# Primena projektivne geometrije u računarstvu

## Ispitna pitanja - 2023/2024.

## 1. Veza homogenih i afinih koordinata tačke. Primer. Prevođenje afine jednačine prave u homogenu.

**Afine**, tj. **standardne koordinate** omogućavaju jednostavan račun sa ravanskim objektima (tačke, prave, duži, trouglovi, ...) i one su u obliku (x, y). **Afina ravan** se označava sa $R^2$. **Homogene koordinate** omogućavaju da afinoj ravni dodamo beskonačno daleke tačke:

- Homogene koordinate tačke M(x, y) afine ravni su ma koja tačka $(x_1:x_2:x_3)$ tako da važi x = $\frac{x_1}{x_3}$, y = $\frac{x_2}{x_3}$, $x_3 \neq 0$ **(1)**

**Primer**: A(3, 4) $\rightarrow$ A(3:4:1) ili A(6:8:2). Ako su $(x_1:x_2:x_3)$ homogene koordinate neke tačke tada su i $(\lambda x_1:\lambda x_2:\lambda x_3)$, $\lambda \neq 0$ homogene koordinate iste tačke. Vektor $\vec{M}$ = $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ naziva se **vektor predstavnik tačke M**$(x_1:x_2:x_3)$.

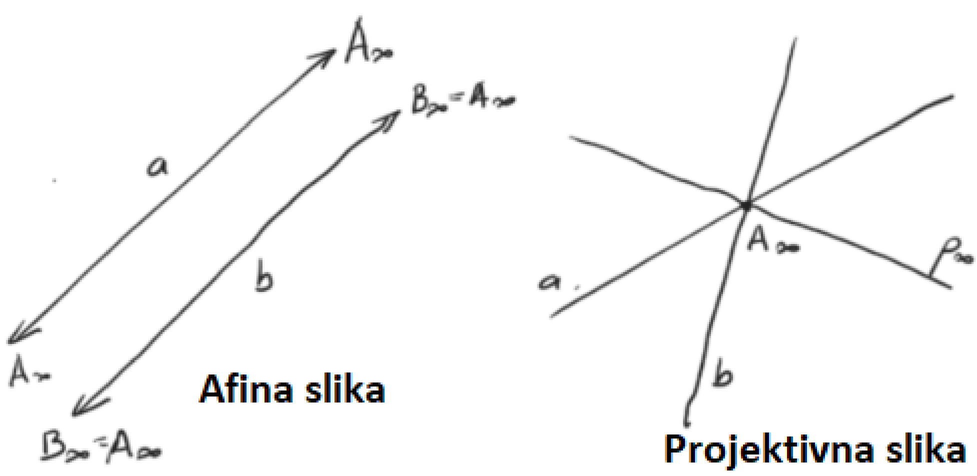
Prava p: ax + by + c = 0 afine ravni zamenom relacija **(1)** dobija oblik:

$$a\frac{x_1}{x_3} + b\frac{x_2}{x_3} + c = 0 \,/\cdot x_3 \neq 0$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 - \mathit{jedna\check{c}ina\ prave\ u\ homogenim\ koordinatama}$$

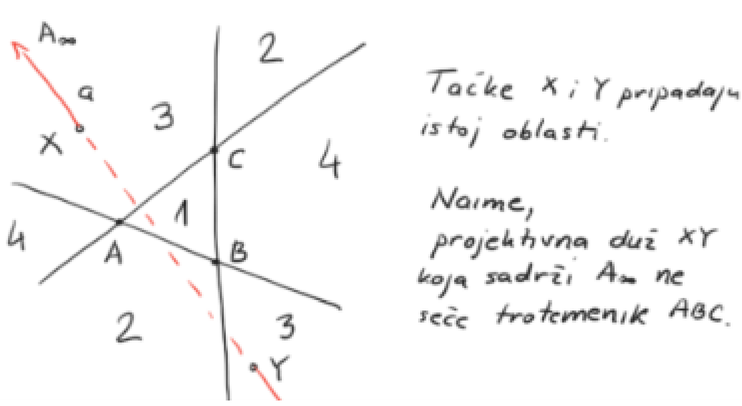
Ako pomnožimo homogenu jednačinu prave sa $\lambda \neq 0$ dobijamo jednačinu iste prave. Trojku [a:b:c] zovemo **homogenim koordinatama prave p**, a bilo koji od proprocionalnih vektora $\vec{p}$ = (a, b, c) zovemo **vektorom predstavnikom prave p**.

Prava $p_\infty$: $x_3$ = 0 naziva se **beskonačno daleka prava**, a svaka tačka $B_\infty(x_1:x_2:0)$ koja joj pripada **beskonačno daleka tačka**. Afina ravan dopunjena tačkama beskonačno daleke prave naziva se **dopunjena** ili **proširena afina ravan** i označava sa $\overline{R^2}$. Paralelne prave afine ravni se seku u beskonačno dalekim tačkama dopunjene afine ravni:




## 2. Definicija trotemenika i "dokaz" tvrđenja da trotemenik razbija projektivnu ravan na 4 oblasti. Crtež.

**Trotemenik** ABC je figura projektivne ravni koj se sastoji od tri nekolinearne tačke A, B, C (**temena**) i tri prave AB, BC, CA (**ivice**) njima određene. Trotemenik razbija projektivnu ravan kojoj pripada na 4 oblasti:




**Dokaz**: Posmatramo tačke X i Y koje pripadaju afino različitim oblastima označenim brojem 3. Prava a = XY je razbijena tačkama X i Y na dve projektivne duži od kojih jedna seče trotemenik, a druga koja sadrži $A_\infty$ ne seče. Zbog duži koja "spaja" X i Y te tačke pripadaju istoj projektivnoj oblasti. □

## 3. Definicija dvorazmere tačaka i dvorazmere pravih. Dokaz Teoreme 4. Definicija centralnog projektovanja. Dokaz da je dvorazmera invarijanta centralnog projektovanja.

