Osnove matematičkog modeliranja

Odnos stvarnosti i modela i razlozi za modeliranje

Matematički model predstavlja opis nekog sistema ili pojave korišćenjem matematičkih koncepata i jezika. Proces stvaranja ovakvog modela na osnovu raspoloživih informacija naziva se **matematičko modeliranje**. Matematički modeli najčešće ne oslikavaju savršeno datu pojavu u prirodi. Često je potrebno uvesti neke pretpostavke i pojednostavljenja koja ne važe uvek, što dovodi do određene greške. Sam model se često ne može rešiti analitički, već se koriste numeričke metode koje donose dodatnu grešku. Takođe, model često zahteva neko numeričko rešavanje radi dobijanja konkretnih vrednosti što opet unosi dodatnu grešku zbog ograničenosti u preciznosti zapisa brojeva u pokretnom zarezu. Informacije koje koristimo prilikom modeliranja često dobijamo merenjem ili opažanjem, što takođe donosi grešku. Ako predviđanja dobijena modelom odstupaju od stvarnosti više od dozvoljene vrednosti greške model se odbacuje i traga se za novim, a u suprotnom se dobijeni model može koristiti za dalje simulacije. Dakle, matematički model možemo shvatiti kao idealizaciju stvarnosti. Matematičko modeliranje je korisno u raznim situacijama i brojni su razlozi zbog čega je bitno:

- eksperiment je nemoguće izvesti - sudaranje galaksija, životni ciklus zvezde, nevreme, ...
- eksperiment nije poželjno izvoditi - fisija i fuzija u nuklearnoj tehnologiji, poplave ili lavine, testiranje stabilnosti građevina, ...
- eksperiment je veoma skup - uticaj radijacije na genetski materijal, aerodinamika i turbulencije, ...
- kontrola procesa u realnom vremenu - kontrola zbog sigurnosti i/ili optimizacije radi uštede vremena ili resursa, npr. maksimizacija ulova ribe bez narušavanja morskog ekosistema
- modeliranje za konstrukciju mernih uređaja - veliki broj mernih uređaja koristi fizičke zakone koji povezuju traženu veličinu sa veličinama koje se lakše mere, npr. živin termometar meri temperaturu pomoću širenja žive
- bolje razumevanje pojave
- korišćenje u obrazovanju - zamena kompleksnog modela jednostavnijim koji je lakši za razumevanje i predstavljanje

Koraci i smernice u procesu matematičkog modeliranja

Proces modeliranja sastoji se od četiri koraka:

1. **Prepoznavanje problema** - određivanje dela stvarnosti koji odgovara problemu koji se modelira, kao i koji su cilj i namena modeliranja. Ovaj korak obuhvata i skupljanje svih postojećih eksperimentalnih podataka, kao i planiranje potencijalnih eksperimenata radi testiranja i unapređenja modela.
2. **Formulacija matematičkog modela** - određivanje promenljivih i parametara koji su bitni za model, kao i oblik njihove međusobne zavisnosti na osnovu raspoloživih informacija. Zatim je potrebno rangirati ih po važnosti radi potencijalnog pojednostavljivanja modela. Dakle, model mora biti što jednostavniji u odnosu na ciljeve. Uz pomoć dimenzione analize moguće je svesti model na bezdimenzione veličine, što često dovodi do toga da jedan isti model opisuje više različitih pojava u prirodi. Međutim, bitno je da te promenljive i parametri imaju svoju interpretaciju u stvarnosti.
3. **Testiranje kvaliteta modela** - određivanje opsega promenljivih i parametara za koje model daje prihvatljive rezultate. Ako je opseg previše mali, tj. model ne ispunjava zahteve on se mora modifikovati ili odbaciti u korist novog modela.
4. **Prezentacija modela i rezultata** - upoznavanje korisnika sa modelom i dobijenim rezultatima.

Vrste matematičkih modela i uloga matematičara u procesu modeliranja

Vrsta matematičkog modela zavisi od same prirode problema, kao i od korišćenog matematičkog aparata u procesu modeliranja. Moguće je napraviti više vrsta podela:

