

Verovatnoća

1. Prostor elementarnih ishoda. Događaji i relacije i operacije sa njima

Slučajni eksperiment je kompleks uslova koji se mogu ponavljati, a ne dovode uvek do istog ishoda. **Elementarni ishod (događaj)** se ne definiše formalno kao tačke ili prave u geometriji, ali to je sve ono što logički može da se desi pri nekom slučajnom eksperimentu. Svi mogući ishodi jednog eksperimenta čine **prostor elementarnih ishoda** (Ω) tog slučajnog eksperimenta. On može biti **konačan**, **prebrojiv** i **neprebrojiv**. **Primer:**

1. bacanje dve kockice - konačan

- dobijene vrednosti: $\Omega_1 = \{11, 12, \dots, 16, \dots, 66\}$, $|\Omega_1| = 36$
- zbir dobijenih vrednosti: $\Omega_2 = \{2, 3, \dots, 12\}$, $|\Omega_2| = 11$
- broj šestica: $\Omega_3 = \{0, 1, 2\}$, $|\Omega_3| = 3$

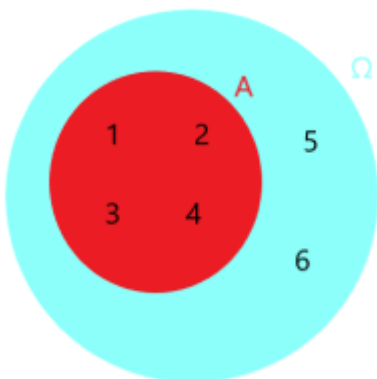
2. biranje broja iz nekog skupa sve dok ne odaberemo paran broj - prebrojiv

- $\Omega = \{2, 4, 6, \dots, 12, 14, 16, \dots\} \cup \{*\}$, $|\Omega| = \aleph_0$ (alef nula, kardinalnost skupa prirodnih brojeva N)

3. biranje broja iz skupa $[0, 1]$ - neprebrojiv

- $\Omega = [0, 1]$, $|\Omega| = c_0$ (kontinuum, kardinalnost skupa realnih brojeva R)

Primer: Posmatrajmo bacanje kockice. Skup elementarnih ishoda je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ako posmatramo samo vrednosti manje od 5, onda imamo događaj $A = \{1, 2, 3, 4\}$.



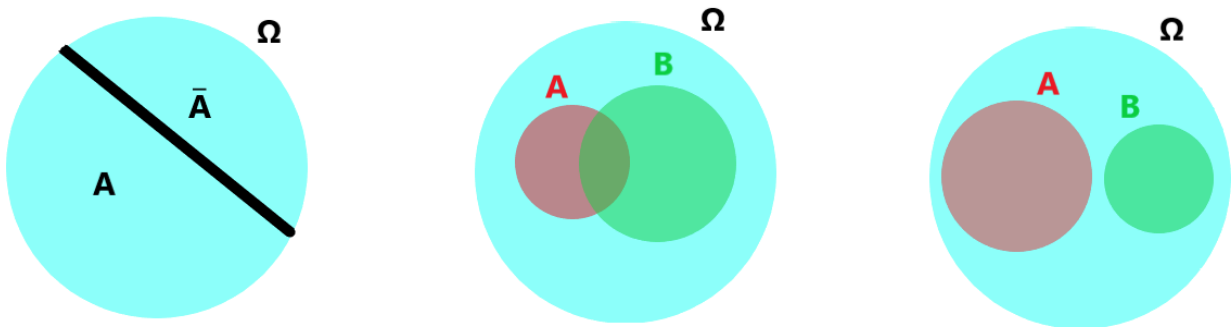
Događaj je podskup od Ω . Ako je Ω konačan ili prebrojiv, onda je svaki njegov podskup događaj. Kažemo da se događaj realizovao ako se desio elementarni ishod koji mu pripada. Posebni događaji su Ω koji se naziva **sigurni događaj** jer uvek mora da se desi, kao i \emptyset koji se naziva **nemogući događaj** jer se nikada ne može desiti.

Relacije:

1. **Inkluzija:** $A \subset B \rightarrow w \in A \Rightarrow w \in B$
2. **Ekvivalencija:** $A = B \rightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Operacije:

1. **Unarna operacija - suprotan događaj:** $\bar{A} = \{w \mid w \notin A\}$
2. **Binarne operacije:**
 - **presek:** $A \cdot B = \{w \mid w \in A \wedge w \in B\}$, realizuje se akko se realizovao svaki od događaja A i B.
 - **unija:** $A \cup B = \{w \mid w \in A \vee w \in B\}$, realizuje se akko se realizovao bar jedan od događaja A i B, odnosno akko postoji neki od događaja A i B koji se realizovao.
 - **zbir:** $A + B \rightarrow$ unija disjunktih događaja.



Moguće je uopštiti operacije i na n događaja, a važi i za $+\infty$:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i, \sum_{i=1}^n A_i$$

Zakoni:

- **zakon idempotencije:** $\overline{\bar{A}} = A$
- **De-Morganovi zakoni:** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2. σ -algebra događaja

Definicija: Neka je Ω prostor elementarnih ishoda nekog slučajnog eksperimenta i \mathcal{F} klasa podskupova od Ω . Ako:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (prebrojiva unija)

onda je \mathcal{F} **σ -algebra podskupova (događaja)** nad Ω . Ako umesto 3) važi $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$, onda je \mathcal{F} **algebra**.

Osobine:

- $\emptyset \in \mathcal{F}$
 \triangle : Na osnovu 1 važi $\Omega \in \mathcal{F}$, a pošto je $\overline{\Omega} = \emptyset$ na osnovu 2 sledi tvrđenje. ■
- $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (prebrojiv presek)
 \triangle : $\forall A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A_n} \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}} \in \mathcal{F} \xRightarrow{\text{de-Morgan}} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\overline{A_n}} \in \mathcal{F} \xRightarrow{\text{idempotencija}} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ ■
- $(\forall k \in \{1, \dots, n\}) A_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$ (konačna unija)
 \triangle : $\bigcup_{k=1}^n A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \dots \cup \emptyset$ što je prebrojiva unija skupova koji pripadaju \mathcal{F} pa na osnovu 3 sledi tvrđenje. ■
- $(\forall k \in \{1, \dots, n\}) A_k \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{F}$ (konačan presek)
 \triangle : $\bigcap_{k=1}^n A_k = A_1 \cap \dots \cap A_n \cap \Omega \cap \dots \cap \Omega$ što je prebrojivi presek skupova koji pripadaju \mathcal{F} pa na osnovu druge osobine sledi tvrđenje. ■

Nad istim prostorom može se definisati više σ -algebri. **Primer:**

- **trivijalna σ -algebra:** $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

Lema: Presek proizvoljnog broja σ -algebri definisanih nad istim prostorom elementarnih ishoda Ω je σ -algebra.

\triangle : Neka su \mathcal{F}_i σ -algebri. Dokazaćemo sva tri svojstva iz definicije σ -algebri za njihov presek:

1. $(\forall i \in I) \Omega \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$
2. $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall i \in I) A \in \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall i \in I) \overline{A} \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \overline{A} \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$
3. $(\forall n \in \mathbb{N}) A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall i \in I) A_n \in \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall i \in I) (\forall n \in \mathbb{N}) A_n \in \mathcal{F}_i \Rightarrow (\forall i \in I) \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_i \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ■

Unija dve σ -algebri nije uvek σ -algebra. **Primer:**

$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, B, \overline{B}, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, A, \overline{A}, B, \overline{B}, \Omega\}$, ali nemamo $A \cup B$.

Definicija: Neka je \mathcal{K} kolekcija podskupova od Ω koja nije σ -algebra. **Minimalna σ -algebra definisana kolekcijom \mathcal{K}** u oznaci $\sigma(\mathcal{K})$ je najmanja σ -algebra koja sadrži \mathcal{K} u smislu da za bilo koju drugu σ -algebru \mathcal{F} koja sadrži \mathcal{K} važi $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{F}$.

Teorema: Minimalna σ -algebra generisana kolekcijom \mathcal{K} uvek postoji.

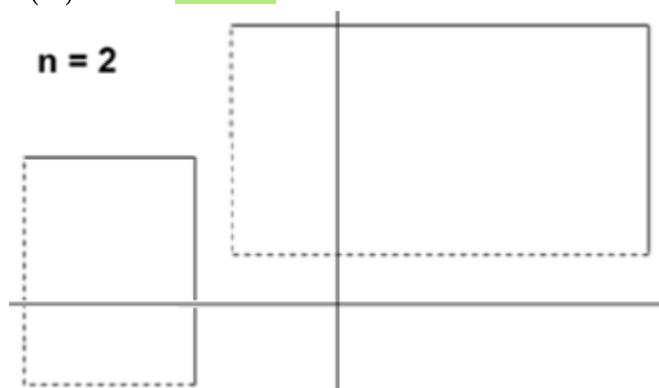
\triangle : Važi $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, gde je $\mathcal{P}(\Omega)$ σ -algebra. To znači da postoji bar jedna σ -algebra koja sadrži datu kolekciju. Obeležimo sa \mathcal{F}_i sve σ -algebri koje sadrže kolekciju \mathcal{K} . Njihov presek $\bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ će prema prethodnoj lemi takođe biti σ -algebra i sigurno će sadržati kolekciju \mathcal{K} jer je sadrži svaki od \mathcal{F}_i . Važi i da je ovo najmanja σ -algebra jer je presek svih drugih, pa ovo jeste minimalna σ -algebra generisana kolekcijom \mathcal{K} , tj. $\sigma(\mathcal{K}) = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$ ■

3. Borelova σ -algebra

Posmatrajmo prostor elementarnih ishoda $\Omega = \mathbb{R}$. Na tom skupu definišemo kolekciju $\mathcal{K} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ koja se sastoji od generatornih skupova koji sigurno ulaze u σ -algebru. Minimalna σ -algebra ovakve kolekcije naziva se **Borelova σ -algebra** u oznaci $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{K})$. Skupovi koji pripadaju Borelovoj σ -algebri nazivaju se **Borelovi skupovi**. Postoje podskupovi od \mathbb{R} koji ne pripadaju \mathcal{B} . Sledeći skupovi su Borelovi:

- $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, a]$, odnosno jednočlani skupovi pripadaju Borelovoj σ -algebri kao prebrojiv presek generatornih skupova.
- $[a, b] = \{a\} \cup (a, b]$, pa zatvoren interval pripada kao konačna unija Borelovih skupova.
- $(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$, gde je n_0 prvi takav da $b - \frac{1}{n_0} > a$. Otvoren interval je Borelov skup kao prebrojiva unija Borelovih skupova.
- $[a, b) = \{a\} \cup (a, b)$
- $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b - n, b)$. Isto važi i za $(-\infty, b]$.
- $(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, a + n)$. Isto važi i za $[a, +\infty)$.
- \mathbb{R} jer $\Omega = \mathbb{R}$, a $\Omega \in \mathcal{B}$.
- $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$
- I jer $\bar{I} = Q$, a $Q \in \mathcal{B}$.

Uopštenje na $\Omega = \mathbb{R}^n$: $\mathcal{K} = \{(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i < b_i\}$. Važi $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B}^n$. **Primer:**



4. Definicija verovatnoće. Osnovna svojstva verovatnoće

Definicija: Neka je Ω prostor elementarnih ishoda nekog slučajnog eksperimenta i neka je \mathcal{F} σ -algebra od Ω . Uređeni par (Ω, \mathcal{F}) naziva se **merljiv prostor**. Funkcija $P, P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, definisana na merljivom prostoru (Ω, \mathcal{F}) je **verovatnoća** ako važi:

1. **nenegativnost:** $(\forall A \in \mathcal{F}) P(A) \geq 0$
2. **normiranost:** $P(\Omega) = 1$

3. σ -aditivnost: $P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Na istom prostoru moguće je definisati više verovatnoća.

