1 ПОЉЕ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА. СУП и ИНФ. Број e

Аксиоме реалних бројева

(A1) $(x+y)+z = x+(y+z)$

(A2) $\exists e, \forall x \quad e+x = x+e = x \qquad 0:=e$

(A3) $\forall x, \exists y \quad x+y = y+x = 0$

(A4) $x+y = y+x$

(A5) $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

(A6) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

(A7) $\exists \tilde{e}, \forall x, \; x\cdot\tilde{e} = \tilde{e}\cdot x = x \qquad 1:=\tilde{e}$

(A8) $x\cdot y = y\cdot x$

(A9) $\forall x \neq 0, \exists y \quad x\cdot y = 1, \; x^{-1} := y$

(A10) $x \leq x$

(A11) $x\leq y, \; y\leq x \Rightarrow x=y$

(A12) $x\leq y, \; y\leq z \Rightarrow x\leq z$

(A13) $\forall x,y \quad x\leq y \vee y\leq x$

(A14) $0 \neq 1$

(A15) $x\geq y, \; x+z \geq y+z$

(A16) $x\geq 0, \; y\geq 0 \quad xy\geq 0$

(A17) (АРХ) $\forall a>0$ и $b, \exists n\in\mathbb{N}, \; n\cdot a > b$

ГРУПА: (A2), (A3)

АБЕЛОВА ГРУПА: (A4)

КОМУТАТИВНА: (A8)

ПРСТЕН СА 1: (A5), (A6), (A7), (A9)

ПОЉЕ: ПРСТЕН СА 1 + КОМУТАТИВНА

РЕЛ ПОРЕТКА: (A10), (A11), (A12)

ТОТАЛНИ ПОРЕДАК: (A13)

НЕТРИВИЈАЛНОСТ: (A14)

АРХИМЕДОВ СКУП ПОЉА: (A15), (A16), (A17)

(A1)–(A17) дефинишу $\mathbb{Q}$

(A1)–(A16) + (СУП) дефинишу $\mathbb{R}$

(СУП) не важи у $\mathbb{Q}$

$[0,\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$ је огр одозго али суп није из $\mathbb{Q}$

(СУП) Сваки непразан одозго ограничен скуп има супремум.

Дефиниције мајоранте, миноранте, суп, инф, мин, мах

Број e:

$$A = \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n\in\mathbb{N} \right\}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \binom{n}{0}\frac{1}{1} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{k}}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$\leq 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \leq 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$= 2+\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+___+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right) = 3-\frac{1}{n} \Rightarrow A \text{ има горње огр.}$$

$\Rightarrow A$ има суп, $\sup A < 3$

$$e := \sup A$$

2 АРХИМЕДОВО СВОЈСТВО и КАНТОРОВА ТЕОРЕМА

Т (суп) $\Rightarrow$ (АРХ) у $\mathbb{R}$

Д:

ппс Важи суп, али не важи АРХ $\Rightarrow \exists a>0, b, \forall n \; n\cdot a<b$

$A := \{na \mid n\in\mathbb{N}\}$ b је горње огр $A \Rightarrow A$ има суп, $\alpha := \sup A$

$\alpha - \varepsilon$, $\varepsilon>0$ није мајоранта

$\alpha - a < \alpha \Rightarrow$ —||— $\Rightarrow \exists n_0 \quad a\cdot n_0 > \alpha - a$

$a(n_0+1) > \alpha$ ↯ јер је α sup

$(n_0+1)\in\mathbb{N} \Rightarrow a(n_0+1)\in A$

■

КАНТОРОВА ТЕОРЕМА

Свако низ уметнутих одсечака има непразан пресек у $\mathbb{R}$.

Д: $A = \{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, огр одозго јер $a_n \le b_1, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists \alpha = \sup A$

$\alpha \ge a_n \; \forall n\in\mathbb{N}$

$\left.\begin{array}{l} \forall n, b_n \text{ је мајоранта} \\ \alpha \text{ је најмања —||—} \end{array}\right\} \alpha \le b_n \Bigg\} \alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$

■

3) ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ РЕАЛНЕ ф-ЈЕ. ОСНОВНА СВОЈСТВА. ОСНОВНА (ЛОКАЛНА) СВОЈСТВА НЕПР. ф-ЈА.

• НЕЈЕДНАКОСТ ТРОУГЛА $|x+y| \leq |x|+|y|$

▣ ТАЧКА НАГОМИЛАВАЊА скупа A је $a \in \mathbb{R}$ ако за сваки скуп облика $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \cap A \neq \emptyset$

▣ ОКОЛИНА ТАЧКЕ $a \in \mathbb{R}$ кажемо да је $(a-\delta, a+\delta)$, $\delta > 0$; U_a

▣ ШУПЉА ОКОЛИНА $a \in \mathbb{R}$ је околина без a ; $\mathring{U}_a$

▣ ИЗОЛОВАНА ТАЧКА $a \in A$ која није тачка нагомилавања

▣ $f: D_f \to \mathbb{R}$, $a \in D_f'$ кажемо да је L лимес ф-је f када $x \to a$ ако важи: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \forall x \in D_f \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

СТАВ 1

Ако $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = \underset{\mathbb{R}}{\underset{\Uparrow}{L}}$ тада је f огр на некој $\mathring{U}_a (\cap D_f)$, тј $\exists M > 0$ $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathring{U}_a \cap D_f$

Д: по деф:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{L - \varepsilon}_{\text{доње огр.}} < f(x) < \underbrace{L + \varepsilon}_{\text{горње огр.}}$$

■

СТАВ 2

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \quad (L \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ тада важи: $\exists \mathring{U}_a$ тд. $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} L, \forall x \in \mathring{U}_a$

Д: ~~$\varepsilon > 0$ дато~~ ~~$\delta := \frac{\varepsilon}{2}$~~ $\varepsilon := \frac{L}{2}$

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < f(x) < \varepsilon + L$$

$$\underbrace{\frac{L}{2}}_{= \operatorname{sgn} L} < f(x) < \underbrace{\frac{3}{2} L}_{= \operatorname{sgn} L}$$

■

СТАВ 3

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1 \quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2 \quad L_1, L \in \mathbb{R}$ тада важи:

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$

Д: $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists \delta_1 > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \varepsilon_1$

$\forall \varepsilon_2 > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L_2| < \varepsilon_2$

$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\varepsilon_1 := \frac{\varepsilon}{2}$

$\varepsilon_2 := \frac{\varepsilon}{2}$

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) + L_1| + |g(x) + L_2| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$$

■

2) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L_1\cdot L_2$

Δ:

$$|f(x)g(x)-L_1L_2| = |f(x)g(x)-L_1g(x)+L_1g(x)-L_1L_2| \le \overbrace{|g(x)|}^{<M}\cdot|f(x)-L_1| + |L_1|\cdot|g(x)-L_2|$$

$$< M\cdot \underbrace{\varepsilon_1}_{=\frac{\varepsilon}{2M}} + |L_1|\cdot \underbrace{\varepsilon_2}_{=\frac{\varepsilon}{2|L_1|}} = \varepsilon \qquad \delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}$$

■

3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, довољно је док. $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}$

Δ:

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{L_2}\right| = \frac{|L_2-g(x)|}{|g(x)|\cdot|L_2|} < \frac{\varepsilon_1 := M\cdot|L_2|\cdot\varepsilon}{M\cdot|L_2|}$$

■

4) $f(x)\le g(x)$, $x\in \dot{U}_a \Rightarrow L_1\le L_2$

Δ:

<u>ппс.</u> $L_1>L_2$

$L_1-L_2>0$

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))>0 \Leftrightarrow f-g>0$, $\forall x\in\dot{U}_a$ ↯ јер $f(x)\le g(x)$ ■

▣ Кажемо да је f непр у тачки $a\in D_f$ ако $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ $|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

Сва својства лимеса важе за непрекидност и једностране лимесе

▣ Непрекидне ф-је

1) $f(x)=c$ $\qquad |x-a|<\delta \Rightarrow |\overbrace{c-c}^{0}|<\varepsilon$ ✓

2) $f(x)=x$ $\qquad \delta:=\varepsilon$ $\qquad |x-a|<\delta \Rightarrow |x-a|<\varepsilon$ ✓

3) $f(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ конз. + и * непрекидних

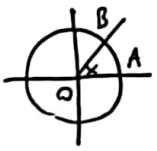
4) $R(x)\ \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$ $\quad \frac{\text{полином}}{\text{полином}}$

(T) $\sin x$ је непр на $\mathbb{R}$

Δ:

Прво лема: $\forall x\in\mathbb{R}$ $|\sin x|\le|x|$

за $[0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad P_\Delta \ge P_\Delta$



$\frac{x}{2} \ge \frac{\sin x}{2}$

$x \ge \sin x$

исто и за $[-\frac{\pi}{2},0]$ ✓

$\varepsilon>0$ - дато, δ - ?

