Писмени испит из Анализе 1 за И смер **СЕПТЕМБАР 0 2021**

1. (15 поена) Посматрајмо низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ дат са $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+a_n}{1-a_n}} - 1$ за свако $n \geq 1$, при чему је $a_1 \in (-1, 0)$.

(а) Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

(б) Израчунати $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.

(в) Да ли низ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ конвергира ако је $a_1 = \dfrac{1}{2}$?

2. (15 поена)

(а) Одредити константе $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ тако да важи $\operatorname{tg} x = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ кад $x \to 0$.

(б) Израчунати $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x) - \sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x - \sin x}$.

3. (20 поена) Дата је функција $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{2x-3} - \dfrac{x}{2}$.

(а) Испитати ток и скицирати график функције f.

(б) Под којим углом график функције f улази у тачку са x-координатом $\dfrac{3}{2}$ са десне стране?

(в) Одредити број решења једначине $f(x) = a$ у зависности од реалног параметра a.

4. (10 поена) Нека је функција $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ диференцијабилна и $f(1) = 7, f(4) = 6, f(9) = 5, f(16) = 3$. Доказати да постоји $c \in (0, +\infty)$ за које важи $\dfrac{f(c)}{2\sqrt{c}} = -\sqrt{c}f'(c)$.

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)