Teorema: Za verovatnoću P , $P: \mathcal{F} \rightarrow R$, važi:

a) **verovatnoća nemogućeg događaja:** $P(\emptyset) = 0$

Δ : $P(\emptyset) = P(\emptyset + \dots + \emptyset) \stackrel{3}{=} P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset)$. Nakon skraćivanja dobijamo $0 = P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset) \stackrel{3}{=} P(\emptyset + \dots + \emptyset) = P(\emptyset)$ ■

b) **konačna aditivnost:** $P(\sum_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k)$

Δ : $P(\sum_{k=1}^n A_k) = P(A_1 + \dots + A_n + \emptyset + \dots + \emptyset) \stackrel{3}{=} P(A_1) + \dots + P(A_n) + P(\emptyset) + \dots + P(\emptyset) \stackrel{a}{=} \sum_{k=1}^n P(A_k)$ ■

c) **verovatnoća suprotnog događaja:** $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Δ : $1 = P(\Omega) = P(A + \bar{A}) \stackrel{b}{=} P(A) + P(\bar{A}) \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ■

d) **monotonost:** $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Δ : $P(B) = P(A + \bar{A}B) \stackrel{b}{=} P(A) + P(\bar{A}B) \geq P(A)$ jer $P(\bar{A}B) \geq^1 0$ ■

e) **"nula" pravilo:** $(\forall A \in \mathcal{F}) 0 \leq P(A) \leq 1$

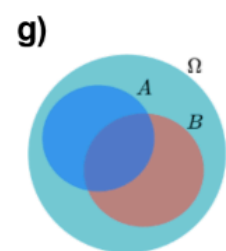
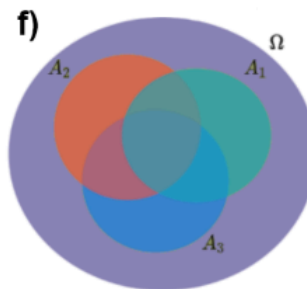
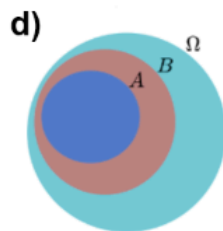
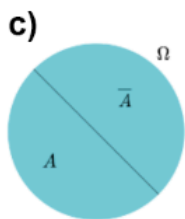
Δ : $(\forall A \in \mathcal{F}) \emptyset \subset A \subset \Omega \Rightarrow^d P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) \Rightarrow^{2,a} 0 \leq P(A) \leq 1$ ■

f) **lema o pokrivanju:** $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Δ : $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \dots) \stackrel{3}{=} P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + \dots \leq^d P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ jer $\bar{A}_1 A_2 \subset A_2$, $\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \subset A_3$, ... ■

g) **verovatnoća unije dva događaja:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Δ : $P(B) = P(AB + \bar{A}B) \stackrel{b}{=} P(AB) + P(\bar{A}B)$ (*). Važi $P(A \cup B) = P(A + \bar{A}B) \stackrel{b}{=} P(A) + P(\bar{A}B) \stackrel{*}{=} P(A) + P(B) - P(AB)$ ■



5. Formula uključenja i isključenja za verovatnoću. Svojstva neprekidnosti verovatnoće

Teorema: Za verovatnoću P , $P: \mathcal{F} \rightarrow R$, važi:

h) **formula uključenja i isključenja za verovatnoću:** $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

Δ : Dokazujemo putem matematičke indukcije. Baza $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) =$

$P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$ što važi na osnovu g). Pretpostavimo da formula važi za n (ih) i

dokažimo da važi i za $n + 1$: $P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^n A_i \cup A_{n+1}) \stackrel{g}{=} P(\bigcup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) -$

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{i=1}^n A_i(A_{n+1})) &=^{distr} P(\bigcup_{i=1}^n A_i) + P(A_{n+1}) - P(\bigcup_{i=1}^n A_i A_{n+1}) =^{ih} \sum_{i=1}^n P(A_i) - \\
&\sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n) + P(A_{n+1}) - (\\
&\sum_{i=1}^n P(A_i A_{n+1}) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_{n+1} A_j A_{n+1}) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_{n+1} A_j A_{n+1} A_k A_{n+1}) - \dots \\
&(-1)^{n-1} P(A_1 A_{n+1} \dots A_n A_{n+1})) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \\
&\dots (-1)^{n-1} P(A_1 \dots A_n) - \sum_{i=1}^n P(A_i A_{n+1}) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j A_{n+1}) - \dots \\
&(-1)^n P(A_1 \dots A_n A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) + \\
&\sum_{1 \leq i < j < k \leq n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots (-1)^n P(A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}) \blacksquare
\end{aligned}$$

i) **neprekidnost odozgo**: $A_1 \subset A_2 \subset \dots \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

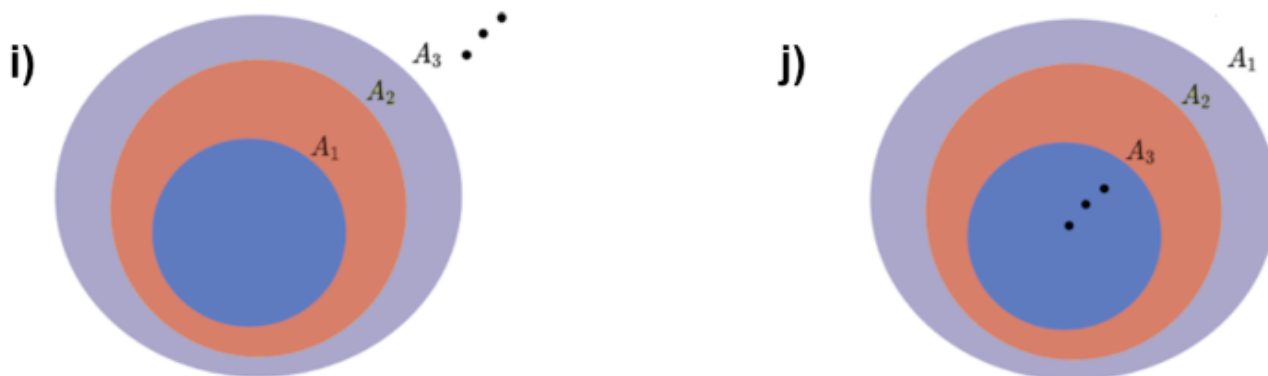
Δ : Pravimo redom disjunktne skupove: $B_1 = A_1$, $B_2 = \overline{A_1} A_2$, $B_3 = \overline{A_2} A_3$, ... Važi $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) =^3 \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) =^b \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sum_{i=1}^n B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ ■

j) **neprekidnost odozdo**: $A_1 \supset A_2 \supset \dots \Rightarrow P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$

Δ : Iz $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ znamo da važi $\overline{A_1} \subset \overline{A_2} \subset \dots$ pa važi: $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) =^c 1 - P(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n}) =^{de-Morgan} 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}) =^i 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P(\overline{A_n}) =^c 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P(A_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$ ■

k) **neprekidnost u nuli**: $A_1 \supset A_2 \supset \dots \wedge \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$

Δ : $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) =^j P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) =^a 0$ ■



6. Prostor verovatnoće. Diskretan prostor verovatnoće.

Geometrijska verovatnoća

Definicija (Kolmogorovljeva aksioma): Uređena trojka (Ω, \mathcal{F}, P) gde je Ω prostor elementarnih ishoda nekog slučajnog eksperimenta, \mathcal{F} σ -algebra podskupova od Ω , a $P: \mathcal{F} \rightarrow R$ verovatnoća, je **prostor verovatnoće (verovatnosni model)** tog slučajnog eksperimenta. Elementi od \mathcal{F} su **(slučajni) događaji**. Prostor verovatnoće zadat je unapred na osnovu iskustva, intuicije i matematičke statistike, a na osnovu njega se računaju verovatnoće složenijih događaja.

Definicija: Neka je $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$ najviše prebrojiv prostor elementarnih ishoda i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka su $p_i, i \in \{1, 2, \dots\}$, nenegativni realni brojevi pridruženi odgovarajućim elementarnim ishodima tako da je $\sum_i p_i = 1$. Funkcija $P: \mathcal{F} \rightarrow R$ definiše se na sledeći način: ako je $A = \{w_{j1}, w_{j2}, \dots\}$, onda je $P(A) = p_{j1} + p_{j2} + \dots$. Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ je **diskretan prostor verovatnoće**.

U slučaju diskretnog prostora verovatnoće sa konačno mnogo ishoda ti ishodi mogu biti **jednako verovatni** (npr. bacanje kockice) ili **nejednako verovatni** (npr. bacanje kockice obeležene sa 2 2 2 2 4 4). U slučaju jednako verovatnih ishoda verovatnoća nekog događaja A se može izračunati po formuli $P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj ukupnih ishoda}}$ i to se zove **klasična definicija verovatnoće**.

Primer (Paradoks De Merea): Kockica se baca 3 puta. Zašto verovatnoće da se dobiju zbir 11 i 12 nisu iste? De Mere je pogrešno primenio klasičnu definiciju verovatnoće računajući kao da su ishodi jednako verovatni, što nije slučaj. Na primer, dobijena kombinacija $\{1, 4, 6\}$ zapravo predstavlja sledeće ishode: $\{1, 4, 6\}, \{1, 6, 4\}, \{4, 1, 6\}, \{4, 6, 1\}, \{6, 1, 4\}, \{6, 4, 1\}$. Važi $\Omega = \{111, 112, \dots, 666\}$ pa je ukupan broj ishoda $6^3 = 216$ pa je verovatnoća pomenutog ishoda jednaka $\frac{6}{216}$. Slično važi i za ostale kombinacije:

$$\begin{aligned} 11 &= 6 + 4 + 1 \rightarrow 6 & 12 &= 6 + 5 + 1 \rightarrow 6 \\ &= 6 + 3 + 2 \rightarrow 6 & &= 6 + 4 + 2 \rightarrow 6 \\ &= 5 + 5 + 1 \rightarrow 3 & &= 6 + 3 + 3 \rightarrow 3 \\ &= 5 + 4 + 2 \rightarrow 6 & &= 5 + 5 + 2 \rightarrow 3 \\ &= 5 + 3 + 3 \rightarrow 3 & &= 5 + 4 + 3 \rightarrow 6 \\ &= 4 + 4 + 3 \rightarrow 3 & &= 4 + 4 + 4 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Dobija se $P(A_{11}) = \frac{27}{216}$ i $P(A_{12}) = \frac{25}{216}$ pa je verovatnije da se dobije zbir 11.

Primer: Bira se broj iz segmenta $[0, 1]$. Koja je verovatnoća da se dobije broj iz segmenta $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$? Verovatnoća ovog događaja je $\frac{1}{4}$.

Definicija: Ako je Ω deo prave (ravni, prostora) koji ima meru m - dužinu (površinu, zapreminu), onda se verovatnoća događaja A koji ima meru m računa kao $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$ i to se zove **geometrijska verovatnoća**. Ovde prostor elementarnih ishoda nije konačan pa se ne koristi klasična definicija verovatnoće.

7. Uslovna verovatnoća

Definicija: Uslovna verovatnoća događaja B pri uslovu A , tj. verovatnoća da se realizovao događaj B ako se realizovao događaj A , u oznaci $P(B|A)$, $P(A) > 0$, definiše se kao $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

Teorema: Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće nekog slučajnog eksperimenta. Za svaki događaj B , takav da je $P(B) > 0$, funkcija $P_B: \mathcal{F} \rightarrow R$ definisana sa $(\forall A \in \mathcal{F}) P_B(A) = P(A|B)$ je verovatnoća na (Ω, \mathcal{F}) .

\triangle : Dokazaćemo da za P_B važe sve tri osobine verovatnoće:

1. $(\forall A \in \mathcal{F}) P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$ jer $P(AB) \geq 0$ na osnovu osobine verovatnoće i $P(B) > 0$ na osnovu uslova iz definicije.
2. $P_B(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
3. $P_B(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{P((\sum_{n=1}^{\infty} A_n)B)}{P(B)} \stackrel{distr}{=} \frac{P(\sum_{n=1}^{\infty} A_n B)}{P(B)} \stackrel{3}{=} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n) \blacksquare$

Osobine:

a) $P(A|A) = 1$

$\triangle: P(A|A) = \frac{P(AA)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \blacksquare$

b) $A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$

$\triangle: P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \stackrel{A \subset B}{=} \frac{P(A)}{P(A)} = 1 \blacksquare$

c) $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$

$\triangle: P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{B}A)}$. Odavde važi $1 - P(B|A) = 1 - \frac{P(AB)}{P(AB)+P(\bar{B}A)} = \frac{P(AB)+P(\bar{B}A)-P(AB)}{P(AB)+P(\bar{B}A)} = \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = P(\bar{B}|A) \blacksquare$

d) $P(B_1 + B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$

$\triangle: P(B_1 + B_2|A) = \frac{P((B_1+B_2)A)}{P(A)} = \frac{P(B_1A+B_2A)}{P(A)} \stackrel{kon. adit.}{=} \frac{P(B_1A)+P(B_2A)}{P(A)} = \frac{P(B_1A)}{P(A)} + \frac{P(B_2A)}{P(A)} = P(B_1|A) + P(B_2|A) \blacksquare$

e) **formula množenja:** $P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$, $P(B) > 0$, $P(A) > 0$

\triangle : Direktno iz definicije \blacksquare

f) uopštena formula množenja:

$P(A_1 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$, $P(A_1 \dots A_{n-1}) > 0$

\triangle : Dokazujemo putem matematičke indukcije. Baza ($n = 2$) važi na osnovu e).