$|x-a|<\delta \Rightarrow |\sin x-\sin a|<\varepsilon$

$$|\sin x-\sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|$$

$$\le 2\cdot\frac{|x-a|}{2}\cdot 1 = |x-a|$$

$\delta:=\varepsilon$

■

3 НАСТАВАК

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists \delta>0)\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists \delta>0)\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<-M$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists M>0)\ \forall x>M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists M>0)\ \forall x<-M \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists N>0)\ \forall x>N \Rightarrow f(x)>M$
- УНИВЕРЗАЛНА ДЕФ ЛИМЕСА: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall U_L)(\exists \mathring{U}_a)\ \forall x\in \mathring{U}_a \Rightarrow f(x)\in U_L$

---

4 ТЕОРЕМА О 3 ЛИМЕСА, ПОСЛЕДИЦЕ

f, g, h фје дефинисане на неком $\mathring{U}_a$ $(a\in\overline{\mathbb{R}})$, $f(x)\le g(x)\le h(x)$ на $\mathring{U}_a$

Ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$ $(L\in\overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=L$

Д: за $a\in\mathbb{R}, L\in\mathbb{R}$

хоћемо: $\varepsilon>0$ - дато $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |g(x)-L|<\varepsilon$

$\exists \delta_1$ $0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ $\qquad \delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\exists \delta_2$ $0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |h(x)-L|<\varepsilon$ $\qquad \Rightarrow 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$ и $|h(x)-L|<\varepsilon$

$L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon \qquad L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$

$L-\varepsilon<f(x)\le g(x)\le h(x)<L+\varepsilon$

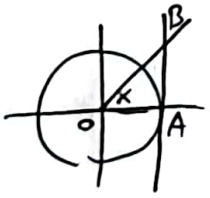
$\Updownarrow$

$|g(x)-L|<\varepsilon$ ∎

Последица $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Д: прво за 0^+, исто и за 0^-

По леми имамо $|\sin x|\le|x|$, $\frac{\sin x}{x}\le 1$, $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$



$P_\Delta \ge P_\triangle \qquad tg\,x \ge x$

$\frac{tg\,x}{2}\ge\frac{x}{2} \qquad \frac{1}{x}\ge\frac{1}{tg\,x}=\frac{\cos x}{\sin x}$

$\frac{\sin x}{x}\ge\frac{\sin}{tg\,x}=\cos x \Rightarrow \cos x\le\frac{\sin x}{x}\le 1 \quad /\lim\limits_{x\to 0^+}$

$1\le\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\le 1$ ∎

Последица $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Δ: $1-\cos x = 1-\cos\frac{2x}{2} = 1-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2} = 1\cdot\frac{1}{2}$ ■

5 ЛИМЕС МОНОТОНЕ ф-ЈЕ. Основни лимеси

Т Нека $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ монотоно расућа, $a,b\in\mathbb{R}$ тада је $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\sup\limits_{(a,b)} f$

Δ: 1° f је ограничена и $L=\sup\limits_{(a,b)} f$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=L$

$\varepsilon>0$ - дато, хоћемо δ, $0<\underset{b-x}{\underset{\parallel}{|x-b|}}<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$L-\varepsilon \underset{(1)}{<} f(x) \underset{(2)}{<} L+\varepsilon$ важи јер је L sup

$L-\varepsilon$ није мајоранта

$\Rightarrow \exists x_0\in(a,b)$, $L-\varepsilon<f(x_0)$

$\forall x\in(x_0,b)$ $\quad f(x)>f(x_0)>L-\varepsilon \qquad \delta:=b-x_0$

2° f није огр $\to \lim\limits_{x\to b^-} f(x)=+\infty$

хоћемо:

$(\forall M>0)(\exists\delta>0)$ $0<\underset{b-x}{\underset{\parallel}{|x-b|}}<\delta \Rightarrow f(x)>M$

имам: f није огр $\Rightarrow \exists x_0\in(a,b)$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$

$(\forall M>0)(\exists\delta>0)$ $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M$

$\forall x\in(x_0,b)$ $f(x)>f(x_0)>M$, $\delta:=b-x_0$ ■

Тврђење 1 $x\to\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor}$, $x\geq 1$ је расућа

Δ: довољно је да док. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!}=\sum\limits_{k=0}^{n}1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}$

$\leq\sum\limits_{k=0}^{n}1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{k!}\leq\sum\limits_{k=0}^{n+1}\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ ■

Последица $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor}=\sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \mid n\in\mathbb{N}\right\}=e$

$\lfloor x\rfloor\leq x<\lfloor x\rfloor+1$

$1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\leq 1+\frac{1}{x}\leq 1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}$

$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^{\lfloor x\rfloor}\leq\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leq\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^{\lfloor x\rfloor}\cdot 1 \quad / \lim\limits_{x\to\infty}$

$e\leq\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leq e\cdot 1=e$ ■

5 НАСТАВАК

Последица 2

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Δ: $t=-x$, $t\to\infty$

$$\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^{t} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1+1} = e\cdot 1 = e$$

Тврђење 3 $\lim_{t\to 0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$, исто за 0^-

$t=\frac{1}{x}$ $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Тврђење 4 $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e \;/\ln()$

$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

Тврђење 5 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$

$t=e^x-1$

$x=\ln(t+1)$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{t}{\ln(t+1)} = 1$

Тврђење 6 $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$

$a=1$ $0=0$

$a\neq 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a = \ln a$

Тврђење 7: $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$

Δ: $\alpha=0$ $0=0$

$\alpha\neq 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \underbrace{\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}}_{\to\alpha} = \alpha$

---

6 АСИМПТОТСКЕ РЕЛАЦИЈЕ

f,g дефинисане на $\mathring{U}_a$ $(a\in\overline{\mathbb{R}})$, кажемо да је $f(x)=o(g(x))$, $x\to a$ ако $\exists\,\varepsilon(x)$ тд $f(x)=\varepsilon(x)\cdot g(x)$, $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$

СВОЈСТВА:

1) $\underbrace{o(g(x))}_{f_1}+\underbrace{o(g(x))}_{f_2} = o(g(x))$, $x\to a$

Δ:

$f_1 = o(g(x)) = \varepsilon_1(x)\cdot g(x)$ $\lim_{x\to a}\varepsilon_1=0$

$f_2 = \varepsilon_2(x)\cdot g(x)$ $\lim_{x\to a}\varepsilon_2=0$

$f_1+f_2 = g(x)(\varepsilon_1(x)+\cancel{\varepsilon_2(x)}^{\to 0}) \Rightarrow f_1+f_2 = o(g(x))$

2) $h(x)\cdot\underbrace{o(g(x))}_{f} = o(h(x)\cdot g(x))$, $x\to a$

$f(x)=\varepsilon\cdot g(x)$

$h(x)\cdot f(x) = h(x)\cdot g(x)\cdot\varepsilon(x)$

$= o(h(x)\cdot g(x))$

3) $c\cdot\underbrace{o(g(x))}_{f} = o(g(x))$, $x\to a$

$\underbrace{c\cdot\varepsilon(x)}_{\varepsilon_1(x)}\cdot g(x) = o(g(x))$, $x\to a$

4) $o(g(x)\cdot h(x)) = o(g(x))\cdot o(h(x))$, $x\to a$

$\boxed{\cdot}$ f, g def на $\mathring{U}_a$ $\quad f \sim g \Leftrightarrow f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 1$

