Analiza 3

Granična vrednost i neprekidnost

- Dokaz da limes ne postoji - nađemo dva niza koji teže tački u kojoj posmatramo limes, ali tako da limesi funkcije nad tim nizovima budu različiti. Prema Hajneovoj teoremi tada limes funkcije u toj tački ne postoji.
- Dokaz da je limes jednak c - teoremom o dva policajca dokažemo da je $f - c$ ograničeno nulom sa obe strane.
- Analogno se koriste ove dve teoreme za neprekidnost u tački.

Parcijalni izvodi i diferencijabilnost

- Ako je funkcija data analitički parcijalni izvodi se dobijaju tako što se sve promenljive osim promenljive po kojoj se radi izvod posmatraju kao konstante. Ako funkcija nije data analitički onda:

$$f'_x(x_0,\ y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{h},\ f'_y(x_0,\ y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + h) - f(x_0,\ y_0)}{h}$$

- Izvod u pravcu vektora $\vec{v} = (\alpha,\ \beta)$ je:

$$f'_{\vec{v}}(x_0,\ y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot \alpha,\ y_0 + h \cdot \beta) - f(x_0,\ y_0)}{h}$$

  Za $\vec{v} = (1,\ 0)$ dobija se f'_x, a za $\vec{v} = (0,\ 1)$ dobija se f'_y.
- Funkcija f je diferencijabilna u $(x_0,\ y_0)$ akko:

$$\lim_{(h,\ k) \to (0,\ 0)} \frac{f(x_0 + h,\ y_0 + k) - f(x_0,\ y_0) - hf'_x(x_0,\ y_0) - kf'_y(x_0,\ y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

- Ako je f diferencijabilna u $(x_0,\ y_0)$, onda je ona i neprekidna u toj tački. Ako je f neprekidna u $(x_0,\ y_0)$ i postoje parcijalni izvodi po x i y u toj tački i neprekidni su, onda je ona i diferencijabilna u toj tački.
- Gradijent funkcije f je:

$$\nabla f = (\frac{df}{dx},\ \frac{df}{dy},\ \frac{df}{dz},\ \dots)$$

- Izvod u tački $(x_0,\ y_0)$ u pravcu vektora $\vec{v}$ je:

$$\frac{df}{dv}(x_0,\ y_0) = \nabla f(x_0,\ y_0) \circ \vec{v}$$

Izvod složene funkcije i Tejlorov polinom

- Jakobijeva matrica funkcije $F : R^m \to R^n$ u tački x_0 je:

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1}(x_0) & \frac{df_1}{dx_2}(x_0) & \dots & \frac{df_1}{dx_m}(x_0) \\ \frac{df_2}{dx_1}(x_0) & \frac{df_2}{dx_2}(x_0) & \dots & \frac{df_2}{dx_m}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dx_1}(x_0) & \frac{df_n}{dx_2}(x_0) & \dots & \frac{df_n}{dx_m}(x_0) \end{bmatrix}$$

- Jakobijan je J_f = $\det A_L$
- Za preslikavanje $g \circ f$ važi $A_{g \circ f(x_0)} = A_{g(f(x_0))} \cdot A_{f(x_0)}$
- Tejlorov polinom funkcije f reda n u okolini tačke $(x_0,\ y_0)$ je:

$$P_{n,\ (x_0,\ y_0)} = f(x_0,\ y_0) + \frac{1}{1!}(f'_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,\ y_0)(y - y_0)) +$$

$$\frac{1}{2!}(f''_{xx}(x_0,\ y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,\ y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0,\ y_0)(y - y_0)^2) + \ldots +$$

$$\frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}\frac{df}{d^{n-j}xd^jy}(x_0,\ y_0)(x - x_0)^{n-j}(y - y_0)^j$$

Tangentne ravni

- Regularna površ je $P = \{(x, y, z) \in R^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$. Unija svih tangenti na sve krive kroz tačku a na površi P čine tangentnu ravan u tački a na površ P.
- Vektor normale tangentne površi u tački a je $\nabla f(a)$
- Ako površ prolazi kroz tačku $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, a njena normala je $\vec{n} = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)$, onda važi:

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0$$

- Ako je $\vec{v} = (a,\ b,\ c)$ vektor pravca tangente u tački $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, onda je jednačina tangente:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Lokalni ekstremum i uslovni ekstremum

- Kandidati za lokalni ekstremum su tačke u kojima je gradijent jednak nuli i tačke u kojima funkcija nije diferencijabilna.
- Hesijan funkcije f u tački a je:

$$d^2f(a) = \begin{bmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2}(a) & \ldots & \frac{d^2f}{dx_1dx_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \\ \frac{d^2f}{dx_ndx_1}(a) & \ldots & \frac{d^2f}{dx_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

