

Verovatnoća

Slučajne promenljive

Diskretne slučajne promenljive preslikavaju ishode iz prebrojivog skupa ishoda u skup verovatnoća:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots \\ P_1 & P_2 & P_3 & \dots \end{pmatrix}$$

Važi:

- $P\{X \leq x\} = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\{X_i \leq x\}$
- $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$

Neprekidne slučajne promenljive preslikavaju ishode iz neprebrojivog skupa ishoda u funkciju definisanu na nekom beskonačnom domenu. Važi:

- funkcija raspodele** je $F(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(x)dx$
- funkcija gustine** je $f(x) = F'(x) = P\{x \in A\} = \int_A f(x)dx$

Događaji A i B su nezavisni ako je $P(AB) = P(A)P(B)$.

- diskretne:** $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$
- neprekidne:** $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$

Raspodela, očekivanje i disperzija

Raspodela je matematička funkcija koja daje verovatnoću pojave različitih mogućih ishoda u eksperimentu. Može biti **diskretna** i **neprekidna**, u zavisnosti od toga da li je skup mogućih ishoda diskretan ili neprekidan.

Matematičko očekivanje (EX) predstavlja prosečnu (srednju) očekivanu vrednost slučajne promenljive. Očekivanje se računa po sledećim formulama:

- diskretne:** $EX = \sum_{i=1}^{\infty} X_i P_i$
- neprekidne:** $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

Disperzija (DX) predstavlja prosečno kvadratno odstupanje od matematičkog očekivanja, odnosno opisuje koliko je raspodela "raspršena" u odnosu na očekivanje. Disperzija se definiše kao $DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$.

Standardno odstupanje je $\delta X = \sqrt{DX}$.

Osobine:

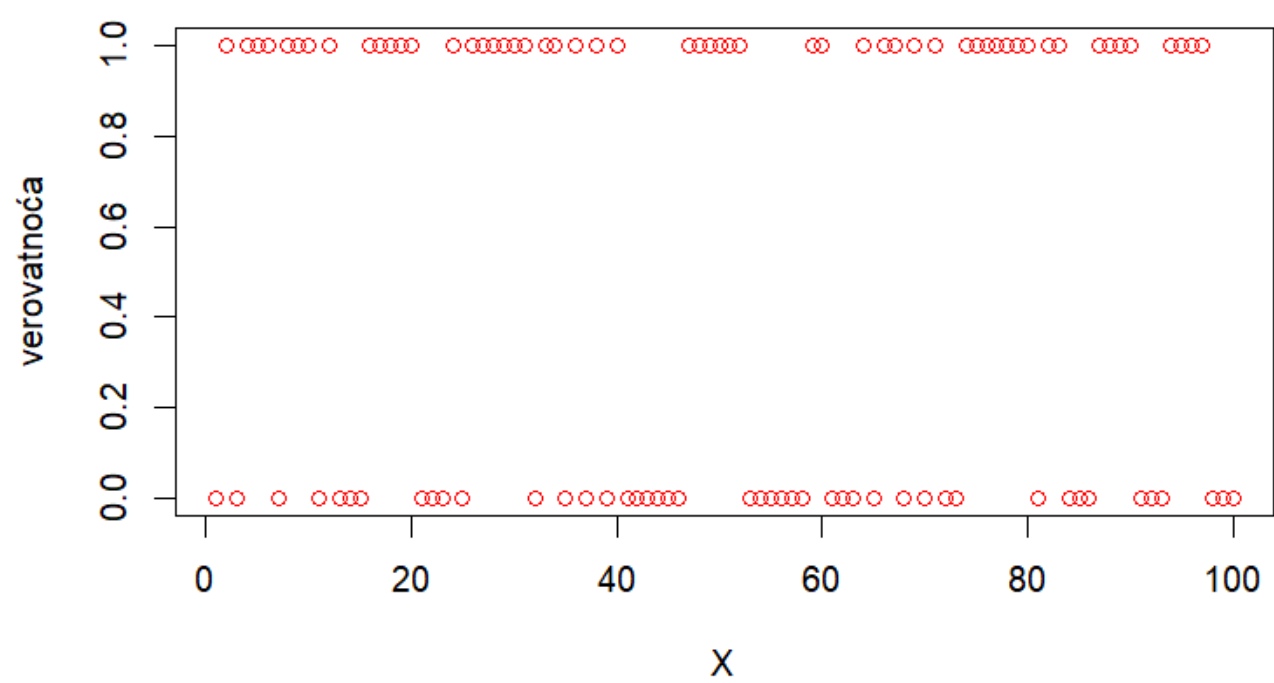
- $E(aX + b) = aEX + b$
- $E(X + Y) = EX + EY$
- $D(aX + b) = a^2DX$
- $D(X + Y) = DX + DY$, pod uslovom da su X i Y nezavisne promenljive