Својства:

$f \sim g, x \to a \Rightarrow o(f(x)) = o(g(x)), x \to a$

$f \sim g, x \to a \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)), x \to a$

---

7 | Болцано-Кошијева теорема. Теорема о међувредности

БОЛЦАНО КОШИ

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна, $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\Rightarrow \exists c \in (a,b), f(c) = 0$

Δ: пп $f(a) < 0$, $f(b) > 0$

дужина: $\frac{1}{2}[a,b]$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \begin{cases} 0, & \text{крај} \\ >0, & a_1 = a \quad b_1 = \frac{a+b}{2} \\ <0, & a_1 = \frac{a+b}{2} \quad b_1 = b \end{cases} \quad [a_1, b_1] \subseteq [a,b], \quad f(a_1) < 0 \quad f(b_1) > 0$$

Настављамо поступак индуктивно, добијамо или $f(c) = 0$ или бесконачно много $[a_n, b_n]$ тд:

1) $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$

2) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \xrightarrow{\text{КАНТОР}} c \in [a_n, b_n], n \to \infty$

3) дужина $[a_n, b_n] = \frac{b-a}{2^n}$

$f(c) = 0$ јер је f е $c \to \operatorname{sgn} \mathring{U}_c = \operatorname{sgn} f$

пп. $f(c) \neq 0$ ↯ јер за велике n

$[a_n, b_n] \in (c - \delta, c + \delta)$

$\uparrow$ садржи 0 $\qquad \uparrow$ исто знак

■

ТЕОРЕМА О МЕЂУВРЕДНОСТИ

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непр.

$\forall \gamma$ између $f(a), f(b)$, $\exists c \in [a,b]$, $f(c) = \gamma$

Δ:

I) $\gamma = f(a) = f(b)$, $c = a \vee c = b$

II) $f(a) \neq f(b)$, пп $f(a) < f(b)$

$f(a) < \gamma < f(b)$

$g(x) := f(x) - \gamma$

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= f(a) - \gamma < 0 \\ g(b) &= f(b) - \gamma > 0 \end{aligned}\right\} \overset{\text{Б.К.}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b), g(c) = 0 \Rightarrow f(c) - \gamma = 0 \quad f(c) = \gamma$$

■

8) ВАЈЕРШТРАСОВА ТЕОРЕМА

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна

тада је f огр и достижу се sup и inf.

Д:

1. f је огр

ппс f није огр $\Rightarrow$ f није огр на $[a,\frac{a+b}{2}]$ или $[\frac{a+b}{2},b]$

Бирамо ону половину која није огр и додељујемо јој a_1,b_1

Правимо бесконачно уметањо сегмената $[a_n,b_n]\supseteq[a_{n+1},b_{n+1}]$, дужине $\frac{b-a}{2^n}$

$c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$

f е c $\Rightarrow$ постоји околина $(c-\delta,c+\delta)$ на којој је f огр, али за велико n, $[a_n,b_n]\subseteq(c-\delta,c+\delta)$ ↯ јер U_c је огр а $[a_n,b_n]$ није

2. достижу се inf и sup.

ппс $s=\sup_{[a,b]} f<+\infty$ $\quad\forall x\in[a,b]$, $f(x)\neq s$, $f(x)<s$ $\quad 0<\varepsilon<\frac{1}{M}$

$g(x)=\frac{1}{s-f(x)}$ $\quad$ $s-\varepsilon$ није мајоранта, $\exists x_0\in[a,b]$ $f(x_0)>s-\varepsilon$

$0<s-f(x_0)<\varepsilon$

$g(x_0)>M$ ↯ јер је g огр.

$\frac{1}{s-f(x_0)}>\frac{1}{\varepsilon}>M$

■

---

9) ПРЕКИДИ МОНОТОНИХ ФУНКЦИЈА

- $x_0\notin D_f$ је прекид то ф-ја није непр у x_0
- $x_0\in D_f$ -||- прве врсте то $\exists\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)\in\mathbb{R}$ и то је прекид
- $x_0\in D_f$ -||- отклоњив то $\exists$ -||- $=\lim_{x\to x_0^-} f(x)\in\mathbb{R}$
- $x_0\in D_f$ је прекид II врсте то је прекид и није прве врсте

Тврђење: монотона ф-ја може имати само прекиде I врсте

Д: пп. $f\nearrow$ и нека је x_0 прекид

$\forall x\in(x_0-\delta,x_0)$ $\quad f(x)\leq f(x_0)\overset{\text{т.огран.ф}}{\Rightarrow}\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\sup(f(x_0-\delta,x_0))<+\infty$ (јер $\leq f(x_0)$)

$\forall x\in(x_0,x_0+\delta)$ $\quad f(x)\geq f(x_0)\overset{\text{т.огран}}{\Rightarrow}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\inf(f(x_0-\delta,\delta))>-\infty$ (јер $\geq f(x_0)$)

■

(T) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ монотона, тада је она непр. акко је $f[a,b]$ интервал.

Δ:

$\boxed{\Rightarrow}$ важи и ако f није монотона

$\boxed{\Leftarrow}$ Ако је f прекидна, онда $f[a,b]$ није интервал:

$x_0\in(a,b)$ прекида, $f\uparrow \Rightarrow x_0$ је прекид прве врсте

$\Updownarrow$

$\exists\, f(x_0^-) < f(x_0^+)$

Гледамо интервал $[f(x_0^-), f(x_0^+)]$, у њему нема слике сем $f(x_0) \Rightarrow f([a,b])$ није интервал јер садржи $f(a)$ и $f(b)$, а постоји $V\in[f(a),f(b))$ тј. $f(x)\neq V, \forall x$ ■

Тврђење: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидна, онда је она 1-1 $\Leftrightarrow$ строго монотона.

Δ:

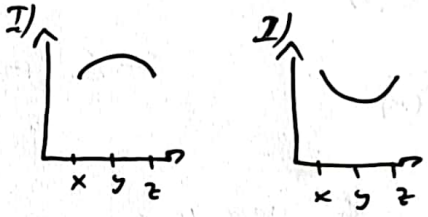
$\boxed{\Leftarrow}$ $x\neq y \Rightarrow x<y \lor x>y \Rightarrow f(x)<f(y) \lor f(x)>f(y) \Rightarrow f(x)\neq f(y)$

$\Rightarrow f$ је 1-1

$\boxed{\Rightarrow}$ ппс f није строго монотона

Имамо 3 тачке у овом поретку

$x<y<z$



I) $f(x)\le f(y)$ $f(y)\ge f(z)$

Ако је $f(x)=f(y)$ или $f(y)=f(z)$, f није 1-1 $\Rightarrow f(x)<f(y)$ $f(y)>f(z)$

или $f(x)=f(z)$ $f(x)\neq f(z)$

Ако је $f(x)<f(z)$

Онда $f(x)<f(z)<f(y) \Rightarrow$ Т.о. међувр $\exists\, c\in(x,y)$ т.д. $f(c)=f(z)$

$c\neq z$

Исто за $f(x)>f(z)$ и друге случајеве

$\Rightarrow f$ није 1-1

↯

■

10 ИНВЕРЗНЕ ф-ЈЕ. Непрекидност инверзне ф-је. Примери

Ако f није 1-1 → сужимо домен (узмемо $I \subseteq D_f$ интервал на коме је f строго монотоно)

Ако f није НА, сужимо кодомен на $f(I)$ ⇒ f ће бити 1-1 на I

▫ ПРИМЕРИ

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$ — није 1-1, сужимо домен на $(0,+\infty)$ па је $f((0,+\infty)) = f([0,+\infty))$

Посматрамо x^2 као $[0,+\infty) \to [0,+\infty)$

2) $f(x) = \sin x$ сужимо домен на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а кодомен на $[-1,1]$

$f^{-1}(\sin x) = \arcsin x$

3) $f(x) = \cos x$ сужимо домен на $[0,\pi]$ а кодомен на $[-1,1]$

4) $f(x) = tg(x)$ сужимо домен на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

5) $f(x) = e^x$ сужимо на $(0,+\infty)$

$\ln(x) := (e^x)^{-1}$

▫ НАПОМЕНА:

$f \nearrow \to f^{-1} \nearrow$

$f \searrow \to f^{-1} \searrow$

ППС $f \nearrow$, а f^{-1} не расте → $\exists\, y_1 < y_2$

$\underbrace{f^{-1}(y_1)}_{x_1} \geq \underbrace{f^{-1}(y_2)}_{x_2}$

⇒ $x_1 > x_2$

$f(x_1) > f(x_2)$

$\overset{\shortparallel}{y_1} > \overset{\shortparallel}{y_2}$ ↯

Т $f: [a,b] \to [\alpha, \beta]$ строго монотона, бијекција, непрекидна ⇒ f^{-1} је непрекидна

Д: ЗНАМО да је f^{-1} строго монотона и $f^{-1}[\alpha,\beta] = [a,b]$ } f^{-1} је непрекидна ■

---

11 ИЗВОДИ. ПРАВИЛА ДИФ. ПРИМЕРИ

▫ Ако $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$ онда се тај лимес зове извод f у x_0

▫ f је диф у x_0 ако постоји тај лимес

▫ леви/десни извод f у x_0 = леви и десни лимес

▫ f је диф у x_0 ако постоје леви и десни извод и једнаки су.

