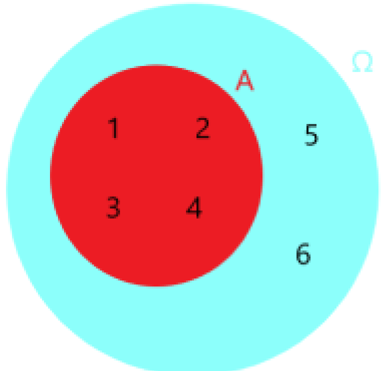
Verovatnoća

1. Prostor elementarnih ishoda. Događaji i relacije i operacije sa njima

Slučajni eksperiment je kompleks uslova koji se mogu ponavljati, a ne dovode uvek do istog ishoda. **Elementarni ishod** (**događaj**) se ne definiše formalno kao tačke ili prave u geometriji, ali to je sve ono što logički može da se desi pri nekom slučajnom eksperimentu. Svi mogući ishodi jednog eksperimenta čine **prostor elementarnih ishoda** (Ω) tog slučajnog eksperimenta. On može biti **konačan**, **prebrojiv** i **neprebrojiv**. **Primer**:

1. bacanje dve kockice - konačan
   - dobijene vrednosti: Ω_1 = {11, 12, ..., 16, ..., 66}, $|\Omega_1|$ = 36
   - zbir dobijenih vrednosti: Ω_2 = {2, 3, ..., 12}, $|\Omega_2|$ = 11
   - broj šestica: Ω_3 = {0, 1, 2}, $|\Omega_3|$ = 3
2. biranje broja iz nekog skupa sve dok ne odaberemo paran broj - prebrojiv
   - Ω = {2, 4, 6, ..., 12, 14, 16, ...} ∪ {*}, $|\Omega|$ = $\mathcal{X}_0$ (alef nula, kardinalnost skupa prirodnih brojeva N)
3. biranje broja iz skupa [0, 1] - neprebrojiv
   - Ω = [0, 1], $|\Omega|$ = c_0 (kontinuum, kardinalnost skupa realnih brojeva R)

Primer: Posmatrajmo bacanje kockice. Skup elementarnih ishoda je Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Ako posmatramo samo vrednosti manje od 5, onda imamo događaj A = {1, 2, 3, 4}.



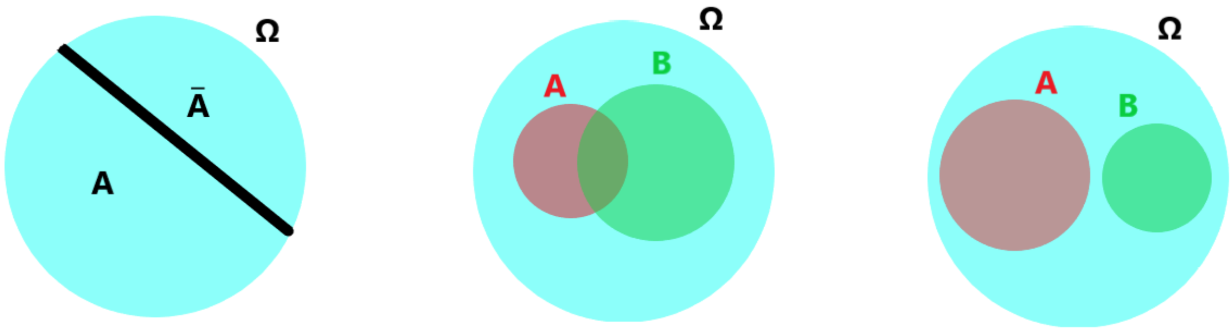
Događaj je podskup od Ω. Ako je Ω konačan ili prebrojiv, onda je svaki njegov podskup događaj. Kažemo da se događaj realizovao ako se desio elementarni ishod koji mu pripada. Posebni događaji su Ω koji se naziva **sigurni događaj** jer uvek mora da se desi, kao i $\emptyset$ koji se naziva **nemogući događaj** jer se nikada ne može desiti.

Relacije:

1. **Inkluzija**: $A \subset B \to w \in A \Rightarrow w \in B$
2. **Ekvivalencija**: $A = B \to A \subset B \land B \subset A$

Operacije:

1. **Unarna operacija - suprotan događaj**: $\overline{A} = \{w \mid w \notin A\}$
2. **Binarne operacije**:
    - **presek**: $A \cdot B = \{w \mid w \in A \land w \in B\}$, realizuje se akko se realizovao svaki od događaja A i B.
    - **unija**: $A \cup B = \{w \mid w \in A \lor w \in B\}$, realizuje se akko se realizovao bar jedan od događaja A i B, odnosno akko postoji neki od događaja A i B koji se realizovao.
    - **zbir**: $A + B \to$ unija disjunktnih događaja.



Moguće je uopštiti operacije i na n događaja, a važi i za $+\infty$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i,\ \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Zakoni:

- **zakon idempotencije**: $\overline{\overline{A}} = A$
- **De-Morganovi zakoni**: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2. σ-algebra događaja

Definicija: Neka je Ω prostor elementarnih ishoda nekog slučajnog eksperimenta i $\mathcal{F}$ klasa podskupova od Ω. Ako:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall\, A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$
3. $(\forall\, n \in N) A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (prebrojiva unija)

onda je $\mathcal{F}$ **σ-algebra podskupova** (**događaja**) nad Ω. Ako umesto 3) važi $A,\ B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$, onda je $\mathcal{F}$ **algebra**.

Osobine:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
  $^{\triangle:}$ Na osnovu 1 važi $\Omega \in \mathcal{F}$, a pošto je $\overline{\Omega} = \emptyset$ na osnovu 2 sledi tvrđenje. ■
- $(\forall\, n \in N)A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (prebrojiv presek)
  $^{\triangle:}$ $\forall\, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow^2 \overline{A_n} \in \mathcal{F} \Rightarrow^3 \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{F} \Rightarrow^2 \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}} \in \mathcal{F} \Rightarrow^{de-Morgan} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{A_n}} \in \mathcal{F}$
  $\Rightarrow^{idempotencija} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ ■
- $(\forall\, k \in \{1,\, \ldots,\, n\})A_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$ (konačna unija)
  $^{\triangle:}$ $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \,\cup\, \ldots \,\cup\, A_n \,\cup\, \emptyset \,\cup\, \ldots \,\cup\, \emptyset$ što je prebrojiva unija skupova koji pripadaju $\mathcal{F}$ pa na osnovu 3 sledi tvrđenje. ■
- $(\forall\, k \in \{1,\, \ldots,\, n\})A_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{F}$ (konačan presek)
  $^{\triangle:}$ $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \,\cap\, \ldots \,\cap\, A_n \,\cap\, \Omega \,\cap\, \ldots \,\cap\, \Omega$ što je prebrojivi presek skupova koji pripadaju $\mathcal{F}$ pa na osnovu druge osobine sledi tvrđenje. ■

Nad istim prostorom može se definisati više σ-algebri. **Primer**:

- **trivijalna σ-algebra**: $\mathcal{F} = \{\emptyset,\ \Omega\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset,\ A,\ \overline{A},\ \Omega\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

Lema: Presek proizvoljnog broja σ-algebri definisanih nad istim prostorom elementarnih ishoda Ω je σ-algebra.
$^{\triangle:}$ Neka su $\mathcal{F}_i$ σ-algebre. Dokazaćemo sva tri svojstva iz definicije σ-algebre za njihov presek:

1. $(\forall\, i \in I)\Omega \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$
2. $A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall\, i \in I)A \in \mathcal{F}_i \Rightarrow^2 (\forall\, i \in I)\overline{A} \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \overline{A} \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$
3. $(\forall\, n \in N)A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall\, n \in N)(\forall\, i \in I)A_n \in \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall\, i \in I)(\forall\, n \in N)A_n \in \mathcal{F}_i$
   $\Rightarrow^3 (\forall\, i \in I)\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ ■

Unija dve σ-algebre nije uvek σ-algebra. **Primer**:
$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset,\ A,\ \overline{A},\ \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset,\ B,\ \overline{B},\ \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 \,\cup\, \mathcal{F}_2 = \{\emptyset,\ A,\ \overline{A},\ B,\ \overline{B},\ \Omega\}$, ali nemamo $A \cup B$.

Definicija: Neka je $\mathcal{K}$ kolekcija podskupova od Ω koja nije σ-algebra. **Minimalna σ-algebra definisana kolekcijom** $\mathcal{K}$ u oznaci $\sigma(\mathcal{K})$ je najmanja σ-algebra koja sadrži $\mathcal{K}$ u smislu da za bilo koju drugu σ-algebru $\mathcal{F}$ koja sadrži $\mathcal{K}$ važi $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$.

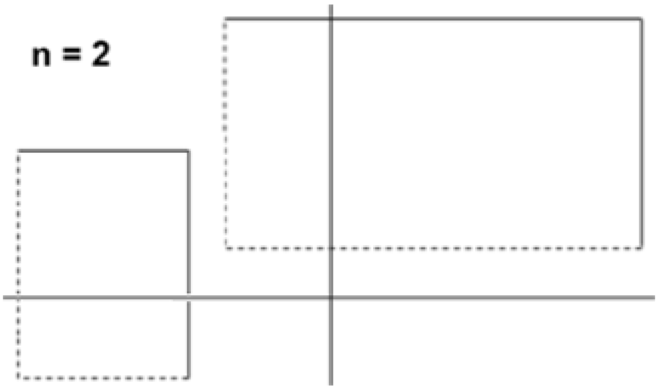
Teorema: Minimalna σ-algebra generisana kolekcijom $\mathcal{K}$ uvek postoji.
$^{\triangle:}$ Važi $\mathcal{K} \subset P(\Omega)$, gde je $P(\Omega)$ σ-algebra. To znači da postoji bar jedna σ-algebra koja sadrži datu kolekciju. Obeležimo sa $\mathcal{F}_i$ sve σ-algebre koje sadrže kolekciju $\mathcal{K}$. Njihov presek $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ će prema prethodnoj lemi takođe biti σ-algebra i sigurno će sadržati kolekciju $\mathcal{K}$ jer je sadrži svaki od $\mathcal{F}_i$. Važi i da je ovo najmanja σ-algebra jer je presek svih drugih, pa ovo jeste minimalna σ-algebra generisana kolekcijom $\mathcal{K}$, tj. $\sigma(\mathcal{K}) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ ■

3. Borelova σ-algebra

Posmatrajmo prostor elementarnih ishoda $\Omega = R$. Na tom skupu definišemo kolekciju $\mathcal{K} = \{(a,\ b]|\ a,\ b \in R,\ a < b\}$ koja se sastoji od generatornih skupova koji sigurno ulaze u σ-algebru. Minimalna σ-algebra ovakve kolekcije naziva se **Borelova σ-algebra** u oznaci $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{K})$. Skupovi koji pripadaju Borelovoj σ-algebri nazivaju se **Borelovi skupovi**. Postoje podskupovi od R koji ne pripadaju $\mathcal{B}$. Sledeći skupovi su Borelovi:

- $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n},\ a]$, odnosno jednočlani skupovi pripadaju Borelovoj σ-algebri kao prebrojiv presek generatornih skupova.
- $[a,\ b] = \{a\} \cup (a,\ b]$, pa zatvoren interval pripada kao konačna unija Borelovih skupova.
- $(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty}(a,\ b - \frac{1}{n}]$, gde je n_0 prvi takav da $b - \frac{1}{n_0} > a$. Otvoren interval je Borelov skup kao prebrojiva unija Borelovih skupova.
- $[a,\ b) = \{a\} \cup (a,\ b)$
- $(-\infty,\ b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(b-n,\ b)$. Isto važi i za $(-\infty,\ b]$.
- $(a,\ +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a,\ a+n)$. Isto važi i za $[a,\ +\infty)$.
- R jer $\Omega = R$, a $\Omega \in \mathcal{B}$.
- $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{q_n\}$
- I jer $\overline{I} = Q$, a $Q \in \mathcal{B}$.

Uopštenje na $\Omega = R^n$: $\mathcal{K} = \{(a_1,\ b_1]\times\ldots\times(a_n,\ b_n]|\ \forall i \in \{1,\ \ldots,\ n\}\ a_i,\ b_i \in R,\ a_i < b_i\}$. Važi $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}^n$. **Primer**:



4. Definicija verovatnoće. Osnovna svojstva verovatnoće

Definicija: Neka je Ω prostor elementarnih ishoda nekog slučajnog eksperimenta i neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra od Ω. Uređeni par $(\Omega,\ \mathcal{F})$ naziva se **merljiv prostor**. Funkcija P, P: $\mathcal{F} \to R$, definisana na merljivom prostoru $(\Omega,\ \mathcal{F})$ je **verovatnoća** ako važi:

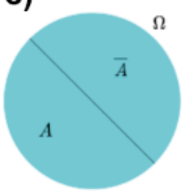
1. **nenegativnost**: $(\forall A \in \mathcal{F})P(A)\ \geq 0$
2. **normiranost**: $P(\Omega) = 1$

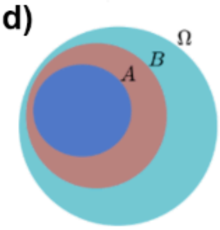
3. **σ-aditivnost**: $P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

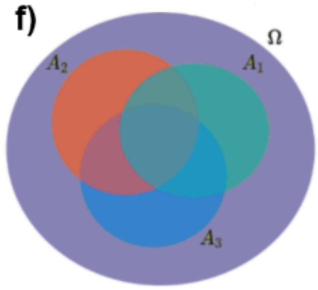
Na istom prostoru moguće je definisati više verovatnoća.

