Verovatnoća

Kombinatorika

- **Permutacija bez ponavljanja** skupa A je svaki niz u kome se tačno jedanput pojavljuju svi elementi skupa A. Broj permutacija bez ponavljanja skupa koji ima n elemenata je:

$$\boxed{n!}$$

- Neka je dat skup A = $\{a_1$, ..., $a_n\}$. Svaki niz dužine k_1 + ... + k_n = m, u kome se a_1 pojavljuje k_1 puta, ..., a a_n k_n puta, naziva se **permutacija sa ponavljanjem** tipa $(k_1, \ \ldots, \ k_n)$. Broj permutacija sa ponavljanjem ovog tipa je:

$$\boxed{\frac{m!}{k_1! \cdot \ \ldots \ \cdot k_n!}}$$

- **Varijacija bez ponavljanja** k-te klase skupa A od n elemenata, $k \leq n$, je svaki niz od k međusobno različitih elemenata tog skupa. Broj varijacija bez ponavljanja je:

$$\boxed{n(n-1)\ldots(n-k+1)}$$

- **Varijacija sa ponavljanjem** k-te klase skupa A od n elemenata je svaki niz od k elemenata pri čemu se oni mogu ponavljati. Broj varijacija sa ponavljanjem je:

$$\boxed{n^k}$$

- **Kombinacija bez ponavljanja** k-te klase skupa A od n elemenata, $k \leq n$, je svaki k-točlani podskup tog skupa. Broj kombinacija bez ponavljanja je:

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

- Ako se iz n-točlanog skupa A bira jedan po jedan element sa vraćanjem k elemenata i ako nije bitan redosled već samo koji elementi i koliko puta su izabrani, onda se rezultat izbora naziva **kombinacija sa ponavljanjem** k-te klase skupa A. Broj kombinacija sa ponavljanjem je:

$$\boxed{\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}}$$

Klasična definicija verovatnoće

- Neka je Ω skup elementarnih ishoda, pri čemu su svi ishodi jednako verovatni, tj. verovatnoća svakog ishoda je $\frac{1}{n}$ gde je n broj elementarnih ishoda. **Verovatnoća** slučajnog događaja A je:

$$\boxed{P(A) = \frac{|A|}{n}}$$

- Osobine:

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

$$\boxed{P(A^C) = 1 - P(A)}$$

$$\boxed{A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)}$$

$$\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\boxed{P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)}$$

Formula uključivanja i isključivanja

- **Princip uključenja i isključenja za skupove**:

$$\boxed{|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} |A_i \cap A_j| \ - \ \dots \ + \ (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ \dots \ \cap A_n|}$$

- Neka su $A_1, \ \dots, \ A_n$ slučajni događaji. Tada važi **formula uključivanja i isključivanja**:

$$\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i,\, j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \ \dots \ + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ \dots \ \cap A_n)}$$

Uslovna verovatnoća i nezavisnost

- **Uslovnu verovatnoću** događaja B pri uslovu A, gde je $P(A) > 0$, definišemo sa:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

- Osobine:

$$\boxed{P(A|A) = 1}$$

$$\boxed{P(\Omega|A) = 1}$$

$$\boxed{P(\emptyset|A) = 0}$$

$$\boxed{B_1 \cap B_2 = \emptyset \ \Rightarrow \ P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)}$$

$$\boxed{P(B^C|A) = 1 - P(B|A)}$$

$$\boxed{A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1}$$

$$\boxed{B \subset A \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}}$$

- Za događaje A i B, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, kažemo da su **nezavisni** ako:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Formula potpune verovatnoće. Bajesova formula

- Ako za događaje $H_1, \ldots, H_n$ važi $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$ i $\bigcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, onda kažemo da oni čine **potpun sistem događaja**. Neka je A neki slučajan događaj. Tada važi **formula potpune verovatnoće**:

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i)P(H_i)}$$

- Neka su A i B događaji tako da je $P(A) > 0$. Tada važi **Bajesova formula**:

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}}$$

  Bajesovu formulu koristimo kada se događaj B desio pre događaja A.