Diskretne raspodele

1. **Bernulijeva raspodela (indikator)** $X \sim I: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

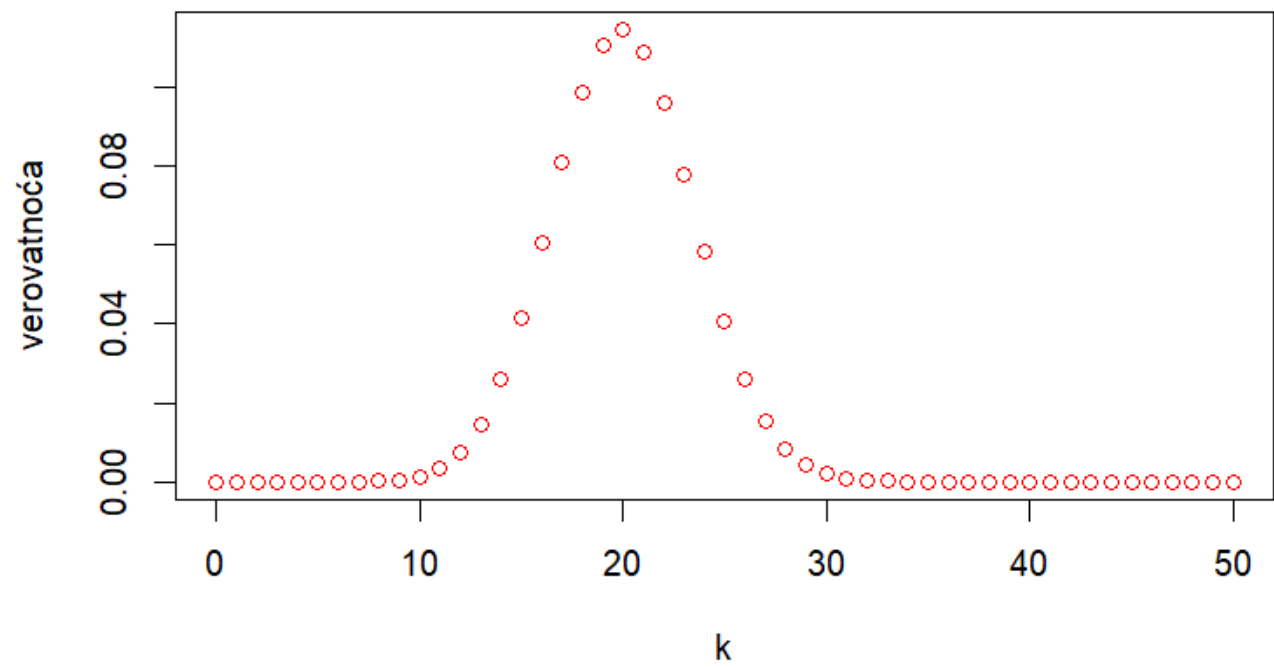
- Koristi se za modelovanje jednog eksperimenta, gde je verovatnoća da eksperiment uspe jednaka p , a da ne uspe $1 - p$. Predstavlja poseban slučaj binomne raspodele.
- $EX = p, DX = p(1 - p)$