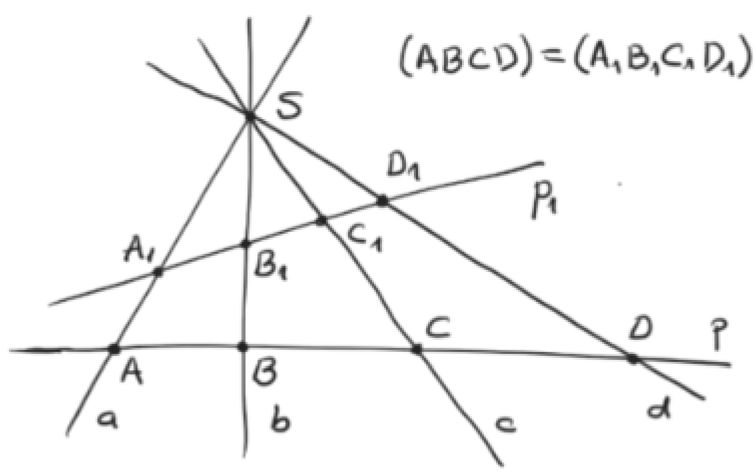
Projektivna geometrija ne čuva ni dužinu, ni razmeru, ali čuva dvorazmeru. Neka su A, B, C i D kolinearne tačke pri čemu važi $\vec{C}$ = $\alpha\vec{A}$ + $\beta\vec{B}$ i $\vec{D}$ = $\gamma\vec{A}$ + $\delta\vec{B}$. **Dvorazmera tačaka A, B, C i D** je broj (A, B, C, D) = $\frac{\beta}{\alpha}$ : $\frac{\delta}{\gamma}$. Za kolinearne tačke A, B, C, D kažemo da su **harmonijski konjugovane** ako je (A, B, C, D) = -1. Neka su a, b, c, d konkurentne prave pri čemu važi $\vec{c}$ = $\alpha\vec{a}$ + $\beta\vec{b}$ i $\vec{d}$ = $\gamma\vec{a}$ + $\delta\vec{b}$. **Dvorazmera pravih a, b, c i d** je broj (a, b, c, d) = $\frac{\beta}{\alpha}$ : $\frac{\delta}{\gamma}$. Dvorazmera ne zavisi od izbora vektora predstavnika.

**Osobine dvorazmere**:

- (A, B, C, D) = (B, A, C, D)$^{-1}$
- (A, B, C, D) = (C, D, A, B)
- za različite tačke važi (A, B, C, D) $\neq$ 0, 1
- Ako su tačke A, B i C kolinearne i M $\neq$ 0, 1 tada postoji jedinstvena tačka D $\in$ AB tako da (A, B, C, D) = M.

**T4**: Ako su a, b, c, d konkurentne prave i A $\in$ a, B $\in$ b, C $\in$ c, D $\in$ d kolinearne tačke tada je (A, B, C, D) = (a, b, c, d).
**Dokaz**: Po definiciji važi (a, b, c, d) = $\frac{\beta}{\alpha}$ : $\frac{\delta}{\gamma}$ i $\vec{c}$ = $\alpha\vec{a}$ + $\beta\vec{b}$, $\vec{d}$ = $\gamma\vec{a}$ + $\delta\vec{b}$. Ako sa p označimo pravu koja sadrži tačke A, B, C i D onda C = $\vec{c} \times \vec{p}$ = $\alpha(\vec{a} \times \vec{p})$ + $\beta(\vec{b} \times \vec{p})$ $\Rightarrow$ $\vec{C}$ = $\alpha\vec{A}$ + $\beta\vec{B}$ i D = $\vec{d} \times \vec{p}$ = $\gamma(\vec{a} \times \vec{p})$ + $\delta(\vec{b} \times \vec{p})$ $\Rightarrow$ $\vec{D}$ = $\gamma\vec{A}$ + $\delta\vec{B}$. Odatle je (A, B, C, D) = $\frac{\beta}{\alpha}$ : $\frac{\delta}{\gamma}$ = (a, b, c, d). □

**Centralno projektovanje** sa centrom S je preslikavanje prostora $R^3$ na ravan $\pi \subset R^3$ koje tačku M $\in R^3$ preslikava u tačku M$'$ = SM $\cap$ $\pi$. Centralno projektovanje preslikava pravu p prostora u pravu $p_1$ u ravni. **Posledica 1**: Dvorazmera je invarijanta centralnog projektovanja.
**Dokaz**:




A, B, C, D $\in$ p su kolinearne tačke, a $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ $\in$ $p_1$ njihove slike pri centralnom projektovanju iz S. Dva puta koristeći **T4** dobijamo (A, B, C, D) = (a, b, c, d) = ($A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$). □

## 4. Definicija projektivnog preslikavanja. Dokaz da projektivna preslikavanja čuvaju dvorazmeru. Definicija tačaka u opštem položaju. Formulacija osnovne teoreme projektivne geometrije.

**Projektivno preslikavanje** f: $RP^2 \rightarrow RP^2$ je preslikavanje koje preslikava tačku M($x_1$:$x_2$:$x_3$) u tačku M$'$($x_1'$:$x_2'$:$x_3'$) po formuli $\lambda x' = Px$ **(1)**, odnosno:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \lambda \neq 0, \ det(P) \neq 0$$

Projektivno preslikavanje čuva kolinearnost, konkurentnost i **dvorazmeru** pravih i tačaka.