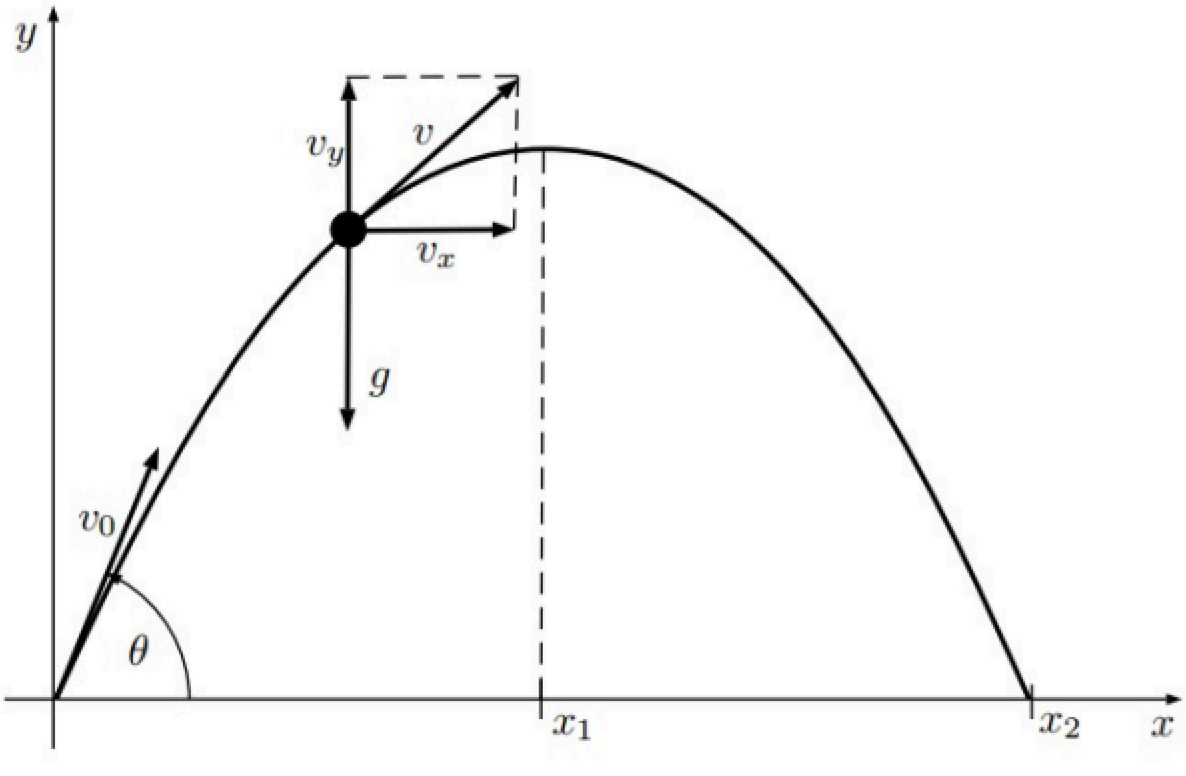
1. **kontinualni** i **diskretni**: Kontinualni modeli koriste realne promenljive (diferencijalne jednačine, ...), dok diskretni modeli koriste diskretne promenljive (grafovi, kombinatorika, ...). Postoje i **mešoviti** modeli koji koriste i jedne i druge. Najčešće se kontinualni modeli koriste za kontinualne probleme, a diskretni za diskretne, ali je moguće i obrnuto kao što su na primer ćelijski automati za kontinualne probleme ili diferencijalne jednačine za modele saobraćaja.
2. **deterministički** i **stohastički**: Za probleme gde postoji slučajno ponašanje koriste se stohastički modeli (Monte-Karlo, fazi logika, ...), a za pojave koje su determinističke koriste se deterministički modeli (dinamika fluida, optimizacija, ...). Opet, nekada je moguće i obrnuto, na primer vremenska prognoza ili određivanje atraktora Julia skupova.
3. **linearni** i **nelinearni**: Linearni modeli su jednostavniji i za njih postoji razvijeni matematički aparat, dok nelinearni modeli mogu modelirati kompleksnije ponašanje kao što su haos, bifurkacije i slično.
4. **statički** i **dinamički**: Statički modeli ne koriste vreme kao promenljivu, a dinamički koriste i zbog toga se najčešće opisuju diferencijalnim ili diferencnim jednačinama.
5. **deduktivni** i **induktivni**: Deduktivni model nastaje logičkim izvođenjem iz poznatih zakonitosti, a induktivni nastaje generalizacijom postojećih opažanja i merenja. Primer deduktivnog modela je Njutnov model kretanja planeta jer je nastao izvođenjem iz Njutnovog zakona gravitacije, a Keplerov model kretanja planeta po eliptičnim putanjama

je primer induktivnog modela jer je nastao na osnovu astronomskih opažanja tokom dužeg niza godina.

Znanje matematičara je potrebno zbog poznavanja postojećih matematičkih teorija i metodologija koje se koriste u procesu modeliranja. Često je za neke probleme potrebno razviti novu matematičku metodologiju, što je u velikom broju slučajeva dovodilo do razvijanja samog matematičkog znanja kroz istoriju. Matematičar je često zadužen i za ispitivanje modela sa apstraktne, matematičke strane. Ovo podrazumeva dokazivanje da model ima rešenje, ispitivanje da li je rešenje jedinstveno, da li je model korektno postavljen, utvrđivanje da li je procedura za rešavanje stabilna ili ne i tako dalje. Za razvijanje matematičkog modela potrebno je i domensko znanje koje poseduju ostali naučnici tog domena, a koje matematičar nužno ne poseduje. Zbog toga je potrebno da matematičar savlada terminologiju i određenu količinu znanja te oblasti radi uspešne komunikacije i rada sa ostalima članovima tima.

Kos hitac

U ovom problemu potrebno je odrediti trajektoriju nekog ispaljenog projektila ukoliko nam je poznata njegova početna brzina po izlasku iz cevi v_0, kao i ugao ispaljivanja θ.



Uvodimo nekoliko pretpostavki koje pojednostavljuju model:

- Projektil je tačkasto telo sa pozitivnom masom. Ovo je fizički nemoguće, ali je opravdano kao pojednostavljenje jer gravitaciona sila deluje na sferno simetrično telo isto kao i kad bi sva masa bila skoncetrisana u njegovom centru.
- Cev iz koje izlazi projektil je ukopana u zemlju tako da je izlaz poravnan sa x-osom.
- U svakom trenutku t možemo izmeriti visinu $y(t)$ i udaljenost $x(t)$ projektila. Merenje počinje od koordinatnog početka $(x_0,\ y_0) = (0,\ 0)$.

- Zemlja je ravna i gravitaciona sila deluje nadole, upravno na tlo. Pretpostavka je validna jer za manje razdaljine možemo zanemariti zakrivljenost Zemlje.
- Sila zemljine teže ne zavisi od visine tela, već je konstantna i iznosi $F_g = mg,\ g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$
- Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ su dva puta neprekidno diferencijabilne. Ovo omogućava nesmetanu upotrebu integralnog i diferencijalnog računa.