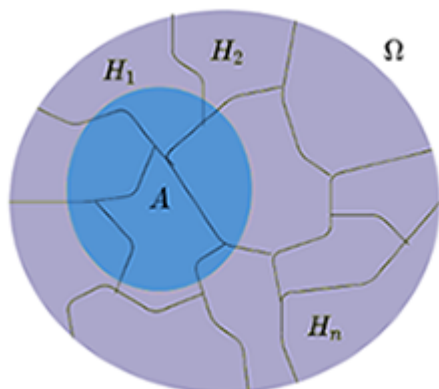
Pretpostavimo da formula važi za n (*ih*) i dokažimo da važi i za $n + 1$: $P(A_1 \dots A_{n+1}) =$

$P((A_1 \dots A_n)A_{n+1}) \stackrel{e}{=} P(A_1 \dots A_n)P(A_{n+1}|A_1 \dots A_n) \stackrel{ih}{=} P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})P(A_{n+1}|A_1 \dots A_n) \blacksquare$

$P(A_1)P(A_2|A_1) \dots P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})P(A_{n+1}|A_1 \dots A_n) \blacksquare$

8. Formula potpune verovatnoće. Bajesova formula

Teorema (Formula potpune verovatnoće): Neka su H_1, \dots, H_n disjunktni događaji takvi da je $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) P(H_i) > 0$ i $\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$. Tada za svaki događaj A važi da je $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i)$.



$$\triangle: P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \dots + H_n)) \stackrel{distr}{=} P(AH_1 + \dots + AH_n) \stackrel{kon. aditivnost}{=} P(AH_1) + \dots + P(AH_n) \stackrel{for. mn.}{=} P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n) = \sum_{i=1}^n P(H_i)P(A|H_i) \blacksquare$$

Formula se koristi kada računamo verovatnoću događaja pre koga se desilo nešto, pri čemu ne znamo šta se desilo ali znamo šta sve može da se desi. Događaj A možemo posmatrati kao posledicu, a događaje H_i kao uzroke (hipoteze). Formula važi i za prebrojivo mnogo H_i .

Teorema (Bajesova formula): Pri uslovima prethodne teoreme važi da je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)}.$$

$$\triangle: P(H_k|A) = \frac{P(H_k A)}{P(A)} \stackrel{for. mn.}{=} \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{P(A)} \stackrel{fpv}{=} \frac{P(H_k)P(A|H_k)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)} \blacksquare$$

Formula se koristi kada računamo verovatnoću da je neki od H_k uzrok događaja A , odnosno za nalaženje verovatnoća pojedinačnih hipoteza u odnosu na posledicu.

9. Nezavisnost događaja

Ako važi $P(A) = P(A|B)$ to znači da realizacija događaja B ne utiče na realizaciju događaja A . Iz ove jednakosti sledi $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, odakle sledi $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B|A)$ što znači da ni A ne utiče na događaj B .

Definicija: Događaji A i B iz istog prostora verovatnoće su **nezavisni** ako je $P(AB) = P(A)P(B)$.

Lema: Ako su A i B nezavisni događaji onda su i \bar{A} i B , A i \bar{B} i \bar{A} i \bar{B} nezavisni.

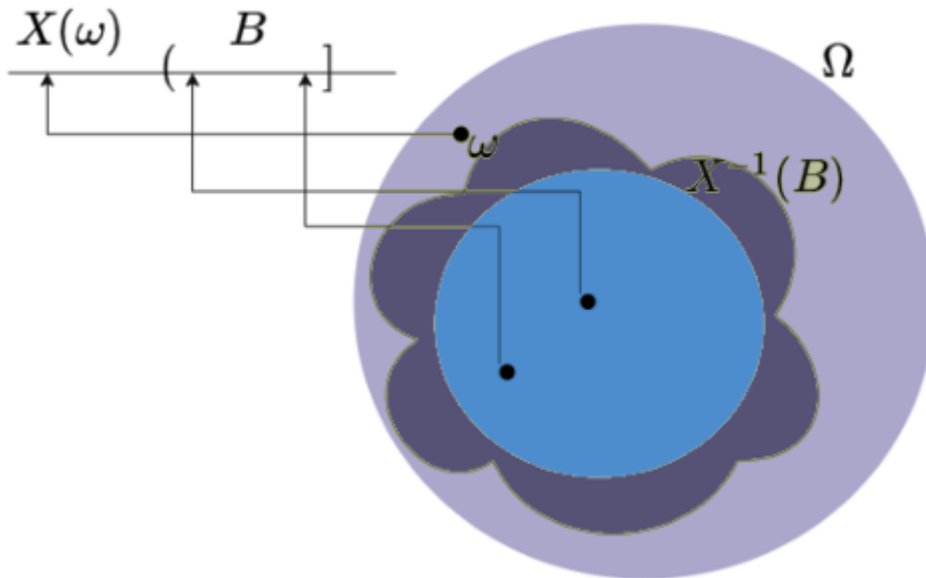
$\triangle:$

- $P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \stackrel{nez}{=} P(A)P(B) + P(\bar{A}B)$ odakle sledi da je $P(\bar{A}B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$ pa su \bar{A} i B nezavisni.
- A i B su nezavisni $\Rightarrow B$ i A su nezavisni $\Rightarrow^1 \bar{B}$ i A su nezavisni $\Rightarrow A$ i \bar{B} su nezavisni.
- A i B su nezavisni $\Rightarrow^1 \bar{A}$ i B su nezavisni $\Rightarrow B$ i \bar{A} su nezavisni $\Rightarrow^1 \bar{B}$ i \bar{A} su nezavisni $\Rightarrow \bar{A}$ i \bar{B} su nezavisni. \blacksquare

Definicija (Potpuna nezavisnost): Događaji iz neprazne kolekcije \mathcal{K} su potpuno nezavisni ako $(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq 2)$ i različite događaje A_{k1}, \dots, A_{kn} važi $P(A_{k1} \dots A_{kn}) = P(A_{k1}) \dots P(A_{kn})$. Za $|\mathcal{K}| = n$ imamo $\binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - \binom{n}{1} - \binom{n}{0} = 2^n - n - 1$ proveru. Ako važi nezavisnost za neko n ne mora da važi za $n + 1$ ili $n - 1$.

10. Slučajna veličina

Definicija: Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće i (R, \mathcal{B}) merljiv prostor. Funkcija $X: \Omega \rightarrow R$ je **slučajna veličina** ako $(\forall B \in \mathcal{B}) X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, $X^{-1}(B) = \{\omega | X(\omega) \in B\}$.



Teorema: Slučajna veličina X definisana na prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) definiše prostor verovatnoće (R, \mathcal{B}, P_x) gde je $P_x(B) = P(X^{-1}(B))$ (*).

Δ : Dokazujemo da je P_x verovatnoća na merljivom skupu (R, \mathcal{B}) :

1. $(\forall B \in \mathcal{B}) P_x(B) = P(X^{-1}(B)) \geq 0$ jer je P verovatnoća
2. $P_x(R) = P(X^{-1}(R)) = P(\Omega) = 1$
3. $P_x(\sum_{n=1}^{\infty} B_n) = P(X^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} B_n)) = P(\sum_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n)) \stackrel{\sigma \text{ adit.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}(B_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P_x(B_n) \blacksquare$

Definicija: Funkcija $P_X: \mathcal{B} \rightarrow R$ definisana kao (*) zove se **raspodela verovatnoće** slučajne veličine X . Ako znamo raspodelu verovatnoće slučajne veličine znamo sve o toj slučajnoj veličini.

Definicija: Funkcija $F_X: R \rightarrow R$ definisana sa $(\forall x \in R) F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P\{X \leq x\}$ je **funkcija raspodele verovatnoće** slučajne veličine X . Ako znamo funkciju raspodele verovatnoće slučajne veličine znamo sve o toj slučajnoj veličini i obrnuto.

Teorema: Za funkciju raspodele verovatnoće F_X slučajne veličine X važi da je:

1. **neopadajuća:** $x_1 < x_2 \Rightarrow F_X(x_1) < F_X(x_2)$
2. **levo teži nuli, a desno jedinici:** $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
3. **neprekidna zdesna:** $(\forall x_0 \in R) \lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$

Δ :

1. $x_1 < x_2 \Rightarrow (-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2] \Rightarrow^{mon. P_X} P_X((-\infty, x_1]) \leq P_X((-\infty, x_2]) \Rightarrow F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \Rightarrow F_X$ je neopadajuća.

2. Prema Hajneu važi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow (\forall x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b$. Treba da dokažemo $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, odnosno po Hajneu treba dokazati $(\forall x_n) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = 0$, međutim pošto je F_X monotono neopadajuća dovoljno je ovo dokazati za svaki opadajući niz: $(\forall x_n) x_n \searrow -\infty \Rightarrow \dots < x_2 < x_1 \Rightarrow (-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \supset \dots$ pa važi $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X((-\infty, x_n]) \stackrel{\text{nepr. odozdo}}{=} P_X(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]) = P_X(\emptyset) = 0 \Rightarrow \stackrel{\text{Hajne}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0}$. Sada dokazujemo $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$. Zbog monotonosti je dovoljno pokazati da ovo važi za svaki rastući niz koji teži $+\infty$: $(\forall x_n) x_n \nearrow +\infty \Rightarrow x_1 < x_2 < \dots \Rightarrow (-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2] \subset \dots$ pa važi $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X((-\infty, x_n]) \stackrel{\text{nepr. odozgo}}{=} P_X(\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]) = P_X(R) = 1 \Rightarrow \stackrel{\text{Hajne}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1}$.
3. Zbog monotonosti znamo da važi $(\forall x_n \searrow x_0) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ pa na osnovu Hajnea treba dokazati $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = F_X(x_0)$: $x_0 \leq \dots < x_2 < x_1 \Rightarrow (-\infty, x_1] \supset (-\infty, x_2] \supset \dots$ pa važi $\lim_{n \rightarrow \infty} F_X(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X((-\infty, x_n]) \stackrel{\text{nepr. odozdo}}{=} P_X(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, x_n]) = P_X((-\infty, x_0]) = F_X(x_0) \Rightarrow \stackrel{\text{Hajne}}{\lim_{x \rightarrow x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)}$. ■

Važi i obrnuto, ako neka funkcija ima ove tri osobine, onda je ona funkcija raspodele neke slučajne veličine.

11. Osnovni tipovi slučajnih veličina. Primeri

Definicija: Slučajna veličina X je **diskretna** ako postoji najviše prebrojiv skup $S = \{a_1, a_2, \dots\}$ tako da $P\{x \notin S\} = 0$. Diskretna slučajna veličina "uzima" konačno ili prebrojivo mnogo različitih vrednosti.

Zakon raspodele slučajne veličine:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

ili $P\{X = a_i\} = p_i, i = \overline{1, n}$. Postoji samo za diskretne slučajne veličine i važi $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) p_i > 0$ i $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ (za konačan broj vrednosti).