**Dokaz**:
Neka su tačke A, B, C, D kolinearne, odnosno važi $\vec{C}$ = $\alpha\vec{A}$ + $\beta\vec{B}$ i $\vec{D}$ = $\gamma\vec{A}$ + $\delta\vec{B}$. Primenom preslikavanja f oblika **(1)** dobijamo $\vec{C}'$ = $\vec{PC}$ = P($\alpha\vec{A}$ + $\beta\vec{B}$) = $\alpha$P$\vec{A}$ + $\beta$P$\vec{B}$ = $\alpha\vec{A}'$ + $\beta\vec{B}'$. Jasno je da su i A$'$ = f(A), B$'$ = f(B) i C$'$ = f(C) kolinearne. Analogno dobijamo D$'$ = f(D) = $\gamma\vec{A}'$ + $\delta\vec{B}'$. Odatle dobijamo (A$'$, B$'$, C$'$, D$'$) = $\frac{\beta}{\alpha}$ : $\frac{\delta}{\gamma}$ = (A, B, C, D). □

Za četiri tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne kažemo da su u **opštem položaju**.

**Osnovna teorema projektivne geometrije**: Postoji jedinstveno projektivno preslikavanje projektivne ravni $RP^2$ koje četiri tačke A, B, C, D u opštem položaju slika redom u tačke A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ u opštem položaju.

## 5. Naivni algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja.

**Ulaz**: homogene koordinate 4 originalne tačke A, B, C, D i 4 njihove slike A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ u opštem položaju.
**Izlaz**: 3 $\times$ 3 matrica P projektivnog preslikavanja ravni koja slika A, B, C, D u A$'$, B$'$, C$'$, D$'$.
**Algoritam**:

1. Odrediti $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ tako da D = $\alpha$A + $\beta$B + $\gamma$C. $P_1$ je matrica sa kolonama $\alpha$A, $\beta$B, $\gamma$C.
2. Odrediti $\alpha', \beta', \gamma' \neq 0$ tako da D$'$ = $\alpha'$A$'$ + $\beta'$B$'$ + $\gamma'$C$'$. $P_2$ je matrica sa kolonama $\alpha'$A$'$, $\beta'$B$'$, $\gamma'$C$'$.
3. Tražena matrica preslikavanja je P = $P_2 P_1^{-1}$. Matrica je određena do na $\lambda$P, $\lambda \neq 0$.

**Prednosti**: geometrijski jasan i jednostavan za implementaciju.
**Mane**: radi samo za 4 tačke, a u praksi je često potrebno izvršiti algoritam za mnogo više tačaka.

## 6. Dve jednačine koje važe za matricu P projektivnog preslikavanja, a koje se dobijaju iz odgovarajućih tačaka M i M$'$ bez izvođenja. Primer. DLT algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja.

**Lema**: Neka su M($x_1$:$x_2$:$x_3$) i M$'$($x_1'$:$x_2'$:$x_3'$), $x_3' \neq 0$ odgovarajuće tačke projektivnog preslikavanja ravni čija je matrica P = ($p_{ij}$). Tada vektor ($p_{11}$, $p_{12}$, $p_{13}$, $p_{21}$, $p_{22}$, $p_{23}$, $p_{31}$, $p_{32}$, $p_{33}$) zadovoljava homogeni sistem ranga 2 čija je matrica formata 2 $\times$ 9:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -x_3'x_1 & -x_3'x_2 & -x_3'x_3 & x_2'x_1 & x_2'x_2 & x_2'x_3 \\ x_3'x_1 & x_3'x_2 & x_3'x_3 & 0 & 0 & 0 & -x_1'x_1 & -x_1'x_2 & -x_1'x_3 \end{pmatrix}$$

**Primer**: X(1:2:3) $\rightarrow$ X$'$(4:5:6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6\cdot 1 & -6\cdot 2 & -6\cdot 3 & 5\cdot 1 & 5\cdot 2 & 5\cdot 3 \\ 6\cdot 1 & 6\cdot 2 & 6\cdot 3 & 0 & 0 & 0 & -4\cdot 1 & -4\cdot 2 & -4\cdot 3 \end{pmatrix} (p_{ij}) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & -18 & 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 & 0 & 0 & 0 & -4 & -8 & -12 \end{pmatrix} (p_{ij}) = 0$$

$$0\cdot p_{11} + 0\cdot p_{12} + 0\cdot p_{13} - 6\cdot p_{21} - 12\cdot p_{22} - 18\cdot p_{23} + 5\cdot p_{31} + 10\cdot p_{32} + 15\cdot p_{33} = 0$$

$$6\cdot p_{11} + 12\cdot p_{12} + 18\cdot p_{13} + 0\cdot p_{21} + 0\cdot p_{22} + 0\cdot p_{23} - 4\cdot p_{31} - 8\cdot p_{32} - 12\cdot p_{33} = 0$$

**SVD** (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition) **dekompozicija** matrice:
Ako je A matrica formata m$\times$n postoji jednoznačna dekompozicija A = UD$V^T$ gde je U ortogonalna matrica formata n$\times$ n, V ortogonalna matrica formata m$\times$m, a D kvazidiagonalna matrica formata n$\times$m sa opadajućim pozitivnim vrednostima na dijagonali.

**DLT** (**D**irect **L**inear **T**ransformation) **algoritam**:

**Ulaz**: homogene koordinate n (n $\geq$ 4) originalnih tačaka $M_i$ i n njihovih slika $M_i'$.
**Izlaz**: 3 $\times$ 3 matrica P projektivnog preslikavanja tako da $\lambda M_i'$ = P$M_i$.
**Algoritam**:

1. Za svaku korespodenciju $M_i \leftrightarrow M_i'$ odrediti 2 $\times$ 9 matricu kao u lemi.
2. Spojiti te matrice u jednu matricu A formata 2n $\times$ 9.
3. Odrediti SVD dekompoziciju matrice A, A = UD$V^T$.