НА ЈЕЗИКУ o

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \iff f(x_0+h) - f(x_0) = h f'(x_0) + o(h)$

$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{ово је права кроз } x_0,\, f(x_0) \text{ са нагибом } f'(x_0)} + o(x-x_0),\ x \to x_0$

Ⓣ $f\ D(x_0) \Rightarrow f\ C\ x_0$

Δ: $f\ D(x_0) \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0),\ x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0)$$

$$= f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0) \Rightarrow f\ C\ x_0 \quad \blacksquare$$

▫ ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦИЈАБИЛНОСТИ

1) $\left.\begin{array}{l} f \pm g\ D x_0 \\ f, g\ D(x_0) \end{array}\right\}$ $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ јер су имаси

2) $c f\ D\ x_0$ $\quad (c f)' x_0 = c\ f'(x_0)$ јер је $\lim c \cdot f(x) = c \cdot \lim f(x)$

3) $f \cdot g\ D(x_0)$

$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$ ← ЛАЈБНИЦОВО ПРАВИЛО

Δ:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)\,g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,g(x_0+h) + f(x_0+h)\,g(x_0) - f(x_0+h)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\,(g(x_0+h) - g(x_0))}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0)\,(f(x_0+h) - f(x_0))}{h} = f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0) \quad \blacksquare$$

4) $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}\ D\ x_0$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

Δ: $$\left(\frac{1}{g}\right)' x_0 = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0+h)\,g(x_0)}$$

$$= -g'(x_0) \cdot \frac{1}{g^2(x_0)} \quad \blacksquare$$

▫ ИЗВОДИ $tg x$, $ctg x$

$$(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (ctg)'x = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

12 ИЗВОД СЛОЖЕНЕ И ИНВЕРЗНЕ ф-ЈЕ. ПРИМЕРИ

Тврђење: $g\,D(x_0)$ $g(x_0)=y_0$ $f\,D\,y_0 \Rightarrow f\circ g\,D\,x_0$ и $(f\circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$

Д: хоћемо: $f(g(x_0+h)) = f(g(x_0)) + \underset{\text{извод}}{A}\cdot h + o(h),\ h\to 0$

$y_0 = g(x_0)$

$k := g(x_0+h) - g(x_0)$

$= g(x_0+h) - y_0$

$g(x_0+h) = k + y_0$

$h\to 0,\ k\to 0$ јер је $g\,C\,x_0$

$$f(g(x_0+h)) = f(y_0+k) = f(y_0) + f'(y_0)\cdot k + o(k),\ k\to 0$$

$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot(g(x_0+h) - g(x_0)) + o(k)$$

$$= f(g(x_0)) + f'(g(x_0))\cdot[g'(x_0)\cdot h + o(h)] + o(k)$$

$$= f(g(x_0)) + \underbrace{f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}\cdot h + \underbrace{o(h)+o(k)}_{o(h)}$$

Тврђење: $f\,D\,x_0$ и строго монотона и непрекидна на $x_0\in(a,b)$, $f'(x_0)\neq 0$

$y_0 = f(x_0)$. Тада је $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Д: $(f^{-1}\circ f)(x) = x \quad /()'$

$(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1$

$(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

ПРИМЕРИ

1) $f(x) = e^x = y,\ f^{-1}(y) = \ln y$

$f^{-1\,\prime}(y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{e^x}$ $\quad (f^{-1})'(e^x) = \dfrac{1}{e^x}$

$\ln' x = \dfrac{1}{x}$

2) $f(x) = \sin x = y$

$f^{-1}(y) = \arcsin y$

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

3) $f(x) = \cos x = y$

$f^{-1}(y) = \arccos y$

$(f^{-1})'(y) = \dfrac{-1}{\sin x} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$

4) $(\sqrt{y}) = f^{-1}(y)$

$f(x) = x^2 = y$

$f^{-1}(y) = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

5) $f(x) = \operatorname{tg} x = y$

$f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

$$= \frac{1}{y^2+1}$$

13 ОСНОВНЕ ТЕОРЕМЕ диф. РАЧУНА (ФЕРМА, РОЛ, ЛАГРАНЖ)

$\boxed{}$ f има локални $\underset{MIN}{MAX}$ у тачки x_0 ако $\exists \delta$, $f(x) \underset{\geq}{\leq} f(x_0)$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap D_f$

ФЕРМА $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $x_0\in(a,b)$ f D x_0 x_0 је лок. екстремум $\Rightarrow f'(x_0)=0$

Д: $f'_-(x_0) = \underbrace{\lim_{h\to 0^-} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{\leq 0}}}_{L}$ $\qquad f'_+(x_0) = \underbrace{\lim_{h\to 0^+} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{\geq 0}}}_{D}$

$L=D$ $\quad L\geq 0$, $D\leq 0 \Rightarrow L=D=0$ $\quad f'(x_0)=0$ ■

РОЛ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $f\in C[a,b]$, f D (a,b), $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists c\in(a,b)$, $f'(c)=0$

НА ОСНОВУ ВАЈЕР се достижу x_{min}, x_{max}

I) $x_{min}, x_{max} \notin (a,b) \Rightarrow x_{min}, x_{max} \in \{a,b\}$ $\quad f(a)=f(b)$

$f_{min} = f_{max} \Rightarrow f\equiv const$

$\Rightarrow f'=0$

II) $x_{min}, x_{max} \in (a,b)$

$\Downarrow$ ФЕРМА

$f'(x_{min})=0$

$\vee\ f'(x_{max})=0$ ■

ЛАГРАНЖ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $f\in C[a,b]$, f D $(a,b) \Rightarrow \exists c\in(a,b)$ $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Д: $F(x) := f(x) - x\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\qquad F\in C[a,b]$, F D (a,b)

$F(a)=F(b) \overset{РОЛ}{\Rightarrow} \exists c\ F'(c)=0$ ■

Последице:

1) $f'=0$ на $(\alpha,\beta) \Rightarrow f\equiv const$

Д: $x,y\in(\alpha,\beta)$, $x\neq y$ $\quad \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \underset{0}{f'(c)}$, $c\in(x,y)$ $\Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow f\equiv const$

ово важи на интервалу! (sgn x је $f'=0$ на $\mathbb{R}$ али није const)

2) f D (α,β), $f'\geq 0 \Rightarrow f\nearrow$

$f'\leq 0 \Rightarrow f\searrow$ $\qquad$ ИСТО ВАЖИ НА ИНТЕРВАЛИМА!