Ubrzanje i brzina mogu se razložiti na vertikalnu (y) i horizontalnu (x) komponentu. S obzirom da je ubrzanje zapravo drugi izvod funkcije položaja po vremenu i da jedino gravitaciono ubrzanje deluje na vertikalnu komponentu ubrzanja, važi

$$y''(t) = -g \ \Big/ \int$$

$$y'(t) = -gt + c,\ y'(0) = c = v_{0y} \ \Rightarrow\ y'(t) = -gt + v_{0y} \ \Big/ \int$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + c,\ y(0) = c = 0 \ \Rightarrow\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t$$

Na horizontalnu komponentu ne utiče ništa pa važi

$$x(t) = v_{0x}t$$

S obzirom da važi

$$\sin\theta = \frac{v_{0y}}{v_0},\quad \cos\theta = \frac{v_{0x}}{v_0}$$

konačno dobijamo

$$\boxed{x(t) = v_0\cos\theta t,\ y(t) = v_0\sin\theta t - \frac{g}{2}t^2,\ v_0 > 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \le t \le t_2}$$

Maksimalna visina se dostiže u trenutku t_1 za koji važi $y'(t_1) = 0$ pa dobijamo

$$v_0\sin\theta - gt_1 = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{t_1 = \frac{v_0\sin\theta}{g}}$$

Visina koja se dostiže je

$$\boxed{y(t_1) = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}}$$

pa se maksimalna visina dostiže za ugao $\theta = \frac{\pi}{2}$. Projektil pada na tlo u trenutku t_2 za koji važi $y(t_2) = 0,\ t_2 \ne 0$ pa dobijamo

$$v_0\sin\theta t_2 - \frac{g}{2}t_2^2 = 0 \ \Rightarrow\ t_2(v_0\sin\theta - \frac{g}{2}t_2) = 0 \ \Rightarrow\ v_0\sin\theta - \frac{g}{2}t_2 = 0 \ \Rightarrow\ \boxed{t_2 = \frac{2v_0\sin\theta}{g} = 2t_1}$$

Domet koji se dostiže je

$$\boxed{x(t_2) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

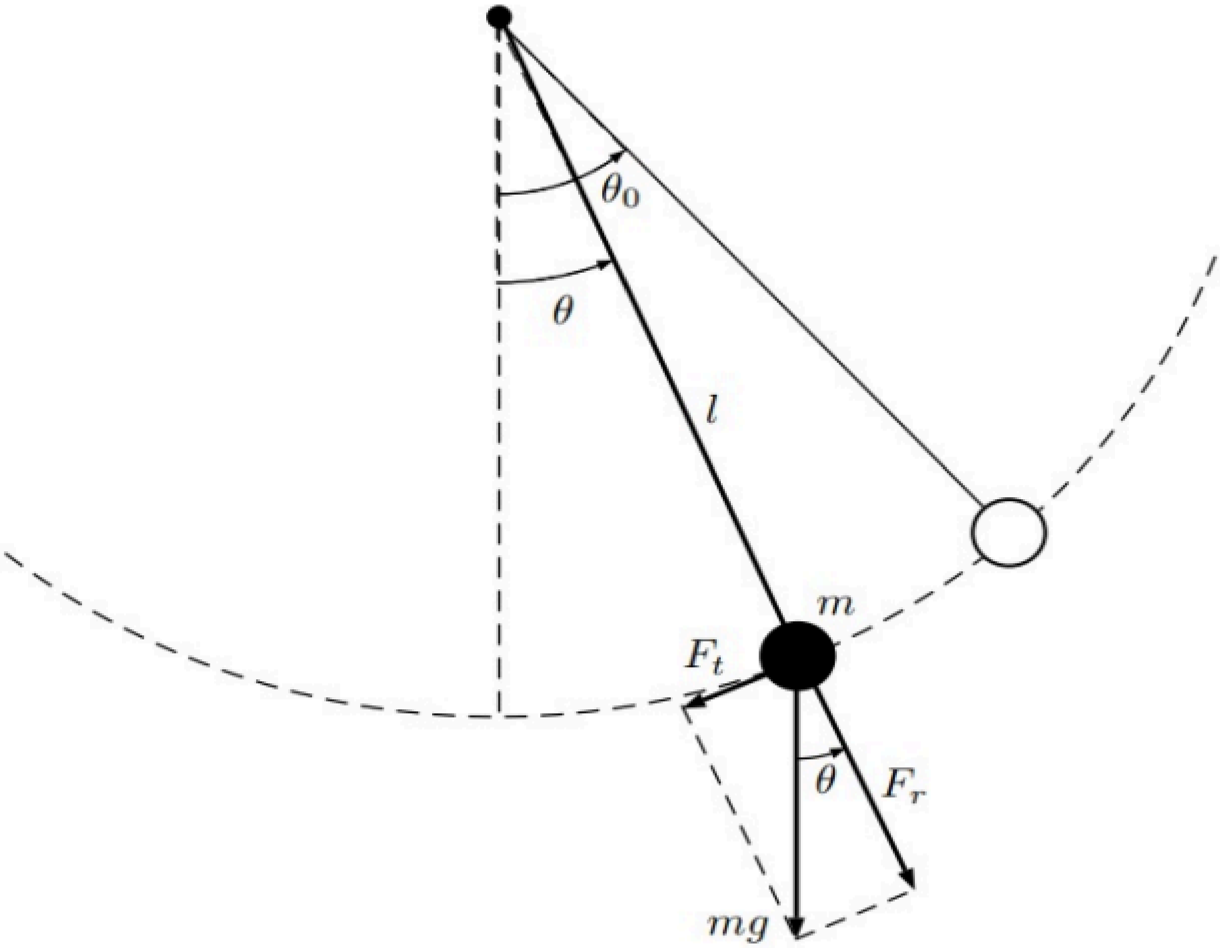
pa se maksimalni domet dostiže za ugao $\theta = \frac{\pi}{4}$. Možemo dokazati i da je oblik trajektorije projektila parabola:

$$x = v_0 \cos\theta t \ \Rightarrow \ t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$\Rightarrow \ y = v_0 \sin\theta t - \frac{g}{2}t^2 = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = \boxed{\tan\theta x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}}$$

Matematičko klatno

Matematičko klatno sastoji se iz tačkastog tela mase m koje je krutim štapom, koji se ne može deformisati, dužine l vezano za neku fiksiranu tačku. Klatno je u početnom trenutku otklonjeno od ravnotežnog položaja za ugao θ_0, a zatim se teg pušta bez uticaja ikakve spoljašnje sile. Na teg deluje sila zemljine teže $F = mg,\ g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$, a može uticati i sila trenja usled otpora vazduha što trenutno možemo zanemariti. Cilj je odrediti otklon klatna u proizvoljnom trenutku t, tj. funkciju $\theta(t)$.



Sila gravitacije koja deluje na teg vertikalno nadole može se razložiti na radijalnu (F_r) i tangencijalnu (F_t) komponentu. S obzirom da je klatno nerastegljivo, radijalna komponenta ne utiče na kretanje klatna. Za tangencijalnu komponentu važi:

$$\sin\theta = \frac{-F_t}{F} \ \Rightarrow \ F_t = -F\sin\theta = -mg\sin\theta$$

Sila je jednaka proizvodu mase i ubrzanja (drugog izvoda po funkciji položaja), odnosno:

$$F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\theta$$

Obeležimo sa $s(t)$ rastojanje tela od ravnotežnog položaja duž luka. Važiće $s(t) < 0$ ako je teg levo od ravnotežnog položaja. Važi $s(t) = l\theta(t)$ pa dobijamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta,\ \theta(0) = \theta_0,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

Ova diferencijalna jednačina ne može se rešiti analitički, već se rešava numerički. Ipak, za male uglove možemo pretpostaviti $\sin\theta \approx \theta$ pa dobijamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta,\ \theta(0) = \theta_0,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

Dalje rešavamo jednačinu analitički:

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0 \Rightarrow$$

$$K(\tau) = \tau^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \tau = \pm\sqrt{-\frac{g}{l}} = 0 \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow$$

$$\theta(t) = c_1e^{0t}\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + c_2e^{0t}\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) = c_1\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + c_2\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

Znamo:

$$\theta(0) = \theta_0 = c_1,\ \theta'(0) = 0 = \sqrt{\frac{g}{l}}c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

pa dobijamo:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)}$$

Možemo odrediti i **period oscilovanja** T_0:

$$\theta(T_0) = \theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}T_0) = \theta_0 \Leftrightarrow \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}T_0) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g}{l}}T_0 = 2\pi$$

Dobijamo **Hajgensov zakon**:

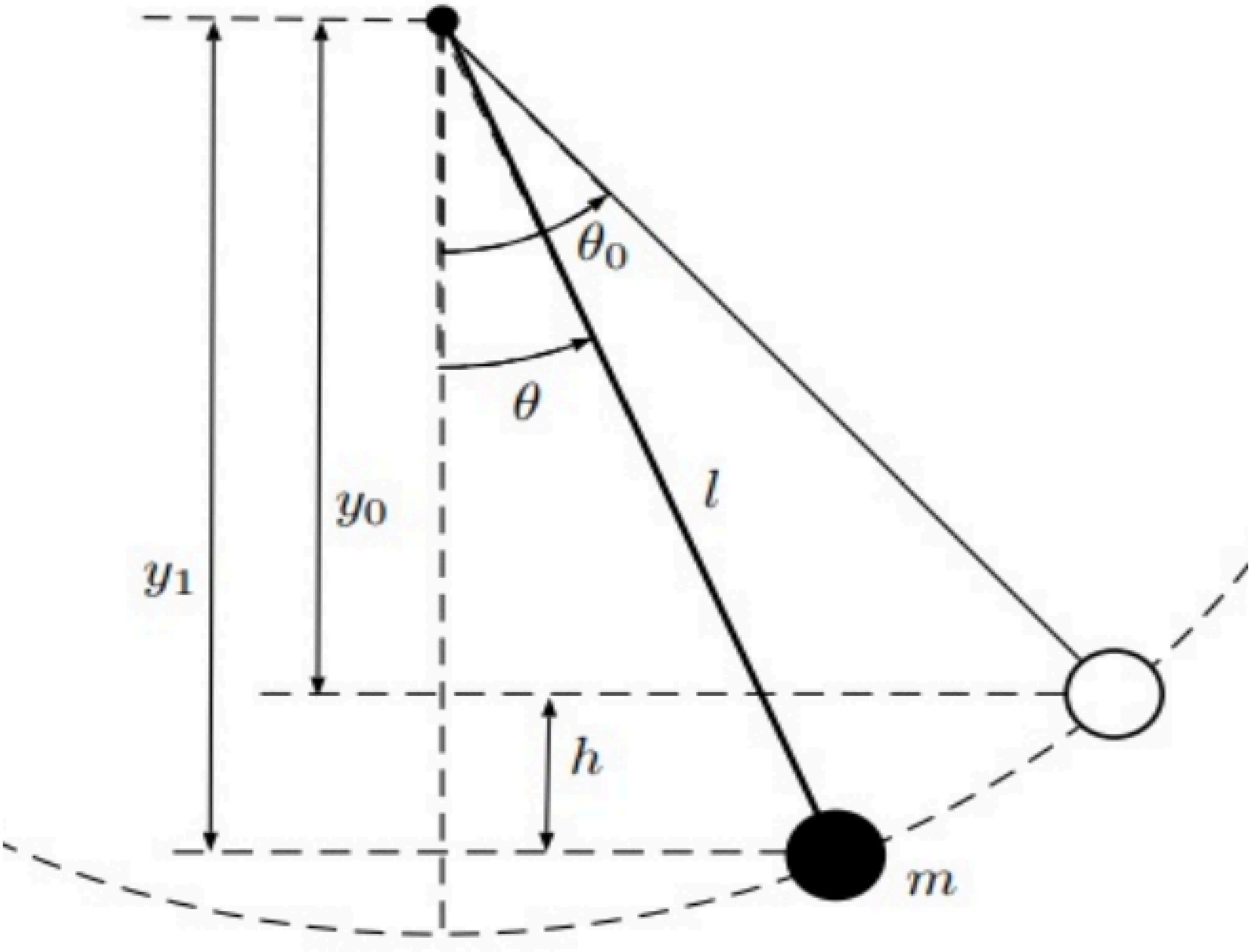
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ \theta << 1$$