4. Matrica P je poslednja kolona matrice V.

**Prednosti**: algoritam minimalizuje grešku i određuje preslikavanje sa više od 4 korespodencije.
**Mane**: algoritam je algebarske, a ne geometrijske prirode, pa i pored minimalizacije i dalje postoji neka greška. Takođe, nije invarijantan u odnosu na promenu koordinata.

## 7. Algoritam normalizacije koordinata tačaka. Zašto se radi normalizacija tačaka pri određivanju projektivnog preslikavanja?

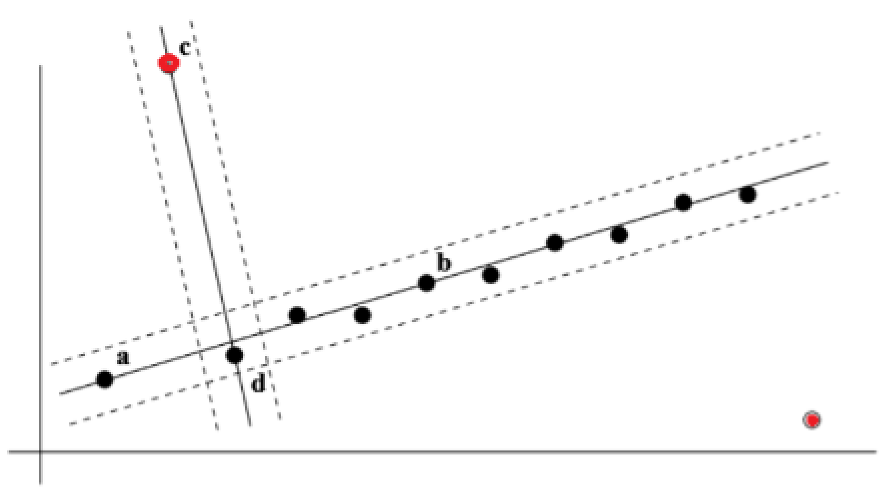
**Ulaz**: homogene koordinate n tačaka $M_i$.
**Izlaz**: normalizovane koordinate n tačaka $\overline{M}_i$ (ili matrica normalizacije T).
**Algoritam**:

1. Izračunati afino težiste C sistema n tačaka $M_i$.
2. Translirati tačke translacijom koja težište C translira u koordinatni početak. Matrica translacije je G.
3. Skalirati tačke tako da prosečna udaljenost tačke od početka bude $\sqrt{2}$ - ako je prosečna udaljenost bila p onda je koeficijent homotetije $\frac{\sqrt{2}}{p}$. Matrica homotetije je S.
4. Matrica normalizacija je T = SG.
5. Tačke $\overline{M}_i$ = $TM_i$ su normalizovane tačke.

Normalizacija tačaka pri određivanju projektivnog preslikavanja se vrši u cilju smanjenja numeričke greške, ali i da matrica preslikavanja P ne zavisi od izbora koordinata. **DLT algoritam sa normalizacijom** podrazumeva da se DLT algoritam primenjuje na normalizovanim originalima i normalizovanim slikama. Ako je $\overline{P}$ matrica dobijena primenom DLT algoritma na normalizovanim tačkama, a matrice T i $T'$ redom matrice normalizacije originala i slika, onda je tražena matrica projektivnog preslikavanja P = $T'^{-1}\overline{P}T$.

## 8. Objasniti RANSAC algoritam na primeru linearne aproksimacije skupa tačaka ravni.

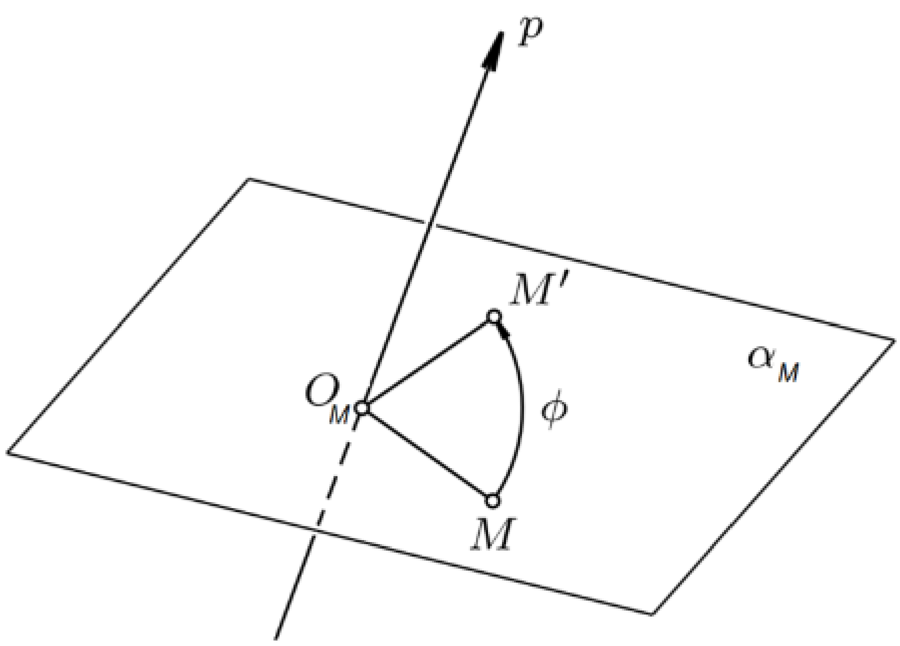
Prilikom određivanja projektivnih preslikavanja do velikih grešaka dovode tačke koje su sasvim pogrešno identifikovane. Pogrešne tačke nazivamo **uljezima** (**outliers**), dok su ostale **tačne tačke** (**inliers**). Prikaz **RANSAC** (**RAN**dom **SA**mple **C**onsensus) algoritma na primeru određivanja prave koja najbolje aproksimira skup tačaka ravni:




1. Dve tačke se slučajno biraju i one određuju pravu. Nosač te prave su tačke koje su na $\epsilon$-udaljenosti od prave. Ako se u nosaču nalazi dovoljan broj tačaka, ide se na poslednji korak.
2. Određen broj puta se biraju po dve tačke i određuje nosač, najviše n puta.
3. Konsenzusom se bira nosač sa najviše tačaka.
4. Tačke odabranog nosača se smatraju tačnim, a ostale uljezima. Algoritam za određivanje prave se onda primenjuje samo nad tačnim tačkama.