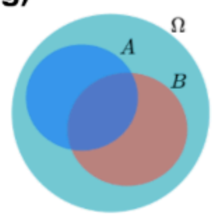
Teorema: Za verovatnoću P, P: $\mathcal{F} \to R$, važi:
a) **verovatnoća nemogućeg događaja**: $P(\emptyset) = 0$
$\triangle$: $P(\emptyset)$ = $P(\emptyset + \ldots + \emptyset)$ =^{3} $P(\emptyset) + \ldots + P(\emptyset)$. Nakon skraćivanja dobijamo 0 = $P(\emptyset) + \ldots + P(\emptyset)$ =^{3} $P(\emptyset + \ldots + \emptyset)$ = $P(\emptyset)$ ■
b) **konačna aditivnost**: $P(\sum_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

$\triangle$: $P(\sum_{k=1}^{n} A_k)$ = $P(A_1 + \ldots + A_n + \emptyset + \ldots + \emptyset)$ =^{3} $P(A_1) + \ldots + P(A_n) + P(\emptyset) + \ldots + P(\emptyset)$ =^{a} $\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$ ■
c) **verovatnoća suprotnog događaja**: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
$\triangle$: 1 = $P(\Omega)$ = $P(A + \overline{A})$ =^{b} $P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ■
d) **monotonost**: $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
$\triangle$: $P(B)$ = $P(A + \overline{A}B)$ =^{b} $P(A) + P(\overline{A}B) \geq P(A)$ jer $P(\overline{A}B) \geq^1 0$ ■
e) **"nula" pravilo**: $(\forall A \in \mathcal{F})\ 0 \leq P(A) \leq 1$
$\triangle$: $(\forall A \in \mathcal{F})\ \emptyset \subset A \subset \Omega \Rightarrow^d P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow^{2,a} 0 \leq P(A) \leq 1$ ■
f) **lema o pokrivanju**: $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
$\triangle$: $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ = $P(A_1 + \overline{A_1}A_2 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 + \ \ldots)$ =^{3} $P(A_1) + P(\overline{A_1}A_2) + P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) + \ \ldots$ $\leq^d$ $P(A_1)$ + $P(A_2)$ + $P(A_3) + \ldots$ = $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ jer $\overline{A_1}A_2 \subset A_2$, $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3 \subset A_3$, ... ■
g) **verovatnoća unije dva događaja**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
$\triangle$: $P(B)$ = $P(AB + \overline{A}B)$ =^{b} $P(AB) + P(\overline{A}B)$ (*). Važi $P(A \cup B)$ = $P(A + \overline{A}B)$ =^{b} $P(A) + P(\overline{A}B)$ =* $P(A) + P(B) - P(AB)$ ■

c)


d)


f)


g)


5. Formula uključenja i isključenja za verovatnoću. Svojstva neprekidnosti verovatnoće

Teorema: Za verovatnoću P, P: $\mathcal{F} \to R$, važi:
h) **formula uključenja i isključenja za verovatnoću**: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ = $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ - $\sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j)$ + $\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ - ... $(-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ \ldots \ \cap A_n)$
$\triangle$: Dokazujemo putem matematičke indukcije. Baza $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2)$ = $P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$ što važi na osnovu g). Pretpostavimo da formula važi za n (ih) i dokažimo da važi i za $n + 1$: $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i)$ = $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1})$ =^{g} $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ + $P(A_{n+1})$ -

$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i(A_{n+1})) =^{distr} P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$ + $P(A_{n+1})$ - $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_iA_{n+1}) =^{ih} \underline{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$ - $\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)$ + $\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)$ - ... $(-1)^{n-1}P(A_1 \dots A_n)$ + $\underline{P(A_{n+1})}$ - ($\sum_{i=1}^{n} P(A_iA_{n+1})$ - $\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_{n+1}A_jA_{n+1})$ + $\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_{n+1}A_jA_{n+1}A_kA_{n+1})$ - ... $(-1)^{n-1}P(A_1A_{n+1}\dots A_nA_{n+1}))$ = $\sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$ - $\underline{\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_j)}$ + $\underline{\underline{\sum_{1\le i<j<k\le n} P(A_iA_jA_k)}}$ - ... $(-1)^{n-1}P(A_1 \dots A_n)$ - $\underline{\sum_{i=1}^{n} P(A_iA_{n+1})}$ + $\underline{\underline{\sum_{1\le i<j\le n} P(A_iA_jA_{n+1})}}$ - ... $(-1)^{n}P(A_1 \dots A_nA_{n+1})$ = $\sum_{i=1}^{n+1} P(A_i)$ - $\sum_{1\le i<j\le n+1} P(A_i \cap A_j)$ + $\sum_{1\le i<j<k\le n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ - ... $(-1)^{n}P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1})$ ■

i) **neprekidnost odozgo**: $A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ = $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$

$^\triangle$: Pravimo redom disjunktne skupove: $B_1 = A_1$, $B_2 = \overline{A_1}A_2$, $B_3 = \overline{A_2}A_3$, ... Važi $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ = $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) =^3 \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n)$ = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) =^b \lim_{n\to\infty} P(\sum_{i=1}^{n} B_i)$ = $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ ■

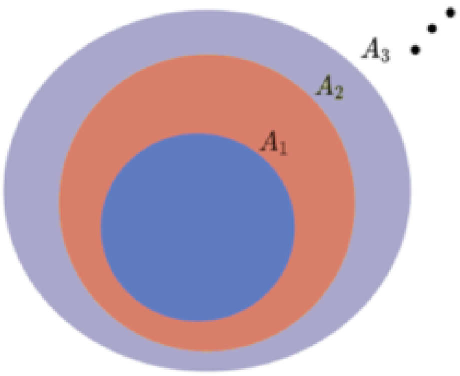
j) **neprekidnost odozdo**: $A_1 \supset A_2 \supset \dots \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ = $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$

$^\triangle$: Iz $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ znamo da važi $\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \subset \dots$ pa važi: $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) =^c 1 - P(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n})$ $=^{de-Morgan} 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}) =^i 1 - \lim_{n\to\infty} P(\overline{A_n}) =^c 1 - lim_{n\to\infty}(1 - P(A_n))$ = $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ ■

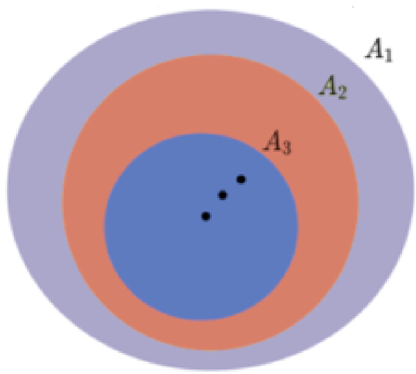
k) **neprekidnost u nuli**: $A_1 \supset A_2 \supset \dots \wedge \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$

$^\triangle$: $\lim_{n\to\infty} P(A_n) =^j P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ = $P(\emptyset) =^a$ 0 ■

i)



j)



6. Prostor verovatnoće. Diskretan prostor verovatnoće. Geometrijska verovatnoća

Definicija(**Kolmogorovljeva aksioma**): Uređena trojka $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ gde je Ω prostor elementarnih ishoda nekog slučajnog eksperimenta, $\mathcal{F}$ σ-algebra podskupova od Ω, a P: $\mathcal{F} \to R$ verovatnoća, je **prostor verovatnoće** (**verovatnosni model**) tog slučajnog eksperimenta. Elementi od $\mathcal{F}$ su (**slučajni**) **događaji**. Prostor verovatnoće zadat je unapred na osnovu iskustva, intuicije i matematičke statistike, a na osnovu njega se računaju verovatnoće složenijih događaja.

Definicija: Neka je $\Omega = \{w_1,\ w_2,\ \dots\}$ najviše prebrojiv prostor elementarnih ishoda i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka su p_i, $i \in \{1,\ 2,\ \dots\}$, nenegativni realni brojevi pridruženi odgovarajućim elementarnim ishodima tako da je $\sum_i p_i = 1$. Funkcija P: $\mathcal{F} \to R$ definiše se na sledeći način: ako je $A = \{w_{j1},\ w_{j2},\ \dots\}$, onda je $P(A) = p_{j1} + p_{j2} + \dots$ Uređena trojka $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ P)$ je **diskretan prostor verovatnoće**.

U slučaju diskretnog prostora verovatnoće sa konačno mnogo ishoda ti ishodi mogu biti **jednako verovatni** (npr. bacanje kockice) ili **nejednako verovatni** (npr. bacanje kockice obeležene sa 2 2 2 2 4 4). U slučaju jednako verovatnih ishoda verovatnoća nekog događaja A se može izračunati po formuli $P(A) = \frac{broj\ povoljnih\ ishoda}{broj\ ukupnih\ ishoda}$ i to se zove **klasična definicija verovatnoće**.

Primer(**Paradoks De Merea**): Kockica se baca 3 puta. Zašto verovatnoće da se dobiju zbir 11 i 12 nisu iste? De Mere je pogrešno primenio klasičnu definiciju verovatnoće računajući kao da su ishodi jednako verovatni, što nije slučaj. Na primer, dobijena kombinacija {1, 4, 6} zapravo predstavlja sledeće ishode: {1, 4, 6}, {1, 6, 4}, {4, 1, 6}, {4, 6, 1}, {6, 1, 4}, {6, 4, 1}. Važi Ω = {111, 112, ..., 666} pa je ukupan broj ishoda 6^3 = 216 pa je verovatnoća pomenutog ishoda jednaka $\frac{6}{216}$. Slično važi i za ostale kombinacije:

$$\begin{aligned} 11 &= 6+4+1 \to 6 & 12 &= 6+5+1 \to 6 \\ &= 6+3+2 \to 6 & &= 6+4+2 \to 6 \\ &= 5+5+1 \to 3 & &= 6+3+3 \to 3 \\ &= 5+4+2 \to 6 & &= 5+5+2 \to 3 \\ &= 5+3+3 \to 3 & &= 5+4+3 \to 6 \\ &= 4+4+3 \to 3 & &= 4+4+4 \to 1 \end{aligned}$$

Dobija se $P(A_{11}) = \frac{27}{216}$ i $P(A_{12}) = \frac{25}{216}$ pa je verovatnije da se dobije zbir 11.

Primer: Bira se broj iz segmenta [0, 1]. Koja je verovatnoća da se dobije broj iz segmenta $[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}]$? Verovatnoća ovog događaja je $\frac{1}{4}$.

Definicija: Ako je Ω deo prave (ravni, prostora) koji ima meru m - dužinu (površinu, zapreminu), onda se verovatnoća događaja A koji ima meru m računa kao $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$ i to se zove **geometrijska verovatnoća**. Ovde prostor elementarnih ishoda nije konačan pa se ne koristi klasična definicija verovatnoće.

7. Uslovna verovatnoća

Definicija: **Uslovna verovatnoća** događaja B pri uslovu A, tj. verovatnoća da se realizovao događaj B ako se realizovao događaj A, u oznaci $P(B|A),\ P(A) > 0$, definiše se kao $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Teorema: Neka je $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ prostor verovatnoće nekog slučajnog eksperimenta. Za svaki događaj B, takav da je $P(B) > 0$, funkcija P_B: $\mathcal{F} \to R$ definisana sa $(\forall A \in \mathcal{F}) P_B(A) = P(A|B)$ je verovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$.
△: Dokazaćemo da za P_B važe sve tri osobine verovatnoće:

1. $(\forall A \in \mathcal{F}) P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$ jer $P(AB) \geq 0$ na osnovu osobine verovatnoće i $P(B) > 0$ na osnovu uslova iz definicije.
2. $P_B(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
3. $P_B(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{P((\sum_{n=1}^{\infty} A_n)B)}{P(B)} =^{distr} \frac{P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n B)}{P(B)} =^{3} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n)$ ■

Osobine:

a) $P(A|A) = 1$

△: $P(A|A) = \frac{P(AA)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ ■

b) $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$

△: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} =^{A \subset B} \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ ■

c) $P(\overline{B}|A) = 1 - P(B|A)$

△: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(AB)+P(\overline{B}A)}$. Odavde važi $1 - P(B|A) = 1 - \frac{P(AB)}{P(AB)+P(\overline{B}A)} = \frac{P(AB)+P(\overline{B}A)-P(AB)}{P(AB)+P(\overline{B}A)} = \frac{P(\overline{B}A)}{P(A)} = P(\overline{B}|A)$ ■

d) $P(B_1 + B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$

△: $P(B_1 + B_2|A) = \frac{P((B_1+B_2)A)}{P(A)} = \frac{P(B_1A+B_2A)}{P(A)} =^{kon.\ adit.} \frac{P(B_1A)+P(B_2A)}{P(A)} = \frac{P(B_1A)}{P(A)} + \frac{P(B_2A)}{P(A)} = P(B_1|A) + P(B_2|A)$ ■

e) **formula množenja**: $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$, $P(B) > 0$, $P(A) > 0$

△: Direktno iz definicije ■

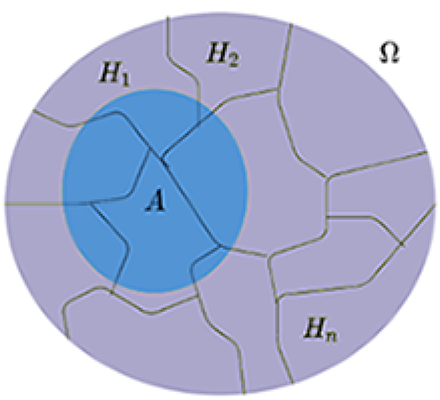
f) **uopštena formula množenja**:

$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$, $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$

△: Dokazujemo putem matematičke indukcije. Baza ($n = 2$) važi na osnovu e). Pretpostavimo da formula važi za n (ih) i dokažimo da važi i za $n+1$: $P(A_1 \dots A_{n+1}) = P((A_1 \dots A_n)A_{n+1}) =^{e} P(A_1 \dots A_n)P(A_{n+1}|A_1 \dots A_n) =^{ih} P(A_1)P(A_2|A_1)\dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})P(A_{n+1}|A_1 \dots . A_n)$ ■

8. Formula potpune verovatnoće. Bajesova formula

Teorema(**Formula potpune verovatnoće**): Neka su H_1, ..., H_n disjunktni događaji takvi da je $(\forall\, i \in \{1,\ \dots,\ n\})\ P(H_i) > 0$ i $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Tada za svaki događaj A važi da je $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$.



