① $\vec{AB}=(2,-4,2)$

$\vec{AC}=(-2,-2,3)$

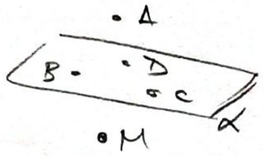
$\vec{AD}=(1,-2,2)$

а) $[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}] = \begin{vmatrix}2&-4&2\\-2&-2&3\\1&-2&2\end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow$ вектори нису компланарни

$\Rightarrow$ тачке нису компланарне $\Rightarrow$ могу бити темена тетраедра

б) $V=\frac{1}{6}\left|[\vec{AB},\vec{AC},\vec{AD}]\right| = 2$

в) 1. начин



А и М су са разних страна равни BCD

$\vec{BC} = (-4,2,1)$

$\vec{BD} = (-1,2,0)$

$\vec{BC} \times \vec{BD} = (-2,1,6) \sim (2,1,6) = \vec{n}_\alpha$

$\alpha: \underbrace{2(x-3)+y+6z}_{f(x,y,z)}=0$

$\left.\begin{aligned} f(A)&=-12\\ f(M)&=7\end{aligned}\right\} \Rightarrow M, A \div (BCD) \Rightarrow$ М није унутар тетраедра ABCD

2. начин

знак мешовитог производа

$\sigma(ABCD) = \mathrm{sgn}([AB\ AC\ AD])$ (оријентација тетраедра ABCD)

М је унутар тетраедра акко су сви тетраедри MBCD, AMCD, ABMD, ABCM исто оријентисани:

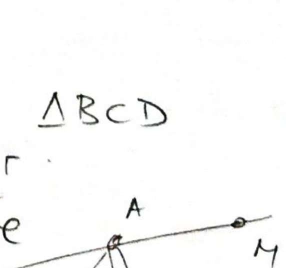
$\left.\begin{aligned} [MBCD]&=7\\ [AMCD]&=13\\ [ABMD]&=2\\ [ABCM]&=-34\end{aligned}\right\}$ различитог знака

$\Rightarrow$ М није унутар тетраедра ABCD

3. начин

провера да ли права AM сече ΔBCD

$\left.\begin{aligned} [AM, AB, AC] &= -34\\ [AM, AC\ AD] &= 13\\ [AM\ AD, AB] &= 2\end{aligned}\right\}$ различитог знака $\Rightarrow$ не сече



$\Rightarrow$ није унутар тетраедра

② а) Изометрије равни } бијекције које чувају углове и растојања

Транслација, ротација, осна рефлексија

Кретања равни } изометрије које чувају оријентацију

Транслација и ротација

б)

$$f = S_{y,-1} \circ S_{x,\frac{1}{2}} \circ S_{y,-2}$$

Обратити пажњу на редослед: композиција пресликавања делује на тачку "здесна": најпре се примењује оно што је најближе тачки

$$f \circ g(M) = f(g(M))$$

$$f: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

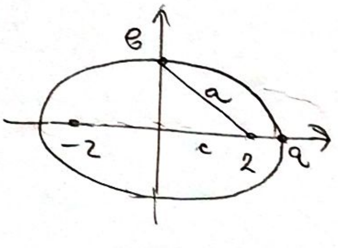
$$f: \left.\begin{array}{l} x' = \frac{1}{2} y \\ y' = -2x + \frac{1}{2} y \end{array}\right]$$

Не чува дужине ⇒ није изометрија, па самим тим није ни кретање

$$f(0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Координатни почетак се слика у себе

③



б) Елипса

а) $MF_1 + MF_2 = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$c = 2$

$b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = 16 - 4 = 12$

$$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\varepsilon: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

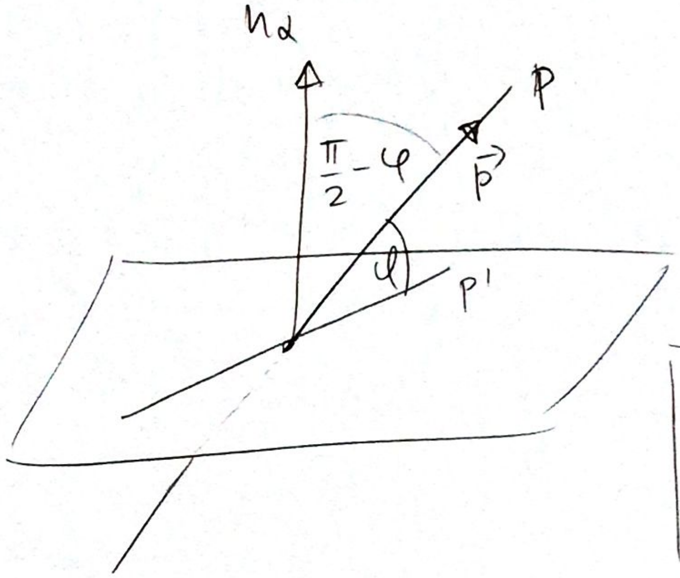
в) 3. Кеплеров закон $T^2 \sim a^3$

приближно

$$T \sim \sqrt{a \cdot a \cdot a} = \sqrt{64} = 8$$

Ако је ова елипса орбита неког небеског тела са већом полуосом 4 (било које мерне јединице) враћа се у почетни положај после периода $T = 8$

4

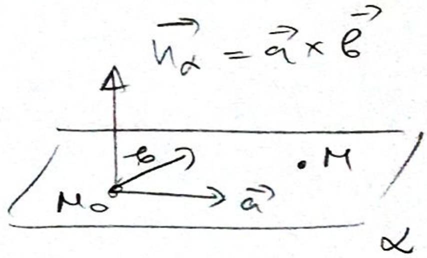


УГАО ИЗМЕЂУ ПРАВЕ И РАВНИ ЈЕ УГАО ИЗМЕЂУ ПРАВЕ p И ЊЕНЕ НОРМАЛНЕ ПРОЈЕКЦИЈЕ p' НА РАВАН α.

$$\boxed{\sphericalangle(p,\alpha)=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{|\vec{p}\circ\vec{n_\alpha}|}{\|\vec{p}\|\cdot\|\vec{n_\alpha}\|}}$$

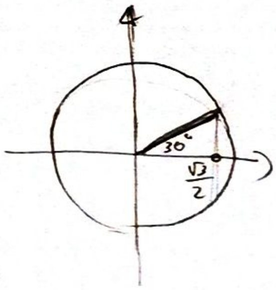
$p = PQ$ $\qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ПРОПОРЦИОНАЛАН}}}{\vec{p}\sim} \vec{PQ}=(2,0,-2) \qquad \vec{p}=(1,0,-1)$

$$\alpha: \begin{array}{l} x=t-2\\ y=s+2t-2 \qquad s,t\in\mathbb{R}\\ z=-s \end{array}$$



РАВАН ЈЕ ЗАДАТА ПАРАМЕТАРСКИ:

$$M(x,y,z)=(-2,-2,0)+t(1,2,0)+s(0,1,-1)$$
$$=M_0+t\vec{a}+s\vec{b}$$
$$\vec{n_\alpha}=\vec{a}\times\vec{b}=(-2,1,1)$$
$$\cos\sphericalangle(\vec{p},\vec{n_\alpha})=\frac{\vec{p}\circ\vec{n_\alpha}}{\|\vec{p}\|\cdot\|\vec{n_\alpha}\|}=\frac{-2-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}=\frac{-3}{2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\arccos\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$$



$$\sphericalangle(p,\alpha)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$