Д: $x<y$ $\quad x,y\in(\alpha,\beta)$

НАПОМЕНА: ЛАГРАНЖ $\Rightarrow$ РОЛ

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ ако је $f(b)=f(a)$

$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$, $c\in(x,y)$

$f(y)-f(x) = f'(c)\underbrace{(y-x)}_{>0}$

$\operatorname{sgn} f(y)-f(x) = \operatorname{sgn} f'(c) \Rightarrow$ одређује рас f-је

14 Кошијева теорема о средњој вредности, Лопиталова правила

КОШИ $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f, g \in [a,b]$, $f, g\ D(a,b)$ $\quad f'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$

$$\Rightarrow \exists c \in (a,b) \quad \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(c)}{f'(c)}$$

Д: $F(x) := f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$

$F \in [a,b]$, $F\ D(a,b)$ $\quad F(a) = F(b) \overset{РОЛ}{\Rightarrow} \exists c\ F'(c) = 0$ ■

Коментари: 1. Зашто је $f(b)-f(a) \neq 0$? Јер ако $f(b)=f(a) \Rightarrow \exists c \in (a,b)\ f'(c)=0$ ↯

2. $f(x)=x$, добијамо Лагранжа

3. Геометријски:

параметарска ј-на $x = f(t)$ $\quad y = g(t)$

примери 1) круг $x = \cos t$, $y = \sin t$

2) правац: $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$

$\overrightarrow{AB} = (f(b)-f(a), g(b)-g(a))$

$tg\alpha = \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}$

$\overrightarrow{AB} = (f(t)-f(t_0), g(t)-g(t_0))$

$t \to t_0$, $\overrightarrow{AB} \to \vec{0}$

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\Delta f}{\Delta t}, \frac{\Delta g}{\Delta t}\right) = (f'(t_0), g'(t_0))$ $\quad tg\alpha = \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$

ЛОПИТАЛОВА ПРАВИЛА

f, g диф на (a,b), $f, g \in$ на $(a,b]$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ на $(a,b]$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$. Тада је $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

☐ Важи и за $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \to \infty$, $x \to a^-$

уз замену $\frac{1}{t} = x$

додефинишемо $f(a) = g(a) = 0$

$\Rightarrow f, g \in [a,b]$, $f, g\ D(a,b)$

Д: $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{Коши}{=} \lim_{x \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}$

$c \in (x, a) \Rightarrow c \to a^+$

Нешто доказивати за $\frac{\infty}{\infty}$ ■

Тврђење: $a > 1$, $\alpha > 0$ $\quad \ln \ll x^\alpha \ll a^x \Leftrightarrow \ln x = o(x^\alpha)$ $x^\alpha = o(a^x)$, $x \to +\infty$

Д: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \overset{ЛП}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{a^x} \overset{ЛП}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{a^x \ln a} = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{a^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^\alpha = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{x}{\alpha}}{a^{\frac{x}{\alpha}}}\right)^\alpha \cdot \alpha^\alpha = 0 \cdot \alpha^\alpha = 0$ ■

15 ТЕЈЛОРОВ ПОЛИНОМ. ПЕАНОВ И ЛАГРАНЖЕВ ОСТАТАК

Хоћемо f да апроксимирамо полиномском ф-јом

$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + ___ + a_n(x-x_0)^n$ $\qquad \boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}$

$\boxed{\cdot}$ f n пута диф у x_0, Тејлоров полином од f степена n у x_0 околини:

$$P_n(x, x_0, f) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + ___ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$\boxed{\cdot}$ $R_n(x, x_0, f) := f(x) - P_n(x, x_0, f)$ = остатак Тејлоровог полинома

$\boxed{\text{Лема}}$ $\forall k \in [n]$ $\quad P_n^{(k)}(x, x_0, f) = f^{(k)}(x_0)$

Δ: $P_n = a_0 + a_1(x-x_0) + ___ + a_n(x-x_0)^n$

$$P_n^{(k)} = k! \cdot a_k = k! \cdot \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = f^{(k)}(x_0) \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ПЕАНОВ}}$

f класе C^n у $x_0 \in (a,b)$ ($f^{(n)}$ је непр). Тада је $R_n(x, x_0, f) = o((x-x_0)^n)$, $x \to x_0$

Δ:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x, x_0, f)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - P_n(x, x_0, f)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{Л.П. } \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - P_n'(x, x_0, f)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\text{Л.П.}}{=} __ \overset{\text{Л.П. + ЛЕМА}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x, x_0, f)}{n!} = 0 \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{ЛАГРАНЖЕВ}}$

$x, x_0 \in (a,b)$, $f^{(n)} \in C[a,b]$, $f^{(n)} \mathcal{D}(a,b) \Rightarrow \exists c$ између x и x_0 тд.

$$R_n(x, x_0, f) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Δ: Коши F, G $\quad F(t) := f(x) - P_n(x, t, f)$

$G(t) := (x-t)^{n+1}$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \iff \frac{0 + R_n(x, x_0, f)}{0 + (x-x_0)^{n+1}} = \frac{+f^{(n+1)}(t)}{+(n+1)\cancel{(x-t)^n}}\cancel{(x-t)^n} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

$F(x) = 0$

$F(x_0) = R_n(x, x_0, f)$ $\qquad R_n = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ $\blacksquare$

$G(x) = 0$

$G(x_0) = (x-x_0)^{n+1}$

$G'(t) = (n+1)(x-t)^n \cdot (-1)$

$$F'(t) = \left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k + f(x)\right)' = -\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\right)'$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

16 ТЕЈЛОРОВ ПОЛИНОМ ОСНОВНИХ ф-ЈА

1) $(e^x)^{(n)} = e^x$

2) $(\sin x)^{(n)} = \begin{cases} \cos x, & n=4k+1 \\ -\sin x, & n=4k+2 \\ -\cos x, & n=4k+3 \\ \sin x, & n=4k \end{cases}$

3) $(\cos x)^{(n)} = \begin{cases} -\sin x, & n=4k+1 \\ -\cos x, & n=4k+2 \\ \sin x, & n=4k+3 \\ \cos x, & n=4k \end{cases}$

4) $((1+x)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(x+1)^{\alpha-n}$

5) $(\ln(1+x))^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

МАКЛОРЕНОВ = ТЕЈЛОРОВ у 0

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0$$

$$\sin x \equiv x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1}), \quad x \to 0$$

$$\cos x \equiv 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k}), \quad x \to 0$$

$$(1+x)^\alpha \equiv \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{\alpha}{k} + o(x^n), \quad x \to 0$$

$$\ln(1+x) \equiv x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0$$

НАПОМЕНА:

f непарна $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ f^{-1} парна, непарна је у $0 \Rightarrow 0$

f парна $\overset{(2)}{\Rightarrow}$ f^{-1} непарна

} парне ф-је ће имати само парне коеф а нел само нел у Мак.

$$\Delta: \overset{(1)}{f'(-x_0)} = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x_0+h) - f(-x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-f(x_0-h) + f(x_0)}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{+t} = f'(x_0)$$

(2): исто

17 МОНОТОНОСТ И ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦИЈА (ПОТРЕБНИ И ДОВОЉНИ УСЛОВИ). КОСЕ И ВЕРТИКАЛНЕ АСИМПТОТЕ.

КОСЕ АСИМПТОТЕ

def $y = kx + n$ је к.а. ф-је f, $x \to \pm\infty$ ако је $f(x) = kx + n + o(1)$, $x \to \pm\infty$

Згодно је развити до $\frac{1}{x}$ јер знамо са које стране прилази f

$$f(x) = kx + n + \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \pm\infty \quad \alpha \neq 0$$

$$f(x) - kx - n = \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \pm\infty$$

не значе

сталног знака $\operatorname{sgn}\alpha \cdot \operatorname{sgn} x$

$$k = \frac{f(x)}{x}, \quad x \to \pm\infty$$

$$n = f(x) - kx, \quad x \to \pm\infty$$

Лема $\operatorname{sgn}(\varphi(x) + o(\varphi(x))) = \operatorname{sgn}\varphi(x)$, на неком $\mathring{U}_a$

$$\Delta: \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x) + o(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 1 > 0 \Rightarrow \frac{\varphi(x) + o(\varphi(x))}{\varphi(x)} > 0 \text{ на } \mathring{U}_a$$

В.А.

$(\alpha, a) \subseteq D_f$ $a \notin D_f$ $a \in \mathbb{R}$

$(a, \beta) \subseteq D_f$ $a \notin D_f$

$(\alpha, \beta) \setminus a \subseteq D_f$ $a \notin D_f$

Права $x = a$ је В.А. ако је $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

или $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

□ ПОТРЕБНИ И ДОВОЉНИ УСЛОВИ ЛОКАЛНИХ ЕКСТРЕМУМА

-потребни: $f'(x_0)=0$ f диф.