Funkcija raspodele ima stepenast oblik:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ p_1, & a_1 \leq x < a_2 \\ p_1 + p_2, & a_2 \leq x < a_3 \\ \dots & \\ 1, & x \geq a_n \end{cases}$$

Primeri:

- **Konstantna slučajna veličina** $X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$, tj. uzima vrednost c sa verovatnoćom 1.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ 1, & x \geq c \end{cases}$$

- **Indikator događaja** A : $I_A(w) = \begin{cases} 0, & w \notin A \\ 1, & w \in A \end{cases}$, tj. uzima vrednost 1 ako se A realizovao, a 0 ako nije. Zakon raspodele: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(A) & P(A) \end{pmatrix}$. Po uzoru na indikator događaja postoje

indikatorske (Bernulijeve) slučajne veličine ili prosto **indikator**: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - p & p \end{pmatrix}$

- Slučajna veličina X meri broj uspeha u n nezavisnih pokušaja, a verovatnoća ostvarivanja svakog je p . Do zakona raspodele dolazimo na sledeći način: skup elementarnih ishoda je $\Omega = \{0\dots 0, 10\dots 0, \dots, 1\dots 1\}$. Primećujemo da ishodi nisu jednako verovatni pa ne možemo koristiti klasičnu definiciju verovatnoće. Skup povoljnih ishoda ako posmatramo k uspeha je $\{1\dots 10\dots 0, 10011\dots 01, \dots, 0\dots 01\dots 1\}$, gde u svakom članu imamo k jedinica (uspeha) i $n - k$ nula (neuspeha) pa je verovatnoća svakog ishoda $p^k(1 - p)^{n-k}$. Ukupno ih ima $\binom{n}{k}$ pa dobijamo $P\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $n \in N \cup \{0\}$, $p \in [0, 1]$. Ova slučajna veličina ima **binomnu raspodelu**: $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- Slučajna veličina X meri broj pokušaja do prvog uspeha, gde je verovatnoća uspeha svakog nezavisnog pokušaja p . Ako tražimo verovatnoću uspeha u k -tom pokušaju, onda imamo $k - 1$ neuspeha nakon čega sledi uspeh pa važi $P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p$, $k \in N$. Slučajna veličina ima **geometrijsku raspodelu**: $X \sim \mathcal{G}(p)$.
- Slučajna veličina X meri broj uspeha u nekom vremenskom intervalu, gde je prosečan broj uspeha λ . Ova slučajna veličina ima **Puasonovu raspodelu**: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ i važi $P\{X = k\} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, $k \in N \cup \{0\}$.

Definicija: Slučajna veličina X je **apsolutno-neprekidna** ako postoji nenegativna funkcija $f_X: R \rightarrow R$ takva da je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$. Ova funkcija naziva se **gustina raspodele verovatnoće** slučajne veličine X i postoji samo za apsolutno-neprekidne slučajne veličine. Ako znamo gustinu raspodele verovatnoće slučajne veličine, onda znamo sve o toj slučajnoj veličini. Apsolutno-neprekidna slučajna veličina "uzima" neprebrojivo mnogo različitih vrednosti, ali nije svaka slučajna veličina koja "uzima" neprebrojivo mnogo različitih vrednosti apsolutno-neprekidna.

Ako znamo gustinu onda znamo i funkciju raspodele i obrnuto. Iz Njtn-Lajbnicove formule sledi:

1. za svaku tačku neprekidnosti f_X važi $F'_X(x) = f_X(x)$
2. F_X je neprekidna

Osobine gustine:

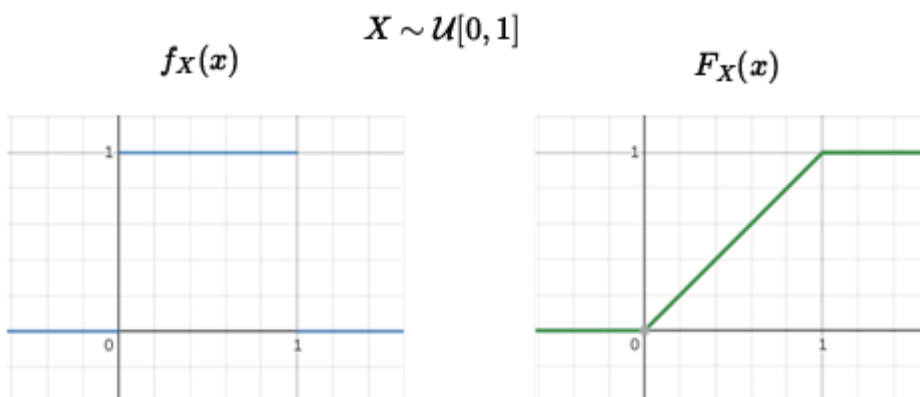
1. $(\forall x \in R) f_X(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$

Ako neka funkcija ima ove osobine ona je funkcija gustine neke slučajne veličine. Takođe važi i $P\{X = a\} = 0$ pa je $P\{a < x \leq b\} = P\{a \leq x \leq b\} = P\{a \leq x < b\} = P\{a < x < b\}$.

Primeri:

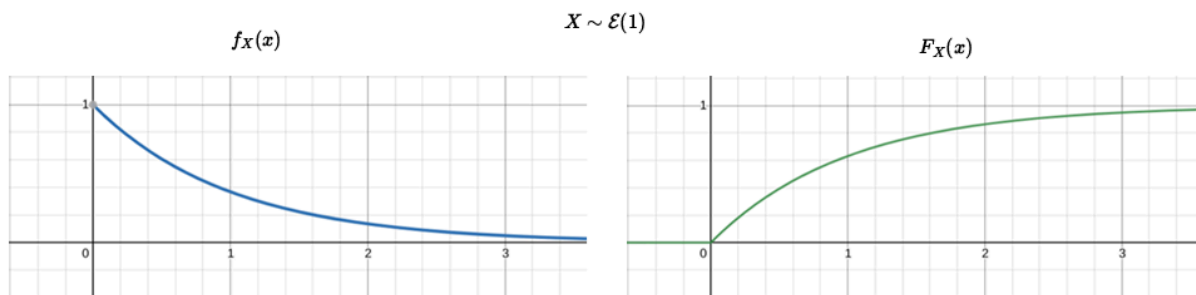
- **Uniformna (ravnomerna) raspodela:** $X \sim \mathcal{U}[a, b], a < b$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, x \in [a, b], F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$



- **Eksponencijalna raspodela:** $X \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0, F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$



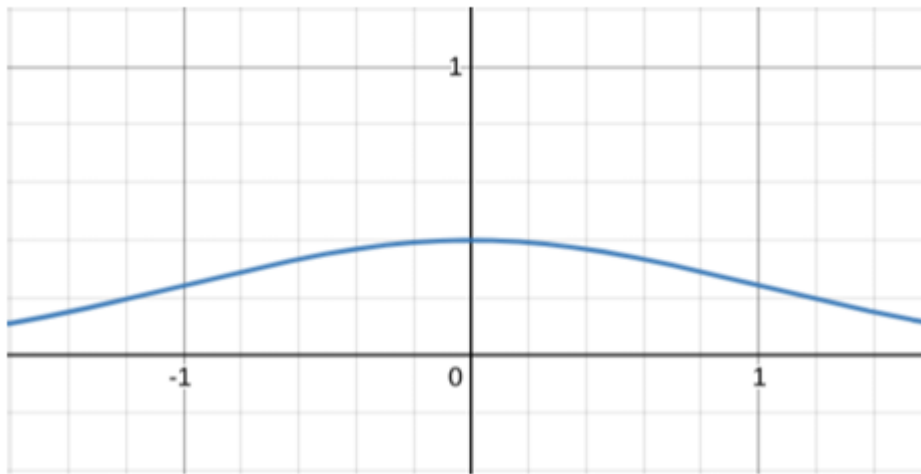
- **Normalna (Gausova) raspodela:** $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2), m \in R, \sigma > 0$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}, x \in R, F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, t \in R$$

Predstavnik je **standardna normalna raspodela:** $X^* \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$f_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Nije moguće rešiti integral i dobiti funkciju raspodele normalne raspodele, već se koriste statističke tablice. Tablice postoje samo za standardnu normalnu raspodelu, a vrednosti za ostale se dobijaju preko nje koristeći sledeću lemu.

Lema: Ako X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, onda $\frac{X-m}{\sigma}$ ima $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu.

$$\begin{aligned} \triangle: & \text{Neka je } Y = \frac{X-m}{\sigma}. \text{ Za } (\forall x \in \mathbb{R}) \text{ važi } F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\left\{\frac{X-m}{\sigma} \leq x\right\} = P\{X \leq \sigma x + m\} \\ & = \int_{-\infty}^{\sigma x + m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(t-m)^2}{\sigma^2}} dt = \left(\begin{matrix} t = \sigma s + m \\ dt = \sigma ds \end{matrix} \right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\sigma s + m - m)^2}{\sigma^2}} \sigma ds = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \\ & F_{X^*}(x) \Rightarrow \frac{X-m}{\sigma} = X^* : \mathcal{N}(0, 1) \blacksquare \end{aligned}$$

12. Višedimenzionalna slučajna veličina. Borelova funkcija slučajnih veličina

Definicija: Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće i (R^n, \mathcal{B}^n) merljiv prostor. Funkcija $X : \Omega \rightarrow R^n$ je **n -dimenzionalna slučajna veličina** ako $(\forall B \in \mathcal{B}^n) X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Teorema: Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće i $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow R$ funkcije. Tada važi da je (X_1, \dots, X_n) n -dimenzionalna slučajna veličina akko je za svako $i \in \{1, \dots, n\}$ X_i slučajna veličina.

$\triangle:$

$\Rightarrow:$

$$\begin{aligned} & \text{Za proizvoljno } i \in \{1, \dots, n\} \text{ važi } (\forall B \in \mathcal{B}) X_i^{-1}(B) = \{w | X_i(w) \in B\} = \\ & \{w | X_1(w) \in R, \dots, X_{i-1}(w) \in R, X_i(w) \in B, X_{i+1}(w) \in R, \dots, X_n(w) \in R\} = \\ & \{w | (X_1(w), \dots, X_i(w), \dots, X_n(w)) \in R \times \dots \times R \times B \times R \times \dots \times R\} = \\ & \{w | (X_1, \dots, X_n)(w) \in R \times \dots \times R \times B \times R \times \dots \times R\} = \\ & \{w | X(w) \in R \times \dots \times R \times B \times R \times \dots \times R\} = X^{-1}(R \times \dots \times R \times B \times R \times \dots \times R) \\ & \in \mathcal{F} \text{ jer je } X \text{ } n\text{-dimenzionalna slučajna veličina, pa sledi da je } X_i \text{ slučajna veličina.} \end{aligned}$$

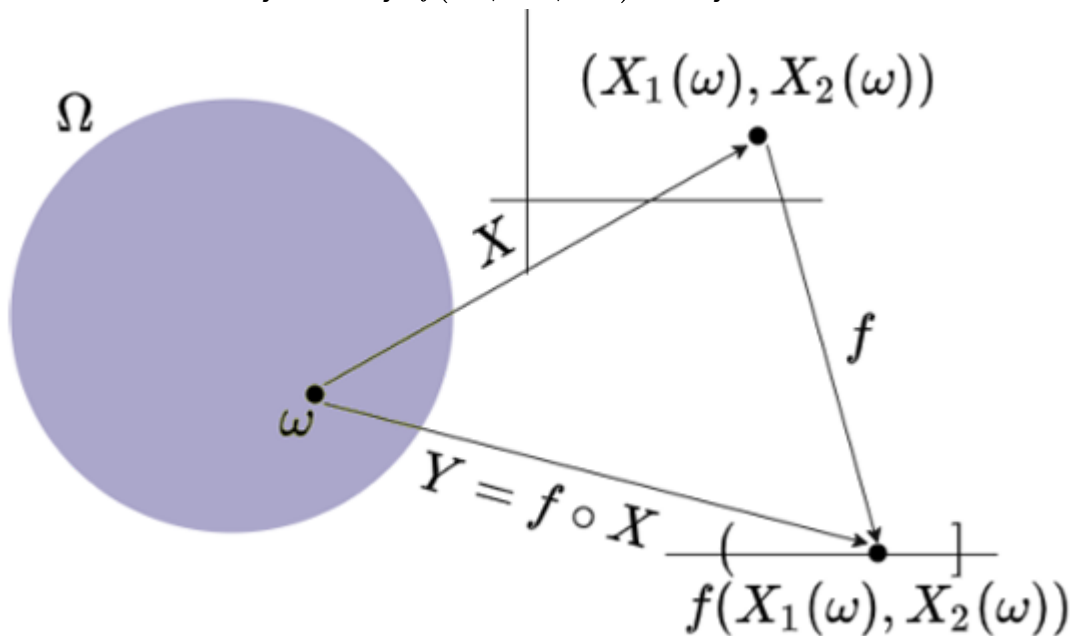
$\Leftarrow:$

Dokazaćemo da teorema važi za gradivne skupove, tj. za svako $I_n = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$. Borelovi skupovi se mogu dobiti kao konačni ili beskonačni presek ili unija ili kao komplementaran skup i slično, pa će teorema na osnovu toga važiti i za njih. Važi $X^{-1}(I_n) =$

$\{w | X(w) \in (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]\} = \{w | (X_1, \dots, X_n)(w) \in (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]\} =$
 $\{w | X_1(w) \in (a_1, b_1], \dots, X_n(w) \in (a_n, b_n]\} = \{w | X_1(w) \in (a_1, b_1]\} \cap \dots \cap$
 $\{w | X_n(w) \in (a_n, b_n]\} = X_1^{-1}((a_1, b_1]) \cap \dots \cap X_n^{-1}((a_n, b_n])$. Svi elementi preseka pripadaju \mathcal{F} jer su X_i slučajne veličine, pa i $X^{-1}(I_n) \in \mathcal{F}$ kao konačan presek. ■

Definicija: Funkcija $f: R^n \rightarrow R$ je **Borelova** ako $(\forall B \in \mathcal{B}) f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$. Na primer, svaka neprekidna funkcija je Borelova.

