Писмени испит из Анализе 1 за И смер **ЈУН 1 2021**

1. (15 поена) Посматрајмо низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дат са: $x_n = \left(\dfrac{2n-3}{1+2n}\right)^{n(-1)^n} + \operatorname{arctg}((-1)^{n+1}2n)\cdot\sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

(а) Одредити тачке нагомилавања овог низа.

(б) Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n+\cdots+|a_k|^n}$, где су $a_1,\ldots,a_k$ све тачке нагомилавања низа $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (15 поена) Функција f дефинисана је са

$$f(x)=\begin{cases} A, & x\le 0\\ \frac{x^x-1}{x\ln x}+B, & 0<x<1\\ C, & x=1\\ \frac{x^x-x}{\ln x-x+1}, & x>1\end{cases}.$$

(а) Одредити $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

(б) Одредити $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.

(в) Да ли постоје константе $A,B,C\in\mathbb{R}$ за које је функција f непрекидна?

3. (20 поена) Дата је функција $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+x}$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.

(б) Одредити скуп вредности које узима функција f.

4. (10 поена) Нека је функција $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ непрекидна на $[0,2]$, диференцијабилна на $(0,2)$ и за свако $x\in(0,2)$ важи $|f'(x)|\le 1$.

(а) Показати да за свако $x,y\in[0,2]$ важи да је $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$.

(б) Ако је додатно и $f(0)=f(2)=1$, показати да за свако $x\in[0,2]$ важи $f(x)\ge 0$.

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)