### 9. Definisati rotaciju oko orijentisane prave u prostoru. Crtež. Napisati matrice rotacije oko koordinatnih osa.

Neka je M proizvoljna tačka, $\alpha_M$ ravan koja sadrži M i normalna je na pravu p, a O$_M$ = p $\cap \alpha_M$. Tačka M$'$ = $R_p(\phi)$(M) se dobija **rotacijom** tačke M ravni $\alpha_M$ oko tačke O$_M$ za ugao $\phi$. Orijentisanu pravu p zovemo **osa rotacije**. Smer rotacije određuje činjenica da vektori $\overrightarrow{O_M M}$, $\overrightarrow{O_M M'}$ i $\vec{p}$ čine bazu pozitivne orijentacije.




Neka je Oxyz fiksiran **svetski koordinatni sistem**. Rotacije oko koordinatnih osa zovemo **svetske rotacije**:

$$R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix},\ R_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix},\ R_z(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### 10. Napisati detaljnu Rodrigezovu formulu i objasniti šta ona radi.

**Formula Rodrigeza**: matrica rotacije $R_p(\phi)$ za ugao $\phi$ oko prave čiji je **jedinični vektor** p, a koja sadrži koordinatni početak je:

$$[R_p(\phi)] = (1 - \cos\phi)pp^T + \cos\phi E + \sin\phi p_x$$

- p$_x$ je matrica vektorskog množenja vektorom $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$: $\begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$.
- pp$^T$ je matrica normalnog projektovanja na jedinični vektor $\vec{p}$: pp$^T$ = $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^2 \end{pmatrix}$.
- E je jedinična matrica.

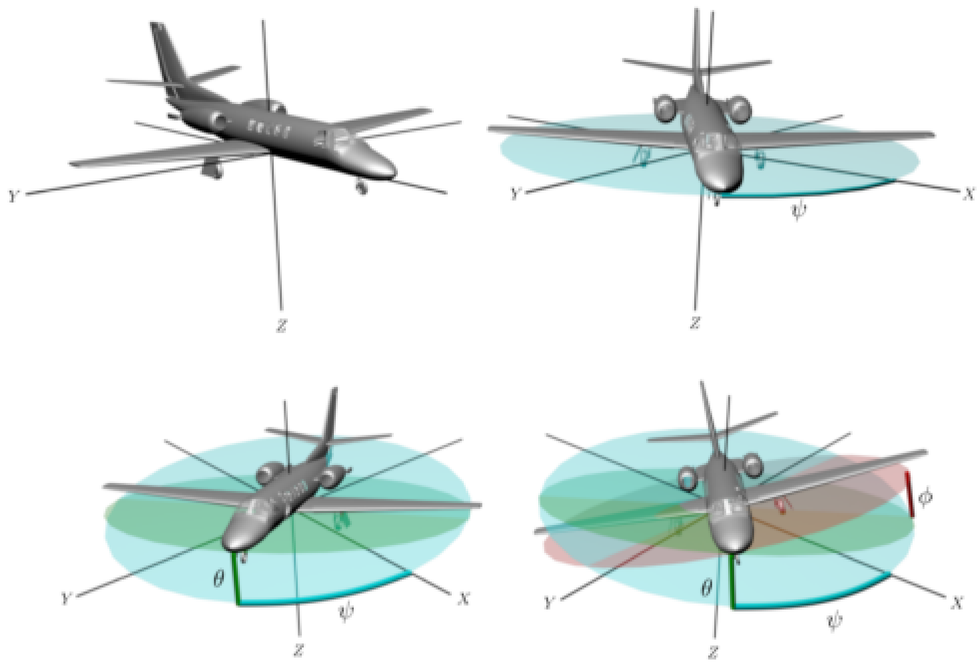
### 11. Algoritam A2AngleAxis

**Ulaz**: Ortogonalna matrica A $\neq$ E, $\det A$ = 1.
**Izlaz**: Jedinični vektor $\vec{p}$ i ugao $\phi \in$ [0, $\pi$] takvi da A = [$R_p(\phi)$].
**Algoritam**:

1. Odrediti jedinični sopstveni vektor $\vec{p}$ za $\lambda$ = 1.
2. Odrediti proizvoljan jedinični vektor $\vec{u} \perp \vec{p}$.
3. Odrediti jedinični vektor $\vec{u'}$ = A$\vec{u}$.
4. Odrediti ugao kao $\phi$ = $\langle u, u' \rangle$ = $\arccos(u, u')$.

5. Ako je mešoviti proizvod $[\vec{u}, \vec{u'}, \vec{p}] < 0$, uzeti $\vec{p} = -\vec{p}$ da bi rotacija bila u pozitivnom smeru.