Teorema: Neka je (Ω, \mathcal{F}, P) prostor verovatnoće i $X_1, \dots, X_n: \Omega \rightarrow R$ slučajne veličine i $f: R^n \rightarrow R$ Borelova funkcija. Tada je $f(X_1, \dots, X_n)$ slučajna veličina.



Δ : $(\forall B \in \mathcal{B})(f \circ X)^{-1}(B) = X^{-1} \circ f^{-1}(B) = X^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathcal{F}$ jer $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$ jer je f Borelova. ■

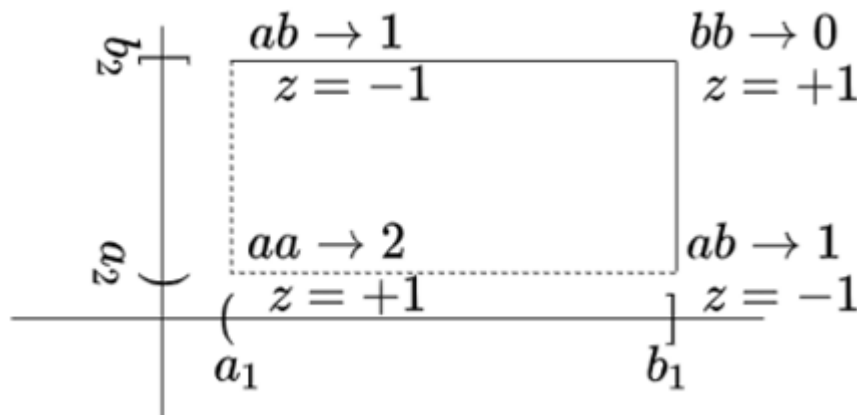
Definicija: Neka je X n -dimenzionalna slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) i neka je (R^n, \mathcal{B}^n) merljiv prostor. Funkcija $P_X: \mathcal{B}^n \rightarrow R$ definisana sa $(\forall B \in \mathcal{B}^n) P_X(B) = P\{X^{-1}(B)\}$ zove se **raspodela verovatnoće n -dimenzionalne slučajne veličine X** .

Definicija: Neka je X n -dimenzionalna slučajna veličina definisana na prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) i neka je (R^n, \mathcal{B}^n) merljiv prostor. Funkcija $F_X: R^n \rightarrow R$ definisana sa $(\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n) F_X((x_1, \dots, x_n)) = P_X((-\infty, x_1] \times \dots \times (-\infty, x_n]) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$ zove se **funkcija raspodele verovatnoće n -dimenzionalne slučajne veličine X** . Znamo sve o n -dimenzionalnoj slučajnoj veličini ako znamo bar jednu od ove dve funkcije.

Teorema: Za funkciju raspodele F_X definisanu kao iznad važe svojstva:

1. $(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \lim_{x_i \rightarrow -\infty} F_X(x_1, \dots, x_n) = 0$
2. $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F_X(x_1, \dots, x_n) = 1$
3. neprekidna je zdesna po svakoj koordinati
4. za svaki n -dimenzionalni interval $I_n = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n]$ i njegova temena $T = \{x | x = (x_1, \dots, x_n), \forall i \in \{1, \dots, n\} x_i \in (a_i, b_i]\}$ važi da je

$\Delta_{F_X}(I_n) = \sum_{x \in T} Z_{I_n}(x) F_X(x) \geq 0$, gde je $Z_{I_n}(x) = \begin{cases} -1, & \text{broj } a_i \text{ neparan} \\ 1, & \text{broj } a_i \text{ paran} \end{cases}$. Na primer, za $n = 2$, tj. $I = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ važi

$$\Delta_{F_X}(I) = F_X(b_1, b_2) - F_X(b_1, a_2) - F_X(a_1, b_2) + F_X(a_1, a_2).$$


Diskretne višedimenzionalne slučajne veličine uzimaju konačno ili prebrojivo mnogo vrednosti. Zakon raspodele se najčešće zapisuje u obliku tablice.

Apsolutno-neprekidne višedimenzionalne slučajne veličine uzimaju neprebrojivo mnogo vrednosti. Za gustinu $f_X : R^n \rightarrow R$ važi $(\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n) f_X(x_1, \dots, x_n) \geq 0$. Funkcija raspodele je $F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n$. Važi:

- $(\forall B \in \mathcal{B}^n) P\{X \in B\} = \int \dots \int_B f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$
- $\int \dots \int_{R^n} f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$
- za svaku tačku neprekidnosti f_X važi $f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$

13. Marginalna raspodela

Definicija: Marginalna raspodela je raspodela bilo kog podvektora n -dimenzionalne slučajne veličine. Ako znamo raspodelu n -dimenzionalne slučajne veličine lako možemo naći bilo koju njenu marginalnu raspodelu, dok obrnuto ne važi.

Diskretan slučaj ($n = 2$) - znamo $P\{X = x_i, Y = y_j\}$ za $\forall i, j$. Važi:

- $P\{X = x_i\} = \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\}$
- $P\{Y = y_j\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\}$

Apsolutno-neprekidan slučaj ($n = 2$) - znamo $f_{X,Y}(x, y)$ za $\forall x, y \in R$. Važi:

- $F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{X \leq x, Y \in R\} = \int_{-\infty}^x (\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, y) dy) du$ pa kad uradimo parcijalni izvod po X dobijamo $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$

14. Uslovna raspodela

Uslovna verovatnoća: $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, $P(B) > 0$, pa u opštem slučaju ako znamo (X, Y) onda važi da je **uslovna raspodela** $F_{X|Y \in B}(x) = \frac{P\{X \leq x, Y \in B\}}{P\{Y \in B\}}$, $P\{Y \in B\} > 0$.

Diskretni slučaj - važi:

- $P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}$, $P\{Y = y_j\} > 0$
- $P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}$, $P\{X = x_i\} > 0$
- formula množenja: $P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i | Y = y_j\} P\{Y = y_j\} = P\{Y = y_j | X = x_i\} P\{X = x_i\}$

Apsolutno-neprekidni slučaj - za potrebe izvođenja podsetimo se posledice prve teoreme o srednjoj vrednosti: $f \in C(a, b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) \int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$.

- Ako je $f_X(x) > 0$ i ako su $f_X(x)$ i $f_{X,Y}(x, y)$ neprekidne u okolini x onda važi $F_{Y|X=x}(y) = \lim_{h \rightarrow 0} F_{Y|x-h \leq X \leq x+h}(y) = \lim_{h \rightarrow 0} P\{Y \leq y | x-h \leq X \leq x+h\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P\{x-h \leq X \leq x+h, Y \leq y\}}{P\{x-h \leq X \leq x+h\}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^y dv \int_{x-h}^{x+h} f_{X,Y}(u, v) du}{\int_{x-h}^{x+h} f_X(u) du} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^y (x+h-(x-h)) f_{X,Y}(c_1, v) dv}{(x+h-(x-h)) f_X(c_2)} = \int_{-\infty}^y \frac{f_{X,Y}(x, v)}{f_X(x)} dv$, pri čemu je $x-h \leq c_1, c_2 \leq x+h$. Parcijalnim izvodom po Y dobijamo $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$
- $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$

Lema: Uslovna gustina raspodele definisana kao iznad je gustina raspodele.

△:

- $(\forall y \in R) f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} > 0$ jer $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ (gustina) i $f_X(x) > 0$ (po definiciji).
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X=x}(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy = \frac{1}{f_X(x)} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \frac{1}{f_X(x)} \cdot f_X(x) = 1$ ■

15. Nezavisnost slučajnih veličina

Definicija: Slučajne veličine X_1, \dots, X_n definisane na istom prostoru verovatnoće

(Ω, \mathcal{F}, P) su **nezavisne** ako za proizvoljne $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ važi $P\{x_1 \in B_1, \dots, x_n \in B_n\} = P\{x_1 \in B_1\} \cdot \dots \cdot P\{x_n \in B_n\}$

Teorema: Neka su F_{X_1}, \dots, F_{X_n} funkcije raspodele slučajnih veličina X_1, \dots, X_n definisanih na istom prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) i F_{X_1, \dots, X_n} funkcija raspodele n -dimenzionalne slučajne veličine (X_1, \dots, X_n) . Slučajne veličine X_1, \dots, X_n su nezavisne akko $(\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n) F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$

Teorema: Diskretne slučajne veličine X_1, \dots, X_n definisane na istom prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) su nezavisne akko

$$(\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n) P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = P\{X_1 = x_1\} \cdot \dots \cdot P\{X_n = x_n\}$$

Teorema: Neka su f_{X_1}, \dots, f_{X_n} gustine raspodele slučajnih veličina X_1, \dots, X_n definisanih na istom prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) i f_{X_1, \dots, X_n} gustina raspodele n -dimenzionalne slučajne veličine (X_1, \dots, X_n) . Apsolutno-neprekidne slučajne veličine X_1, \dots, X_n su nezavisne akko skoro svuda važi

$$(\forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

Teorema: Neka su $f, g : R \rightarrow R$ Borelove funkcije i X i Y nezavisne slučajne veličine. Tada su i $f(X)$ i $g(Y)$ nezavisne slučajne veličine.

△:

$(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}) P\{f(X) \in B_1, g(Y) \in B_2\} = P\{X \in f^{-1}(B_1), Y \in g^{-1}(B_2)\}$. Funkcije f i g su Borelove pa $f^{-1}(B_1), g^{-1}(B_2) \in \mathcal{B}$ pa na osnovu nezavisnosti važi da je prethodna verovatnoća jednaka $P\{X \in f^{-1}(B_1)\}P\{Y \in g^{-1}(B_2)\} = P\{f(X) \in B_1\}P\{g(Y) \in B_2\}$ pa su $f(X)$ i $g(Y)$ nezavisne slučajne veličine. ■

16. Matematičko očekivanje. Osnovna svojstva. Primeri

Matematičko očekivanje predstavlja srednju vrednost oko koje se ostale vrednosti grupišu. Veliki broj puta (n) vršimo eksperiment i dobijamo sledeće rezultate:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ n_1 & n_2 & \dots & n_k \end{array}, \quad n_1 + \dots + n_k = n$$

$$\frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_k n_k}{n} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \frac{n_k}{n} \approx x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k$$

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$$

Definicija: Neka je X diskretna slučajna veličina koja uzima konačno mnogo vrednosti i za čiji zakon raspodele važi $X : \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$. Matematičko očekivanje ove slučajne veličine definiše se kao $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P\{X = x_k\} = \sum_{k=1}^n x_k p_k$

Definicija: Neka je X diskretna slučajna veličina koja uzima prebrojivo mnogo vrednosti i za čiji zakon raspodele važi $P\{X = x_n\} = p_n, n \in N$. Matematičko očekivanje ove slučajne veličine definiše se kao $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n P\{X = x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n$, ako ovaj red apsolutno konvergira, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n < +\infty$.

Teorema: Ako je X diskretna slučajna veličina i $\varphi : R \rightarrow R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X)) = \sum_n \varphi(x_n) P\{X = x_n\}$, ako ovaj red apsolutno konvergira.