U slučaju da postoji i otpor vazduha treba uračunati i silu trenja koja je obrnuto proporcionalna brzini tela, tj. $F_o = -B\frac{ds}{dt}$ odakle dobijamo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{F_0}{m} - \frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{B}{m}\frac{ds}{dt} - \frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{B}{ml}\frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{l}\sin\theta$$

Matematičko klatno (preko zakona održanja energije)

(Uvod o matematičkom klatnu iz prethodnog pitanja) Klatno je moguće modelirati i preko zakona održanja energije. Iz njega sledi da je zbir **potencijalne** i **kinetičke energije** tega konstantan, tj. da su promene potencijalne i kinetičke eneregije od početnog trenutka jednake.



$$\Delta P = mgy_1 - mgy_0 = mg(y_1 - y_0) = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta P = \Delta K \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Odavde sledi:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh} \xRightarrow{s=l\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{l} = \frac{\sqrt{2g(y_1 - y_0)}}{l} = \frac{\sqrt{2g(l\cos\theta - l\cos\theta_0)}}{l} =$$

$$\sqrt{\frac{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}{l}} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} \overset{p.l.}{=} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{2g}{l}(-\sin\theta)}{2\sqrt{\frac{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}{l}}}\sqrt{\frac{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}{l}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta,\ \theta(0) = \theta_0,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

(Jednačina se dalje rešava isto kao u prethodnom pitanju)

Period računamo na sledeći način:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \sqrt{\frac{l}{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

Integraljenjem od 0 do θ_0 po θ dobija se četvrtina perioda, pa sledi:

$$T_0 = 4\int_0^{\theta_0} \frac{dt}{d\theta} d\theta = 4\int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{l}{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}} d\theta = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Ovo je jednako:

$$T_0 = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} F(\sin\frac{\theta_0}{2},\ \frac{\pi}{2})$$

gde je F **Ležandrova eliptička funkcija**.

Rast populacije

Neka je $N(t)$ broj jedinki neke posmatrane populacije u datom trenutku t. Zanima nas broj jedinki nakon nekog vremenskog intervala Δt, odnosno $N(t + \Delta t)$. Poznato je da su broj novorođenih jedinki (**natalitet**) n i broj umrlih jedinki (**mortalitet**) m proprocionalni trenutnom broju jedinki $N(t)$ i proteklom vremenskom intervalu Δt, odnosno:

$$N(t + \Delta t) = N(t) + n\Delta t N(t) - m\Delta t N(t) \ \Rightarrow\ \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (n - m)N(t) = pN(t),$$

gde je p **prirodni priraštaj**. Za mali vremenski interval, tj. kada $\Delta t \to 0$, dobijamo $\frac{dN(t)}{dt} = pN(t)$, što direktno sledi iz definicije izvoda u tački. Dalje rešavamo diferencijalnu jednačinu:

$$N' = pN \ \Rightarrow\ N' - pN = 0 \ \Rightarrow\ K(\tau) = \tau - p = 0 \ \Rightarrow\ \tau = p \ \Rightarrow\ N(t) = c_1 e^{pt}$$

U početnom trenutku u populaciji ima $N(0) = c_1 e^{p0} = c_1$ jedinki, pa dobijamo:

$$\boxed{N(t) = N(0)e^{pt}}$$

Ovaj model naziva se **eksponencijalni (Malthusov) model rasta populacije**. Ako je $p < 0$ broj jedinki eksponencijalno teži nuli, a ako je $p > 0$ on eksponencijalno raste. Model je dobar u slučaju da je prirodni priraštaj konstantan i ukupan broj jedinki neograničen. Model je kontinualan iako je u stvarnosti broj jedinki diskretna veličina, ali na ovaj način dobijamo malu grešku pri velikom broju jedinki. Takođe, matematički aparat za rad sa realnim promenljivim je razvijeniji.