Тврђење: Нека је $f'(x_0)=0$ и f класе C^2 у $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и $f''(x_0)\neq 0$.

Тада важи:

1. $f''(x_0)>0$ - мин. у x_0
2. $f''(x_0)<0$ - максимум у x_0

Д: $f(x)=f(x_0)+\underbrace{f'(x_0)(x-x_0)}_{0}+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$

$f(x)-f(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2}\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}+o((x-x_0)^2)$, $x\to x_0$

само $f''(x_0)$ утиче на знак ■

□ Термин: $f'(x_0)=0$ - стац. тачка, сингуларна тачка

Тврђење: $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ $f'''(x_0)\neq 0 \Rightarrow x_0$ ни max ни min

Д: $f(x)=f(x_0)+\overbrace{f'(x_0)(x-x_0)}^{0}+\overbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2}^{0}+\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$, $x\to x_0$

$f(x)-f(x_0)=\frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3)$, $x\to x_0$

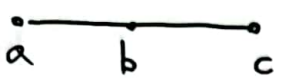
$(x-x_0)^3$ мења знак

$\forall x>x_0$ $f(x)>f(x_0)$ $\forall x<x_0$ $f(x)<f(x_0) \Rightarrow$ није екстремум ■

Тврђење: Нека је f класе C^k и $f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0$ и $f^{(k)}(x_0)\neq 0$

1) k непаран $\Rightarrow x_0$ није екстремум
2) k паран $\Rightarrow x_0$ јесте екстремум (max ако је извод нег, min ако је извод поз)

18 КОНВЕКСНОСТ



$\forall b \in [a,c]$, $\exists \lambda \in [0,1]$ $\quad b = \overbrace{(1-\lambda)a + \lambda c}^{\text{конвексна комб. тачака } a \text{ и } c}$ $\quad \lambda = \frac{b-a}{c-a}$

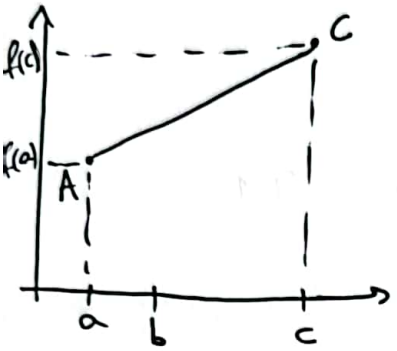
Ако је $b = (1-\lambda)a + \lambda c$, $\lambda \in [0,1]$ $\quad b = \frac{-b+c}{c-a} \cdot a + \frac{b-a}{c-a} \cdot c$

тада је $a \leq b \leq c$

def f је конвексна на интервалу I ако за сваке 2 тачке $a<c$, $a,c \in I$ важи: $\forall \lambda \in [0,1]$ $\quad f((1-\lambda)a + \lambda c) \leq \underline{(1-\lambda) f(a) + \lambda f(c)}$

шта је геометријски?

ГЕОМЕТРИЈСКИ



$b = (1-\lambda)a + \lambda c$

ПРАВА КРОЗ A, C:

$$y - f(a) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a}(x-a)$$

$$g(x) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a}(x-a) + f(a)$$

$$g(b) = \frac{f(c) - f(a)}{c-a}(b-a) + f(a)$$

$$= \lambda(f(c) - f(a)) + f(a)$$

$$= (1-\lambda) f(a) + \lambda f(c)$$

$f(b) \leq g(b) \iff f$ конвексна

def f је конкавна на I, $\forall a<c \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f((1-\lambda)a + \lambda c) \geq (1-\lambda) f(a) + \lambda f(c)$$

def $a \in I \in D_f$

$$\nu_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leftarrow \text{ф-ја нагиба}, \quad x \neq a$$

$$\| $$

$$\nu_x(a)$$

Тврђење 1: f је конвексна на $I \iff \forall$ три тачке $a, x, y \in I$ $x<a<y$ важи $\nu_a(x) \leq \nu_a(y)$

$\triangle$:

$\boxed{\Longrightarrow}$ нека је f конвексна на I, $x<a<y$, $x,a,y \in I$ $\quad a = x + \lambda(y-x)$, $\lambda = \frac{a-x}{y-x}$

$$f(a) \overset{\text{конв}}{\leq} f(x) + \lambda(f(y) - f(x)) = f(x) + \frac{a-x}{y-x}(f(y) - f(x)) \Big/ \cdot (y-x) > 0$$

$$(y-x) f(a) \leq (y-x) f(x) + (a-x)(f(y) - f(x))$$

$$(y-a) f(a) + (a-x) f(a) \leq f(x)(y-a) + f(y)(a-x)$$

$$(y-a)(f(a) - f(x)) \leq (a-x)(f(y) - f(a)) \quad / : (a-x)(y-a)$$

други смер је екв.

$$\nu_a(x) \leq \nu_a(y) \quad \blacksquare$$

Тврђење 2: f диф на I, тада је f конвексна на $I \iff f' \nearrow$ на I

Д:

$\boxed{\Rightarrow}$ f конв $a, b \in I$ $a < b$, хоћемо $f'(a) \leq f'(b)$

$a < x < b \overset{T1}{\Rightarrow} \nu_a(x) \leq \nu_b(x)$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \quad \Big/ \lim_{x \to a} \qquad \Big/ \lim_{x \to b}$$

$$f'(a) \leq \frac{f(a)-f(b)}{a-b} := k \qquad k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$$

$$f'(a) \leq k \leq f'(b) \quad \blacksquare$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $f' \nearrow$

довољно је да док $\forall\, x < a < y$ $\nu_a(x) \leq \nu_a(y)$ због T1

$$\nu_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \nu_a(y) = \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

$\downarrow$ ЛАГР. $\qquad \Downarrow$ ЛАГР.

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi_1) \qquad \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = f'(\xi_2)$$

$\xi_1 \in (x, a)$ $\qquad \xi_2 \in (a, y)$

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$$

$$\nu_a(x) \leq \nu_a(y) \quad \blacksquare$$

НАПОМЕНА: $\varphi' > 0$ на $I \Rightarrow \varphi \nearrow$ $\quad \varphi' \geq 0 \Rightarrow \varphi \nearrow$

$\varphi(y) - \varphi(x) = \varphi'(\xi)(y-x)$ $\quad \varphi' > 0 \Rightarrow \varphi$ строго расте

Важи и $\varphi \nearrow$ диф $\Rightarrow \varphi' > 0$

$$\varphi'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \qquad \operatorname{sgn} \varphi(x) - \varphi(x_0) = \operatorname{sgn} x - x_0$$

не важи за строго

Пример $f(x) = x^3$ строго расте, али $f'(0) = 0$

lim чува $\geq$, али $>$ претвори у $\geq$

Тврђење 3:

f је 2 пута диф на I. Тада је конвексна $\iff f'' \geq 0$ на I

конкавна $\iff f'' \leq 0$ на I

Д: $\varphi := f'$ знамо $\varphi' \geq 0 \iff \varphi$ расте

$$f'' \geq 0 \iff f' \text{ расте} \overset{T2}{\Rightarrow} f \text{ конв}$$

СВЕ ОВО ЈЕ ИСТО И ЗА КОНКАВНОСТ, САМО ДРУГИ ЗНАК.

T1 важи и за строгу конв., а T2 и T3 само 1 стр.