Teorema: Ako je (X, Y) dvodimenzionalna diskretna slučajna veličina i $\varphi : R^2 \rightarrow R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X, Y)) = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\}$, ako ovaj red apsolutno konvergira.

Primer:

- Indikator $I : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, $E(I) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$
- Binomna raspodela $X : \mathcal{B}(n, p)$, $E(X) = \sum_{k=0}^n k P\{X = k\} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = (k-1 = s) = np \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p^s (1-p)^{n-1-s} = np(p + 1 - p)^{n-1} = np$
- Puasonova raspodela $X : \mathcal{P}(\lambda)$, $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = (k-1 = s) = \lambda \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^s}{s!} = \lambda$ jer je suma zbir verovatnoća Puasonove raspodele pa je jednaka 1.

Definicija: Matematičko očekivanje apsolutno-neprekidne slučajne veličine X , čija je gustina $f_X(x)$ se definiše kao $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$, ako ovaj integral apsolutno konvergira, tj. $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx < +\infty$.

Teorema: Ako je X apsolutno-neprekidna slučajna veličina čija je gustina $f_X(x)$ i $\varphi : R \rightarrow R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x) dx$, ako ovaj integral apsolutno konvergira.

Teorema: Ako je (X, Y) dvodimenzionalna apsolutno-neprekidna slučajna veličina čija je gustina $f_{X,Y}(x, y)$ i $\varphi : R^2 \rightarrow R$ Borelova funkcija, onda je $E(\varphi(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$, ako ovaj integral apsolutno konvergira.

Primer:

- Uniformna raspodela $X : \mathcal{U}[a, b]$, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \dots = \frac{a+b}{2}$
- Eksponencijalna raspodela $X : \mathcal{E}(\lambda)$, $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $E(X) = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(\begin{matrix} \lambda x = t \\ \lambda dx = dt \end{matrix} \right) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\lambda} e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda} \cdot 1! = \frac{1}{\lambda}$
- Normalna raspodela $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $E(X) = m$
- Košijeva raspodela $f_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$, $x \in R$, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \left(\begin{matrix} 1+x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\infty}^1 \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \ln |t| \Big|_1^{+\infty} - \frac{1}{2\pi} \ln |t| \Big|_1^{+\infty} = \infty - \infty \Rightarrow$ nema očekivanje.
- $X : \mathcal{E}(\lambda)$, $Y : \min\{1, X\}$, $E(Y) = E(\min\{1, X\}) = \int_0^{\infty} \min\{1, X\} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^1 x \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(\begin{matrix} -\lambda x = t \\ -\lambda dx = dt \end{matrix} \right) = \dots = \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$

Teorema: Za proizvoljne slučajne veličine za koje postoji očekivanje važi:
(dokaz za diskretne, a slično se dokazuje i za apsolutno-neprekidne slučajne veličine)

a) $E(c) = c$

△:

$$X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E(X) = 1 \cdot c = c \blacksquare$$

b) $E(cX) = cE(X)$

△:

$$cX = \varphi(X) \Rightarrow E(cX) = \sum_k c x_k P\{X = x_k\} = c \sum_k x_k P\{X = x_k\} = cE(X) \blacksquare$$

c) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

△:

$$\begin{aligned} X + Y &= \varphi(X, Y) \Rightarrow E(X + Y) = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) P\{X = x_i, Y = y_j\} = \\ &= \sum_i \sum_j x_i P\{X = x_i, Y = y_j\} + \sum_i \sum_j y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i x_i \sum_j P\{X = x_i, Y = y_j\} \\ &+ \sum_j y_j \sum_i P\{X = x_i, Y = y_j\} = \sum_i x_i P\{X = x_i\} + \sum_j y_j P\{Y = y_j\} = E(X) + E(Y) \blacksquare \end{aligned}$$

d) $E(cX + b) = cE(X) + b$

△:

$$E(cX + b) =^c E(cX) + E(b) =^{a, b} cE(X) + b \blacksquare$$

e) $(\forall w \in \Omega) X(w) \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0$

△:

$$E(X) = \sum_k x_k P\{X = x_k\} \geq 0 \text{ jer } x_k \geq 0 \text{ (pretpostavka) i } P\{X = x_k\} \geq 0 \text{ (verovatnoća)} \blacksquare$$

f) $(\forall w \in \Omega) X(w) \geq Y(w) \Rightarrow E(X) \geq E(Y)$

△:

$$\begin{aligned} (\forall w \in \Omega) X(w) \geq Y(w) &\Rightarrow (\forall w \in \Omega) X(w) - Y(w) \geq 0 \Rightarrow (\forall w \in \Omega) (X - Y)(w) \geq 0 \Rightarrow^e \\ E(X - Y) &\geq 0 \Rightarrow E(X + (-Y)) \geq 0 \Rightarrow^c E(X) + E(-Y) \geq 0 \Rightarrow^b E(X) - E(Y) \geq 0 \Rightarrow \\ E(X) &\geq E(Y) \blacksquare \end{aligned}$$

g) $|E(X)| \leq E(|X|)$

△:

$$\begin{aligned} (\forall w \in \Omega) -|X(w)| \leq X(w) \leq |X(w)| &\Rightarrow^f E(-|X|) \leq E(X) \leq E(|X|) \Rightarrow^b \\ -E(|X|) &\leq E(X) \leq E(|X|) \Rightarrow |E(X)| \leq E(|X|) \blacksquare \end{aligned}$$

h) X, Y nezavisne $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$

△:

$$\begin{aligned} XY &= \varphi(X, Y) \Rightarrow E(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X = x_i, Y = y_j\} =^{nezavisnost} \\ \sum_i \sum_j x_i y_j P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\} &= \sum_i x_i P\{X = x_i\} \cdot \sum_j y_j P\{Y = y_j\} = E(X)E(Y) \blacksquare \end{aligned}$$

17. Disperzija. Osnovna svojstva. Primeri

Slučajne veličine $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i $Y : \begin{pmatrix} -1000 & 1000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ imaju isto očekivanje (0), međutim X je pribijenija (skupljenija) uz svoje očekivanje, a Y je raspršenija. **Disperzija** meri raspršenost slučajne veličine oko svoje srednje vrednosti (očekivanja). U ovom slučaju važi $D(X) < D(Y)$ jer je raspršenost X manja od Y .

Definicija: Neka je X proizvoljna slučajna veličina. Očekivanje $E(X^n)$ zove se **n -ti moment** slučajne veličine X . Očekivanje $E(|X|^n)$ zove se **n -ti apsolutni moment** slučajne veličine X . Očekivanje $E((X - E(X))^n)$ zove se **n -ti centralni (centrirani) moment** slučajne veličine X .

Disperzija slučajne veličine X je **drugi centralni moment**, tj. $D(X) = E((X - E(X))^2)$.

Dakle, disperzija meri srednje kvadratno odstupanje slučajne veličine od svog matematičkog očekivanja. **Standardno odstupanje (devijacija)** slučajne veličine X je $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Disperzija kod:

- diskretnih slučajnih veličina: $\sum_k (x_k - E(X))^2 p_k$
- neprekidnih slučajnih veličina: $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx$

Teorema: Za proizvoljnu slučajnu veličinu važi:

1. $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Δ :

$$\begin{aligned} D(X) &= E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2) = \\ &= E(X^2) + E(-2XE(X)) + E((E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2 = \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \blacksquare \end{aligned}$$

2. $0 \leq D(X) \leq E(X^2)$

Δ :

$$D(X) = E((X - E(X))^2) \geq 0 \text{ jer } (X - E(X))^2 \geq 0 \text{ i } D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \leq E(X^2) \text{ jer } (E(X))^2 \geq 0 \blacksquare$$

3. $D(X) = 0$ akko $P\{X = C\} = 1$ (X skoro sigurno konstanta)

\Leftarrow :

$$X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = c^2 \cdot 1 - (c \cdot 1)^2 = 0$$

\Rightarrow :

$$0 = D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_k (x_k - E(X))^2 p_k \geq 0 \text{ jer } p_k > 0 \text{ i } (x_k - E(X))^2 \geq 0.$$

Svaki sabirak onda mora biti nula, tj. $(\forall k) x_k - E(X) = 0$, tj. $(\forall k) x_k = E(X)$. Očekivanje je neka konstanta c i važi $(\forall k) x_k = c$ pa važi $X = c$, tj. $X : \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} \blacksquare$

4. $D(aX + b) = a^2 D(X)$

Δ :

$$\begin{aligned} D(aX + b) &= E((aX + b)^2) - (E(aX + b))^2 = E(a^2 X^2 + 2abX + b^2) - (aE(X) + b)^2 = \\ &= E(a^2 X^2) + E(2abX) + E(b^2) - (a^2 E(X)^2 + 2abE(X) + b^2) = \\ &= a^2 E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2 E(X)^2 - 2abE(X) - b^2 = a^2 (E(X^2) - E(X)^2) = a^2 D(X) \blacksquare \end{aligned}$$

5. X i Y nezavisne $\Rightarrow D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Δ :

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= E((X + Y)^2) - (E(X + Y))^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) - (E(X) + E(Y))^2 \stackrel{nez}{=} \\ &= E(X^2) + 2E(X)E(Y) + E(Y^2) - (E(X))^2 - 2E(X)E(Y) - (E(Y))^2 = \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 + E(Y^2) - (E(Y))^2 = D(X) + D(Y) \blacksquare \end{aligned}$$

Važi i $D(X - Y) = D(X + (-Y)) \stackrel{nez}{=} D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$

Primer (diskretne slučajne veličine):

1. $I : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

$$D(I) = E(I^2) - (E(I))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

2. $X : \mathcal{B}(n, p)$ - prvi način: $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dots$, drugi način: $X = I_1 + \dots + I_n \Rightarrow D(X) = D(I_1 + \dots + I_n) \stackrel{nez}{=} D(I_1) + \dots + D(I_n) = np(1-p)$
3. $X : \mathcal{P}(\lambda)$, $E(X) = \lambda$, $E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{(k-1)!} = \left(\begin{matrix} s = k-2 \\ m = k-1 \end{matrix} \right) = \lambda^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^s}{s!} + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} = \lambda^2 + \lambda \Rightarrow D(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Primer (apsolutno-neprekidne slučajne veličine):

1. $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $D(X) = \sigma^2$
2. $X : \mathcal{E}(\lambda)$, $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(\begin{matrix} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \end{matrix} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$

18. Koeficijent korelacije

Standardizovana slučajna veličina je $X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$. Važi:

- $E(X^*) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = \frac{1}{\sqrt{D(X)}} E(X - E(X)) = \frac{1}{\sqrt{D(X)}} (E(X) - E(E(X))) = 0$ jer $E(E(X)) = E(X)$
- $D(X^*) = D\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right) = \frac{1}{D(X)} D(X - E(X)) = \frac{D(X)}{D(X)} = 1$

Definicija: Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim disperzijama. **Kovarijacija (kovarijansa)** slučajnih veličina X i Y definisana je sa:

$$\begin{aligned} cov(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) = E(XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)) = \\ &= E(XY) - E(E(X)Y) - E(XE(Y)) + E(E(X)E(Y)) = \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Definicija: Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim i pozitivnim disperzijama.

Koeficijent korelacije slučajnih veličina X i Y je kovarijansa standardizacija slučajnih veličina X i Y , odnosno:

$$\begin{aligned} \rho_{X,Y} &= cov(X^*, Y^*) = E(X^*Y^*) - E(X^*)E(Y^*) = E\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = \frac{E((X - E(X))(Y - E(Y)))}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \\ &= \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \end{aligned}$$

Definicija: Ako je $\rho_{X,Y} = 0$ onda su X i Y **nekorelirane** slučajne veličine.

Lema: Nezavisne slučajne veličine su nekorelirane. Obrnuto ne važi.

\triangle :

$$E(XY) \stackrel{nez}{=} E(X)E(Y) \Rightarrow \rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = 0 \blacksquare$$

Teorema Neka su X i Y slučajne veličine sa konačnim i pozitivnim disperzijama. Tada važi:

a) $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

Δ :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq D(Y^* \mp X^*) = E((Y^* \mp X^*)^2) - (E(Y^* \mp X^*))^2 = \\
 &E(Y^{*2} \mp 2Y^*X^* + X^{*2}) - (E(Y^*) \mp E(X^*))^2 = \\
 &E(Y^{*2}) \mp 2E(Y^*X^*) + E(X^{*2}) - (E(Y^*))^2 \pm 2E(X^*)E(Y^*) - (E(X^*))^2 = \\
 &D(Y^*) + D(X^*) \mp 2(E(X^*Y^*) - E(X^*)E(Y^*)) = 2 \mp 2\rho_{X,Y} \text{ odakle sledi } 2 - 2\rho_{X,Y} \geq 0 \Rightarrow \\
 &\rho_{X,Y} \leq 1 \text{ i } 2 + 2\rho_{X,Y} \geq 0 \Rightarrow \rho_{X,Y} \geq -1 \text{ pa važi } |\rho_{X,Y}| \leq 1 \blacksquare
 \end{aligned}$$

b) $|\rho_{X,Y}| = 1$ akko su X i Y skoro sigurno linearno zavisne, tj. $P\{Y = aX + b\} = 1$

\Leftarrow :

Neka je $Y \stackrel{ss}{=} aX + b$. Važi $\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = \frac{E(X(aX+b)) - E(X)E(aX+b)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(aX+b)}} =$

$$\frac{E(aX^2+bX) - E(X)(aE(X)+b)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{a^2D(X)}} = \frac{E(aX^2) + E(bX) - a(E(X))^2 - bE(X)}{\sqrt{D(X)}|a|\sqrt{D(X)}} = \frac{aE(X^2) + bE(X) - a(E(X))^2 - bE(X)}{|a|D(X)} = \frac{aD(X)}{|a|D(X)} =$$

$$\begin{cases} -1, & a < 0 \\ 1, & a > 0 \end{cases} \Rightarrow |\rho_{X,Y}| = 1$$

\Rightarrow :

Ako je $\rho_{X,Y} = -1$ onda je $D(Y^* + X^*) = 2 + 2\rho_{X,Y} = 0 \Rightarrow Y^* + X^* \stackrel{ss}{=} c$. Važi

$E(Y^* + X^*) = E(c) = c$ i $E(Y^* + X^*) = E(Y^*) + E(X^*) = 0$ pa je $c = 0$ odnosno $Y^* \stackrel{ss}{=} -X^*$

$$\Rightarrow \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \stackrel{ss}{=} -\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \Rightarrow Y \stackrel{ss}{=} -\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}X + \frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X) + E(Y) \Rightarrow Y \stackrel{ss}{=} aX + b. \text{ Ako je}$$

$\rho_{X,Y} = 1$ onda je $D(Y^* - X^*) = 2 - 2\rho_{X,Y} = 0 \Rightarrow Y^* - X^* \stackrel{ss}{=} c$. Važi $E(Y^* - X^*) = E(c) = c$

i $E(Y^* - X^*) = E(Y^*) - E(X^*) = 0$ pa je $c = 0$ odnosno $Y^* \stackrel{ss}{=} X^* \Rightarrow \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \stackrel{ss}{=} \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} \Rightarrow$

$$Y \stackrel{ss}{=} \frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}X + \frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X) + E(Y) \Rightarrow Y \stackrel{ss}{=} aX + b. \blacksquare$$

Dakle, koeficijent korelacije je mera linearne zavisnosti slučajnih veličina X i Y . Što su vrednosti bliže -1 i 1 to je linearna zavisnost veća, a u ekstremnim slučajevima -1 i 1 to znači da se Y može prikazati kao $aX + b$ što se naziva **potpuna linearna zavisnost**. Kada je vrednost -1 zavisnost je **negativna**, a kada je vrednost 1 u pitanju je **pozitivna linearna zavisnost**.

19. Karakteristična funkcija. Osnovna svojstva. Primeri

Do sada smo imali da za slučajne veličine važi $X : \Omega \rightarrow R$. Kao uopštenje, **kompleksna slučajna veličina** je slučajna veličina koja svakom događaju dodeljuje kompleksan broj $X + iY$, tj. $Z : \Omega \rightarrow C$. Po definiciji važi $E(Z) = E(X) + iE(Y)$.

Definicija: Karakteristična funkcija neke slučajne veličine, odnosno njene raspodele, je funkcija koja slika $R \rightarrow C$ definisana sa $\varphi_X(t) = E(e^{itx})$

Ojlerova formula: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Odavde važi $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ i $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$. Dakle, karakterističnu funkciju možemo zapisati i kao $\varphi_X(t) = E(e^{itx}) = E(\cos(tx) + i \sin(tx)) = E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))$.

- **diskretan slučaj:** $\varphi_X(t) = \sum_k e^{itk} P\{X = k\}$
- **neprekidan slučaj:** $\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x) dx$

Primer:

- $I : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} - \varphi_I(t) = E(e^{itx}) = e^{it0}(1-p) + e^{it1}p = 1-p + pe^{it}$
- $X : \mathcal{P}(\lambda) - \varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ jer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$
- $X : \mathcal{U}[0, 1] - \varphi_X(t) = \int_0^1 e^{itx} 1 dx = \frac{e^{it}-1}{it}$

Teorema (Osobine karakteristične funkcije): Za karakterističnu funkciju $\varphi_X(t)$ slučajne veličine X važi:

1. $|\varphi_X(t)| \leq \varphi_X(0), \varphi_X(0) = 1$

$\Delta:$

$$\varphi_X(0) = E(e^{i0x}) = E(1) = 1 \blacksquare$$

2. $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

$\Delta:$

$$\begin{aligned} \varphi_X(-t) &= E(e^{i(-t)x}) = E(\cos(-tx) + i \sin(-tx)) = E(\cos(tx) - i \sin(tx)) = \\ &= E(\cos(tx)) - iE(\sin(tx)) = \overline{E(\cos(tx)) + iE(\sin(tx))} = \overline{E(\cos(tx) + i \sin(tx))} = \overline{E(e^{itx})} = \\ &= \overline{\varphi_X(t)} \blacksquare \end{aligned}$$

3. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$

$\Delta:$

$$\varphi_{aX+b}(t) = E(e^{it(aX+b)}) = E(e^{itb} e^{itaX}) = e^{itb} E(e^{i(at)x}) = e^{itb} \varphi_X(at) \blacksquare$$

4. φ_X je ravnomerno neprekidna na R

Primer: Ako postoji, odrediti raspodelu slučajne veličine čija je karakteristična funkcija:

- $\cos t : \varphi(t) = \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = e^{it(-1)\frac{1}{2}} + e^{it1\frac{1}{2}}$ pa važi $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
- $\sin t : \varphi(0) = \sin 0 = 0 \neq 1$ pa φ_t nije karakteristična funkcija nijedne slučajne veličine. Uslov $\varphi(0) = 1$ je potreban, ali ne i dovoljan.

Primer: Naći karakterističnu funkciju normalne raspodele ako za standardnu normalnu raspodelu važi $\varphi_{X^*}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Znamo $\frac{X-m}{\sigma} = X^*$, odnosno $X = \sigma X^* + m$ pa važi $\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma X^* + m}(t) = e^{itm} \varphi_{X^*}(\sigma t) = e^{itm} e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{itm - \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$

20. Svojstva karakteristične funkcije povezana sa momentima, nezavisnošću i funkcijom raspodele

Teorema: Neka je X slučajna veličina čija je karakteristična funkcija $\varphi_X(t)$. Ako za neko $n \in \mathbb{N}$ važi da je $E(|X|^n) < +\infty$, onda za $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, postoji $\varphi_X^{(k)}(t)$ i važi:

1. $E(X^k) = \frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{i^k}$
2. $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(it)^k}{k!} E(X^k) + o(t^n), t \rightarrow 0$

Ova teorema govori da ako znamo karakterističnu funkciju možemo naći momente i obrnuto.

Teorema (Teorema o proizvodu karakterističnih funkcija): Ako su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne veličine i φ_X je karakteristična funkcija slučajne veličine $X = X_1 + \dots + X_n$, onda važi da je $\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t) \dots \varphi_{X_n}(t)$

△:

$$\varphi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = E(e^{it(X_1 + \dots + X_n)}) = E(e^{itX_1} \dots e^{itX_n}) \stackrel{\text{nez}}{=} E(e^{itX_1}) \dots E(e^{itX_n}) = \varphi_{X_1}(t) \dots \varphi_{X_n}(t) \blacksquare$$

Primer: Za $X : \mathcal{B}(n, p)$ važi $\varphi_X(t) = \varphi_{I_1 + \dots + I_n}(t) = \varphi_{I_1}(t) \dots \varphi_{I_n}(t) = (1 - p + pe^{it})^n$

Teorema (Formula inverzije): Ako su a i b tačke neprekidnosti funkcije raspodele F_X slučajne veličine X , a $\varphi_X(t)$ njena karakteristična funkcija, onda važi:

$$F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt$$

Oдавде važi:

$$F(b) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi_X(t) dt,$$

pa ako znamo karakterističnu funkciju, znamo i funkciju raspodele.

Teorema (Teorema o jedinstvenosti): Ako neke dve funkcije raspodele imaju istu karakterističnu funkciju, onda su te dve funkcije raspodele identične.

Teorema: Neka su F_X funkcija raspodele i φ_X karakteristična funkcija slučajne veličine X . Ako je $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_X(t)| dt < +\infty$, odnosno konačan, onda je X apsolutno neprekidnog tipa i za njenu gustinu raspodele važi:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \varphi_X(t) dt$$

21. Normalna raspodela. Svojstva normalne raspodele

Normalna raspodela je $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in R$, $\sigma > 0$. Očekivanje normalne raspodele je m , a disperzija σ^2 . Gustina normalne raspodele je:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}, \quad x \in R$$

Funkcija raspodele je:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-m)^2}{\sigma^2}} dt, \quad t \in R$$

Funkcija raspodele ne može da se reši elementarnim putem, pa zbog toga postoje statističke tablice. Normalna raspodela se najčešće javlja kod prirodnih procesa.

Standardna normalna raspodela je $X^* \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Gustina standardne normalne raspodele je:

$$f_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in R$$

Lema: Ako X ima normalnu $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ raspodelu, onda $\frac{X-m}{\sigma}$ ima standardnu normalnu raspodelu.

△:

Neka je $Y = \frac{X-m}{\sigma}$. Tada važi $F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{\frac{X-m}{\sigma} \leq x\} = P\{X \leq \sigma x + m\} = \int_{-\infty}^{\sigma x + m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-m)^2}{\sigma^2}} dt = \left(\frac{t-m}{\sigma} = s \right) = \sigma \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = F_{X^*}(x)$ pa sledi $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, tj. $\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ■

Lema: Linearna kombinacija konačno mnogo nezavisnih slučajnih veličina koje imaju normalnu raspodelu takođe ima normalnu raspodelu.

△:

Neka su $X_1 : \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2), \dots, X_n : \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ nezavisne slučajne veličine, a

$X = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ njihova linearna kombinacija. Tada važi $\varphi_{a_1X_1 + \dots + a_nX_n} = \varphi_{X^*}$

$$\varphi_{a_1X_1}(t) \dots \varphi_{a_nX_n}(t) = \varphi_{X_1}(a_1t) \dots \varphi_{X_n}(a_nt) = e^{i(a_1t)m_1 - \frac{(a_1t)^2\sigma_1^2}{2}} \dots e^{i(a_nt)m_n - \frac{(a_nt)^2\sigma_n^2}{2}} =$$

$e^{it(a_1m_1 + \dots + a_nm_n) - \frac{t^2(a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2)}{2}}$. Ovo je karakteristična funkcija normalne raspodele, pa na osnovu teoreme o jedinstvenosti sledi $X \sim \mathcal{N}(a_1m_1 + \dots + a_nm_n, a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2)$ ■

22. Konvergencija u raspodeli i u verovatnoći niza slučajnih veličina i odnos među njima

Neka su X_1, X_2, \dots i X slučajne veličine definisane na prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) , F_{X_1}, F_{X_2}, \dots i F_X odgovarajuće funkcije raspodele i $\varphi_{X_1}, \varphi_{X_2}, \dots$ i φ_X odgovarajuće karakteristične funkcije.