U slučaju da je ukupna veličina populacije ograničena, što je najčešće slučaj usled ograničene količine hrane, veličine staništa i slično, uvodimo parametar K koji predstavlja maksimalan broj jedinki koji je održiv u staništu na neko duže vreme. Model je sada:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K})$$

Primetimo da važi $\frac{dN}{dt} \to 0$ kada $N \to K$. Drugim rečima, kada je broj jedinki u populaciji mali rast populacije je skoro eksponencijalan, a kako broj jedinki raste i približava se gornjoj granici, rast se usporava. Rešavamo jednačinu:

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) = rN\frac{K-N}{K} = \frac{r}{K}N(K-N) \;\Rightarrow\; \frac{dN}{N(K-N)} = \frac{r}{K}dt \;\Big/ \int$$

$$\int \frac{1}{N(K-N)}dN = \int \frac{r}{K}dt \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \frac{1}{N(K-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{K-N} = \frac{(B-A)N+AK}{N(K-N)} \\ N^0 : AK = 1 \;\Rightarrow\; A = \frac{1}{K} \\ N^1 : B - A = 0 \;\Rightarrow\; B = A = \frac{1}{K} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{K}\int(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N})dN = \frac{r}{K}\int dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{K}(\ln|N| - \ln|K-N|) = \frac{r}{K}t + c_1 \;\Rightarrow$$

$$\ln|\frac{N}{K-N}| = rt + c_2,\; c_2 = Kc_1 \;\Rightarrow\; |\frac{N}{K-N}| = e^{rt+c_2} \;\Rightarrow\; \frac{N}{K-N} = c_3e^{rt},\; c_3 = e^{c_2} \;\Rightarrow$$

$$N = c_3e^{rt}(K-N) \;\Rightarrow\; N + Nc_3e^{rt} = c_3Ke^{rt} \;\Rightarrow\; N(t) = \frac{c_3Ke^{rt}}{1+c_3e^{rt}}$$

Iz $\frac{N}{K-N} = c_3e^{rt}$ dobijamo $\frac{N(0)}{K-N(0)} = c_3e^{r0} = c_3$ pa je:

$$N(t) = \frac{\frac{N(0)}{K-N(0)}Ke^{rt}}{1 + \frac{N(0)}{K-N(0)}e^{rt}} = \frac{N(0)Ke^{rt}}{K - N(0) + N(0)e^{rt}} = \frac{K}{\frac{K-N(0)+N(0)e^{rt}}{N(0)e^{rt}}} = \frac{K}{\frac{Ke^{-rt}}{N(0)} - e^{-rt} + 1} \;\Rightarrow$$

$$\boxed{N(t) = \frac{K}{1 + e^{-rt}(\frac{K}{N(0)} - 1)}}$$

Ovaj model naziva se **logistički (Verhulstov) model rasta populacije**.

Grabljivci i plen

Neka je $G(t)$ broj **grabljivaca** (npr. lisica), a $P(t)$ broj **plena** (npr. zečeva) u trenutku t u nekom posmatranom staništu. Grabljivci G kao hranu koriste isključivo plen P, a pretpostavka je da plen P ima dovoljno hrane tako da ona ne utiče na njihovu smrtnost. Model možemo predstaviti sistemom diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bPG, \quad \frac{dG}{dt} = cPG - mG,$$

gde a predstavlja priraštaj plena, b stopu ulovljenog plena, c stopu rađanja grabljivaca, a m mortalitet grabljivaca. Ovaj model naziva se **Lotka-Voltera model**. Stacionarna rešenja modela, tj. rešenja u kojima nema dalje promene u populacijama, dobijaju se rešavanjem sistema:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bPG = 0 \;\Rightarrow\; P = \frac{m}{c} \equiv P_s$$

$$\frac{dG}{dt} = cPG - mG = 0 \;\Rightarrow\; G = \frac{a}{b} \equiv G_s$$

Model možemo transformisati u sledeći oblik:

$$\frac{dP}{dt} = aP(1 - \frac{G}{G_s}) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = ax(1-y)$$

$$\frac{dG}{dt} = -mG(1 - \frac{P}{P_s}) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = -my(1-x)$$

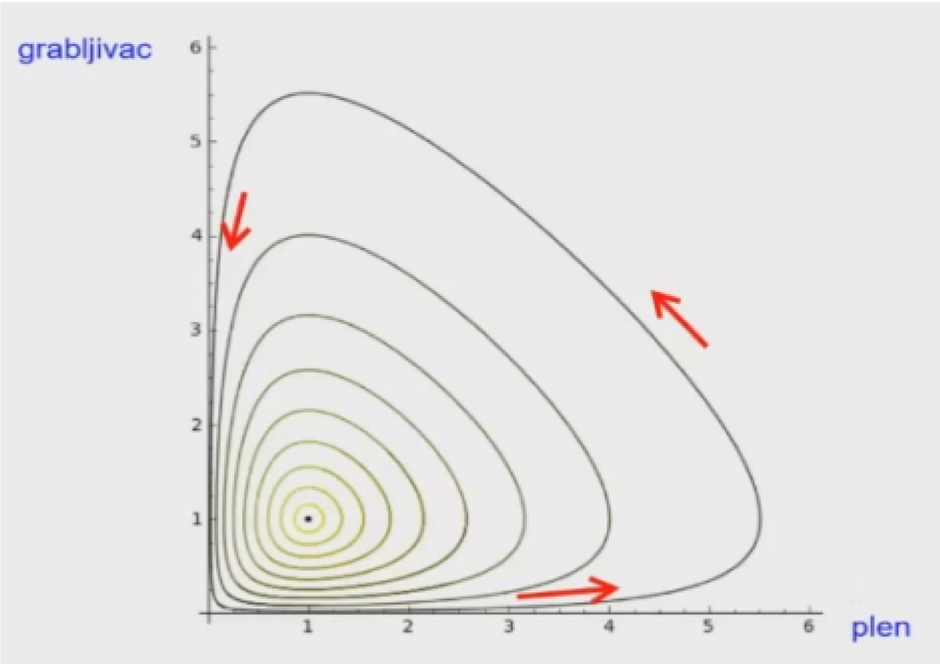
Odavde sledi:

$$dt = \frac{dx}{ax(1-y)} = \frac{dy}{-my(1-x)} \;\Rightarrow\; ax(1-y)dy = -my(1-x)dx \;\Rightarrow$$

$$ax(1-y)dy + my(1-x)dx = 0 \Big/ : xy \;\Rightarrow\; a(\frac{1}{y} - 1)dy + m(\frac{1}{x} - 1)dx = 0 \Big/ \int \;\Rightarrow$$

$$\boxed{a(\ln y - y) + m(\ln x - x) = c}$$

Za različite konstante c dobijamo dijagram trajektorija modela na kojem se vidi da populacije periodično i večno osciluju. Oscilovanje se nastavlja čak i kada populacija neke jedinke postane jako mala, tj. kad u praksi više nije moguća reprodukcija.



Dimenzije i jedinice fizičkih veličina

Dimenziona homogenost

Svođenje na bezdimenzione veličine - primer slobodnog pada

Svođenje na bezdimenzione veličine - rotacija sistema dva tela

Bakingemova Pi teorema i primer matematičkog klatna

Bakingemova Pi teorema i primer probe nuklearne bombe

Skaliranje i umanjeni modeli. Primer kretanja lopte kroz fluid

Penziona štednja

Formula za promenu kapitala glasi:

$$K(t+\Delta t) = K(t) + pK(t) = (1+p)K(t),$$

gde je p **kamatna stopa** za period Δt, a $K(t)$ **kapital** u trenutku t. Diskretizujmo ovaj problem pretpostavkom da je period ukamaćivanja jedan mesec. Svakog meseca u fond ulažemo fiksiran novčani iznos A, a kapitalu K se pripisuje kamata po stopi p. Potrebno je odrediti stanje fonda nakon n meseci, s tim da je fond inicijalno prazan, odnosno $K_0 = 0$. Slično formuli za promenu kapitala dobijamo:

$$K_{n+1} = (1+p)K_n + A$$

Rešavamo diferencnu jednačinu:

$$K_n = (1+p)K_{n-1} + A \ \Rightarrow\ K_n - (1+p)K_{n-1} = A \ \Rightarrow\ H_n - (1+p)H_{n-1} = 0 \ \Rightarrow$$

$$K(x) = x - (1+p) = 0 \ \Rightarrow\ x = 1+p \ \Rightarrow\ H_n = c(1+p)^n \ \Rightarrow$$

$$P_n = S,\ P_n - (1+p)P_{n-1} = A \ \Rightarrow\ S - (1+p)S = A \ \Rightarrow\ S(1-1-p) = A \ \Rightarrow$$

$$-pS = A \ \Rightarrow\ S = -\frac{A}{p} \ \Rightarrow\ P_n = -\frac{A}{p} \ \Rightarrow$$

$$K_n = H_n + P_n = c(1+p)^n - \frac{A}{p} \ \Rightarrow\ K_0 = 0 = c(1+p)^0 - \frac{A}{p} \ \Rightarrow\ c = \frac{A}{p} \ \Rightarrow$$

$$\boxed{K_n = \frac{A}{p}((1+p)^n - 1)}$$

Razmnožavanje zečeva

Neka je Z_n ukupan broj zečeva u nekom staništu, O_n broj parova odraslih zečeva i M_n broj parova mladih zečeva. Očigledno važi $Z_n = 2(M_n + O_n)$. Pretpostavimo da zečevi ne umiru i da važe sledeća pravila:

1. Za mesec dana jedan par odraslih zečeva napravi jedan par mladih zečeva, tj. $M_{n+1} = O_n$. Ne dodaje se M_n jer će oni da odrastu po drugom pravilu.
2. Mladim zečevima je potrebno mesec dana da odrastu, tj. $O_{n+1} = O_n + M_n$.

Iz ova dva pravila sledi $O_{n+1} = O_n + O_{n-1}$, a uzećemo da važi i $O_0 = 0$ i $O_1 = 1$, čime dobijamo Fibonačijev niz. Rešavamo diferencnu jednačinu:

$$O_n = O_{n-1} + O_{n-2} \ \Rightarrow\ O_n - O_{n-1} - O_{n-2} = 0 \ \Rightarrow\ K(x) = x^2 - x - 1 = 0 \ \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \varphi \\ 1-\varphi \end{cases} \ \Rightarrow\ O_n = c_1\varphi^n + c_2(1-\varphi)^n,$$

gde je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ odnos zlatnog preseka. Važi:

$$O_0 = c_1 + c_2 = 0, \quad O_1 = c_1\varphi + c_2(1-\varphi) = 1$$

Rešavanjem sistema dobijamo $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, pa dobijamo:

$$\boxed{O_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \; M_n = O_{n-1}, \; Z_n = 2(M_n + O_n)}$$