Diskretne slučajne veličine. Matematičko očekivanje i disperzija

- **Zakon raspodele** diskretne slučajne veličine X je:

$$\boxed{X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix},\ p_k = P\{X = x_k\}}$$

- **Funkcija raspodele** diskretne slučajne veličine X je:

$$\boxed{F : R \to [0,\ 1],\ F(X) = P\{X \leq x\}}$$

- **Matematičko očekivanje** diskretne slučajne veličine X je:

$$\boxed{EX = \sum_{k} x_k p_k = \sum_{k} x_k P\{X = x_k\}}$$

- Osobine matematičkog očekivanja:

$$\boxed{E(aX + b) = aEX + b}$$

$$\boxed{E(X + Y) = EX + EY}$$

$$\boxed{Eh(X) = \sum_k h(x_k)p_k}$$

- **Disperzija** diskretne slučajne veličine X je:

$$\boxed{DX = E(X - EX)^2 = EX^2 - (EX)^2}$$

- Osobine disperzije:

$$\boxed{D(aX + b) = a^2 DX}$$

$$\boxed{X,\ Y\ nezavisne \Rightarrow D(X+Y) = DX + DY}$$

Diskretne raspodele

- **Bernulijeva raspodela (indikator)** $X \sim Ber(p)$

$$\boxed{X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},\ EX = p,\ DX = p(1-p)}$$

- **Binomna raspodela** $X \sim \mathcal{B}(n,\ p)$

$$\boxed{P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0,\ \dots,\ n\},\ EX = np,\ DX = np(1-p)}$$

- **Geometrijska raspodela** $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$\boxed{P\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p,\ k \in \mathcal{N},\ EX = \frac{1}{p},\ DX = \frac{1-p}{p^2}}$$

- **Puasonova raspodela** $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\boxed{P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},\ k \in \mathcal{N},\ EX = \lambda,\ DX = \lambda}$$

Diskretni slučajni vektori. Nezavisnost slučajnih veličina

- Neka su $X \in \{x_1,\ \dots,\ x_n\}$ i $Y \in \{y_1,\ \dots,\ y_m\}$ diskretne slučajne veličine. **Zajednička raspodela** vektora $(X,\ Y)$ je:

$$\boxed{p_{ij} = P\{X = x_i,\ Y = y_j\},\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1}$$

- Diskretne slučajne veličine X i Y su **nezavisne** ako važi:

$$\boxed{P\{X = x_i,\ Y = y_j\} = P\{X = x_i\}P\{Y = y_j\},\ \forall\, i \in \{1,\ \dots,\ n\},\ \forall\, j \in \{1,\ \dots,\ m\}}$$

- **Marginalne raspodele** slučajnih veličina X i Y su:

$$\boxed{P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{m} P\{X = x_i,\ Y = y_j\},\ P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{n} P\{X = x_i,\ Y = y_j\}}$$

- Ako su $X_1,\ \ldots,\ X_n$ nezavisne slučajne veličine onda važi:

$$\boxed{(\forall\, i \in \{1,\ \ldots,\ n\})\ X_i \sim Ber(p)\ \Rightarrow\ X_1 +\ \ldots\ + X_n \sim \mathcal{B}(n,\ p)}$$

$$\boxed{(\forall\, i \in \{1,\ \ldots,\ n\})\ X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)\ \Rightarrow\ X_1 +\ \ldots\ + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 +\ \ldots\ + \lambda_n)}$$

Apsolutno neprekidne slučajne veličine

- **Gustina raspodele** slučajne veličine X je $f : R \to R$ tako da:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,\ f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in R,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$$

- Osobine:

$$\boxed{F'(x) = f(x),\ \forall\, x \in R}$$

$$\boxed{P\{a < x < b\} = P\{a \leq x < b\} = P\{a \leq x \leq b\} = P\{a < x \leq b\} = \int_{b}^{a} f(x)dx}$$

$$\boxed{P\{X = a\} = 0}$$

$$\boxed{EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx}$$

$$\boxed{Eh(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx}$$

$$\boxed{F\ simetrična\ oko\ 0\ \Rightarrow\ F(x) = 1 - F(-x)}$$

Apsolutno neprekidne raspodele

- **Uniformna raspodela** $X \sim \mathcal{U}[a,\ b],\ a < b$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a},\ x \in [a,\ b] \\ 0,\ inače \end{cases},\ F(x) = \begin{cases} 0,\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a},\ x \in [a,\ b],\ EX = \dfrac{a+b}{2},\ DX = \dfrac{(b-a)^2}{12} \\ 1,\ x \geq b \end{cases}}$$

- **Eksponencijalna raspodela** $X \sim \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases},\ F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases},\ EX=\frac{1}{\lambda},\ DX=\frac{1}{\lambda^2}$$

- **Gama raspodela** $X\sim\gamma(a,\ b),\ a,\ b>0$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{x^{a-1}e^{-bx}b^a}{\Gamma(a)}, & x>0\end{cases},\ EX=\frac{a}{b},\ DX=\frac{a}{b^2}$$

- **Normalna raspodela** $X\sim\mathcal{N}(m,\ \sigma^2),\ m\in R,\ \sigma>0$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},\ x\in R,\ EX=m,\ DX=\sigma^2$$

- Važi:

$$X\sim\mathcal{N}(m,\ \sigma^2)\ \Rightarrow\ \frac{X-m}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,\ 1)$$

  gde je $\mathcal{N}(0,\ 1)$ **standardna normalna raspodela**.
- Ako su $X_1,\ \dots,\ X_n$ nezavisne slučajne veličine i $a_1,\dots,a_n\in R$ onda važi:

$$(\forall i\in\{1,\dots,n\})X_i\sim\mathcal{N}(m_i,\sigma_i^2)\ \Rightarrow\ a_1X_1+\dots+a_nX_n\sim\mathcal{N}(a_1m_1+\dots+a_nm_n,a_1^2\sigma_1^2+\dots+a_n^2\sigma_n^2)$$

$$(\forall i\in\{1,\ \dots,\ n\})\ X_i\sim\mathcal{E}(\lambda_i)\ \Rightarrow\ min\{X_1,\ \dots\ ,\ X_n\}\sim\mathcal{E}(\lambda_1+\ \dots\ +\lambda_n)$$

Aproksimacija binomne raspodele

- **Aproksimacija Puasonovom raspodelom**: $n\ge 30\wedge(np<10\vee n(1-p)<10)$

$$X\sim\mathcal{B}(n,\ p)\ \Rightarrow\ X\sim\mathcal{P}(np)$$

- **Aproksimacija normalnom raspodelom**: $n\ge 30\wedge np\ge 10\wedge n(1-p)\ge 10$

$$X\sim\mathcal{B}(n,\ p)\ \Rightarrow\ X\sim\mathcal{N}(np,\ np(1-p))\ \Rightarrow\ \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim\mathcal{N}(0,\ 1)$$

Apsolutno neprekidni slučajni vektori

- **Zajednička funkcija raspodele** slučajnog vektora $(X,\ Y)$ je:

$$F_{X,Y}(x,\ y)=P\{X\le x,\ Y\le y\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f_{X,Y}(u,\ v)dudv$$

- Funkcija $f_{X,Y}(x,\ y)$ je **zajednička gustina raspodele** slučajnog vektora $(X,\ Y)$ ako:

$$\boxed{f_{X,Y}(x,\ y) \geq 0,\ \forall\ x,\ y \in R\ \wedge\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,\ y) = 1}$$

- Osobine:

$$\boxed{f_{X,Y}(x,\ y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,\ y)}$$

$$\boxed{F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,\ y),\ F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,\ y)}$$

$$\boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,\ y)dy,\ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,\ y)dx}$$

$$\boxed{X,\ Y\ nezavisni\ \Leftrightarrow\ f_{X,Y}(x,\ y) = f_X(x)f_Y(y)\ \Leftrightarrow\ F_{X,Y}(x,\ y) = F_X(x)F_Y(y),\ \forall\ x,\ y \in R}$$

Čebišovljeva nejednakost

- Neka je X slučajna veličina i $\mathcal{E},\ r > 0$ konstante. Ako postoji očekivanje $E(|X|^r)$ onda važi nejednakost:

$$\boxed{P\{|X| > \mathcal{E}\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\mathcal{E}^r}}$$

- Specijalno za $r = 2$:

$$\boxed{P\{|X| > \mathcal{E}\} \leq \frac{E(X^2)}{\mathcal{E}^2}}$$

  Ako stavimo $Y = X - E(X)$ dobijamo:

$$\boxed{P\{|X - E(X)| > \mathcal{E}\} \leq \frac{E(X - E(X))^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{D(X)}{\mathcal{E}^2}}$$

- Nejednakost koristimo kada za slučajnu veličinu X ne znamo ništa osim očekivanja.

Kovarijansa i koeficijent korelacije

- **Kovarijansa (kovarijacija)** slučajnih veličina X i Y definisana je sa:

$$\boxed{cov(X,\ Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))}$$

- Koristi se u obliku:

$$\boxed{cov(X,\ Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

- Ako je $cov(X,\ Y) = 0$, onda kažemo da su X i Y **nekorelisane**. Ako su X i Y nezavisne slučajne veličine, onda su i nekorelisane. Obrnuto ne važi.

- **Koeficijent korelacije** slučajnih veličina X i Y definisan je sa:

$$\boxed{\rho_{X,\,Y} = \frac{cov(X,\,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}}$$

- Važi:
  1. $\rho_{X,\,Y} \in [-1,\,1]$
  2. $\rho_{X,\,Y} = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; X,\,Y$ su linearno zavisne, tj. $Y = aX + b,\, a,\, b \in R$

Uslovna verovatnoća

- Neka je $(X,\,Y)$ diskretan slučajan vektor. **Uslovna raspodela** slučajne veličine X pri uslovu $Y = y_i$ definiše se sa:

$$\boxed{P\{X = x_i \mid Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i,\, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}},\ \forall\, x_i}$$

- Neka je $(X,\,Y)$ apsolutno neprekidan slučajan vektor sa gustinom f. **Uslovna funkcija raspodele** slučajne veličine X pri uslovu $Y = y$, uz uslov $f_Y(y) > 0$, definiše se sa:

$$\boxed{F_{X\,|\,Y=y}(x) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} f(u,\,y)du}$$

- Važi:

$$\boxed{f_{X\,|\,Y=y}(x) = \frac{f(x,\,y)}{f_Y(y)}}$$

Karakteristična funkcija

- **Karakteristična funkcija** slučajne veličine X, u oznaci $\phi_X :\ R \to C$, definisana je sa:

$$\boxed{\phi_X(t) = E(e^{itx})}$$

- Ako dve slučajne veličine imaju istu karakterističnu funkciju onda su jednako raspodeljene.
- Osobine:

$$\boxed{|\phi_X(t)| \leq 1}$$

$$\boxed{\phi_X(0) = 1}$$

$$\boxed{\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}}$$

$$\boxed{\phi_{aX+b}(t) = e^{itb}\phi_X(at),\ a,\ b \in R}$$

$$\boxed{E(X^k) = \frac{\phi_X^{(k)}(0)}{i^k}}$$

$$\boxed{X_1,\ \ldots,\ X_n\ nezavisne\ \Rightarrow\ \phi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(t) = \Pi_{k=1}^{n}\phi_{X_k}(t)}$$

Konvergencije nizova slučajnih veličina

- Niz (X_n) **konvergira u raspodeli** ka slučajnoj veličini X, u oznaci $X_n \ \xrightarrow{D}\ X$, ako $\forall\, x \in C(F_X)$, gde je $C(F_X)$ skup tačaka neprekidnosti funkcije F_X, važi:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F(X)}$$

- Niz (X_n) **konvergira u verovatnoći** ka slučajnoj veličini X, u oznaci $X_n \ \xrightarrow{P}\ X$, ako važi:

$$\boxed{(\forall\, \mathcal{E} > 0)\ \lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X| > \mathcal{E}\} = 0}$$

- Važi:

$$\boxed{X_n \xrightarrow{P} X\ \Rightarrow\ X_n\ \xrightarrow{D}\ X}$$

$$\boxed{X_n\ \xrightarrow{D}\ c,\ c = const\ \Rightarrow\ X_n \xrightarrow{P} c}$$

- Ako X_n konvergira ka X u nekom tipu konvergencije, onda će i u svim ostalim tipovima konvergirati ka X ili uopšte neće konvergirati.

Slabi zakon velikih brojeva

- Neka je (X_n) niz slučajnih veličina i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Ako važi:

$$\boxed{\frac{S_n - E(S_n)}{n}\ \xrightarrow{P}\ 0,\ n \to \infty}$$

  kažemo da za niz (X_n) važi **slabi zakon velikih brojeva**.
- **(Čebišov)** Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina i $c > 0$ konstanta takva da važi $D(X_n) < c$, $\forall\, n \in N$. Tada za (X_n) važi SZVB.
- **(Hinčin)** Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom i konačnim očekivanjem. Tada za (X_n) važi SZVB, odnosno

$$\boxed{\frac{S_n}{n}\ \xrightarrow{P}\ E(X_n),\ n \to \infty}$$

- **(Kolmogorov)** Neka je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina. Ako red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(X_n)}{n^2}$ konvergira, onda za (X_n) važi SZVB.

Centralna granična teorema

- Neka je (X_n) niz nezavisnih jednakoraspodeljenih slučajnih veličina sa konačnom disperzijom. Tada važi:

$$\boxed{\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \xrightarrow{D} Z, Z \sim \mathcal{N}(0,\ 1)}$$

Ostale formule

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\mathit{\Gamma}(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt,\ \mathit{\Gamma}(a) = (a-1)\mathit{\Gamma}(a-1),\ (\forall\, n \in \mathcal{N})\ \mathit{\Gamma}(n) = (n-1)!}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{1-b^{n+1}}{1-b},\ \ \sum_{k=0}^{+\infty} b^k = \frac{1}{1-b},\ b \in (-1,\ 1)}$$

$$\boxed{X \cdot sgnX = |X|}$$

$$\boxed{\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2},\ \ \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}\ konvergira\ \Leftrightarrow\ k > 1}$$