## 12. Objasniti Ojlerove rotacije na primeru aviona. Predstavljanje sopstvenih rotacija matricama.




**Svetske rotacije** se izvode u odnosu na ose fiksiranog (svetskog) koordinatnog sistema. **Sopstvene rotacije** se izvode u odnosu na pokretni koordinatni sistem vezan za neko telo. Sopstveni koordinatni sistem je vezan za avion: O je centar aviona, x-osa ide duž trupa, y-osa duž krila aviona, a
z-osa je upravna na avion. Sistem Oxyz je pozitivno orijentisan. Izvode se tri sopstvene rotacija za **Ojlerove uglove** pri čemu sopstveni koordinatni sistem stalno menja položaj:

1. $R_z(\psi)$ je rotacija oko z-ose aviona za ugao $\psi \in [0, 2\pi)$ koji se naziva **ugao skretanja** i njime avion postiže željeni pravac na pisti. Sopstveni sistem aviona sada postaje $Ox_1y_1z_1$, pri čemu je $z_1 = z$.
2. $R_{y1}(\theta)$ je rotacija oko $y_1$-ose aviona (krila) za ugao $\theta \in [-\pi, \pi]$ koji se naziva **ugao propinjanja** i njime avion zauzima nagib u odnosu na horizontalu. Sopstveni sistem aviona sada postaje $Ox_2y_2z_2$, pri čemu je $y_2 = y_1$.
3. $R_{x2}(\phi)$ je rotacija oko $x_2$-ose aviona (trupa) za ugao $\phi \in [0, 2\pi)$ koji se naziva **ugao valjanja**. Sopstveni sistem aviona sada postaje $Ox_3y_3z_3$, pri čemu je $x_3 = x_2$.

Specijalno, ako je redosled izvođenja rotacija z-y-x Ojlerovi uglovi se nazivaju **Tejt-Brajanovi uglovi**.

Ako je kretanje f predstavljeno sopstvenim rotacijama f = $R_{x2}(\phi) \circ R_{y1}(\theta) \circ R_z(\psi)$ tada je njegova matrica u polaznom reperu e = Oxyz jednaka proizvodu matrica tih rotacija u suprotnom redosledu: A = $[f]_e = R_z(\psi) \circ R_y(\theta) \circ R_x(\phi)$.

## 13. Kako se množe dva kvaterniona? Primer. Kako odrediti inverzan kvaternion? Primer.

**Kvaternioni** su brojevi oblika $H = \{xi + yj + zk + w \mid x, y, z, w \in R\}$, gde su $i, j, k$ **imaginarne jedinice**. **Množenje kvaterniona** je asocijativno, ali nije komutativno i definisano je radnjama:

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $i \cdot j = k = -j \cdot i$.

**Primer**: $q_1 = 3i - 5k + 1$, $q_2 = i + j + 7$
$(3i - 5k + 1) \cdot (i + j + 7) = 3i^2 + 3ij + 21i - 5ki - 5kj - 35k + i + j + 7 = -3 + 3k + 21i - 5j + 5i - 35k + i + j + 7 = 27i - 4j - 32k + 4$

**Inverzan kvaternion** kvaterniona q = $[\vec{v}, w]$ je $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{||q||^2}$, odnosno količnik konjugovanog kvaterniona i kvadrata norme. **Konjugovani kvaternion** kvaterniona q je $\bar{q} = [-\vec{v}, w] = -xi - yj - zk + w$. Važi $(qq_1)^{-1} = q_1^{-1}q^{-1}$.

**Primer**: q = 3$i$ - 5$k$ + 1
$\overline{q}$ = -3$i$ + 5$k$ + 1, ||q||$^2$ = ($\sqrt{3^2+5^2+1^2}$)$^2$ = |9 + 25 + 1| = 35
q$^{-1}$ = $\frac{-3i+5k+1}{35}$ = -$\frac{3}{35}i$ + $\frac{k}{7}$ + $\frac{1}{35}$

## 14. Šta je matrica kalibracije kamere K i šta predstavljaju njeni elementi?

**Matrica kalibracije** ili **unutrašnja matrica kamere** K je gornje trougaona matrica formata 3 $\times$ 3 sa pozitivnim vrednostima na dijagonali koja daje vezu piksel koordinata i koordinata u kamerinom koordinatnom sistemu M$'$ = [K|0]M$_k$. Ona je oblika:

$$K = \begin{pmatrix} d_x & s & x_0 \\ 0 & d_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $x_0$ i $y_0$ su koordinate vektora koji predstavlja translaciju glavne tačke P u odnosu na koordinatni početak $P_0$ ravni projekcije $\pi$.
- d$_x$ i d$_y$ predstavljaju komponente žižne udaljenosti ako su pikseli pravougaoni. Ako su pikseli kvadratni onda je d$_x$ = d$_y$ = d.
- s je parametar smicanja koji je numerički blizak nuli ako se radi o snimku kamerom. Ako se radi o snimku snimka onda je on različit od nule.

## 15. Šta je spoljašnja matrica kamere M$_c$ i šta predstavljaju njeni elementi?

**Spoljašnja matrica kamere** M$_c$ je matrica formata 3 $\times$ 4 koja daje vezu između koordinata u kamerinom koordinatnom sistemu i svetskih koordinata: M = AM$_k$ + C, tj. M$_k$ = A$^T$M - A$^T$C. Odatle je matrica M$_c$ jednaka:

$$M_c = \begin{bmatrix} A^T & -A^TC \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A je ortogonalna matrica formata 3 $\times$ 3 čije su vrste koordinate kamerinih baznih vektora u svetskom koordinatnom sistemu.
- C je vektor položaja kamere u svetskom koordinatnom sistemu.

## 16. Šta je matrica kamere T, koje su joj dimenzije i kako se ona može dekomponovati? Koliko korespodencija je potrebno za njeno određivanje? Za date odgovarajuće tačke napisati jednačine.

