# Primena projektivne geometrije u računarstvu

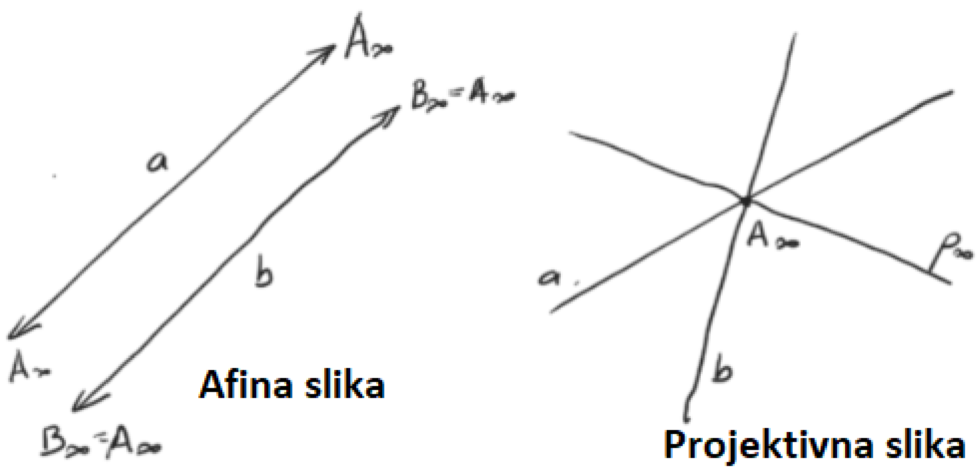
## 2023/2024.

## Predavanja

## Projektivna ravan

**Homogene koordinate tačke** M(x, y) afine ravni $R^2$ su ma koja trojka ($x_1$:$x_2$:$x_3$) takva da važi: x = $\frac{x_1}{x_3}$, y = $\frac{x_2}{x_3}$, $x_3 \neq 0$. Vektor $\vec{M}$ = ($x_1$, $x_2$, $x_3$) je **vektor predstavnik tačke** M. Za $\lambda \neq 0$ važi da su i ($\lambda x_1$, $\lambda x_2$, $\lambda x_3$) homogene koordinate tačke M. Zamenom relacije u jednačinu prave p: ax + by + c = 0 dobijamo p: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Isto važi i kada se jednačina pomnoži sa nekim $\lambda \neq 0$, pa trojka [a:b:c] predstavlja **homogene koordinate prave** p, a vektor $\vec{p}$ = (a, b, c) je **vektor predstavnik prave** p. Prava $p_\infty : x_3 = 0$ naziva se **beskonačno daleka prava**, a svaka tačka $B_\infty(x_1 : x_2 : 0)$ koja joj pripada **beskonačno daleka tačka**.

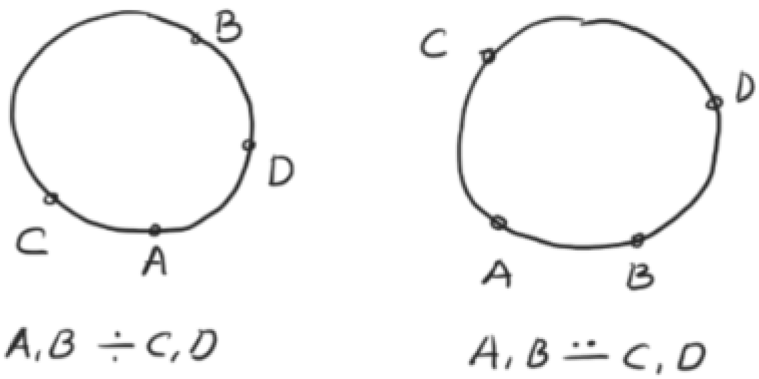
Afina ravan dopunjena tačkama beskonačno daleke prave naziva se **dopunjena** ili **proširena afina ravan** i označava sa $\overline{R}^2$. Paralelne prave afine ravni se seku u beskonačno dalekoj tački dopunjene afine ravni:



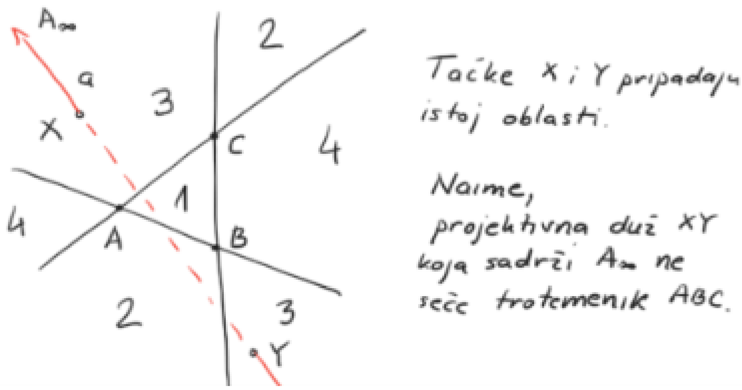

**Realna projektivna ravan** je skup tačaka $RP^2$ := {($x_1$:$x_2$:$x_3$)}, pri čemu ne mogu sve tri homogene koordinate biti jednake nuli. Možemo identifikovati $RP^2$ sa proširenom afinom ravni:
$RP^2$ := {($x_1$:$x_2$:$x_3$)} = {($x_1$:$x_2$:$x_3$) | $x_3 \neq 0$} $\cup$ {($x_1$:$x_2$: 0)} = {($\frac{x_1}{x_3}$:$\frac{x_2}{x_3}$: 1)} $\cup$ {($x_1$:$x_2$: 0)} = $R^2 \cup p_\infty = \overline{R}^2$.
Geometrijski možemo videti realnu projektivnu ravan kao snop pravih prostora. Sve prave realne projektivne ravni čine projektivnu ravan $\tilde{R}P^2$ := {[$x_1$:$x_2$:$x_3$]} koja se zove **dualna projektivna ravan pravih**. Geometrijski možemo videti dualnu projektivnu ravan pravih kao skup svih ravni u prostoru $R^3$ kroz koordinatni početak. Homogene koordinate prave p = AB se dobijaju vektorski proizvodom $\vec{p} = \vec{A} \times \vec{B}$. Homogene koordinate presešne tačke {P} = a $\cap$ b se dobijaju vektorski proizvodom $\vec{P} = \vec{a} \times \vec{b}$. U projektivnoj ravni se svake dve prave seku.

Iskaz $I'$ dobijen zamenom reči tačka i prava, odnosno pripada i sadrži u nekom iskazu I naziva se **dualan iskaz**. Nekada se reči "pripada" i "sadrži" menjaju sa "**je incidentno**". Na primer, I: Postoji jedinstvena prava p koja sadrži tačke A i B; $I'$: Postoji jedinstvena tačka P koja pripada pravama a i b. **Princip dualnosti u ravni**: Ako je iskaz I teorema projektivne ravni $RP^2$, tada je i njemu dualan iskaz teorema projektivne ravni. Definicije takođe mogu biti dualne, npr. kolinearne tačke i konkurentne prave. Neki dualni objekti su dvorazmera tačaka i dvorazmera pravih, trotemenik i trostranik itd.

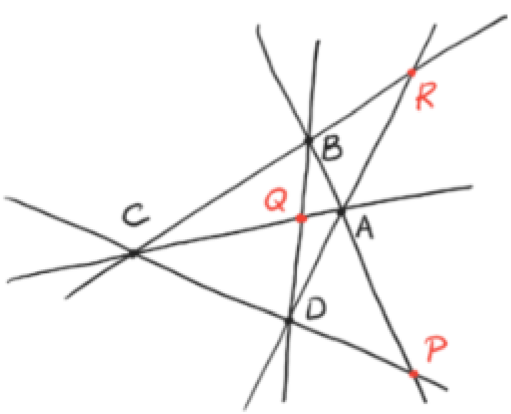
Tačka C pripada pravoj p = AB ako važi $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$, za neke brojeve $\alpha, \beta \in$ R koji nisu istovremeno nula. Jednačina pomnožena sa bilo kojim $\lambda \neq 0$ daje istu tačku, pa su ($\alpha : \beta$) **homogene koordinate tačke na pravoj** p. Svaka prava projektivne ravni je **realna projektivna prava** $RP^1$ koju dobijamo dodavanjem beskonačno daleke tačke $P_\infty$ afinoj pravoj: p = $RP^1$ = {($\alpha : \beta$)} = {($\frac{\alpha}{\beta}$: 1)} $\cup$ {(1 : 0)} = R $\cup$ {$P_\infty$}. Model projektivne prave je krug pa na njoj ne postoji relacija između, već **relacija razdvojenosti parova tačaka**. Kažemo da par tačaka A, B razdvaja par tačaka C, D i pišemo A, B $\div$ C, D. Dve tačke A, B razbijaju pravu AB na dve projektivno ekvivalentne **projektivne duži** - onu koja sadrži tačku C i onu koja sadrži tačku D. Prelaskom na afinu geometriju, tj. izborom beskonačno daleke prave $p_\infty$ relacija razdvajanja postaje relacija između: A - C - B $\equiv$ A, B $\div$ C, $P_\infty$.




**Trotemenik** ABC je figura projektivne ravni koja se sastoji od tri nekolinearne tačke A, B, C i tri prave AB, BC, CA njima određene. Trotemenik razbija projektivnu ravan kojoj pripada na 4 oblasti:




Za četiri tačke od kojih nikoje tri nisu kolinearne kažemo da su u **opštem položaju**. **Četvorotemenik** ABCD je figura projektivne ravni koja se sastoji od četiri tačke u opštem položaju (temena) i šest pravih (ivice) određenih tim tačkama. **Dijagonalne tačke četvorotemenika** su preseci nesusednih ivica.

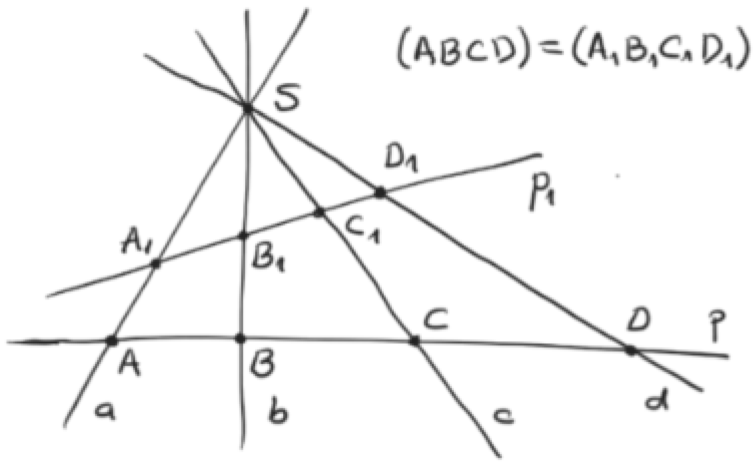



Neka su A, B, C, D kolinearne tačke i važi $\vec{C} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$, $\vec{D} = \gamma\vec{A} + \delta\vec{B}$. **Dvorazmera tačaka** A, B, C i D je broj (A, B, C, D) := $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$. Dvorazmera (a, b, c, d) pravih se definiše dualno, odnosno (a, b, c, d) := $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\delta}{\gamma}$, ako $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{d} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$. Osobine dvorazmere:

- (A, B, C, D) = $(B, A, C, D)^{-1}$
- (A, B, C, D) = (C, D, A, B)

- za različite tačke važi (A, B, C, D) $\neq$ 0, 1
- ako su date tačke A, B, C i broj $\mu \neq 0, 1$ tada postoji jedinstvena tačka D takva da važi (A, B, C, D) = $\mu$.

Parovi tačaka A, B i C, D su **harmonijski konjugovani** ako (A, B, C, D) = -1. Pišemo $H$(A, B ; C, D). Ako su a, b, c, d konkurentne prave i A $\in$ a, B $\in$ b, C $\in$ c, D $\in$ d kolinearne tačke onda je (A, B, C, D) = (a, b, c, d). Posledica: **dvorazmera je invarijanta centralnog projektovanja**.




Afino posmatrano, dvorazmera je odnos dve razmere: (A, B, C, D) = $\frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} : \frac{\vec{AD}}{\vec{DB}}$. Razdvojenost parova tačaka može se uvesti pomoću dvorazmere: A, B $\div$ C, D $\equiv$ (A, B, C, D) < 0. Središte duži AB je konjugovano sa beskonačno dalekom tačkom, odnosno (ABSP$_\infty$) = -1.

## Projektivna preslikavanja

**Projektivno preslikavanje** f : RP$^2$ $\rightarrow$ RP$^2$ je ono koje preslikava tačku M(x$_1$ : x$_2$ : x$_3$) u tačku M$'$(x$_1'$ : x$_2'$ : x$_3'$) formulama:

- $\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, det(p$_{ij}$) $\neq$ 0.

Broj $\lambda \neq 0$ sugeriše da su u pitanju homogene koordinate. Projektivno preslikavanja je indukovano linearnim preslikavanjem vektorskog prostora R$^3$. Preslikavanje kraće zapisujemo $\lambda$x$'$ = Px, a njemu inverzno preslikavanje zapisujemo $\lambda$x = P$^{-1}$x$'$. Kompoziciji preslikavanja odgovara množenje matrica, a inverznom preslikavanju inverzna matrica. Matrice P i $\lambda$P, $\lambda \neq 0$ predstavljaju isto preslikavanje. Projektivna preslikavanja čine **projektivnu grupu** PGl$_3$ (R) koja je osmodimenziona, odnosno opisana je sa 8 parametara. **Projektivno preslikavanje čuva kolinearnost, konkurentnost i dvorazmeru, ali ne čuva rameru i paralelnost**. Na primer, pravougaonik i trapez su projektivno ekvivalentni.

**Osnovna teorema projektivne geometrije**: Postoji jedinstveno projektivno preslikavanje ravni RP$^2$ koje četiri tačke A, B, C, D u opštem položaju slika redom u tačke A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ u opštem položaju. Postojaće jedinstveno preslikavanje koje slika **bazne tačke** A$_0$(1 : 0 : 0), B$_0$(0 : 1 : 0), C$_0$(0 : 0 : 1), D$_0$(1 : 1 : 1) u tačke A, B, C, D, kao i jedinstveno preslikavanje g koje slika bazne tačke u tačke A$'$, B$'$, C$'$, D$'$. Traženo preslikavanje iz A, B, C, D u A$'$, B$'$, C$'$, D$'$ će onda biti g $\circ$ f$^{-1}$. Posledica: projektivno preslikavanje ravni sa 4 fiksne tačke u opštem položaju je identitet.

Pri projektivnom preslikavanju prava u: $p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 = 0$, određena zadnjom vrstom matrice P, slika se u beskonačno daleku pravu $p_\infty$.

**Afino preslikavanje** tačku M(x, y) preslikava u tačku M(x′, y′) formulama:

- $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Kolone matrice A su koordinate slika baznih vektora, a matrice B slika koordinatnog početka. Afina preslikavanja su bijekcije, čuvaju kolinearnost, konkurentnost, paralelnost, razmeru. Mogu da preslikaju trougao u proizvoljan trougao. Afino preslikavanje je specijalan slučaj projektivnog preslikavanja proširene afine ravni, i to kada projektivno preslikavanje preslikava beskonačno daleku pravu u sebe i obrnuto:

- $\lambda \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Odnosno, grupa afinih preslikavanja je izomorfna podgrupi projektivnih preslikavanja ravni $\overline{R}^2$ koje čuvaju beskonačno daleku pravu $p_\infty$.

Naivni algoritam za određivanje projektivnog preslikavanja:

1. **Ulaz**: homogene koordinate 4 originalne tačke A, B, C, D i 4 njihove slike A′, B′, C′, D′ u opštem položaju.
2. **Izlaz**: 3x3 matrica P projektivnog preslikavanja ravni koja slika A, B, C, D u A′, B′, C′, D′.
3. **Algoritam**:
   - Odrediti $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ tako da D = $\alpha$A + $\beta$B + $\gamma$C. $P_1$ je matrica sa kolonama $\alpha$A, $\beta$B, $\gamma$C.
   - Odrediti $\alpha', \beta', \gamma' \neq 0$ tako da D′ = $\alpha'$A′ + $\beta'$B′ + $\gamma'$C′. $P_2$ je matrica sa kolonama $\alpha'$A′, $\beta'$B′, $\gamma'$C′.
   - Tražena matrica preslikavanja je $P = P_2 P_1^{-1}$. Matrica je određena do na $\lambda$P, $\lambda \neq 0$.
4. **Prednosti**: geometrijski jasan i jednostavan za implementaciju.
5. **Mane**: radi samo za 4 tačke, a u praksi je često potrebno izvršiti algoritam za mnogo više tačaka.

Lema: Neka su $M(x_1 : x_2 : x_3)$ i $M'(x_1' : x_2' : x_3')$ odgovarajuće tačke projektivnog preslikavanja ravni čija je matrica $P = (p_{ij})$. Tada vektor $(p_{11}, p_{12}, p_{13}, p_{21}, p_{22}, p_{23}, p_{31}, p_{32}, p_{33})$ zadovoljava homogeni sistem ranga 2 čija je matrica formata 2x9:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -x_3'x_1 & -x_3'x_2 & -x_3'x_3 & x_2'x_1 & x_2'x_2 & x_2'x_3 \\ x_3'x_1 & x_3'x_2 & x_3'x_3 & 0 & 0 & 0 & -x_1'x_1 & -x_1'x_2 & -x_1'x_3 \end{pmatrix}$$

U praksi je poželjno imati što više korespodencija kako bi se što više izbegle nepreciznosti pri određivanju preslikavanja. Četiri korespodencije jednoznačno određuju projektivno preslikavanje koje neće zadovoljiti ostale parove tačaka. Numeričkim metodama se traže preslikavanja koja minimizuju greške. **SVD** (**Singular Value Decomposition**) **dekompozicija matrice**: Ako je matrica A formata mxn postoji jednoznačna dekompozicija $A = UDV^T$, gde je U ortogonalna matrica formana nxn, V ortogonalna matrica formata mxm, a D kvazidijagonalna matrica formata nxm, sa opadajućim pozitivnim vrednostima na dijagonali.

**DLT** (**Direct Linear Transformation**) **algoritam**:

1. **Ulaz**: homogene koordinate n (n $\geq$ 4) originalnih tačaka M$_i$ i n njihovih slika M$'_i$.
2. **Izlaz**: 3x3 matrica P projektivnog preslikavanja tako da $\lambda$M$'_i$ = PM$_i$.
3. **Algoritam**:
   - Za svaku korespodenciju M$_i$ $\leftrightarrow$ M$'_i$ odrediti 2x9 matricu kao u lemi.
   - Spojiti te matrice u jednu matricu A formata 2nx9.
   - Odrediti SVD dekompoziciju matrice A, A = UDV$^T$.
   - Matrica P je poslednja kolona matrice V.
4. **Prednosti**: algoritam minimalizuje grešku i određuje preslikavanje sa više od 4 korespodencije.
5. **Mane**: algoritam je algebarske, a ne geometrijske prirode, pa i pored minimalizacije i dalje postoji neka greška. Takođe, nije invarijantan u odnosu na promenu koordinata.

Da bismo značajno smanjili grešku možemo uraditi **normalizaciju koordinata tačaka**. Takođe, matrica preslikavanja P onda neće zavisiti od izbora koordinata. Algoritam normalizacije n tačaka M$_i$:

- Izračunati afino težiste C sistema n tačaka M$_i$.
- Translirati težište u koordinatni početak. Matrica translacije je G.
- Skalirati tačke tako da prosečna udaljenost tačke od početka bude $\sqrt{2}$. Matrica homotetije je S.
- Matrica normalizacija je T = SG.
- Tačke $\overline{M}_i$ = TM$_i$ su normalizovane tačke.

**Normalizovani DLT algoritam**:

1. **Ulaz**: homogene koordinate n (n $\geq$ 4) originalnih tačaka M$_i$ i n njihovih slika M$'_i$.
2. **Izlaz**: 3x3 matrica P projektivnog preslikavanja tako da $\lambda$M$'_i$ = PM$_i$.
3. **Algoritam**:
   - Normalizovati originalne tačke transformacijom T: $\overline{M}_i$ = TM$_i$.
   - Normalizovati slike tačka transformacijom T$'$: $\overline{M}'_i$ = T$'M'_i$.
   - Odrediti originalnim DLT algoritmom matricu transformacije $\overline{P}$ iz korespodencija $\overline{M}_i \leftrightarrow \overline{M}'_i$.
   - Tražena matrica transformacije je P = $T'^{-1}\overline{P}$T.

Prilikom očitavanja koordinata tačaka do velikih grešaka dovode tačke koje su sasvim pogrešno identifikovane. Pogrešne tačke nazivamo **uljezi** (**outliers**), dok su ostale **tačne tačke** (**inliers**). Prikaz **RANSAC** (RANdom SAmple Consensus) algoritma na primeru određivanja prave:

- Dve tačke se slučajno biraju i one određuju pravu. Nosač te prave su tačke koje su na $\epsilon$-udaljenosti od prave.
- Određen broj puta se biraju po dve tačke i određuje nosač.
- Konsenzusom se bira nosač sa najviše tačaka i tačke tog nosača se smatraju tačnim, a ostale uljezima.
- Algoritam za određivanje prave se onda primenjuje samo nad tačnim tačkama.

**RANSAC algoritam pri određivanju projektivnog preslikavanja**

- Izabrati slučaju 4 tačke i njihove slike.
- Odrediti projektivno preslikavanje f naivnim algoritmom.
- Odrediti nosač te četiri tačke koristeći simetrično rastojanje:
  - d((M, $M'$), f) = d($M'$, f($M'$))$^2$ + d(M, $f^{-1}M'$)$^2$ < $\epsilon$ = $\sqrt{5.99}\sigma$, gde je $\sigma$ standardna devijacija svih tačaka.
- Ponoviti biranje 4 tačke n puta, gde se n određuje adaptivnim algoritmom.
- Odabrati tačne tačke kao nosač koji ima najveći broj elemenata.
- Odrediti DLT algoritmom matricu preslikavanja na osnovu tačnih tačaka.

## Afina preslikavanja

**Afina preslikavanja** u projektivnom prostoru:

- $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$ = P $\cdot$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, gde je P matrica afinog preslikavanja proširena na dimenziju 3x3.

1. **Translacija za $\vec{v}$ = ($v_1$, $v_2$)**:

- $T_{\vec{v}}$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. **Rotacija u odnosu na koordinatni početak za ugao $\phi$**:

- $R_{O,\phi}$ = $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. **Homotetija sa centrom u koordinatnom početku i koeficijentom k**:

- $H_{O,k}$ = $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. **Skaliranje u koordinatnom početku sa $\lambda_1$ po x-osi i $\lambda_2$ po y-osi**:

- $S_{O,\lambda_1,\lambda_2}$ = $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

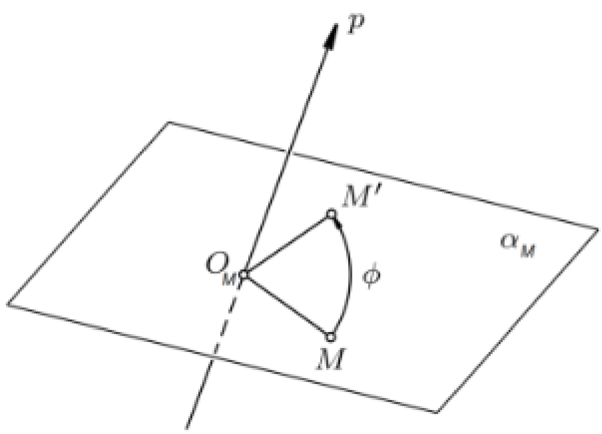
## Izometrije

**Izometrije** su preslikavanja koja čuvaju dužine, a time i uglove, površine, razmeru, paralelnost. Izometrije su afina preslikavanja. Izometrije koje čuvaju orijentaciju nazivaju se **kretanja** ili **direktne izometrije**. Svaka izometrija f može da se predstavi kao kompozicija izometrije f$'$ koja fiksira koordinatni početak i translacije: $f = T_{\overrightarrow{O'O}} \circ f'$. Preslikavanje f$'$ zove se **linearni deo**, a $T_{\overrightarrow{O'O}}$ **translatorni deo**.

Svaka izometrija (ravni, prostora) je afino preslikavanje čiji je linearni deo predstavljen ortogonalnom matricom A, tj. A$^T$A = E.

- 1 = $\det E$ = $\det A^T A$ = ($\det A^T$)($\det A$) = $(\det A)^2$ pa je $\det A$ = $\pm 1$
- Za kretanja važi $\det A$ = 1.
- Ukoliko je $\det A$ = -1 izometrija sadrži refleksiju i ne može se fizički realizovati.
- Dakle, sve izometrije ravni su kompozicija translacije i rotacije ili translacije i osne refleksije.

**Rotacija** $R_p(\phi)$ **oko orijentisane prave** $p$ **za ugao** $\phi \in [0, 2\pi]$




- Za $\phi$ < $\pi$ vektori $\overrightarrow{O_m M}$, $\overrightarrow{O_m M'}$, $\overrightarrow{p}$ čine pozitivno, a za $\phi$ > $\pi$ negativno orijentisanu bazu, dok su za $\phi$ = $\pi$ zavisni.
- $R_p(\phi)$ = $R_{-p}(2\pi - \phi)$, pa možemo uzeti $\phi \leq \pi$.
- $R_p(\pi)$ = $R_{-p}(\pi)$ je refleksija u odnosu na pravu p.

Neka je Oxyz fiksiran **svetski koordinatni sistem**. Rotacije oko koordinatnih osa zovemo **svetske rotacije**.

- $R_x(\phi)$ = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$, $R_y(\phi)$ = $\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$, $R_z(\phi)$ = $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Formula Rodrigeza** - matrica rotacije $R_p(\phi)$ za ugao $\phi$ oko prave čiji je **jedinični vektor** p, a koja sadrži koordinatni početak je:

- $[R_p(\phi)]$ = (1 - $\cos\phi$)pp$^T$ + $\cos\phi$E + $\sin\phi$p$_x$.
- p$_x$ je matrica vektorskog množenja vektorom $\overrightarrow{p}(p_1, p_2, p_3)$: $\begin{pmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{pmatrix}$.
- pp$^T$ = $\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_2p_1 & p_2^2 & p_2p_3 \\ p_3p_1 & p_3p_2 & p_3^3 \end{pmatrix}$.

**I Ojlerova teorema**: Svako kretanje f prostora koje ima fiksnu tačku O je rotacija oko neke orijentisane prave p koja sadrži O, za ugao $\phi \in$ [0, $\pi$].

**Algoritam određivanja ugla i ose rotacije na osnovu matrice rotacije**:

- **Ulaz**: Ortogonalna matrica A $\neq$ E, $\det A$ = 1.
- **Izlaz**: Jedinični vektor $\overrightarrow{p}$ i ugao $\phi \in$ [0, $\pi$] takvi da A = [$R_p(\phi)$].
- **Algoritam**:
  1. Odrediti jedinični sopstveni vektor $\overrightarrow{p}$ za $\lambda$ = 1.
  2. Odrediti proizvoljan jedinični vektor $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{p}$.
  3. Odrediti jedinični vektor $\overrightarrow{u'}$ = A$\overrightarrow{u}$.
  4. Odrediti ugao kao $\phi$ = $\langle u, u' \rangle$ = $\arccos(u, u')$.
  5. Ako je mešoviti proizvod [$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{p}$] < 0, uzeti $\overrightarrow{p}$ = -$\overrightarrow{p}$ da bi rotacija bila u pozitivnom smeru.

Ako je kretanje f predstavljeno sopstvenim rotacijama za **Ojlerove** (**Tejt-Brajanove**) **uglove**:
f = $R_{x_2}(\phi) \circ R_{y_1}(\theta) \circ R_z(\psi)$, tada je njegova matrica u polaznom reperu e = Oxyz jednaka proizvodu matrica tih rotacija u suprotnom redosledu: A = [f]$_e$ = $R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$.

**II Ojlerova teorema**: Svako kretanje f prostora koje ima fiksnu tačku O može se predstaviti kao kompozicija tri sopstvene rotacije.

Matrica A = $R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ je u opštem slučaju:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \cos\psi\sin\theta\sin\phi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\psi\sin\theta + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\theta\sin\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \cos\psi\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix}$$

Opšte rešenje:

$$\theta = \arcsin(-a_{31})$$

$$\psi = \arctan 2(a_{21}, a_{11})$$

$$\phi = \arctan 2(a_{32}, a_{33})$$

Kada je $a_{31}$ = $\pm 1$ gubimo jedan stepen slobode (**slučaj zaključanog žiroskopa**). Za $\theta$ = -$\frac{\pi}{2}$ i $\theta$ = $\frac{\pi}{2}$ redom dobijamo:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\phi+\psi & -\cos\phi+\psi \\ 0 & \cos\phi+\psi & \sin\phi+\psi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sin\phi-\psi & \cos\phi-\psi \\ 0 & \cos\phi-\psi & -\sin\phi-\psi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Postoji beskonačno mnogo rešenja i ona su redom $\phi + \psi = \arccos(a_{22}), \phi - \psi = \arccos(a_{22})$.

**Algoritam određivanja Ojlerovih uglova na osnovu matrice rotacije**:

- **Ulaz**: Ortogonalna matrica A, $\det A$ = 1.
- **Izlaz**: Ojlerovi uglovi $\psi$, $\theta$ i $\phi$ tako da A = $R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$.
- **Algoritam**:
  1. Ako je $a_{31}$ = -1:
     - $\psi$ = $\arctan 2(-a_{12}, a_{22})$, $\theta$ = $\frac{\pi}{2}$, $\phi$ = 0
  2. Ako je $a_{31}$ = 1:
     - $\psi$ = $\arctan 2(-a_{12}, a_{22})$, $\theta$ = -$\frac{\pi}{2}$, $\phi$ = 0
  3. Inače:
     - $\psi$ = $\arctan 2(a_{21}, a_{11})$, $\theta$ = $\arcsin(-a_{31})$, $\phi$ = $\arctan 2(a_{32}, a_{33})$

# Kvaternioni

**Kvaternioni** su brojevi oblika $H$ = {x$i$ + y$j$ + z$k$ + w | x, y, z, w $\in R$}, gde su $i$, $j$ i $k$ **imaginarne jedinice**. Realni i kompleksni brojevi su takođe kvaternioni, tj. $R \subset C \subset H$, $H \cong R^4$. Sabiranje se definiše prirodno, dok je množenje definisano relacijama $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$. Množenje dva kvaterniona je asocijativno, ali nije komutativno. **Realni** i **imaginarni deo kvaterniona** su Re(q) = w i Im(q) =x$i$ + y$j$ + z$k$ = $\vec{v}$. Im($H$) $\cong R^3$ je **podprostor imaginarnih kvaterniona**. Kvaternione zapisujemo i u obliku q = [$\vec{v}$, w]. **Konjugovani kvaternion** kvaterniona q je kvaternion $\overline{q}$ = -x$i$ - y$j$ - z$k$ + w, tj. $\overline{q}$ = [-$\vec{v}$, w]. Norma kvaterniona je |q| = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$ = $\sqrt{q\overline{q}}$.

**Osobine**:

- $q + q_1$ = [$\vec{v}$ + $\vec{v}_1$, w + w$_1$]
- $q \cdot q_1$ = [$\vec{v} \times \vec{v}_1$ + w$\vec{v}$ + w$_1\vec{v}_1$, ww$_1$ - $\langle \vec{v}, \vec{v}_1 \rangle$]
- $\overline{q + q_1}$ = $\overline{q}$ + $\overline{q_1}$, $\overline{qq_1}$ = $\overline{q_1} \cdot \overline{q}$, $\overline{\overline{q}}$ = $q$, Re($q$) = $\frac{q+\overline{q}}{2}$, Im($q$) = $\frac{q-\overline{q}}{2}$
- $|q|^2$ = $\overline{qq_1}$ = $\overline{q_1 q}$, $\langle \vec{q}, \vec{q}_1 \rangle$ = Re($\overline{q}q_1$), $|qq_1|$ = $|q||q_1|$
- $q^{-1}$ = $\frac{\overline{q}}{|q|^2}$, $(qq_1)^{-1} = q_1^{-1}q^{-1}$

**Konjugacija** kvaternionom q $\neq$ 0 je presikavanje C$_q$ : $H \to H$, C$_q$(p) = qpq$^{-1}$. Lema:

- C$_q$ = C$_h$, q, h $\neq$ 0 akko h = $\lambda$q, $\lambda \in R$ / {0}. Zbog ovoga je dovoljno koristiti jedinične kvaternione.
- C$_{q_2}$ $\circ$ C$_{q_1}$ = C$_{q_2 q_1}$, tj. kvaternioni čine grupu u odnosu na množenje.
- C$_q$ je kretanje prostora Im($H$) $\cong R^3$.
- Ako važi $q$ = [$\sin\alpha \cdot \vec{v}$, $\cos\alpha$] i |$\vec{v}$| = 1, preslikavanje C$_q$ je rotacija za ugao 2$\alpha$ oko vektora $\vec{v}$ u pozitivnom smeru. Svaki kvaternion se može predstaviti na ovaj način, tj. svaki kvaternion predstavlja neku svetsku rotaciju.

**Algoritam određivanja kvaterniona na osnovu matrice rotacije**:

- **Ulaz**: Rotacija $R_p(\phi)$ oko ose p = (p$_x$, p$_y$, p$_z$) za ugao $\phi \in$ [0, 2$\pi$).
- **Izlaz**: Jedinični kvaternion q, tako da C$_q$ = $R_p(\phi)$.
- **Algoritam**:
    1. Ako je $\phi$ = 0 kvaternion je q = $\pm 1$.
    2. w = $\cos\frac{\phi}{2}$
    3. Ako p nije jedinični vektor normalizovati ga.
    4. (x, y, z) = $\sin\frac{\phi}{2}$(p$_x$, p$_y$, p$_z$)
    5. q = x$i$ + y$j$ + z$k$ + w

**Algoritam određivanja matrice rotacije na osnovu kvaterniona**:

- **Ulaz**: Jedinični kvaternion q = x$i$ + y$j$ + z$k$ + w.
- **Izlaz**: Jedinični vektor p = (p$_x$, p$_y$, p$_z$) i ugao $\phi \in$ [0, $\pi$] tako da C$_q$ = $R_p(\phi)$.
- **Algoritam**:
    1. Ako q nije jedinični kvaternion normalizovati ga.
    2. Ako je w < 0 onda je q = -q da bismo dobili ugao iz intervala [0, $\pi$].
    3. $\phi$ = 2$\arccos w$
    4. Ako je |w| = 1 onda je p = (1, 0, 0), a inače p = (x, y, z) gde p treba da bude jedinični.

**Četiri načina predstavljanja rotacija**:

$$\text{Ojlerovi uglovi } \psi, \theta, \phi \text{ svetskih rotacija;}$$

$$(18) = A = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \Downarrow \Uparrow \text{A2Euler}$$

$$\text{Matrica } A, A^T A = E, \det A = 1$$

$$\text{A2AngleAxis} \Downarrow \Uparrow \text{Rodrigez (5)}$$

$$\text{Osa-ugao } \mathcal{R}_p(\varphi)$$

$$\text{AngleAxis2Q} \Downarrow \Uparrow \text{Q2AngleAxis}$$

$$\text{Kvaternion } q = xi + yj + zk + w$$

## Položaj objekta u prostoru

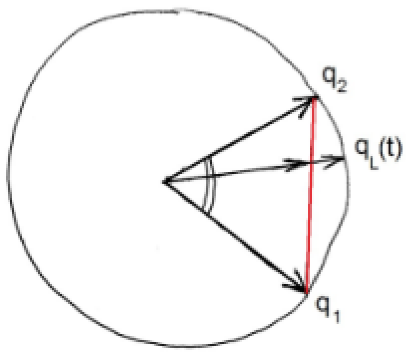
Svaki objekat je inicijalno zadat u svetskom koordinatnom sistemu, tj. centar mu je u koordinatnom početku, a ose poravnate sa koordinatnim osama. Kada se objekat pomeri, novi položaj je zadat **pozicijom**, tj. (x, y, z) koordinatama centra objekta i **orijentacijom**, tj. načinom kako je objekat zarotiran u prostoru. Često se javlja potreba da objekat iz jednog položaja (centar C1) dovedemo u drugi (centar C2) i to se jednostavno rešava **linearnom interpolacijom**:

$$C(t) = (1 - \frac{t}{t_u})C_1 + \frac{t}{t_u}C_2, t \in [0, t_u]$$

Kod promene orijentacije linearna interpolacija daje katastrofalan rezultat. Za interpolaciju orijentacija pogodni su kvaternioni, pa pretpostavimo da su dve interpolacije zadate kvaternionima $q_1$ i $q_2$ koji pripadaju jediničnoj trodimenzionoj sferi. **Lerp interpolacija** (**L**inear Int**erp**olation) podrazumeva uzimanje kvaterniona na duži $q_1 q_2$ i njegovo normiranje čime se on vraća na jediničnu sferu. Koristi se kada je ugao između kvaterniona $q_1$ i $q_2$ mali.

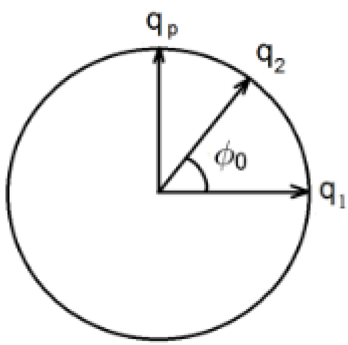
$$q(t) = (1 - \frac{t}{t_m})q_1 + \frac{t}{t_m}q_2, t \in [0, t_m]$$

$$q_L(t) = normalize(q(t))$$




**Slerp interpolacija** (**S**pherical **L**inear Int**erp**olation) predstavlja parametrizaciju kružnog luka $q_1q_2$, gde je parametar odgovarajući centralni ugao. Ova interpolacija daje vizuelno najbolji rezultat jer objekat na kome se više interpolacija ima konstantnu ugaonu brzinu i minimalno uvrtanje.

$$q_S(t) = \frac{\sin(\phi_0(1-\frac{t}{t_m}))}{\sin\phi_0}q_1 + \frac{\sin(\phi_0\frac{t}{t_m})}{\sin\phi_0}q_2, t \in [0, t_m]$$




**Algoritam Slerp interpolacije**:

- **Ulaz**: Jedinični kvaternioni $q_1$ i $q_2$ koji zadaju početnu i krajnju orijentaciju, družina interpolacije $t_m$ i trenutak $t \in [0, t_m]$.
- **Izlaz**: Jedinični kvaternion $q_S(t)$ koji zadaje orijentaciju u trenutku t.
- **Algoritam**:
  1. $\cos\phi_0$ = $\langle q_1, q_2\rangle$
  2. Ako je $\cos\phi_0$ < 0 onda je $q_1$ = -$q_1$ i $\cos\phi_0$ = -$\cos\phi_0$ jer želimo da idemo po kraćem luku sfere.
  3. Ako je $\cos\phi_0$ > 0.95 kvaternioni su previše blizu pa koristimo linearnu interpolaciju.
  4. $\phi_0$ = $\arccos(\cos\phi_0)$
  5. $q_S(t)$ = $\frac{\sin(\phi_0(1-\frac{t}{t_m}))}{\sin\phi_0}q_1 + \frac{\sin(\phi_0\frac{t}{t_m})}{\sin\phi_0}q_2$

**Interpolacija osom i uglom**: Neka su date dve orijentacije $R_{p_0}(\phi_0)$ i $R_{p_1}(\phi_1)$. Neka je $n$ = $p_0 \times p_1$ i $\theta$ = $\angle(p_0, p_1)$. Tada su osa i ugao u trenutku t:

$$p_t = R_n(t_0, p_0), \phi_t = (1-t)\phi_0 + t\phi_1, t \in [0, 1]$$

Poređenje četiri načina predstavljanja orijentacija:

- **Matrice** - suštinski način, laka kompozicija, loša interpolacija.
- **Ojlerovi uglovi** - upotreba u interfejsu, gimbal lock problem, teška kompozicija, loša interpolacija.
- **Osa i ugao** - nema gimbal lock problem, teška kompozicija, dobra interpolacija.

- **Kvaternioni** - nema gimbal lock problem, laka kompozicija, dobra interpolacija, relativno teški za razumevanje i implementaciju.

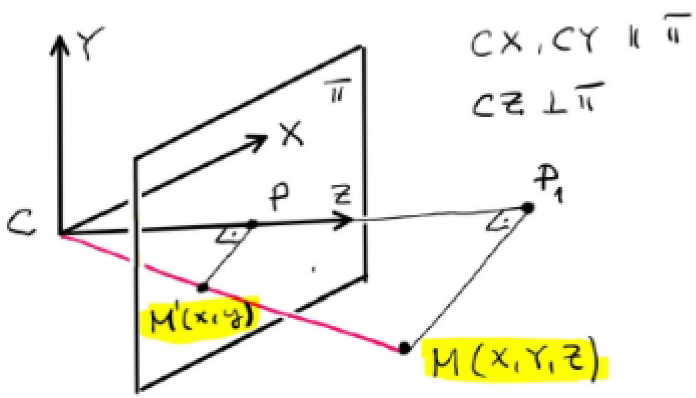
**Senzori** se mogu podeliti u sledeće grupe:

- **Kamere** (crno bele, kolor, 3D, termalne, . . .)
- **Senzori pokreta** (akcelerometar, žiroskop, pedometar, . . .)
- **Senzori pozicije** (magnetometar, barometar, GPS, . . .)
- **Senzori svetla i zvuka** (mikrofon, senzor blizine/udaljenosti, senzor ambijentalnog svetla, . . .)
- **Ostali senzori** (senzor temperature, vlažnosti, otiska prsta, zasićenosti kiseonikom, pulsmetar, . . .)

**Senzori pokreta i pozicije**:

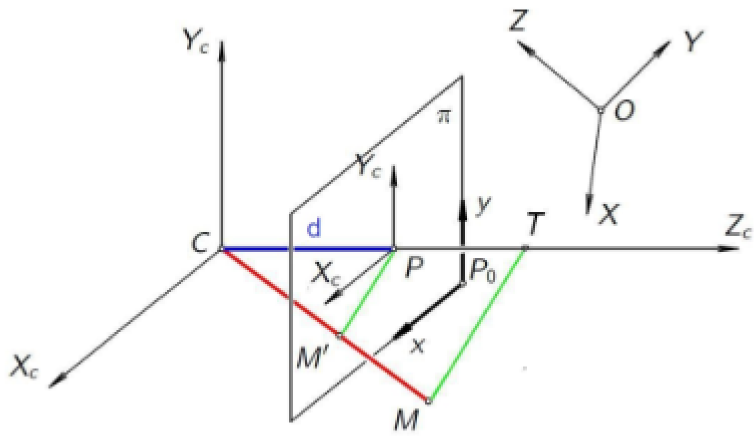
- **Akcelerometar** meri **linearno ubrzanje** po principu "ubrzanje je proporcionalno sili, a sila proporcionalna istezanju opruge". Rezultat je 3-vektor linearnog ubrzanja u koje je uračunato i ubrzanje gravitacije. Kod mobilnih telefona često je x-osa po širini ekrana, y-osa po visini, a z-osa ortogonalna na sam uređaj.
- **Žiroskop** meri **ugaono ubrzanje** u sva tri pravca na osnovu Koriolisove sile. Rezultat je orijentacija uređaja, tj. kvaternion.
- **Magnetometar** (**elektronski kompas**) radi po principu Halovog efekta i kao rezultat daje 3-vektor magnetnog polja. Može se koristiti za određivanje pravca severa, ali i za detekciju metalnih predmeta. Uz pomoć GPS-a i pravca severa dobija se globalna orijentacija uređaja u prostoru, a onda se pomoću akcelerometra i žiroskopa dobija lokalna orijentacija.

## Geometrija jedne kamere




Koordinatni sistem kamere ima početak C u **centru kamere** i x, y ose paralelne **ravni projektovanja** (**senzoru**) $\pi$. Projekcija P tačke C na ravan $\pi$ naziva se **glavna tačka**. Rastojanje centra kamere od senzora d = CP je **žižna daljina**. Senzor ima jednačinu z = d. Ako je M(X, Y, Z) tačka prostora i $M'$(x, y) njena projekcija onda važi x = $\frac{d}{Z}$X i y = $\frac{d}{Z}$Y. Kako je $M'$(x, y) tačka senzora važi z = d, odnosno $M'$($\frac{d}{Z}$X, $\frac{d}{Z}$Y, d). Prelaskom na homogene koordinate konačno dobijamo $M'$(X:Y:Z:$\frac{1}{d}$Z). Matrično zapisujemo $M'$ = $\overline{T}$M, gde je $\overline{T}$ **matrica projektovanja** na ravan z = d:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ \frac{1}{d}Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$




- M(X:Y:Z:1) - **svetske koordinate**
- $M_C$($X_C$:$Y_C$:$Z_C$:1) - **kamerine koordinate**
- $M'$(x:y:1) - **piksel koordinate** projekcije u ravni $Z_C$ = d

Suvišno je pisati $Z_C$ = d za svaku projekciju jer to uvek važi, pa možemo pisati $M'(\frac{d}{Z_C}X, \frac{d}{Z_C}Y) = M'(\frac{d}{Z_C}X:\frac{d}{Z_C}Y:1) = M'$ ($dX_C$:$dY_C$:$Z_C$). U opštem slučaju ako je glavna tačka P od koordinatnog početka $P_0$ ravni $\pi$ udaljena za translaciju ($x_0$, $y_0$) i ako su pikseli pravougaoni, a ne kvadratni, pa koristimo $d_x$ i $d_y$, važi: $M'(x':y':1) = M'(d_xX_C + x_0Z_C:d_yY_C + y_0Z_C:Z_C)$, odnosno matrično:

$$M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x & 0 & x_0 & 0 \\ 0 & d_y & y_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix} = [K|0]M_C$$

Matrica K formata 3x3 naziva se **matrica kalibracije kamere** ili **unutrašnja matrica kamere**. U opštem slučaju njen oblik je:

$$\begin{pmatrix} d_x & s & x_0 \\ 0 & d_y & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Broj s se naziva **parametar smicanja** i on je numerički blizak nuli ako se radi o snimku kamerom, a različit od nule ako se radi o snimku snimka.

Ako je kamera zadata 3x3 ortogonalnom matricom A i koordinatama kamere C u svetskom koordinatnom sistemu to znači da su vrste matrice A koordinate kamerinih baznih vektora u svetskom koordinatnom sistemu. Važiće $M_C$ = A(M - C) = AM - AC. Ako -AC zapišemo kao $\overline{C} = (c_1, c_2, c_3)^T$ onda matrično zapisujemo:

$$M_C = \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & \overline{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M$$

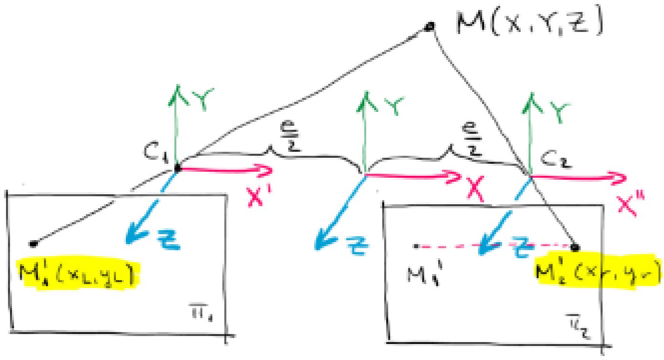
Gornja blok matrica zove se **spoljašnja matrica kamere**. Pošto imamo vezu piksel koordinata i kamerinih koordinata i vezu kamerinih koordinata i svetskih koordinata, sada lako dobijamo vezu piksel i svetskih koordinata:

$$M' = [K|0]M_C = [K|0] \begin{bmatrix} A & \overline{C} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} M$$

Konačna matrica T formata 3x4 naziva se **matrica kamere**.

## Geometrija dve kamere

**Jednostavna stereo kamera** podrazumeva dve kamere koje su na fiksiranom rastojanju i isto orijentisane. Pretpostavljamo da su unutrašnji parametri kamera isti i da su udaljene za e $>$ 0 duž x-ose.



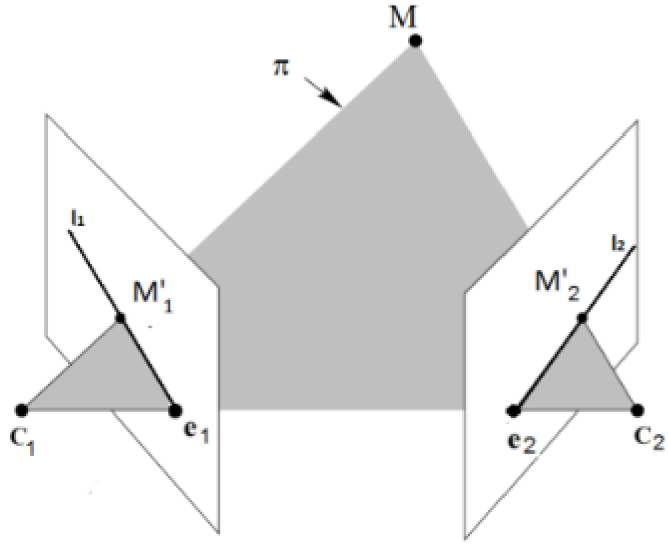

Ukoliko imamo dve jednake kamere - levu $C_1(-\frac{e}{2}, 0, 0)$ i desnu $C_2(\frac{e}{2}, 0, 0)$, tačku M dobijamo kao presek zrakova $C_1M_1'$ i $C_2M_2'$:

- $x_L = \frac{d_x}{Z}(X + \frac{e}{2}) + x_0$, $y_L = \frac{d_y}{Z}Y + y_0$
- $x_D = \frac{d_x}{Z}(X - \frac{e}{2}) + x_0$, $y_L = \frac{d_y}{Z}Y + y_0$

Jasno je da su piksel y-koordinate na levoj i desnoj projekciji jednake. Razlika između vrednosti x-koordinata naziva se **paralaksa** i predstavlja pomeraj iste tačke na desnoj slici u odnosu na levu: $p = x_L - x_D = \frac{ed_x}{Z}$. Paralaksa je veća ukoliko je tačka bliže kamerama, tj. ako je Z koordinata manja. Obrnuto, ako Z koordinata teži beskonačnosti paralaksa teži nuli. Konačno, koordinate tačke M(X, Y, Z) prostora u koordinatnom sistemu između kamera su:

- $X = \frac{e}{2}\frac{x_L+x_D-2x_0}{x_L-x_D}$
- $Y = \frac{ed_x}{d_y}\frac{y_L-y_0}{x_L-x_D}$
- $Z = \frac{ed_x}{p} = \frac{ed_x}{x_L-x_D}$

Proces određivanja originalne tačke prostora iz njenih ravanskih projekcija naziva se **triangulacija**.




Tačke $M_1'$, $M_2'$, $C_1$, $C_2$ i M pripadaju jednoj ravni $\pi$ koja se naziva **epipolarna ravan tačke M**. **Epipolovi** $e_1$ i $e_2$ su tačke u kojima **linija kamera** $C_1C_2$ seče ravni projektovanja. Zapravo epipol $e_2$ je slika prve kamere $C_1$ drugom kamerom, tj. mesto gde druga kamera vidi prvu. Tačku M ne možemo odrediti samo na osnovu $M_1'$, jer kamera sve tačke zraka $C_1M_1'$ vidi isto. U ravni druge kamere tom zraku odgovara **epipolarna linija** $l_2$. Dakle, tački $M_1'$ je pridružena prava $l_2$. Epipolarna linija $l_2$ sadrži i epipol $e_2$, pa važi $l_2 = e_2M_2'$, odnosno $l_2 = e_2 \times M_2' = (E_2P)M_1' = FM_1'$. Matrica F 3x3 naziva se **fundamentalna matrica kamera $C_1$ i $C_2$**. Činjenicu da $M_2' \in l_2$ pišemo relacijom $M_2'^T FM_1' = 0$.

Osobine fundamentalne matrice F:

- F je ranga 2 i detF = 0.
- F ima 7 stepeni slobode, pa je određena sa 7 ili više tačaka.
- Ako je F fundamentalna za $C_1$ i $C_2$, onda je $F^T$ fundamentalna za $C_2$ i $C_1$.
- Epipol $e_1$ je rešenje $Fe_1 = 0$. Epipol $e_2$ je rešenje $F^Te_2 = 0$.

Za kamera koordinate $M_{C_1}'$ i $M_{C_2}'$ važi $M_1' = K_1M_{C_1}'$ i $M_2' = K_2M_{C_2}'$ pa se zamenom u relaciju fundamentalne matrice dobija $M_{C_2}^T(K_2^TFK_1)M_{C_1} = 0$. Matrica $E = K_2^TFK_1$ naziva se **osnovna matrica kamera $C_1$ i $C_2$**. Pretpostavimo da se svetski koordinatni sistem i koordinatni sistem druge kamere poklapaju, tj. $O = C_2$ i označimo $C = C_1$, $M_{C_2} = M$ i $M_{C_1} = M_C$. Jednačina koja definiše osnovnu matricu postaje $M^TEM_C = 0$. Matrica E može se dekomponovati na proizvod koso-simetrične matrice vektorskog proizvoda $E_C$ i matrice kretanja A, tj. $E = E_CA$. Odatle E ima 5 slobodnih parametara - 3 iz A i 2 iz $E_C$. Matrica E je osnovna matrica za neke kamere akko ima jednu sopstvenu vrednost jednaku 0, a druge dve su jednake. Neka je SVD dekompozicija matrice E = U diag(1, 1, 0) $V^T$. Tada postoje dve dekompozicije:

- $E_C = UZU^T$, $A = UWV^T$ ili $A = UW^TV^T$

Formalno postoje 4 položaja kamere $C_1 = C$ u odnosu na $C_2 = O$:

- $(C, A_1)$, $(C, A_2)$, $(-C, A_1)$, $(-C, A_2)$

**Kalibrisana 3D rekonstrukcija**: Ako imamo slike dvema kamerama $C_1$ i $C_2$ sa poznatim kalibracijama $K_1$ i $K_2$, na osnovu 8 korespodencija u piksel koordinatama moguće je odrediti međusobni položaj kamera i uraditi 3D rekonstrukciju svih tačaka u sistemu (na primer) druge kamere:

- Odrediti fundamentalnu matricu F iz bar 8 korespodencija $M_1' \leftrightarrow M_1'$.
- Odrediti osnovnu matricu $E = K_2^TFK_1$.

- Odrediti dekompoziciju matrice E = $E_C$A, gde je E koso-simetrična, a A matrica kretanja.
- Odrediti C tako da je $E_C$ matrica vektorskog množenja sa C.
- Odrediti matrice kamera u sistemu druge kamere:
  - $C_1$ = [$K_1A^T$ | -$K_1A^TC$]
  - $C_2$ = [$K_2$ | 0]
- Triangulisati tačke scene (**retka** ili **gusta triangulacija**).

**Nekalibrisana (projektivna) rekonstrukcija**:

- Odrediti fundamentalnu matricu F normalizovanim SVD algoritmom iz bar 8 korespodencija.
- Faktorisati fundamentalnu matricu u obliku F = $E_1$N:
  - Odrediti epipol $e_1$ kao rešenje F$e_1$ = 0.
  - $T_2$ = [I | 0], gde je I jedinični matrica.
  - $T_1$ = [$E_1F^T$ | $e_1$] = [N | $e_1$], gde je $E_1$ matrica vektorskog množenja sa $e_1$.
- Nekalibrisane matrice kamera su $T_1$ i $T_2$.
- Izračunati prostorne $M_i$ tačke triangulacijom.

Objekat je nakon projektivne rekonstrukcije rekonstruisan do na projektivno preslikavanje prostora, tj. očuvane su samo kolinearnost, konkurentnost, dvorazmera... **Afina rekonstrukcija** se izvodi tako što se zadaju prave koje su u realnosti paralelne. Nakon nje su pored pomenutih svojstava očuvane i paralelnost, razmera... Nakon **metričke rekonstrukcije** geometrija objekta je u potpunosti poznata.