△: $P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \ ... \ + H_n)) =^{distr} P(AH_1 + \ ... \ + AH_n) =^{kon.\ aditivnost}$ $P(AH_1) + \ ... \ + P(AH_n) =^{for.\ mn.} P(H_1)P(A|H_1) + ... + P(H_n)P(A|H_n) =$ $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$ ■

Formula se koristi kada računamo verovatnoću događaja pre koga se desilo nešto, pri čemu ne znamo šta se desilo ali znamo šta sve može da se desi. Događaj A možemo posmatrati kao posledicu, a događaje H_i kao uzroke (hipoteze). Formula važi i za prebrojivo mnogo H_i.

Teorema(**Bajesova formula**): Pri uslovima prethodne teoreme važi da je $P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$.

△: $P(H_k|A) = \frac{P(H_kA)}{P(A)} =^{for.\ mn.} \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} =^{fpv} \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}$ ■

Formula se koristi kada računamo verovatnoću da je neki od H_k uzrok događaja A, odnosno za nalaženje verovatnoća pojedinačnih hipoteza u odnosu na posledicu.

9. Nezavisnost događaja

Ako važi $P(A) = P(A|B)$ to znači da realizacija događaja B ne utiče na realizaciju događaja A. Iz ove jednakosti sledi $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, odakle sledi $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B|A)$ što znači da ni A ne utiče na događaj B.

Definicija: Događaji A i B iz istog prostora verovatnoće su **nezavisni** ako je $P(AB) = P(A)P(B)$.

Lema: Ako su A i B nezavisni događaji onda su i $\overline{A}$ i B, A i $\overline{B}$ i $\overline{A}$ i $\overline{B}$ nezavisni.

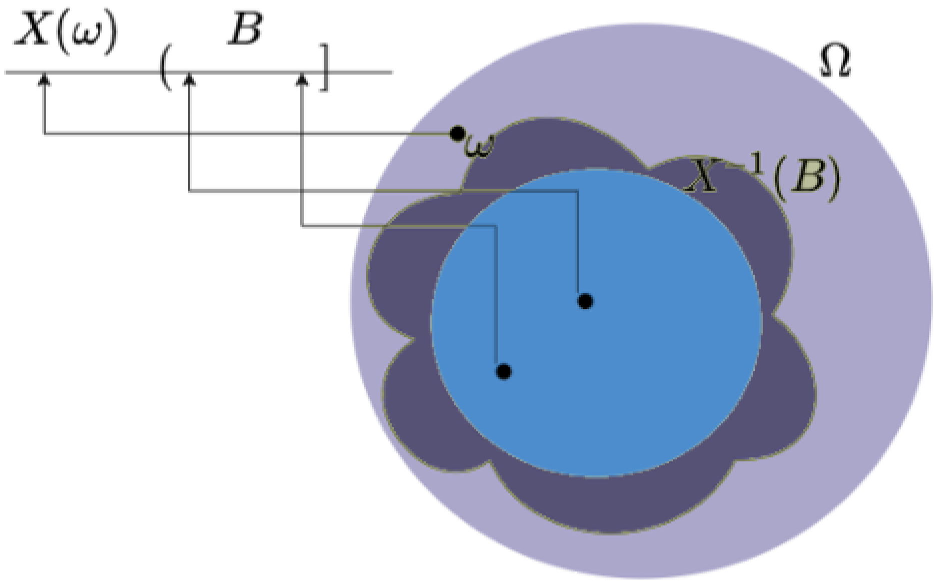
△:

1. $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B) =^{nez} P(A)P(B) + P(\overline{A}B)$ odakle sledi da je $P(\overline{A}B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$ pa su $\overline{A}$ i B nezavisni.
2. A i B su nezavisni $\Rightarrow$ B i A su nezavisni $\Rightarrow^1$ $\overline{B}$ i A su nezavisni $\Rightarrow$ A i $\overline{B}$ su nezavisni.
3. A i B su nezavisni $\Rightarrow^1$ $\overline{A}$ i B su nezavisni $\Rightarrow$ B i $\overline{A}$ su nezavisni $\Rightarrow^1$ $\overline{B}$ i $\overline{A}$ su nezavisni $\Rightarrow$ $\overline{A}$ i $\overline{B}$ su nezavisni. ■

Definicija(**Potpuna nezavisnost**): Događaji iz neprazne kolekcije $\mathcal{K}$ su potpuno nezavisni ako $(\forall n \in N)(n \geq 2)$ i različite događaje A_{k1}, ..., A_{kn} važi $P(A_{k1}\dots A_{kn}) = P(A_{k1})\dots P(A_{kn})$. Za $|\mathcal{K}| = n$ imamo $\binom{n}{2}$ + ... + $\binom{n}{n}$ = 2^n - $\binom{n}{1}$ - $\binom{n}{0}$ = $2^n - n - 1$ provera. Ako važi nezavisnost za neko n ne mora da važi za $n + 1$ ili $n - 1$.

10. Slučajna veličina

Definicija: Neka je $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ prostor verovatnoće i $(R,\ \mathcal{B})$ merljiv prostor. Funkcija X: $\Omega \to R$ je **slučajna veličina** ako $(\forall\ B \in \mathcal{B})\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F},\ X^{-1}(B) = \{w|X(w) \in B\}$. (*)



Teorema: Slučajna veličina X definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ definiše prostor verovatnoće $(R,\ \mathcal{B},\ P_x)$ gde je $P_x(B) = P(X^{-1}(B))$.

△: Dokazujemo da je P_x verovatnoća na merljivom skupu $(R,\ \mathcal{B})$:

1. $(\forall\ B \in \mathcal{B})\ P_x(B) = P(X^{-1}(B)) > 0$ jer je P verovatnoća
2. $P_x(R) = P(X^{-1}(R)) = P(\Omega) = 1$
3. $P_x(\sum_{n=1}^{\infty} B_n) = P(X^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} B_n))$ = $P(\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n))$ =$^{\sigma\ adit.}$ $\sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_n))$ = $\sum_{n=1}^{\infty} P_x(B_n)$ ■

Definicija: Funkcija P_X: $\mathcal{B} \to R$ definisana kao (*) zove se **raspodela verovatnoće** slučajne veličine X. Ako znamo raspodelu verovatnoće slučajne veličine znamo sve o toj slučajnoj veličini.

Definicija: Funkcija F_X: $R \to R$ definisana sa $(\forall\ x \in R)\ F_X(x) = P_X((-\infty,\ x]) = P\{X \leq x\}$ je **funkcija raspodele verovatnoće** slučajne veličine X. Ako znamo funkciju raspodele verovatnoće slučajne veličine znamo sve o toj slučajnoj veličini i obrnuto.

Teorema: Za funkciju raspodele verovatnoće F_X slučajne veličine X važi da je:

1. **neopadajuća**: $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) < F_X(x_2)$
2. **levo teži nuli, a desno jedinici**: $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
3. **neprekidna zdesna**: $(\forall\ x_0 \in R)\ \lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

△:

1. $x_1 < x_2 \Rightarrow (-\infty,\ x_1] \subset (-\infty,\ x_2] \Rightarrow^{mon.\ P_X} P_X((-\infty,\ x_1]) \leq P_X((-\infty,\ x_2]) \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \Rightarrow F_X$ je neopadajuća.

2. Prema Hajneu važi $\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall\, x_n)\ \lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Treba da dokažemo $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0$, odnosno po Hajneu treba dokazati $(\forall\, x_n)\ \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = 0$, međutim pošto je F_X monotono neopadajuća dovoljno je ovo dokazati za svaki opadajući niz: $(\forall\, x_n)\ x_n \searrow -\infty \Rightarrow \dots\ < x_2 < x_1 \Rightarrow (-\infty,\ x_1] \supset (-\infty,\ x_2] \supset\ \dots$ pa važi $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$ = $\lim_{n\to\infty} P_X((-\infty,\ x_n])$ =$^{nepr.\ odozdo}$ $P_X(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,\ x_n])$ = $P_X(\emptyset)$ = 0 $\Rightarrow^{Hajne}$ $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0$. Sada dokazujemo $\lim_{x\to +\infty} F_X(x) = 1$. Zbog monotonosti je dovoljno pokazati da ovo važi za svaki rastući niz koji teži $+\infty$: $(\forall\, x_n)\ x_n \nearrow +\infty \Rightarrow x_1 < x_2 <\ \dots \Rightarrow (-\infty,\ x_1] \subset (-\infty,\ x_2] \subset\ \dots$ pa važi $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$ = $\lim_{n\to\infty} P_X((-\infty,\ x_n])$ =$^{nepr.\ odozgo}$ $P_X(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,\ x_n])$ = $P_X(R)$ = 1 $\Rightarrow^{Hajne}$ $\lim_{x\to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. Zbog monotonosti znamo da važi $(\forall\, x_n \searrow x_0)\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ pa na osnovu Hajnea treba dokazati $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n) = F_X(x_0)$: $x_0 \le\ \dots\ < x_2 < x_1 \Rightarrow (-\infty,\ x_1] \supset (-\infty,\ x_2] \supset\ \dots$ pa važi $\lim_{n\to\infty} F_X(x_n)$ = $\lim_{n\to\infty} P_X((-\infty,\ x_n])$ =$^{nepr.\ odozdo}$ $P_X(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,\ x_n])$ = $P_X((-\infty,\ x_0])$ = $F_X(x_0)$ $\Rightarrow^{Hajne}$ $\lim_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$. ■

Važi i obrnuto, ako neka funkcija ima ove tri osobine, onda je ona funkcija raspodele neke slučajne veličine.

11. Osnovni tipovi slučajnih veličina. Primeri

Definicija: Slučajna veličina X je **diskretna** ako postoji najviše prebrojiv skup $S = \{a_1,\ a_2,\ \dots\}$ tako da $P\{x \notin S\} = 0$. Diskretna slučajna veličina "uzima" konačno ili prebrojivo mnogo različitih vrednosti.

Zakon raspodele slučajne veličine:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

ili $P\{X = a_i\} = p_i,\ i = \overline{1,\ n}$. Postoji samo za diskretne slučajne veličine i važi $(\forall\, i \in \{1,\ \dots,\ n\})\ p_i > 0$ i $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ (za konačan broj vrednosti).

Funkcija raspodele ima stepenast oblik:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0,\ x < a_1 \\ p_1,\ a_1 \le x < a_2 \\ p_1 + p_2,\ a_2 \le x < a_3 \\ \dots \\ 1,\ x \ge a_n \end{cases}$$

Primeri:

- **Konstantna slučajna veličina** $X:\begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. uzima vrednost c sa verovatnoćom 1.
  $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$
- **Indikator događaja** A: $I_A(w) = \begin{cases} 0, & w \notin A \\ 1, & w \in A \end{cases}$, tj. uzima vrednost 1 ako se A realizovao, a 0 ako nije. Zakon raspodele: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-P(A) & P(A) \end{pmatrix}$. Po uzoru na indikator događaja postoje **indikatorske (Bernulijeve) slučajne veličine** ili prosto **indikator**: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$
- Slučajna veličina X meri broj uspeha u n nezavisnih pokušaja, a verovatnoća ostvarivanja svakog je p. Do zakona raspodele dolazimo na sledeći način: skup elementarnih ishoda je Ω = {0...0, 10...0, ..., 1...1}. Primećujemo da ishodi nisu jednako verovatni pa ne možemo koristiti klasičnu definiciju verovatnoće. Skup povoljnih ishoda ako posmatramo k uspeha je {1...10...0, 10011...01, ..., 0...01...1}, gde u svakom članu imamo k jedinica (uspeha) i $n-k$ nula (neuspeha) pa je verovatnoća svakog ishoda $p^k(1-p)^{n-k}$. Ukupno ih ima $\binom{n}{k}$ pa dobijamo $P\{X=k\}$ = $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, $n \in N$, $p \in [0,1]$. Ova slučajna veličina ima **binomnu raspodelu**: X ~ $\mathcal{B}(n,\ p)$.
- Slučajna veličina X meri broj pokušaja do prvog uspeha, gde je verovatnoća uspeha svakog nezavisnog pokušaja p. Ako tražimo verovatnoću uspeha u k-tom pokušaju, onda imamo $k-1$ neuspeha nakon čega sledi uspeh pa važi $P\{X=k\}$ = $(1-p)^k p$, $k \in N$. Slučajna veličina ima **geometrijsku raspodelu**: X ~ $\mathcal{G}(p)$.
- Slučajna veličina X meri broj uspeha u nekom vremenskom intervalu, gde je prosečan broj uspeha λ. Ova slučajna veličina ima **Puasonovu raspodelu**: X ~ $\mathcal{P}(\lambda)$ i važi $P\{X=k\}$ = $\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k \in N \cup \{0\}$.

