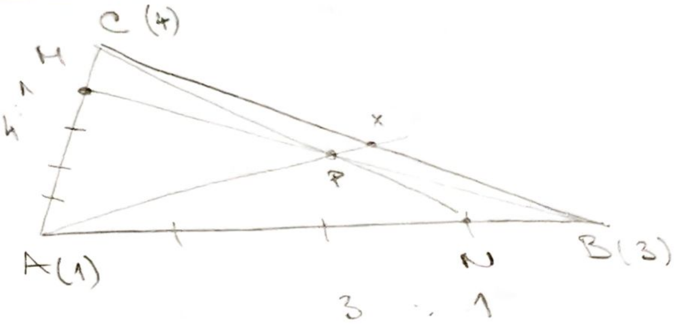
Геометрија И

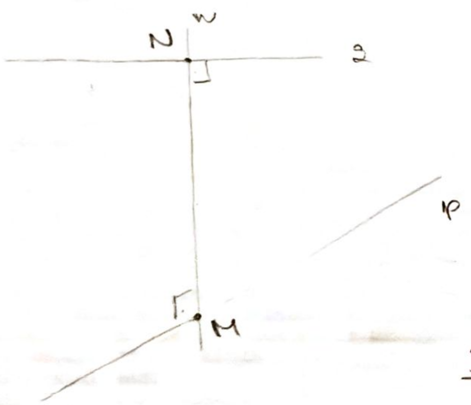
СЕПТЕМБАР 3
2020.

1 $\triangle ABC$ $\quad \vec{AM} = 4\vec{MC}$, $\vec{AN} = 3\vec{NB}$ $\quad \{P\} = CN \cap BM$, $\{X\} = AP \cap BC$ $\quad BX : XC = ?$



$BX : XC = 4 : 3$

2



$n = ?$

$d(p, q) = ?$

$p: \begin{cases} 3y - 4z + 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

I начин: $3y = 4z - 9 \quad y = \frac{4z-9}{3} = \frac{z}{\frac{3}{4}} - 3$

$p: \frac{x}{0} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{3} = t$

$\boxed{\vec{p}(0,4,3)}$ $\boxed{P(0,-3,0)}$

$q: \pi_1: 2x - 2y + z - 21 = 0$

$\pi_2: 4y + 3z - 13 = 0$

II начин: $\vec{q} \perp \vec{n}_{\pi_1}$, $q \perp \vec{n}_{\pi_2}$

$\Rightarrow \vec{s} \sim \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (-10, -6, 8) \Rightarrow \boxed{\vec{s}(5,3,-4)}$

$\vec{n}_{\pi_1}(2,-2,1)$

$\vec{n}_{\pi_2}(0,4,3)$

$q: \frac{x-10}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-4}$

$y=1$

$Q(10, 1, 3)$

$\left.\begin{array}{l} \vec{n} \perp \vec{p} \\ \vec{n} \perp \vec{s} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} \sim \vec{p} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-25, +15, -20) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{n} = (5, -3, 4)}}$

$\underline{M \in p}$: $M(0, 4t-3, 3t)$

$\underline{N \in q}$: $N(5s+10, 3s+1, -4s+3)$

$\vec{MN}(5s+10, 3s-4t+4, -4s-3t+3)$

$\vec{MN} = k\vec{n}$

$5s + 10 = 5k$

$3s - 4t + 4 = -3k$

$-4s - 3t + 3 = 4k$

$\boxed{s + 2 = k}$

$3s - 4t + 4 = -3(s+2)$

$-4s - 3t + 3 = 4s + 8$

$6s - 4t + 10 = 0 \quad / \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

$-8s - 3t - 5 = 0 \quad 2$

$-25s - 25 = 0 \quad \boxed{s = -1}$

$t = \frac{3s+5}{2} = 1 \quad \boxed{k = 1} \quad \boxed{t = 1}$

$\Rightarrow M(0, 1, 3)$

$N(5, -2, 7)$

$\vec{MN} = k\vec{n} = \vec{n} = (5, -3, 4)$

$d(p, q) = \|\vec{MN}\| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = \underline{\underline{5\sqrt{2}}}$ 4