Definicija: Niz slučajnih veličina (X_n) **konvergira u verovatnoći** ka slučajnoj veličini X kad $n \rightarrow \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P\{w \mid |X_n(w) - X(w)| \geq \varepsilon\} = 0$$

Koristimo kraći zapis: $(\forall \varepsilon > 0) P\{|X_n(w) - X(w)| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

Definicija: Niz slučajnih veličina (X_n) **konvergira u raspodeli** ka slučajnoj veličini X kad $n \rightarrow \infty$, u oznaci $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} X$, ako za svaku tačku neprekidnosti x funkcije raspodele F_X važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Teorema (Metod karakteristične funkcije): Neka su (F_n) niz funkcija raspodele i (φ_n) niz karakterističnih funkcija niza slučajnih veličina (X_n) .

a) Ako važi $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$ za svaku tačku neprekidnosti funkcije F , gde je F neka funkcija raspodele, onda važi $(\forall t \in \mathbb{R}) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ i pri tome je φ karakteristična funkcija funkcije raspodele F .

b) Ako $(\forall t \in \mathbb{R})$ postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ i ako je φ neprekidna u nuli, onda je φ karakteristična funkcija neke funkcije raspodele F i za svaku tačku neprekidnosti x funkcije F važi $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$.

Teorema: Ako niz slučajnih veličina (X_n) konvergira u verovatnoći ka slučajnoj veličini X , onda on konvergira u raspodeli ka toj slučajnoj veličini. Obrnuto ne važi.

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} X$$

Teorema: Ako niz slučajnih veličina (X_n) konvergira u verovatnoći ka konstanti C , onda on konvergira u raspodeli ka toj konstanti. Važi i obrnuto.

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} C \Leftrightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} C, C = const$$

Δ :

$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} C \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{C\}) \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n} = \begin{cases} 0, & x < C \\ 1, & x \geq C \end{cases}$, ali pišemo $> C$ jer nas ne

interesuje šta se dešava u tački C . Važi $(\forall \varepsilon > 0) 0 \leq P\{|X_n - C| \geq \varepsilon\} = P\{X_n - C \leq -\varepsilon\} + P\{X_n - C \geq \varepsilon\} = P\{X_n \leq C - \varepsilon\} + P\{X_n \geq C + \varepsilon\} = F_{X_n}(C - \varepsilon) + P\{X_n > C + \frac{\varepsilon}{2}\} =$

$F_{X_n}(C - \varepsilon) + 1 - F_{X_n}(C + \frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 + 1 - 1 = 0$ pa na osnovu teoreme o dva policajca važi
 $(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - C| \geq \varepsilon\} = 0$, odnosno $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} C$ ■

23. Aproksimacija binomne raspodele normalnom raspodelom

Teorema (Muavr-Laplas): Ako slučajna veličina X ima binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu, onda:

1. **lokalna teorema:** za veliko n (≥ 30) važi:

$$P\{X = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(k-np)^2}{np(1-p)}}, \quad k \in \{0, \dots, n\}$$

2. **integralna teorema:** za $(\forall x \in R)$ važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

△:

Teorema tvrdi $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(x) = F_{X^*}(x)$ za svako $x \in R$ jer su kod standardne

normalne raspodele sve tačke x tačke neprekidnosti. To znači da treba pokazati

$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0, 1)$. Pokažimo da važi $(\forall t \in R) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) = \varphi_{X^*}(t) =$

$e^{-\frac{t^2}{2}}$. Važi $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{it \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{i \frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} X_n} e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}}) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} E(e^{i \frac{t}{\sqrt{np(1-p)}} X_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \varphi_{X_n}(\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{itnp}{\sqrt{np(1-p)}}} (1-p + pe^{i \frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} ((1-p)e^{-\frac{itp}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{i \frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}})^n =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln((1-p)e^{-\frac{itp}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{i \frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}})} = (e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \rightarrow 0) =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln((1-p)(1 - \frac{itp}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{t^2 p^2}{2np(1-p)} + o(\frac{1}{n})) + p(1 + \frac{it(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}} - \frac{t^2(1-p)^2}{2np(1-p)} + o(\frac{1}{n}))} =$

$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(1-p - \frac{it}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} - \frac{t^2 p}{2n} + o(\frac{1}{n})) + p + \frac{it}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)} - \frac{t^2(1-p)}{2n} + o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))} =$

$(\ln(1+x) = x + o(x), x \rightarrow 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(-\frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2} + o(1)} = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Važi i

$\lim_{t \rightarrow 0} e^{-\frac{t^2}{2}} = e^0 = 1$ pa je funkcija neprekidna u nuli, pa na osnovu metoda

karakteristične funkcije dobijamo traženo. ■

Obe teoreme zapravo tvrde $X : \mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))$, odakle $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Na primer:

$$P\{a \leq X \leq b\} = P\left\{\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} \approx F_{X^*}\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F_{X^*}\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

24. Aproximacija binomne raspodele Puasonovom raspodelom

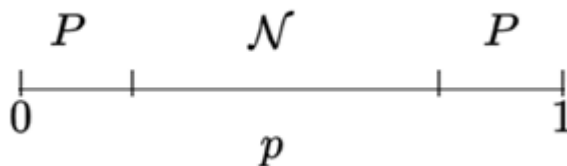
Teorema: Neka kod binomne $\mathcal{B}(n, p)$ raspodele važi $p = \frac{\lambda}{n}$. Tada za veliko $n (\geq 30)$, što povlači malo p , važi:

$$(\forall k \in \{0, \dots, n\}) \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

$$\begin{aligned} \triangle: \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n \cdot n \cdot \dots \cdot n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^1 \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^1 \left(1 + \frac{1}{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{n}{\lambda} \cdot (-\lambda)} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \blacksquare \end{aligned}$$

Dakle, ako je $n \geq 30$ koristi se neka aproksimacija po sledećem šablonu:

1. $np < 10 \vee n(1-p) < 10 \Rightarrow$ Puasonova aproksimacija
2. $np \geq 10 \wedge n(1-p) \geq 10 \Rightarrow$ normalna aproksimacija



Može se desiti da šablon kaže da treba koristiti Puasonovu raspodelu, ali da p nije malo. U tom slučaju je potrebno da pređemo na suprotni događaj. Ako X meri broj uspeha i ima raspodelu $\mathcal{B}(n, p)$, onda \bar{X} meri broj neuspeha i ima raspodelu $\mathcal{B}(n, 1-p)$. Važi $P\{X = k\} = P\{\bar{X} = n - k\}$.

25. Čebišovljeva nejednakost. Bernulijev zakon velikih brojeva

Teorema(Čebišovljeva nejednakost): Neka je X proizvoljna slučajna veličina, a \mathcal{E} i r pozitivni brojevi. Tada važi:

$$P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\mathcal{E}^r}$$

$\triangle:$

Neka je $Y = \begin{cases} 0, & |X| < \mathcal{E} \\ \mathcal{E}, & |X| \geq \mathcal{E} \end{cases}$. Ovo je diskretna promenljiva - $Y : \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{E} \\ 1 - P\{|X| \geq \mathcal{E}\} & P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \end{pmatrix}$ pa važi $Y \leq |X| \Rightarrow Y^r \leq |X|^r \Rightarrow E(Y^r) \leq E(|X|^r) \Rightarrow 0^r(1 - P\{|X| \geq \mathcal{E}\}) + \mathcal{E}^r P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \leq E(|X|^r) \Rightarrow P\{|X| \geq \mathcal{E}\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\mathcal{E}^r} \blacksquare$

Specijalni slučaj formule za $r = 2$:

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Definicija: Neka je (X_n) niz slučajnih veličina definisanih na istom prostoru verovatnoće (Ω, \mathcal{F}, P) . Za taj niz važi **slabi zakon velikih brojeva** ako:

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

Teorema (Bernulijev zakon velikih brojeva): Ako je X_n broj uspeha u n nezavisnih pokušaja, gde je verovatnoća uspeha u svakom od tih pokušaja p , onda važi:

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$$

Slučajna veličina X_n ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n, p)$, a istu raspodelu ima i suma indikatora:

$$\frac{\sum_{k=1}^n I_k}{n} - \frac{np}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n I_k - E(\sum_{k=1}^n I_k)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

Δ :

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0) \quad 0 \leq P\left\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} &= P\{|X_n - np| \geq n\varepsilon\} \stackrel{\text{Čebiř. nej. } n=2}{\leq} \frac{E(|X_n - np|^2)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D(X_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ pa na osnovu teoreme o dva policajca važi } (\forall \varepsilon > 0) \quad P\left\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

odnosno $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$ ■

26. Čebiřovljev i Hinčinov zakon velikih brojeva

Teorema (Čebiřovljev zakon velikih brojeva): Ako je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina takav da postoji pozitivan broj C takav da $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad D(X_n) \leq C$, onda za taj niz važi slabi zakon velikih brojeva.

Δ :

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0) \quad 0 \leq P\left\{\left|\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} &= P\left\{\left|\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)\right| \geq n\varepsilon\right\} \stackrel{\text{Čebiř. nej. } n=2}{\leq} \\ &\frac{E(|\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)|^2)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{D(\sum_{k=1}^n X_k)}{n^2\varepsilon^2} = \text{nez.} \frac{\sum_{k=1}^n D(X_k)}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{nC}{n^2\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ pa na osnovu teoreme o} \\ \text{dva policajca važi slabi zakon velikih brojeva, tj. } &\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema (Hinčinov zakon velikih brojeva): Ako je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom i konačnim matematičkim očekivanjem jednakim m , onda za taj niz važi slabi zakon velikih brojeva, odnosno:

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} m$$

△:

Dokazaćemo $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{R} m$ koristeći metod karakteristične funkcije: ($\forall t \in R$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{it \frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{i \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n X_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\sum_{k=1}^n X_k}(\frac{t}{n}) =^{nez}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(\frac{t}{n}) \stackrel{\text{osobina momenta}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + i \frac{t}{n} m + o(\frac{t}{n})), \frac{t}{n} \rightarrow 0 =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i \frac{t}{n} m + o(\frac{1}{n}))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(1 + i \frac{t}{n} m + o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(i \frac{t}{n} m + o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{itm + o(1)}$$

$= e^{itm} = \varphi_X(t)$. Niz karakterističnih funkcija teži karakterističnoj funkciji e^{itm} koja je

neprekidna u nuli i zapravo je karakteristična funkcija za $X : \binom{m}{1}$ pa sledi $\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{R} m \Rightarrow$

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \xrightarrow{P} m \blacksquare$$

Bernulijev zakon sledi iz Čebišovljevog i Hinčinovog zakona.

27. Centralna granična teorema

Teorema (Centralna granična teorema): Ako je (X_n) niz nezavisnih slučajnih veličina sa istom raspodelom i konačnom disperzijom većom od nule, onda važi:

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0, 1)$$

△:

Uvodimo smenu $Y_k = X_k - E(X_k)$, $D(X_k) = \sigma^2$. Važi: $E(Y_k) = E(X_k - E(X_k)) = E(X_k) - E(X_k) = 0$ i $D(Y_k) = D(X_k - E(X_k)) = D(X_k) = \sigma^2$. Sada treba da dokažemo

$\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0, 1)$. Koristimo metod karakteristične funkcije:

$$(\forall t \in R) \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sigma \sqrt{n}}}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{it \frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sigma \sqrt{n}}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(e^{i \frac{t}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{k=1}^n Y_k}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\sum_{k=1}^n Y_k}(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}}) \stackrel{\text{osobina momenta}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k}(\frac{t}{\sigma \sqrt{n}}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{it}{\sigma \sqrt{n}} \cdot 0 + \frac{(\frac{it}{\sigma \sqrt{n}})^2}{2!} \cdot \sigma^2 + o(\frac{1}{n})) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2 \sigma^2 n} + o(\frac{1}{n}))^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \ln(1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(-\frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n}))} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2} + o(1)} = e^{-\frac{t^2}{2}} \text{ što je karakteristična}$$

funkcija standardne normalne raspodele pa na osnovu metode karakteristične funkcije i

teoreme o jedinstvenosti $\frac{\sum_{k=1}^n Y_k}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0, 1)$, tj. $\frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{R} X^* : \mathcal{N}(0, 1)$

■

Teorema kaže da puno slučajnih veličina (≥ 30), isto raspodeljenih sa disperzijom većom od nule, možemo aproksimirati normalnom raspodelom. Integralna teorema Muavr-Laplasa je specijalni slučaj centralne granične teoreme kada X_n ima binomnu raspodelu.