\frac{D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})}\le 1$$

→ Ако је $D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0$ и $D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})=0$ може бити:

дужи се поклапају
дужи се делимично преклапају
дужи се не секу
} → потребна додатна анализа

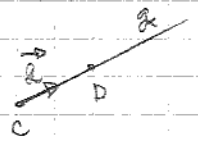
→ Дужи се не секу у свим осталим случајевима.

4. ПРЕРАВАЊЕ

[Пример 13]: Одредити пресек полуправих $[AB)$: $A(1,2)$, $B(-2,3)$ и $[CD)$: $C(0,1)$, $D(2,-1)$.

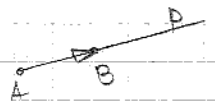
$\overrightarrow{AB} = (-3,1) = \vec{p}$ $\qquad$ $[CD)$: $\quad D + s\vec{q}$, $s \geq -2$

$\overrightarrow{CD} = (2,-2) \sim (1,-1) = \vec{q}$



$x = 2 + s$
$y = -1 - s$, $s \geq -2$

$[AB)$: $A + t\overrightarrow{AB}$, $t \geq 0$



$x = 1 - 3t$
$y = 2 + t$, $t \geq 0$

$$D(\vec{p},\vec{q}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$$t \quad D(\overrightarrow{AD},\vec{q}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \qquad s \quad D(\overrightarrow{AD},\vec{p}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

УЗМЕМО ЈЕДНУ СА p, ЈЕДНУ СА q, СВЕЈЕДНО КОЈЕ

$$t = \frac{D(\overrightarrow{AD},\vec{q})}{D(\vec{p},\vec{q})} = 1 \geq 0 \checkmark \qquad s = \frac{D(\overrightarrow{AD},\vec{p})}{D(\vec{p},\vec{q})} = -4 < -2$$

$t = 1 \Rightarrow B$ $\qquad$ $\Rightarrow$ ПОЛУПРАВЕ СЕ НЕ СЕКУ

[Пример 14]: Одредити пресек дужи AB и CD, где је $A(12,3)$, $B(12,5)$, $C(5,7)$, $D(-2,1)$

$[AB]$: $A + t\overrightarrow{AB}$ $\quad t \in [0,1]$ $\qquad \overrightarrow{AB} = (0,2)$

$[CD]$: $D + s\overrightarrow{CD}$ $\quad s \in [-1,0]$ $\qquad \overrightarrow{CD} = (-7,-6)$

$$D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -7 & 6 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

$$D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -14 \qquad D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} = 70$$

$$t = \frac{D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD})}{D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = \frac{70}{14} = 5 > 1 \qquad s = \frac{D(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})}{D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} = -1 \in [-1,0]$$

$\Rightarrow$ ДУЖИ СЕ НЕ СЕКУ

[Пример 15]: Ана креће од куће ка железничкој станици крећући се равномерно брзином $v = 3\,m/s$. Ако се кућа налази 1km И, 3km С, а станица 2km З, 3km Ј од центра града, за колико времена ће Ана стићи до станице?

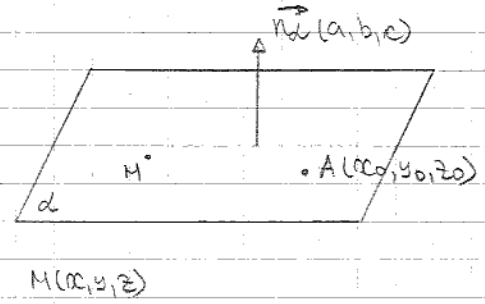
У исто време, Иван креће бициклом из банке лоциране 4km Ј и одлази до продавнице која је 3km З, крећући се равномерном брзином $v = 20\,km/h$. Кад стигне до продавнице, предомисли се и промени правац, без заустављања, настављајући да се креће ка железничкој станици равномерно убрзано убрзањем $a = 1\,m/s$.

↳ објашњење снимак 22:10 и кта се траћи на презентацији

РАВАН И ПРАВА У ПРОСТОРУ

ИМПЛИЦИТНА ј-НА РАВНИ

Раван α је одређена тачком $A(x_0, y_0, z_0)$ која јој припада и нормалним вектором равни $\vec{n_\alpha}$.



$M \in \alpha(A, \vec{n_\alpha})$

$\Rightarrow \vec{MA} \perp \vec{n_\alpha}$

$\Rightarrow \vec{MA} \circ \vec{n_\alpha} = 0$

$0 = (x-x_0, y-y_0, z-z_0) \circ (a,b,c)$

$= a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0)$

$= ax + by + cz \underbrace{-(ax_0 + by_0 + zy_0)}_{d}$

$\alpha: \; ax + by + cz + d = 0$

$\Rightarrow \vec{n_\alpha}(a,b,c) \quad d = -(ax_0 + by_0 + zy_0) = \quad [A]_{O_e} = [\vec{OA}]_e$

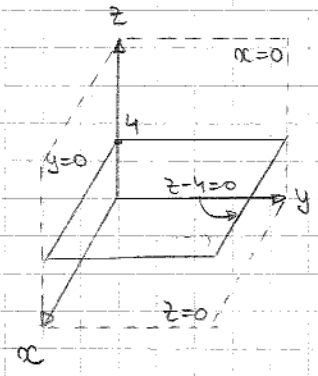
$= -(a,b,c) \circ (x_0, y_0, z_0)$

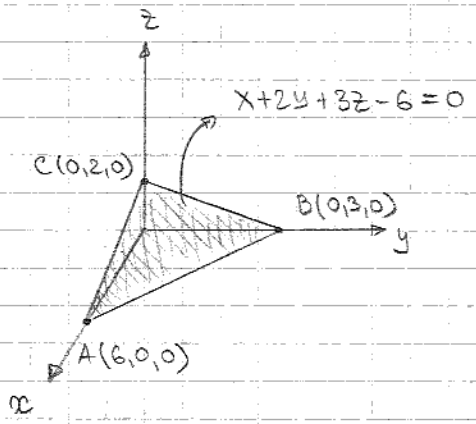
$= \vec{n_\alpha} \circ \vec{OA}$

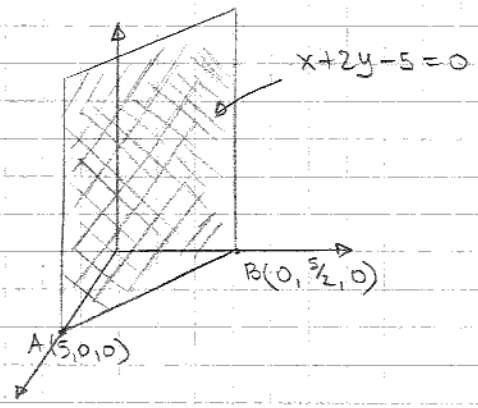
НОРМАЛИЗОВАНА ЈЕДНАЧИНА РАВНИ

$ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad |\vec{n_\alpha}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 1$

Примери:







Полупростор

Полупростор је скуп свих тачака са исте стране неке равни $\alpha: ax+by+cz+d=0$. Одређен је неједначином $ax+by+cz+d>0$, односно $ax+by+cz+d<0$.

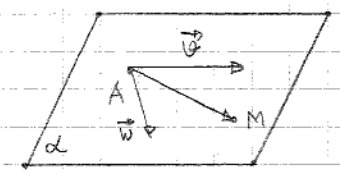
[Пример 1]: Да ли се тачке $A(1,1,1)$ и $C(-1,-1,3)$ налазе са исте стране равни $\beta: x-3y+4z-12=0$.

$f(x,y,z) = x-3y+4z-12$

$$\left.\begin{aligned} f(A) &= 1-3\cdot 1+4\cdot 1-12 = -10<0 \\ f(C) &= -1-3\cdot(-1)+\cancel{4(3)-12} = 3>0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A, C \,\dot{-}\, \alpha$$

Параметарска једначина равни

Равни α је одређена тачком $A(x_0,y_0,z_0)$ која јој припада и два вектора $\vec{v}, \vec{w}$ паралелна α.

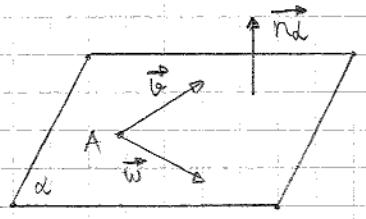


$\alpha: M(t,s) = A + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t,s \in \mathbb{R}$ } Број параметара нам даје димензију објекта

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tv_x + sw_x \\ y &= y_0 + tv_y + sw_y \\ z &= z_0 + tv_z + sw_z \end{aligned}$$

$M-A = \vec{AM} = t\vec{v} + s\vec{w}$ лин. зависност вектора

Параметарски → Имплицитни

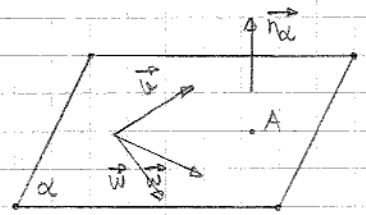


$\vec{n_\alpha} \perp \vec{v}, \vec{w}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{n_\alpha} = \vec{v} \times \vec{w}}$

$\vec{n_\alpha}(a,b,c) \quad d = -\vec{n_\alpha} \circ \vec{OA}$

Имплицитни → Параметарски



$\vec{w} \perp \vec{n_\alpha}$ – произвољно одаберемо $\vec{w}$

1) $\vec{v} \perp \vec{n_\alpha}$, $\vec{v}, \vec{w}$ – независни тј. $\vec{v} \times \vec{w} \neq 0$

2) $\vec{v} = \vec{n_\alpha} \times \vec{w} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{n_\alpha} + \vec{v} \perp \vec{w}$

↳ добијемо ортогоналну базу

I начин: одаберемо произвољно $\vec{v}$, али да задовољава дате услове

II начин: $\vec{v}$ добијемо као векторски производ

↳ A ће бити било која тачка која задовољава j-ну равни

[Пример2]: Одредити параметарску једначину равни $\alpha: x-2y+z-2=0$

$\alpha: \vec{n_\alpha}(1,-2,1) \quad A(0,-1,0)$

Треба нам $\vec{v}(v_1,v_2,v_2)$ тако да је $\vec{v} \perp \vec{n_\alpha} \iff \vec{v} \circ \vec{n_\alpha} = 0$

$$v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

$\vec{v}(2,5,3)$ } неизсобно морају бити независни, а $\vec{w}$ исто добијамо као $\vec{v}$

Такође нам треба и $\vec{w} \perp \vec{n_\alpha} \quad \vec{w}(1,1,0)$

↳ Сваку тачку записујемо као $M(t,s) = A + t\vec{w} + s\vec{v} \quad t,s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &= 2t + s \\ y &= -1 + 5t + s \\ z &= 3t \quad , \quad t,s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

[Пример3]: Одредити нормализовану једначину равни β: $x = 2$, $y = 1-t$, $z = 2+t-3s$, $t,s \in \mathbb{R}$

$\beta \rightsquigarrow A(2,1,2)$ } за произвољне вредности параметара s и t

$\vec{v}(0,-1,1)$ } из t

$\vec{w}(0,0,-3)$ } из s

$$\vec{n_\alpha} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = 3\vec{e_1} = (3,0,0) \rightsquigarrow (1,0,0)$$

} желимо да буде нормализован $|\vec{n_\alpha}| = 1$

$\Rightarrow \beta: x - 2 = 0$ } -2 јер $d = -\vec{n_\alpha} \circ \vec{OA}$

Параметарска једначина праве

Права у простору се задаје тачком $P(x_0,y_0,z_0)$ и ненула вектором правца $\vec{p}(p_x,p_y,p_z)$:

$$M(t) = M = P + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + tp_x \\ y &= y_0 + tp_y \\ z &= z_0 + tp_z, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

↳ Канонска једначина праве

$$\frac{x-x_0}{p_x} = \frac{y-y_0}{p_y} = \frac{z-z_0}{p_z}$$

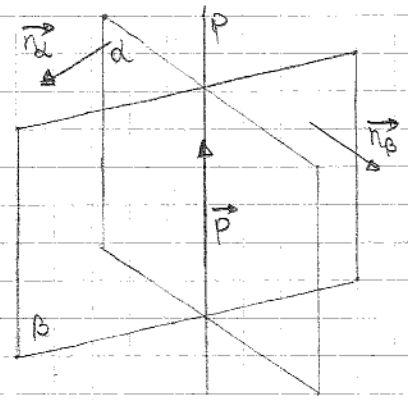
} добија се изостављањем параметра t } не представља јединствено праву и користићемо је само као помоћ када прелазимо из параметарског у облик праве као пресек две равне

$P(x_0,y_0,z_0) \quad \vec{p}(p_x,p_y,p_z)$

ПРАВА КАО ПРЕСЕК ДВЕ РАВНИ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta}$$

КАДА ЋЕ СЕ ДВЕ РАВНИ СЕЋИ?



$$\left.\begin{array}{l} p \subset \alpha \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n_\alpha} \\ p \subset \beta \Rightarrow \vec{p} \perp \vec{n_\beta}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{p} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta}$$

$\Rightarrow$ СЕЋИ ЋЕ СЕ КАДА $\vec{n_\alpha}$ и $\vec{n_\beta}$ НИСУ ЛИНЕАРНО ЗАВИСНИ.

↳ БИЋЕ ЛИНЕАРНО ЗАВИСНИ КАДА СУ РАВНИ ПАРАЛЕЛНЕ, ТЈ. ТАДА СЕ НЕЋЕ СЕЋИ

↳ ПРЕСЕК ДВЕ РАВНИ МОЖЕ БИТИ ЧИТАВА РАВАН ИЛИ ПРАВА (РАВАН ЈЕ БЕСКОНАЧНА, НИЈЕ КОНАЧНА)

[ПРИМЕР 4]: ПРАВУ $p: x - z = 0,\ 2x - y + 1 = 0$ ЗАПИСАТИ ПАРАМЕТАРСКИ.

I НАЧИН:

$\alpha: x - z = 0 \quad \vec{n_\alpha}(1, 0, -1)$

$\beta: 2x - y + 1 \quad \vec{n_\beta}(2, -1, 0)$

$$\vec{p} = \vec{n_\alpha} \times \vec{n_\beta} = \left|\begin{array}{ccc|cc} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} & \vec{e_1} & \vec{e_2} \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right| = -2\vec{e_2} - \vec{e_3} - \vec{e_1} = (-1, -2, -1) \sim (1, 2, 1)$$

$P(0, 1, 0)$ } РЕШИМО СИСТЕМ РАВНИ

$$p: \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}$$

II НАЧИН:

$\alpha: x - z = 0 \Rightarrow z = x$

$\beta: 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$

$$\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t + 1 \\ z = t \end{array}, \quad t \in \mathbb{R}$$

[Пример 5]: Праву $p: x = t+4,\ y = -t+1,\ z = 3t,\ t \in \mathbb{R}$ записати као пресек две равни.

$$p: \begin{aligned} x &= t+4 \\ y &= -t+1 \\ z &= 3t \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

– прво ћемо је записати у канонском облику

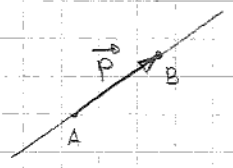
$$\boxed{\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}}$$

↳ јер из њега лако можемо прочитати две равни

$$\left.\begin{aligned} \alpha &: \frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow x+y-5=0 \\ \beta &: \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3} \Rightarrow 3y+z-3=0 \end{aligned}\right\}$$

и добили смо пресек две равни

[Пример 6]: Одредити једначину праве која садржи тачке $A(1,2,3)$ и $B(3,2,1)$.



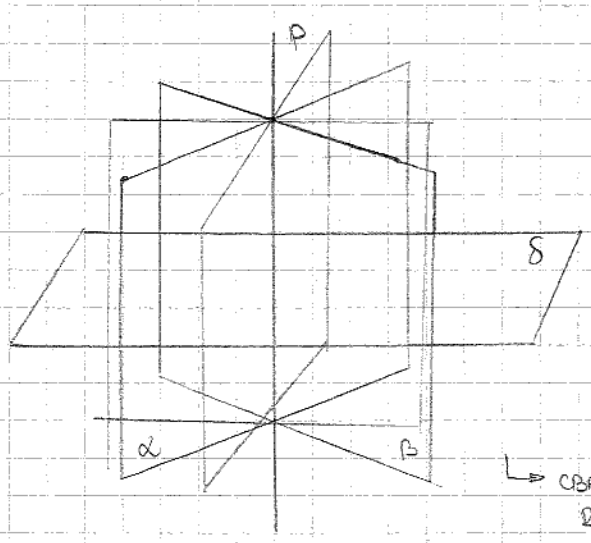
$p: A + t\overrightarrow{AB},\ t \in \mathbb{R}$ $\qquad \overrightarrow{AB}(2,0,-2)$

$$\begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 2 \\ z &= 3-2t \end{aligned}, \quad t \in \mathbb{R}$$

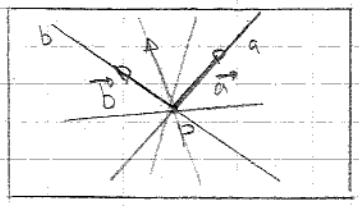
Прамен равни

[Теорема 1.1]: Скуп свих равни које садрже праву $p = \alpha \cap \beta$ је дат једначином:

$$\gamma: \lambda_1(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda_2(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \text{ за } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$



$\delta \perp p$



↳ сваку раван можемо да представимо преко две фиксиране

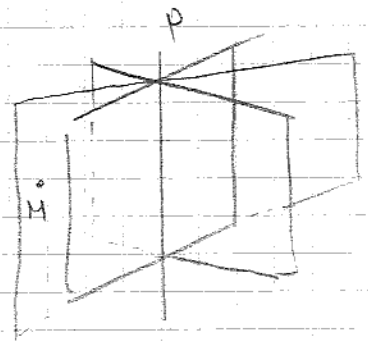
↳ Ако знамо да β није раван која нас занима можемо да изоставимо један реални параметар $\gamma_\lambda: \alpha + \lambda\beta,\ \lambda \in \mathbb{R}$

↳ $\beta \notin \gamma_\lambda$

[Пример 7]: Одредити једначину равни која садржи тачку $M(1,4,-2)$ и праву $p: x-y-1=0,\ z-2x=0$.

$M(1,4,-2)$

$p: \begin{array}{l} x-y-1=0 \ \} \alpha \\ z-2x=0 \ \} \beta \end{array}$



} од свих равни које секу праву p желимо да одредимо баш ону која садржи праву p

1) $\gamma_\lambda: \ x-y-1+\lambda(z-2x)=0$

2) $M \in \beta$?
$-2-2\cdot 1=-4\neq 0 \Rightarrow M \notin p$ ✓

↳ можемо да искористимо само један параметар

3) $M \in \gamma_\lambda$ за неку вредност λ

$\gamma_\lambda: (1-2\lambda)x-y+\lambda z-1=0$

$(1-2\lambda)\cdot 1-4+\lambda(-2)-1=0$
$-4\lambda-4=0$
$\lambda=-1$

$\boxed{\gamma_{-1}: 3x-y-z-1=0}$

II начин:

$\gamma_{\lambda_1,\lambda_2}: \lambda_1(x-y-1)+\lambda_2(z-2x)=0$

$(\lambda_1-2\lambda_2)x-\lambda_1 y+\lambda_2 z-\lambda_1=0$

$(\lambda_1-2\lambda_2)\cdot 1-\lambda_1\cdot 4+\lambda_2(-2)-\lambda_1=0$

$-4\lambda_1-4\lambda_2=0$

$\Rightarrow \lambda_1=-\lambda_2\neq 0$

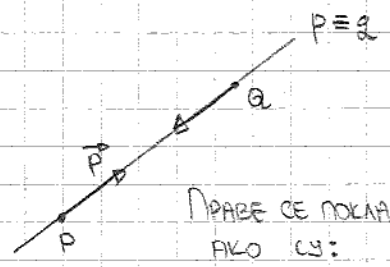
$\gamma_{\lambda_1,-\lambda_1}: \lambda_1(x-y-1)-\lambda_1(z-2x)=0 \quad /:\lambda_1$

$x-y-1-z-2x=0$

$3x-y-z-1=0$

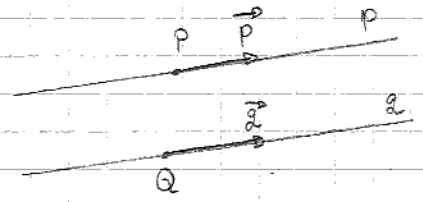
Положаји

МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈИ ДВЕ ПРАВЕ



Праве се поклапају ако су:

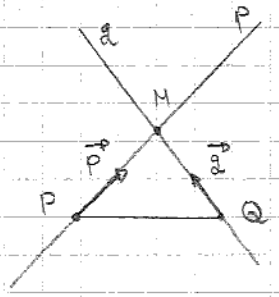
$\vec{p}$ $\vec{q}$ $\overrightarrow{PQ}$ колинеарни



Праве су паралелне ако су:

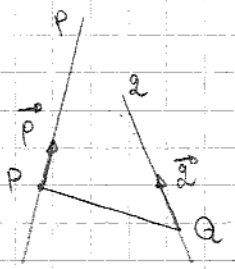
$\vec{p}$ $\vec{q}$ колинеарни

$\overrightarrow{PQ}$ неколинеаран



Праве се секу ако су:

$\vec{p}$ $\vec{q}$ $\overrightarrow{PQ}$ компланарни (мешовити производ)



Праве су мимоилазне ако су:

$\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}$ некомпланарни

↳ Овоје критеријум да се провери да ли су праве мимоилазне, ово није деф. мимоилазних правих. Деф би била: Да су то праве за које не постоје раван које их садржи.

[Пример 8]: Одредити међусобни положај правих:

a) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-19}{-5} = \frac{z-2}{1}$, $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{4}$

b) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$, $q: 2x = y$, $3x = z$

c) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$, $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$

d) $p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-1}$, $q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+7}{2}$

a) $\vec{p}(1,5,1)$ $\vec{q}(2,3,4)$

$P(2,19,2)$ $Q(1,0,-2)$

$\overrightarrow{PQ} = (-1,-19,-4)$

- $\vec{p}$ и $\vec{q}$ очигледно нису пропорционални
  ⇒ праве се или секу или мимоилазе

$$[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -19 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -16 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 21 & 1 \\ 2 & 35 & 4 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{vmatrix} = 21 \cdot 4 - 35 = 84 - 35 = 49 \neq 0$$

⇒ p и q су мимоилазне

b) $\vec{p}(1,0,-1)$ $\quad x = t$ $\quad \vec{q}(1,2,3)$

$y = 2t$

$P(2,2,2)$ $\quad z = 3t$, $t \in \mathbb{R}$ $\quad Q(0,0,0)$

$\overrightarrow{PQ}(-2,-2,-2)$

$$[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

} ПРВА И ТРЕЋА ВРСТА ПРОПОРЦИОНАЛНЕ АУТОМАТСКИ ЈЕ 0

$\Rightarrow$ $\vec{p}$ и $\vec{q}$ СЕ СЕКУ

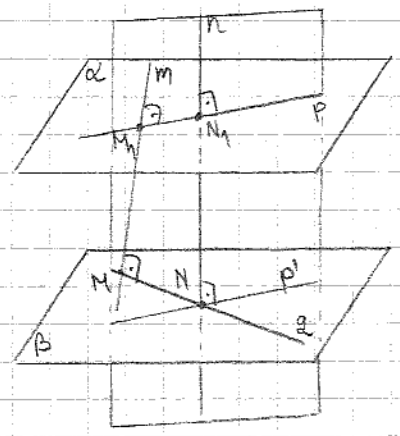
c) ОЧИГЛЕДНО СУ $\vec{p}$ и $\vec{q}$ ИСТИ, ТАКОЂЕ ЋЕ И $\overrightarrow{PQ}$ БИТИ ИСТИ

$\Rightarrow$ ПРАВЕ СЕ ПОКЛАПАЈУ

d) $\Rightarrow$ ПРАВЕ СУ ПАРАЛЕЛНЕ

МИМОИЛАЗНЕ ПРАВЕ

[ТЕОРЕМА 2.1]: Мимоилазне праве p и q имају јединствену <u>заједничку нормалу</u>, тј. праву која сече обе праве и нормална је на њих.



$\exists! n : n \perp p, q$

Доказ:

1) Прво треба доказати егзистенцију (постојање)

$\alpha \supset p$, $\beta \supset q$ $\quad \alpha \parallel \beta$ ОЗАКВЕ РАВНИ СУ ЈЕДИНСТВЕНЕ

} СЛЕДИ ИЗ АКСИОМА ЕУКЛИДСКОГ ПРОСТОРА (БЕЗ ДОКАЗА)

$\rightarrow$ Конструисаћемо раван $\gamma \supset p$, $\gamma \perp \alpha, \beta$

$n : N \in n \perp p$

$p' = \beta \cap \gamma = proj_\beta p$ } А ТО ЈЕ ПРОЈЕКЦИЈА ПРАВЕ p НА РАВАН β

$n \perp p \Rightarrow n \perp p'$

$\Rightarrow p \parallel p'$

n ЈЕ ЗАЈЕДНИЧКА НОРМАЛА p, p'

Тврдимо $p' \cap q = \{N\}$ } p' и q МОРАЈУ ДА СЕ СЕКУ

$\Rightarrow n \in \gamma$

2) Јединственост

Пс. да су n, m заједничке нормале

$\Rightarrow MNN_1M_1$ – правоугаоник

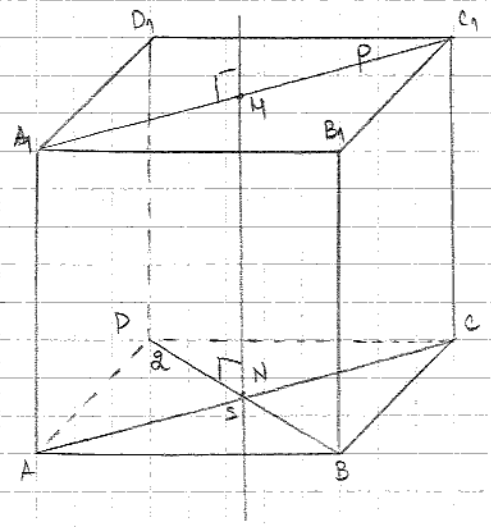
$\Rightarrow \underset{q}{MN} \parallel \underset{p}{M_1N_1}$ ↯

$\gamma \perp \beta$

$\Rightarrow n \perp$ сваку праву у β кроз N

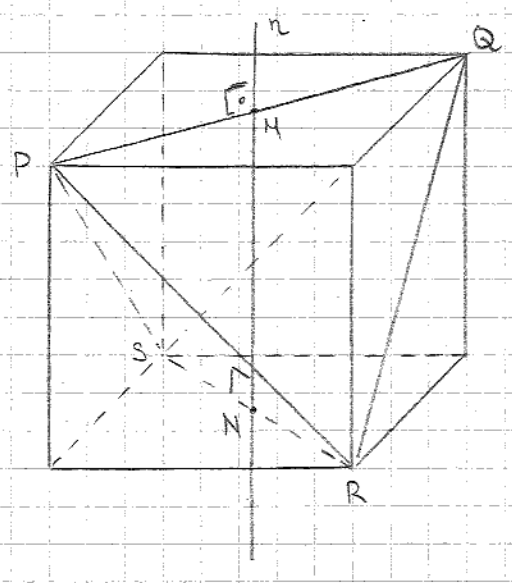
$\Rightarrow n \perp q$

[Пример 9]: Дијагонале наспрамних површи коцке су мимоилазне праве, а њихова заједничка нормала је одређена средиштима тих дијагонала.



} Коцка. Ова слика представља у потпуности претходни доказ у специјалном случају.

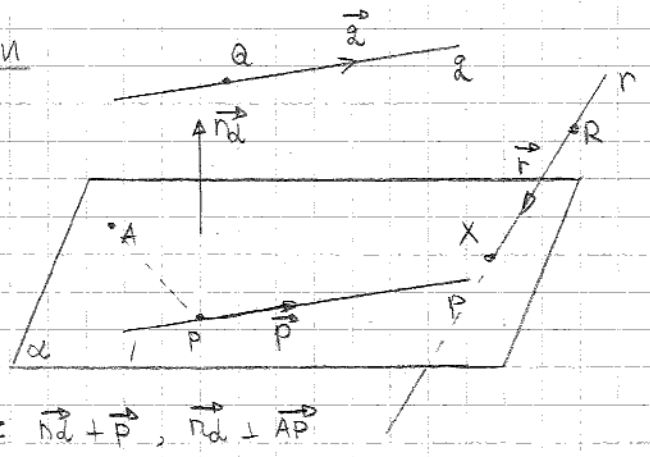
[Пример 10]: Шта је заједничка нормала мимоилазних ивица PQ и RS правилног тетраедра PQRS?



} Тетраедар. Заједничка нормала је права која спаја средиште страница PQ и RS.

МЕЂУСОБНИ ПОЛОЖАЈ ПРАВЕ И РАВНИ

Права p и раван α могу да:
- се секу
- буду паралелне
- права припада равни



$p \subset \alpha: \vec{n_\alpha} \perp \vec{p}, \ \vec{n_\alpha} \perp \vec{AP}$

$q \parallel \alpha: \vec{n_\alpha} \perp \vec{q}, \ \vec{n_\alpha} \not\perp \vec{AQ}$

$r \cap \alpha = \{X\}: \vec{n_\alpha} \not\perp \vec{r}$

→ продор праве кроз раван

[Пример 11]: Одредити међусобни положај праве $p: \frac{x+4}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ и равни $\alpha: x-2y+5z-1=0$

$\vec{p}(0,-1,1)$ $P(-4,0,1)$

$\vec{n_\alpha}(1,-2,5)$ $A(1,0,0)$

$\vec{p} \circ \vec{n_\alpha} = 0+2+5=7 \neq 0 \Rightarrow p \cap \alpha = \{M\}$

$M \in p \Rightarrow M = M(t_0) = P + t_0\vec{p}$ (за тачно одређено t)

$$\left.\begin{aligned} x &= -4 \\ y &= -t_0 \\ z &= 1+t_0 \end{aligned}\right\}$$ убацимо у раван α

$\alpha: x-2y+5z-1=0$

$-4-2(-t_0)+5(1+t_0)-1=0$

$7t_0=0$

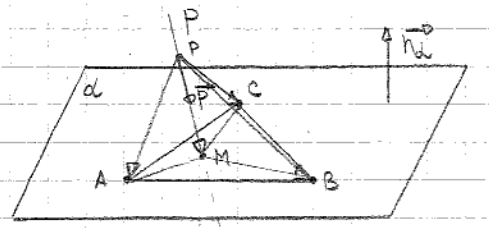
$t_0=0$ } добијемо баш тачку P

$p \cap \alpha = \{P\}$

5. предавање

Троугао у простору

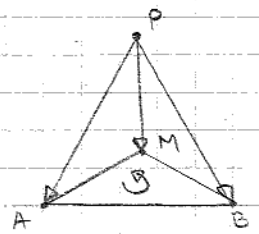
Продор праве кроз троугао



$p \cap \alpha = \{M\}$? } радили на прошлом предавању

$M \in \text{int}\,\Delta ABC$? } преко оријентација

, али уместо да радимо ово, можемо да заменимо са једним критеријумом:



} Оријентација свих вектора има везе са оријентацијом базе ABM

↳ Тако да уместо да посматрамо оријентацију троуглова у равни ми ћемо посматрати оријентацију тетраедара у простору

$$\boxed{M \in \text{int}\,\Delta ABC \iff \text{sgn}[\vec{PA}, \vec{PB}, \overset{\vec{p}}{\vec{PM}}] = \text{sgn}[\vec{PB}, \vec{PC}, \overset{\vec{p}}{\vec{PM}}] = \text{sgn}[\vec{PC}, \vec{PA}, \overset{\vec{p}}{\vec{PM}}]}$$

↳ пошто нам није дата тачка M, вектор $\vec{PM}$ ћемо заменити вектором $\vec{p}$

Како бисмо добили координате тачке M?

$$\left.\begin{aligned} M \in \alpha &\Rightarrow \vec{AM} \perp \vec{n_\alpha} \\ A,B,C \in \alpha &\Rightarrow \vec{AB}, \vec{AC} \perp \vec{n_\alpha} \end{aligned}\right\} (1)$$

$M \in p \Rightarrow M = P + t\vec{p} \Rightarrow \vec{PM} = t\vec{p}$ } (2)

$\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}$ су компланарни

$$\Rightarrow 0 = [\vec{AM}, \vec{AB}, \vec{AC}] = [\vec{PM}-\vec{PA}, \vec{PB}-\vec{PA}, \vec{PC}-\vec{PA}]$$

} Ако у мешовитом производу имате вектор два пута исти, мп. је 0.

$$= [\vec{PM}, \vec{PB}, \vec{PC}] + [\vec{PM}, \vec{PB}, -\vec{PA}] + [\vec{PM}, -\vec{PA}, \vec{PC}] + [-\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}]$$

} они чланови који нису 0

$$= [\vec{PM}, \vec{PB}, \vec{PC}] + [\vec{PM}, \vec{PA}, \vec{PB}] + [\vec{PM}, \vec{PC}, \vec{PA}] - [\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}]$$

} $\vec{PM} = t\vec{p}$

$$\Rightarrow [\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}] = t\left([\vec{p}, \vec{PB}, \vec{PC}] + [\vec{p}, \vec{PA}, \vec{PB}] + [\vec{p}, \vec{PC}, \vec{PA}]\right)$$

$$= t\left([\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] + [\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] + [\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}]\right)$$

} циклично померање не мења ништа

$$t = \frac{[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}]}{[\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] + [\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] + [\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}]}$$

[Пример 1]: Да ли права $p: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2}$ сече троугао ABC, $A(2,4,6)$, $B(-4,2,0)$, $C(6,4,-2)$?

$P(1,0,-1)$ $\vec{p}(-1,3,2)$

$\vec{PA}(1,4,7)$
$\vec{PB}(-5,2,1)$
$\vec{PC}(5,4,-1)$

$$[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{(-3)}{=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 9 \\ 0 & -13 & -9 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ -13 & -9 \end{vmatrix} = -9(-7+13) = -54 < 0$$

$$[\vec{PB}, \vec{PC}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6(-10+1) = -54 < 0$$

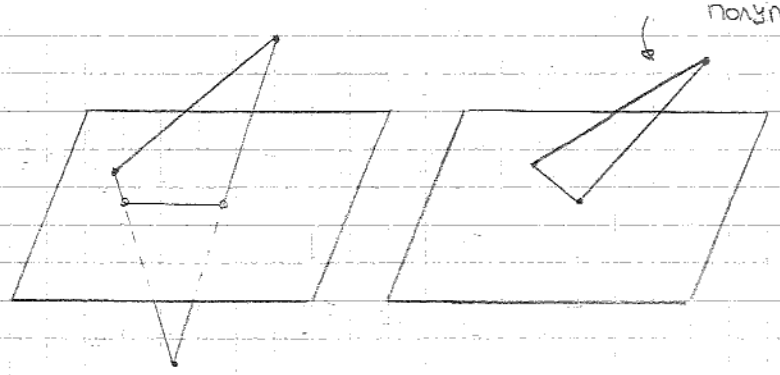
$$[\vec{PC}, \vec{PA}, \vec{p}] = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 19 & 9 \\ 1 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 19 & 9 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -9(19-7) = -108 < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p \cap \Delta ABC = \{X\}, \quad X \in \operatorname{int} \Delta ABC}$$

$$[\vec{PA}, \vec{PB}, \vec{PC}] = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -6 \cdot 36 = -216$$

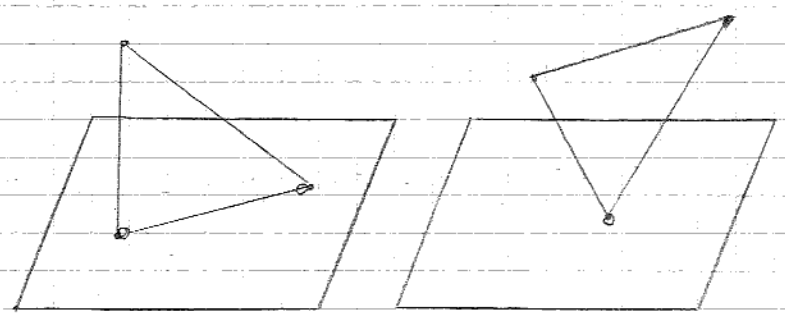
$$t = \frac{-216}{-54-54-108} = \frac{-216}{-216} = 1 \Rightarrow X = P + \vec{p} \Rightarrow \boxed{X = (0,3,1)}$$

ПРЕСЕК ТРОУГЛА И РАВНИ



Прво проверимо у ком полупростору се налазе тачке троугла.

Домаћи: пресек два троугла



Растојања и углови

РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД ПРАВЕ

[Теорема 2.1]: Растојање тачке M од праве p задате тачком P и вектором правца $\vec{p}$ дато је формулом:

$$d = \frac{|\vec{p} \times \vec{PM}|}{|\vec{p}|}$$

} Приметимо да је ово равањски проблем, јер увек постоји раван у простору која садржи неку праву и тачку.

↳ ово смо већ доказали пре

[Пример 2]: Одредити растојање тачке $M(1,0,-1)$ од праве $p: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$

$P(0,-1,0)$ $\vec{p}(1,1,2)$

$\Rightarrow \vec{PM}(1,1,-1)$

$|\vec{p}| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$

$$\vec{PM} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{e_1} - 3\vec{e_2} = (3,-3,0) = 3(1,-1,0)$$

$|\vec{PM} \times \vec{p}| = 3\sqrt{2}$ $\qquad \frac{3}{2} < \sqrt{3} < 2$

$d(M,p) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$

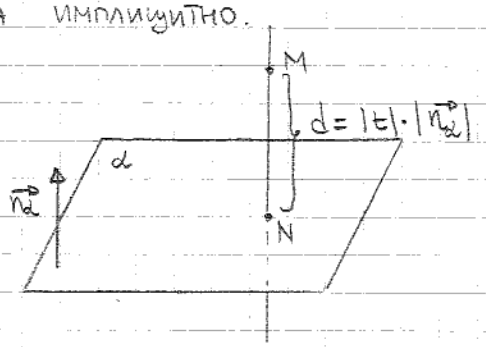
РАСТОЈАЊЕ ТАЧКЕ ОД РАВНИ

[Теорема 2.2]: Растојање тачке $M(x_0, y_0, z_0)$ од равни $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ дато је формулом:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

↳ и ову теорему смо већ доказали. Ово је идентичан доказ (само овај пут у простору) разматрању растојање тачке од праве у равни ако је права дата имплицитно.

↳ Зашто?



Доказ иде идентично, само имамо координату више.

[Пример 3]: Одредити растојање тачке $M(1,0,-1)$ од равни $\alpha: x + y - 4z = 0$.

$$d(M, \alpha) = \frac{|1 + 0 - 4(-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2}} = \frac{5}{\sqrt{18}} = \frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$$

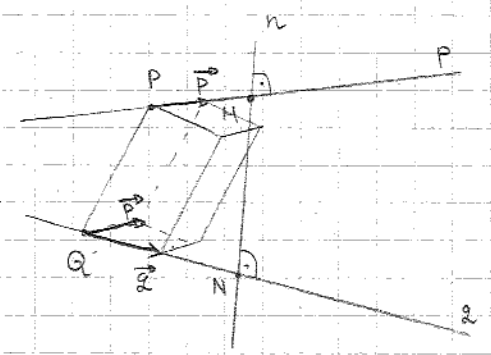
$$3 < 3\sqrt{2} < \frac{9}{2}$$

$$1 < \frac{10}{9} < \frac{5}{3\sqrt{2}} < \frac{5}{3\sqrt{2}} < \frac{5}{3}$$

РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ МИМОИЛАЗНИХ ПРАВИХ

[Теорема 2.3]: Растојање између мимоилазних правих p и q дато је формулом:

$$d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}$$



$$d(p, q) = |MN| = h_{\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}}$$

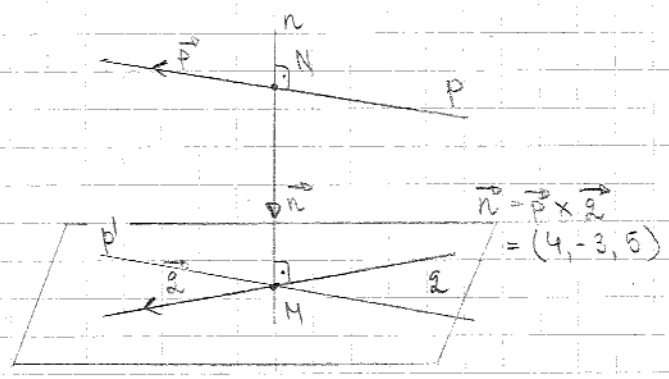
$$= \frac{V_\phi}{B}$$

$$= \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}$$

} то је уствари висина паралелопипеда са слике

[Пример 4]: Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих

$p: \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{0}$ $\qquad q: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-15}{-5}$



$\vec{p}(3,4,0)$ $\qquad P(6,5,0)$

$PQ(-7,-1,15)$

$\vec{q}(4,-3,-5)$ $\qquad Q(-1,4,15)$

$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} = (4,-3,5)$

$$d(p,q) = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}$$

$$\vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = -20\vec{e_1} + 15\vec{e_2} - 25\vec{e_3} = -5(4,-3,5)$$

координате PQ само можемо да заменимо са $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ и $\vec{e_3}$

$$|\vec{p} \times \vec{q}| = 5 \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = 5\sqrt{50} = 25\sqrt{2}$$

$$[\vec{p}, \vec{q}, \vec{PQ}] = (\vec{p} \times \vec{q}) \circ \vec{PQ} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & -5 \\ -7 & -1 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -1 & 15 \\ 4 & -3 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -5(4,-3,-5) \circ (-7,-1,15)$$

$$= -5(-28+3+75) = -5 \cdot 50 = -250$$

$p' = proj_\alpha p$

$q \subset \alpha \perp n \qquad \vec{n} = \vec{n_\alpha}$

$M = p' \cap q$ $\qquad$ овако ћемо на вежбама

$$d(p,q) = \frac{|-250|}{25\sqrt{2}} = \frac{250}{25\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

II начин:

$M \in q: \quad M = Q + t\vec{q}$

$N \in p: \quad N = P + s\vec{p}$

$\vec{MN} \sim \vec{n}$ } колинеарни

$d(M,N) = d(p,q) = 5\sqrt{2}$

$d(M,N) = |\vec{MN}|$

$$\vec{MN} = P + s\vec{p} - Q - t \cdot \vec{q} = \vec{QP} + s\vec{p} - t\vec{q}$$

$$= (7,1,-15) + s(3,4,0) - t(4,-3,-5)$$

$$= (7+3s-4t,\ 1+4s+3t,\ -15+5t)$$

$$|\vec{MN}|^2 = (7+3s-4t)^2 + (1+4s+3t)^2 + (-15+5t)^2$$

$= \ldots$ квадратна ј-на по s, t

↳ професорка предлаже I начин

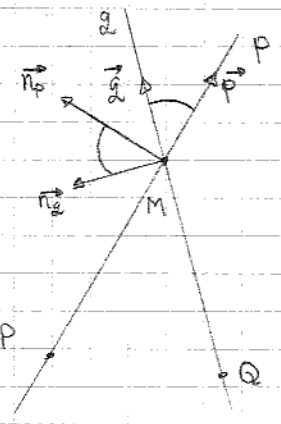
УГЛОВИ ИЗМЕЂУ ПРАВИХ И РАВНИ

→ Угао између правих p и q је оштар угао између њихових нормалних вектора.

$$\sphericalangle(p,q) = \text{оштар}\,\sphericalangle(p,q) = \arccos\frac{|\vec{p}\circ\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|}$$

← апсолутна вредност

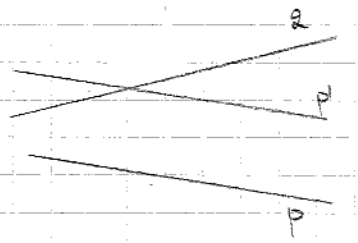
↳ она се побрине да добијемо оштар угао



$$\sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \sphericalangle(\vec{n_p},\vec{n_q})$$

↑ углови са нормалним ($\perp$) крацима

↳ у формули можемо користити и векторе правца и векторе нормале



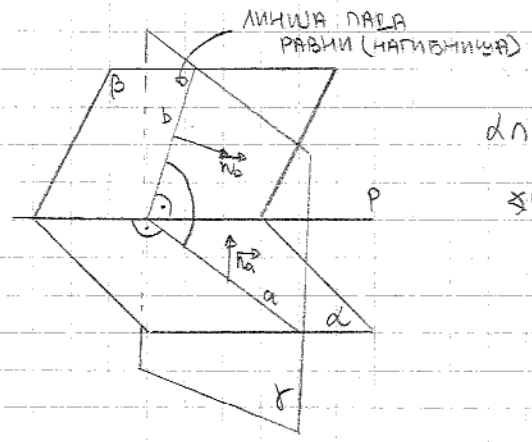
p, q – мимоилазне

$$\sphericalangle(p,q) := \sphericalangle(\vec{p},\vec{q}) = \sphericalangle(p',q)$$

↳ немају природно угао, али када се спомене угао између мимоилазних правих мисли се на угао између њихових вектора правца

→ Угао између равни α и β је оштар угао између правих a и b.

$$\sphericalangle(a,b) = \arccos\frac{|\vec{n_a}\circ\vec{n_b}|}{|\vec{n_a}|\cdot|\vec{n_b}|}$$

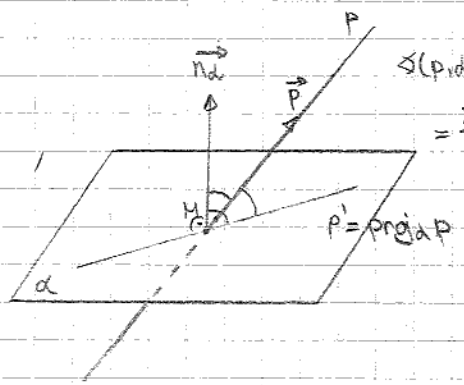


$\alpha\cap\beta = p \quad \gamma\perp p$

$$\sphericalangle(\alpha,\beta) = \sphericalangle(a,b) = \sphericalangle(\overbrace{\vec{n_a},\vec{n_b}}^{\text{налазе се у }\gamma}) = \sphericalangle(\vec{n_\alpha},\vec{n_\beta})$$

→ Угао између праве p и равни α је угао између праве p и њене нормалне пројекције p' на раван α.

$$\sphericalangle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\vec{p}\circ\vec{n_\alpha}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{n_\alpha}|}$$



$$\sphericalangle(p,\alpha) := \sphericalangle(p,p') = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle(\vec{n_\alpha},\vec{p})$$

[Пример 5]: Одредити тачку продора праве $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha: 3x+y+5z-7=0$. Колики угао права p заклапа са равни α?

$\vec{p}(3,2,-4)$

$\vec{n_\alpha}(3,1,5)$

$$\vec{n_\alpha} \circ \vec{p} = 3\cdot 3 + 2\cdot 1 - 4\cdot 5 = -9 \neq 0 \Rightarrow p \cap \alpha = \{X\}$$

$$\sphericalangle(p,\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{|\vec{n_\alpha}\circ\vec{p}|}{|\vec{n_\alpha}||\vec{p}|} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{9}{\sqrt{59}\sqrt{35}}$$

[Пример 6]: домаћи

Афине трансформације

Дефиниција афиног пресликавања

[Дефиниција 1.1]: Нека је $\bar{f}: V \to V$ линеарно пресликавање векторског простора који је придружен простору тачака E. Афино пресликавање $f: E \to E$ је пресликавање тачака које је индуковано пресликавањем $\bar{f}$ вектора у смислу да је:

$$f(M) = M',\ f(N) = N' \iff \bar{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M'N'}$$

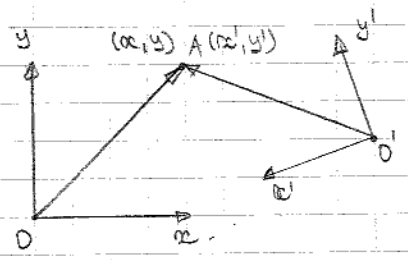
Пасивно и активно гледиште

← кад причамо о трансформацији координата

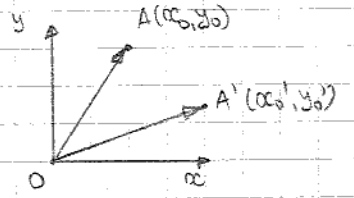
Пасивно гледиште је када објекти у простору мирују, а мења се координатни систем.

Активно гледиште је када фиксирано координатни систем.

↳ код афиних пресликавања увек мислимо на активно.



↳ пасивно



Трансформације координата

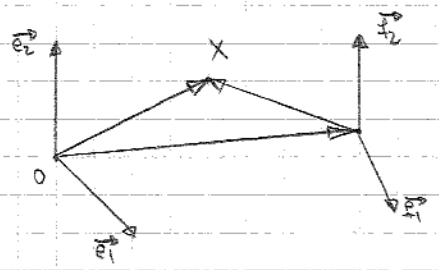
Трансформације координата вектора

Ако су $e = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ стара база, а $f = (\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n})$ нова база. Из старе у нову базу прелазимо матрицом преласка $C = C_{e \to f}$. Матрица преласка је матрица чије су колоне координате вектора нове базе f у старој бази e, редом.

$$[\vec{v}]_e = C[\vec{v}]_f$$

ТРАНСФОРМАЦИЈА КООРДИНАТА ТАЧАКА

У овом случају осим преласка базе имамо и транслацију координатног почетка.



старе координате

вектор транслације координатног почетка

$$x = Cx' + a$$

матрица преласка

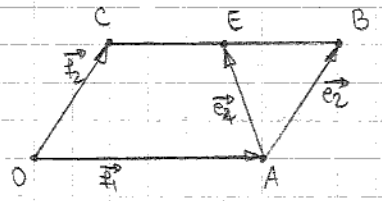
нове координате

$$x = [X]_{Oe} = (x_1, x_2)^T \qquad C = C_{e\to f}$$

$$x' = [X]_{Of} = (x_1', x_2')^T \qquad a = [O]_{Oe} = (a_1, a_2)^T$$

координате новог координатног почетка у старој бази

[Пример 1]: Одредити координате темена паралелограма у старом реперу Ae и новом реперу Of. Одредити везу између координата.



OABC – паралелограм

$E = S(BC)$

$Ae, \quad e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}) = (\vec{AE}, \vec{AB})$

$Of, \quad f = (\vec{f_1}, \vec{f_2}) = (\vec{OA}, \vec{OC})$

$$C_{e\to f} = ([\vec{f_1}]_e, [\vec{f_2}]_e)$$

$$\vec{f_1} = \vec{OA} = \vec{CB} = 2\cdot\vec{EB} = 2(\vec{AB} - \vec{AE}) = -2\vec{e_1} + 2\vec{e_2}$$

$$\vec{f_2} = \vec{OC} = \vec{AB} = \vec{e_2}$$

$$C_{e\to f} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = [O]_{Ae} = [\vec{AO}]_e = [-\vec{f_1}]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x = C_{e\to f}\, x' + a$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= -2x' + 2 \\ y &= 2x' + y' - 2 \end{aligned}}$$

$$[O]_{Of} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[A]_{Of} = [\vec{OA}]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[B]_{Of} = [\vec{OB}]_f = [\vec{OA} + \vec{OC}]_f = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[C]_{Of} = [\vec{OC}]_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[O]_{Ae} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

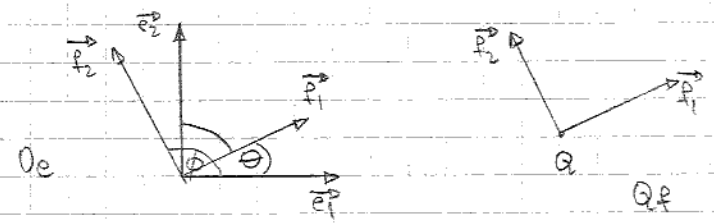
$$[A]_{Ae} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[B]_{Ae} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [AB]_e$$

$$[C]_{Ae} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ТРАНСФОРМАЦИЈЕ ОРТОНОРМИРАНИХ РЕПЕРА РАВНИ

e, f – ОРТОНОРМИРАНЕ БАЗЕ (*)



$\vec{f_1} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2} \quad / \circ\vec{e_1} \quad / \circ\vec{e_2}$ } ПРЕД. КАО ЛИНЕАРНУ КОМБ.

$\underbrace{\cos\theta = \vec{f_1}\circ\vec{e_1}}_{\text{СЕТИМО СЕ}} = \alpha\cancelto{1}{\vec{e_1}\circ\vec{e_1}} + \beta\cancelto{0}{\vec{e_2}\circ\vec{e_1}} = \alpha$

$\vec{f_1}\circ\vec{e_1} = \cancelto{1}{|\vec{f_1}|}\cancelto{1}{|\vec{e_1}|}\cos\theta$

ЈЕР СУ ЈЕДИНИЧНИ (*)

$$C_{e\to f} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ } МАТРИЦА РОТАЦИЈЕ

$\beta = \vec{f_1}\circ\vec{e_2} = \alpha\,\vec{e_1}\circ\vec{e_2} + \beta\,\vec{e_2}\circ\vec{e_2} = \beta$

$\cos\measuredangle(\vec{f_1},\vec{e_2}) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

Приметимо:

$\to \det C_{e\to f} = 1 > 0$

↳ АКО ЈЕ ДЕТЕРМИНАНТА МАТРИЦЕ ПРЕЛАСКА ВЕЋА ОД 0, ЗНАЧИ ДА СМО У БАЗИ ИСТЕ ОРИЈЕНТАЦИЈЕ (ОВО ВАЖИ У ПРОСТОРУ СВАКЕ ДИМЕНЗИЈЕ)

$\vec{f_2} = \gamma\vec{e_1} + \delta\vec{e_2}$

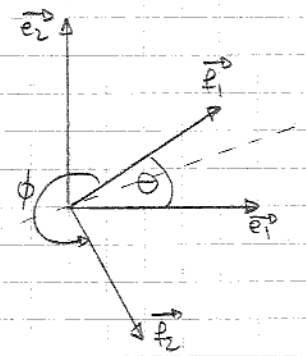
$\gamma = \cos\phi = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$

$\delta = \sin\phi = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$

↳ РАЧУН ИСТИ, УГЛОВИ РАЗЛИЧИТИ

→ ОРТОГОНАЛНА МАТРИЦА (МАТРИЦА ЧИЈЕ СУ КОЛОНЕ МЕЂУСОБНО ОРТОГОНАЛНИ ВЕКТОРИ)

↳ $C^{-1} = C^T$!



$$C_{e\to f} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$ } МАТРИЦА РЕФЛЕКСИЈЕ

$\vec{f_2} = \cos\phi\,\vec{e_1} + \sin\phi\,\vec{e_2}$

$\to \det C_{e\to f} = -1 < 0$

→ ОРТОНОРМИРАНА МАТРИЦА

↳ $C^{-1} = C^T$

$\phi = \frac{3\pi}{2} + \theta$,

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$

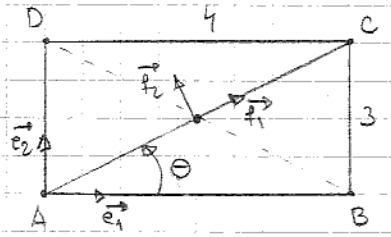
Финално:

$$(1)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

↳ ВЕКТОР ТРАНСЛАЦИЈЕ КООРДИНАТНОГ ПОЧЕТКА $\quad a = [Q]_{O_e}$

[Пример 2]: Одредити везу координата као и координате темена правоугаоника у новом реперу.

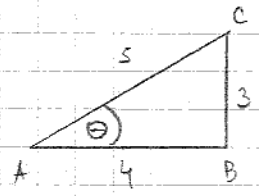


A_e, $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$

S_f, $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2})$

1) $C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$

↳ СА СЛИКЕ ВИДИМО ДА СЕ ДЕСИЛА РОТАЦИЈА



$\cos\theta = 4/5$

$\sin\theta = 3/5$

$$q = [S]_{A_e} = [\vec{AS}]_e = [\tfrac{1}{2}\vec{AC}]_e$$

$$= [\tfrac{1}{2}\vec{AB} + \tfrac{1}{2}\vec{AD}]_e$$

$$= [\tfrac{1}{2}\cdot 4\vec{e_1} + \tfrac{1}{2}\cdot 3\vec{e_2}]_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$x = 4/5\, x' - 3/5\, y' + 2$

$y = 3/5\, x' + 4/5\, y' + 3/2$

$x = C_{e\to f}\, x' + q$

$x - q = C_{e\to f}\, x'$

$x' = C_{f\to e}\, x - C_{f\to e}\, q$

$[A]_{A_e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad [A]_{S_f} =$

$[B]_{A_e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad [B]_{S_f} =$

$[C]_{A_e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad [C]_{S_f} =$

$[D]_{A_e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad [D]_{S_f} =$

$$C^{-1}_{e\to f} = C_{f\to e} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = C^T_{e\to f}$$

↳ ОСТАТАК ЗА ДОМАЋИ

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$C_{f\to e}\, q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \ldots$$

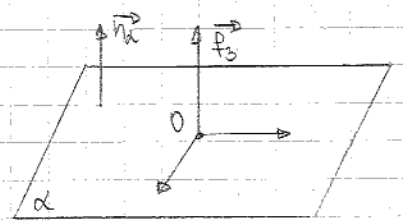
Трансформације у $\mathbb{E}^3$

Избор координатног система за раван

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0 \longrightarrow \alpha' : z' = 0$$

светски координатни систем (WCS) — сопствени координатни систем (UCS)

Како формирамо UCS?



$$\vec{f_3} = \frac{1}{|\vec{n_\alpha}|}\vec{n_\alpha}$$

$\vec{f_2} : \vec{f_2} \perp \vec{f_3}, |\vec{f_2}| = 1$

↳ произвољно

$\vec{f_1} = \vec{f_2} \times \vec{f_3}$

↳ мора баш овај редослед

$(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ – ортонормирана база + орјентације

За $\vec{f_3}$ узимамо вектор нормале равни па њен јединичан вектор. За $\vec{f_2}$ произвољно одаберемо, али да буде ортогонални на $\vec{f_3}$ и да буде јединичан. За $\vec{f_1}$ узимамо $\vec{f_2} \times \vec{f_3}$

↳ И то баш у том редоследу да бисмо добили базу + орјентације.

[Пример 3]: Одредити ортонормирани координатни систем (x', y', z') у односу на раван $\alpha : x - y - 2 = 0$ и написати везу тих координата са координатама (x, y, z).

$\vec{n_\alpha}(1, -1, 0)$

$\vec{f_3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\vec{f_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$\vec{f_1}(0, 0, -1)$ } узимамо да је $C_{e\to f}$ рефлексија па узимамо -1 да остане + орјентација, да $\det C_{e\to f} > 0$

$$C_{e\to f} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$O(2, 0, 0)$ } узмемо једну тачку која задовољава ј-ну

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z') + 2$

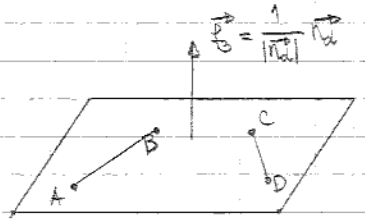
$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - z')$

$z = -x'$

6. ПРЕДАВАЊЕ

[Пример 4]: Одредити пресек дужи [AB]: A(1,0,-2), B(3,-4,0) и [CD]: C(1,1,1), D(2,-1,2).
(Остављен за домаћи, у наставку илуструјућа решења)

A(1,0,-2)
B(3,-4,0)
C(1,1,1)
D(2,-1,2)



} лоше постављен задатак :(

$[\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{AC}] =$

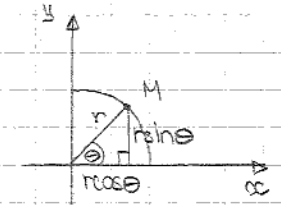
$$\vec{AB} \times \vec{CD} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow AB, CD \text{ су колинеарне}$$

- испитати распоред тачака

Координатни системи

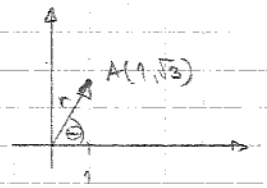
Поларне координате

- Уместо стандардних координата (x, y) све мери тако што мери растојање од координатног почетка (r) и мери угао који вектор положаја тачке заклапа са позитивним делом стандардне x-осе



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}}$$

Пример: $A(1, \sqrt{3})$ – стандардне координате



$\vec{OA} = (1, \sqrt{3})$

$r = |\vec{OA}| = 2$

$\theta = \arccos \frac{\vec{OA} \circ \vec{e_1}}{|\vec{OA}| \cdot |\vec{e_1}|}$ $(1,0)$ } нема апс. заграда јер $\theta [0, 2\pi)$

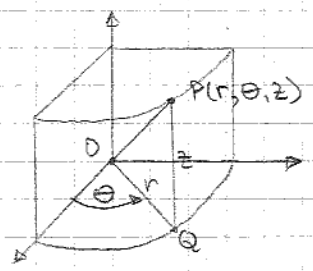
$= \arccos \frac{1}{2}$ } arccos враћа вредности од $(0, \pi)$ па водити рачуна у ком квадранту су координате

$= \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow A(2, \frac{\pi}{3})$

Цилиндричке координате

↳ слаба поларне преко у простор



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}}$$

Елиптички координатни систем

↳ Уместо кругова на x, y равни имамо елиптички координатни систем (растојање није константно

- ово је информативно, неће питати
- слика на презентацији } (*)

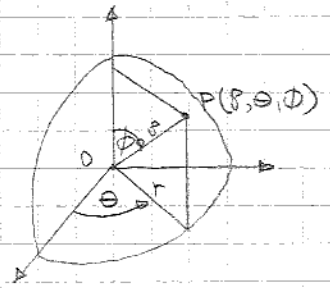
Параболички координатни систем

↳ координатне криве су параболе

- ванни (*)

СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ

– ми заправо меримо растојање од центра сфере и меримо редом углове. Први угао је угао који пројекција вектора положаја на x,y раван заклапа са позитивним делом x-осе, а други угао је угао који вектор положаја тачке заклапа са z-осом.



$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\phi \\ y &= r\sin\theta\cos\phi \\ z &= r\cos\phi \end{aligned}}$$

Афина пресликавања, Трансформације у $\mathbb{E}^2$

↳ сада причамо о активном гледишту

АФИНА ПРЕСЛИКАВАЊА У РАВНИ

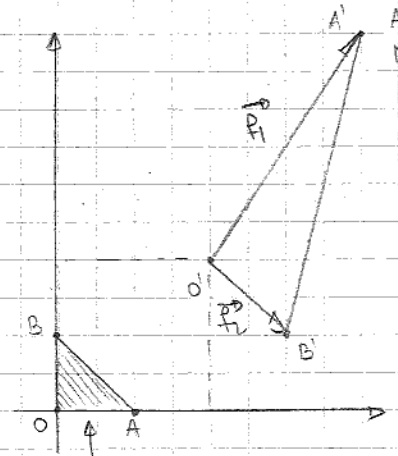
[Дефиниција 2.1]: Афино пресликавање у равни $\mathbb{E}^2$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0$$

слике базних вектора (колоне су слике нових базних вектора у старој бази)

слика координатног почетка

[Пример 1]: Одредити формуле афиног пресликавања f равни које тачке $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$ пресликава редом у тачке $O'(2,2)$, $A'(4,5)$, $B'(3,1)$.



$f: \Delta OAB \to \Delta O'A'B'$

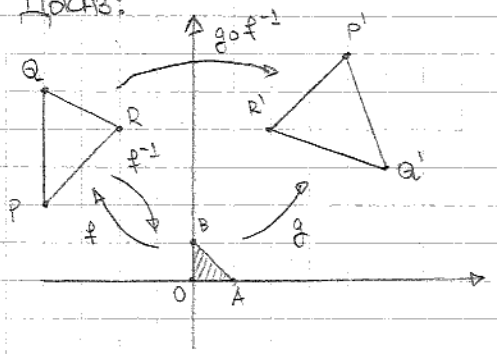
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$[\vec{O'A'}]_e$ $[\vec{O'B'}]_e$ $[O']_{O_e} = [OO']_e$

ОСОБИНЕ АФИНИХ ПРЕСЛИКАВАЊА

[Теорема 2.1]: Постоји јединствено афино пресликавање равни које пресликава три неколинеарне тачке P, Q, R у три неколинеарне тачке P', Q', R', редом.

Доказ:



$f: OAB \to PQR$

$g: OAB \to P'Q'R'$

$\Rightarrow g \circ f^{-1}: PQR \to P'Q'R'$

[Теорема 2.2]: (Особине афиних пресликавања равни)

- ↳ пресликавају праве у праве (следи директно из деф, афино пресликавање је индуковано линеарним пресликавањем)
- ↳ чувају размеру колинеарних дужи
- ↳ чувају паралелност правих
- ↳ однос површина слике и оригинала једнак је: $\frac{P(\mathcal{F}')}{P(\mathcal{F})} = |\det(a_{ij})|$
- ↳ пресликавања за која је $\det(a_{ij}) > 0$ чувају оријентацију, а за која је $\det(a_{ij}) < 0$ мењају оријентацију равни

[Пример 2]: Дате су тачке $A(-1,1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$: $A'(4,5)$, $B'(8,7)$, $C'(6,9)$, $D'(2,7)$.

а) Одредити ј-не афиног пресликавања које пресликава квадрат $ABCD$ у паралелограм $A'B'C'D'$.

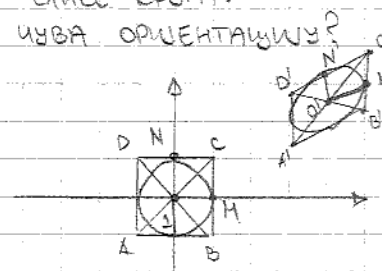
~~б) Одредити ј-ну слике круга уписаног у квадрат. Која је то крива?~~

в) Колика је површина слике круга?

г) Да ли пресликавање чува оријентацију?

$A(-1,1)$	$A'(4,5)$
$B(1,-1)$	$B'(8,7)$
$C(1,1)$	$C'(6,9)$
$D(-1,1)$	$D'(2,7)$

↳ довољне су 3 тачке



круг се слика у елипсу

} средиште се слика у средиште } последица 2 особине

$O(0,0) \to O' = S(A'C') = (5,7)$

$S(BC) = M(1,0) \to M' = S(B'C') = (7,8)$

$S(DC) = N(0,1) \to N' = S(C'D') = (4,8)$

а) $f: ABCD \to A'B'C'D'$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{[\vec{OM}]\ [\vec{ON}]} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= 2x - y + 5 \\ y' &= x + y + 7 \end{aligned}}$$

г) $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3 > 0$

$\Rightarrow$ чува се

в) $P_{елипсе} = |\det(a_{ij})| \cdot P_{круга} = 3 \cdot \pi$

ПРЕДСТАВЉАЊЕ АФИНИХ ПРЕСЛИКАВАЊА МАТРИЦАМА

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{ЛИНЕАРНИ ДЕО}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{\text{ТРАНСЛАТОРНИ ДЕО}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A_b} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

} ПРОШИРИЋЕМО ПРЕСЛИКАВАЊЕ И ПРЕДСТАВИЋЕМО ГА САМО ЈЕДНОМ МАТРИЦОМ КАКО БИСМО ИМАЛИ МАЊЕ РАЧУНА

Доказ:

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + b_1 \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + b_2 \end{aligned}$$

, ДОДАМО Ј-НУ $1 = 1$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ПРЕПОЗНАЋЕМО ПО ОВОЈ ВРСТИ

[Теорема 2.3]: Производ матрица A_b одговара композицији афиних пресликавања.

Последица: афина пресликавања не комутирају!

Доказ:

ПРИМЕТИМО

$f: x' = Ax + b \qquad A_b = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ ЗА f^{-1} ОДГ. МАТРИЦА ЋЕ БИТИ A_b^{-1}

$g: x'' = Cx + d \qquad C_d = \left(\begin{array}{c|c} C & d \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x') = Cx' + d = C(Ax + b) + d = \underbrace{(CA)x}_{\text{ЛИНЕАРНИ ДЕО}} + \underbrace{Cb + d}_{\text{ТРАНСЛАТОРНИ ДЕО}}$$

$$C_d \cdot A_b = \left(\begin{array}{c|c} C & d \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \overset{\text{ЛИНЕАРНИ ДЕО}}{CA} & \overset{\text{ТРАНСЛАТОРНИ ДЕО}}{Cb + d} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

ТРАНСЛАЦИЈА

Транслација $T_{\vec{b}}$ за вектор $\vec{b}(b_1, b_2)$ дата је формулама: $\quad x' = x + b_1$, $y' = y + b_2$,

или у матричном облику:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

↳ $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}} = T_{\vec{v}+\vec{u}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$ (ТРАНСЛАЦИЈЕ КОМУТИРАЈУ)

↳ $T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}$

↳ $T_{\vec{0}} = id$

[Пример3]: Погледати презентацију. Нема рачуна само пример.

РОТАЦИЈА

Ротација око координатног почетка, за угао $\phi \in [0, 2\pi)$:

$$R_\phi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ротација око произвољне тачке $Q(q_1, q_2)$ за угао ϕ:

$$R_{Q,\phi} = T_{\overrightarrow{OQ}} \circ R_\phi \circ T_{\overrightarrow{QO}}$$

[Пример4]: Одредити 3x3 матрицу ротације око тачке $S(1,-2)$ за угао од $\frac{2\pi}{3}$, као и формуле тог пресликавања. У коју тачку се пресликава координатни почетак при овој ротацији?

$S(1,2)$ $\quad \phi = \frac{2\pi}{3}$

$T_{\overrightarrow{OS}} \circ R_\phi \circ T_{\overrightarrow{SO}}$ } композиција пресликавања

$T_{\overrightarrow{OS}} \circ R_\phi \circ T_{\overrightarrow{SO}}$ } матрично множење

} WolframAlpha: RotationTransform[2Pi/3, {1,-2}]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}-\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & -3-\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{2}$ $-\sqrt{3}/2$
$\sqrt{3}/2$ $-\frac{1}{2}$

→ слика координатног почетка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

МАТРИЦА РОТАЦИЈЕ

$$R_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

[Теорема2.4]: Особине матрице ротације:

↳ $(R_\phi)^{-1} = R_{-\phi} = (R_\phi)^T$

↳ $\det R_\phi = 1$

↳ $R_\phi R_\theta = R_{\phi+\theta} = R_{\theta+\phi}$ } комутативно

Покажимо 3. особину:

композиција ф-ја је асоцијативна

$$R_{A,\phi} \circ R_{A,\theta} = (T_{\overrightarrow{OA}} \circ R_\phi \circ \boxed{T_{\overrightarrow{AO}}) \circ (T_{\overrightarrow{OA}}} \circ R_\theta \circ T_{\overrightarrow{AO}}) = T_{\overrightarrow{OA}} \circ \underbrace{R_\phi \circ R_\theta}_{R_{\phi+\theta}} \circ T_{\overrightarrow{AO}}$$

↳ $T_{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}} = T_{\vec{0}} = id$

$= R_{A,\phi+\theta}$

РЕФЛЕКСИЈА У ОДНОСУ НА ПРАВУ

Рефлексија у односу на праву p_0 кроз координатни почетак, која гради угао $\frac{\phi}{2}$ са x-осом:

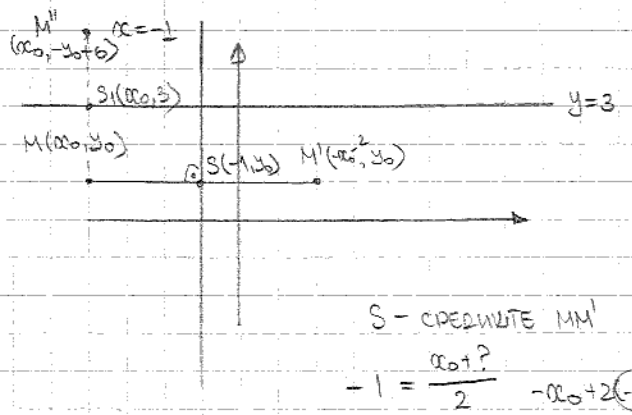
$$S_{p_0} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ } ОЗНАКА МОЖЕ БИТИ И S_ϕ

Рефлексија у односу на произвољну праву $p \parallel p_0$:

$$S_p = T_{\overrightarrow{OQ}} \circ S_{p_0} \circ T_{\overrightarrow{QO}}$$

[Пример 5]: Одредити формуле рефлексије у односу на праву:

a) $x = -1$ b) $y = 3$ c) $4x - 3y + 6 = 0$



$p: x = -1$ $\quad S_p: \begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = y \end{cases}$ } ЧИТАМО ИЗ ТАЧАКА M и M'

$q: y = 3$ $\quad S_q: \begin{cases} x' = x \\ y' = -y + 6 \end{cases}$ } — " — M и M''

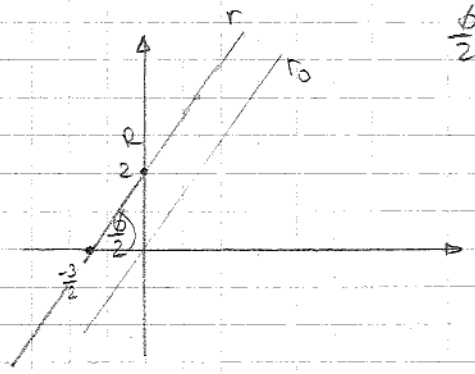
S – СРЕДИШТЕ MM'

const ИЗ $x = \text{const}$

$$-1 = \frac{x_0 + ?}{2} \qquad -x_0 + 2(-1)$$

↳ КАДА СУ У ПИТАЊУ ВЕРТИКАЛНА И ХОРИЗОНТАЛНА ОВАКО ЈЕ ЛАКШЕ

c) $r: 4x - 3y + 6 = 0$, $R(0,2) \in r$



$$\frac{\phi}{2} = \measuredangle(\vec{r}, \vec{e_1})$$

$$\cos^2\frac{\phi}{2} + \sin^2\frac{\phi}{2} = 1$$

$$\vec{r} = (3, 4)$$

$$\cos\frac{\phi}{2} = \frac{\vec{r_0}\,\vec{e_1}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{e_1}|} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\frac{\phi}{2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\phi = 2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} = \frac{24}{25}$$

$$\cos\phi = \cos^2\frac{\phi}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2} = \frac{9-16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$S_{r_0} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$$

$$S_r : T_{\overrightarrow{OR}} \circ S_{r_0} \circ T_{\overrightarrow{RO}}$$

$$T_{\overrightarrow{OR}} \cdot S_{r_0} \cdot T_{\overrightarrow{RO}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} & 0 \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} & -\frac{48}{25} \\ \frac{24}{25} & 7/25 & \frac{36}{25} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ } ПРОВЕРА: СВЕ ТАЧКЕ СА r МОРАЈУ БИТИ ФИКСНЕ

Другачији начин:

$$S_{r_0} = E - 2nn^T$$ } за вежбати

n - јединични вектор нормале на праву

МАТРИЦА РЕФЛЕКСИЈЕ

$$S_\phi := \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$

[Теорема 2.5]: Особине матрице рефлексије:

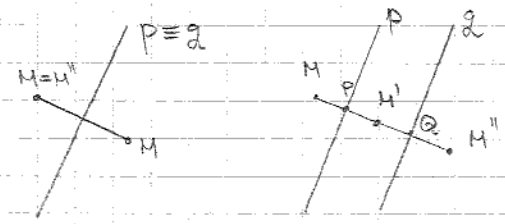
↳ $(S_\phi)^{-1} = (S_\phi)^T$

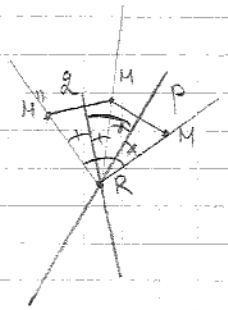
↳ $S_\phi^2 = id$ } оваква пресликавања називају се инволуције

↳ $\det S_\phi = -1$

↳ $S_\phi S_\theta = R_{\phi-\theta}$

Покажимо 4. особину:





$S_q \circ S_p = R_{R,2\measuredangle(p,q)}$

$S_q \circ S_p = id$ $\qquad$ $S_q \circ S_p = T_{2\overrightarrow{PQ}}$

↳ Рефлексије саме не чине групу. Међутим, ако посматрамо транслације, ротације и рефлексије све заједно, оне чине групу — група изометрија. (Јер чувају растојање)

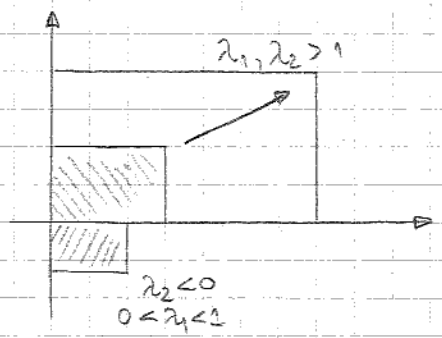
СКАЛИРАЊЕ

Скалирање у правцу координатних оса, са центром у координатном почетку и коефицијентима $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$:

$$H_{\lambda_1,\lambda_2} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

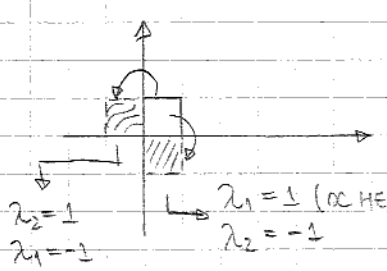
Скалирање са центром у произвољној тачки:

$$H_{\lambda_1,\lambda_2} = T_{\overrightarrow{OQ}} \circ H_{\lambda_1\lambda_2} \circ T_{\overrightarrow{QO}}$$



Примери:

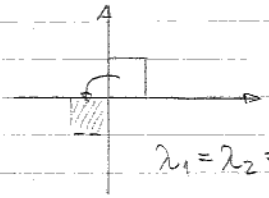
↳ За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање H_{λ_1,λ_2} рефлексија у односу на x-осу (y-осу)?



$\lambda_2 = 1$
$\lambda_1 = -1$

↳ $\lambda_1 = 1$ (x не мењано)
$\lambda_2 = -1$

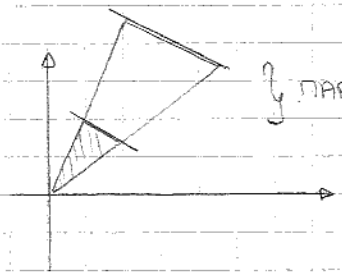
↳ За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање $H_{Q,\lambda_1,\lambda_2}$ централна рефлексија у односу на тачку Q?



$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

↳ За које вредности λ_1 и λ_2 је скалирање хомотетија? (сличност)

– ако $\lambda_1 = \lambda_2$



} паралелне

↳ сликано у њему сличну фигуру

↳ чува углове (у општем случају то није случај)

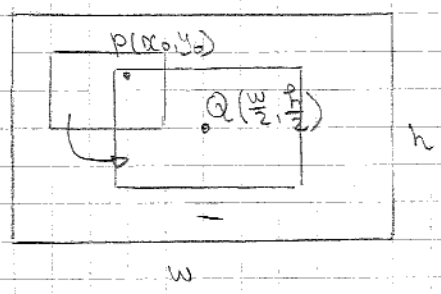
↳ ознака: H_λ

↳ Да ли скалирање чува однос ширине и дужине, углове? А хомотетија?

– скалирање не чува, а хомотетија чува

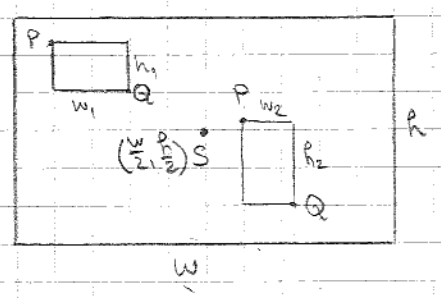
[Примерб]: Представити као афине трансформације следеће догађаје:

↳ „Zoom in": Кликом миша у тачки $P(x_0, y_0)$, слика се увећава λ пута, а тачка P постаје центар екрана резолуције $w \times h$.



$\boxed{\tau_{\overrightarrow{OQ}} \circ H_\lambda \circ \tau_{\overrightarrow{PO}}}$ } уместо да вратимо у P, вратимо у Q

↳ „Zoom to window": Миш је притиснут у тачки $P(x_0, y_0)$, а отпуштен у тачки $Q(x_1, y_1)$. Увећати прозор са дијагоналом PQ преко целог екрана. При томе водити рачуна да се увећана слика уклопи у екран или по ширини, или по висини у зависности од пропорција прозора. Сматрати да је екран резолуције $1920:1080 = 16:9$.



$w = x_Q - x_P$

$h = y_P - y_Q$

$C \to S$

$C = S(PQ)$

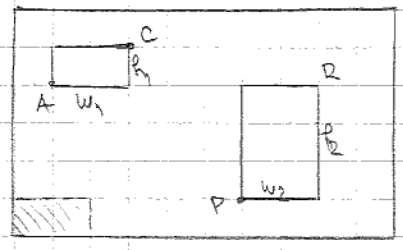
$\boxed{\tau_{\overrightarrow{OS}} \circ H_\lambda \circ \tau_{\overrightarrow{CO}}}$

$\lambda_1 = \frac{w_k}{w}$

$\lambda_2 = \frac{h_k}{h}$

$\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2\}$

↳ Пресликати прозор чије су лево-доње $A(a_1,a_2)$ и горње-десно теме $C(c_1,c_2)$ у прозор одређен дијагоналним теменима $P(p_1,p_2)$ и $R(r_1,r_2)$.



$$\boxed{\tau_{\overrightarrow{OP}} \circ H_{\lambda_1,\lambda_2} \circ \tau_{\overrightarrow{AO}}}$$

$$\lambda_1 = \frac{w_2}{w_1} = \frac{x_R - x_P}{x_C - x_A}$$

$$\lambda_2 = \frac{h_2}{h_1} = \frac{y_R - y_P}{y_C - y_A}$$

↳ „Pinch to zoom" – сами урадите

Смицање

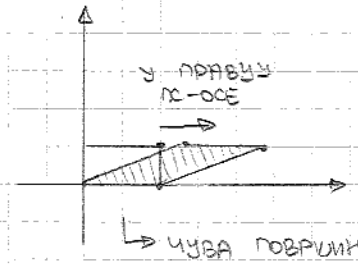
Смицање са коефицијентом λ у правцу

x-осе:

$$S_x(\lambda): \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

y-осе:

$$S_y(\lambda): \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



↳ чува површину

Реализација ротације помоћу смицања

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\cos\phi - 1}{\sin\phi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

} декомпозиција матрице ротације на три матрице смицања

↳ правимо мању грешку

+ слика на презентацији

Изометрије

[Дефиниција 2.2]: Пресликавања која чувају дужину у еуклидском простору $\mathbb{E}$ произвољне димензије називају се изометрије.
Изометрије које чувају оријентацију зову се кретања.

[Теорема 2.6]: Транслација, ротација око произвољне тачке и рефлексија у односу на произвољну праву су изометрије равни.

7. ПРЕДАВАЊЕ

Трансформације E^3

Афина пресликавања простора

Тачка $M(x,y,z)$ простора се пресликава у тачку $M'(x',y',z')$ по правилу:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) \neq 0$$

Пресликавање се представља 4x4 матрицом:

$$A_b := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Изометрије простора

[Теорема 1.1]: Свака изометрија простора E^n је афино пресликавање.

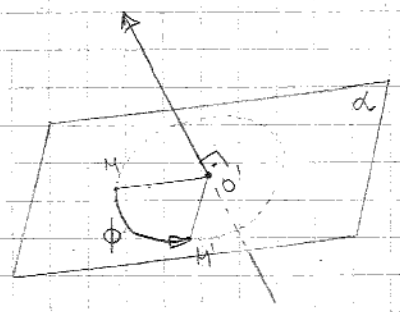
[Теорема 1.2]: Афино пресликавање f је изометрија ако $AA^T = A^TA = E$.
(Ако је линеарни део ортогонална матрица)

[Теорема 1.3]: Особине изометрија простора
Следећа тврђења су еквивалентна за $f: E^n \to E^n$:

- ↳ f је изометрија (чува дужине)
- ↳ f чува скаларни производ
- ↳ f пресликава ортонормирану базу у ортонормирану базу.

Ротације око праве у простору

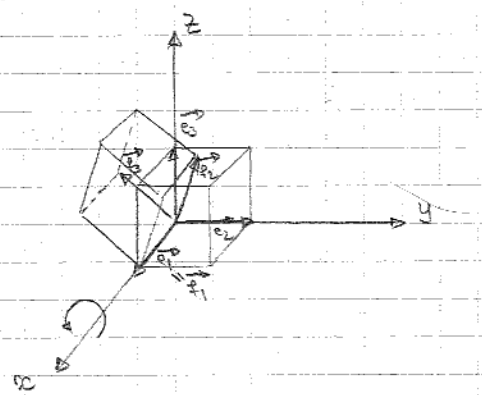
↳ обвија се у равни нормалној на праву која садржи тачку која ротира



Ротација око координатних оса

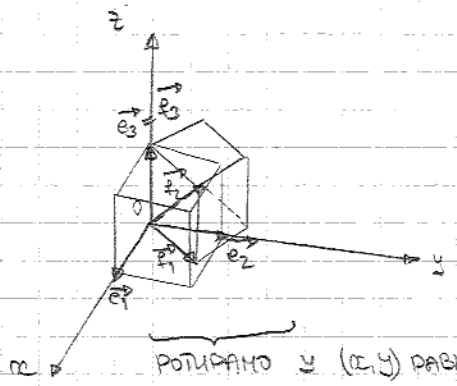
↳ ротирано увек у позитивном смеру

$$[R_{a_x}(\phi)]_e = R_x(\phi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

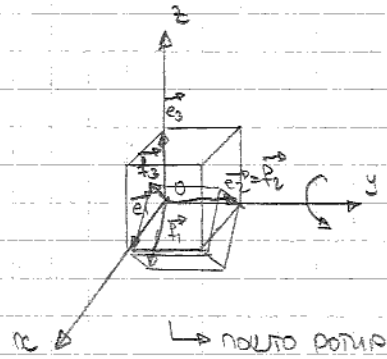


} ротирано у (z,y) равни

$$[\mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = \mathcal{R}_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

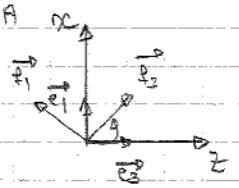


$$[\mathcal{R}_{Oy}(\theta)] = \mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$



РОТИРАМО У (z,x) РАВНИ

↳ ПОШТО РОТИРАМО ОД z КА x (У ПОЗИТИВНОМ СМЕРУ) $\vec{f_1}$ И $\vec{f_3}$ СУ ЗАМЕНИЛИ МЕСТА, ЗАТО ЈЕ МАТРИЦА ДРУГАЧИЈА



ФОРМУЛЕ РОТАЦИЈЕ ОКО ПРАВЕ У ПРОСТОРУ

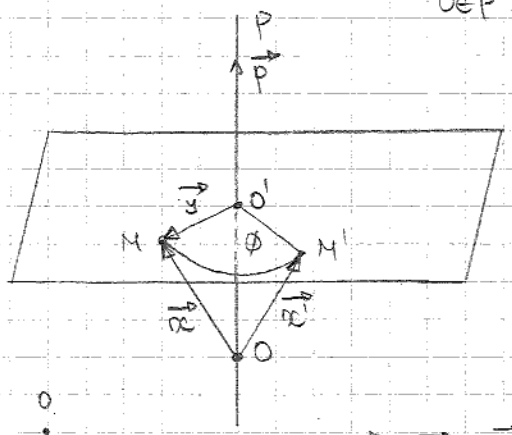
[ТЕОРЕМА 1.4]: (ФОРМУЛА РОДРИГЕЗА)
МАТРИЦА РОТАЦИЈЕ $[\mathcal{R}_p(\phi)]_e$, У СТАНДАРДНОЈ БАЗИ e, ЗА УГАО ϕ ОКО ПРАВЕ p_0 КОЈА САДРЖИ КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК ЈЕ:

$$[\mathcal{R}_{p_0}(\phi)]_e = pp^T + \cos\phi(E - pp^T) + \sin\phi\, p_\times,$$

ГДЕ ЈЕ $p_\times$ МАТРИЦА ВЕКТОРСКОГ МНОЖЕЊА ЈЕДИНИЧНИМ ВЕКТОРОМ p:

$$p_\times := \begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Доказ:

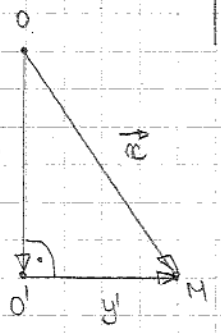


$O \in p$, $\vec{p}$ - ЈЕДИНИЧНИ ВЕКТОР ПРАВЕ p

$\alpha \perp p$, $O' = p \cap \alpha$

$\vec{OM} = \vec{x}$, $\vec{OM'} = x'$ - ВЕКТОРИ
x, x' - КООРДИНАТЕ ВЕКТОРА

$\vec{O'M} = \vec{y}$



$$\vec{x} = \vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} = \alpha\vec{p} + \vec{y} \qquad / \circ \vec{p}$$

$$\vec{x} \circ \vec{p} = \alpha \cancel{\vec{p} \circ \vec{p}}^{1} + \cancel{\vec{y} \circ \vec{p}}^{0}$$

} ЈЕР ЈЕ $\vec{p}$ ЈЕДИНИЧАН И ЈЕР СУ $\vec{y}$ И $\vec{p}$ ОРТОГОНАЛНИ

$$\alpha = \vec{x} \circ \vec{p} = \vec{p} \circ \vec{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = p^T x}$$

} ПРЕДСТАВИМО КООРДИНАТАМА, СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД ПРЕД. КАО МАТРИЧНО МНОЖЕЊЕ ТАКО ШТО ВРСТУ ПОМНОЖИМО КОЛОНОМ

$\vec{y} = \vec{x} - \alpha\vec{p} = \vec{x} - \vec{p}\alpha$ } ТАКОЂЕ И У ПРЕД. ПРЕКО КООРДИНАТА

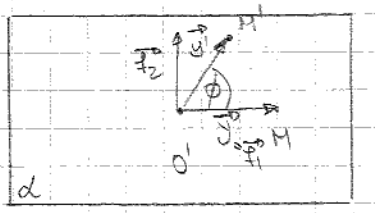
МАТРИЦЕ

$y = \vec{x} - p(p^T x) = x - (pp^T)x = Ex - (pp^T)x$

$\boxed{y = (E - pp^T)x}$ } ОРТОГОНАЛНА ДОПУНА

$\text{proj}_{\vec{p}}\vec{x} = \underbrace{pp^T x}_{\alpha\vec{p}}$ } ПРОЈЕКЦИЈА ВЕКТОРА $\vec{x}$ НА $\vec{p}$

– ВЕЗУЈЕМО СИСТЕМ ЗА РАВАН α



$\vec{f_3} = \vec{p}$

$\vec{f_1} = \vec{y}$

$\vec{f_2} = \vec{p} \times \vec{y}$

$= \vec{p} \times (\vec{x} - \alpha\vec{p})$

$= \vec{p} \times \vec{x}$

} НЕ ТРЕБА НОРМИРАНИ СИСТЕМ, САМО ОРТОГОНАЛАН.
ЗАШТО?
↳ КАД РОТИРАМО ТАЧКУ ЖЕЛИМО ДА ЗАДРЖИМО РАСТОЈАЊЕ ОКО КОЈЕ РОТИРАМО

$P_x = \begin{pmatrix} 0 & p_3 & -p_2 \\ -p_3 & 0 & p_1 \\ p_2 & -p_1 & 0 \end{pmatrix}$

↓

МАТРИЦА × ВЕКТОРОМ $\vec{p}$

$\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$

$\vec{y'} = \cos\phi\,\vec{f_1} + \sin\phi\,\vec{f_2}$ } РОТАЦИЈА У РАВНИ

$\vec{x'} = \vec{OO'} + \vec{O'M'} = \alpha\vec{p} + \vec{y'}$

$x' = pp^T x + \cos\phi(E - pp^T)x + \sin\phi\, P_x x$

$$\boxed{x' = \underbrace{(pp^T + \cos\phi(E - pp^T) + \sin\phi\, P_x)}_{\text{МАТРИЦА РОТАЦИЈЕ}}x}$$

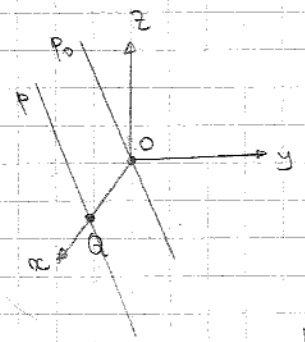
□

РОТАЦИЈА ОКО ПРОИЗВОЉНЕ ПРАВЕ

Ротација око произвољне праве $p \parallel p_0$, $P \in p$:

$$R_p(\phi) = T_{\vec{OP}} \circ R_{p_0}(\phi) \circ T_{\vec{PO}}$$

[Пример 1]: Одредити формуле ротације за угао $\phi = \frac{3\pi}{2}$ око праве p у простору која садржи тачку $Q(1,0,0)$ и има вектор правца $\vec{p} = (1,2,2)$.



$p_0 \parallel p$, $O \in p_0$

$R_{p,\phi} = T_{\vec{OQ}} \circ R_{p_0,\phi} \circ T_{\vec{QO}}$

$\phi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\phi = 0$, $\sin\phi = -1$

$R_{p_0,\phi} = pp^T - P_x$

$pp^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$P_x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$R_{p_0,\phi} = \begin{pmatrix} 1/9 & -4/9 & 8/9 \\ -4/9 & 4/9 & 1/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

$$R_{p,\frac{3\pi}{2}} = T_{\overrightarrow{OQ}} \circ R_{p_0,\frac{3\pi}{2}} \circ T_{\overrightarrow{QO}}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1/9 & -4/9 & 8/9 & 0 \\ -4/9 & 4/9 & 1/9 & 0 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1/9 & -4/9 & 8/9 & 8/9 \\ -4/9 & 4/9 & 1/9 & 4/9 \\ -4/9 & 7/9 & 4/9 & +4/9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$x' = \frac{1}{9}(x - 4y + 8z + 8)$$

$$y' = \frac{1}{9}(-4x + 4y + z + 4)$$

$$z' = \frac{1}{9}(-4x + 7y + 4z + 4)$$

Провера: p - фиксна права

$Q \to Q$

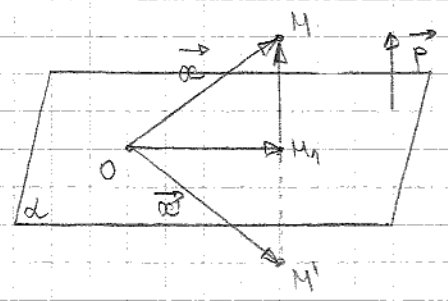
$Q + p \to Q + p$

РЕФЛЕКСИЈА У ОДНОСУ НА РАВАН

[Теорема 1.5]: Матрица рефлексије $[S_\alpha]_e$, у стандардној бази e, у односу на раван α која садржи координатни почетак O, и чији јединични нормални вектор има координата p, је дата са:

$$[S_\alpha]_e = E - 2pp^T$$

Доказ:



$$\overrightarrow{M_1M} = \mathrm{proj}_{\vec{p}}\,\vec{x} = pp^T x$$

$$\vec{x'} = \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}$$

$$= \overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MM_1}$$

$$\boxed{\vec{x'} = (E - 2pp^T)x}$$

$\square$

$\overrightarrow{OM_1}$ = пројекција x' на α

Ако раван $\beta \parallel \alpha$ не садржи координатни почетак, него неку тачку B, тада се рефракција S_β представља са:

$$S_\beta = T_{\overrightarrow{OB}} \circ S_\alpha \circ T_{\overrightarrow{BO}}$$

[Пример 2]: Одредити формуле рефлексије у односу на раван $\alpha: 2x - y + 2z = 0$.

$$\vec{n_\alpha}(2,-1,2) \Rightarrow \vec{p} = \frac{1}{|\vec{n_\alpha}|}\vec{n_\alpha} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$S_\alpha = E - 2pp^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z)$$
$$y' = 1/9(4x + 7y + 4z)$$
$$z' = 1/9(-8x + 4y + z)$$

Провера: α мора бити фиксна

$\alpha \ni A(1,0,-1)$ $\quad A \to A$

ОЈЛЕРОВЕ ТЕОРЕМЕ

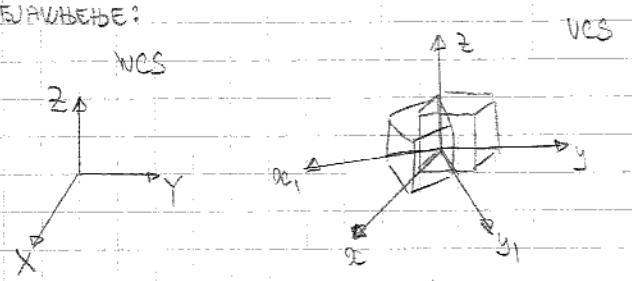
[Теорема 1.6]: (I Ојлерова) Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које има фиксну неку тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p која садржи O', за угао $\phi \in [0, 2\pi)$.

[Теорема 1.7]: (II Ојлерова) Свако кретање f простора $\mathbb{E}^3$ које чува координатни почетак може се представити као композиција три сопствене ротације око координатних оса:

$$f = \mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi),$$

где су $\psi, \phi \in [0, 2\pi)$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тзв. Ојлерови или Тејт-Брајанови углови.

Објашњење:



Прва ротација иде око z осе (она помера x и y осе и добијамо нове), друга ротација иде око y_1 осе (она помера z и x_1 осе и добијамо нове) и трећа ротација иде око x_2 осе.
↳ то су сопствене ротације

↳ компликована слика; биће нацртана до краја

↳ ротације се изводе у VCS-у

ОЈЛЕРОВИ УГЛОВИ

ψ – угао скретања ↔ (глава лево-десно)

θ – угао пропињања ↕ (глава доле-горе)

ϕ – угао заљања ↕ (сатињање главе али 360°)

ВЕЗА СОПСТВЕНИХ И СВЕТСКИХ РОТАЦИЈА

[Теорема 1.8]: (Веза сопствених и светских ротација)

$$[\mathcal{R}_{Ox_2}(\phi) \circ \mathcal{R}_{Oy_1}(\theta) \circ \mathcal{R}_{Oz}(\psi)]_e = [f]_e = \mathcal{R}_z(\psi)\,\mathcal{R}_y(\theta)\,\mathcal{R}_x(\phi)$$

Пројекције

ПАРАЛЕЛНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ

↳ У специјалном случају ⇒ ортогонално пројектовање (код су зраци пројектовања ортогонални на раван на коју пројектујемо)

↳ $\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^2$, погледати презентацију

↳ није афино пресликавање јер није бијекција

ЦЕНТРАЛНО ПРОЈЕКТОВАЊЕ

↳ $\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^2$

↳ погледати презентацију

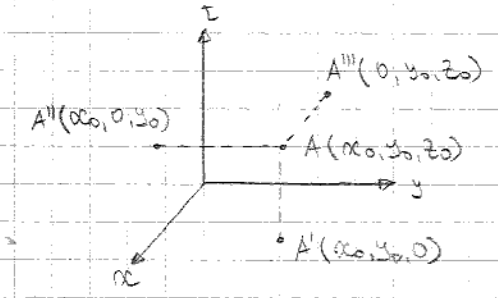
↳ f није бијекција (може се направити додавањем неке додатне информације)

↳ додавање инф. назива се метода пројектовања

↳ f није изометрија

↳ f чува колинеарност, паралелност код паралелног прој., углове не чува, а средишта дужи се чувају код паралелног прој.

ОРТОГОНАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА НА КООРДИНАТЕ РАВНИ

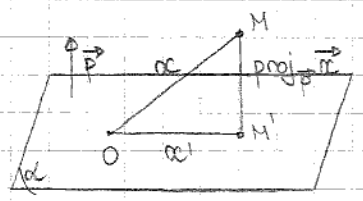


[Пример 3]: Одредити ортогоналну пројекцију квадрата ABCD, $A(1,2,-1)$, $B(-1,0,2)$, $D(3,1,1)$, на xy-раван.

$C(1,-1,3)$ $\quad C = -A + B + D$ јер $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$A'(1,2,0)$
$B'(-1,0,0)$
$C(1,-1,0)$ $\quad A'B'C'D'$ - паралелограм
$D'(3,1,0)$

ОРТОГОНАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА НА ПРОИЗВОЉНУ РАВАН



$x' = x - pp^T x$, $\vec{p}$ - јединични

$x' = (E - pp^T)x$

[Пример 4]: Одредити ортогоналну пројекцију квадрата из Примера 3 на раван $\alpha: 3y - z = 0$

$\vec{p} = \frac{1}{|\vec{n_\alpha}|}\vec{n_\alpha}$, $\vec{n_\alpha} = (0,3,-1)$

$\vec{p} = \frac{1}{\sqrt{10}}(0,3,-1)$

$pp^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

$E - pp^T = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

$x' = x$
$y' = \frac{1}{10}y + \frac{3}{10}z$
$z' = \frac{3}{10}y + \frac{9}{10}z = 3y'$

$A''(1, -1/10, -3/10)$
$B''(-1, 3/5, 9/5)$
$C''(1, 0, 0)$
$D''(3, 2/5, 6/5)$

Провера: $A''B''C''D''$ - паралелограм

[Пример 5]: Одредити централну пројекцију квадрата ABCD, $A(1,2,-2)$, $B(3,0,-2)$, $D(3,1,1)$, из тачке $S(0,0,6)$ на xy-раван.

$\alpha: z = 0$ $\quad$ ↳ одредити остале тачке сам/а

1) права SA: $x = 0 + t$
$y = 0 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$
$z = 6 - 8t$

централно пројектовање
↓
$A^c = SA \cap \alpha$

$z = 0 = 6 - 8t$
$\Rightarrow t = 3/4$

$A^c(3/4, 3/2, 0)$

ПРОЈЕКЦИЈА СФЕРЕ НА РАВАН

ШТА СВЕ МОЖЕ БИТИ ОРТОГОНАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА СФЕРЕ НА РАВАН?
↳ САМО КРУГ

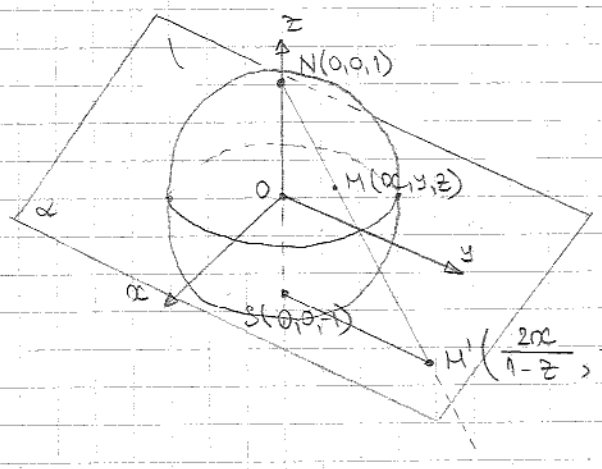
ШТА СВЕ МОЖЕ БИТИ ЦЕНТРАЛНА ПРОЈЕКЦИЈА СФЕРЕ НА РАВАН?
↳ КРУГ, ЕЛИПСА, ХИПЕРБОЛА, ПАРАБОЛА (СВЕ КРИВЕ ДРУГОГ РЕДА)

КАРТОГРАФСКЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ:
- КОНФОРМНЕ (ЧУВАЈУ УГЛОВЕ У ОДНОСУ НА ПАРАЛЕЛЕ И УПОРЕДНИКЕ)
- ЕКВИВАЛЕНТНЕ (ЧУВАЈУ ОДНОС ПОВРШИНА)
- ЕКВИДИСТАНТНЕ (ЧУВАЈУ РАСТОЈАЊЕ)

ПРИМЕРИ: МЕРКАТОРОВА, СТЕРЕОГРАФСКА, МОЛВЕИДЕ, ГЕОГРАФСКА

СТЕРЕОГРАФСКА ПРОЈЕКЦИЈА

- ИЗВОДИМО ФОРМУЛЕ НА ПРИМЕРУ ПРОЈЕКЦИЈЕ СЕВЕРНОГ ПОЛА НА РАВАН $z=-1$



$\alpha : z=-1$

$M' = NM \cap \alpha$

ПРАВА NM: $x = 0 + x_0 t$
$y = 0 + y_0 t$, $t \in \mathbb{R}$
$z = 1 + (z_0 - 1)t$

$-1 = z = 1 + (z_0-1)t$

$\Rightarrow t = \frac{2}{1-z_0}$

ОСОБИНЕ СТЕРЕОГРАФСКЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ

ШТА ЈЕ СЛИКА КРУГА КОЈИ ПРИПАДА СФЕРИ, А САДРЖИ СЕВЕРНИ ПОЛ?
↳ ПРОЈЕКЦИЈА ЋЕ БИТИ ПРАВА (ЈЕР N НЕМА ПРОЈЕКЦИЈУ)

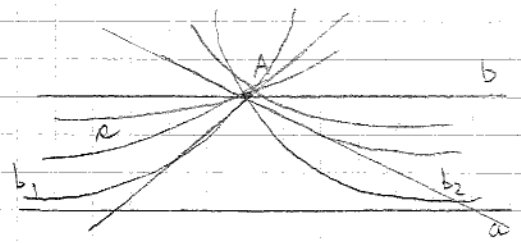
СПЕЦИЈАЛНО, У ШТА СЕ СЛИКАЈУ ПАРАЛЕЛЕ?
↳ У КРУГОВЕ

ШТА ЈЕ СЛИКА МЕРИДИЈАНА?
↳ ПРАВЕ

ДА ЛИ СЕ ЧУВАЈУ УГЛОВИ? ДА.
ДА ЛИ СЕ ЧУВА ОДНОС ПОВРШИНА? НЕ.
ДА ЛИ СЕ ЧУВАЈУ РАСТОЈАЊА ДУЖ МЕРИДИЈАНА? НЕ.
А ДУЖ ПАРАЛЕЛА? ЧУВАЈУ СЕ ОДНОСИ.

8. ПРЕДАВАЊЕ

Колико постоји правих које не секу праву a, а пролазе кроз тачку A?

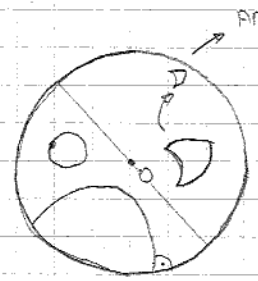


1 еуклидска геометрија $a \parallel b$

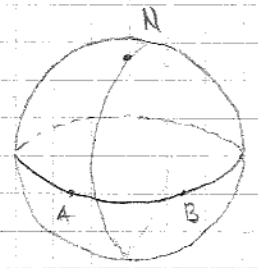
бар 2 хиперболичка геометрија
↳ b_1, b_2 паралелне са a
↳ c_k - хиперпаралелне са a

0 сферна | пројективна геометрија

Модел хиперболичке равни

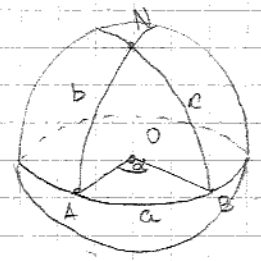


Праве ако садрже O су баш пречници, ако не садрже O онда су праве делови кругова такви да су ортогонални на апсолуту.
У хиперболичком простору не постоји хомотетија (сличност), свака сличност је подударност.



Праве на сфери су велики кругови (пресек сфере и равни која садржи центар сфере).

НЕКИ ИНТЕРЕСАНТНИ ПРОБЛЕМИ НА СФЕРИ



- Најкратки пут између две тачке на сфери

↳ $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$ } не мора да се зна напамет

[Пример 6]: Одредити сферно растојање између Москве (55°.8 N, 37°.6 E) и Хаване (23°.1 N, 82°.4 W). Узети да је Земља полупречника $r = 6340$ km.

$\alpha = 37{,}6^\circ + 82{,}4$

$b = 90^\circ - 55^\circ.8$
$c = 90^\circ - 23^\circ.1$ } да се налази на јужној полулопти било би $90^\circ +$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

$\arccos(\cos a) = 1.50476$

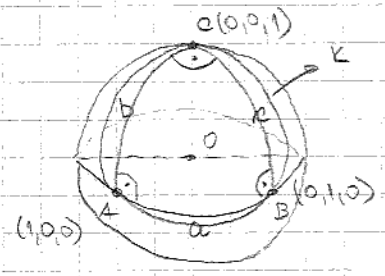
Решење $= 1.50476 \cdot 6340 = 9540{,}19$ km

↳ линија која спаја две тачке на сфери најкратким растојањем назива се геодезијска линија

b) Одредити растојање између стереографских пројекција Москве и Хаване на равни $z=0$ из јужног пола.

↳ за домаћи, има решење на сајту

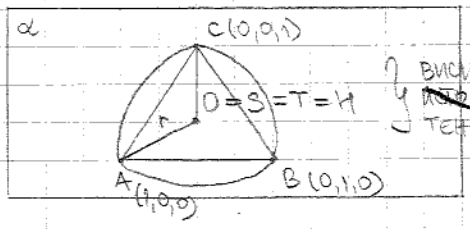
[Пример 7]: Одредити полупречник круга k на јединичној сфери који садржи тачке $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$.
Упоредити растојање између тачака A и B мерено по кругу k са растојањем мереном по великом кругу између A и B.
Одредити површину сферног троугла ABC.



$k = \alpha(ABC) \cap \sigma$

$\sigma: x^2+y^2-z^2=1$

$\alpha: x+y+z-1=0$



висина је ~~исто~~ исто и тежишна дуж

ABC – једнакостранични

$r = \frac{2}{3}h = \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

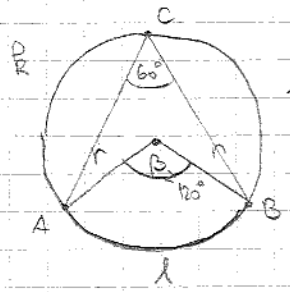
$a = |\vec{AB}| = \sqrt{2}$

$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

$b = c = \frac{\pi}{2}$

$\cos a = \cos \alpha \Rightarrow a = \alpha = \frac{\pi}{2}$



$l = r\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{2\pi}{3}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi$

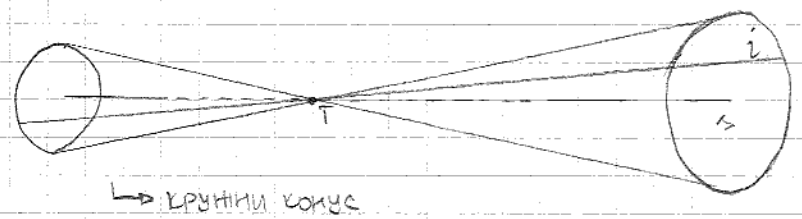
$\sqrt{\frac{2}{3}} < \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\pi$

$P_{S\Delta} = \sum$ унутрашњих углова $- \pi$

Криве другог реда

Конус

Нека су i и s две праве у простору које се секу у тачки T. Кружни конус са теменом T је површ која се добија ротацијом праве i око осе s.
Ротирана права i (у разним положајима) назива се изводница конуса, а права s се назива оса конуса.



↳ кружни конус

Конусни пресек

[Дефиниција 1.1]: Конусни пресек је пресек конуса са произвољном равни α.

Конусни пресеци:
- ↳ круг
- ↳ елипса
- ↳ хипербола
- ↳ парабола

} недегенерисани конике

- ↳ тачка
- ↳ права
- ↳ две праве које се секу

} дегенерисани (настају када пресечна раван у неком тренутку ухвати теме конуса)

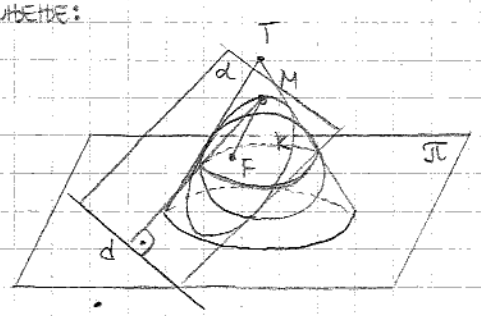
Конике

[Дефиниција 1.2]: Коника је пресек конуса са равни α која не садржи теме конуса.

[Теорема 1.1]: У равни α конике постоји права d и тачка F такве да је однос растојања произвољне тачке M конике од тачке F и праве d константан.

$$\frac{MF}{d(M,d)} = e = const$$

Објашњење:



F - жижа
d - директриса

$$e = \frac{MF}{d(M,F)} \geq 0$$

I $e = 0$

Када је $\alpha \parallel \pi$, тада ће K бити круг
F - центар круга
d - не постоји $\Rightarrow \frac{MF}{\infty} = 0$

ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ КОНИКЕ

[Дефиниција 1.3]: Број $e \geq 0$ назива се ексцентрицитет конике, тачка F жижа, а права d директриса конике.

Ексцентрицитет одређује тип конике:

- ↳ $e = 0$ → круг
- ↳ $0 < e < 1$ → елипса
- ↳ $e = 1$ → парабола
- ↳ $e > 1$ → хипербола

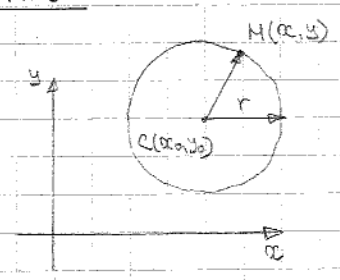
ПРИМЕРИ КОНИКА У ПРИРОДИ

Путања косог хица је парабола.
Сенка крупног предмета на раван зид је коника.
Сунчева сенка врха штапа у току дана је коника.

КЕПЛЕРОВИ ЗАКОНИ (Johannes Kepler 1571-1630)

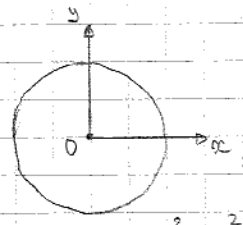
- ↳ 1. Кеплеров закон: Тела Сунчевог система се крећу око Сунца по конуси, а Сунце се налази у жижи те конике.
- ↳ 2. Кеплеров закон: Радијус вектор планете у односу на Сунце у једнаким временским интервалима опише једнаке површине.
- ↳ 3. Кеплеров закон: $T^2 \sim a^3$: $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{gm}}$

КРУГ

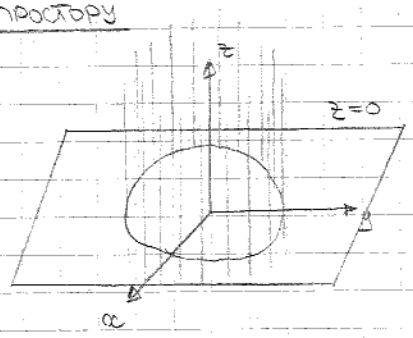


C - центар
r - полупречник

ЈЕДНАЧИНЕ КРУГА У РАВНИ И ПРОСТОРУ



$x^2 + y^2 = 1$



$x^2 + y^2 = 1$
↳ добијемо цилиндар па морамо да га пресечемо неком равни
↳ хиперповрши

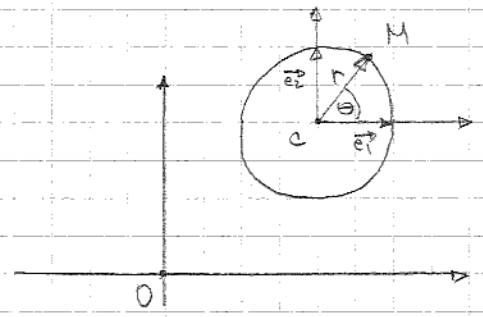
ИМПЛИЦИТНА И ПАРАМЕТАРСКА ј-НА КРУГА

Имплицитна: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Параметарска:

$$x = x_0 + r\cos\theta$$
$$y = y_0 + r\sin\theta \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

θ је угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе.



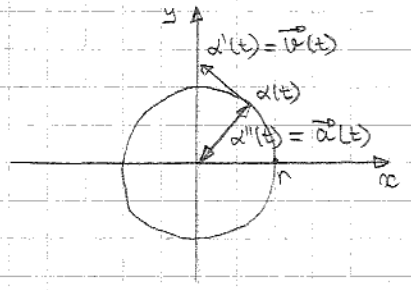
M: $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

M: $x = x_0 + r\cos\theta$
$y = y_0 + r\sin\theta$ } транслирамо на координатни почетак

$\theta[0, 2\pi)$

$\hookrightarrow \theta = \measuredangle(\vec{CM}, \vec{e_1})$ } има и геометриску интерпретацију

БРЗИНА И УБРЗАЊЕ



$\alpha(t) = (r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$

Кружно кретање константном угаоном брзином:

t – време
$\vec{v} = \alpha'(t)$ – брзина
$\vec{a} = \alpha''(t)$ – убрзање
$\vec{F} = m\vec{a}$ – центрипетална сила

} $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \alpha'(t)$, $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \alpha''(t)$

$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$
$\alpha''(t) = (-r\cos t, -r\sin t) = -\alpha(t)$

$|\vec{v}| = |\alpha'(t)| = r$

$\beta(s)$, $|\beta'(s)| = 1$
↓
природна параметризација (дужином лука)

$\beta(s) = (r\cos\frac{s}{2}, r\sin\frac{s}{2})$ (*)

$s \in [0, 2r\pi)$

(*)
↓
$t = t(s)$ – ф-ја

$(r\cos t)' = -r\sin t \cdot t'$
$(r\sin t)' = r\cos t \cdot t'$

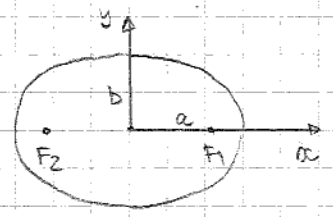
$|\vec{v_n}| = r \cdot t'$

Сад желимо да наместимо да је $t' = \frac{1}{r}$

$\Rightarrow \underbrace{t = \frac{s}{r}}$

$t(s) = \frac{s}{r}$
$t'(s) = \frac{1}{r}$

ЕЛИПСА



Канонска ј-на елипсе:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a > b > 0$$

$a > b$

ЕЛЕМЕНТИ ПОЛУОСЕ

↳ $a > b > 0$ – ПОЛУОСЕ ЕЛИПСЕ

↳ $F_1(c,0)$ $F_2(-c,0)$ – ЖИЖЕ ЕЛИПСЕ

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

↳ $d_1: x = \frac{a}{e}$, $d_2: x = -\frac{a}{e}$ – ДИРЕКТРИСЕ ЕЛИПСЕ

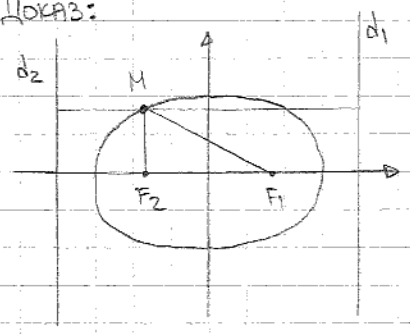
↳ $e = \frac{c}{a}$ – ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ ЕЛИПСЕ

ФОКУСНЕ ОСОБИНЕ ЕЛИПСЕ

[ТЕОРЕМА 1.2]: ЗБИР РАСТОЈАЊА ПРОИЗВОЉНЕ ТАЧКЕ ЕЛИПСЕ ОД ЊЕНИХ ЖИЖА ЈЕ КОНСТАНТАН:

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

Доказ:



$MF_1 + MF_2 = const$ (НЕ ЗАВИСИ ОД ИЗБОРА M)

ИЗ ДЕФИНИЦИЈЕ: $e = \frac{MF_1}{d(M,d_1)} = \frac{MF_2}{d(M,d_2)}$

$$MF_1 + MF_2 = e\,d(M,d_1) + e\,d(M,d_2)$$

$$= \underbrace{e\,d(d_1,d_2)}_{\text{ЗАВИСИ САМО ОД ЕЛИПСЕ}} = const$$

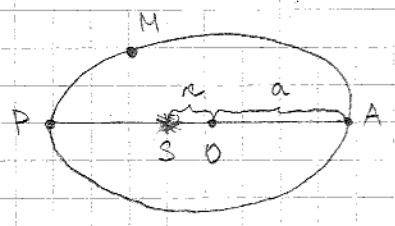
$$d(d_1,d_2) = 2\,d(d_1,O_y) = 2 \cdot \frac{a}{e}$$

$$\Rightarrow MF_1 + MF_2 = 2a \quad \square$$

[ПРИМЕР 1]: АКО ЈЕ ЕКСЦЕНТРИЦИТЕТ МАРСА $e = 0{,}934$ И РАСТОЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ЖИЖА $2c \approx 0{,}2847\,AJ$ ($1AJ = 1.5 \cdot 10^2 km$), ОДРЕДИТИ НАЈМАЊЕ (ПЕРИХЕЛ) И НАЈВЕЋЕ (АФЕЛ) РАСТОЈАЊЕ МАРСА ОД СУНЦА.

$$P = a - c, \quad A = a + c, \quad a = \frac{c}{e}$$

КОЛИКЕ СУ ОВЕ ВРЕДНОСТИ ЗА ЗЕМЉУ? ЗА КОЈУ ПЛАНЕТУ СУНЧЕВОГ СИСТЕМА ЈЕ ОДНОС P:A МАКСИМАЛАН/МИНИМАЛАН? КОЛИКО ЈЕ ПОТРЕБНО МАРСУ ДА ОБИЂЕ ОКО СУНЦА?