19 ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НИЗОВА, ОСНОВНА СВОЈСТВА, Монотони низови

def Низ реалних бројева је $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

def $a \in \mathbb{R}$ је лимес низа a_n ако $(\forall \varepsilon > 0), (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

def Ако $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, кажемо да низ конвергира, у супротном дивергира.

def a_n је ограничен ако $\exists M > 0$ тј. $|a_n| \leq M$ за $\forall n \in \mathbb{N}$

Тврђење 1: Низ конвергира $\Rightarrow$ Низ је ограничен

Δ: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ Нпр узмемо $\varepsilon = 1$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\ a_n \in (a-1, a+1)$

$$\left.\begin{array}{l} m := \min\{a_1, a_2 \ldots a_{n_0-1}, a-1\} \\ M := \max\{a_1, a_2 \ldots a_{n_0-1}, a+1\} \end{array}\right\} \forall n,\ m \leq a_n \leq M \quad \blacksquare$$

def $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n > M$

$-\infty$ — || — $a_n < -M$

Термин: низ одређено дивергира ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

Својства: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ $a, b \in \mathbb{R}$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$ 3) $b \neq 0, b_n \neq 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

4) Т.О. 3 лимеса

$a_n \leq b_n \leq c_n$, $n \geq n_0$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n$ конвергира у a и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

$a \in \{\pm\infty\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Пример: док. $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$

Δ: $\boxed{\Leftarrow}$ $|a_n| \to 0$ $-|a_n| \leq 0 \leq |a_n|$ $/\lim\limits_{n\to\infty}$

$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ $a_n \to 0$

по def. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$

хоћемо: — || — $||a_n| - 0| < \varepsilon$

$||a_n|| = |a_n|$ ✓ већ имамо $\blacksquare$

БЕРНУЛИЈЕВА НЕЈЕДНАКОСТ

$a > -1 \quad (1+a)^n \geq 1+na$

Д: БАЗА: $n=1$

$1+a \geq 1+a$ ✓

И.К. $(1+a)^n \geq 1+na \quad / \cdot (1+a)$

$(1+a)^{n+1} \geq 1+a+na+na^2$

$(1+a)^{n+1} \geq 1+a(n+1)+\underbrace{na^2}_{\geq 0} \geq 1+a(n+1)$ ■

□ Пример: $a_n = q^n$

конвергира $\Leftrightarrow q \in (-1,1]$, за $q>1$ одређено дивергира ка $+\infty$

за $q<1$ неодређено дивергира

Д: (I) $q>1$

$q = (1+a)^n \geq 1+na \to +\infty, \; n \to +\infty$

$a = q-1 > 0$

(II) $q \in (-1,1)$

$|q| < 1 \Rightarrow \frac{1}{|q|} > 1$

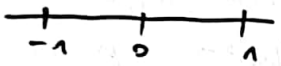
$\frac{1}{|q|^n} \to \infty \qquad |q|^n = \frac{1}{\frac{1}{|q|^n}} \to 0, n \to \infty$

$\frac{1}{|q|^n} \to +\infty$

$|q|^n \to 0 \Rightarrow q^n \to 0$ из претходног примера

(III) $q=1 \quad q^n = 1, n \to \infty$

(IV) $q=-1$



Увек можемо да узмемо околину у којој није бесконачно много елемената $\Rightarrow$ дивергира

(V) $q<-1 \Rightarrow |q|^n$ неограничен

па неодређено дивергира јер мења знак

МОНОТОНИ НИЗОВИ

def a_n је растући ако је $a_{n+1} \geq a_n$

опадајући $a_{n+1} \leq a_n$

(T) Монотони низ је конвергентан ако је ограничен. Ако није ограничен онда одређено дивергира.

Д: I део

$\boxed{\Rightarrow}$ важи увек

$\boxed{\Leftarrow}$ нека $a_n \nearrow$ и ограничен $\Rightarrow$ скуп $\{a_n\}$ је ограничен одозго

имамо $\sup\{a_n\} = s$

$\Uparrow$

хоћемо: $s = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\Updownarrow$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - s| < \varepsilon$

$s-\varepsilon < a_n < s+\varepsilon$ ✓

II део $a_n \nearrow$ и није ограничен

$M>0, \exists n_0 \; a_{n_0} > M$

$\forall n \geq n_0 \; a_n \geq a_{n_0} > M$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ ■

$s-\varepsilon$ није мајоранта

$\Rightarrow \exists n_0 \; a_{n_0} > s-\varepsilon$, за $n \geq n_0$

$a_n \geq a_{n_0} > s-\varepsilon$

$a_n > s-\varepsilon \Leftrightarrow |a_n - s| < \varepsilon$ ■

19 НАСТАВАК

Тврђење: $a>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Д:

1) $a>1$

$\alpha_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0$

довољно је доказати да $\alpha_n \to 0$, $n\to\infty$

$(1+\alpha_n)^n = a \geq 1 + n\alpha_n$

$a - 1 \geq n\alpha_n$

$0 < \alpha_n \leq \frac{a-1}{n}$ $/\lim\limits_{n\to\infty}()$

$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$

2) $a=1$ $a_n = \sqrt[n]{1} = 1$

3) $a<1$ $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ $b>1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{1} = 1$, $n\to\infty$

(доказати под 1)

Тврђење: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Д:

$\sqrt[n]{n} \geq 1$ и $\sqrt[n]{n} > 1$, $n \geq 2$

$\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, $\alpha_n > 0$, $n \geq 2$, хоћемо $\alpha_n \to 0$, $n\to\infty$

$(1+\alpha_n)^n = n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + ___ + \alpha_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$

$\Rightarrow \alpha_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \to 0$, $n\to 0$ $\alpha_n^2 \to \infty \Rightarrow \alpha_n \to 0$, $n\to\infty$ ■

20 ПОДНИЗОВИ И ТАЧКЕ НАГОМИЛАВАЊА. БОЛЦАНО-ВАЈЕРШТРАС

def: Нека је $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ строго растућа, тада је $a_{\varphi(n)}$ подниз од a_n.

Тврђење: Ако $a_n \to a \Rightarrow$ сваки подниз $\to a$

Δ: $\varepsilon > 0$ - дато $\quad \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$

$\varphi(n_0) \geq n_0 \quad \Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad \varphi(n) \geq \varphi(n_0) \geq n_0 \Rightarrow |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$

индукција

$\varphi(1) \geq 1$ ✓

$\varphi(n) \geq n$

$\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$

$\varphi(n+1) \geq n+1$ ■

def $a \in \mathbb{R}$ је тачка нагомилавања a_n ако постоји подниз $a_{\varphi(n)}$ који конвергира у њу.

def Највећа тачка нагомилавања ($\in \overline{\mathbb{R}}$) зове се горњи лимес или лимес супериор, а најмања доњи лимес или лимес инфериор.

Тврђење: a је т.н. низа $a_n \Leftrightarrow$ у сваној околини a, постоји беск. много чланова низа.

Δ $\boxed{\Rightarrow}$ a је т.н. низа a_n $\qquad$ има беск елемената $\{\varphi(n), n \geq n_0\}$

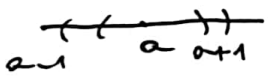
$\Updownarrow$

$a_{\varphi(n)} \to a$ за неки подниз $a_{\varphi(n)}$

$U_a = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \exists n_0, \forall n \geq n_0 \quad |a_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_{\varphi(n)} \in U_a$

$\boxed{\Leftarrow}$ У сваној околини a постоји беск. много чланова низа

Узмемо $\varepsilon = 1 \quad (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \quad \exists n_1 \quad a_{n_1} \in (a-1, a+1)$



$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists n_2 > n_1 \Leftrightarrow a_{n_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$

↳ јер их има беск много у тој околини

Конструишемо подниз

$a_{n_j} \in (a - \frac{1}{j}, a + \frac{1}{j}) \qquad U_a := (a - \frac{1}{k+1}, a + \frac{1}{k+1}) \ni a_{n_{k+1}} \quad n_{k+1} > n_k$

$a_{n_k} \in (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$

$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \Rightarrow a_{n_k} \to a$ ■

20 НАСТАВАК

БОЛЦАНО – ВАЈЕРШТРАС: Сваки огр низ има т.н.
($\Leftrightarrow$ сваки огр низ има конвергентан подниз

Д:

1° скуп вредности низа a_n је коначан $\Rightarrow$ он има т.н./конв. подниз

2° скуп вредности низа a_n је бесконачан

a_n је огр $\Rightarrow \exists m, M, \forall n\ m \le a_n \le M$

Или $[m, \frac{m+M}{2}]$ садржи беск. много ел. скупа a_n или $[\frac{m+M}{2}, M]$. Бирамо α_2, β_2 тако где имамо беск много ел и понављамо поступак индуктивно. Направили смо беск много α_n, β_n т.д. $[\alpha_n, \beta_n] \supseteq [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \overset{\text{КАНТОР}}{\Longrightarrow} \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{a\}$

дужина ед $[a_n, b_n] = \frac{M-m}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow a$ је тачка нагомилавања

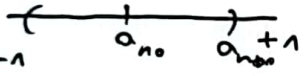
---

21 ВЕЗА ИЗМЕЂУ ф-ЈЕ И НИЗА. НЕПРЕКИДНОСТ ех.