Definicija: Slučajna veličina X je **apsolutno-neprekidna** ako postoji nenegativna funkcija f_X: $R \to R$ takva da je $F_X(x)$ = $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$. Ova funkcija naziva se **gustina raspodele verovatnoće** slučajne veličine X i postoji samo za apsolutno-neprekidne slučajne veličine. Ako znamo gustinu raspodele verovatnoće slučajne veličine, onda znamo sve o toj slučajnoj veličini. Apsolutno-neprekidna slučajna veličina "uzima" neprebrojivo mnogo različitih vrednosti, ali nije svaka slučajna veličina koja "uzima" neprebrojivo mnogo različitih vrednosti apsolutno-neprekidna.

Ako znamo gustinu onda znamo i funkciju raspodele i obrnuto. Iz Njutn-Lajbnicove formule sledi:

1. za svaku tačku neprekidnosti f_X važi $F'_X(x) = f_X(x)$
2. F_X je neprekidna

Osobine gustine:

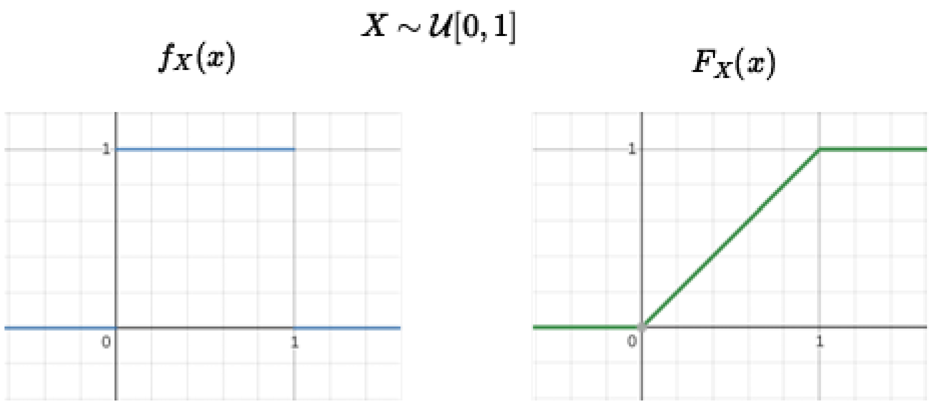
1. $(\forall\ x \in R)\ f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

Ako neka funkcija ima ove osobine ona je funkcija gustine neke slučajne veličine. Takođe važi i $P\{X = a\} = 0$ pa je $P\{a < x \leq b\}$ = $P\{a \leq x \leq b\}$ = $P\{a \leq x < b\}$ = $P\{a < x < b\}$.

Primeri:

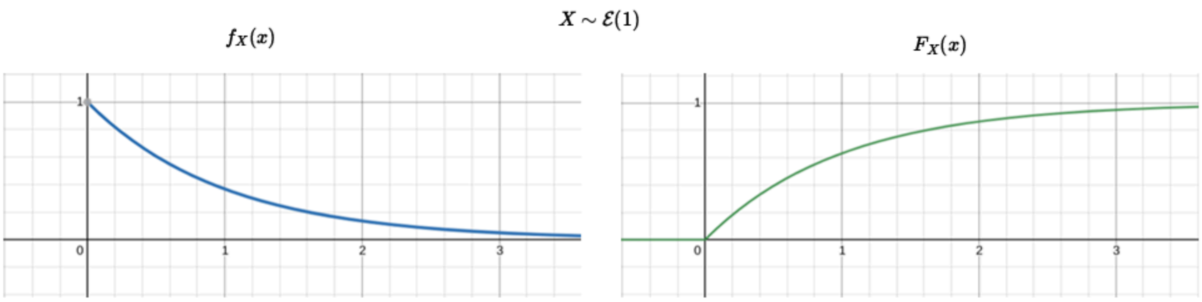
- **Uniformna (ravnomerna) raspodela**: $X \sim \mathcal{U}[a,\ b],\ a < b$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a},\ x \in [a,\ b],\ \ F_X(x) = \begin{cases} 0,\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a},\ a \leq x < b \\ 1,\ x \geq b \end{cases}$$



- **Eksponencijalna raspodela**: $X \sim \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ \ F_X(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0 \end{cases}$$



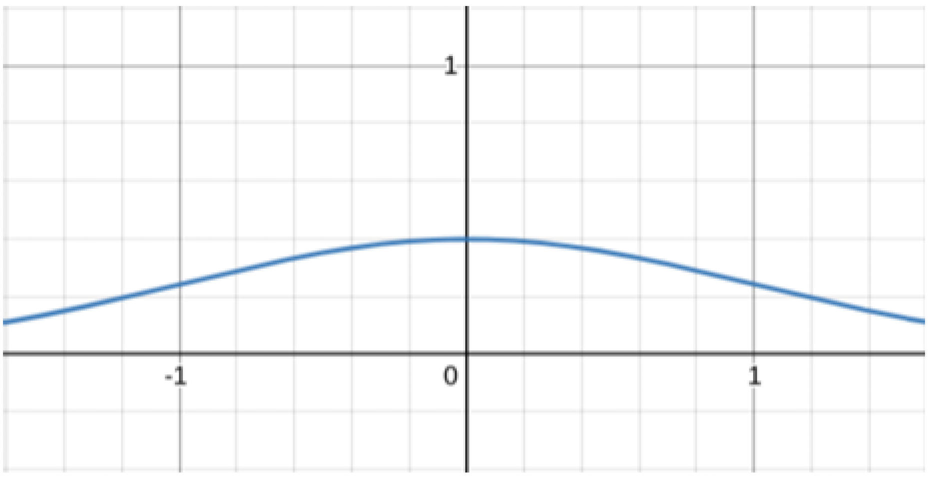
- **Normalna (Gausova) raspodela**: $X \sim \mathcal{N}(m,\ \sigma^2),\ m \in R,\ \sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}},\ x \in R,\ \ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt,\ t \in R$$

Predstavnik je **standardna normalna raspodela**: $X^* \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$

$$f_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$X \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$



Nije moguće rešiti integral i dobiti funkciju raspodele normalne raspodele, već se koriste statističke tablice. Tablice postoje samo za standardnu normalnu raspodelu, a vrednosti za ostale se dobijaju preko nje koristeći sledeću lemu.

Lema: Ako X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\ \sigma^2)$ raspodelu, onda $\frac{X-m}{\sigma}$ ima $\mathcal{N}(0,\ 1)$ raspodelu.
$\triangle$: Neka je $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Za $(\forall x \in R)$ važi $F_Y(x)$ = $P\{Y \leq x\}$ = $P\{\frac{X-m}{\sigma} \leq x\}$ = $P\{X \leq \sigma x + m\}$ = $\int_{-\infty}^{\sigma x+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}} dt$ = $\begin{pmatrix} t = \sigma s + m \\ dt = \sigma ds \end{pmatrix}$ = $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\sigma s+m-m)^2}{\sigma^2}} \cancel{\sigma} ds$ = $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ = $F_{X^*}(x) \Rightarrow \frac{X-m}{\sigma}$ = X^* : $\mathcal{N}(0,\ 1)$ ■

12. Višedimenzionalna slučajna veličina. Borelova funkcija slučajnih veličina

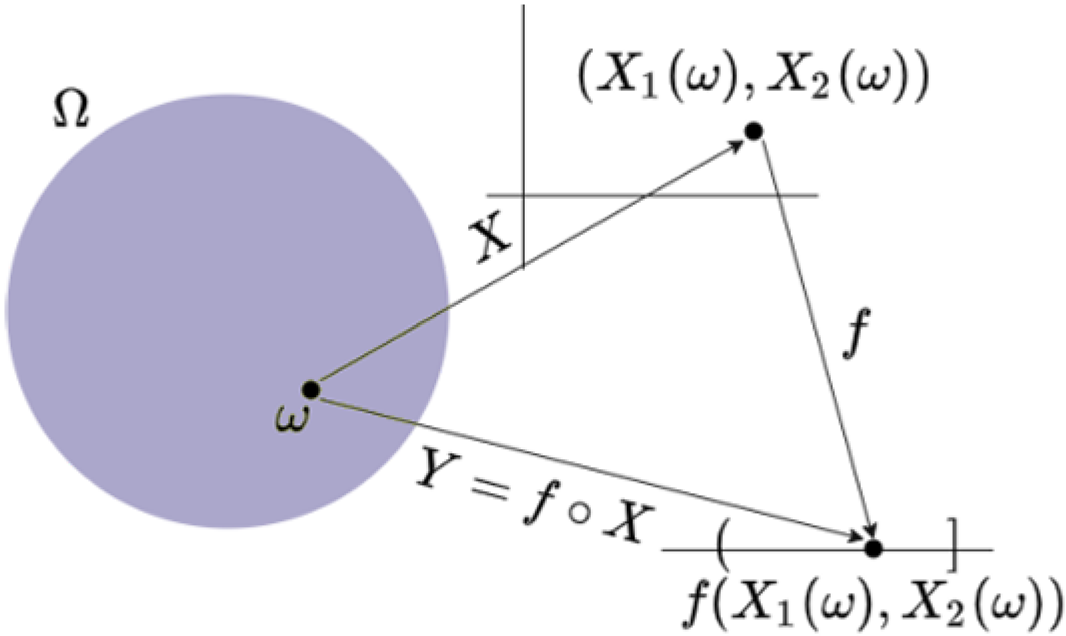
Definicija: Neka je $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ prostor verovatnoće i $(R^n,\ \mathcal{B}^n)$ merljiv prostor. Funkcija $X:\ \Omega \to R^n$ je n-**dimenzionalna slučajna veličina** ako $(\forall\ B \in \mathcal{B}^n)\ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Teorema: Neka je $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ prostor verovatnoće i X_1, ..., X_n: $\Omega \to R$ funkcije. Tada važi da je $(X_1,\ \dots,\ X_n)$ n-dimenzionalna slučajna veličina akko je za svako $i \in \{1,\ \dots,\ n\}$ X_i slučajna veličina.
$\triangle$:
$\Rightarrow$:
Za proizvoljno $i \in \{1,\ \dots,\ n\}$ važi $(\forall\ B \in \mathcal{B})\ X_i^{-1}(B)$ = $\{w | X_i(w) \in B\}$ =
$\{w | X_1(w) \in R,\ \dots,\ X_{i-1}(w) \in R,\ X_i(w) \in B,\ X_{i+1}(w) \in R,\ \dots,\ X_n(w) \in R\}$ =
$\{w | (X_1(w),\ \dots,\ X_i(w),\ \dots,\ X_n(w)) \in R \times\ \dots\ \times R \times B\ \times R \times\ \dots\ \times R\}$ =
$\{w | (X_1,\ \dots,\ X_n)(w) \in R \times\ \dots\ \times R \times B\ \times R \times\ \dots\ \times R\}$ =
$\{w | X(w) \in R \times\ \dots\ \times R \times B\ \times R \times\ \dots\ \times R\}$ = $X^{-1}(R \times\ \dots\ \times R \times B\ \times R \times\ \dots\ \times R)$
$\in \mathcal{F}$ jer je X n-dimenzionalna slučajna veličina, pa sledi da je X_i slučajna veličina.
$\Leftarrow$:
Dokazaćemo da teorema važi za gradivne skupove, tj. za svako I_n = $(a_1,\ b_1]$ $\times$ ... $\times$ $(a_n,\ b_n]$. Borelovi skupovi se mogu dobiti kao konačni ili beskonačni presek ili unija ili kao komplementaran skup i slično, pa će teorema na osnovu toga važiti i za njih. Važi $X^{-1}(I_n)$ =

$\{w|X(w) \in (a_1,\, b_1] \times\, \ldots \times (a_n,\, b_n]\}$ = $\{w|(X_1,\, \ldots,\, X_n)(w) \in (a_1,\, b_1] \times\, \ldots \times (a_n,\, b_n]\}$ = $\{w|X_1(w) \in (a_1,\, b_1],\, \ldots,\, X_n(w) \in (a_n,\, b_n]\}$ = $\{w|X_1(w) \in (a_1,\, b_1]\}$ ∩ ... ∩ $\{w|X_n(w) \in (a_n,\, b_n]\}$ = $X_1^{-1}((a_1,\, b_1])$ ∩ ... ∩ $X_n^{-1}((a_n,\, b_n])$. Svi elementi preseka pripadaju $\mathcal{F}$ jer su X_i slučajne veličine, pa i $X^{-1}(I_n) \in \mathcal{F}$ kao konačan presek. ■

Definicija: Funkcija $f : R^n \to R$ je **Borelova** ako $(\forall B \in \mathcal{B})\ f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$. Na primer, svaka neprekidna funkcija je Borelova.

Teorema: Neka je $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ prostor verovatnoće i X_1, ..., X_n: $\Omega \to R$ slučajne veličine i $f : R^n \to R$ Borelova funkcija. Tada je $f(X_1,\, \ldots,\, X_n)$ slučajna veličina.



△: $(\forall\ B \in \mathcal{B})(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1} \circ f^{-1}(B)$ = $X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$ jer $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$ jer je f Borelova. ■

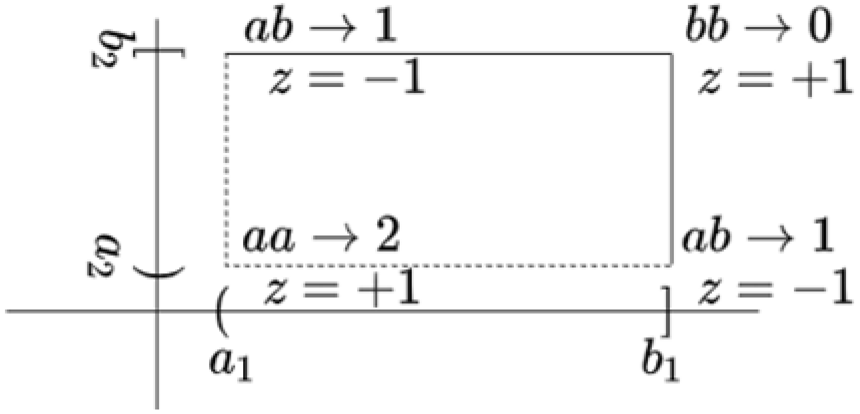
Definicija: Neka je X n-dimenzionalna slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ i neka je $(R^n,\, \mathcal{B}^n)$ merljiv prostor. Funkcija P_X: $\mathcal{B}^n \to R$ definisana sa $(\forall B \in \mathcal{B}^n)\ P_X(B) = P\{X^{-1}(B)\}$ zove se **raspodela verovatnoće n-dimenzionalne slučajne veličine** X.

Definicija: Neka je X n-dimenzionalna slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoće $(\Omega,\, \mathcal{F},\, P)$ i neka je $(R^n,\, \mathcal{B}^n)$ merljiv prostor. Funkcija F_X: $R^n \to R$ definisana sa $(\forall (x_1,\, \ldots,\, x_n) \in R^n)\ F_X((x_1,\, \ldots,\, x_n))$ = $P_X((-\infty,\, x_1] \times\ \ldots\ \times\ (-\infty,\, x_n])$ = $P\{X_1 \le x_1,\, \ldots,\, X_n \le x_n\}$ zove se **funkcija raspodele verovatnoće n-dimenzionalne slučajne veličine** X. Znamo sve o n-dimenzionalnoj slučajnoj veličini ako znamo bar jednu od ove dve funkcije.

Teorema: Za funkciju raspodele F_X definisanu kao iznad važe svojstva:

1. $(\forall\ i \in \{1,\, \ldots,\, n\})\ \lim_{x_i \to -\infty} F_X(x_1,\, \ldots,\, x_n) = 0$
2. $\lim_{x_1 \to +\infty,\, \ldots,\, x_n \to +\infty} F_X(x_1,\, \ldots,\, x_n) = 1$
3. neprekidna je zdesna po svakoj koordinati
4. za svaki n-dimenzionalni interval I_n = $(a_1,\, b_1] \times\ \ldots\ \times (a_n,\, b_n]$ i njegova temena T = $\{x|x = (x_1,\, \ldots,\, x_n),\, \forall\ i \in \{1,\, \ldots,\, n\}\ x_i \in (a_i,\, b_i]\}$ važi da je

$\Delta_{F_X}(I_n) = \sum_{x \in T} Z_{I_n}(x) F_X(x) \geq 0$, gde je $Z_{I_n}(x) = \begin{cases} -1, \; broj \; a_i \; neparan \\ 1, \; broj \; a_i \; paran \end{cases}$. Na primer, za $n = 2$, tj. $I = (a_1, \; b_1] \times (a_2, \; b_2]$ važi
$\Delta_{F_X}(I) = F_X(b_1, \; b_2) - F_X(b_1, \; a_2) - F_X(a_1, \; b_2) + F_X(a_1, \; a_2)$.



Diskretne višedimenzionalne slučajne veličine uzimaju konačno ili prebrojivo mnogo vrednosti. Zakon raspodele se najčešće zapisuje u obliku tablice.

Apsolutno-neprekidne višedimenzionalne slučajne veličine uzimaju neprebrojivo mnogo vrednosti. Za gustinu $f_X : R^n \to R$ važi $(\forall \; (x_1, \; \ldots, \; x_n) \in R^n) \; f_X(x_1, \; \ldots, \; x_n) \geq 0$. Funkcija raspodele je $F_X(x_1, \; \ldots, \; x_n)$ = $\int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \; \ldots, \; t_n) dt_1 \ldots dt_n$. Važi:

- $(\forall B \in B^n) \; P\{X \in B\} = \int \ldots \int_B f_X(x_1, \; \ldots, \; x_n) dx_1 \ldots dx_n$
- $\int \ldots \int_{R^n} f_X(x_1, \; \ldots, \; x_n) dx_1 \ldots dx_n = 1$
- za svaku tačku neprekidnosti f_X važi $f_X(x_1, \; \ldots, \; x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \; \ldots, \; x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$

13. Marginalna raspodela

Definicija: **Marginalna raspodela** je raspodela bilo kog podvektora n-dimenzionalne slučajne veličine. Ako znamo raspodelu n-dimenzionalne slučajne veličine lako možemo naći bilo koju njenu marginalnu raspodelu, dok obrnuto ne važi.

Diskretan slučaj (n = 2) - znamo $P\{X = x_i, \; Y = y_j\}$ za $\forall \; i, \; j$. Važi:

- $P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, \; Y = y_j\}$
- $P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, \; Y = y_j\}$

Apsolutno-neprekidan slučaj (n = 2) - znamo $f_{X,Y}(x, \; y)$ za $\forall \; x, \; y \in R$. Važi:

- $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, \; Y \in R\} = \int_{-\infty}^{x} (\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \; y) dy) dx$ pa kad uradimo parcijalni izvod po X dobijamo $f_X(x)$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \; y) dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \; y) dx$

14. Uslovna raspodela

Uslovna verovatnoća: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B) > 0$, pa u opštem slučaju ako znamo $(X,\ Y)$ onda važi da je **uslovna raspodela** $F_{X|Y\in B}(x)$ = $\frac{P\{X\le x,\ Y\in B\}}{P\{Y\in B\}}$, $P\{Y \in B\} > 0$.

Diskretan slučaj - važi:

- $P\{X = x_i|Y = y_j\} = \frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}},\ P\{Y = y_j\} > 0$
- $P\{Y = y_j|X = x_i\} = \frac{P\{X=x_i,\ Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}},\ P\{X = x_i\} > 0$
- formula množenja: $P\{X = x_i,\ Y = y_j\} = P\{X = x_i|Y = y_j\}P\{Y = y_j\}$ = $P\{Y = y_j|X = x_i\}P\{X = x_i\}$

Apsolutno-neprekidan slučaj - za potrebe izvođenja podsetimo se posledice prve teoreme o srednjoj vrednosti: $f \in C(a,\ b) \to \exists\, c \in (a,\ b)\ \int_a^b f(x)dx$ = $(b-a)f(c)$.

- Ako je $f_X(x) > 0$ i ako su $f_X(x)$ i $f_{X,\,Y}(x,\ y)$ neprekidne u okolini x onda važi $F_{Y|X=x}(y)$ = $\lim_{h\to 0} F_{Y|x-h\le X\le x+h}(y)$ = $\lim_{h\to 0} P\{Y \le y|x-h \le X \le x+h\}$ = $\lim_{h\to 0} \frac{P\{x-h\le X\le x+h,\ Y\le y\}}{P\{x-h\le X\le x+h\}}$ = $\lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{y} dv \int_{x-h}^{x+h} f_{X,\,Y}(u,\ v)du}{\int_{x-h}^{x+h} f_X(u)du}$ = $\lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{y}(x+h-(x-h))f_{X,\,Y}(c_1,\ v)dv}{(x+h-(x-h))f_X(c_2)}$ = $\int_{-\infty}^{y} \frac{f_{X,\,Y}(x,\ v)}{f_X(x)}dv$, pri čemu je $x-h \le c_1,\ c_2 \le x+h$. Parcijalnim izvodom po Y dobijamo $f_{Y|X=x}(y)$ = $\frac{f_{X,\,Y}(x,\ y)}{f_X(x)}$
- $f_{X|Y=y}(x)$ = $\frac{f_{X,\,Y}(x,\ y)}{f_Y(y)}$

Lema: Uslovna gustina raspodele definisana kao iznad je gustina raspodele.
△:

1. $(\forall\, y \in R)\ f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,\,Y}(x,\ y)}{f_X(x)} > 0$ jer $f_{X,\,Y}(x,\ y) \ge 0$ (gustina) i $f_X(x) > 0$ (po definiciji).
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X=x}(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{X,\,Y}(x,\ y)}{f_X(x)}dy$ = $\frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,\,Y}(x,\ y)dy$ = $\frac{1}{f_X(x)} \cdot f_X(x)$ = 1 ∎

15. Nezavisnost slučajnih veličina

Definicija: Slučajne veličine $X_1,\ \ldots,\ X_n$ definisane na istom prostoru verovatnoće $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ su **nezavisne** ako za proizvoljne $B_1,\ \ldots,\ B_n \in \Omega$ važi $P\{x_1 \in B_1,\ \ldots,\ x_n \in B_n\}$ = $P\{x_1 \in B_1\} \cdot\ \ldots\ \cdot P\{x_n \in B_n\}$

Teorema: Neka su $F_{X_1},\ \ldots,\ F_{X_n}$ funkcije raspodele slučajnih veličina $X_1,\ \ldots,\ X_n$ definisaniih na istom prostoru verovatnoće $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ i $F_{X_1,\,\ldots,\,X_n}$ funkcija raspodele n-dimenzionalne slučajne veličine $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$. Slučajne veličine $X_1,\ \ldots,\ X_n$ su nezavisne akko $(\forall\ (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in R^n)\ F_{X_1,\,\ldots,\,X_n}(x_1,\ \ldots,\ x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot\ \ldots\ \cdot F_{X_n}(x_n)$

Teorema: Diskretne slučajne veličine $X_1, \dots, X_n$ definisane na istom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su nezavisne akko
$(\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n)\ P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_n = x_n\}$

Teorema: Neka su $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ gustine raspodele slučajnih veličina $X_1, \dots, X_n$ definisanih na istom prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $f_{X_1, \dots, X_n}$ gustina raspodele n-dimenzionalne slučajne veličine $(X_1, \dots, X_n)$. Apsolutno-neprekidne slučajne veličine $X_1, \dots, X_n$ su nezavisne akko skoro svuda važi
$(\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n)\ f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$

Teorema: Neka su $f, g : R \to R$ Borelove funkcije i X i Y nezavisne slučajne veličine. Tada su i $f(X)$ i $g(Y)$ nezavisne slučajne veličine.
$\triangle$:
$(\forall B_1, B_2 \in B)\ P\{f(X) \in B_1, g(Y) \in B_2\}$ = $P\{X \in f^{-1}(B_1), Y \in g^{-1}(B_2)\}$. Funkcije f i g su Borelove pa $f^{-1}(B_1), g^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}$ pa na osnovu nezavisnosti važi da je prethodna verovatnoća jednaka $P\{X \in f^{-1}(B_1)\}P\{Y \in g^{-1}(B_2)\}$ = $P\{f(X) \in B_1\}P\{g(Y) \in B_2\}$ pa su $f(X)$ i $g(Y)$ nezavisne slučajne veličine. ■

16. Matematičko očekivanje. Osnovna svojstva. Primeri

Matematičko očekivanje predstavlja srednju vrednost oko koje se ostale vrednosti grupišu. Veliki broj puta (n) vršimo eksperiment i dobijamo sledeće rezultate:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{matrix}, \qquad n_1 + \dots + n_k = n$$

$$\frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \frac{n_k}{n} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k$$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$$

Definicija: Neka je X diskretna slučajna veličina koja uzima konačno mnogo vrednosti i za čiji zakon raspodele važi $X : \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$. Matematičko očekivanje ove slučajne veličine definiše se kao $E(X)$ = $\sum_{k=1}^{n} x_k P\{X = x_k\}$ = $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k$

Definicija: Neka je X diskretna slučajna veličina koja uzima prebrojivo mnogo vrednosti i za čiji zakon raspodele važi $P\{X = x_n\} = p_n$, $n \in N$. Matematičko očekivanje ove slučajne veličine definiše se kao $E(X)$ = $\sum_{n=1}^{\infty} x_n P\{X = x_n\}$ = $\sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$, ako ovaj red apsolutno konvergira, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n < +\infty$.

Teorema: Ako je X diskretna slučajna veličina i $\varphi : R \to R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X))$ = $\sum_n \varphi(x_n) P\{X = x_n\}$, ako ovaj red apsolutno konvergira.

Teorema: Ako je $(X,\ Y)$ dvodimenzionalna diskretna slučajna veličina i $\varphi : R^2 \to R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X,\ Y))$ = $\sum_i \sum_j \varphi(x_i,\ y_j)P\{X = x_i,\ Y = y_j\}$, ako ovaj red apsolutno konvergira.

Primer:

- Indikator $I : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $E(I) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$
- Binomna raspodela $X : \mathcal{B}(n,\ p)$, $E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP\{X = k\}$ = $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ = $\sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ = $\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}$ = $np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$ = $np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}$ = $(k-1=s)$ = $np\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s}p^s(1-p)^{n-1-s}$ = $np(p+1-p)^{n-1}$ = np
- Puasonova raspodela $X : \mathcal{P}(\lambda)$, $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP\{X = k\}$ = $\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ = $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!}$ = $(k-1=s)$ = $\lambda\sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}$ = λ jer je suma zbir verovatnoće Puasonove raspodele pa je jednaka 1.

Definicija: Matematičko očekivanje apsolutno-neprekidne slučajne veličine X, čija je gustina $f_X(x)$ se definiše kao $E(X)$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$, ako ovaj integral apsolutno konvergira, tj. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f_X(x)dx < +\infty$.

Teorema: Ako je X apsolutno-neprekidna slučajna veličina čija je gustina $f_X(x)$ i $\varphi : R \to R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X))$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f_X(x)dx$, ako ovaj integral apsolutno konvergira.

Teorema: Ako je $(X,\ Y)$ dvodimenzionalna apsolutno-neprekidna slučajna veličina čija je gustina $f_{X,Y}(x,\ y)$ i $\varphi : R^2 \to R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X,\ Y))$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,\ y)f_{X,Y}(x,\ y)dxdy$, ako ovaj integral apsolutno konvergira.

Primer:

- Uniformna raspodela $X : \mathcal{U}[a,\ b]$, $E(X)$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$ = $\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx$ = ... = $\frac{a+b}{2}$
- Eksponencijalna raspodela $X : \mathcal{E}(\lambda),\ f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x \geq 0,\ E(X)$ = $\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$ = $\begin{pmatrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{pmatrix}$ = $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\lambda}e^{-t}dt$ = $\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ = $\frac{1}{\lambda}\Gamma(2)$ = $\frac{1}{\lambda} \cdot 1!$ = $\frac{1}{\lambda}$
- Normalna raspodela $X : \mathcal{N}(m,\ \sigma^2),\ E(X) = m$
- Košijeva raspodela $f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},\ x \in R,\ E(X)$ = $\int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx$ = $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}dx$ + $\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ = $\begin{pmatrix} 1+x^2 = t \\ 2xdx = dt \end{pmatrix}$ = $\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{1} \frac{1}{t}dt$ + $\frac{1}{2\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt$ = $\frac{1}{2\pi}\ln|t|\Big|_1^{+\infty}$ - $\frac{1}{2\pi}\ln|t|\Big|_1^{+\infty}$ = $\infty - \infty \Rightarrow$ nema očekivanje.
- $X : \mathcal{E}(\lambda),\ Y : min\{1,\ X\},\ E(Y) = E(min\{1,\ X\})$ = $\int_0^{\infty} min\{1,\ X\}\lambda e^{-\lambda x}dx$ = $\int_0^1 x\lambda e^{-\lambda x}dx$ + $\int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx$ = $\begin{pmatrix} -\lambda x = t \\ -\lambda dx = dt \end{pmatrix}$ = ... = $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

Teorema: Za proizvoljne slučajne veličine za koje postoji očekivanje važi:
(dokaz za diskretne, a slično se dokazuje i za apsolutno-neprekidne slučajne veličine)
a) $E(c) = c$

$\triangle$:

$c : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E(c) = 1 \cdot c = c$ ■

b) $E(cX) = cE(X)$

$\triangle$:

$cX = \varphi(X) \Rightarrow E(cX) = \sum_k cx_k P\{X = x_k\} = c \sum_k x_k P\{X = x_k\} = cE(X)$ ■

c) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$\triangle$:

$X + Y = \varphi(X,\ Y) \Rightarrow E(X + Y) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) P\{X = x_i,\ Y = Y_j\}$ =
$\sum_i \sum_j x_i P\{X = x_i,\ Y = Y_j\}$ + $\sum_i \sum_j y_j P\{X = x_i,\ Y = Y_j\}$ = $\sum_i x_i \sum_j P\{X = x_i,\ Y = Y_j\}$
+ $\sum_j y_j \sum_i P\{X = x_i,\ Y = Y_j\}$ = $\sum_i x_i P\{X = x_i\}$ + $\sum_j y_j P\{Y = y_j\}$ = $E(X) + E(Y)$ ■

d) $E(cX + b) = cE(X) + b$

$\triangle$:

$E(cX + b) =^c E(cX) + E(b) =^{a,\, b} cE(X) + b$ ■

e) $(\forall\ w \in \Omega)\ X(w) \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

$\triangle$:

$E(X) = \sum_k x_k P\{X = x_k\} \geq 0$ jer $x_k \geq 0$ (pretpostavka) i $P\{X = x_k\} \geq 0$ (verovatnoća) ■

f) $(\forall\ w \in \Omega)\ X(w) \geq Y(w) \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$

$\triangle$:

$(\forall\ w \in \Omega)\ X(w) \geq Y(w) \Rightarrow (\forall\ w \in \Omega)\ X(w) - Y(w) \geq 0 \Rightarrow (\forall\ w \in \Omega)\ (X - Y)(w) \geq 0 \Rightarrow^e$
$E(X - Y) \geq 0 \Rightarrow E(X + (-Y)) \geq 0 \Rightarrow^c E(X) + E(-Y) \geq 0 \Rightarrow^b E(X) - E(Y) \geq 0 \Rightarrow$
$E(X) \geq E(Y)$ ■

g) $|E(X)| \leq E(|X|)$

$\triangle$:

$(\forall\ w \in \Omega)\ -|X(w)| \leq X(w) \leq |X(w)| \Rightarrow^f E(-|X|) \leq E(X) \leq E(|X|) \Rightarrow^b$
$-E(|X|) \leq E(X) \leq E(|X|) \Rightarrow |E(X)| \leq E(|X|)$ ■

h) $X,\ Y$ nezavisne $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

$\triangle$:

$XY = \varphi(X,\ Y) \Rightarrow E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X = x_i,\ Y = y_j\}$ $=^{nezavisnost}$
$\sum_i \sum_j x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\}$ = $\sum_i x_i P\{X = x_i\} \cdot \sum_j y_j P\{Y = y_j\}$ = $E(X)E(Y)$ ■

17. Disperzija. Osnovna svojstva. Primeri

Slučajne veličine $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i $Y : \begin{pmatrix} -1000 & 1000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ imaju isto očekivanje (0), međutim X je pribijenija (skupljenija) uz svoje očekivanje, a Y je raspršenija. **Disperzija** meri raspršenost slučajne veličine oko svoje srednje vrednosti (očekivanja). U ovom slučaju važi $D(X) < D(Y)$ jer je raspršenost X manja od Y.

Definicija: Neka je X proizvoljna slučajna veličina. Očekivanje $E(X^n)$ zove se n**-ti moment** slučajne veličine X. Očekivanje $E(|X|^n)$ zove se n**-ti apsolutni moment** slučajne veličine X. Očekivanje $E((X - E(X))^n)$ zove se n**-ti centralni (centrirani) moment** slučajne veličine X
.

Disperzija slučajne veličine X je **drugi centralni moment**, tj. $D(X) = E((X - E(X))^2)$. Dakle, disperzija meri srednje kvadratno odstupanje slučajne veličine od svog matematičkog očekivanja. **Standardno odstupanje (devijacija)** slučajne veličine X je $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.
Disperzija kod:

- diskretnih slučajnih veličina: $\sum_k (x_k - E(X))^2 p_k$
- neprekidnih slučajnih veličina: $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$

Teorema: Za proizvoljnu slučajnu veličinu važi:

1. $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$
   $\triangle$:
   $D(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) =$
   $E(X^2) + E(-2XE(X)) + E((E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 =$
   $E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ ∎
2. $0 \leq D(X) \leq E(X^2)$
   $\triangle$:
   $D(X) = E((X - E(X))^2) \geq 0$ jer $(X - E(X))^2 \geq 0$ i $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \leq E(X^2)$ jer $(E(X))^2 \geq 0$ ∎
3. $D(X) = 0$ akko $P\{X = C\} = 1$ (X skoro sigurno konstanta)
   $\Leftarrow$:
   $X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = c^2 \cdot 1 - (c \cdot 1)^2 = 0$
   $\Rightarrow$:
   $0 = D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_k (x_k - E(X))^2 p_k \geq 0$ jer $p_k > 0$ i $(x_k - E(X))^2 \geq 0$.
   Svaki sabirak onda mora biti nula, tj. $(\forall\, k) x_k - E(X) = 0$, tj. $(\forall\, k) x_k = E(X)$. Očekivanje je neka konstanta c i važi $(\forall\, k) x_k = c$ pa važi $X = c$, tj. $X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$ ∎
4. $D(aX + b) = a^2 D(X)$
   $\triangle$:
   $D(aX + b) =^1 E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2 =$
   $E(a^2X^2) + E(2abX) + E(b^2) - (a^2E(X)^2 + 2abE(X) + b^2) =$
   $a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2E(X)^2 - 2abE(X) - b^2 = a^2(E(X^2) - E(X)^2) = a^2D(X)$ ∎
5. X i Y nezavisne $\Rightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y)$
   $\triangle$:
   $D(X + Y) = E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 =^{nez}$
   $E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 =$
   $E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 = D(X) + D(Y)$ ∎

Važi i $D(X - Y) = D(X + (-Y)) =^{nez} D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$

Primer (diskretne slučajne veličine):

1. $I : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - p & p \end{pmatrix}$
   $D(I) = E(I^2) - (E(I))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

2. $X:\mathcal{B}(n,\ p)$ - prvi način: $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\ \ldots$, drugi način: $X = I_1+\ldots+I_n \Rightarrow$ $D(X) = D(I_1+\ldots+I_n) =^{nez} D(I_1)+\ldots+D(I_n) = np(1-p)$
3. $X:\mathcal{P}(\lambda),\ E(X)=\lambda,\ E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} =$ $\sum_{k=1}^{\infty}(k-1+1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{(k-1)!} =$ $\begin{pmatrix} s=k-2 \\ m=k-1 \end{pmatrix} = \lambda^2\sum_{s=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!} + \lambda\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} = \lambda^2+\lambda \Rightarrow D(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda$

Primer (apsolutno-neprekidne slučajne veličine):

1. $X:\mathcal{N}(m,\ \sigma^2),\ D(X)=\sigma^2$
2. $X:\mathcal{E}(\lambda),\ E(X)=\frac{1}{\lambda},\ E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \begin{pmatrix} t=\lambda x \\ dt=\lambda dx \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) =$ $\frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow D(X)=\frac{2}{\lambda^2}-(\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

18. Koeficijent korelacije

Standardizovana slučajna veličina je $X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$. Važi:

- $E(X^*)=E(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}})=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E(X-E(X)) = \frac{1}{\sqrt{D(X)}}(E(X)-E(E(X)))=0$ jer $E(E(X))=E(X)$
- $D(X^*)=D(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}})=\frac{1}{D(X)}D(X-E(X)) = \frac{D(X)}{D(X)}=1$

Definicija: Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim disperzijama. **Kovarijacija (kovarijansa)** slučajnih veličina X i Y definisana je sa:
$cov(X,\ Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY-E(X)Y-XE(Y)+E(X)E(Y)) =$
$E(XY)-E(E(X)Y)-E(XE(Y))+E(E(X)E(Y)) =$
$E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$

Definicija: Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim i pozitivnim disperzijama. **Koeficijent korelacije** slučajnih veličina X i Y je kovarijansa standardizacija slučajnih veličina X i Y, odnosno:
$\rho_{X,Y}=cov(X^*,\ Y^*)=E(X^*Y^*)-E(X^*)E(Y^*) = E(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}) = \frac{E((X-E(X))(Y-E(Y)))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} =$ $\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

Definicija: Ako je $\rho_{X,Y}=0$ onda su X i Y **nekorelirane** slučajne veličine.

Lema: Nezavisne slučajne veličine su nekorelirane. Obrnuto ne važi.
$\triangle$:
$E(XY) =^{nez} E(X)E(Y) \Rightarrow \rho_{X,Y}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=0$ ∎

Teorema Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim i pozitivnim disperzijama. Tada važi:
a) $|\rho_{X,Y}|\leq 1$

$\triangle$:

$0 \leq D(Y^* \mp X^*) = E((Y^* \mp X^*)^2) - (E(Y^* \mp X^*))^2 =$
$E(Y^{*2} \mp 2Y^*X^* + X^{*2}) - (E(Y^*) \mp E(X^*))^2 =$
$E(Y^{*2}) \mp 2E(Y^*X^*) + E(X^{*2}) - (E(Y^*))^2 \pm 2E(X^*)E(Y^*) - (E(X^*))^2 =$
$D(Y^*) + D(X^*) \mp 2(E(X^*Y^*) - E(X^*)E(Y^*)) = 2 \mp 2\rho_{X,Y}$ odakle sledi $2 - 2\rho_{X,Y} \geq 0 \Rightarrow$ $\rho_{X,Y} \leq 1$ i $2 + 2\rho_{X,Y} \geq 0 \Rightarrow \rho_{X,Y} \geq -1$ pa važi $|\rho_{X,Y}| \leq 1$ ∎

b) $|\rho_{X,Y}| = 1$ akko su X i Y skoro sigurno linearno zavisne, tj. $P\{Y = aX + b\} = 1$
$\Leftarrow$:
Neka je $Y \overset{ss}{=} aX + b$. Važi $\rho_{X,Y} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(X(aX+b)-E(X)E(aX+b))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(aX+b)}} =$
$\frac{E(aX^2+bX)-E(X)(aE(X)+b)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{a^2D(X)}} = \frac{E(aX^2)+E(bX)-a(E(X))^2-bE(X)}{\sqrt{D(X)}|a|\sqrt{D(X)}} = \frac{aE(X^2)+bE(X)-a(E(X))^2-bE(X)}{|a|D(X)} = \frac{aD(X)}{|a|D(X)} =$
$\begin{cases} -1, \ a < 0 \\ 1, \ a > 0 \end{cases} \Rightarrow |\rho_{X,Y}| = 1$

$\Rightarrow$:
Ako je $\rho_{X,Y} = -1$ onda je $D(Y^* + X^*) = 2 + 2\rho_{X,Y} = 0 \Rightarrow Y^* + X^* \overset{ss}{=} c$. Važi $E(Y^* + X^*) = E(c) = c$ i $E(Y^* + X^*) = E(Y^*) + E(X^*) = 0$ pa je $c = 0$ odnosno $Y^* \overset{ss}{=} -X^*$ $\Rightarrow \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \overset{ss}{=} -\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \Rightarrow Y \overset{ss}{=} -\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}X + \frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X) + E(Y) \Rightarrow Y \overset{ss}{=} aX + b$. Ako je $\rho_{X,Y} = 1$ onda je $D(Y^* - X^*) = 2 - 2\rho_{X,Y} = 0 \Rightarrow Y^* - X^* \overset{ss}{=} c$. Važi $E(Y^* - X^*) = E(c) = c$ i $E(Y^* - X^*) = E(Y^*) - E(X^*) = 0$ pa je $c = 0$ odnosno $Y^* \overset{ss}{=} X^* \Rightarrow \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \overset{ss}{=} \frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}} \Rightarrow$ $Y \overset{ss}{=} \frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}X + \frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X) + E(Y) \Rightarrow Y \overset{ss}{=} aX + b$. ∎

Dakle, koeficijent korelacije je mera linearne zavisnosti slučajnih veličina X i Y. Što su vrednosti bliže -1 i 1 to je linearna zavisnost veća, a u ekstremnim slučajevima -1 i 1 to znači da se Y može prikazati kao $aX + b$ što se naziva **potpuna linearna zavisnost**. Kada je vrednost -1 zavisnost je **negativna**, a kada je vrednost 1 u pitanju je **pozitivna linearna zavisnost**.

19. Karakteristična funkcija. Osnovna svojstva. Primeri

Do sada smo imali da za slučajne veličine važi $X : \Omega \to R$. Kao uopštenje, **kompleksna slučajna veličina** je slučajna veličina koja svakom događaju dodeljuje kompleksan broj $X + iY$, tj. $Z : \Omega \to \mathcal{C}$. Po definiciji važi $E(Z) = E(X) + iE(Y)$.

Definicija: **Karakteristična funkcija** neke slučajne veličine, odnosno njene raspodele, je funkcija koja slika $R \to \mathcal{C}$ definisana sa $\varphi_X(t) = E(e^{itx})$

Ojlerova formula: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \ e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Odavde važi $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ i $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i\sin\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$. Dakle, karakterističnu funkciju možemo zapisati i kao $\varphi_X(t) = E(e^{itx}) = E(\cos(tx) + i\sin(tx)) =$ $E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))$.

- **diskretan slučaj**: $\varphi_X(t) = \sum_k e^{itk} P\{X = k\}$
- **neprekidan slučaj**: $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$

Primer:

- $I : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ - $\varphi_I(t) = E(e^{itx})$ = $e^{it0}(1-p) + e^{it1}p = 1 - p + pe^{it}$
- $X : \mathcal{P}(\lambda)$ - $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P\{X = k\}$ = $\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ = $e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$ = $e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}$ = $e^{\lambda(e^{it}-1)}$ jer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- $X : \mathcal{U}[0,1]$ - $\varphi_X(t) = \int_0^1 e^{itx} 1 dx = \frac{e^{it}-1}{it}$

Teorema(**Osobine karakteristične funkcije**): Za karakterističnu funkciju $\varphi_X(t)$ slučajne veličine X važi:

1. $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0),\ \varphi_X(0) = 1$
   △:

   $\varphi_X(0) = E(e^{i0x}) = E(1) = 1$ ■
2. $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$
   △:

   $\varphi_X(-t) = E(e^{i(-t)x}) = E(\cos(-tx) + i\sin(-tx)) = E(\cos(tx) - i\sin(tx))$ = $E(\cos(tx)) - iE(\sin(tx))$ = $\overline{E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))}$ = $\overline{E(\cos(tx) + i\sin(tx))}$ = $\overline{E(e^{itx})}$ = $\overline{\varphi_X(t)}$ ■
3. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$
   △:

   $\varphi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itb}e^{itax})$ = $e^{itb}E(e^{i(at)x})$ = $e^{itb}\varphi_X(at)$ ■
4. φ_X je ravnomerno neprekidna na R

Primer: Ako postoji, odrediti raspodelu slučajne veličine čija je karakteristična funkcija:

- $\cos t : \varphi(t) = \cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = e^{it(-1)}\frac{1}{2} + e^{it1}\frac{1}{2}$ pa važi $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $\sin t : \varphi(0) = \sin 0 = 0 \neq 1$ pa φ_t nije karakteristična funkcija nijedne slučajne veličine. Uslov $\varphi(0) = 1$ je potreban, ali ne i dovoljan.

Primer: Naći karakterističnu funkciju normalne raspodele ako za standardnu normalnu raspodelu važi $\varphi_{X^*}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Znamo $\frac{X-m}{\sigma} = X^*$, odnosno $X = \sigma X^* + m$ pa važi $\varphi_X(t)$ = $\varphi_{\sigma X^* + m}(t)$ $=^3$ $e^{itm}\varphi_{X^*}(\sigma t)$ = $e^{itm}e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$ = $e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$

20. Svojstva karakteristične funkcije povezana sa momentima, nezavisnošću i funkcijom raspodele

Teorema: Neka je X slučajna veličina čija je karakteristična funkcija $\varphi_X(t)$. Ako za neko $n \in N$ važi da je $E(|X|^n) < +\infty$, onda za $\forall\, k \in N,\ k \leq n$, postoji $\varphi_X^{(k)}(t)$ i važi:

1. $E(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$
2. $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + o(t^n),\ t \to 0$

Ova teorema govori da ako znamo karakterističnu funkciju možemo naći momente i obrnuto.

Teorema(**Teorema o proizvodu karakterističnih funkcija**): Ako su $X_1,\ \ldots,\ X_n$ nezavisne slučajne veličine i φ_X je karakteristična funkcija slučajne veličine $X = X_1 + \ldots + X_n$, onda važi da je $\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \ldots \varphi_{X_n}(t)$

$\triangle$:

$\varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = E(e^{it(X_1+\ldots+X_n)})$ = $E(e^{itX_1} \ldots e^{itX_n})$ =^{nez} $E(e^{itX_1}) \ldots E(e^{itX_n})$ = $\varphi_{X_1}(t) \ldots \varphi_{X_n}(t)$ ■

Primer: Za $X : \mathcal{B}(n,\ p)$ važi $\varphi_X(t) = \varphi_{I_1+\ldots+I_n}(t)$ = $\varphi_{I_1}(t) \ldots \varphi_{I_n}(t)$ = $(1 - p + pe^{it})^n$

Teorema(**Formula inverzije**): Ako su a i b tačke neprekidnosti funkcije raspodele F_X slučajne veličine X, a $\varphi_X(t)$ njena karakteristična funkcija, onda važi:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt$$

Odavde važi:

$$F(b) = \lim_{a \to -\infty} \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt,$$

pa ako znamo karakterističnu funkciju, znamo i funkciju raspodele.

Teorema(**Teorema o jedinstvenosti**): Ako neke dve funkcije raspodele imaju istu karakterističnu funkciju, onda su te dve funkcije raspodele identične.

Teorema: Neka su F_X funkcija raspodele i φ_X karakteristična funkcija slučajne veličine X. Ako je $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_X(t)| dt < +\infty$, odnosno konačan, onda je X apsolutno neprekidnog tipa i za njenu gustinu raspodele važi:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$$

21. Normalna raspodela. Svojstva normalne raspodele

Normalna raspodela je $X \sim \mathcal{N}(m,\ \sigma^2),\ m \in R,\ \sigma > 0$. Očekivanje normalne raspodele je m , a disperzija σ^2. Gustina normalne raspodele je:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}},\ x \in R$$

Funkcija raspodele je:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}} dt,\ t \in R$$

Funkcija raspodele ne može da se reši elementarnim putem, pa zbog toga postoje statističke tablice. Normalna raspodela se najčešće javlja kod prirodnih procesa.

Standardna normalna raspodela je $X^* \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$. Gustina standardne normalne raspodele je:

$$f_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2},\ x \in R$$

Lema: Ako X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\ \sigma^2)$ raspodelu, onda $\frac{X-m}{\sigma}$ ima standardnu normalnu raspodelu.

△:

Neka je $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Tada važi $F_Y(x) = P\{Y \le x\}$ = $P\{\frac{X-m}{\sigma} \le x\}$ = $P\{X \le \sigma x + m\}$ = $\int_{-\infty}^{\sigma x+m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}} dt$ = $\begin{pmatrix} \frac{t-m}{\sigma} = s \\ dt = \sigma ds \end{pmatrix}$ = $\sigma \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ = $\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$ = $F_{X^*}(x)$ pa sledi $Y \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$, tj. $\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,\ 1)$ ■

Lema: Linearna kombinacija konačno mnogo nezavisnih slučajnih veličina koje imaju normalnu raspodelu takođe ima normalnu raspodelu.

△:

Neka su $X_1 : \mathcal{N}(m_1,\ \sigma_1^2),\ \dots,\ X_n : \mathcal{N}(m_n,\ \sigma_n^2)$ nezavisne slučajne veličine, a $X = a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$ njihova linearna kombinacija. Tada važi $\varphi_{a_1X_1+\ldots+a_nX_n}$ $=^{nez}$ $\varphi_{a_1X_1}(t)\ldots\varphi_{a_nX_n}(t)$ = $\varphi_{X_1}(a_1t)\ldots\varphi_{X_n}(a_nt)$ = $e^{i(a_1t)m_1 - \frac{(a_1t)^2\sigma_1^2}{2}} \ldots e^{i(a_nt)m_n - \frac{(a_nt)^2\sigma_n^2}{2}}$ = $e^{it(a_1m_1+\ldots+a_nm_n) - \frac{t^2(a_1^2\sigma_1^2+\ldots+a_n^2\sigma_n^2)}{2}}$. Ovo je karakteristična funkcija normalne raspodele, pa na osnovu teoreme o jedinstvenosti sledi $X \sim \mathcal{N}(a_1m_1 + \ldots + a_nm_n,\ a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2)$ ■

22. Konvergencija u raspodeli i u verovatnoći niza slučajnih veličina i odnos među njima

Neka su $X_1,\ X_2,\ \ldots$ i X slučajne veličine definisane na prostoru verovatnoće $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$, $F_{X_1},\ F_{X_2},\ \ldots$ i F_X odgovarajuće funkcije raspodele i $\varphi_{X_1},\ \varphi_{X_2},\ \ldots$ i φ_X odgovarajuće karakteristične funkcije.

Definicija: Niz slučajnih veličina (X_n) **konvergira u verovatnoći** ka slučajnoj veličini X kad $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, ako

$$(\forall\, \mathcal{E} > 0)\ \lim_{n\to\infty} P\{w \mid |X_n(w) - X(w)| \geq \mathcal{E}\} = 0$$

Koristimo kraći zapis: $(\forall\, \mathcal{E} > 0)\ P\{|X_n(w) - X(w)| \geq \mathcal{E}\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Definicija: Niz slučajnih veličina (X_n) **konvergira u raspodeli** ka slučajnoj veličini X kad $n \to \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} X$, ako za svaku tačku neprekidnosti x funkcije raspodele F_X važi

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Teorema(**Metod karakteristične funkcije**): Neka su (F_n) niz funkcija raspodele i (φ_n) niz karakterističnih funkcija niza slučajnih veličina (X_n).
a) Ako važi $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ za svaku tačku neprekidnosti funkcije F, gde je F neka funkcija raspodele, onda važi $(\forall\, t \in R)\ \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ i pri tome je φ karakteristična funkcija funkcije raspodele F.
b) Ako $(\forall\, t \in R)$ postoji $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ i ako je φ neprekidna u nuli, onda je φ karakteristična funkcija neke funkcije raspodele F i za svaku tačku neprekidnosti x funkcije F važi $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

Teorema: Ako niz slučajnih veličina (X_n) konvergira u verovatnoći ka slučajnoj veličini X, onda on konvergira u raspodeli ka toj slučajnoj veličini. Obrnuto ne važi.

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \ \Rightarrow\ X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} X$$

Teorema: Ako niz slučajnih veličina (X_n) konvergira u verovatnoći ka konstanti C, onda on konvergira u raspodeli ka toj konstanti. Važi i obrnuto.

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} C \ \Leftrightarrow\ X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} C,\ C = const$$

$\triangle$:
$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{R} C \ \Leftrightarrow\ (\forall\, x \in R\backslash\{C\})\ \lim_{n\to\infty} F_{X_n} = \begin{cases} 0, & x < C \\ 1, & x \geq C \end{cases}$, ali pišemo $> C$ jer nas ne interesuje šta se dešava u tački C. Važi $(\forall\, \mathcal{E} > 0)\ 0 \leq P\{|X_n - C| \geq \mathcal{E}\}$ = $P\{X_n - C \leq -\mathcal{E}\}$ + $P\{X_n - C \geq \mathcal{E}\}$ = $P\{X_n \leq C - \mathcal{E}\}$ + $P\{X_n \geq C + \mathcal{E}\}$ = $F_{X_n}(C - \mathcal{E})$ + $P\{X_n > C + \frac{\mathcal{E}}{2}\}$ =

$F_{X_n}(C-\mathcal{E})$ + 1 - $F_{X_n}(C+\frac{\mathcal{E}}{2}) \xrightarrow{n\to\infty} 0+1-1=0$ pa na osnovu teoreme o dva policajca važi $(\forall\, \mathcal{E}>0)\ \lim_{n\to\infty} P\{|X_n-C|\geq \mathcal{E}\}=0$, odnosno $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} C$ ■

23. Aproksimacija binomne raspodele normalnom raspodelom

Teorema(**Muavr-Laplas**): Ako slučajna veličina X ima binomnu $\mathcal{B}(n,\ p)$ raspodelu, onda:

1. **lokalna teorema**: za veliko n (≥ 30) važi:

$$P\{X=k\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-np)^2}{np(1-p)}},\ k\in\{0,\ \ldots,\ n\}$$

2. **integralna teorema**: za $(\forall\, x\in R)$ važi:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\}=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

△:

Teorema tvrdi $\lim_{n\to\infty} F_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(x)=F_{X^*}(x)$ za svako $x\in R$ jer su kod standardne normalne raspodele sve tačke x tačke neprekidnosti. To znači da treba pokazati $\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{R} X^*:\mathcal{N}(0,\ 1)$. Pokažimo da važi $(\forall\, t\in R)\ \lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t)$ = $\varphi_{X^*}(t)$ = $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Važi $\lim_{n\to\infty}\varphi_{\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t)$ = $\lim_{n\to\infty} E(e^{it\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}})$ = $\lim_{n\to\infty} E(e^{i\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}X_n}e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}})$ = $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}E(e^{i\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}X_n})$ = $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\varphi_{X_n}(\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}})$ = $\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}(1-p+pe^{i\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}})^n$ = $\lim_{n\to\infty}((1-p)e^{\frac{-itp}{\sqrt{np(1-p)}}}+pe^{it\frac{1-p}{\sqrt{np(1-p)}}})^n$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n\ln((1-p)e^{\frac{-itp}{\sqrt{np(1-p)}}}+pe^{it\frac{1-p}{\sqrt{np(1-p)}}})}$ = $\left(e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\ x\to 0\right)$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n\ln((1-p)(1-\frac{itp}{\sqrt{np(1-p)}}-\frac{t^2p^2}{2np(1-p)}+o(\frac{1}{n}))+p(1+\frac{it(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}-\frac{t^2(1-p)^2}{2np(1-p)}+o(\frac{1}{n})))}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1-p-\frac{it}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}-\frac{t^2p}{2n}+o(\frac{1}{n})+p+\frac{it}{\sqrt{n}}\sqrt{p(1-p)}-\frac{t^2(1-p)}{2n}+o(\frac{1}{n}))}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{1}{n}))}$ = $(\ln(1+x)=x+o(x),\ x\to 0)$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n(-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{1}{n}))}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+o(1)}$ = $e^{-\frac{t^2}{2}}$. Važi i $\lim_{t\to 0} e^{-\frac{t^2}{2}}$ = e^0 = 1 pa je funkcija neprekidna u nuli, pa na osnovu metoda karakteristične funkcije dobijamo traženo. ■

Obe teoreme zapravo tvrde $X:\ \mathcal{B}(n,\ p)\approx\mathcal{N}(np,\ np(1-p))$, odakle $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\sim\mathcal{N}(0,\ 1)$. Na primer:

$P\{a\leq X\leq b\}=P\{\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\}\approx F_{X^*}(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}})-F_{X^*}(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}})$

24. Aproksimacija binomne raspodele Puasonovom raspodelom

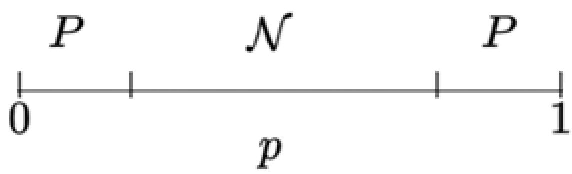
Teorema: Neka kod binomne $\mathcal{B}(n,\ p)$ raspodele važi $p = \frac{\lambda}{n}$. Tada za veliko n (≥ 30), što povlači malo p, važi:

$$(\forall\, k \in \{0,\ \ldots,\ n\})\ \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$\triangle$: $\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} =$
$\frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n} (1-\frac{\lambda}{n})^n \cancelto{1}{(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}} =$
$\frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \cancelto{1}{(1-\frac{1}{n})} \cdot\ \ldots\ \cdot \cancelto{1}{(1-\frac{k-1}{n})} (1+\frac{1}{-\frac{n}{\lambda}})^{-\frac{n}{\lambda}\cdot(-\lambda)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ ■

Dakle, ako je $n \geq 30$ koristi se neka aproksimacija po sledećem šablonu:

1. $np < 10 \lor n(1-p) < 10 \Rightarrow$ Puasonova aproksimacija
2. $np \geq 10 \land n(1-p) \geq 10 \Rightarrow$ normalna aproksimacija



Može se desiti da šablon kaže da treba koristiti Puasonovu raspodelu, ali da p nije malo. U tom slučaju je potrebno da pređemo na suprotni događaj. Ako X meri broj uspeha i ima raspodelu $\mathcal{B}(n,\ p)$, onda $\overline{X}$ meri broj neuspeha i ima raspodelu $\mathcal{B}(n,\ 1-p)$. Važi $P\{X = k\}$ = $P\{\overline{X} = n-k\}$.

25. Čebišovljeva nejednakost. Bernulijev zakon velikih brojeva

Teorema(**Čebišovljeva nejednakost**): Neka je X proizvoljna slučajna veličina, a $\mathcal{E}$ i r pozitivni brojevi. Tada važi:

$$P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\mathcal{E}^r}$$

$\triangle$:

Neka je $Y = \begin{cases} 0, & |X| < \mathcal{E} \\ \mathcal{E}, & |X| \geq \mathcal{E} \end{cases}$. Ovo je diskretna promenljiva - $Y : \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ 1 - P\{|X| \geq \mathcal{E}\} & P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \end{pmatrix}$
pa važi $Y \leq |X| \Rightarrow Y^r \leq |X|^r \Rightarrow E(Y^r) \leq E(|X|^r) \Rightarrow 0^r(1 - P\{|X| \geq \mathcal{E}\}) + \mathcal{E}^r P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \leq$ $E(|X|^r) \Rightarrow P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\mathcal{E}^r}$ ■

Specijalni slučaj formule za $r = 2$:

$$P\{|X-E(X)|\geq \mathcal{E}\}\leq \frac{E(|X-E(X)|^2)}{\mathcal{E}^2}=\frac{D(X)}{\mathcal{E}^2}$$

Definicija: Neka je (X_n) niz slučajnih veličina definisanih na istom prostoru verovatnoće $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$. Za taj niz važi **slabi zakon velikih brojeva** ako:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}0$$

Teorema(**Bernulijev zakon velikih brojeva**): Ako je X_n broj uspeha u n nezavisnih pokušaja, gde je verovatnoća uspeha u svakom od tih pokušaja p, onda važi:

$$\frac{X_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}p$$

Slučajna veličina X_n ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n,\ p)$, a istu raspodelu ima i suma indikatora:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}I_k}{n}-\frac{np}{n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}I_k}{n}-E(\sum_{k=1}^{n}I_k)\xrightarrow[n\to\infty]{P}0$$

△:

$(\forall\,\mathcal{E}>0)\ 0\leq P\{|\frac{X_n}{n}-p|\geq\mathcal{E}\}$ = $P\{|X_n-np|\geq n\mathcal{E}\}\overset{\check{C}ebi\check{s}.\ nej.\ n=2}{\leq}\frac{E(|X_n-np|^2)}{n^2\mathcal{E}^2}$ = $\frac{D(X_n)}{n^2\mathcal{E}^2}$ = $\frac{np(1-p)}{n^2\mathcal{E}^2}$ $\xrightarrow{n\to\infty}$ 0 pa na osnovu teoreme o dva policajca važi $(\forall\,\mathcal{E}>0)\ P\{|\frac{X_n}{n}-p|\geq\mathcal{E}\}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, odnosno $\frac{X_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}p$ ■

26. Čebišovljev i Hinčinov zakon velikih brojeva

Teorema(**Čebišovljev zakon velikih brojeva**): Ako je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina takav da postoji pozitivan broj C takav da $(\forall\,n\in N)\ D(X_n)\leq C$, onda za taj niz važi slabi zakon velikih brojeva.

△:

$(\forall\,\mathcal{E}>0)\ 0\leq P\{|\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{n}|\geq\mathcal{E}\}$ = $P\{|\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)|\geq n\mathcal{E}\}\overset{\check{C}ebi\check{s}.\ nej.\ n=2}{\leq}\frac{E(|\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)|^2)}{n^2\mathcal{E}^2}$ = $\frac{D(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{n^2\mathcal{E}^2}=_{nez}\frac{\sum_{k=1}^{n}D(X_k)}{n^2\mathcal{E}^2}\leq\frac{nC}{n^2\mathcal{E}^2}\xrightarrow{n\to\infty}$ 0 pa na osnovu teoreme o dva policajca važi slabi zakon velikih brojeva, tj. $\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-E(\sum_{k=1}^{n}X_k)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}0$ ■

Teorema(**Hinčinov zakon velikih brojeva**): Ako je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom i konačnim matematičkim očekivanjem jednakim m, onda za taj niz važi slabi zakon velikih brojeva, odnosno:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{P}m$$

△:

Dokazaćamo $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{R} m$ koristeći metod karakteristične funkcije: $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}}(t)$ = $\lim_{n\to\infty} E(e^{it\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n}})$ = $\lim_{n\to\infty} E(e^{i\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k})$ = $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sum_{k=1}^{n} X_k}(\frac{t}{n})$ $=^{nez}$ $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(\frac{t}{n})$ $\overset{osobina\ momenta}{=}$ $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1 + i\frac{t}{n}m + o(\frac{t}{n})),\ \frac{t}{n} \to 0$ = $\lim_{n\to\infty}(1 + i\frac{t}{n}m + o(\frac{1}{n}))^n$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1+i\frac{t}{n}m+o(\frac{1}{n}))}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n(i\frac{t}{n}m+o(\frac{1}{n}))}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{itm+o(1)}$ = e^{itm} = $\varphi_X(t)$. Niz karakterističnih funkcija teži karakterističnoj funkciji e^{itm} koja je neprekidna u nuli i zapravo je karakteristična funkcija za $X : \binom{m}{1}$ pa sledi $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{R} m \Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{n} \xrightarrow{P} m$ ∎

Bernulijev zakon sledi iz Čebišovljevog i Hinčinovog zakona.

27. Centralna granična teorema

Teorema(**Centralna granična teorema**): Ako je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom i konačnom disperzijom većom od nule, onda važi:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} \xrightarrow[n\to\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0,\ 1)$$

△:

Uvodimo smenu $Y_k = X_K - E(X_k),\ D(X_k) = \sigma^2$. Važi: $E(Y_k)$ = $E(X_k - E(X_k))$ = $E(X_k) - E(X_k)$ = 0 i $D(Y_k)$ = $D(X_k - E(X_k))$ = $D(X_k)$ = σ^2. Sada treba da dokažemo $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0,\ 1)$. Koristimo metod karakteristične funkcije:

$(\forall\, t \in R)\ \lim_{n\to\infty} \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sigma\sqrt{n}}}(t)$ = $\lim_{n\to\infty} E(e^{it\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sigma\sqrt{n}}})$ = $\lim_{n\to\infty} E(e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} Y_k})$ = $\lim_{n\to\infty} \varphi_{\sum_{k=1}^{n} Y_k}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})$ $=^{nez}$ $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{Y_k}(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}})$ $\overset{osobina\ momenta}{=}$ $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{it}{\sigma\sqrt{n}} \cdot 0 + \frac{(\frac{it}{\sigma\sqrt{n}})^2}{2!} \cdot \sigma^2 + o(\frac{1}{n}))$ = $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{t^2\sigma^2}{2\sigma^2 n} + o(\frac{1}{n}))^n$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n\ln(1-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{1}{n}))}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{n(-\frac{t^2}{2n}+o(\frac{1}{n}))}$ = $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{2}+o(1)}$ = $e^{-\frac{t^2}{2}}$ što je karakteristična funkcija standardne normalne raspodele pa na osnovu metode karakteristične funkcije i teoreme o jedinstvenosti $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0,\ 1)$, tj. $\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - E(\sum_{k=1}^{n} X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^{n} X_k)}} \xrightarrow[n\to\infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0,\ 1)$

∎

Teorema kaže da puno slučajnih veličina (≥ 30), isto raspodeljenih sa disperzijom većom od nule, možemo aproksimirati normalnom raspodelom. Integralna teorema Muavr-Laplasa je specijalni slučaj centralne granične teoreme kada X_n ima binomnu raspodelu.