СУНЦЕ ЈЕ ЈЕДНА ЖИЖА.
↳ ОСТАЛО САМИ

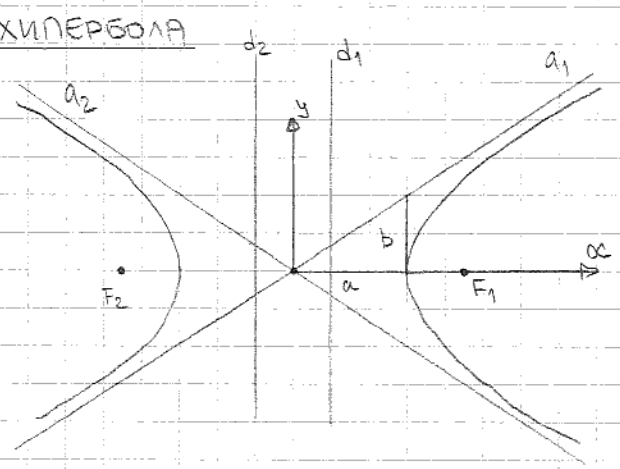
ПАРАМЕТАРСКА ј-НА ЕЛИПСЕ

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi)$$

a, b су полуосе елипсе, али θ није угао између вектора положаја тачке и позитивног дела x-осе (обичан параметар).

↳ природна параметризација елипсе не постоји

ХИПЕРБОЛА



Канонска ј-на хиперболе:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

$$\underbrace{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)}_{=0}\underbrace{\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)}_{=0} \Bigg\} \text{ да нам асимптоте}$$

ЕЛЕМЕНТИ ХИПЕРБОЛЕ

↳ $a, b > 0$ – полуосе хиперболе

↳ $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ – жиже хиперболе
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

↳ $d_1: x = \frac{a}{e}$, $d_2: x = -\frac{a}{e}$ – директрисе хиперболе

↳ $e = \frac{c}{a}$ – ексцентрицитет хиперболе

↳ $a_1: y = \frac{b}{a}x$, $a_2: y = -\frac{b}{a}x$ – асимптоте хиперболе

ФОКУСНЕ ОСОБИНЕ ХИПЕРБОЛЕ

[Теорема 1.3]: Апсолутна вредност разлике растојања произвољне тачке хиперболе од њених жижа је константна:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

Доказ: идентичан доказ као код елипсе

ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ХИПЕРБОЛЕ

$$x = +a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

$$x = -a\cosh\phi, \quad y = b\sinh\phi, \quad \phi \in \mathbb{R}$$

↳ косинус и синус хиперболички

$$\cosh t = \frac{e^{-t} + e^{t}}{2} > 0 \text{ за } \forall t$$

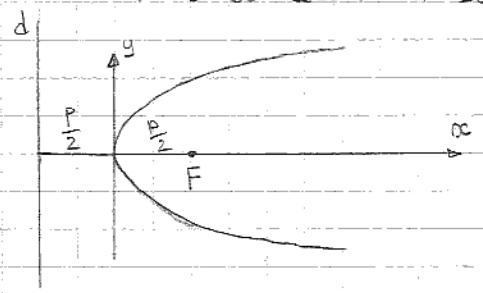
↳ па морамо засебно да параметризујемо компоненте

9. ПРЕКРАВАЊЕ

ПАРАБОЛА

[Последица 1.1]: Свака тачка M параболе је једнако удаљена од жиже и од директрисе параболе.

↳ ово је исто и дефиниција



$y^2 = 2px$, $p>0$

↳ осносиметрична

ЕЛЕМЕНТИ ПАРАБОЛЕ

↳ p – параметар параболе

↳ $F(\frac{p}{2}, 0)$ – жижа параболе

↳ $d: x = -\frac{p}{2}$ – директриса параболе

↳ o – оса параболе (у канонском облику то је x-оса)

↳ T – теме параболе (у канонском облику је O) } тачка екстремума параболе

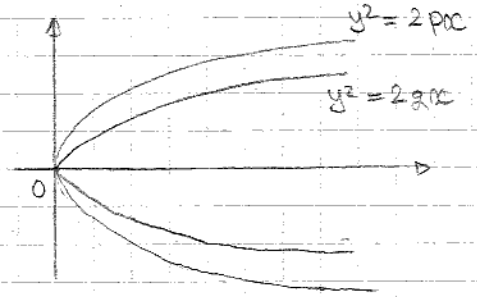
ПАРАМЕТРИЗАЦИЈА ПАРАБОЛЕ

1) Стандардна (полиномијална) параметризација:

$$x = \frac{t^2}{2p} \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

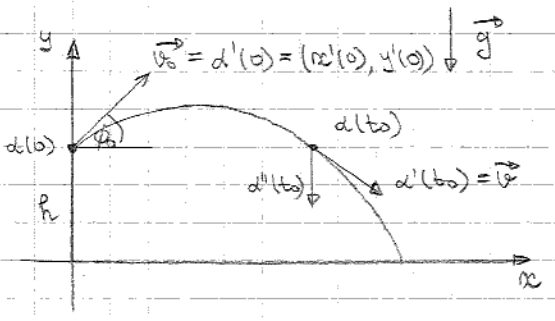
2) Једначина косог хица

[Пример 1]: Показати да су свике две параболе међусобно сличне.



} Коефицијент хомотетије је однос коефицијената p и q.

ЈЕДНАЧИНА КОСОГ ХИЦА



$\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \geq 0$

$\alpha'(t) = (x'(t), y'(t)) = \vec{v}$

$\alpha''(t) = (x''(t), y''(t)) = \vec{a} = \vec{g}$

ИНТЕГРАЛИМО $x''(t) = 0$, $y''(t) = -g$ } Приметимо да $\vec{g}$ колинеаран са вектором y-осе само је супротног смера

$\Rightarrow x'(t) = c_1$

$y'(t) = -gt + c_2$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

ϕ_0 – почетни угао (угао избацивања)

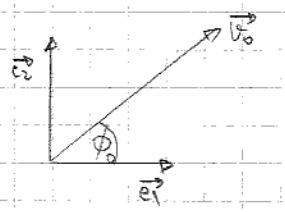
v_0 – почетна брзина (интензитет брзине)

h – висина

g – гравитациона константа $\approx 10 \frac{m}{s^2}$

$x'(0) = c_1 = v_{0x} = v_0 \cos\phi_0$ } x компонента почетне брзине

$y'(0) = c_2 = v_{0y} = v_0 \sin\phi_0$ } y –||–



$\vec{v_0} = (\cos\phi_0 \underbrace{\vec{e_1}}_{x\text{-оса}} + \sin\phi_0 \underbrace{\vec{e_2}}_{y\text{-оса}}) \cdot v_0$

$x'(t) = v_0 \cos\phi_0$

$y'(t) = -gt + v_0 \sin\phi_0$ } интегралимо

$\Rightarrow x(t) = (v_0 \cos\phi_0)t + c_3$

$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin\phi_0)t + c_4$ $\quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}$

$x(0) = c_3 = 0$

$y(0) = c_4 = h$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= (v_0 \cos\phi_0)t \\ y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin\phi_0)t + h \end{aligned}, \quad t \geq 0}$$

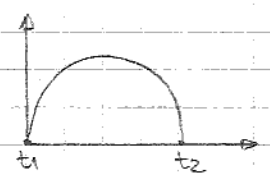
КОСИ ХИТАЦ

За који угао ϕ_0 се постиже највећа даљина/висина?

$h = 0$

$y(t) = 0$

$t(-\frac{g}{2}t + v_0 \sin\phi_0) = 0$ — $t_1 = 0$ – почетни тренутак; $t_2 = \frac{2v_0 \sin\phi_0}{g}$



$x(t_2) = v_0 \cos\phi_0 \cdot t_2$

$= \frac{v_0^2}{g} 2\cos\phi_0 \sin\phi_0 = \frac{v_0^2}{g} \underline{\sin 2\phi_0}$

$\sin 2\phi_0 = max = 1 \Rightarrow 2\phi_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{4}$ } За овај угао ћемо постићи највећу даљину

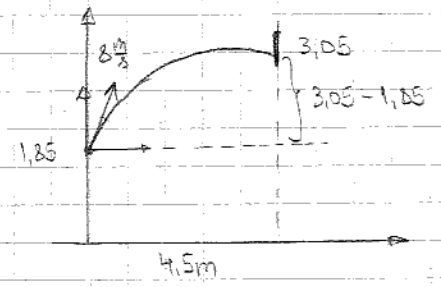
Шта се дешава када је $v_0 = 0$?

↳ имамо слободан пад

[Пример2]: Кошаркаш висине 1.85m треба да убаци лопту у кош са линије слободног бацања (4,5m). Обруч је на висини 3,05m.

Под којим почетним углом треба избацити лопту да би се постигао погодак? За почетну брзину избацивања лопте узети $8\frac{m}{s}$.

Колико се мења потребна почетна брзина избацивања ако се изводи скок-шут са исте удаљености под тим углом? Пос. да је одраз 1m.
Узети за $g \sim 10\frac{m}{s^2}$?

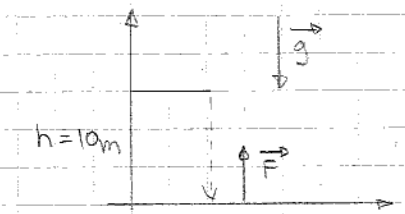


$x(t) = 4,5$
$y(t) = 3,05$

} лакше је да транслирамо тако да испаљујемо са земље

[Пример3]: Спортиста масе 65kg скаче у базен са скакаонице висине 10m без почетне брзине. После колико времена је спортиста ударио о површину воде? Којом брзином се у том тренутку кретао?

a) Изр. ове вредности ако се занемари отпор ваздуха.
b) Изр. ове вред. ако је отпор ваздуха $F = 100N$.



$m = 65kg$
$h = 10m$
$g = 10\frac{m}{s^2}$

$\alpha(t) = (0, -\frac{g}{2}t^2 + h)$ за $t \geq 0$ } јер $v_0 = 0$

$v = \sqrt{2gh} = 10\sqrt{2} \approx 14\frac{m}{s}$

$\vec{a} = \vec{g} - \vec{a_{ot}}$ → убрзање отпора средине

$t = \frac{h}{v} = \frac{v}{g} \approx 1.4s$

$\vec{F} = m \cdot \vec{a_{ot}}$ $\quad F = 100N \Rightarrow a_{ot} = \frac{100}{65} = 1,54\frac{m}{s^2}$

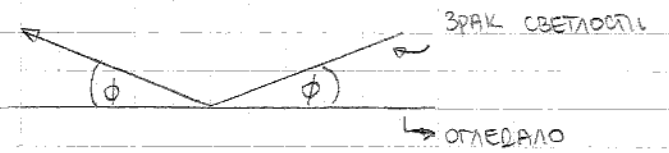
$a = g - a_{ot} = 8.5\frac{m}{s^2}$

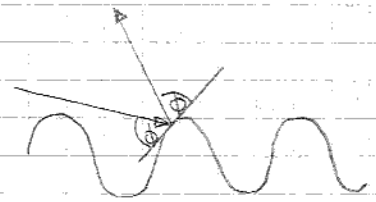
$v = \sqrt{2ah} \approx 13\frac{m}{s}$

$t = \ldots$

ЗАКОН ОДБИЈАЊА СВЕТЛОСТИ

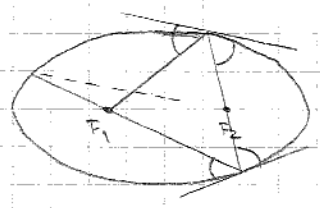
Светлост се одбија од глатке површине тако да је упадни угао зрака светлости једнак одбојном углу.





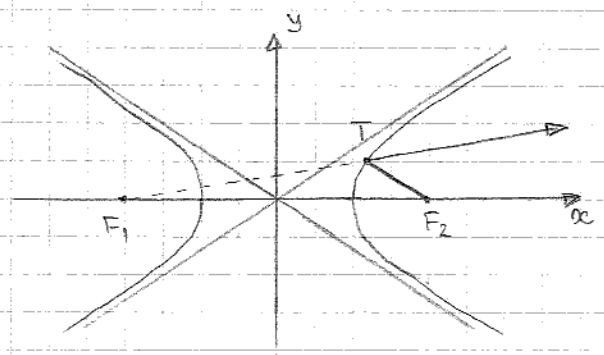
ОПТИЧКА ОСОБИНА ЕЛИПСЕ

[Теорема 1.1]: Светлосни зрак који извире из жиже елипсе и одбија се од елипсе, пролази кроз другу жижу елипсе.



ОПТИЧКА ОСОБИНА ХИПЕРБОЛЕ

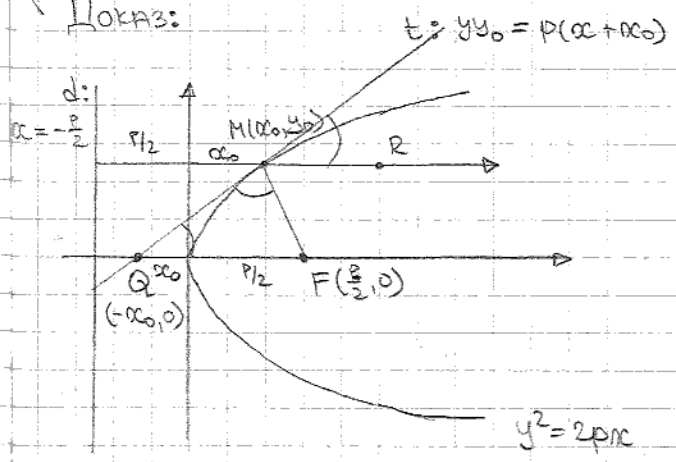
[Теорема 1.2]: Светлосни зрак који извире из жиже хиперболе и одбија се од хиперболе, колинеаран је са другом жижом хиперболе.



ОПТИЧКА ОСОБИНА ПАРАБОЛЕ

[Теорема 1.3]: Светлосни зрак који извире из жиже параболе одбија се од параболе паралелно њеној оси.

Доказ:



Закон одбијања светлости:

$\sphericalangle(FM, t) = \sphericalangle(MR, t)$

Треба да покажемо $MR \parallel QF$

$\Leftrightarrow \sphericalangle(MR, t) = \sphericalangle(QF, t)$

↳ углови са $\parallel$ крацима

Заправо показујемо

$\sphericalangle MQF \cong \sphericalangle FMQ \Leftrightarrow \Delta QFM$ - једнакокрак

$$\left.\begin{aligned} MF &\overset{\text{деф. параболе}}{=} d(M,d) = x_0 + \frac{p}{2} \\ FQ &= x_0 + \frac{p}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow MF \cong FQ \Rightarrow \Delta QFM \text{ - једнакокрак} \quad \square$$

Криве другог реда (општи случај)

[Дефиниција 1.1]: Крива другог реда је скуп тачака равни чије координате (x,y) задовољавају ј-му другог степена:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

G - придружена матрица криве

$$G = G^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \text{ - проширени вектор координата}$$

$\Gamma: X^T G X = 0$ } зовиша се ј-на криве (лакши начин да не памтимо)

Приметимо:

$\det G \neq 0 \Rightarrow \Gamma$ - коника

$\det G = 0 \Rightarrow \Gamma$ - сингуларна крива (дегенерисана)

Свођење криве на канонски облик

[Теорема 1.4]: За сваку криву другог реда, дату у ортонормираном реперу Oe, постоји нови ортонормирани репер Qf, исте оријентације, у ком она има тачно једну од следећих ј-на:

(E) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$ (елипса)

(H) $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$ (хипербола)

(P) $y''^2 = 2px''$ (парабола)

(D_1) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = -1$ (празан скуп или имагинарна елипса)

(D_2) $\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 0$ (тачка)

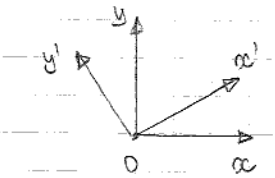
(D_3) $\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 0$ (две праве које се секу)

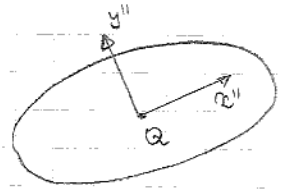
(D_5) $x''^2 = 0$ („двострука" права)

(D_6) $x''^2 = -a^2$ (празан скуп)

где је $p>0$, $a,b>0$ и $a \geq b$ за (E), (D_1), (D_2) и (D_3).

УМЕСТО ДА ПОСМАТРАМО СТАНДАРДНИ КООРДИНАТНИ СИСТЕМ МИ ЋЕМО ПРВО ДА ИЗВРШИМО РОТАЦИЈУ (ДА СЕ ОСЕ ПОКЛОПЕ СА ОСАМА НАШЕ КРИВЕ), А ОНДА ТРАНСЛИРАМО ТАКО ДА НАМ КООРДИНАТНИ ПОЧЕТАК ДОЂЕ У ЦЕНТАР КРИВЕ.





КАКО ВИДИМО ДА ЛИ ЈЕ ПОТРЕБНА РОТАЦИЈА?
↳ АКО ПОСТОЈИ $2a_{12}xy$ ЧЛАН

СВОЂЕЊЕ КРИВЕ НА КАНОНСКИ ОБЛИК ТРАНСЛАЦИЈОМ

$$x' = x + x_0 \qquad y' = y + y_0$$

СВОЂЕЊЕ КРИВЕ НА КАНОНСКИ ОБЛИК РОТАЦИЈОМ

$$x = \cos\phi\, x' - \sin\phi\, y'$$
$$y = \sin\phi\, x' + \cos\phi\, y'$$

} СТАРЕ КООРДИНАТЕ СА ЛЕВЕ, А НОВЕ СА ДЕСНЕ ЈЕР ЈЕ ОВО ТРАНСФОРМАЦИЈА ОРТОНОРМИРАНИХ РЕПЕРА

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = a_{11}(\cos\phi\, x' - \sin\phi\, y')^2 + 2a_{12}(\cos\phi\, x' - \sin\phi\, y')(\sin\phi\, x' + \cos\phi\, y') + a_{22}(\sin\phi\, x' + \cos\phi\, y')^2$$

$$= x'y'(-2a_{11}\cos\phi\sin\phi + 2a_{12}\cos^2\phi - 2a_{12}\sin^2\phi + 2a_{22}\sin\phi\cos\phi) + \dots$$

} ЗАНИМА НАС САМО МЕШОВИТИ ЈЕР ЊЕГА ЖЕЛИМО ДА ИЗГУБИМО

$$= x'y'(\underbrace{-a_{11}\sin 2\phi + a_{22}\sin 2\phi + 2a_{12}\cos 2\phi}_{=0}) + \dots$$

$$\sin 2\phi\,(a_{22} - a_{11}) + \cos 2\phi\; 2a_{12} = 0$$

$$\boxed{\frac{\cos 2\phi}{\sin 2\phi} = \operatorname{ctg} 2\phi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}} \qquad \phi \in [0, \tfrac{\pi}{2})$$

$$\cos 2\phi = \frac{\operatorname{ctg} 2\phi}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\phi}} \qquad \sin 2\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 2\phi}}$$

$$\cos\phi = +\sqrt{\frac{1 + \cos\phi}{2}} \qquad \sin\phi = +\sqrt{\frac{1 - \cos\phi}{2}}$$

Безијерове криве

[Дефиниција 1.1]: Нека су $P_0, P_1, \dots, P_n$, $n \geq 2$ тачке равни. Безијерова крива степена n је:

$$\alpha_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i = \sum_{i=0}^{n} B_i^n(t) P_i \quad , t \in [0,1]$$

Тачке P_i називају се контролне тачке, а полином $B_i(t)$ Бернштајнови полиноми или базне функције.
Полигонска линија $P_0P_1 \dots P_n$ се зове контролна полигонска линија.

Безијерове криве на произвољном интервалу

$u \in [a,b]$

$t = \frac{u-a}{b-a}$

$$\alpha_n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{u-a}{b-a}\right)^k \left(1 - \frac{u-a}{b-a}\right)^{n-k} \cdot P_k$$

$$= \frac{1}{(b-a)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u-a)^k (b-u)^{n-k} \cdot P_k$$

Безијерове криве 2. и 3. степена

за $n=1$ $\quad \alpha_1(t) = (1-t)P_0 + tP_1$, $t \in [0,1]$ – дуж P_0P_1

за $n=2$ $\quad \alpha_2(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$, $t \in [0,1]$ – део параболе

за $n=3$ $\quad \alpha_3(t) = (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3 P_3$, $t \in [0,1]$

Особине

1) $\deg \alpha_n(t) = n$

2) $\alpha_n(0) = \binom{n}{0}(1-0)^n P_0 = P_0$
$\alpha_n(1) = \binom{n}{n} 1^n P_n = P_n$ за $t \in [0,1]$ } прва и последња тачка припадају криви

3) Тангентни вектор у P_0 је $\overrightarrow{P_0P_1}$, а у P_n је $\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$

4) $P_k \to P_k + \vec{v}$: $\bar{\alpha}_n(t) = \alpha_n(t) + B_{n,k}(t)\vec{v}$ } када неку тачку мало померимо крива се мења глобално

5) Особина ненегативности } $B_i(t)$ су увек ненегативни

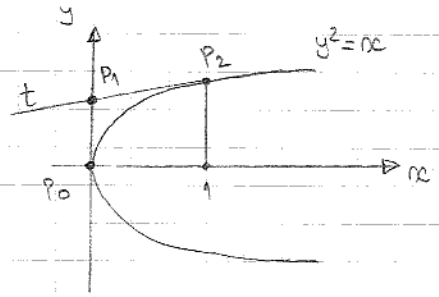
6) Особина конвексног омотача } крива не цела увек бити у оквиру омотача

7) Особина мање варијације } када узмемо праву и пресечемо више немо имати пресечних тачака са контролним полигоном него са кривом

8) Афина инваријантност
→ уколико узмемо контролни полигон и пресликамо га неким афиним пресликавањем на други полигон, крива коју је деф. први полигон се пресликава на криву коју вам деф. други полигон.