Pomorske bitke

Posmatrajmo pomorsku bitku dve flote. Neka su A_n i B_n broj brodova u n-toj fazi bitke prve i druge flote, redom. Pretpostavka je da su gubici jedne strane nakon jedne faze bitke proporcionalni veličini protivničke flote, pa sledi model u obliku sistema diferencnih jednačina:

$$A_{n+1} = A_n - aB_n$$
$$B_{n+1} = B_n - bA_n,$$

gde a i b predstavljaju ubojitost protivničke flote. Sistem rešavamo tako što ga prvo zapišemo u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

Odredimo sopstvene vrednosti matrice M:

$$Mv = \lambda v \;\Rightarrow\; Mv - \lambda v = 0 \;\Rightarrow\; (M - \lambda I)v = 0 \;\Rightarrow$$
$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -a \\ -b & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - ab = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \mp \sqrt{ab}$$

Odredimo sopstvene vektore matrice M:

1. $\lambda_1 = 1 - \sqrt{ab}$

$$\begin{bmatrix} 1-1+\sqrt{ab} & -a \\ -b & 1-1+\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{ab}v_{11} - av_{12} = 0$$
$$-bv_{11} + \sqrt{ab}v_{12} = 0$$

Vektori su linearno zavisni, pa možemo uzeti $v_{11} = \sqrt{a}$ i $v_{12} = \sqrt{b}$, tj. $v_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}$

2. $\lambda_1 = 1 + \sqrt{ab}$

$$\begin{bmatrix} 1-1-\sqrt{ab} & -a \\ -b & 1-1-\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$-\sqrt{ab}v_{21} - av_{22} = 0$$

$$-bv_{21} - \sqrt{ab}v_{22} = 0$$

Vektori su linearno zavisni, pa možemo uzeti $v_{21} = \sqrt{a}$ i $v_{22} = -\sqrt{b}$, tj. $v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix}$

Predstavimo $\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$ preko M i $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} = M^2 \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix} = \dots = M^n \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \star$$

Predstavimo $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$ kao linearnu kombinaciju sopstvenih vektora:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = c_1v_1 + c_2v_2 = c_1 \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a}(c_1 + c_2) \\ \sqrt{b}(c_1 - c_2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A_0 = \sqrt{a}(c_1 + c_2) \Big/ : \sqrt{a}$$

$$B_0 = \sqrt{b}(c_1 - c_2) \Big/ : \sqrt{b}$$

$$\frac{A_0}{\sqrt{a}} = c_1 + c_2$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{b}} = c_1 - c_2$$

$$\Rightarrow \frac{A_0}{\sqrt{a}} + \frac{B_0}{\sqrt{b}} = 2c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{b}A_0 + \sqrt{a}B_0}{2\sqrt{ab}}, \; c_2 = \frac{\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0}{2\sqrt{ab}} \Rightarrow$$

$$\star = M^n(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1M^nv_1 + c_2M^nv_2 = c_1\lambda_1^nv_1 + c_2\lambda_2^nv_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}B_0)(1 - \sqrt{ab})^n + \frac{1}{2}(A_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}B_0)(1 + \sqrt{ab})^n \\ \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0)(1 - \sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0)(1 + \sqrt{ab})^n \end{bmatrix}}$$

Ako posmatramo dobijena rešenja, prvi sabirak u oba slučaja teži nuli kada $n \to \infty$ jer $(1 - \sqrt{ab})^n \to 0$ jer $a, \; b \in (0, \; 1)$, a $A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}B_0 > 0$ i $\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0 > 0$. Drugi sabirak zavisi od konstante c_2 pa dobijamo:

- $c_2 > 0 \Rightarrow A_n \to +\infty, \; B_n \to -\infty \Rightarrow A_n$ pobeđuje
- $c_2 < 0 \Rightarrow A_n \to -\infty, \; B_n \to +\infty \Rightarrow B_n$ pobeđuje
- $c_2 = 0 \Rightarrow A_n \to 0, \; B_n \to 0 \Rightarrow$ nerešeno

Možemo odrediti i fazu bitke u kojoj se ona završava. Pretpostavimo da A_n pobeđuje. Pobeda će se u tom slučaju desiti kada je $B_n \leq 0$:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0)(1 - \sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0)(1 + \sqrt{ab})^n \leq 0 \Big/ \cdot \frac{-2}{(1 - \sqrt{ab})^n(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0)}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}\right)^n \geq \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}A_0+B_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}A_0-B_0} \Big/ \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}\right)^n \geq \frac{\sqrt{b}A_0+\sqrt{a}B_0}{\sqrt{b}A_0-\sqrt{a}B_0} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \Big/ \ln$$

$$n \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}} \geq \ln \frac{\sqrt{b}A_0+\sqrt{a}B_0}{\sqrt{b}A_0-\sqrt{a}B_0}$$

$$\boxed{n \geq \frac{\ln(\sqrt{b}A_0+\sqrt{a}B_0)-\ln(\sqrt{b}A_0-\sqrt{a}B_0)}{\ln(1+\sqrt{ab})-\ln(1-\sqrt{ab})}}$$

Nelinearne diferencne jednačine - logističko preslikavanje

Čudni atraktori

Fraktali. Mandelbrotov i Julia skupovi

Iteracije sistema funkcija

Ćelijski automati

Ekonomski modeli - monopol

Ekonomski modeli - Kurnoov duopol

Modeliranje kod izbora

Oscilacije - mehanički i električni model

Neprigušene oscilacije i rezonanca

Prigušene oscilacije i praktična rezonanca