$\boxed{n: \frac{x}{5} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{4}}$

③ Безијеова крива $\alpha_n(t)$ је одређена тачкама $P_0, \dots, P_n$.
Слика $\alpha_n(t)$ Безијеове криве при афином пресликавању f је
опет Безијеова крива одређена са $f(P_0)=P_0', \dots, f(P_n)=P_n'$

$f: \alpha_n \to \alpha_n'$

$f: P_0 \to P_0'$
$P_1 \to P_1'$
$\dots$
$P_n \to P_n'$

$\alpha_n(t)$ је <u>центар масе</u> тачака
$P_0(B_0^n(t)), \dots, P_n(B_n^n(t))$ са
придруженим позитивним масама
$B_i^n(t)$ - Бернштајнов полином

Како аф. пресликавања чувају
центар масе система тачака $\Rightarrow$
афина инваријантност Без криве

α:

$$\begin{array}{llll}
P_{00}(1,-2) & & & \\
 & > P_{10} & & \\
P_{01}(6,6) & & > P_{20} & \\
 & > P_{11} & & > P_{30} \\
P_{02}(-4,1) & & > P_{21} & \\
 & > P_{12} & & \\
P_{03}(11,-4) & & &
\end{array}$$

$P_{1i} = (1-t)P_{0i} + tP_{0\,i+1}$

$t = \frac{4}{5}$

$$P_{10} = P_{00} + t\overrightarrow{P_{00}P_{01}} = (1-t)P_{00} + tP_{01} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}25\\22\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\\frac{22}{5}\end{pmatrix}$$

$$P_{11} = \frac{1}{5}P_{01} + \frac{4}{5}P_{02} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-10\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$$

$$P_{12} = \frac{1}{5}P_{02} + \frac{4}{5}P_{03} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}11\\-4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}40\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix}$$

$$P_{20} = \frac{1}{5}P_{10} + \frac{4}{5}P_{12} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\\frac{22}{5}\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\\frac{62}{5}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{62}{25}\end{pmatrix}$$

$$P_{21} = \frac{1}{5}P_{12} + \frac{4}{5}P_{13} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}8\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}30\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$$

$$P_{30} = \frac{1}{5}P_{20} + \frac{4}{5}P_{21} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\\frac{62}{25}\end{pmatrix} + \frac{4}{5}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}\frac{117}{5}\\-\frac{138}{25}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{117}{25}\\-\frac{138}{125}\end{pmatrix}$$

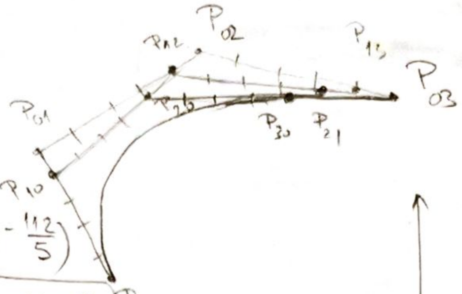
$$\alpha\left(\frac{4}{5}\right) = P_{30} = \left(\frac{117}{25}, -\frac{138}{125}\right)$$

$$\alpha_3(t) = (1-t)^3P_0 + 3(1-t)^2tP_1 + 3(1-t)t^2P_2 + t^3P_3 =$$
$$= (1-3t+3t^2-t^3)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + 3(1-2t+t^2)t\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} + (3t^2-3t^3)\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}11\\-4\end{pmatrix} =$$
$$= (1-3t+3t^2-t^3)\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + (3t-6t^2+3t^3)\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} + (3t^2-3t^3)\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}11\\-4\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3+18\\6+18\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}3-36-12\\-6-36+3\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}-1+18+12+11\\2+18-3-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}15\\24\end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix}-45\\-39\end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix}40\\13\end{pmatrix}$$
$$= (1+15t-45t^2+40t^3, -2+24t-39t^2+13t^3)$$

$\dot{\alpha}_3(t) = (15 - 90t + 120t^2,\ 24 - 78t + 39t^2)$

$\dot{\alpha}_3\left(\frac{4}{5}\right) = \left(15 - \cancel{90}^{\,18}\,\frac{4}{\cancel{5}} + \cancel{120}^{\,24}\,\frac{16}{\cancel{25}_{\,5}},\ 24 - 78\cdot\frac{4}{5} + 39\cdot\frac{16}{25}\right)$