[Теорема 1.1]: Безијерова крива степена два је део параболе.

Доказ:



$P_0(0,0)$
$P_2(1,1)$

P_0P_1 – тангента у P_0
P_1P_2 – тангента у P_2

$t: \; yy_0 = \frac{1}{2}(x+x_0)$

$t_{P_2}: \; y = \frac{1}{2}(x+1)$

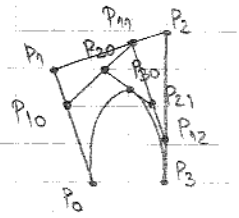
$P_1(0,\frac{1}{2})$

$$\alpha_2(t) = (\cancel{1-t})^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2$$
$$= \left(t^2,\; t(1-t)+t^2\right) = (t^2, t)$$
$t\in[0,1]$

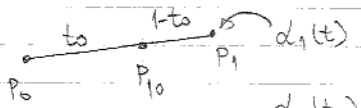
$x=t^2$
$y=t$
↳ параметризација параболе $y^2=x$

P_0, P_1, P_2 се могу пресликати у произвољне тачке (афиним пресликавањем) па ће се крива пресликати у одговарајућу криву, па ако је ова почетна парабола онда ће та свака бити парабола.

Де-Кастељау алгоритам



$t_0\in[0,1]$
$\alpha(t_0)=?$



$\alpha_1(t_0) = P_{10}$

0 корак	1	2	3
P_{00}	P_{10}	P_{20}	$P_{30} = \alpha_3(t_0)$
P_{01}	P_{11}	P_{21}	
P_{02}	P_{12}		

↳ дају нам тангенту нас кривом

$$P_{ki} = (1-t_0)P_{k-1,i} + t_0P_{k-1,i+1}$$

– коректност алгоритма: $(n=2)$

$P_{10} = (1-t_0)P_{00} + t_0P_{01}$
$P_{11} = (1-t_0)P_{01} + t_0P_{02}$
$\rightarrow *$

$* \rightarrow P_{20} = (1-t_0)P_{10} + t_0P_{11}$
$= (1-t_0)[(1-t_0)P_{00} + t_0P_{01}]$
$+ t_0[(1-t_0)P_{01} + t_0P_{02}]$
$= (1-t_0)^2P_0 + 2t_0(1-t_0)P_1 + t_0^2P_2$
$= \alpha_2(t_0)$

(#) наставак

10. предавање

Матрична репрезентација Безијерове криве

$$\alpha_2(t) = (1, t, t^2)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_0\\ P_1\\ P_2\end{pmatrix}$$

} Заборавила је да питање како смо је добили, посаветовати се са књигом.

[Пример 1]: Извести формуле матричне репрезентације кубне Безијерове криве.
↳ у књизи има доврат један минус као грешка

(#) → Покажимо да је $\overrightarrow{P_0P_1}$ тангентни вектор:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = (1-t_0)P_1 + t_0P_2 - (1-t_0)P_0 - t_0P_1 = -(1-t_0)P_0 + (1-2t_0)P_1 - t_0P_2$$

$$\alpha_2'(t_0) = -2(1-t_0)P_0 + (2(1-t_0)-2t_0)P_1 + 2t_0P_2 = 2(\overrightarrow{P_0P_1})$$ => колинеарни су

ПОДЕЛА КРИВЕ НА ДВА ДЕЛА

Криву α делимо на две криве α_1 и α_2:

$\alpha_1: P_0 = P_{00}, P_{10}, P_{20}, \ldots, P_{n0} = \alpha(t)$ – горња дијагонала

$\alpha_2: \alpha(t) = P_{n0}, P_{n-11}, P_{n-22}, \ldots, P_{0n} = P_n$ – доња дијагонала

↳ правимо рез на криви (глатко)

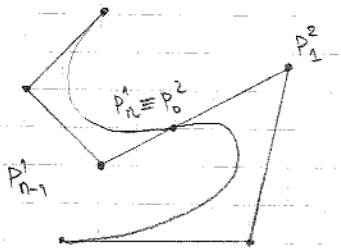
ГЛАТКО СПАЈАЊЕ КРИВИХ

↳ Крај једне криве ће бити почетак друге и у тој тачки ће имати заједничку тангенту (те три тачке морају бити колинеарне)

↳ уколико нам последња дуж прве криве и прва дуж последње криве нису колинеарне тада немамо глатко спајање

↳ добијамо бест лајнове

↳ на овај начин можемо од криве нижег степена добити криву вишег



ПОВЕЋАЊЕ СТЕПЕНА КРИВЕ

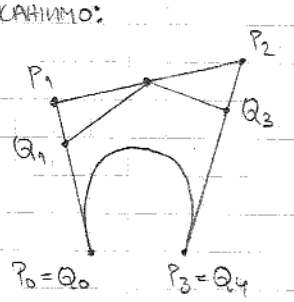
↳ без да мењате облик саме криве

$\alpha_n(t): P_0, \ldots, P_n \qquad \bar{\alpha}_{n+1}(t): Q_0 = P_0, \; Q_i = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i, \; Q_{n+1} = P_n$

$$1 \le i \le n$$

↳ даје нам већу контролу над кривом

Покажимо:

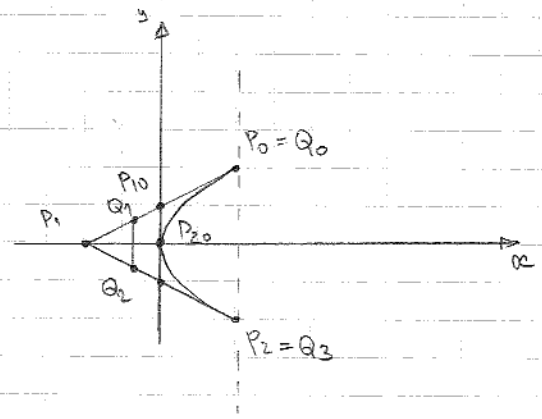


$$\left.\begin{aligned} Q_0 &= P_0 \\ Q_1 &= 1/4 P_0 + 3/4 P_1 \\ Q_2 &= 1/2 P_1 + 1/2 P_2 \\ Q_3 &= 3/4 P_2 + 1/4 P_3 \end{aligned}\right\} \text{по формули } Q_i$$

$$Q_4 = P_3$$

↳ не можемо да смањујемо степен криве, осим у случају када је та крива природно настала тако што сте повећали степен неке криве

[Пример 3]: а) Одредити Безијеову криву $\alpha_2(t)$ чије су контролне тачке $P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$.
б) Одредити једначину тангенте на криву $\alpha_2(t)$ у тачки $t_0=0.5$ и показати да је тангента паралелна са правом P_0P_2
в) Повећати степен криве за 1.
г) Одредити једначину тангенте на криву $\alpha_3(t)$ у тачки $t_0=0.5$. Да ли је тангента паралелна са правом $\overline{P_0P_3}$?



$P_0(1,1)$
$P_1(-1,0)$
$P_2(1,-1)$

а) $\alpha_2(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1+t^2P_2$

$=\left((1-t)^2\cdot 1+2t(1-t)(-1)+t^2\cdot 1,\ (1-t)^2\cdot 1+2t(1-t)\cdot 0+t^2\cdot(-1)\right)$

$=\left(1-4t+4t^2,\ 1-2t\right)$

$=\left(\underset{x}{(1-2t)^2},\ \underset{y}{1-2t}\right),\quad t\in[0,1]$

б) $t_0=\frac{1}{2}$

$P_0(1,1)$, $P_1(-1,0)$: $P_{10}=\frac{1}{2}(P_0+P_1)=(0,\frac{1}{2})$
$P_1(-1,0)$, $P_2(1,-1)$: $P_{11}=\frac{1}{2}(P_1+P_2)=(0,-\frac{1}{2})$
P_{10}, P_{11}: $P_{20}=\frac{1}{2}(P_{10},P_{11})$

$x=y^2$ - део параболе

↳ криве степена 2 за вредност $t_0=\frac{1}{2}$, тангента у тој тачки је увек паралелна са правом P_0P_2

$$P_0P_2 \parallel \alpha_2'(\tfrac{1}{2})$$

в) $Q_0=P_0(1,1)$
$Q_1=\frac{1}{3}P_0+\frac{2}{3}P_1=(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$
$Q_2=\frac{2}{3}P_1+\frac{1}{3}P_2=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$
$Q_3=P_2(1,-1)$

За домаћи: $\underset{Q_0,\dots,Q_3}{\alpha_3(t)}=\underset{P_0,\dots,P_2}{\alpha_2(t)}$

г) Хоће, јер криву нисмо променили.

Матрична верзија де-Кастељау алгоритма

[Пример 4]: Извести формуле матричне верзије де-Кастељау алгоритма за криву степена 2.
↳ за степен 3 има у књизи

$\alpha_2(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1+t^2P_2,\ t\in[0,1]$

рез: $t=t_0\in(0,1)$

$\beta_2^1(t)=\alpha_2(t\cdot t_0)$

$$\alpha_2(t)=(1\ \ t\ \ t^2)\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&2&0\\1&-2&1\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\end{pmatrix}$$

} множењем t t_0 скраћујемо област дефинисаности

$=(1\ \ t\cdot t_0\ \ (t_0t)^2)\,M\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\end{pmatrix}$

$=(1\ \ t\ \ t^2)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&t_0&0\\0&0&t_0^2\end{pmatrix}M\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\end{pmatrix}$

уводимо $S_{[0,t_0]}=M^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&t_0&0\\0&0&t_0^2\end{pmatrix}M$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\1-t_0&t_0&0\\(1-t_0)^2&2t_0(1-t_0)&t_0^2\end{pmatrix}$

$=(1\ \ t\ \ t^2)\,M\,\underbrace{S_{[0,t_0]}\begin{pmatrix}P_0\\P_1\\P_2\end{pmatrix}}_{\text{нове контролне тачке}}$

$$P_2^2(t) = (1 \;\; t \;\; t^2)\, M S_{[1-t_0,1]} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha_2(t_0 + (1-t_0)t)$$

↳ ЗА ДОМАЋИ

$$\Rightarrow S_{[1-t_0,1]} = \begin{pmatrix} (1-t_0)^2 & 2t_0(1-t_0) & t_0^2 \\ 0 & 1-t_0 & t_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

РАЦИОНАЛНЕ БЕЗИЈЕРОВЕ (RB) КРИВЕ

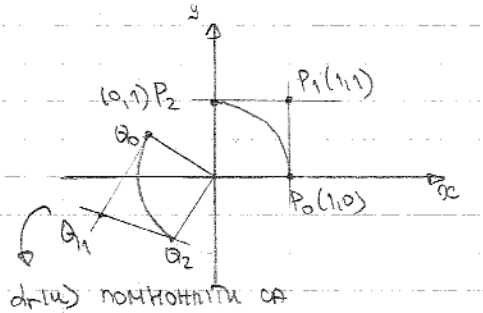
Рационална Безијерова крива степена n са контролним тачкама $P_0, \dots, P_n$ и тежинама $w_0, \dots, w_n > 0$ је дата параметризацијом:

$$r_n(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t) P_i}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_{i,n}(t)}, \quad t \in [0,1]$$

где су $B_{i,n}(t)$ Бернштајнови полиноми.

ДЕО КРУГА КАО RB-КРИВА

↳ У КЊИЗИ ИМА ДЕО ЕЛИПСЕ, А НА ВЕЖБАМА ДЕО ХИПЕРБОЛЕ



$\alpha_r(u)$ помножити са матрицом ротације (инверзном)

$$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$$

$$\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2} \qquad \sin t = \frac{2u}{1+u^2}, \quad u \in [0,1]$$

$$\alpha_r(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right), \quad u \in [0,1]$$

Ајде да се уверимо да је $\alpha_r(u)$ рационална Безијерова крива:

– поставимо контролне тачке и тежине

$$r_2(t) = \frac{w_0(1-t)^2 P_0 + w_1 2t(1-t)P_1 + w_2 t^2 P_2}{w_0(1-t)^2 + w_1 2t(1-t) + w_2 t^2}$$

$$w_0 + t(-2w_0 + 2w_1) + t^2(w_0 - 2w_1 + w_2) = 1 + t^2$$

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= 1 \\ -2w_0 + 2w_1 &= 0 \\ w_0 - 2w_1 + w_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow w_0 = w_1 = 1 \quad w_2 = 2$$

$$r_2(t) = \frac{1}{1+t^2}\left[(1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + 2t^2 P_2\right], \quad t \in [0,1]$$

↳ КАД ЗАМЕНИМО P_0, P_1, P_2 ДОБИЋЕМО ИСТО КАО $\alpha_r(u)$

Механичке криве
(елементарно само)

Циклоиде

- кинематички метод задавања криве
  - ↳ Циклоиде настају котрљањем круга по некој другој кривој

Параметарска ј-на (основне) циклоиде: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$ } не мора да се зна

↳ у зависности од a имамо различите основне циклоиде
- скраћена циклоида
- продужена циклоида

Епициклоиде

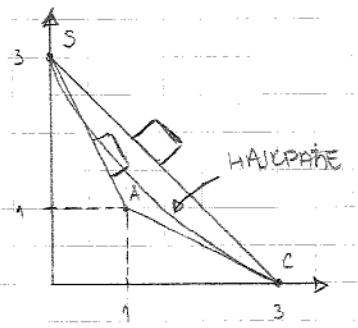
- путања круга који се без клизања котрља спољном страном непокретног круга
- m = однос полупречника покретног и непокретног круга

Хипоциклоиде

- -||- унутрашњом страном непокретног круга
- -||-
  - ↳ за $m = \frac{1}{2}$ добијамо дуж

Брахистохрона

↳ крива која спаја две тачке таква да је време спуста из прве до друге најкраће



БЕСКОНАЧКО ГУСТЕ КРИВЕ

ФРАКТАЛИ

↳ ГЕОМ. ЛИК КОЈИ СЕ МОЖЕ РАЗЛОЖИТИ НА МАЊЕ ДЕЛОВЕ ТАКО ДА ЈЕ СВАКИ ОД ЊИХ, МАКАР ПРИБЛИЖНО, УМАЊЕНА КОПИЈА ЦЕЛИНЕ.

Подела фракала:

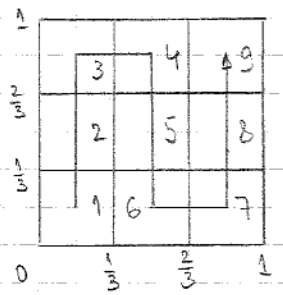
1) ГЕОМЕТРИЈСКИ (ЗАДАМО ГЕНЕРАТОР, ОНДА НА ЊЕГА ПРИМЕЊУЈЕМО АФИНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ)
2) АЛГЕБАРСКИ (НУЛЕ Ф-ЈА)
3) СТОХАСТИЧКИ

ГЕОМЕТРИЈСКИ ФРАКТАЛИ

↳ САМОСЛИЧНА ФИГУРА ЧИЈИ СЕ ОПШТИ ОБЛИК ЗАДАЈЕ ГЕНЕРАТОРОМ

ПЕАНОВА КРИВА

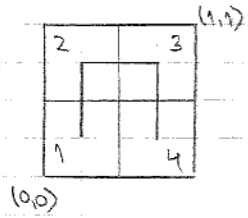
ГЕНЕРАТОР



(ОСТАЛЕ ИТЕРАЦИЈЕ У ПРЕЗЕНТАЦИЈИ)

ХИЛБЕРТОВА КРИВА

ГЕНЕРАТОР



(— II —)

ПРИМЕНА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ФРАКТАЛА

↳ КАДА ЈЕ ПОТРЕБНО ЛИНЕАРИЗОВАТИ ВИШЕДИМЕНЗИОНЕ ПОДАТКЕ ЈЕР ПРЕДСТАВЉАЈУ ОПТИМАЛАН НАЧИН ДА СЕ ВИШЕДИМЕНЗИОНИ СКУПОВИ ПРЕСЛИКАЈУ НА ЈЕДНОДИМЕНЗИОНЕ НИЗОВЕ.

- СЛИКЕ У ПРЕЗЕНТАЦИЈИ

Полигони

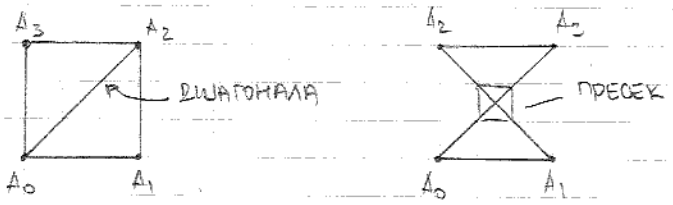
Полигонска линија и полигон

[Дефиниција 1.1]: Полигонска линија $A_0 \dots A_{n-1}A_n$ је унија дужи $A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n$ које називамо ивице полигонске линије. Тачке $A_0, \dots, A_n$ називају се темена полигонске линије.

Уколико се почетно и крајње теме поклапају имамо затворену полигонску линију. Суседна темена су два темена која имају заједничку ивицу. Суседне ивице су оне које деле заједничко теме.

Прост полигон је полигон такав да сваке две несуседне ивице немају заједничких тачака. Иначе је сложен.

Дијагонала полигона је било која дуж која спаја два не суседна темена. Уколико она цела леži у унутрашњости полигона тада се назива унутрашња дијагонала.



Прост Сложен

Унутрашњост полигона

↳ У еуклидској равни сваки полигон разбија раван на две области (унут. и спољашњост)

Критеријум за одређивање где нам се налази тачка:

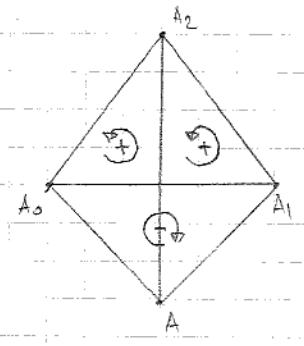
↳ узмемо полуправу чији је почетак та тачка и повучемо је (али да не садржи ни једно теме полигона) онда пребројимо пресеке са ивицама полигона

↳ бр. пресека непаран ⇒ тачка је унутар

паран ⇒ тачка је ван полигона

Површина простог полигона

↳ оријентисана



$$P(A_0A_1A_2) = \frac{1}{2} D_{A_0A_1A_2}$$

A – произвољна

$$\underbrace{P(AA_0A_1)}_{-\text{ оријентација}} + \underbrace{P(AA_1A_2) + P(AA_2A_0)}_{P(AA_1A_2A_0)\ +\text{ оријентација}} = P(A_0A_1A_2) \quad (*)$$

[Теорема 1.1]: За прост полигон $A_0A_1 \dots A_{n-1}$ и произвољну тачку равни A важи:

$$P(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) = P(A, A_0, A_1) + \dots + P(A, A_{n-1}, A_0)$$

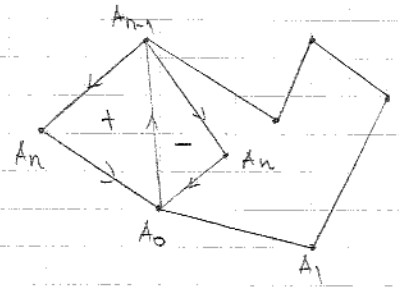
Доказ

↓

Индукција по n

1) $n=3 \rightarrow$ показано горе (*)

2) за $\forall k<n \rightarrow k=n$



$$P(A_0A_1\ldots A_{n-1}A_n) =$$

$$P(A_0A_1\ldots A_{n-1}) + P(A_0A_{n-1}A_n) \overset{ИХ}{=}$$

$$P(AA_0A_1) + \ldots + P(AA_{n-2}A_{n-1}) + \cancel{P(AA_{n-1}A_0)} +$$

$$\cancel{P(AA_0A_{n-1})} + P(AA_{n-1}A_n) + P(AA_nA_0) =$$

исти су, али супротне орјентације

$$P(AA_0A_1) + \ldots + P(AA_{n-2}A_{n-1}) + P(AA_{n-1}A_n) + P(AA_nA_0) \quad \square$$

↳ формула не зависи од A

Примена:

$A \equiv O(0,0)$

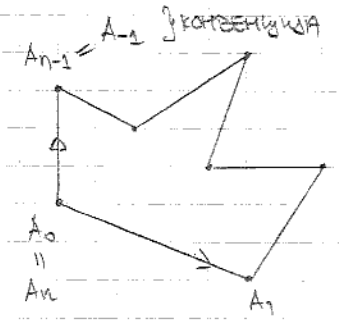
$A_k(x_k, y_k)$

$$P(AA_kA_{k+1}) = P(OA_kA_{k+1}) = \frac{1}{2} D_{OA_kA_{k+1}} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_ky_{k+1} - x_{k+1}y_k) \quad (\#)$$

$[A_k]_{O_e} = \overrightarrow{OA_k}$, $[A_{k+1}]_{O_e} = \overrightarrow{OA_{k+1}}$

Олакшање:

$$P(A_0A_1\ldots A_{n-1}) = P(OA_0A_1) + \ldots + P(OA_{n-2}A_{n-1}) + P(OA_{n-1}A_0)$$



$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(OA_kA_{k+1})$$

$$\overset{(\#)}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_ky_{k+1} - x_{k+1}y_k)$$

упрошћавање са 3 операција на 2

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x_ky_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}y_k\right]$$

$$x_1y_0 + x_2y_1 + \ldots + x_{n-1}y_{n-2} + \underbrace{x_ny_{n-1}}_{x_0}$$

$$x_0\underbrace{y_{n-1}}_{y_{-1}} + x_1y_0 + x_2y_1 + \ldots + x_{n-1}y_{n-2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x_ky_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} x_jy_{j-1}\right]$$

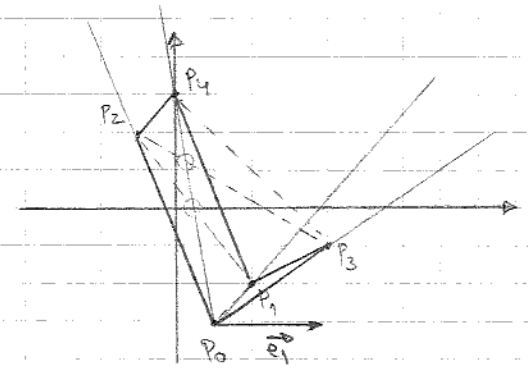
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{n-1} x_ky_{k+1} - \sum_{j=0}^{n-1} x_jy_{j-1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_ky_{k+1} - x_ky_{k-1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_k(y_{k+1} - y_{k-1})$$

ово може доћи на писменом

[Пример 1]: У равни су дате тачке $P_0=(1,-3)$, $P_1=(2,-2)$, $P_2=(-1,2)$, $P_3=(4,-1)$, $P_4=(0,3)$. Испитати да ли је полигон $P_0P_1P_2P_3P_4$ прост. Ако није, сортирати тачке $P_0,\dots,P_4$ тако да полигон буде прост.
Изр. површину тако добијеног простог полигона.



$P_0P_1P_2P_3P_4$ – није прост: $P_2P_3 \cap P_0P_4 \neq \{\emptyset\}$

Алгоритам сортирања:

1) min y (max x) <=> доња крајња десна

$P_0 = \min_y P_k$

2) сортирање према $\sphericalangle(P_0P_k, \vec{e_1})$
↳ ако је исти угао прво бирамо ближу

$P_0P_3P_1P_4P_2$ – прост

$$P(P_0P_3P_1P_4P_2) = \frac{1}{2}\left[1(-1-2)+4(-2-(-3))+2(3-(-1))+0(2-(-2))+(-1)(-3-3)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(-3+4+8+6) = \frac{15}{2}$$

Конвексни омотач

Конвексни омотач
↳ скупа тачака је конвексни полигон чија су темена тачке из тог скупа, а све остале тачке, које нису темена полигона, се налазе у унутрашњости

Конвексан скуп тачака је скуп у коме када узмете две тачке из тог скупа и спојите их с дужи, дужи читава припада унутрашњости тог скупа.
↳ неконвексан је супротно

Алгоритам „ивичне дужи" $O(n^3)$

Изаберемо две тачке скупа и проверимо да ли се остале тачке скупа све налазе са исте стране праве одређене двема тачкама.
↳ ако се не налазе, дужи коју формирају те две тачке не може бити у конвексном омотачу
↳ иначе, може

Алгоритам „паковања поклона" (gift wrap) $O(n^2)$ ← најгори случај

Кренемо од најнижег крајње десне тачке и постави кроз ту тачку хоризонталну праву и ту праву ротира око почетне тачке док права не ухвати неку тачку скупа. Кад ухвати неку, она праву савија око те тачке док не дође до следеће тачке.

„Брзи" алгоритам (quickhull) $O(n\log n)$

Кренемо од 4 екстремне тачке по x y координатама, ако се скуп лепо понаша већина тачака ће се већ наћи унутар екстремног четвороугла. Од оних тачака које су споља тражимо најудаљеније од ивице четвороугла и анурирамо омотач.

ГРАХАМОВ АЛГОРИТАМ $O(n\log n)$

→ ДА НИЈЕ ДО СОРТИРАЊА БИО БИ $O(n)$

Крећемо од најмање крајње десне тачке и сортирамо све тачке по углу који када спојимо прву тачку са сваком од тачака заклапа са позитивним делом x-осе.

↳ У пракси се узме тачка која је бесконачно далеко, и онда сортирамо према x координати

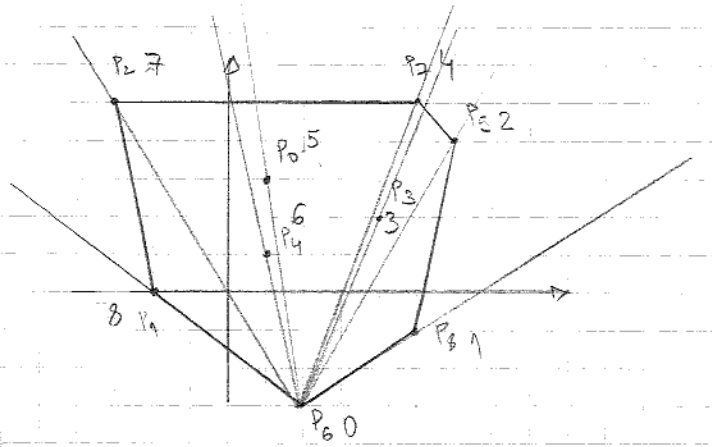
Кренемо од прве и спојимо је с последњом. Додајемо следећу тачку и гледамо троугао које оне формирају, ако је оријентација троугла позитивна онда је додата тачка део омотача.

Ако налетимо да је троугао негативне оријентације избацујемо средњу тачку од три. Тако до краја.

↳ користимо стек

[Пример 2]: Одредити конвексни омотач скупа тачака $P_0=(1,3)$, $P_1=(-2,0)$, $P_2=(-3,5)$, $P_3=(4,2)$, $P_4=(1,1)$, $P_5=(6,4)$, $P_6=(2,-3)$, $P_7=(5,5)$, $P_8=(5,-1)$

Задатак решити: а) цртањем б) Грахамовим алгоритмом



[1 6 8 5 ~~3~~ 7 ~~0~~ ~~4~~ 2 1]

$P_1P_6P_8P_5P_7P_2P_1$ – омотач

$D_{P_8P_3P_5} < 0$ – критеријум за избацивање

Триангулација полигона

Триангулација полигона

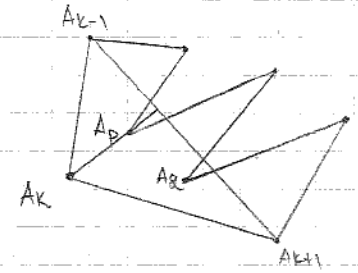
↳ Триангулација је разлагање неког лика на троуглове.

↳ У теорији не дозвољавамо додавање тачака, док се у пракси то ради

Триангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу.

[Лема 2.1]: Сваки прост полигон са више од 3 темена има унутрашњу дијагоналу.

Доказ:



$A_k = \min_{DC}$ $A_{k-1}A_{k+1}$ – дијагонала

Да ли је унутрашња?

Да → крај доказа

Не → постоји теме унутар $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$

$A_p = \max d(A, A_{k-1}A_{k+1})$

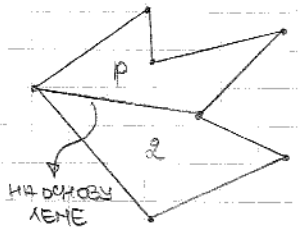
A_kA_p – унутрашња дијагонала □

[Теорема 3.1]: Сваки прост полигон допушта триангулацију и свака триангулација полигона са n темена се састоји од тачно $n-2$ троугла.

Доказ: Индукцијом по бр. темена

БИ: $n=3$ ✓

ИХ: $k<n$, n-темена

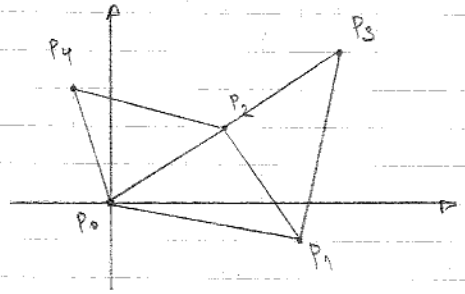


$p, q < n \overset{ИХ}{\Rightarrow} (p-2)\Delta \quad (q-2)\Delta$

$p+q=n+2$

$(p-2)+(q-2) = p+q-4 = n-2\Delta$ □

[Пример 3]: Од датих тачака у равни формирати прост полигон, а затим га триангулирати.
а) $P_0=(0,0)$, $P_1=(5,-1)$, $P_2=(3,2)$, $P_3=(6,4)$, $P_4=(-1,3)$
б) $P_0=(-1,3)$, $P_1=(2,1)$, $P_2=(0,0)$, $P_3=(4,-1)$, $P_4=(5,3)$, $P_5=(3,4)$



$P_0P_1P_3P_2P_4$

– изаберемо тачку и из ње повучемо унут. дијагонале, кад више не можемо прелазимо на наредну тачку

$P_0P_1P_2$
$P_1P_3P_2$
$P_0P_2P_4$
} почев од тачке с најмањим индексом и да увек држимо + оријентацију

Проблем уметничке галерије
↳ Поставити минималан број чувара који покривају читаву галерију. (галерија = прост полигон са n ивица, чувари = тачке унутар полигона)

Chvátal (професор): Горња граница $\frac{n}{3}$ чувара!

Алгоритам: 1) Триангулисати полигон
2) Обојити темена добијених троуглова (3-бојење)
3) Изабрати за чуваре темена обојена истом бојом.

(*)
↓
Не минимизује највећи ∡, нити се минимизују дужине страница!

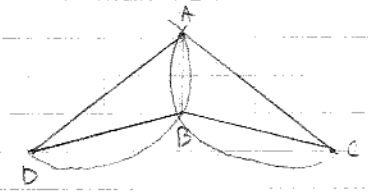
Алгоритми за триангулацију полигона

↳ унутрашњим дијагоналама
↳ „завртањем ушију" (савијамо екстреме)
↳ триангулација монотоних полигона и монотоних планина
↳ Делонијева триангулација
↳ триангулација у линеарном времену

Делонијева триангулација → када узмемо троугао и опишемо круг око њега, ниједно друго теме тог скупа неће лежати унутар тог троугла
↳ минимизује максималан полупречник круга описаног око троугла. (*)

ЛОКАЛНО ДЕЛОНЈЕВЕ ИВИЦЕ

[Дефиниција 3.1]: Унутрашња ивица AB је локално Делонијева ако тачка D не припада унутрашњости круга који садржи тачке A, B и C.



[Теорема 3.2]: Ако је T триангулација чије су све ивице локално Делонијеве, тада је T Делонијева триангулација.

ОБРТАЊЕ ИВИЦА (flip algorithm)

↳ испитамо да ли је ивица Делонијева, ако није обрнемо је

[Теорема 3.3]: Алгоритам „обртања ивица" се зауставља након $\binom{n}{2} = O(n^2)$ корака и његов резултат је Делонијева триангулација која максимизује најмањи угао на скупу свих триангулација.

Полиедарске површи

ПОЛИЕДАРСКИ МОДЕЛ ГЛАТКЕ ПОВРШИ

↳ стенсфорски зец

ПОЛИЕДАРСКИ МОДЕЛИ И ТРИАНГУЛАЦИЈА

↳ модел кике, модел аутомобила (редукција полигона)

ПРИМЕНЕ ПОЛИЕДАРСКИХ МОДЕЛА У АНИМАЦИЈИ

↳ Joda

ПРИМЕНЕ ПОЛИЕДАРСКИХ МОДЕЛА У АРХИТЕКТУРИ

↳ 2004 - Српски павиљон

ПРИМЕНЕ ПОЛИЕДАРСКИХ МОДЕЛА У ЕНТЕРИЈЕРУ

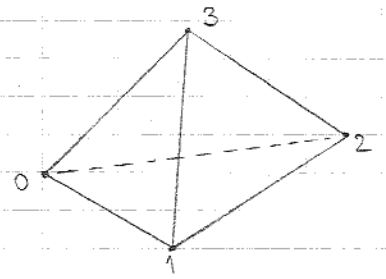
ПОЛИЕДАРСКА ПОВРШ

[Дефиниција 1.1]: Полиедарска површ M је објекат који је унија коначно много пљосни. Пљосак су конвексни полигони.
Свака ивица припада двема пљоснима (унутрашње (тачно двема) и рубне (једној) ивице).
Пресек две пљосни може бити само ивица.

Апстрактна полиедарска површ је површ о којима само знамо бр. темена, бр. пљосни, бр. ивица и њихове међусобне односе.
↳ Полиедри су апстрактне полиедарске површи које немају рубне ивице.

ТАБЕЛА ТЕМЕНА И ПОВЕЗАНОСТИ

[Пример1]: Одредити табелу повезаности тетраедра.



$T = \{0,1,2,3\}$ – темена

$T = 4$ – број темена

$P = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ – плоскни $P = 4$ – број плоскни

$I = \{01, 12, 20, 03, 13, 23\}$ – ивице $I = 6$ – број ивица

Табела повезаности

$P_0 = \langle \underline{1}, \overline{2}, 3 \rangle$ $P_2 = \langle 0, 1, 3 \rangle$

$P_1 = \langle 0, 2, 3 \rangle$ $P_3 = \langle 0, 1, 2 \rangle$

* Реконструкција ивица из табеле повезаности

$I = \{\underline{12}, \underline{23}, \underline{31}, \underline{02}, \underline{30}, \underline{01}\}$ } ако се нека ивица јави више пута – подвучемо

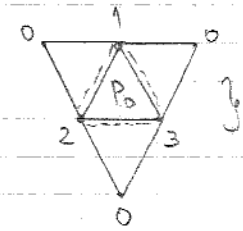
↳ подвучено = унутрашња ивица

⇒ тетраедар ⊆ полиедар

↳ неподвучено = рубне ивице

Скицирање:

1) мрежа



} савијено и спојимо нуле

[Пример2]: а) Из табеле повезаности одредити скуп ивица. б) Нацртати слику
в) Проверити да ли та табела повезаности задаје апстрактну полиедарску површ.
г) У случају потврдног одговора под в) проверити да ли је та полиедарска површ повезана.
д) Одредити руб те површи и број компонената руба.
За следеће табеле повезаности:

1) $T = \{T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5\}$, $P = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$

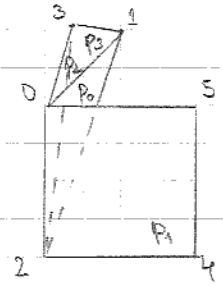
$P_0 = \langle 0,1,2 \rangle$, $P_1 = \langle 0,2,4,5 \rangle$, $P_2 = \langle 3,2,0 \rangle$, $P_3 = \langle 1,0,3 \rangle$

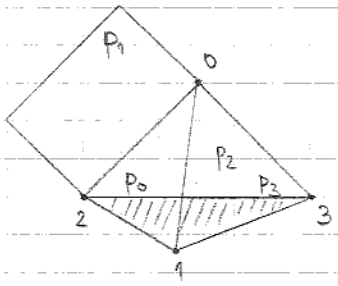
$T = \{0,1,2,3,4,5\}$ $P = \{P_0, \ldots, P_3\}$

$I = \{\underline{01}, 12, \underline{20}, 24, 45, 50, 32, \underline{03}, 31\}$

↳ није апстрактна полиедарска површ

↳ али ипак можемо да је нацртамо:





2) $T = \{T_0, T_1, \ldots, T_9, T_{10}\}$, $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$

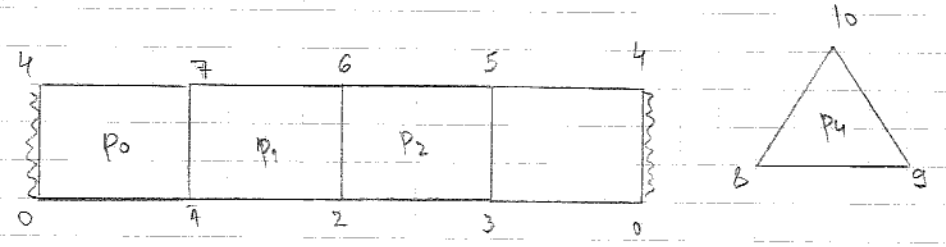
$p_0 = \langle 0,1,7,4 \rangle$, $p_1 = \langle 1,2,6,7 \rangle$, $p_2 = \langle 2,3,5,6 \rangle$, $p_3 = \langle 3,0,4,5 \rangle$, $p_4 = \langle 8,9,10 \rangle$

$\mathcal{T} = \{0, \ldots, 10\}$

$\mathcal{P} = \{p_0, \ldots, p_4\}$

$\mathcal{I} = \{01, 17, 79, 40, 12, 26, 67, 23, 35, 56, 30, 45, 89, 910, 108\}$

↳ ЈЕСТЕ АПСТРАКТНА ПОЛИЕДАРСКА ПОВРШ



2 КОМПОНЕНТЕ ПОВЕЗАНОСТИ

РУБОВИ

$\mathcal{R} = \{0123, 7456, 8910\}$

3 КОМПОНЕНТЕ РУБА (2 □, 1 △)

3) $T = \{T_0, T_1, \ldots, T_7\}$, $P = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$

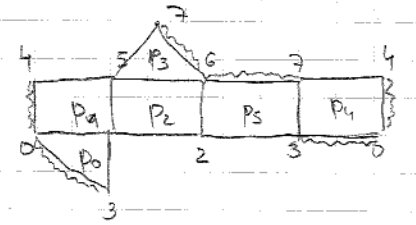
$p_0 = \langle 0,1,3 \rangle$, $p_1 = \langle 0,1,5,4 \rangle$, $p_2 = \langle 1,2,6,5 \rangle$, $p_3 = \langle 5,6,7 \rangle$, $p_4 = \langle 7,4,0,3 \rangle$, $p_5 = \langle 2,6,7,3 \rangle$

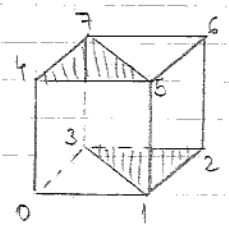
$\mathcal{T} = \{0, \ldots, 7\}$

$\mathcal{P} = \{p_0, \ldots, p_5\}$

$\mathcal{I} = \{01, 13, 30, 15, 54, 40, 12, 26, 65, 67, 75, 74, 37, 32\}$

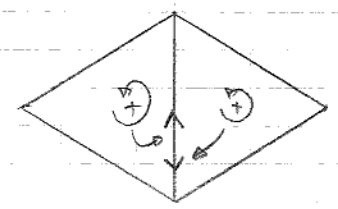
$\mathcal{R} = \{132, 547\}$ 2 – КОМПОНЕНТЕ РУБА (△)





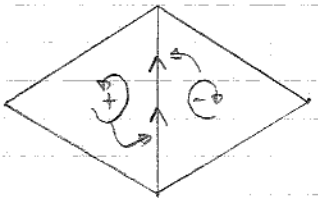
//// – ЧУПЉЕ

ОРИЈЕНТАБИЛНОСТ ПОЛИЕДАРСКЕ ПОВРШИ



} Уколико две пљосни на заједничкој ивици задају супротне оријентације онда су ово усклађене оријентације.

↳ 2 пљоснe

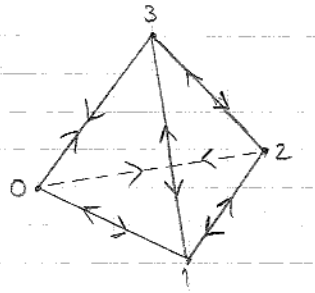


} –||– неусклађене оријентације

↳ Уколико је могуће да усклађујемо оријентацију свих пљосни неке полиедарске површи тако да добијете непротивречан усклађен систем оно што добијате је оријентабилна полиедарска површ.

ОРИЈЕНТАБИЛНОСТ (I суштинска карактеристика)

[Пример3]: Коцка је оријентабилна. (Али професорка ће показати на тетраедру)



I: Прву оријентацију неке пљоснe сами одаберемо, остале пљоснe усклађено оријентишемо.

II начин: нацртамо мрежу и све пљоснe оријентишемо +.

III начин: Преко табеле повезаности (отворт на Пример1)

$p_0 = \langle 1,2,3 \rangle$
$p_1 = \langle 0,2,3 \rangle \overset{p_0}{=} \langle 3,2,0 \rangle$
$p_2 = \langle 0,1,3 \rangle$
$p_3 = \langle 0,1,2 \rangle \overset{p_2}{=} \langle 2,1,0 \rangle$

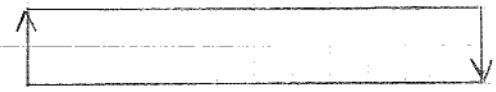
} Крећемо се у оба случаја $2 \to 3$ па мењамо оријентацију p_2 и тако даље за остале
↳ А онда се вратимо на списак ивица и да сваку унут. ивицу проверимо како је оријентисана од стране ових пљосни

$I = \{ \overset{\leftrightarrows}{12}, \overset{\leftrightarrows}{23}, \overset{\leftrightarrows}{31}, \overset{\rightleftarrows}{02}, \overset{\rightleftarrows}{30}, \overset{\leftrightarrows}{01} \}$ } ово је добро, крај

[Теорема1.1]: Полиедарски модели неке глатке површи су или сви оријентабилни или сви неоријентабилни.

[Теорема1.2]: Сваки прост полиедар је оријентабилна површ.

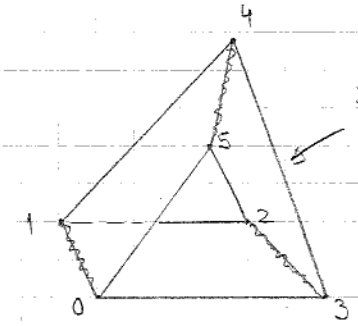
МЕБИЈУСОВА ТРАКА



} УВРНЕМО И ЗАЛЕПИМО КРАЈЕВЕ

Примери: Google Drive икона, симбол за рециклажу
полиедарског модела

[Пример 4]: Полиедарски модел Мебијусове траке је неоријентабилан.



УВРТАЊЕ СЕ ОВДЕ ДЕЛАВА

$T = \{0, \dots, 5\}$

$P = \{p_0, p_1, p_2\}$

$p_0 = \langle 0,1,4,5 \rangle$
$p_1 = \langle 0,1,2,3 \rangle \overset{p_0}{=} \langle 3,2,1,0 \rangle$
$p_2 = \langle 2,3,4,5 \rangle$ p_0

$I = \{\overleftarrow{01}, 14, \overrightarrow{45}, 50, 12, \overleftarrow{23}, 30, 34, 52\}$

$R = \{143052\}$ 1 компонента

$\Rightarrow$ неоријентабилна

Особине:

↳ једнострана је (могуће ју је сасвим обојити без скидања четкице са папира)
↳ када је пресечемо уздужно, добијамо два пута увртну једну траку. Када и ту траку пресечемо добијамо две уланчане траке.
↳ немогуће је дефинисати непрекидну нормалу на Мебијусовој траци

КЛАЈНОВА БОЦА
↳ неоријентабилна

ЈЕЛЕРОВА КАРАКТЕРИСТИКА И РОД ПОВРШИ (II суштинска карактеристика)

Јелерова карактеристика полиедарских површи M је број

$$\chi(M) = T - I + P$$

T – бр. темена, I – бр. ивица, P – бр. страни

[Теорема 1.3]: Сви полиедарски модели неке глатке површи имају исту Јелерову карактеристику.

Специјално, за полиедре важи:

$$\chi(M) = 2 - 2r$$

r – род полиедра } број рупа неке површи, неформално
↳ само полиедри

[Пример 5]: Ако је M полиедарски модел сфере, тада је $\chi(M) = 2$

↳ тетраедар као пример

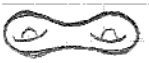
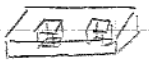
↳ фудбалска (ретро) лопта

[Пример 6]: Ојлерова карактеристика Мебијусове траке је нула.

$T = 6 \quad P = 3 \quad I = 9 \quad \Rightarrow \quad \chi(M) = 0$

[Пример 7]: Род торуса је 1.

↳ тражиће се да знамо да исцртамо позиве рода 0, 1 и 2

род	платке	модели	
0			
1			} исечемо из средине
2			} исечемо две руде

Платонова тела

Платон (457 - 347 п.н.е) „Тимај" или „О метафизици"

↳ тетраедар (сувода ватре)

↳ октаедар (покретљивост ваздуха)

↳ икосаедар (влажност воде)

↳ хексаедар (коцка) (стабилност земље)

↳ додекаедар (универзум)

Леонардо да Винчи се бавио њима.

Јохан Кепер покушава да објасни растојања планета и њихових пречника користећи њих.

[Теорема 1.4]: Постоји тачно пет Платонових тела.

Доказ:

T - број темена $\quad p$ - бр. ивица из истог темена

P - бр. плоснi $\quad q$ - бр. ивица једне плоснi

I - бр. ивица

p	q	T	I	P	
3	3	4	6	4	тетраедар
3	4	8	12	6	хексаедар
4	3	6	12	8	октаедар
3	5	20	30	12	додекаедар
5	3	12	30	20	икосаедар

$$\chi = T - I + P = 2$$

$p \cdot T = 2I$

$q \cdot P = 2I$

$$2 = T - I + P = \frac{2I}{p} - I + \frac{2I}{q} \Big/ : 2I$$

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{I} > \frac{1}{2} \quad \text{за } I \in \mathbb{N}$$

тражимо $p, q \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$

↳ тела која заменују места T и P називају се дуална Платонова тела

↳ сваку плоснu уствари заменимо теменом (у теоријуту)

ДУАЛНОСТ ПЛАТОНОВИХ ТЕЛА

↳ СВАКУ ПЉОСАН ЗАМЕНИМО ТЕМЕНОМ (У ТЕЖИШТУ)

↳ УПИСИВАЊЕ ТЕЛА ТЕЖИ ТЕЖИШТУ ПОЧЕТНОГ И СВАКОГ СЛЕДЕЋЕГ

↳ ТРАЖИТЕ СЕ ДА ЗНАМО ДА НАЦРТАМО (НЕ ТРЕБА ИКОСАЕДАР И ДОДЕКАЕДАР) (ЊИХОВА ДУАЛНОСТ)

КОНСТРУКЦИЈА ПЛАТОНОВИХ ТЕЛА

↳ СНИМЦИ НА ПРЕЗЕНТАЦИЈИ

ИКОСАЕДАР СЕ КОНСТРУИШЕ КОРИШЋЕЊЕМ ЗЛАТНИХ ПРАВОУГАОНИКА (ЧИЈЕ СЕ ИЗВИЦЕ ОДНОСЕ У ОДНОСУ ЗЛАТНОГ ПРЕСЕКА).

↳ $(a+b) : a = a : b$

↳ ПОГЛЕДАТИ ПРЕЗЕНТАЦИЈУ ЗА СЛИКУ

Срећно на испиту!