**Matrica kamere** T je matrica formata 3 $\times$ 4 koja daje vezu piksel koordinata i svetskih koordinata, tj. M$'$ = TM. Matrica kamere je:

$$T = [K|0]M_c$$

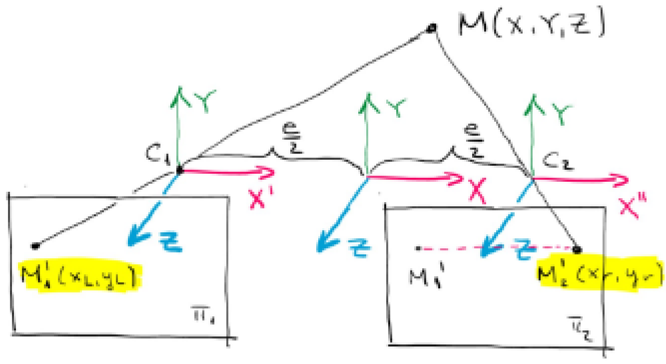
Matrica kamere T se može dekomponovati na proizvod **ortogonalne matrice Q** i **gornje trougaone matrice R** tako što se na matricu T$_0$ primeni Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije. Matrica T$_0$ predstavlja 3 $\times$ 3 matricu koja se sastoji od prve 3 kolone matrice T. Znamo da je T$_0$ = KA$^T$ i da je K gornje trougaona matrica, a A ortogonalna, što je obrnuto od dekompozicije. Odatle je KA$^T$ = (QR)$^{-1}$ = R$^{-1}$Q$^{-1}$. Jasno je da je K = R$^{-1}$, a A$^T$ = Q$^{-1}$ = Q$^T$ jer je Q ortogonalna, pa je A = Q.

Neka su M$'$(x$'_1$, x$'_2$, x$'_3$), x$'_3$ $\neq$ 0 i M(X$_1$:X$_2$:X$_3$:X$_4$) = X$^T$ odgovarajuće tačke centralnog projektovanja iz prostora na ravan matricom T. Tada vrste matrice T t$_1$, t$_2$, t$_3$ zadovoljavaju homogeni sistem jednačina:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x'_3X^T & x'_2X^T \\ x'_3X^T & 0 & -x'_1X^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ t_3^T \end{pmatrix}$$

Svaka korespodencija daje 2 jednačine, a matrica T je formata $3 \times 4$ i suštinski ima 11 nepoznatih, pa je jasno da je za njeno određivanje potrebno 6 ili više tačaka.

## 17. Objasniti jednostavnu stereo kameru. Izvesti formulu za Z i paralaksu p i objasniti šta je paralaksa.




**Jednostavna stereo kamera** podrazumeva dve kamere koje su na fiksiranom rastojanju i isto orijentisane. Pretpostavljamo da su unutrašnji parametri kamera isti i da su udaljene za $e > 0$ duž x-ose. U slučaju jedne kamere koordinate projekcije $M'(x', y')$ i originala M(X, Y, Z) vezane su relacijama:

- $x' = \frac{d_x}{Z}X + x_0$
- $y' = \frac{d_y}{Z}Y + y_0$

Na osnovu $M'$ moguće je rekonstruisati samo zrak $CM'$ na kom se M nalazi, ali ne i samu tačku M. Pošto imamo dve kamere $C_1(-\frac{e}{2}, 0, 0)$ i $C_2(\frac{e}{2}, 0, 0)$ tačku M dobijamo kao presek zrakova $C_1M_1'$ i $C_2M_2'$, gde su $M_1'(x_l, y_l)$ i $M_2'(x_r, y_r)$ projekcije **leve** i **desne kamere**. Dobijamo:

- $x_l = \frac{d_x}{Z}(X + \frac{e}{2}) + x_0$, $y_l = \frac{d_y}{Z}Y + y_0$
- $x_r = \frac{d_x}{Z}(X - \frac{e}{2}) + x_0$, $y_r = \frac{d_y}{Z}Y + y_0$

Vidimo da su piksel y-koordinate na levoj i desnoj slici jednake. Oduzimanjem jednačina po x-koordinati dobijamo $x_l - x_r = \frac{ed_x}{Z} = p$. Broj p naziva se **paralaksa** i predstavlja pomeraj iste tačke na desnoj slici u odnosu na levu. Paralaksa je veća ukoliko je tačka bliže kamerama, tj. ako je Z koordinata manja. Obrnuto, ako Z koordinata teži beskonačnosti paralaksa teži nuli. Z-koordinata tačke M(X, Y, Z) prostora u koordinatnom sistemu između kamera je onda $Z = \frac{ed_x}{p} = \frac{ed_x}{x_l - x_d}$.

## 18. Šta je triangulacija? Koje se jednačine dobijaju za dato $M_1'$, $M_2'$, $T_1$, $T_2$. Za dati primer napisati jednačine.

**Triangulacija** je proces određivanja tačke prostora iz njenih ravanskih projekcija. Pretpostavimo da su nam poznate matrice kamera $T_1$ i $T_2$ kao i projekcije $M_1'$ i $M_2'$ tačke prostora M. Piksel koordinate su konačne pa možemo pisati $M_1'(x_1:y_1:1)$ i $M_2'(x_2:y_2:1)$.

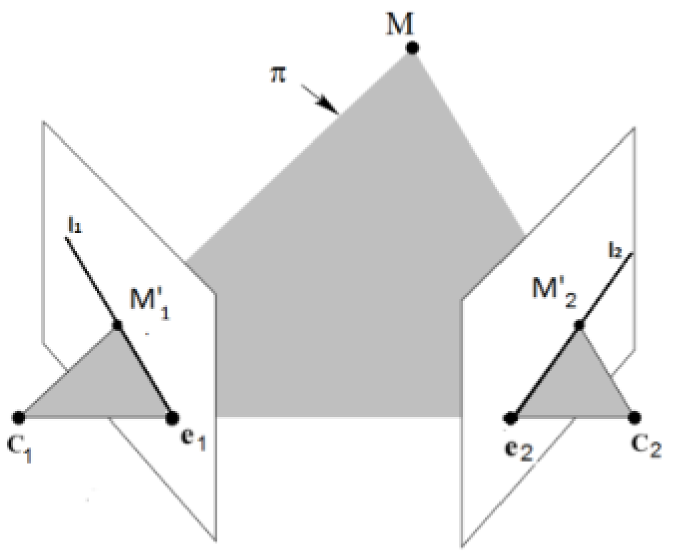
Ako sa $T_{11}$, $T_{12}$, $T_{13}$ označimo vrste marice $T_1$ tada $T_1M$ možemo zapisati kao kolonu $(T_{11}M, T_{12}M, T_{13}M)^T$. Homogena relacija $M_1' = T_1M$ je ekvivalentna sa $M_1' \times T_1M = \vec{0}$ pa dobijamo 3 jednačine:

$$(y_1T_{13}M - T_{12}M, -x_1T_{13}M + T_{11}M, x_1T_{12}M - y_1T_{11}M) = (0, 0, 0)$$

Prve dve jednačine su nezavisne pa uzimamo njih. Analogno, iz relacije $M_2' = T_2M$ dobijamo još dve jednačine. Homogene koordinate tačke M onda predstavljaju rešenje sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1T_{13} - T_{12} \\ -x_1T_{13} + T_{11} \\ y_2T_{23} - T_{22} \\ -x_2T_{23} + T_{21} \end{pmatrix}$$

## 19. Šta je epipolarna ravan, a šta epipolovi? Kako se računa fundamentalna matrica, iz koje jednačine i koliko tačaka? Koje su joj osobine?




Tačke $M_1^{'}$, $M_2^{'}$, M, $C_1$ i $C_2$ pripadaju ravni koja se naziva **epipolarna ravan tačke M**. **Epipolovi** $e_1$ i $e_2$ su tačke u kojima **linija kamera** $C_1C_2$ seče ravni projektovanja kamera. Epipol $e_2$ je slika prve kamere drugom, tj. kako druga kamera vidi prvu i obrnuto. **Fundamentalna matrica** F kamera $C_1$ i $C_2$ formata $3 \times 3$ računa se iz jednačine:

$$M_2^{'T} F M_1^{'} \;=\; 0$$

Gornjom relacijom matrica F je određena do na proporcionalnost i ona važi za svake dve odgovarajuće projekcije $M_1^{'}$ i $M_2^{'}$ neke tačke prostora M. Fundamentalna matrica ima 7 stepeni slobode pa je za njeno određivanje potrebno 7 ili više korespodencija.

**Osobine fundamentalne matrice**:

- F je ranga 2 i detF = 0.
- Ako je F fundamentalna za kamere $C_1$ i $C_2$, onda je $F^T$ fundamentalna matrica za kamere $C_2$ i $C_1$.
- Epipol $e_1$ je rešenje jednačine $Fe_1 = 0$. Epipol $e_2$ je rešenje jednačine $F^Te_2 = 0$.

## 20. Šta je osnovna matrica i kako se računa? Objasniti dekompoziciju osnovne matrice.

Znamo da je veza između piksel koordinata i kamerinih koordinata data matricom kalibracije, odnosno $M_1^{'} = K_1M_{K1}$ i $M_2^{'} = K_2M_{K2}$. Zamenom u relaciju fundamentalne matrice dobijamo relaciju $M_{K2}^T(K_2^TFK_1)M_{K1} = 0$. Matrica $E = K_2^TFK_1$ naziva se **osnovna matrica** kamera $C_1$ i $C_2$.

Matrica E je osnovna matrica za neke kamere akko ima jednu sopstvenu vrednost jednaku 0, a preostale dve su jednake. Osnovna matrica E se može dekomponovati na proizvod koso-simetrične matrice vektorskog proizvoda $E_C$ i matrice kretanja A. Neka je $E = U\,\mathrm{diag}(1, 1, 0)\,V^T$ SVD dekompozicija osnovne matrice. Tada postoje dve dekompozicije:

$$E_C = UZU^T,\; A_1 = UWV^T \; ili \; A_2 = UW^TV^T$$

- $Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je rotacija oko z-ose.
- $W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ je matrica vektorskog množenja sa $e_3$.

Matrica E je određena do na množenje sa skalarom, a samim tim i matrice $E_c$ i vektor C. Zbog toga možemo uzeti proizvoljno rastojanje između kamera. Ako uzmemo da se centar druge kamere nalazi u koordinatnom početku svetskog koordinatnog sistema $C_2 = O$, onda postoje četiri položaja prve kamere $C_1 = C$: (C, $A_1$), (C, $A_2$), (-C, $A_1$) i (-C, $A_2$). Ove mogućnosti dopuštaju da tačka bude ispred ili iza kamere, ali geometrijski tačne su samo dve ($Z > 0$, $Z_c > 0$ ili $Z < 0$, $Z_c < 0$). Primenom na dve konkretne projekcije jedne iste tačke dolazimo do tačne kombinacije od 4 moguće.

## 21. Koraci kalibrisane 3D rekonstrukcije.

**Kalibrisana 3D rekonstrukcija**:

1. Odrediti fundamentalnu matricu F iz bar 8 korespodencija $M_1^{'} \leftrightarrow M_1^{'}$ koristeći SVD dekompoziciju.
2. Odrediti osnovnu matricu $E = K_2^T F K_1$.
3. Odrediti dekompoziciju matrice $E = E_C A$, gde je $E_C$ koso-simetrična, a A matrica kretanja.
4. Odrediti C tako da je $E_C$ matrica vektorskog množenja sa C.
5. Odrediti matrice kamera u sistemu druge kamere:
   - $C_1 = [K_1 A^T \mid -K_1 A^T C]$
   - $C_2 = [K_2 \mid 0]$
6. Triangulisati tačke scene.