- Silvesterov kriterijum:
    1. Svi minori A_1, A_2, ..., A_n su veći od nule $\Leftrightarrow$ q je pozitivno definisan.
    2. A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, ... $\Leftrightarrow$ q je negativno definisan.
- Ako je q pozitivno definisan, onda je a lokalni minimum. Ako je q negativno definisan, onda je a lokalni maksimum. U svim ostalim slučajevima, a nije lokalni ekstremum.
- Za n = 2 Hesijan je:

$$\begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix}$$

1. A_2 > 0 i A_1 > 0 $\Leftrightarrow$ a je minimum.
2. A_2 > 0 i A_1 < 0 $\Leftrightarrow$ a je maksimum.
3. A_2 < 0 $\Leftrightarrow$ a nije lokalni ekstremum.

- Neka je funkcija $f : D \to R$ i neka postoje uslovi koji ograničavaju oblast D na oblast $S = \{(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in D \mid \phi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0,\ \ldots,\ \phi_k(x_1,\ \ldots,\ x_n) = 0\}$. Kandidati za uslovni ekstremum su tačke u kojima je gradijent Lagranžove funkcije jednak nuli, tačke u kojima je narušena diferencijabilnost i tačke koje predstavljaju granicu oblasti. Lagranžova funkcija:

$$F(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_k) = f(x_1,\ \ldots,\ f_n) + \lambda_1\phi_1(x_1,\ \ldots,\ x_n) + \ldots + \lambda_n\phi_n(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

- Ako je skup D ograničen i zatvoren, onda je D kompakt. Vajerštrasova teorema: ako je $f : D \to R$ i D je kompakt, onda f dostiže max/min na D.

Višestruki integrali

- Dvostruki integral:

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_a^b (\int_c^d f(x,\ y)dy)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,\ y)dx)dy,\ D = \{(x,\ y) \in R^2,\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$$

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_a^b (\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,\ y)dy)dx,\ D = \{(x,\ y) \in R^2,\ a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \int_c^d (\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,\ y)dx)dy,\ D = \{(x,\ y) \in R^2,\ \gamma(y) \le x \le \delta(y),\ c \le y \le d\}$$

- Površina D se dobija za $f(x,\ y) = 1$:

$$P(D) = \iint_D dxdy$$

- Trostruki integral:

$$\iiint_T f(x,\ y,\ z)dxdydz = \iint_D (\int_{\alpha(x,\ y)}^{\beta(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)dxdy),\ T = \{(x, y, z) \in R^3 \mid \alpha(x,\ y) \le z \le \beta(x,\ y),\ (x,\ y) \in D\}$$

- Zapremina T se dobija za $f(x,\ y,\ z) = 1$:

$$V(T) = \iiint_T dxdydz$$

- Smena promenljive $F : D_2 \to D_1$ u dvostrukom (analogno za trostruki) integralu:

$$\iint_{D_1} f(x,\ y)dxdy = \iint_{D_2} f(F(u,\ v)) \cdot |J_F(u,\ v)|dudv$$

- Smene u R^2:

1. Polarne koordinate:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ r \in [0, +\infty],\ \theta \in [-\pi, \pi],\ |J| = r$$

- Smene u R^3:

1. Cilindrične koordinate:

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,\ r \in [0, +\infty],\ \theta \in [-\pi, \pi],\ |J| = r$$

2. Sferne koordinate:

$$x = r\sin\phi\cos\theta,\ y = r\sin\phi\sin\theta,\ z = r\cos\phi,\ r \in [0, +\infty],\ \theta \in [-\pi, \pi],\ \phi \in [0, \pi],\ |J| = r^2\sin\phi$$

Krivolinijski integrali

- Krivolinijski integral prve vrste: ako je $r : [a, b] \to R^3$ parametrizacija glatke krive c i f neprekidna funkcija, onda je:

$$\oint_c f(x, y, z)ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot ||r'(t)||dt$$

- Ako je c deo po deo glatka i ti delovi su c_1, ..., c_n, onda je:

$$\oint_c = \oint_{c_1} + \ldots + \oint_{c_n}$$

- Krivolinijski integral druge vrste: ako je $r : [a, b] \to R^3$ parametrizacija glatke krive c i F vektorsko polje, onda je:

$$\oint_c Fdr = \int_a^b F(r(t)) \circ r'(t)dt$$

- Kriva ima standardnu (matematičku, pozitivnu) orijentaciju ako je usmerena suprotno od kazaljke na satu. Ako orijentacija krive i njena parametrizacija nisu saglasne ispred integrala dodaje se minus. Ako je c^- kriva c sa suprotnom orijentacijom od krive c, onda važi:

$$\oint_{c^-} Fdr = -\oint_c Fdr$$

- Grinova formula: ako je c deo po deo glatka, zatvorena i pozitivno orijentisana kriva i granica je oblasti D, a $F = (P, Q)$ je vektorsko polje na D, onda je:

$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_{\overline{D}} (Q'_x - P'_y)dxdy$$

- Ako važi $Q'_x - P'_y = 0$, onda je F gradijentno vektorsko polje. U tom slučaju, integral ne zavisi od putanje od tačke A do tačke B koje predstavljaju krajeve linije c. Ako je f funkcija tako da važi $\nabla f = F$, onda je:

$$\int_A^B Fdr = f(B) - f(A)$$

Površinski integrali

- Površinski integral prve vrste: ako je $r : D \to R^3,\ r(u,\ v) = (x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))$ parametrizacija regularne površi S i f neprekidna funkcija, onda je:

$$\iint_S fdS = \iint_{\overline{D}} f(r(u, v)) \cdot ||r'u \times r'v||dudv$$

- Za $f = 1$ dobija se površina površi.
- Ako je S grafik funkcije $z(x,\ y)$, onda važi:

$$r(x,\ y) = (x,\ y,\ z(x,\ y)),\ r'_x \times r'_y = (-z'_x,\ -z'_y,\ 1),\ ||r'_x \times r'_y|| = \sqrt{z'^2_x + z'^2_y + 1}$$

- Površinski integral druge vrste: ako je $r : D \to R^3,\ r(u,\ v) = (x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))$ parametrizacija regularne površi S i F vektorsko polje, onda je:

$$\iint_S F\overrightarrow{dS} = \iint_D F(r(u, v)) \circ (r'u \times r'v)dudv$$

- Ako orijentacija vektora $r'u \times r'v$ nije saglasna sa orijentacijom površi ispred integrala dodaje se minus. Orijentaciju vektora proveravamo tako što uzmemo bilo koju tačku i odredimo vrednost vektora u njoj.
- Gaus-Ostrogradski formula: ako je regularna površ S granica nekog kompaktnog tela T, a F neprekidno vektorsko polje na F, onda je:

$$\iint_S F\overrightarrow{dS} = \iiint_T \nabla \circ F dxdydz,\ \nabla \circ F = \frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz},\ F = (P,\ Q,\ R)$$

- Zapremina kupe visine h i poluprečnika r je $\frac{1}{3}hr^2\pi$. Zapremina valjka visine h i poluprečnika r je $hr^2\pi$. Zapremina lopte poluprečnika r je $\frac{4}{3}r^3\pi$. Zapremina prizme je hB, gde je B površina osnove. Zapremina piramide je $\frac{1}{3}hB$, gde je B površina osnove.
- Stoksova formula: ako je S deo po deo glatka površ i γ njena deo po deo glatka granica, F neprekidno vektorsko polje i orijentacije S i γ se slažu, onda je:

$$\oint_\gamma F dr = \iint_S \nabla \times F\overrightarrow{dS},\ \nabla \times F = (\frac{d}{dx},\ \frac{d}{dy},\ \frac{d}{dz}) \times (P,\ Q,\ R) = (R'_y - Q'_z,\ P'_z - R'_x,\ Q'_x - P'_y)$$

  Ako granica c ima pozitivnu orijentaciju, onda će se orijentacija površi S slagati sa orijentacijom c ako je usmerena na gore.
- Površina kruga poluprečnika r je $r^2\pi$. Površina elipse sa koeficijentima a i b je $ab\pi$.

Diferencijalne jednačine

- Jednačina koja razdvaja promenljive: $y' = f(x) \cdot g(y)$
  Transformišemo izraz, a zatim integralimo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx,\ g(y) \neq 0 \quad / \int$$

$$G(y) = F(x) + c$$

- Linearna jednačina prvog reda: $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$
  Rešenje dobijamo po formuli:

$$y = e^{-\int P(x)dx}(c + \int Q(x)e^{\int P(x)dx})$$

- Bernulijeva jednačina: $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^\alpha$
  Jedno rešenje je $y = 0$, a druga dobijamo tako što svedemo jednačinu na linearnu prvog reda:

$$y^{-\alpha}y' + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x),\ smena\ z = y^{1-\alpha}$$

- Totalni diferencijal: $M(x,\ y) + N(x,\ y)y' = 0,\ tj.\ M(x,\ y)dx + N(x,\ y)dy = 0$
  Nađemo $f(x,\ y)$ tako da $f'_x = M$ i $f'_y = N$, pa je rešenje $f(x, y) = C$
- Smena promenljive:

1. Ako imamo jednačinu oblika $y' = f(\frac{y}{x})$ smena je $z(x) = \frac{y}{x}$
2. Ako imamo jednačinu oblika $y' = f(ax + by + c)$ smena je $z(x) = ax + by + c$