- Primer - bacanje novčića 100 puta ($p = 0.5$):



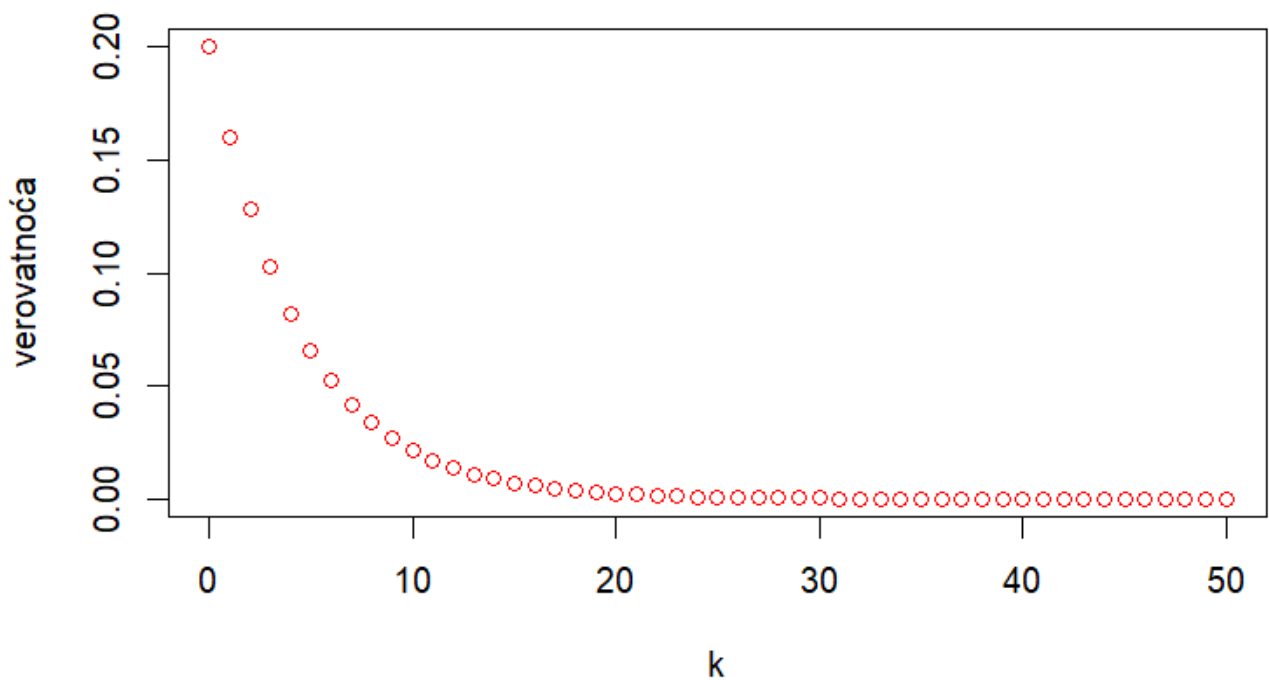
2. **Binomna raspodela** $X \sim B(n, p)$: $P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

- Koristi se za modelovanje n eksperimenata, gde je verovatnoća da svaki eksperiment uspe jednaka p , a da ne uspe $1 - p$ i svi su međusobno nezavisni.
- $EX = np$, $DX = np(1 - p)$
- Primer - $B(50, 0.4)$:



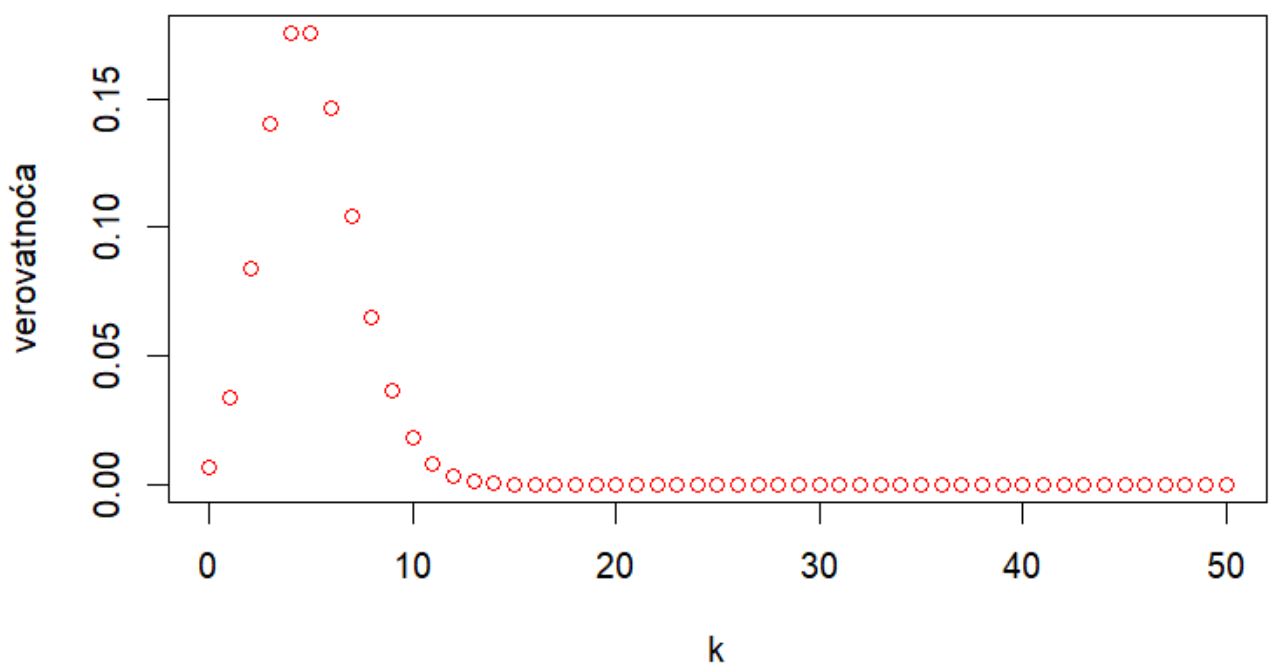
3. **Geometrijska raspodela** $X \sim G(p)$: $P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p$

- Koristi se za modelovanje problema gde ponavljamo eksperiment sve dok on ne uspe, a verovatnoća da uspe je p .
- $EX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{1-p}{p^2}$
- Primer - $G(0.2)$:



4. **Poasonova raspodela** $X \sim P(\lambda)$: $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda > 0$

- Koristi se za izražavanje verovatnoće da se određeni broj događaja desio u fiksnom intervalu vremena ili prostora, ako se oni događaju poznatom konstantnom brzinom i nezavisno od vremena poslednjeg događaja.
- $EX = \lambda$, $DX = \lambda$
- Primer - $P(5)$:

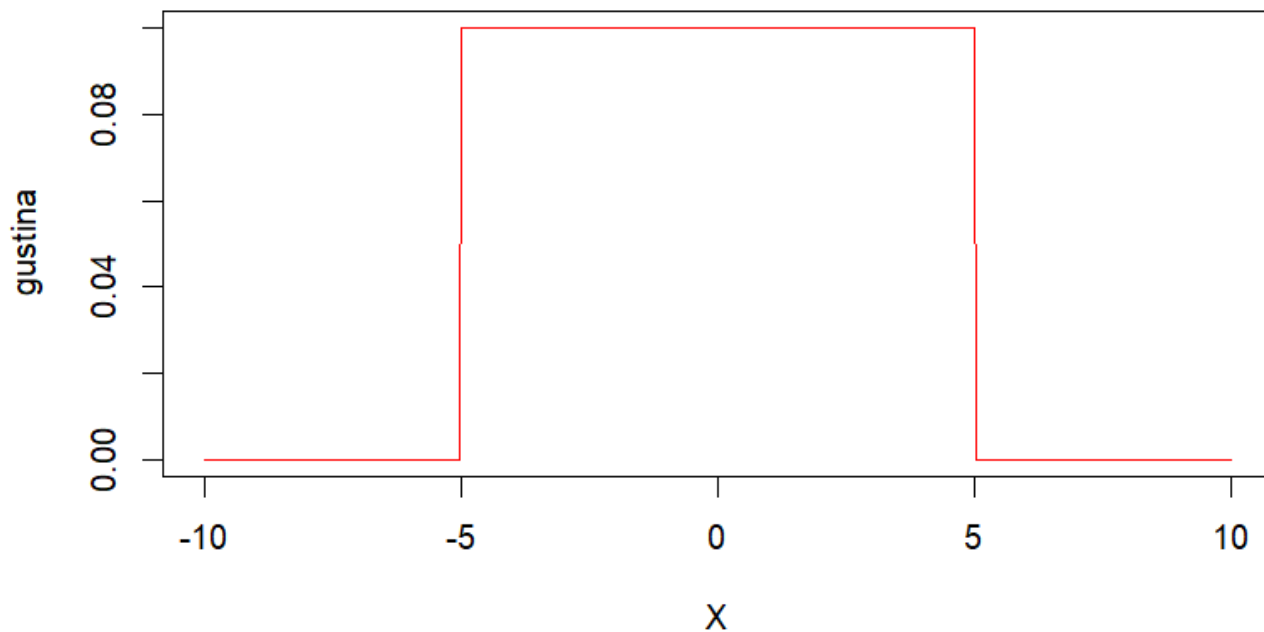


Neprekidne raspodele

1. **Uniformna raspodela** $X \sim U[a, b]$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$

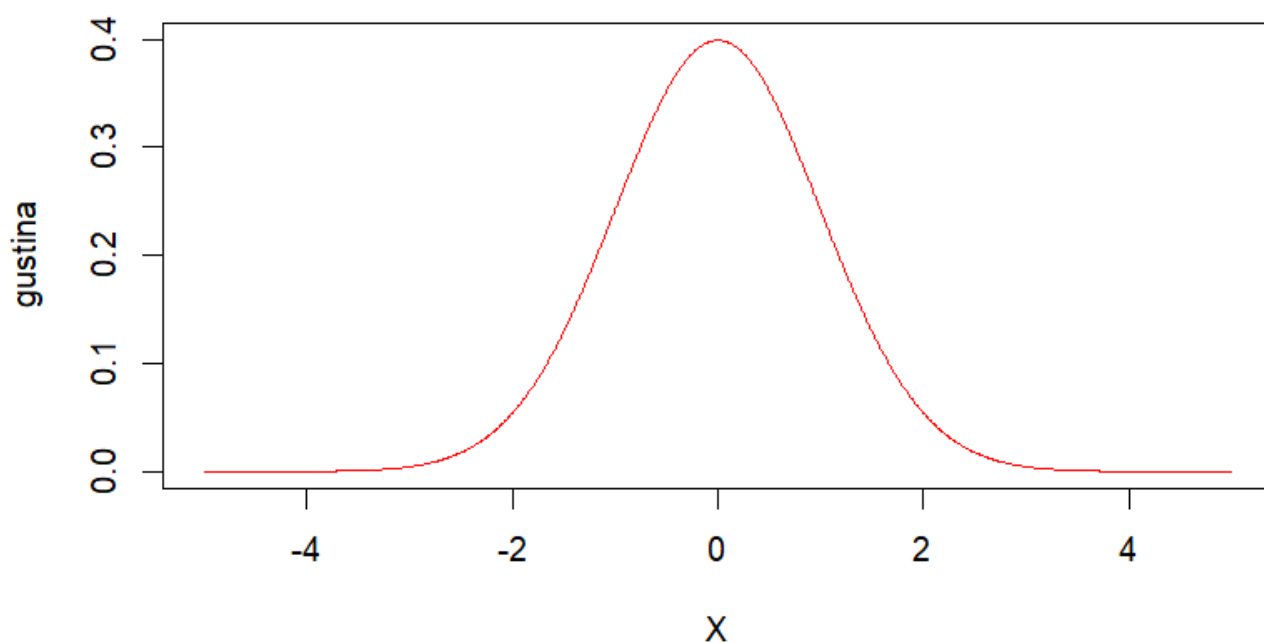
- Koristi se za modelovanje eksperimenata gde je svaki mogući ishod u posmatranom intervalu jednako verovatan.

- $F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$
- $EX = \frac{a+b}{2}, DX = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Primer - $U[-5, 5]$:



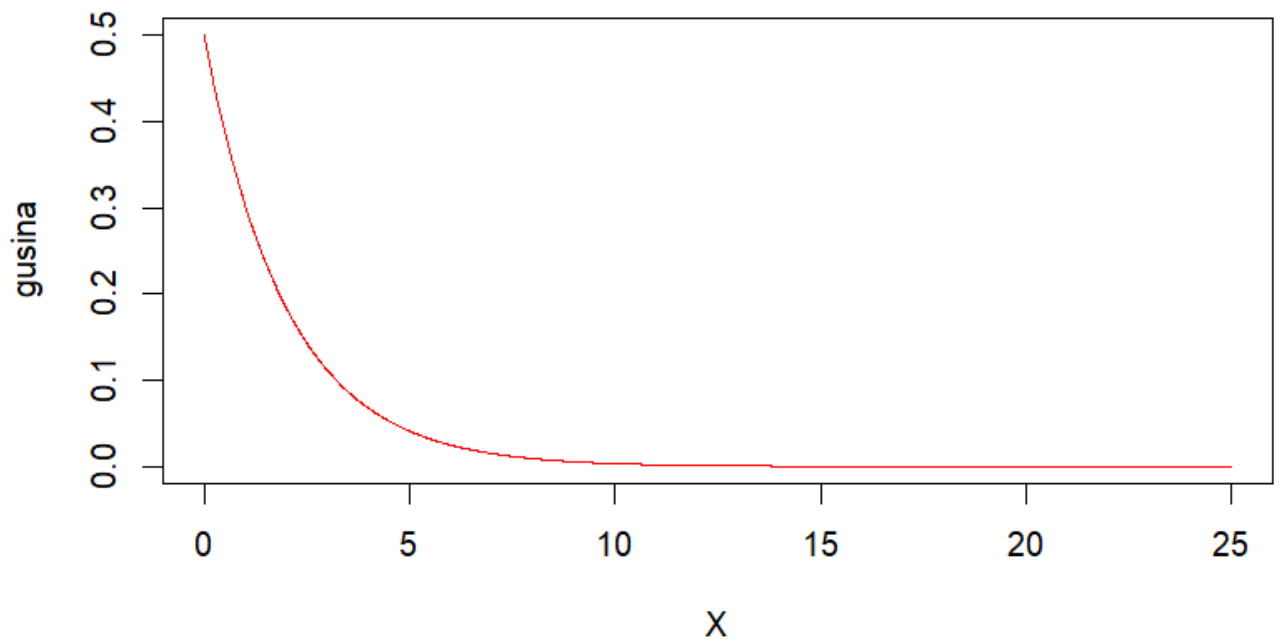
2. **Normalna (Gausova) raspodela** $X \sim N(m, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in R, m \in R, \sigma^2 > 0$

- Veliki broj pojava u prirodi i društvu ima normalnu raspodelu, npr. visina, težina, greške pri merenju, IQ.
- $EX = m, DX = \sigma^2$
- Primer:



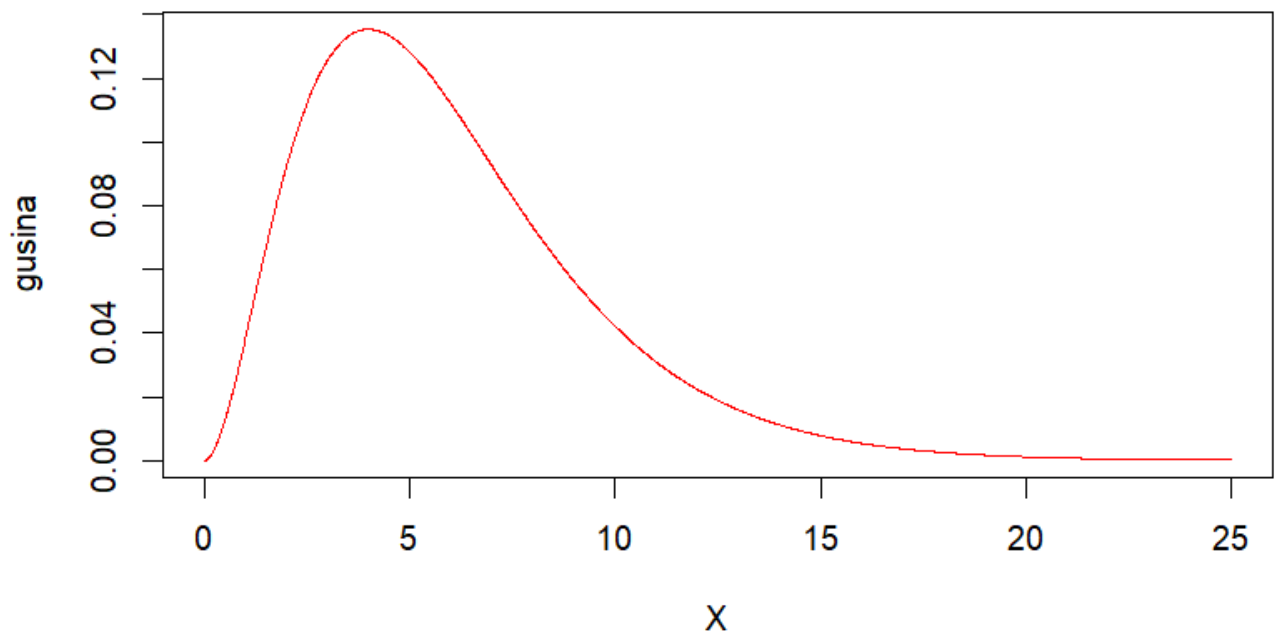
3. **Eksponencijalna raspodela** $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$: $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \lambda > 0$

- Koristi se za predstavljanje vremena između događaja Poasonove raspodele. Predstavlja poseban slučaj gama raspodele.
- $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $EX = \frac{1}{\lambda}, DX = \frac{1}{\lambda^2}$
- Primer - $\mathcal{E}(0.5)$:



4. **Gama raspodela** $X \sim \gamma(\alpha, \beta)$: $f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$

- Koristi se za modelovanje vremena između nezavisnih događaja koji imaju konzistente prosečne vremenske intervale, na primer kao što su padavine.
- $EX = \frac{\alpha}{\beta}$, $DX = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- Primer - $\gamma(3, 0.5)$:



Teoreme

Zakon velikih brojeva tvrdi da se relativna verovatnoća slučajnog događaja približava verovatnoći ovog događaja kada se slučajni eksperiment ponavlja veliki broj puta. Formalnije, radi se o konvergenciji slučajne promenljive u jakom smislu (skoro sigurna konvergencija) i slabom smislu (konvergencija verovatnoće):

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - EX_1\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0$$

Centralna granična teorema tvrdi da suma velikog broja nezavisnih i identično raspoređenih slučajnih promenljivih teži normalnoj raspodeli verovatnoće:

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - nEX_1}{\sqrt{nDX_1}} \sim N[0,1]$$