$= \left(\frac{99}{5}, -\frac{336}{25}\right) \sim \left(33, -\frac{112}{5}\right)$

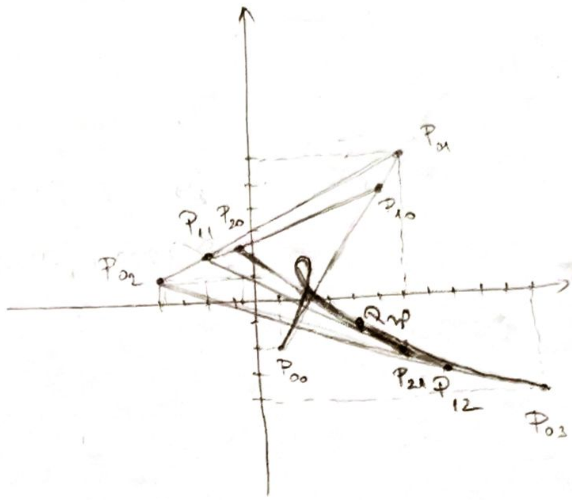


П начин

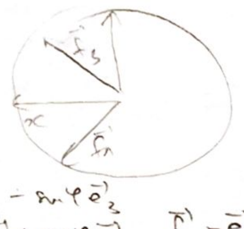
$\overrightarrow{P_{20}P_{21}} = \left(6 + \frac{3}{5}, -2 - \frac{62}{25}\right) = \left(\frac{33}{5}, -\frac{112}{25}\right) \sim \left(33, -\frac{112}{5}\right)$

Π_0 је права кроз $P_{20}P_{21}$.

$\boxed{t : \frac{x-6}{33} = \frac{y+2}{-\frac{112}{5}}}$



④



$\vec{f}_1' = \cos\varphi\,\vec{e}_1 - \sin\varphi\,\vec{e}_3$

$\vec{f}_3' = \sin\varphi\,\vec{e}_1 + \cos\varphi\,\vec{e}_3 \qquad \vec{f}_2' = \vec{e}_2$

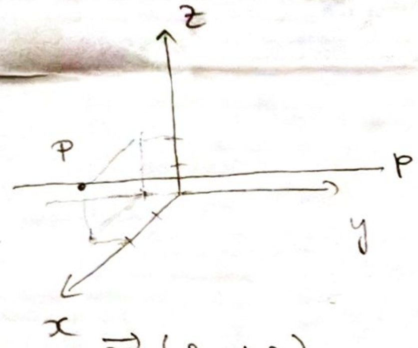
$$\mathcal{R}_{y\text{-оса},\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

<u>ТЕОРЕМА</u>: Свако кретање f простора које има фиксну тачку O' је ротација око неке оријентисане праве p, $p \ni O'$, за угао $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\mathcal{R}_{p,\varphi} = T_{\overrightarrow{OP}} \circ \mathcal{R}_{y\text{-оса},\varphi} \circ T_{\overrightarrow{PO}}$$

$P(2,-1,2)$

$p \parallel y$-оси



$$\mathcal{R}_{p,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OP}\,(2,-1,2)$

$\overrightarrow{PO}\,(-2,1,-2)$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & -2\cos\varphi - 2\sin\varphi + 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 2\sin\varphi - 2\cos\varphi + 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑤ Тријангулација простог полигона је разлагање његове унутрашњости унутрашњим дијагоналама које се међусобно не секу. 2

2

$P_0(4,5)$
$P_1(0,4)$
$P_2(5,1)$
$P_3(2,-2)$
$P_4(3,1)$
$P_5(1,-1)$
$P_6(6,-2)$
$P_7=(-1,2)$

Није прост јер има самопресецања.

I начин:

Сортирамо тачке.

Почетна је она са најмањом y коор (а таквих је више P_3 и P_6)
и са највећом x-коор $\Rightarrow$ $\boxed{P_6}$

Остале сортирамо према углу P_6P_i са x-осом

...

II начин:

$P_0P_1P_7P_5P_3P_6P_2P_4$ је прост полигон.

...

У зависности од простог полигона, зависи и триангулација...