Def a_n низ у $\mathbb{R}$ је Кошијев ако важи:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \ge n_0)\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Тврђење: Сваки Кошијев низ је ограничен.

Д: 

Нека је $\varepsilon = 1$ $\exists n_0\ \forall m, n \ge n_0\ |a_n - a_m| < \varepsilon = 1$

$m = n_0$

$\forall n \ge n_0\ a_n \in (a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$

$m = \min\{a_1, a_2 \ldots a_{n_0-1}, a_{n_0} - 1\}$ $M = \max\{a_1, a_2 \ldots a_{n_0-1}, a_{n_0} + 1\}$ ■

Тврђење: Конвергентан $\Rightarrow$ Кошијев низ

Д: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\quad \varepsilon > 0 \rightsquigarrow n_0, \forall n \ge n_0\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$m, n \ge n_0\ |a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■

Тврђење: Кошијев низ конвергира $\Leftrightarrow$ има конв. подниз

$\boxed{\Rightarrow}$ увек важи

$\boxed{\Leftarrow}$

$\varepsilon > 0\ \exists n_1, \forall n \ge n_1\ |a_{\varphi(n)} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists n_2, \forall n, m \ge n_2\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$

$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$

$\forall n \ge n_0\ |a_n - a| \le |a_n - a_{\varphi(n)}| + |a_{\varphi(n)} - a|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

■

T Кошијев принцип конвергенције

$a_n \in \mathbb{R}$ је конвергентан $\Leftrightarrow$ a_n је Кошијев

$\boxed{\Rightarrow}$ већ знамо из претходног тврђења

$\boxed{\Leftarrow}$ a_n је Кошијев $\Rightarrow$ a_n је ограничен $\overset{\text{Болц.ВАЕР}}{\Rightarrow}$ има конвергентан подниз

$\Rightarrow a_n$ конвергира ■

def (M,d) је комплетан метрички простор ако сваки Кошијев низ конвергира.

T ХАЈНЕОВА def лимеса

$a \in \overline{\mathbb{R}}$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall$ низ $a_n \to a$, $a_n \neq a$ важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = L$

Δ: (за коначне a, L)

$\boxed{\Rightarrow}$ пп да је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $a_n \to a$, $\neq a$

$\varepsilon > 0$ - дато

$\exists \delta > 0$ $\forall x \in (a-\delta, a+\delta) / \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$a_n \to a$ $\exists n_0, \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ $0 < |a_n - a| < \delta$

$\Big\}$ $\forall n \geq n_0$ $|f(a_n) - L| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$f(a_n) \to L$ ■

$\boxed{\Leftarrow}$ пп. није $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)\ \exists x \in (a-\delta, a+\delta) / \{a\}$ $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{n} \longrightarrow \exists \underset{a_n}{\underset{\shortparallel}{x}} \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) / \{a\}$ $|f(a_n) - L| \geq \varepsilon$

Нашли смо $|a_n - a| < \frac{1}{n}$

$a_n \neq a$ јер $a_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) / \{a\}$

$\Rightarrow \underset{n \to \infty}{f(a_n) = L}$ ↯ ■

21 НАСТАВАК

Последица: ако $\exists\, a_n \to a$, $a_n \neq a$ и $b_n \to a$, $b_n \neq a$ т.д. $f(a_n) \to L_1$, $f(b_n) \to L_2$, $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ не $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$

Последица: $f \neq const$, f периодична $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

Последица: f је непр у $a \Leftrightarrow \forall$ низ $a_n \to a$ $f(a_n) \to f(a)$

Тврђење: e^x је непрекидна

Д: довољно је да док да је непр у 0 јер $\lim\limits_{x \to 0} e^x = 1$

$$\lim_{x \to x_0} e^x = \lim_{x \to x_0} e^{x - x_0} \cdot e^{x_0} = e^{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} e^t = e^{x_0} \cdot 1$$

доказ: $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$ и $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$

I) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1$: $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} 1$ користимо ово

$x_n > 0$, $x_n \to 0$ хоћемо: $|e^{x_n} - 1| < \varepsilon$

$$\| \quad e^{x_n} - 1 \Rightarrow e^{x_n} < 1 + \varepsilon \quad \text{хоћемо:}$$

$\varepsilon > 0$ - дато $\exists m$ $e^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$

$\exists n_0, \forall n \geq n_0$ $x_n \leq \frac{1}{m}$ $\quad n \geq n_0$ $e^{x_n} \leq e^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$ ■

II) $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$: $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{e^t} = \frac{1}{1} = 1$ ■

□ доказати преко низова

1° f с a, g с b, $b = f(a) \Rightarrow g \circ f$ с a

хоћемо: $x_n \to a \Rightarrow (g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(a)$

$x_n \to a \underset{f \text{ с } a}{\Rightarrow} f(x_n) \to f(a) \underset{g \text{ с } f(a)}{\Rightarrow} g(f(x_n)) \to g(f(a))$ ■

2° $\underline{\lim\limits_{x \to a} f(x) = L,\ g \text{ с } L \Rightarrow g(\lim\limits_{x \to a} f(x)) = \lim\limits_{x \to a} g(f(x))}$

$l = g(L)$, хоћемо $\ell = g(L)$

$x \neq x_n \to a \overset{\text{ХАЈНЕ}}{\Rightarrow} f(x_n) \to L \overset{g \text{ с } L}{\Rightarrow} g(f(x_n)) \to g(L) \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = g(L) = \ell$

■

22 КОШИЈЕВ ПРИНЦИП КОНВЕРГЕНЦИЈЕ НИЗОВА И Ф-ЈА

$a \in \overline{\mathbb{R}}$. Тада $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \in \mathbb{R}$ акко $\underbrace{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ \forall x, y \in \mathring{U}_a \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}_{\text{Кошијев услов за } f \text{ у околини } a\ (\star)}$

Д:

$\boxed{\Rightarrow}$ Нека је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R}$

$\varepsilon > 0$ - дато, хоћемо да док. да важи $(\star)$

$\frac{\varepsilon}{2} \rightsquigarrow \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}_a \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$x, y \in \mathring{U}_a \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\boxed{\Leftarrow}$

$x_n \to a,\ x_n \neq a$, $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow \delta$ из $(\star)$

$x_n \to a \Rightarrow \exists n_0,\ \forall n \geq n_0\ \ x_n \in \mathring{U}_a$

$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$

низ $f(x_n)$ је Кошијев $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = L$

• да би смо доказали $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, треба да док. да $f(y_n) \to L$, $\forall$ низ $y_n \to a$, $y_n \neq a$

(ХАЈНЕ)

$y_n \to a$, $y_n \neq a$ исти поступак $\Rightarrow f(y_n)$ Кошијев $\Rightarrow f(y_n) \to L_1$

$L_1 = L$?

$\varepsilon > 0$ фиксирано

$$|L - L_1| = |L - f(x_n) + f(x_n) - f(y_n) + f(y_n) - L_1| \leq \underset{(1)}{|L - f(x_n)|} + \underset{(2)}{|f(x_n) - f(y_n)|} + \underset{(3)}{|L_1 - f(y_n)|}$$

(1), (3): по деф лимеса

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

(2): $\exists \delta,\ x, y \in \mathring{U}_a \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $(\star)$

$x_n \overset{\neq a}{\to} a \quad y_n \overset{\neq a}{\to} a$

Т Штолц

$x_n, y_n \quad y_n \nearrow,\ y_n \to +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ ако постоји тај lim

Последице: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} A_n = a$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} G_n = a$

$\alpha_n > 0$ Ако $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \alpha$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha$