

Osnove matematičkog modeliranja

1. Odnos stvarnosti i modela i razlozi za modeliranje

Matematički model predstavlja opis nekog sistema ili pojave korišćenjem matematičkih koncepata i jezika. Proces stvaranja ovakvog modela na osnovu raspoloživih informacija naziva se **matematičko modeliranje**. Matematički modeli najčešće ne oslikavaju savršeno datu pojavu u prirodi. Često je potrebno uvesti neke pretpostavke i pojednostavljenja koja ne važe uvek, što dovodi do određene greške. Sam model se često ne može rešiti analitički, već se koriste numeričke metode koje donose dodatnu grešku. Takođe, model često zahteva neko numeričko rešavanje radi dobijanja konkretnih vrednosti što opet unosi dodatnu grešku zbog ograničenosti u preciznosti zapisa brojeva u pokretnom zarezu. Informacije koje koristimo prilikom modeliranja često dobijamo merenjem ili opažanjem, što takođe donosi grešku. Ako predviđanja dobijena modelom odstupaju od stvarnosti više od dozvoljene vrednosti greške model se odbacuje i traga se za novim, a u suprotnom se dobijeni model može koristiti za dalje simulacije. Dakle, matematički model možemo shvatiti kao idealizaciju stvarnosti. Matematičko modeliranje je korisno u raznim situacijama i brojni su razlozi zbog čega je bitno:

- eksperiment je nemoguće izvesti - sudaranje galaksija, životni ciklus zvezde, nevreme, ...
- eksperiment nije poželjno izvoditi - fisija i fuzija u nuklearnoj tehnologiji, poplave ili lavine, testiranje stabilnosti građevina, ...
- eksperiment je veoma skup - uticaj radijacije na genetski materijal, aerodinamika i turbulencije, ...
- kontrola procesa u realnom vremenu - kontrola zbog sigurnosti i/ili optimizacije radi uštede vremena ili resursa, npr. maksimizacija ulova ribe bez narušavanja morskog ekosistema
- modeliranje za konstrukciju mernih uređaja - veliki broj mernih uređaja koristi fizičke zakone koji povezuju traženu veličinu sa veličinama koje se lakše mere, npr. živin termometar meri temperaturu pomoću širenja žive
- bolje razumevanje pojave
- korišćenje u obrazovanju - zamena kompleksnog modela jednostavnijim koji je lakši za razumevanje i predstavljanje

2. Koraci i smernice u procesu matematičkog modeliranja

Proces modeliranja sastoji se od četiri koraka:

1. **Prepoznavanje problema** - određivanje dela stvarnosti koji odgovara problemu koji se modelira, kao i koji su cilj i namena modeliranja. Ovaj korak obuhvata i skupljanje svih postojećih eksperimentalnih podataka, kao i planiranje potencijalnih eksperimenata radi testiranja i unapređenja modela.
2. **Formulacija matematičkog modela** - određivanje promenljivih i parametara koji su bitni za model, kao i oblik njihove međusobne zavisnosti na osnovu raspoloživih informacija. Zatim je potrebno rangirati ih po važnosti radi potencijalnog pojednostavljivanja modela. Dakle, model mora biti što jednostavniji u odnosu na ciljeve. Uz pomoć dimenzione analize moguće je svesti model na bezdimenzione veličine, što često dovodi do toga da jedan isti model opisuje više različitih pojava u prirodi. Međutim, bitno je da te promenljive i parametri imaju svoju interpretaciju u stvarnosti.
3. **Testiranje kvaliteta modela** - određivanje opsega promenljivih i parametara za koje model daje prihvatljive rezultate. Ako je opseg previše mali, tj. model ne ispunjava zahteve on se mora modifikovati ili odbaciti u korist novog modela.
4. **Prezentacija modela i rezultata** - upoznavanje korisnika sa modelom i dobijenim rezultatima.

3. Vrste matematičkih modela i uloga matematičara u procesu modeliranja

Vrsta matematičkog modela zavisi od same prirode problema, kao i od korišćenog matematičkog aparata u procesu modeliranja. Moguće je napraviti više vrsta podela:

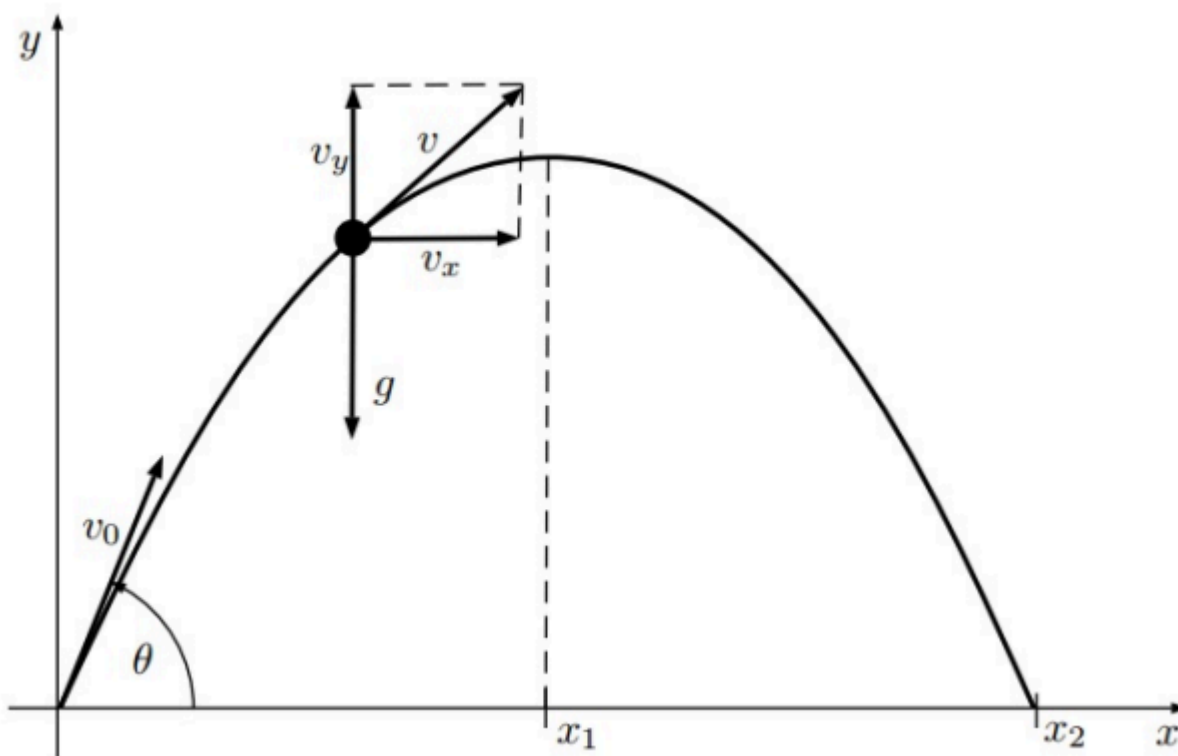
1. **kontinualni i diskretni**: Kontinualni modeli koriste realne promenljive (diferencijalne jednačine, ...), dok diskretni modeli koriste diskretne promenljive (grafovi, kombinatorika, ...). Postoje i **mešoviti** modeli koji koriste i jedne i druge. Najčešće se kontinualni modeli koriste za kontinualne probleme, a diskretni za diskretne, ali je moguće i obrnuto kao što su na primer ćelijski automati za kontinualne probleme ili diferencijalne jednačine za modele saobraćaja.
2. **deterministički i stohastički**: Za probleme gde postoji slučajno ponašanje koriste se stohastički modeli (Monte-Karlo, fazi logika, ...), a za pojave koje su determinističke koriste se deterministički modeli (dinamika fluida, optimizacija, ...). Opet, nekada je moguće i obrnuto, na primer vremenska prognoza ili određivanje atraktora Julija skupova.
3. **linearni i nelinearni**: Linearni modeli su jednostavniji i za njih postoji razvijeni matematički aparat, dok nelinearni modeli mogu modelirati kompleksnije ponašanje kao što su kaos, bifurkacije i slično.
4. **statički i dinamički**: Statički modeli ne koriste vreme kao promenljivu, a dinamički koriste i zbog toga se najčešće opisuju diferencijalnim ili diferencnim jednačinama.
5. **deduktivni i induktivni**: Deduktivni model nastaje logičkim izvođenjem iz poznatih zakonitosti, a induktivni nastaje generalizacijom postojećih opažanja i merenja. Primer deduktivnog modela je Njutnov model kretanja planeta jer je nastao izvođenjem iz Njutnovog zakona gravitacije, a Keplerov model kretanja planeta po eliptičnim putanjama

je primer induktivnog modela jer je nastao na osnovu astronomskih opažanja tokom dužeg niza godina.

Znanje matematičara je potrebno zbog poznavanja postojećih matematičkih teorija i metodologija koje se koriste u procesu modeliranja. Često je za neke probleme potrebno razviti novu matematičku metodologiju, što je u velikom broju slučajeva dovodilo do razvijanja samog matematičkog znanja kroz istoriju. Matematičar je često zadužen i za ispitivanje modela sa apstraktne, matematičke strane. Ovo podrazumeva dokazivanje da model ima rešenje, ispitivanje da li je rešenje jedinstveno, da li je model korektno postavljen, utvrđivanje da li je procedura za rešavanje stabilna ili ne i tako dalje. Za razvijanje matematičkog modela potrebno je i domensko znanje koje poseduju ostali naučnici tog domena, a koje matematičar nužno ne poseduje. Zbog toga je potrebno da matematičar savlada terminologiju i određenu količinu znanja te oblasti radi uspešne komunikacije i rada sa ostalima članovima tima.

4. Kos hitac

U ovom problemu potrebno je odrediti trajektoriju nekog ispaljenog projektila ukoliko nam je poznata njegova početna brzina po izlasku iz cevi v_0 , kao i ugao ispaljivanja θ .



Uvodimo nekoliko pretpostavki koje pojednostavljaju model:

- Projektil je tačkasto telo sa pozitivnom masom. Ovo je fizički nemoguće, ali je opravdano kao pojednostavljenje jer gravitaciona sila deluje na sferno simetrično telo isto kao i kad bi sva masa bila koncentrisana u njegovom centru.
- Cev iz koje izlazi projektil je ukopana u zemlju tako da je izlaz poravnan sa x -osom.
- U svakom trenutku t možemo izmeriti visinu $y(t)$ i udaljenost $x(t)$ projektila. Merenje počinje od koordinatnog početka $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

- Zemlja je ravna i gravitaciona sila deluje nadole, upravno na tlo. Pretpostavka je validna jer za manje razdaljine možemo zanemariti zakrivljenost Zemlje.
- Sila zemljine teže ne zavisi od visine tela, već je konstantna i iznosi $F_g = mg$, $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$
- Funkcije $x(t)$ i $y(t)$ su dva puta neprekidno diferencijabilne. Ovo omogućava nesmetanu upotrebu integralnog i diferencijalnog računa.

Ubrzanje i brzina mogu se razložiti na vertikalnu (y) i horizontalnu (x) komponentu. S obzirom da je ubrzanje zapravo drugi izvod funkcije položaja po vremenu i da jedino gravitaciono ubrzanje deluje na vertikalnu komponentu ubrzanja, važi

$$y''(t) = -g \quad / \quad \int$$

$$y'(t) = -gt + c, \quad y'(0) = c = v_{0y} \Rightarrow y'(t) = -gt + v_{0y} \quad / \quad \int$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + c, \quad y(0) = c = 0 \Rightarrow y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t$$

Na horizontalnu komponentu ne utiče ništa pa važi

$$x(t) = v_{0x}t$$

S obzirom da važi

$$\sin \theta = \frac{v_{0y}}{v_0}, \quad \cos \theta = \frac{v_{0x}}{v_0}$$

konačno dobijamo

$$x(t) = v_0 \cos \theta t, \quad y(t) = v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2}t^2, \quad v_0 > 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq t \leq t_2$$

Maksimalna visina se dostiže u trenutku t_1 za koji važi $y'(t_1) = 0$ pa dobijamo

$$v_0 \sin \theta - gt_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

Visina koja se dostiže je

$$y(t_1) = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

pa se maksimalna visina dostiže za ugao $\theta = \frac{\pi}{2}$. Projektil pada na tlo u trenutku t_2 za koji važi $y(t_2) = 0$, $t_2 \neq 0$ pa dobijamo

$$v_0 \sin \theta t_2 - \frac{g}{2}t_2^2 = 0 \Rightarrow t_2(v_0 \sin \theta - \frac{g}{2}t_2) = 0 \Rightarrow v_0 \sin \theta - \frac{g}{2}t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = 2t_1$$

Domet koji se dostiže je

$$x(t_2) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

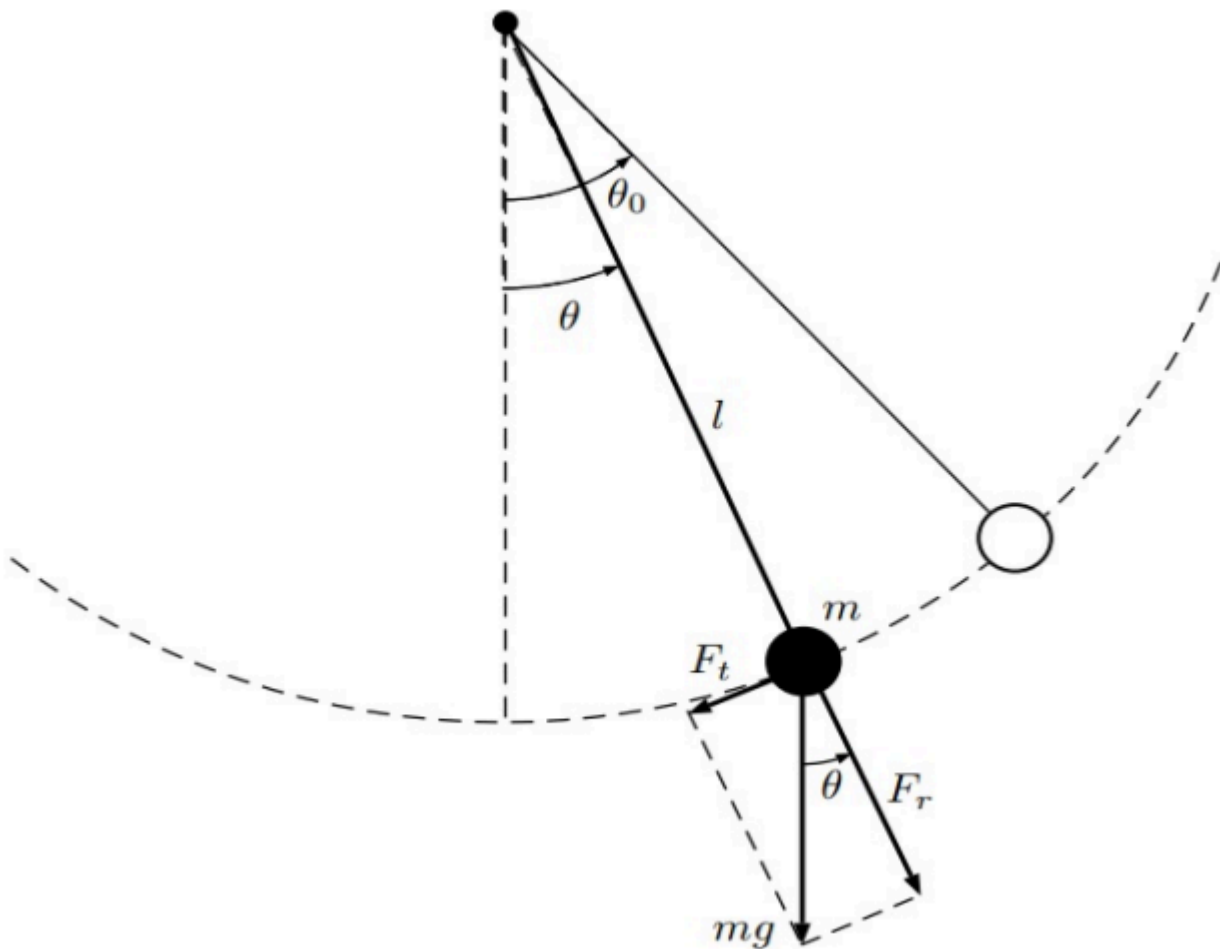
pa se maksimalni domet dostiže za ugao $\theta = \frac{\pi}{4}$. Možemo dokazati i da je oblik trajektorije projektila parabola:

$$x = v_0 \cos \theta t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

$$\Rightarrow y = v_0 \sin \theta t - \frac{g}{2} t^2 = v_0 \sin \theta \frac{x}{v_0 \cos \theta} - \frac{g}{2} \left(\frac{x}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = \tan \theta x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$$

5. Matematičko klatno

Matematičko klatno sastoji se iz tačkastog tela mase m koje je krutim štapom, koji se ne može deformisati, dužine l vezano za neku fiksiranu tačku. Klatno je u početnom trenutku otklonjeno od ravnotežnog položaja za ugao θ_0 , a zatim se teg pušta bez uticaja ikakve spoljašnje sile. Na teg deluje sila zemljine teže $F = mg$, $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$, a može uticati i sila trenja usled otpora vazduha što trenutno možemo zanemariti. Cilj je odrediti otklon klatna u proizvoljnom trenutku t , tj. funkciju $\theta(t)$.



Sila gravitacije koja deluje na teg vertikalno nadole može se razložiti na radijalnu (F_r) i tangencijalnu (F_t) komponentu. S obzirom da je klatno nerastegljivo, radijalna komponenta ne utiče na kretanje klatna. Za tangencijalnu komponentu važi

$$\sin \theta = \frac{-F_t}{F} \Rightarrow F_t = -F \sin \theta = -mg \sin \theta$$

Sila je jednaka proizvodu mase i ubrzanja (drugog izvoda po funkciji položaja), odnosno

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \theta$$

Obeležimo sa $s(t)$ rastojanje tela od ravnotežnog položaja duž luka. Važiće $s(t) < 0$ ako je teg levo od ravnotežnog položaja. Važi $s(t) = l\theta(t)$ pa dobijamo

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \theta(0) = \theta_0, \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

Ova diferencijalna jednačina ne može se rešiti analitički, već se rešava numerički. Ipak, za male uglove možemo pretpostaviti $\sin \theta \approx \theta$ pa dobijamo

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta, \theta(0) = \theta_0, \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

Dalje rešavamo jednačinu analitički:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \theta \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow$$

$$K(\tau) = \tau^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow \tau = \pm \sqrt{-\frac{g}{l}} = 0 \pm i\sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow$$

$$\theta(t) = c_1 e^{0t} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + c_2 e^{0t} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

Znamo

$$\theta(0) = \theta_0 = c_1, \theta'(0) = 0 = \sqrt{\frac{g}{l}} c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

pa dobijamo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

Možemo odrediti i **period oscilovanja** T_0 :

$$\theta(T_0) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} T_0\right) = \theta_0 \Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} T_0\right) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g}{l}} T_0 = 2\pi$$

Dobijamo **Hajgensov zakon**:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \theta \ll 1$$

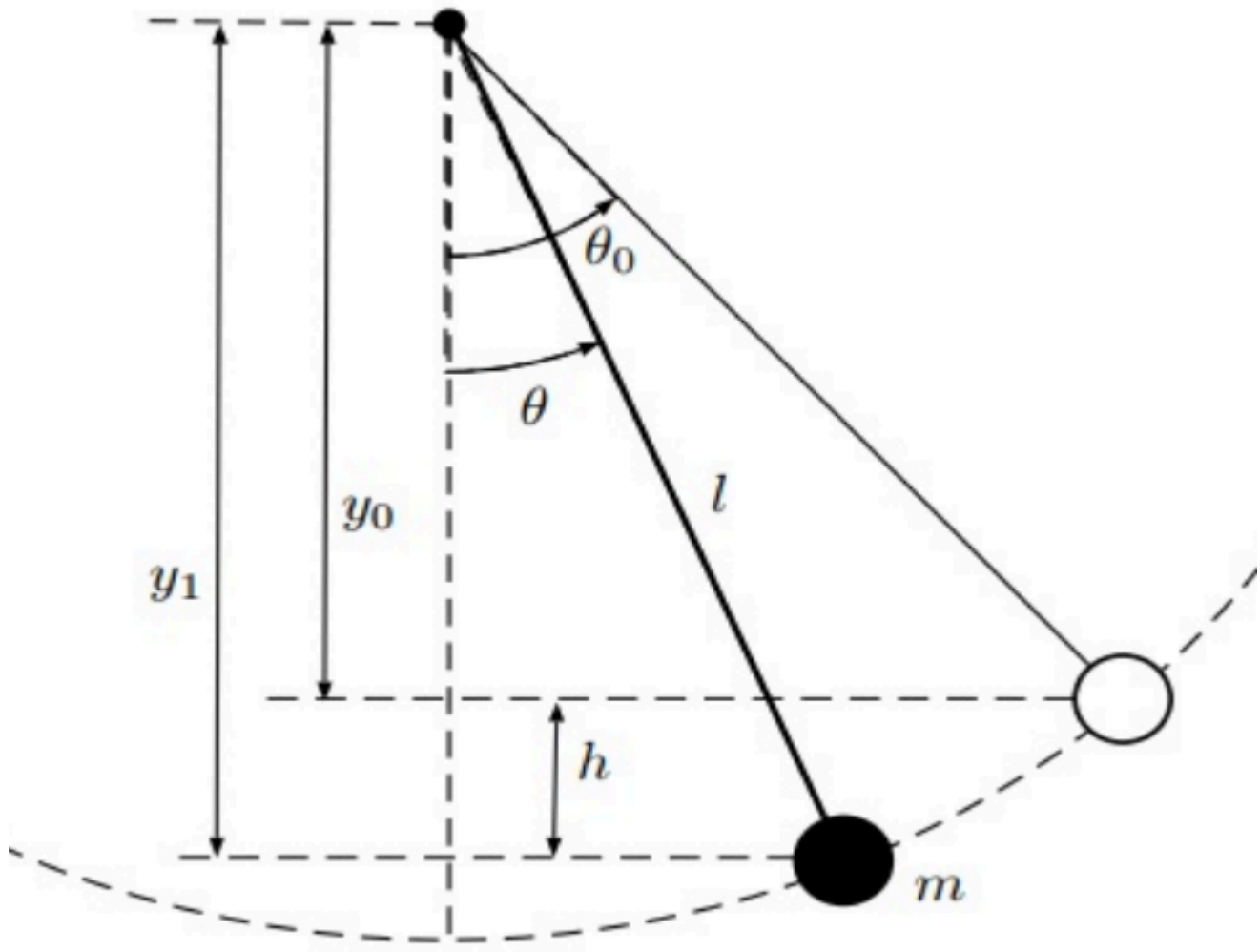
U slučaju da postoji i otpor vazduha treba uračunati i silu trenja koja je obrnuto proporcionalna brzini tela, tj. $F_o = -B \frac{ds}{dt}$ odakle dobijamo

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{F_0}{m} - \frac{g}{l} \sin \theta = -\frac{B}{m} \frac{ds}{dt} - \frac{g}{l} \sin \theta = -\frac{B}{ml} \frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{l} \sin \theta$$

6. Matematičko klatno (preko zakona održanja energije)

(Uvod o matematičkom klatnu iz prethodnog pitanja)

Klatno je moguće modelirati i preko zakona održanja energije. Iz njega sledi da je zbir **potencijalne i kinetičke energije** tega konstantan, tj. da su promene potencijalne i kinetičke energije od početnog trenutka jednake.



$$\Delta P = mgy_1 - mgy_0 = mg(y_1 - y_0) = mgh$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Delta P = \Delta K \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Oдавde sledi

$$\begin{aligned} v = \frac{ds}{dt} &= \sqrt{2gh} \xrightarrow{s=l\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{l} = \frac{\sqrt{2g(y_1 - y_0)}}{l} = \frac{\sqrt{2g(l \cos \theta - l \cos \theta_0)}}{l} = \\ &= \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{\frac{2g}{l}(-\sin \theta)}{2\sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}}} \sqrt{\frac{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}{l}} \\ &\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{aligned}$$

(Jednačina se dalje rešava isto kao u prethodnom pitanju)

Period računamo na sledeći način:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \sqrt{\frac{l}{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}}$$

Integraljenjem od 0 do θ_0 po θ dobija se četvrtina perioda, pa važi

$$T_0 = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{dt}{d\theta} d\theta = 4 \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{l}{2g(\cos \theta - \cos \theta_0)}} d\theta = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} d\theta$$

Ovo je jednako

$$T_0 = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} F\left(\sin \frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

gde je F **Ležandrova eliptička funkcija**.

7. Rast populacije

Neka je $N(t)$ broj jedinki neke posmatrane populacije u datom trenutku t . Zanima nas broj jedinki nakon nekog vremenskog intervala Δt , odnosno $N(t + \Delta t)$. Poznato je da su broj novorođenih jedinki (**natalitet**) n i broj umrlih jedinki (**mortalitet**) m proporcionalni trenutnom broju jedinki $N(t)$ i proteklom vremenskom intervalu Δt , odnosno

$$N(t + \Delta t) = N(t) + n\Delta t N(t) - m\Delta t N(t) \Rightarrow \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = (n - m)N(t) = pN(t),$$

gde je p **prirodni priraštaj**. Za mali vremenski interval, tj. kada $\Delta t \rightarrow 0$, dobijamo

$\frac{dN(t)}{dt} = pN(t)$, što direktno sledi iz definicije izvoda u tački. Dalje rešavamo diferencijalnu jednačinu:

$$N' = pN \Rightarrow N' - pN = 0 \Rightarrow K(\tau) = \tau - p = 0 \Rightarrow \tau = p \Rightarrow N(t) = c_1 e^{pt}$$

U početnom trenutku u populaciji ima $N(0) = c_1 e^{p0} = c_1$ jedinki, pa dobijamo

$$N(t) = N(0)e^{pt}$$

Ovaj model naziva se **eksponencijalni (Malthusov) model rasta populacije**. Ako je $p < 0$ broj jedinki eksponencijalno teži nuli, a ako je $p > 0$ on eksponencijalno raste. Model je dobar u slučaju da je prirodni priraštaj konstantan i ukupan broj jedinki neograničen. Model je kontinualan iako je u stvarnosti broj jedinki diskretna veličina, ali na ovaj način dobijamo malu grešku pri velikom broju jedinki. Takođe, matematički aparat za rad sa realnim promenljivim je razvijeniji.

U slučaju da je ukupna veličina populacije ograničena, što je najčešće slučaj usled ograničene količine hrane, veličine staništa i slično, uvodimo parametar K koji predstavlja maksimalan broj jedinki koji je održiv u staništu na neko duže vreme. Model je sada:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

Primetimo da važi $\frac{dN}{dt} \rightarrow 0$ kada $N \rightarrow K$. Drugim rečima, kada je broj jedinki u populaciji mali rast populacije je skoro eksponencijalan, a kako broj jedinki raste i približava se gornjoj granici, rast se usporava. Rešavamo jednačinu:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN \frac{K-N}{K} = \frac{r}{K} N(K-N) \Rightarrow \frac{dN}{N(K-N)} = \frac{r}{K} dt \quad / \int \\ \int \frac{1}{N(K-N)} dN &= \int \frac{r}{K} dt \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{1}{N(K-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{K-N} = \frac{(B-A)N + AK}{N(K-N)} \\ N^0 : AK = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{K} \\ N^1 : B - A = 0 \Rightarrow B = A = \frac{1}{K} \end{array} \right) \Rightarrow \\ \frac{1}{K} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N} \right) dN &= \frac{r}{K} \int dt \Rightarrow \frac{1}{K} (\ln |N| - \ln |K-N|) = \frac{r}{K} t + c_1 \Rightarrow \\ \ln \left| \frac{N}{K-N} \right| &= rt + c_2, \quad c_2 = Kc_1 \Rightarrow \left| \frac{N}{K-N} \right| = e^{rt+c_2} \Rightarrow \frac{N}{K-N} = c_3 e^{rt}, \quad c_3 = e^{c_2} \Rightarrow \\ N &= c_3 e^{rt} (K-N) \Rightarrow N + Nc_3 e^{rt} = c_3 K e^{rt} \Rightarrow N(t) = \frac{c_3 K e^{rt}}{1 + c_3 e^{rt}} \end{aligned}$$

Iz $\frac{N}{K-N} = c_3 e^{rt}$ dobijamo $\frac{N(0)}{K-N(0)} = c_3 e^{r0} = c_3$ pa je

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{\frac{N(0)}{K-N(0)} K e^{rt}}{1 + \frac{N(0)}{K-N(0)} e^{rt}} = \frac{N(0) K e^{rt}}{K - N(0) + N(0) e^{rt}} = \frac{K}{\frac{K-N(0)+N(0)e^{rt}}{N(0)e^{rt}}} = \frac{K}{\frac{K e^{-rt}}{N(0)} - e^{-rt} + 1} \Rightarrow \\ N(t) &= \frac{K}{1 + e^{-rt} \left(\frac{K}{N(0)} - 1 \right)} \end{aligned}$$

Ovaj model naziva se **logistički (Verhulstov) model rasta populacije**.

8. Grabljivci i plen

Neka je $G(t)$ broj **grabljivaca** (npr. lisica), a $P(t)$ broj **plena** (npr. zečeva) u trenutku t u nekom posmatranom staništu. Grabljivci G kao hranu koriste isključivo plen P , a pretpostavka je da plen P ima dovoljno hrane tako da ona ne utiče na njihovu smrtnost. Model možemo predstaviti sistemom diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bPG, \quad \frac{dG}{dt} = cPG - mG,$$

gde a predstavlja priraštaj plena, b stopu ulovljenog plena, c stopu rađanja grabljivaca, a m mortalitet grabljivaca. Ovaj model naziva se **Lotka-Voltera model**. Stacionarna rešenja modela, tj. rešenja u kojima nema dalje promene u populacijama, dobijaju se rešavanjem sistema:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bPG = 0, \quad \frac{dG}{dt} = cPG - mG = 0$$

Dobijamo

$$P = \frac{m}{c} \equiv P_s, \quad G = \frac{a}{b} \equiv G_s$$

Model možemo transformisati u sledeći oblik:

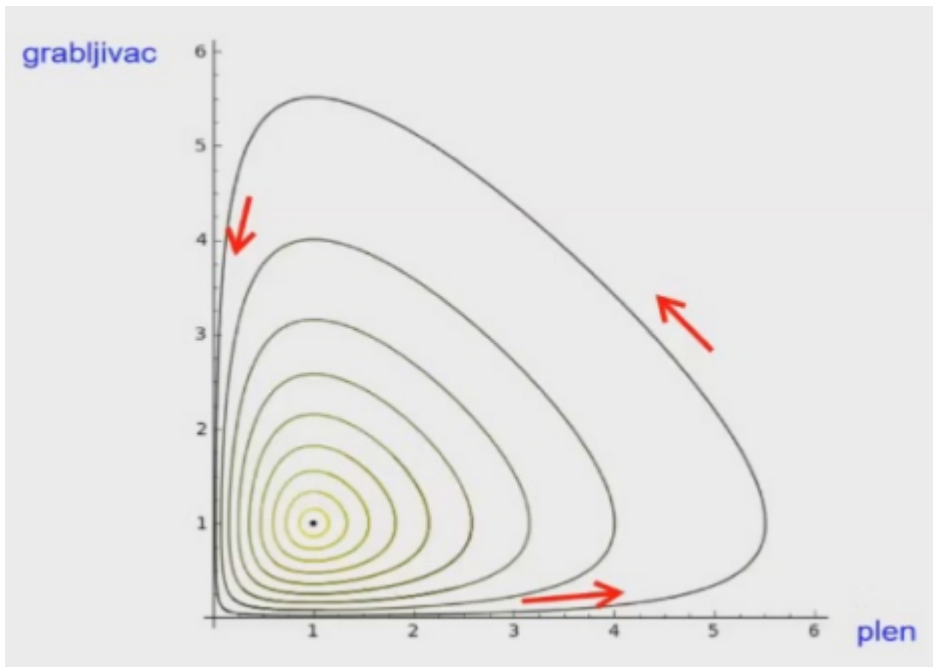
$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{G}{G_s}\right) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = ax(1 - y)$$

$$\frac{dG}{dt} = -mG\left(1 - \frac{P}{P_s}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -my(1 - x)$$

Odavde sledi

$$dt = \frac{dx}{ax(1-y)} = \frac{dy}{-my(1-x)} \Rightarrow ax(1-y)dy = -my(1-x)dx \Rightarrow$$
$$ax(1-y)dy + my(1-x)dx = 0 \quad / : xy \Rightarrow a\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy + m\left(\frac{1}{x} - 1\right)dx = 0 \quad / \int \Rightarrow$$
$$a(\ln y - y) + m(\ln x - x) = k$$

Za različite konstante k dobijamo dijagram trajektorija modela na kojem se vidi da populacije periodično i večno osciluju. Oscilovanje se nastavlja čak i kada populacija neke jedinke postane jako mala, tj. kad u praksi više nije moguća reprodukcija.



9. Dimenzije i jedinice fizičkih veličina

Dimenziona analiza je metoda kojom se izvode zaključci o nekoj pojavi samo na osnovu pretpostavke da se ta pojava može opisati dimenziono korektnom jednačinom koja povezuje neke promenljive. Svaka fizička veličina Q ima svoju **fizičku dimenziju**, u oznaci $\delta(Q)$. Za fizičke veličine Q_1, \dots, Q_n važi

$$\delta(Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{a_n}) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot \delta(Q_n)^{a_n}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Q}$$

Različite naučne oblasti koriste različite veličine sa različitim dimenzijama. Dimenzije $\delta_1, \dots, \delta_k$ nazivamo **osnovnim dimenzijama naučne oblasti** ako se dimenzija svake veličine Q iz te oblasti može na jedinstven način predstaviti u obliku $\delta(Q) = \delta_1^{a_1} \cdot \dots \cdot \delta_k^{a_k}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{Q}$. Jedan primer skupa osnovnih dimenzija koji se koristi u mehanici je masa (M), dužina (L) i vreme (T). Dimenzija za brzinu bi onda bila $\delta(v) = LT^{-1}$.

Merenje fizičkih veličina izvodi se poređenjem sa nekom drugom fizičkom veličinom iste dimenzije koja je po dogovoru uzeta za etalon i koja se naziva osnovna jedinica te fizičke veličine. Fizička veličina Q se može predstaviti kao $Q = v(Q)[Q]$, gde je $v(Q)$ **numerička vrednost**, a $[Q]$ **jedinica**. **Osnovne jedinice**, u oznaci $[\delta_i]$, $i = \overline{1, k}$, su jedinice osnovnih fizičkih veličina Q_1, \dots, Q_k . Na primer: masa - gram, dužina - metar, vreme - sekund. Ostale jedinice se izводе preko osnovnih i nazivaju se **izvedene jedinice**. Za jednu oblast moguće je uvesti više sistema osnovnih jedinica, ali najrasprostranjeniji je **međunarodni SI sistem jedinica** koji je uveden radi standardizacije.

10. Dimenziona homogenost

Pravila za operacije nad fizičkim veličinama koja su potrebna da bi se očuvala **dimenziona (fizička) korektnost**:

1. Ako je $Q_1 = Q_2$, onda je $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$
2. $\delta(Q_1^{a_1} Q_2^{a_2}) = \delta(Q_1)^{a_1} \delta(Q_2)^{a_2}$, $a_1, a_2 \in \mathcal{Q}$
3. $Q_1 \pm Q_2$ je fizička veličina akko je $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$ i tada važi $\delta(Q_1 \pm Q_2) = \delta(Q_1) = \delta(Q_2)$
4. Brojevi su bezdimenzioni, tj. $\delta(\mathcal{E}) = \delta(Q^0) = \delta(Q)^0 = 1$, za $\forall \mathcal{E} \in R$
5. Veličine u argumentima nepolinomijalnih funkcija moraju biti bezdimenzione. Na primer, da bi e^{wt} imalo smisla za $\delta(t) = T$, mora važiti $\delta(w) = T^{-1}$.

Neka je $Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{a_n}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Q}$. Tada je:

1. $\delta(Q) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot \delta(Q_n)^{a_n}$
2. $[Q] = [Q_1]^{a_1} \cdot \dots \cdot [Q_n]^{a_n}$
3. $v(Q) = v(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot v(Q_n)^{a_n}$

Za veličine Q_1, \dots, Q_n kažemo da su **dimenziono nezavisne** akko važi sledeće: Ako $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{Q}$ i $Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{a_n}$ je bezdimenziona veličina ($\delta(Q) = 1$) onda je $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Moguća je promena sistema osnovnih jedinica sa $[\delta_1], \dots, [\delta_k]$ na $[\delta_1]_*, \dots, [\delta_k]_*$, gde je $[\delta_i] = x_i [\delta_i]_*$, $i = \overline{1, k}$ i $x_i \in R$ **faktor konverzije**. U tom slučaju za veličinu $Q = v(Q)[Q] = v_*(Q)[Q]_*$ važi:

1. $v_*(Q) = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_k^{a_k} v(Q)$
2. $[Q] = [\delta_1]^{a_1} \cdot \dots \cdot [\delta_k]^{a_k}$
3. $[Q]_* = [\delta_1]_*^{a_1} \cdot \dots \cdot [\delta_k]_*^{a_k}$

Matrica $M = (m_{ij})$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, n$ čiji svaki red odgovara nekoj osnovnoj dimenziji $\delta_1, \dots, \delta_k$, a svaka kolona nekoj veličini Q_1, \dots, Q_n i gde je svaki element m_{ij} jednak stepenu dimenzije δ_i u veličini Q_j naziva se **dimenziona matrica** veličina Q_1, \dots, Q_n . Za svaku veličinu Q_j važi $\delta(Q_j) = \delta_1^{m_{1j}} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{kj}}$, $j = \overline{1, n}$. Primer:

$$\begin{array}{c} M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} m \quad v \quad g \quad h \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Na primer, gravitaciono ubrzanje: $\delta(g) = M^0 L^1 T^{-2}$.

Neka je $Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{a_n}$. Tada je:

$$\delta(Q) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot \delta(Q_n)^{a_n} = (\delta_1^{m_{11}} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{k1}})^{a_1} \cdot \dots \cdot (\delta_1^{m_{1n}} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{kn}})^{a_n} = \delta_1^{m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n}$$

Za ovakvu veličinu Q važi da je **bezdimenzijska** akko:

$$m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n = 0, \dots, m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n = 0,$$

, odnosno akko je $M\alpha = 0$, gde je $\alpha = (a_1, \dots, a_n)^T$. Ukoliko je Q bezdimenzijska veličina, promenom sistema osnovnih jedinica ne menja se njena brojna vrednost, tj. $\delta(Q) = 1 \Rightarrow v_*(Q) = v(Q)$.
 \triangle :

$$\begin{aligned} v_*(Q) &= (x_1^{m_{11}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}} \cdot v(Q_1))^{a_1} \cdot \dots \cdot (x_1^{m_{1n}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{kn}} \cdot v(Q_n))^{a_n} = \\ &= (x_1^{m_{11}a_1} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}a_1} \cdot v(Q_1)^{a_1}) \cdot \dots \cdot (x_1^{m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{kn}a_n} \cdot v(Q_n)^{a_n}) = \\ &= x_1^{m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n} \cdot v(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot v(Q_n)^{a_n} = \\ &= x_1^0 \cdot \dots \cdot x_k^0 \cdot v(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot v(Q_n)^{a_n} = v(Q) \blacksquare \end{aligned}$$

Neka je f funkcija n promenljivih i Q_1, \dots, Q_n fizičke veličine. Tada se za jednačinu $f(Q_1, \dots, Q_n) = 0$ kaže da je **fizički smisljena** ako:

1. $f(Q_1, \dots, Q_n)$ je fizička veličina, odnosno:

$$\begin{aligned} v(f(Q_1, \dots, Q_n)) &= f(v(Q_1), \dots, v(Q_n)) \\ \delta(f(Q_1, \dots, Q_n)) &= \delta_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \delta_k^{\beta_k}, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathcal{Q} \\ [f(Q_1, \dots, Q_n)] &= [\delta_1]^{\beta_1} \cdot \dots \cdot [\delta_k]^{\beta_k} \end{aligned}$$

2. Za proizvoljne $\rho_1, \dots, \rho_n \in R$ i $x_1, \dots, x_k \in R$ važi

$$f(x_1^{m_{11}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}} \rho_1, \dots, x_1^{m_{1n}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{kn}} \rho_n) = x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k} f(\rho_1, \dots, \rho_n)$$

Funkcija f koja zadovoljava ovo naziva se **homogena funkcija**.

3. $[f(Q_1, \dots, Q_n)] = [Q_1]^{k_1} \cdot \dots \cdot [Q_n]^{k_n}$, za neke $k_1, \dots, k_n \in \mathcal{Q}$

Fizički smisljena jednačina je invarijantna na promenu sistema osnovnih jedinica.

△:

$$f(v_*(Q_1), \dots, v_*(Q_n)) =^1 v_*(f(Q_1, \dots, Q_n)) = x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k} v(f(Q_1, \dots, Q_n)) =^1 x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k} f(v(Q_1), \dots, v(Q_n)) = 0 \blacksquare$$

11. Svođenje na bezdimenzione veličine - primer slobodnog pada

Svođenjem veličina koje se koriste u modelu na bezdimenzione često možemo doneti važne zaključke o posmatranoj pojavi bez rešavanja samog modela. Takođe, često možemo smanjiti broj parametara u modelu. Bitno je napomenuti da je jednačina $f(Q_1, \dots, Q_n) = 0$ fizički smisljena za proizvoljnu funkciju f ako su veličine Q_1, \dots, Q_n bezdimenzione.

Posmatrajmo slobodan pad tela u vakuumu pod dejstvom gravitacije. Potencijalno značajne veličine za ovaj problem su masa tela m , visina sa koje telo pada h , brzina tela v i gravitaciono ubrzanje g . Sledi da jednačina u modelu treba biti oblika $f(m, h, v, g) = 0$. Dimenzije veličina su

$$\delta(m) = M, \delta(h) = L, \delta(v) = LT^{-1}, \delta(g) = LT^{-2}$$

Dimenzija mase (M) se pojavljuje samo na jednom mestu pa masu tela m nije moguće iskombinovati sa ostalim veličinama da bismo dobili bezdimenzionu veličinu. Zaključujemo da je masa tela višak u ovom modelu i da ona ne utiče na kretanje tela pri slobodnom padu, odnosno jednačina u modelu je oblika $f_1(h, v, g) = 0$. Prvo eliminišemo dimenziju vremena iz modela:

$$\delta\left(\frac{v^2}{g}\right) = \frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{T^2}{L} = L \Rightarrow f_2\left(\frac{v^2}{g}, h\right) = 0$$

Zatim, eliminišemo dimenziju dužine iz modela:

$$\delta\left(\frac{v^2}{gh}\right) = \delta\left(\frac{v^2}{g}\right)\delta(h)^{-1} = L \frac{1}{L} = 1 \Rightarrow f_3\left(\frac{v^2}{gh}\right) = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{gh} = c \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{cgh}}$$

Za određivanje tačne vrednosti konstante c potrebno je dalje razmatranje i primena fizičkih zakona. Dakle, dimenziona analiza nije svemoguća.

12. Svođenje na bezdimenzione veličine - rotacija sistema dva tela

(Uvod o svođenju iz prethodnog pitanja)

Posmatrajmo rotaciju sistema dva tela uzrokovanu međusobnim gravitacionim privlačenjem. Pretpostavimo da su značajne veličine za ovaj model period rotacije T_r , mase oba tela m_1 i m_2 i rastojanje između njih r . Dimenzije veličina su

$$\delta(T_r) = T, \delta(m_1) = M, \delta(m_2) = M, \delta(r) = L$$

Dimenzije T i L se pojavljuju samo jednom, ali njihovim izbacivanjem dobili bismo

$\frac{m_1}{m_2} = \text{const}$ što nije tačno. Zaključujemo da nam fali neka veličina koja povezuje sve ostale, a to je Njutnova gravitaciona konstanta G , $\delta(G) = \frac{L^3}{MT^2}$, pa je jednačina modela oblika $f_1(T_r, m_1, m_2, r, G) = 0$. Prvo eliminišemo dimenziju vremena iz modela:

$$\delta(T_r \sqrt{G}) = T \frac{\sqrt{L^3}}{\sqrt{MT}} = \sqrt{\frac{L^3}{M}} \Rightarrow T_r \sqrt{G} = f_2(m_1, m_2, r)$$

Zatim, eliminišemo dimenziju dužine iz modela:

$$\delta\left(\frac{T_r \sqrt{G}}{\sqrt{r^3}}\right) = \sqrt{\frac{L^3}{M}} \frac{1}{\sqrt{L^3}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \frac{T_r \sqrt{G}}{\sqrt{r^3}} = f_3(m_1, m_2)$$

Zatim, eliminišemo dimenziju mase iz modela:

$$\delta\left(\frac{T_r \sqrt{Gm_2}}{\sqrt{r^3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sqrt{M} = 1 \Rightarrow \frac{T_r \sqrt{Gm_2}}{\sqrt{r^3}} = f_4(m_1, m_2) = f\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow T_r = \sqrt{\frac{r^3}{Gm_2}} f\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$

Iz ovoga možemo dobiti treći Keplerov zakon:

$$T_r^2 = \frac{r^3}{Gm_2} f^2\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{r^3}{Gm_2} f^2(0), \text{ za } m_1 \ll m_2$$

13. Bakingemova II teorema i primer matematičkog klatna

Bakingemova II teorema: Neka su Q_1, \dots, Q_n fizičke veličine, M dimenziona matrica ovih veličina u odnosu na osnovne dimenzije $\delta_1, \dots, \delta_k$ i $r = \text{rang} M$. Tada je svaka fizički smisljena jednačina $f(Q_1, \dots, Q_n) = 0$ ekvivalentna jednačini $F(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-r}) = 0$ za neku funkciju F , gde su $\Pi_i, i = 1, n-r$ bezdimenzione veličine za koje važi $\Pi_i = Q_1^{\alpha_{1i}} \cdot \dots \cdot Q_n^{\alpha_{ni}}, i = 1, n-r$ za neke brojeve $\alpha_{ji} \in \mathcal{Q}$. Vektori $a_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})^T$ su baza prostora rešenja sistema $Ma = 0$. Na osnovu teoreme znamo da je uvek moguće transformisati fizički smislenu jednačinu na bezdimenzione veličine.

Posmatrajmo matematički klatno. Period oscilovanja klatna T zavisi od mase tela m , dužine klatna l , gravitacionog ubrzanja g i početnog ugla θ_0 . Jednačina modela je oblika $f(T, m, l, g, \theta_0) = 0$. Dimenzije veličina su

$$\delta(T) = T, \delta(m) = M, \delta(l) = L, \delta(g) = LT^{-2}, \delta(\theta_0) = 1$$

Dimenziona matrica:

$$\begin{matrix} & T & m & l & g & \theta_0 \\ T & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ M & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ L & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}, r = \text{rang} M = 3, n - r = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rešavanjem sistema dobijamo $a = (2\alpha_4, 0, -\alpha_4, \alpha_4, \alpha_5)$, odnosno $a_1 = (2, 0, -1, 1, 0)$ i $a_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$ pa dobijamo $\Pi_1 = \frac{T^2 g}{l}$ i $\Pi_2 = \theta_0$. Na osnovu teoreme važi $F(\frac{T^2 g}{l}, \theta_0) = 0$

odnosno $T = \sqrt{\frac{l}{g}} \Phi(\theta_0)$

14. Bakingemova Π teorema i primer probe nuklearne bombe

(Bakingemova Π teorema iz prethodnog pitanja)

U Americi je 1945. izvedena prva probna detonacija atomske bombe. Britanski fizičar Tejlor je samo na osnovu snimka eksplozije uspeo da proceni količinu oslobođene energije.

Poluprečnik vatrene lopte R zavisi od proteklog vremena od eksplozije t , gustine okolnog vazduha ρ i oslobođene energije E . Jednačina modela je oblika $f(R, t, \rho, E) = 0$. Dimenzije veličina su

$$\delta(R) = L, \delta(t) = T, \delta(\rho) = \frac{M}{L^3}, \delta(E) = \frac{ML^2}{T^2}$$

Dimenziona matrica:

$$\begin{matrix} & R & t & \rho & E \\ \begin{matrix} T \\ M \\ L \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}, r = \text{rang} M = 3, n - r = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rešavanjem sistema dobijamo $a = (-5\alpha_4, 2\alpha_4, -\alpha_4, \alpha_4)$, odnosno $a_1 = (-5, 2, -1, 1)$ pa dobijamo $\Pi_1 = R^{-5} t^2 \rho^{-1} E$. Na osnovu teoreme važi $F(R^{-5} t^2 \rho^{-1} E) = 0$ odnosno

$R^{-5} t^2 \rho^{-1} E = c$ pa važi $E = c \frac{R^5 \rho}{t^2}$. Vrednost konstante c se može dobiti eksperimentalno sa manjim eksplozivom za koji je poznata količina oslobođene energije. Dobijeno je $c \approx 1$, pa je na osnovu toga pri eksploziji atomske bombe oslobođena količina energije ekvivalentna eksploziji 19 kilotona TNT-a.

15. Skaliranje i umanjeni modeli. Primer kretanja lopte kroz fluid

Modelujmo silu otpora za loptu, za koju pretpostavljamo da je glatka. Dakle, imamo fizičke veličine: sila otpora F , poluprečnik lopte R , brzinu kojom se kreće v , gustinu fluida ρ i dinamičku viskoznost fluida (otpor pri kretanju fluida paralelno fiksiranoj ravnoj ploči) μ . Dimenzije veličina su

$$\delta(F) = \frac{ML}{T^2}, \delta(R) = L, \delta(v) = \frac{L}{T}, \delta(\rho) = \frac{M}{L^3}, \delta(\mu) = \frac{M}{LT}$$

Dimenziona matrica:

$$\begin{array}{c} T \\ M \\ L \end{array} \begin{array}{ccccc} F & R & v & \rho & \mu \\ \left[\begin{array}{ccccc} -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right], & r = \text{rang} M = 3, & n - r = 5 - 3 = 2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rešavanjem sistema dobijamo $a = (\alpha_4 + 2\alpha_5, \alpha_4 + 2\alpha_5, \alpha_4 + \alpha_5, -\alpha_4, -\alpha_5)$, odnosno $a_1 = (1, 1, 1, -1, 0)$ i $a_2 = (2, 2, 1, 0, -1)$ pa dobijamo $\Pi_1 = \frac{Rv\rho}{\mu}$ i $\Pi_2 = \frac{R^2v^2\rho}{F}$. Na osnovu teoreme važi $f(F, R, v, \rho, \mu) = 0 \Leftrightarrow f_1(\frac{Rv\rho}{\mu}, \frac{R^2v^2\rho}{F}) = 0$. Odavde sledi $\frac{R^2v^2\rho}{F} = G(\frac{Rv\rho}{\mu})$, tj. $F = R^2v^2\rho\Phi(\frac{Rv\rho}{\mu})$, gde je $\frac{Rv\rho}{\mu}$ **Rejlnodsov broj**. U dinamici fluida je ustaljena upotreba veličine $c_D(Re) = \frac{2}{\pi}\Phi(Re)$ koja se naziva **koeficijent otpora tela**, koji se određuje eksperimentalno. Odavde važi $F = R^2v^2\rho\frac{\pi}{2}c_D(Re)$, odnosno $F = \frac{1}{2}c_D(Re)Av^2\rho$, gde je $A = R^2\pi$ čeonu presek lopte. Koeficijent otpora zavisi od toga da li je tok fluida oko tela laminaran ili turbulentan, a to zavisi od brzine kretanja, tj. od Rejnoldsovog broja.

Za eksperimentisanje sa velikim objektima često koristimo umanjene modele koji su mnogo jeftiniji i na osnovu kojih onda možemo dobiti rezultate za velike objekte. Za procenu neke veličine velikog objekta ne moramo da znamo sve detalje samog modela. Prema Bankingevoj Π teoremi matematički model možemo predstaviti u obliku $f(\Pi_1, \dots, \Pi_k) = 0$, gde su Π_1, \dots, Π_k bezdimenzione veličine. Za veliki objekat, ove veličine će uzimati konkretne vrednosti Π_1^v, \dots, Π_k^v , a za mali objekat Π_1^m, \dots, Π_k^m . Ukoliko za umanjeni model uspemo da postignemo da je $k - 1$ bezdimenzioni faktor Π_j isti kao kod velikog objekta, onda će bez obzira na oblik funkcije f i preostali bezdimenzioni faktor biti isti. Uzmimo primer kretanja lopte kroz fluid. Neka važi $F_v = S_F F_m$, $R_v = S_R R_m$, $v_v = S_v v_m$, $\rho_v = S_\rho \rho_m$ i $\mu_v = S_\mu \mu_m$, gde su redom sa desne strane veličine kod velike lopte, a desno veličine kod male lopte i S odgovarajući skalirajući faktori. Da bi bezdimenzioni faktori bili jednaki mora da važi

$$\Pi_1^v = \frac{R_v v_v \rho_v}{\mu_v} = \frac{S_R S_v S_\rho}{S_\mu} \Pi_1^m \text{ i } \Pi_2^v = \frac{R_v^2 v_v^2 \rho_v}{F_v} = \frac{S_R^2 S_v^2 S_\rho}{S_F} \Pi_2^m,$$

odnosno

$$\frac{S_R S_v S_\rho}{S_\mu} = 1 \text{ i } \frac{S_R^2 S_v^2 S_\rho}{S_F} = 1$$

16. Penziona štednja

Formula za promenu kapitala glasi:

$$K(t + \Delta t) = K(t) + pK(t) = (1 + p)K(t),$$

gde je p **kamatna stopa** za period Δt , a $K(t)$ **kapital** u trenutku t . Diskretizujemo ovaj problem pretpostavkom da je period ukamaćivanja jedan mesec. Svakog meseca u fond ulažemo fiksiran novčani iznos A , a kapitalu K se pripisuje kamata po stopi p . Potrebno je odrediti stanje fonda nakon n meseci, s tim da je fond inicijalno prazan, odnosno $K_0 = 0$. Slično formuli za promenu kapitala dobijamo:

$$K_{n+1} = (1 + p)K_n + A$$

Rešavamo diferencnu jednačinu:

$$K_n = (1 + p)K_{n-1} + A \Rightarrow K_n - (1 + p)K_{n-1} = A \Rightarrow H_n - (1 + p)H_{n-1} = 0 \Rightarrow$$

$$K(x) = x - (1 + p) = 0 \Rightarrow x = 1 + p \Rightarrow H_n = c(1 + p)^n \Rightarrow$$

$$P_n = S, P_n - (1 + p)P_{n-1} = A \Rightarrow S - (1 + p)S = A \Rightarrow S(1 - 1 - p) = A \Rightarrow$$

$$-pS = A \Rightarrow S = -\frac{A}{p} \Rightarrow P_n = -\frac{A}{p} \Rightarrow$$

$$K_n = H_n + P_n = c(1 + p)^n - \frac{A}{p} \Rightarrow K_0 = 0 = c(1 + p)^0 - \frac{A}{p} \Rightarrow c = \frac{A}{p} \Rightarrow$$

$$K_n = \frac{A}{p}((1 + p)^n - 1)$$

17. Razmnožavanje zečeva

Neka je Z_n ukupan broj zečeva u nekom staništu, O_n broj parova odraslih zečeva i M_n broj parova mladih zečeva. Očigledno važi $Z_n = 2(M_n + O_n)$. Pretpostavimo da zečevi ne umiru i da važe sledeća pravila:

1. Za mesec dana jedan par odraslih zečeva napravi jedan par mladih zečeva, tj.

$M_{n+1} = O_n$. Ne dodaje se M_n jer će oni da odrastu po drugom pravilu.

2. Mladim zečevima je potrebno mesec dana da odrastu, tj. $O_{n+1} = O_n + M_n$.

Iz ova dva pravila sledi $O_{n+1} = O_n + O_{n-1}$, a uzećemo da važi i $O_0 = 0$ i $O_1 = 1$, čime dobijamo Fibonačijev niz. Rešavamo diferencnu jednačinu:

$$O_n = O_{n-1} + O_{n-2} \Rightarrow O_n - O_{n-1} - O_{n-2} = 0 \Rightarrow K(x) = x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \varphi \\ 1 - \varphi \end{cases} \Rightarrow O_n = c_1 \varphi^n + c_2 (1 - \varphi)^n,$$

gde je $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ odnos zlatnog preseka. Važi:

$$O_0 = c_1 + c_2 = 0, \quad O_1 = c_1 \varphi + c_2 (1 - \varphi) = 1$$

Rešavanjem sistema dobijamo $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, pa dobijamo:

$$O_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}}, \quad M_n = O_{n-1}, \quad Z_n = 2(M_n + O_n)$$

18. Pomorske bitke

Posmatrajmo pomorsku bitku dve flote. Neka su A_n i B_n broj brodova u n -toj fazi bitke prve i druge flote, redom. Pretpostavka je da su gubici jedne strane nakon jedne faze bitke proporcionalni veličini protivničke flote, pa sledi model u obliku sistema diferencnih jednačina:

$$A_{n+1} = A_n - aB_n, \quad B_{n+1} = B_n - bA_n,$$

gde a i b predstavljaju ubojitost protivničke flote. Sistem rešavamo tako što ga prvo zapišemo u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

Odredimo sopstvene vrednosti matrice M :

$$Mv = \lambda v \Rightarrow Mv - \lambda v = 0 \Rightarrow (M - \lambda I)v = 0 \Rightarrow$$

$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -a \\ -b & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - ab = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \mp \sqrt{ab}$$

Odredimo sopstvene vektore matrice M :

$$1. \lambda_1 = 1 - \sqrt{ab}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 + \sqrt{ab} & -a \\ -b & 1 - 1 + \sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \sqrt{ab}v_{11} - av_{12} = 0, \quad -bv_{11} + \sqrt{ab}v_{12} = 0$$

Vektori su linearno zavisni, pa možemo uzeti $v_{11} = \sqrt{a}$ i $v_{12} = \sqrt{b}$, tj. $v_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}$

$$2. \lambda_2 = 1 + \sqrt{ab}$$

$$\begin{bmatrix} 1 - 1 - \sqrt{ab} & -a \\ -b & 1 - 1 - \sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow -\sqrt{ab}v_{21} - av_{22} = 0, \quad -bv_{21} - \sqrt{ab}v_{22} = 0$$

Vektori su linearno zavisni, pa možemo uzeti $v_{21} = \sqrt{a}$ i $v_{22} = -\sqrt{b}$, tj. $v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix}$

Predstavimo $\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$ preko M i $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} = M^2 \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix} = \dots = M^n \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = \star$$

Predstavimo $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$ kao linearnu kombinaciju sopstvenih vektora:

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2 = c_1 \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a}(c_1 + c_2) \\ \sqrt{b}(c_1 - c_2) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$A_0 = \sqrt{a}(c_1 + c_2) / : \sqrt{a}$$

$$B_0 = \sqrt{b}(c_1 - c_2) / : \sqrt{b}$$

$$\frac{A_0}{\sqrt{a}} = c_1 + c_2$$

$$\frac{B_0}{\sqrt{b}} = c_1 - c_2$$

$$\Rightarrow \frac{A_0}{\sqrt{a}} + \frac{B_0}{\sqrt{b}} = 2c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{\sqrt{b}A_0 + \sqrt{a}B_0}{2\sqrt{ab}}, c_2 = \frac{\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0}{2\sqrt{ab}} \Rightarrow$$

$$\star = M^n(c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 M^n v_1 + c_2 M^n v_2 = c_1 \lambda_1^n v_1 + c_2 \lambda_2^n v_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}B_0)(1 - \sqrt{ab})^n + \frac{1}{2}(A_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}B_0)(1 + \sqrt{ab})^n \\ \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0)(1 - \sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0)(1 + \sqrt{ab})^n \end{bmatrix}$$

Ako posmatramo dobijena rešenja, prvi sabirak u oba slučaja teži nuli kada $n \rightarrow \infty$ jer

$(1 - \sqrt{ab})^n \rightarrow 0$ jer $a, b \in (0, 1)$, a $A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}B_0 > 0$ i $\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0 > 0$. Drugi sabirak zavisi od konstante c_2 pa dobijamo:

- $c_2 > 0 \Rightarrow A_n \rightarrow +\infty, B_n \rightarrow -\infty \Rightarrow A_n$ pobeđuje
- $c_2 < 0 \Rightarrow A_n \rightarrow -\infty, B_n \rightarrow +\infty \Rightarrow B_n$ pobeđuje
- $c_2 = 0 \Rightarrow A_n \rightarrow 0, B_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ nerešeno

Možemo odrediti i fazu bitke u kojoj se ona završava. Pretpostavimo da A_n pobeđuje.

Pobeda će se u tom slučaju desiti kada je $B_n \leq 0$:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0)(1 - \sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0)(1 + \sqrt{ab})^n \leq 0 / \cdot \frac{-2}{(1 - \sqrt{ab})^n(\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0)} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}}\right)^n \geq \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 + B_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}A_0 - B_0} / \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}}\right)^n \geq \frac{\sqrt{b}A_0 + \sqrt{a}B_0}{\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0} / \ln$$

$$\Rightarrow n \ln \frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}} \geq \ln \frac{\sqrt{b}A_0 + \sqrt{a}B_0}{\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0} \Rightarrow n \geq \frac{\ln(\sqrt{b}A_0 + \sqrt{a}B_0) - \ln(\sqrt{b}A_0 - \sqrt{a}B_0)}{\ln(1 + \sqrt{ab}) - \ln(1 - \sqrt{ab})}$$

19. Nelinearne diferencne jednačine - logističko preslikavanje

Za razliku od linearnih modela, nelinearni mogu ispoljiti kompleksnije ponašanje poput haosa i bifurkacija. Pogledajmo primer **logističke jednačine**:

$$\frac{dy}{dt} = by(1 - y), \quad y(0) = y_0 \in (0, 1)$$

Ojlerovom metodom za numeričko rešavanje sa korakom $h = t_{i+1} - t_i$ dobijamo

$$y_{n+1} = y_n + hby_n(1 - y_n)$$

Što je h manje, manja je greška metoda. Što je h veće, konvergencija ka stacionarnom rešenju je brža. Uvedimo smenu $y_n = \frac{1+hb}{hb}x_n$:

$$\begin{aligned} \frac{1+hb}{hb}x_{n+1} &= \frac{1+hb}{hb}x_n + hb \frac{1+hb}{hb}x_n \left(1 - \frac{1+hb}{hb}x_n\right) \Rightarrow x_{n+1} = x_n + hb x_n \left(1 - \frac{1+hb}{hb}x_n\right) \Rightarrow \\ x_{n+1} &= x_n(1 + hb - (1 + hb)x_n) \Rightarrow x_{n+1} = x_n(r - rx_n) = \boxed{rx_n(1 - x_n)}, \quad r = 1 + hb \end{aligned}$$

U slučaju da je $r \in [0, 4]$ vrši se preslikavanje se intervala $[0, 1]$ na interval $[0, 1]$ i tada se ovo naziva **logističko preslikavanje**. Važi $x_0 \in (0, 1)$ jer $x_0 = \frac{hb}{1+hb}y_0$ i $y_0 \in (0, 1)$.

Odredimo graničnu vrednost za x_n :

$$x_n = \frac{hb}{1+hb}y_n = \frac{r-1}{r}y_n \rightarrow \frac{r-1}{r},$$

jer $y_n \rightarrow 1$. Granična vrednost zavisi od hb - ako je vrednost prevelika neće biti konvergencije ka rešenju, već oscilovanje i haotično ponašanje. Logističko preslikavanje $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ zapravo predstavlja iterativni postupak za rešavanje jednačine $x = rx(1 - x) \equiv g(x)$:

$$x = rx - rx^2 \Rightarrow x(rx + 1 - r) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x_r = \frac{r-1}{r}$$

Za $r \in [0, 1]$ imamo samo rešenje $x = 0$, a za $r \in (1, 4]$ imamo oba rešenja. Ispitajmo konvergenciju iterativnog procesa u okolini rešenja x_r :

$$\begin{aligned} g'(x) &= r(1 - x) - rx = r(1 - 2x), \quad |g'(x_r)| < 1 \Rightarrow -1 < r\left(1 - 2\frac{r-1}{r}\right) < 1 \Rightarrow \\ &-3 < -r < -1 \Rightarrow 1 < r < 3 \end{aligned}$$

Već posmatramo $r \in (1, 4]$, pa za $r < 3$ važi $|g'(x_r)| < 1$ pa na osnovu Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti sledi da je g operator kontrakcije pa na osnovu teoreme o nepokretnoj tački sledi da iterativni proces konvergira u okolini rešenja x_r . Za $|g'(x_r)| \geq 1$ iterativni proces ne može konvergirati ka x_r i tada može doći do haotičnog ponašanja. Za $|g'(x_r)| = 1$, tj. $r = 3$, dolazi do udvajanja tačke nagomilavanja, tj. **bifurkacije**. Što se tiče stabilnosti

numeričke metode, iz smene $r = 1 + hb$ sledi $1 + hb \leq 3$, tj. $h \leq \frac{2}{b}$. Dakle, da bismo osigurali stabilnost metode moramo uzeti korak $h \leq \frac{2}{b}$.

20. Čudni atraktori

Analizirajući male promene u orbitama kometa, francuski astronom Henon došao je do matematičkog modela predstavljenog nelinearnom diferencnom jednačinom drugog reda:

$$x_{n+1} = bx_{n-1} + 1 - ax_n^2, \quad x_0 = x_1 = 0$$

Za parametre $a = 1.4$ i $b = 0.3$ ovaj niz se ponaša haotično. U ovakvim slučajevima ponekad je moguće uočiti neke pravilnosti uz pomoć transformacije problema, npr. podizanja na višu dimenziju. Henon je uveo smenu $y_n = bx_{n-1}$ i dobio sistem dve diferencne jednačine prvog reda:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n, \quad x_0 = x_1 = y_1 = 0 \end{aligned}$$

Ovo se može posmatrati kao preslikavanje iz Oxy ravni u samu sebe:

$(x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$. Na osnovu Jakobijana ovog preslikavanja, možemo utvrditi da se preslikavanjem bilo kakve figure na Oxy ravni njena površina smanjuje:

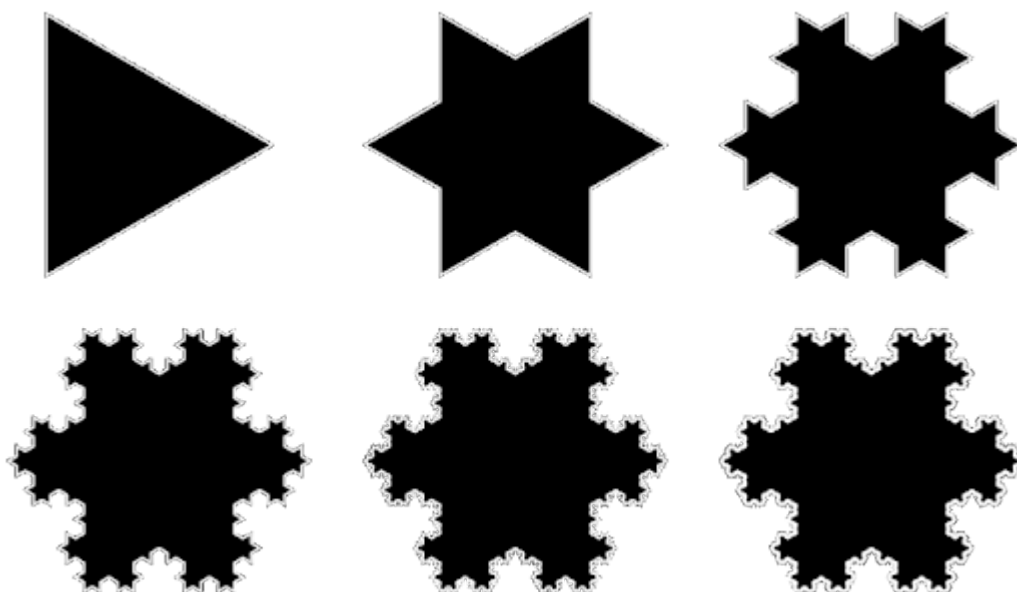
$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx_{n+1}}{dx_n} & \frac{dy_{n+1}}{dx_n} \\ \frac{dx_{n+1}}{dy_n} & \frac{dy_{n+1}}{dy_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ax_n & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Odavde $|\det(J)| = |-2ax_n \cdot 0 - b \cdot 1| = |-b| = 0.3$, tj. svaka naredna figura je 30% površine prethodne. Uzastopnim preslikavanjem dobijamo da niz tačaka konvergira skupu mere nula. Skup tačaka nagomilavanja u dinamičkim sistemima naziva se **atraktor**. Ukoliko atraktor ima neobičnu, često i fraktalnu strukturu, on se naziva **čudni atraktor**. U ovom slučaju, **Henonov atraktor** je čudan. On ima fraktalnu strukturu - zumiranjem vidimo beskonačno mnogo novih slojeva koji podsećaju na lisnato testo.

21. Fraktali. Mandelbrotov i Julija skupovi

Fraktali su skupovi koji uvećavanjem (zumiranjem) liče na polazni skup. Kod fraktalnih krivih često nas interesuje njihova **dužina**. Za klasične glatke krive, dužinu smo mogli da odredimo uz pomoć krivolinijskog integrala. Ovo je moguće jer dovoljnim zumiranjem u okolinu jedne tačke, tu okolinu ne bismo mogli da razlikujemo od prave linije. Fraktalne krive najčešće nemaju ovu osobinu. Posmatrajmo primer **Kohove pahuljice**. Počinjemo od jednakostraničnog trougla i u svakoj iteraciji odsecamo središnju trećinu svih stranica i nad njom konstruišemo odgovarajući jednakostranični trougao. Možemo primetiti da svakom iteracijom uvećavamo dužinu pahuljice faktorom $\frac{4}{3}$, pa sledi da je njena granična dužina beskonačna. Ovo je česta pojava kod fraktalnih krivih. Još jedna osobina koja se posmatra je **fraktalna (Hausdorfova) dimenzija** koja se računa na sledeći način: opišimo skup tačaka kvadratom (neka u ovom slučaju bude jedinični). Izdelimo taj kvadrat na mrežu kvadratića dužine h . Pošto je kvadrat jedinični imaćemo ukupno $\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h^2}$ kvadratića. Neke je N broj

kvadratića koji imaju presečne tračke sa polaznim skupom. Tada je fraktalna dimenzija tog skupa $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$. Za Kohovu pahuljicu važi $D = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.



Posmatrajmo niz $z_{n+1} = z_n^2 + C$, gde je $C = a + ib$ neki kompleksan broj i $z_0 = 0$. Ukoliko je niz z_n ograničen za neko C , tada tačka C pripada **Mandelbrotovom skupu**. Bojenjem tačaka koje pripadaju Mandelbrotovom skupu na kompleksnoj ravni možemo uočiti njegovu fraktalnu strukturu. Moguće je i bojenje komplementa skupa nekom drugom paletom boja radi postizanja lepog efekta. Naime, važi da ako je $|z_{n_0}| > 2$, za neko n_0 , tada niz z_n divergira. Boju možemo izabrati na osnovu indeksa n_0 gde se ova vrednost prvo postiže. Bitno je napomenuti da je Mandelbrotov skup povezan, tj. bilo koje dve tačke iz skupa možemo povezati krivom potpuno sadržanom u skupu.

Opet posmatrajmo niz $z_{n+1} = z_n^2 + C$, ali ovaj put fiksirajmo vrednost C , a menjajmo početnu vrednost z_0 . Ako je niz ograničen za neko z_0 , tada tačka z_0 pripada konkretnom **Julija skupu**. Julija skupova ima beskonačno mnogo (koliko i vrednosti za C) i nisu svi povezani. Može se pokazati da ako C pripada Mandelbrotovom skupu, odgovarajući Julija skup će biti povezan, a inače će biti nepovezan. Najzanimljiviji Julija skupovi dobijaju se za vrednosti C koje su blizu granice Mandelbrotovog skupa.

22. Iteracije sistema funkcija

Posmatrajmo niz $z_{n+1} = z_n^2 + C$ za dobijanje Julija skupova, tj. fiksiramo C i menjamo z_0 . Ovaj niz se može posmatrati kao iterativno preslikavanje $F : z \rightarrow z^2 + C$. Razlaganjem tog preslikavanja na realnu i imaginarnu komponentu ($z = x + iy$, $C = a + ib$) dobijamo preslikavanje $F(x, y) = (x^2 - y^2 + a, 2xy + b)$. Neko bi pomislio da bismo mogli da nađemo atraktor ovog preslikavanja i time dobijemo granice odgovarajućeg Julija skupa, međutim ova pretpostavka je pogrešna. Ponavljanjem ovog preslikavanja tačke blizu granice Julija skupa nas guraju ka beskonačnosti umesto da formiraju neki atraktor. Iz ovog razloga je ideja da zapravo posmatramo inverzno preslikavanje, tj. umesto $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ posmatrajmo $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F^{-1}(x_n, y_n)$. Atraktor ovog preslikavanja biće granica odgovarajućeg Julija skupa, ali problem je taj što ovo preslikavanje nije jednoznačno - svaka

tačka će se zapravo slikati u 4 različite tačke, tj. važiće:

$$F^{-1}(x, y) = (\pm f(x, y), \pm \frac{y-b}{2f(x, y)}), f(x, y) = \sqrt{\frac{x-a + \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}{2}}$$

U slučaju da u svakoj iteraciji obrađujemo sve četiri grane, doći će do kombinatorne eksplozije, dok ako biramo jednu granu dobićemo samo deo granice Julija skupa. Kao dobro rešenje pokazalo se uvođenje verovatnoća p_1, p_2, p_3, p_4 kojima se u svakoj iteraciji bira odgovarajuća grana. Prethodni postupak se može uopštiti na sledeći način: Neka su data preslikavanja $F_1(x, y), \dots, F_k(x, y)$ i verovatnoće p_1, \dots, p_k takve da je njihova suma jednaka 1. Tada je $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F_i(x_n, y_n)$, gde se preslikavanje F_i bira sa verovatnoćom p_i .



Još jedan primer je **trougao Sierpinskog**. Počinjemo od jednakokraničnog trougla i u svakoj iteraciji izbacujemo središnju četvrtinu svih trouglova. Dobija se skup mere 0 jer svakim korakom množimo površinu faktorom $\frac{3}{4}$. Važi: $F_1(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$, $F_2(x, y) = (\frac{2x+1}{4}, \frac{y+1}{2})$, $F_3(x, y) = (\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2})$, $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

23. Čelijski automati

Neka je dat skup nekih elemenata, tzv. **ćelija**. Čelije mogu biti u jednom od više predefinisanih stanja (u najjednostavnijem slučaju samo dva stanja). Zavisno od dimenzije prostora, ćelije mogu biti organizovane geometrijski na više načina. Na primer, mogu biti poređane u niz, kvadratnu mrežu, heksagonalnu mrežu itd. Za ćeliju se definiše neka okolina koja će uticati na promenu njenog stanja. Čelije van te okoline nemaju uticaj na posmatranu ćeliju. Na primer, u kvadratnoj mreži definišemo oblast od 8 susednih ćelija. Za svaki raspored stanja ćelije i njene okoline potrebno je definisati stanje koje će ta ćelija uzeti u sledećem vremenskom trenutku. Ova preslikavanja se zovu **pravila**. Jedan ovakav sistem naziva se **ćelijski automat**. Posmatrajmo primer jednodimenzionalnih ćelijskih automata (ćelije organizovane u niz) sa dva definisana stanja (0 i 1) i okolinom od dve susedne ćelije. Takvih okolina ima broj stanja^{broj ćelija u okolini + 1} = $2^3 = 8$ i za svaku je potrebno definisati pravilo. Primer pravila:

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	1	1	1	1	0

Primećujemo da postoji broj stanja^{broj okolina} = $2^8 = 256$ različitih pravila. Matematičar Wolfram se dosetio da ovakve automate možemo numerisati tako što se niz binarnih cifara iz donje

vrste konvertuje u dekadni broj, pa bi prethodni primer bio automat broj 30. Ideja je da se, za neki početni raspored stanja ćelija, nove generacije prikazuju grafički na vertikalnoj diskretnoj vremenskoj osi. Za većinu ovakvih automata ne dobijamo zanimljive rezultate, ali za neke su rezultati zanimljivi (npr. automat 150 daje šare slične onim na školjkama).

Složeniju varijantu predstavljaju dvodimenzioni automati. Neka ovde imamo kvadratnu mrežu sa ćelijama koje imaju 2 stanja i okolinu ćelije čine 8 susednih ćelija. Okolina za ovakve automate ima $2^9 = 512$, a pravila ima 2^{512} . Zbog ovoga je nepraktična numeracija kao kod jednodimenzionih. U ovom slučaju se i pravila najčešće zapisuju drugačije. Na primer:

- **Pravilo 1 od 8** - ukoliko u okolini od 8 ćelija postoji tačno jedna živa ćelija, posmatrana ćelija postaje živa u sledećoj generaciji, a u suprotnom ostaje u stanju u kojem je bila. Ovim pravilom ćelije ne mogu da umru.
- **Konvejova igra života:**
 1. živa ćelija okružena sa manje od dve žive ćelije umire.
 2. živa ćelija okružena sa dve ili tri žive ćelije nastavlja da živi.
 3. živa ćelija okružena sa više od tri žive ćelije umire.
 4. mrtva ćelija okružena sa tačno tri žive ćelije postaje živa.

Može se uvesti i više stanja gde se posmatra proteklo vreme (broj generacija) od umiranja. Moguće je modelirati problem grabljivaca i plena sa ćelijskim automatom ekvivalentnom modelu Lotka-Voltera. Imamo tri stanja - trava, zec i lisica, a pravila su:

1. Slučajno izabrati jednu ćeliju (c_1) i slučajno izabrati još jednu njoj susednu ćeliju (c_2).
2. $c_1 = \text{lisica}$, $c_2 = \text{zec}$ \rightarrow zec biva pojeđen, a c_2 postaje lisica sa verovatnoćom p_1 .
3. $c_1 = \text{lisica}$, $c_2 = \text{trava ili lisica}$ \rightarrow lisica umire sa verovatnoćom p_2 .
4. $c_1 = \text{zec}$, $c_2 = \text{trava}$ \rightarrow zec se razmnožava sa verovatnoćom p_3 .
5. $c_1 = \text{trava}$ \rightarrow sadržaj c_2 se premešta na c_1 (kretanje).

24. Ekonomski modeli - monopol

Naš cilj, kao proizvođača neke robe, je da ostvarimo optimalni profit. Pretpostavimo da za našu robu postoji tržište, tj. veliki broj potencijalnih kupaca. Ukoliko smo mi jedini proizvođač te robe, ovakav ekonomski model naziva se **monopol**. Primeri monopola su EPS i monopol usled patenta nad proizvodom. U slučaju da postoje dva proizvođača, u pitanju je **duopol**, odnosno **oligopol** za više proizvođača. Što se tiče količine prodane robe, u oznaci X , logično je pretpostaviti da će sa manjom cenom biti prodato više robe, a sa većom manje. Iz ovog razloga količinu prodane robe X možemo predstaviti kao monotono opadajuću funkciju cene robe p , tj. $X = t(p)$, gde se funkcija t zove **funkcija tražnje**. Često je korisna i njoj inverzna funkcija, tzv. **inverzna funkcija tražnje** $p = p(X)$. Znamo da ona postoji zbog monotonosti funkcije tražnje.



U slučaju monopola, **funkciju profita** za količinu robe X možemo predstaviti kao razliku **prihoda** i **rashoda**:

$$\Pi(X) = R(X) - C(X) = p(X)X - C(X)$$

U slučaju da je X malo, $\Pi(X)$ će takođe biti malo, a moguće i negativno. Za veliko X , tačnije $X \geq X_M$, biće $p(X) = 0$, pa opet važi isto. To znači da se maksimum funkcije Π nalazi negde između, a odredićemo ga uslovom $\Pi'(X) = 0$:

$$\Pi'(X) = R'(X) - C'(X) = 0 \Rightarrow R'(X) = C'(X)$$

U ekonomiji, $R'(X)$ se naziva **granični prihod** i predstavlja promenu prihoda za jedinično uvećanje robe. Slično važi i za **granični rashod** $C'(X)$. Pretpostavimo da su $p(X)$ i $C(X)$ linearne funkcije:

$$p(X) = a - bX, C(X) = d + eX, a, b, d, e > 0,$$

gde je d **inicijalni rashod** (npr. izgradnja fabrike), a e **jedinični rashod**, tj. trošak za proizvodnju jednog predmeta. Tada važi:

$$\Pi(X) = (a - bX)X - (d + eX) \Rightarrow \Pi'(X) = a - 2bX - e = 0$$

Oдавde sledi:

$$X_{opt} = \frac{a - e}{2b}, \Pi_{opt} = \Pi(X_{opt}) = \frac{(a - e)^2}{4b} - d$$

Pretpostavka je da su parametri a, b, d, e takvi da X_{opt} i Π_{opt} ne budu negativni.

25. Ekonomski modeli - Kurnoov duopol

(Uvod iz prethodnog pitanja)

U slučaju duopola, postoje različiti modeli u zavisnosti od ponašanja svakog proizvođača. Jedan od tih modela je **Kurnoov duopol**. On pretpostavlja oportunističko ponašanje proizvođača, što znači da svaki od proizvođača prilagođava proizvodnju u odnosu na drugog, težeći da maksimizuje svoj profit. Ukoliko prvi proizvođač proizvodi X_1 neke robe, a drugi X_2 te iste robe, funkcija profita prvog proizvođača glasi:

$$\Pi_1 = p(X_1 + X_2)X_1 - C_1(X_1)$$

Za neko fiksirano X_2 , optimalna proizvodnja za prvog proizvođača se može dobiti rešavanjem jednačine $\frac{d\Pi_1}{dX_1} = 0$. Rešavanjem za svako X_2 dobijamo **funkciju reakcije proizvođača 1**, $X_1 = r_1(X_2)$, koja vraća optimalnu proizvodnju za proizvođača 1 ako proizvođač 2 proizvodi X_2 te iste robe. Analogno, za proizvođača 2 dobijamo:

$$\Pi_2 = p(X_1 + X_2)X_2 - C_2(X_2), \quad X_2 = r_2(X_1)$$

Ukoliko funkcije r_1 i r_2 predstavimo krivama na Ox_1x_2 ravni, one će u praksi vrlo verovatno imati presečnu tačku (X_1^k, X_2^k) koja se naziva **tačka Kurnoove ravnoteže** i u njoj važi $X_1^k = r_1(X_2^k)$ i $X_2^k = r_2(X_1^k)$. Iz ovoga sledi da nakon dostizanja Kurnoove ravnoteže daljih prilagođavanja proizvodnje neće biti. Ovo rešenje je stabilno i uzastopnim cikličnim prilagođavanjem se dolazi do njega, pod uslovom da početno stanje nije ravnotežno. Primer:

$$p(X) = a - bX, \quad C_1(X) = d_1 + e_1X, \quad C_2(X) = d_2 + e_2X$$

Važi

$$\Pi_1 = (a - b(X_1 + X_2))X_1 - (d_1 + e_1X_1), \quad \Pi_2 = (a - b(X_1 + X_2))X_2 - (d_2 + e_2X_2) \Rightarrow$$

$$\Pi'_1 = a - b(X_1 + X_2) - bX_1 - e_1 = 0, \quad \Pi'_2 = a - b(X_1 + X_2) - bX_2 - e_2 = 0$$

Dobijamo

$$X_1 = \frac{a - e_1}{2b} - \frac{X_2}{2} \equiv r_1(X_2), \quad X_2 = \frac{a - e_2}{2b} - \frac{X_1}{2} \equiv r_2(X_1)$$

Rešavanjem sistema po X_1 i X_2 dobijamo

$$X_1^k = \frac{a - 2e_1 + e_2}{3b}, \quad X_2^k = \frac{a - 2e_2 + e_1}{3b}$$

Monopol donosi veći profit proizvođaču, a duopol manje cene proizvoda za kupce.

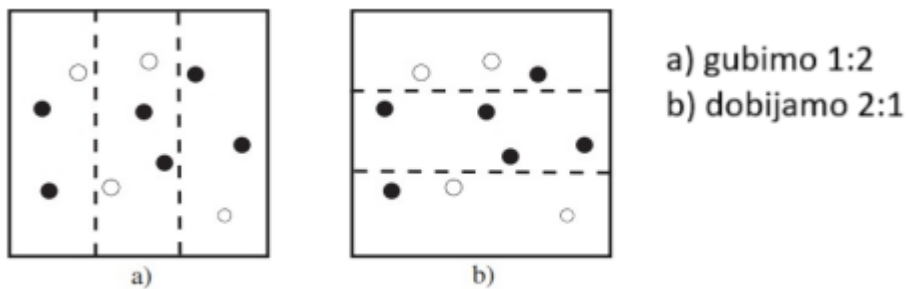
26. Modeliranje kod izbora

Pre samih izbora određuju se izborne jedinice i mandati. **Izborna jedinica** je geografski prostor na kojem postoji jedna **izborna lista** (lista učesnika na izborima) i na kojem se, na osnovu glasova, određuje kom kandidatu će pripasti koliko mandata. Izborne jedinice se zatim dele na **biračka mesta**. Ovo se radi iz tehničkih razloga (npr. da se smanje gužve).

Sistem podele mandata može biti:

- **većinski** - svi mandati odlaze učesniku koji je osvojio najviše glasova.
- **proporcionalni** - mandati se dele proporcionalno osvojenom broju glasova. U ovom slučaju broj mandata često nije ceo broj pa se zaokružuje na određeni način. Koristi se i **D'Ontov algoritam**: za svaku listu se računaju vrednosti $\frac{u}{s+1}$, gde je u broj glasova koje je dobila lista, a s broj mandata koje je lista dobila do sada počevši od 0. Lista koja ima najveći količnik dobija sledeći mandat, a onda se količnici opet računaju. Postupak se ponavlja dok se ne podele svi mandati.
- **mešoviti**

Pretpostavimo da smo trenutno na vlasti i da smo ispitivanjem javnog mnjenja zaključili da će većina ljudi glasati za opoziciju. U cilju da sprečimo poraz, prekrojićemo izborne jedinice tako da tamo gde pobeđujemo to uradimo sa tesnom većinom, a tamo gde gubimo, gubimo ubedljivo. Ovakav proces prekrajanja izbornih jedinica naziva se **gerrymandering**. Primer (beli glasovi su "naši", a crni protivnički):



Rezultate procenjujemo na sledeći način: Na osnovu nekoliko prethodnih izbora (što sličnijim sadašnjim) delimo biračka mesta u izbornoj jedinici na stratumе. **Stratum** je skup biračkih mesta koja su po rezultatima prethodnih izbora imala međusobno sličnu raspodelu glasova. Ta biračka mesta ne moraju biti blizu geografski. Nakon toga se iz svakog stratuma uzima određen broj biračkih mesta čija je raspodela glasova iz prethodnih godina što bliža proseku u tom stratumu. Ukupno se kroz sve stratumе izabere 300 do 500 takvih reprezentativnih biračkih mesta koja zajedno nazivamo **reprezentativni uzorak**. Nakon inicijalnog prebrojavanja glasova, pouzdani čovek sa biračkog mesta nam javlja rezultate. Na osnovu reprezentativnog uzorka iz nekog stratuma vrši se ekstrapolacija glasova za čitav taj stratum, pa se takvi rezultati iz svakog stratuma sabiraju i to nam daje dobru procenu.

Glasanje je moguće organizovati i na drugi način. Neka u izbornom procesu učestvuje konačan broj glasača i bar 3 kandidata. Svaki glasač treba da sastavi svoju rang listu kandidata (npr. slično kao na Evroviziji). Definišimo relaciju **rangiranja (preferencije, bolji od)** \succ :

1. Za svako x i y , samo jedna od relacija $x \succ y$, $y \succ x$, $x = y$ je tačna. Po definiciji $x \prec y \Leftrightarrow y \succ x$.
2. Za svako x važi $x = x$.
3. Za svako x , y , z važi $x \succeq y$, $y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$, pri čemu je $x = z$ akko $x = y$ i $y = z$. Po definiciji je $x \succeq y \Leftrightarrow (x \succ y) \vee (x = y)$ i $x \preceq y \Leftrightarrow y \succeq x$.

Pretpostavimo racionalnost glasača (svaki glasač rangira sve kandidate u uređenu listu) i slobodno volju glasača (svaki glasač ima pravo da rangira kandidate u bilo kom redosledu, nevezano od ostalih glasača). **Izborni sistem** je deterministička procedura koja na osnovu rang listi svih glasača daje jednu totalno uređenu listu kandidata. **Pravedni izborni sistem** treba da zadovolji sledeće aksiome:

1. **slobodna volja** - moguća je bilo koja kombinacija glasačkih rangiranja.
2. **nepristrasnost** - svi kandidati se isto tretiraju, tj. izborni sistem je invarijantan na proizvoljne permutacije kandidata (permutacijom spiska se ne menja rezultat).
3. **konsenzus** - ako je $(x \succeq y)_i$ za svakog glasača i , tada je $x \succeq y$, gde je $x = y$ akko je $(x = y)_i$ za svakog glasača i .
4. **nezavisnost od nebitnih alternativa** - ako u dva izborna kruga svi glasači rangiraju x i y međusobno isto, tada su i izborni rezultati između x i y isti, nezavisno od promene u rangiranju nekih drugih kandidata. Drugim rečima, ako važi $(x \succeq y)_i \Leftrightarrow (x \geq y)_i$, tada

važi i $(x \succeq y) \Leftrightarrow (x \geq y)$, gde je \geq relacija rangiranja u drugom krugu. Na primer, nakon prvog kruga važi $x \succeq y \succeq z$, a zatim je z diskvalifikovan, ali ostaje $x \geq y$.

5. **monotonost** - ako se u drugom krugu poveća preferencija x nad y kod glasača, ista se ne može smanjiti u rezultatima izbora. Drugim rečima, ako važi $(x \succeq y)_i \Rightarrow (x \geq y)_i$ za svako i , tada važi i $(x \succeq y) \Rightarrow (x \geq y)$.
6. **nema diktatora** - ne postoji glasač takav da samo od njega zavisi ishod izbora. Drugim rečima, ne postoji i takvo da važi $(x \succeq y) \Leftrightarrow (x \succeq y)_i$.

Teorema Kenneth Arrow: Ne postoji izborni sistem sa više od 2 kandidata koji zadovoljava sve aksiome. Ideja dokaza teoreme: Ako važe aksiome 1-5, onda sistem nužno mora biti diktatura. **Teorema May:** Među svim sistemima glasanja sa 2 kandidata, pravilo većine je jedino koje se ravnopravno odnosi prema svim kandidatima i glasačima. **Pravilo većine** podrazumeva da kandidat sa više glasova pobeđuje. **Pravilo proste većine** podrazumeva da ako niko od kandidata nema više od 50%, onda se ide u drugi krug. Još neki izborni sistemi:

- **Kondorset metod:** Kandidat je pobednik ako bi pobedio svakog drugog kandidata u pojedinačnom ("1 na 1") takmičenju koristeći pravilo većine. Problem je što rezultat može biti nerešen. Na primer, imamo 3 kandidata, svako igra sa svakim i svako je pobedio po jednom.
- **Borda metod:** Na osnovu rang liste svakog glasača, svakom od n kandidata se dodeljuju bodovi. Prvo mesto dobija $n - 1$ bodova, drugo $n - 2$ itd. Dodeljeni bodovi se sumiraju i pobednik je kandidat sa najviše bodova. Na primer, koristi se u Evroviziji. Ne zadovoljava aksiomu 4:

broj glasača	poredak		
3	$x \succ y \succ z$	$x : 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$	
2	$y \succ z \succ x$	$y : 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$	Pobeđuje y!
poeni	2 1 0	$z : 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$	

broj glasača	poredak		
3	$x \succ y \succ z$	$x : 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6$	
2	$z \succ y \succ x$	$y : 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5$	Pobeđuje x!
poeni	2 1 0	$z : 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$	

U drugom slučaju niko nije promenio mišljenje da li je y bolji od x , ali pobeđuje x .

- **Hare metod:** Postoji najviše $n - 1$ rundi, gde je n broj kandidata. U svakoj rundi se eliminiše po jedan (najmanje poželjan) kandidat koristeći pravilo većine. Pobednik je kandidat koji pobedi u $(n - 1)$ -oj rundi ili koji pređe 50% glasova u nekoj prethodnoj rundi. Sa 3 kandidata ovo je ekvivalentno većinskom glasanju sa 2 kruga. Ne zadovoljava aksiomu 5.
- **Glasanje o odobrenju:** Treba izabrati k kandidata od n mogućih, pri čemu je $k < n$. Svaki birač može da da po jedan glas svim kandidatima koje smatra prihvatljivim, od 0 do n . Kandidati se sortiraju na osnovu ukupnog broja osvojenih glasova svih birača i prvih k kandidata sa spiska osvaja mandate. Na primer, koristi se u izboru Saveta fakulteta.

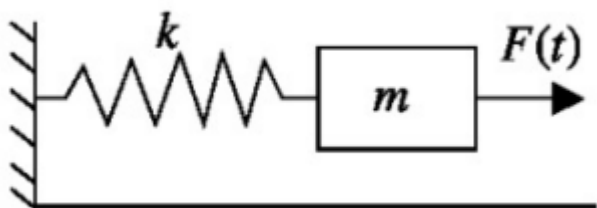
- **Sekvencijalno glasanje u paru:** Počinje se sa unapred zadatom listom kandidata. Takmiče se prvi i drugi sa spiska, "1 na 1". Pobjednik odlazi u drugu rundu i takmiči se sa trećim sa spiska. Proces se nastavlja kroz celu listu sve dok ne ostane jedan kandidat koji je pobjednik. Ne zadovoljava aksiomu 2 jer različitim uređenjem liste možemo dobiti različite pobjednike. Ne zadovoljava aksiomu 3:

broj glasača	poredak
4	$x \succ y \succ q \succ z$
3	$z \succ x \succ y \succ q$
3	$y \succ q \succ z \succ x$
lista:	$x - y - z - q$

Pobjednik je q , iako svi glasači preferiraju y nad q .

27. Oscilacije - mehanički i električni model

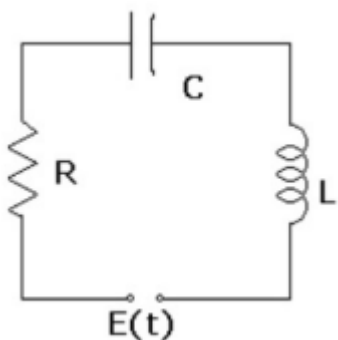
Posmatrajmo naredni mehanički sistem: Telo mase m je vezano za nepokretan zid oprugom sa koeficijentom elastičnosti $k > 0$. Koeficijent trenja tela sa podlogom je $c \geq 0$. Na telo deluje neka spoljna sila $F(t)$.



Neka je $x = 0$ položaj tela u stanju mirovanja kada je $F(t) = 0$. Sila opruge je, u slučaju malih promena položaja, jednaka $-kx(t)$. Sila trenja jednaka je $-cx'(t)$. Po II Njutnovom zakonu (u slučaju konstantne mase tela) ukupna sila koja deluje na telo jednaka je proizvodu njegove mase i ubrzanja, tj. $mx''(t)$. Ona je takođe jednaka i zbiru svih pojedinačnih sila koje deluju na telo pa sledi

$$mx''(t) = -kx(t) - cx'(t) + F(t) \Leftrightarrow \boxed{F(t) = mx'' + cx' + kx}$$

Posmatrajmo naredno električno kolo: Kolo se sastoji iz generatora elektromotorne sile (izvora), otpornika otpornosti R , kondenzatora kapacitivnosti C i kalema induktivnosti L .



Iz II Kirhovog zakona (suma padova napona u zatvorenom kolu je 0) sledi $U_R + U_C + U_L = E(t)$. Iz Omovog zakona ($I = \frac{U}{R}$) sledi $U_R = RI$. Važi i $U_C = \frac{Q}{C}$ i $U_L = L \frac{dI}{dt}$, pa vraćanjem u prethodnu formulu dobijamo:

$$E(t) = RI + \frac{Q}{C} + L \frac{dI}{dt},$$

gde je I jačina struje, a Q naelektrisanje. Primenom formule $I = \frac{dQ}{dt}$ dobijamo:

$$E(t) = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q$$

Ovaj model je zapravo ekvivalentan prethodno navedenom modelu za mehanički sistem.

28. Neprigušene oscilacije i rezonanca

Posmatrajmo mehanički sistem iz prethodnog pitanja:

$$F(t) = mx'' + cx' + kx$$

Neka u sistemu nema otpora podloge, tj. neka je $c = 0$ i neka je spoljna sila periodična, tj.

$F(t) = F_0 \cos wt$. Tada dobijamo model:

$$F_0 \cos wt = mx'' + kx$$

Rešenje ove nehomogene jednačine će biti oblika $x = x_h + x_p$, gde je x_h homogeno rešenje, a x_p partikularno rešenje. Prvo tražimo homogeno rešenje:

$$mx_h'' + kx_h = 0 \Rightarrow k(r) = mr^2 + k = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$x_h(t) = c_1 e^{0 \cdot t} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_2 e^{0 \cdot t} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t = c_1 \cos w_0 t + c_2 \sin w_0 t, \quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$x_h(t) = C \cos(w_0 t - \gamma), \quad C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan \gamma = \frac{c_2}{c_1}$$

Našli smo homogeno rešenje x_h , pa sada tražimo jedno partikularno rešenje:

1. $w \neq w_0$ (iw nije koren $k(r)$):

$$x_p(t) = a \cos wt + b \sin wt, \quad x_p'(t) = -aw \sin wt + bw \cos wt, \quad x_p''(t) = -aw^2 \cos wt - bw^2 \sin wt \Rightarrow$$

$$mx_p'' + kx_p = m(-aw^2 \cos wt - bw^2 \sin wt) + k(a \cos wt + b \sin wt) =$$

$$\cos wt(-maw^2 + ka) + \sin wt(-mbw^2 + kb) = F_0 \cos wt$$

Odavde sledi $b = 0$ i $a = \frac{F_0}{k - mw^2} = \frac{F_0}{m(\frac{k}{m} - w^2)} = \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)}$ pa je $x_p(t) = \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos wt$ pa je rešenje:

$$x(t) = C \cos(w_0 t - \gamma) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - w^2)} \cos wt$$

U ovom slučaju je $x(t)$ ograničena periodična funkcija.

2. $w = w_0$ ($iw = iw_0 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ je koren $k(r)$ višestrukosti 1):

$$x_p(t) = t^1(a \cos wt + b \sin wt)$$

Analogno postupku u prvom slučaju, dobijamo $x_p(t) = \frac{F_0}{2mw_0}t \sin w_0t$ pa je rešenje:

$$x(t) = C \cos(w_0t - \gamma) + \frac{F_0}{2mw_0}t \sin w_0t$$

U ovom slučaju $x(t)$ nije ograničena, zbog množenja sa t .

Kada $w \rightarrow w_0$, amplituda funkcije $x(t)$ postaje sve veća, ali je ona i dalje ograničena. Kada $w = w_0$, funkcija postaje neograničena čak i kada je F_0 jako malo. Ovaj efekat se zove **rezonanca**. Rezonanca može da uzrokuje probleme, npr. vibracije mosta mogu dovesti do njegovog loma.

29. Prigušene oscilacije i praktična rezonanca

Posmatrajmo mehanički sistem iz prethodnog pitanja:

$$F(t) = mx'' + cx' + kx$$

Pretpostavka je da postoji otpor podloge, tj. $c > 0$, kao i da je spoljna sila periodična, tj.

$F(t) = F_0 \cos wt$. Uvedimo smene: **prigušenje** $p = \frac{c}{2m}$ i $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Važi

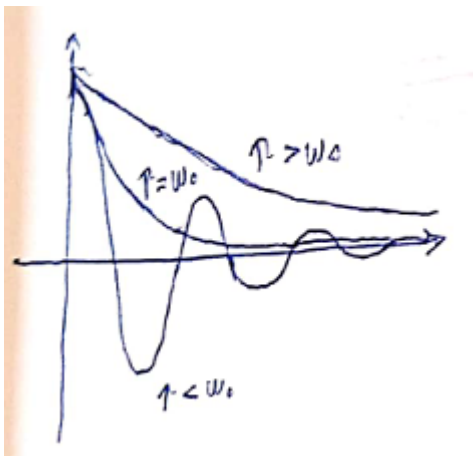
$$mx'' + 2pmx' + mw_0^2x = F_0 \cos wt \Rightarrow x'' + 2px' + w_0^2x = \frac{F_0}{m} \cos wt$$

Tražimo homogeno rešenje:

$$x_h'' + 2px_h' + w_0^2x_h = 0 \Rightarrow k(r) = r^2 + 2pr + w_0^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -p \pm \sqrt{p^2 - w_0^2}$$

Oдавde sledi

$$x_h(t) = \begin{cases} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, & p > w_0 \\ c_1 e^{-pt} + c_2 t e^{-pt}, & p = w_0 \\ e^{-pt}(c_1 \cos w_1 t + c_2 \sin w_1 t), & w_1 = \sqrt{p^2 - w_0^2}, p < w_0 \end{cases} \Rightarrow x_h(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$$



U slučaju $p = w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, sistem se jako brzo vraća u polazni položaj ukoliko je prethodno bio izbačen iz ravnoteže. Tada se za sistem kaže da je **kritično prigušen**. Za male vrednosti prigušenja ($p < w_0$) dolazi do oscilacija sa sve manjom amplitudom do vraćanja u početni položaj, a za veliko prigušenje ($p > w_0$) vraćanje u početni položaj je dosta sporije, ali nema

oscilacije. Tražimo partikularno rešenje:

$$x_p(t) = a \cos wt + b \sin wt = C \cos (wt - \gamma), \quad C = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \gamma = \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$x_p' = -aw \sin wt + bw \cos wt, \quad x_p'' = -aw^2 \cos wt - bw^2 \sin wt \Rightarrow x_p'' + 2px_p' + w_0^2 x_p =$$

$$-aw^2 \cos wt - bw^2 \sin wt - 2paw \sin wt + 2pbw \cos wt + w_0^2 a \cos wt + w_0^2 b \sin wt =$$

$$\cos wt(-aw^2 + 2pbw + w_0^2 a) + \sin wt(-bw^2 - 2paw + w_0^2 b) = \frac{F_0}{m} \cos wt$$

Odavde je

$$a = \frac{(w_0^2 - w^2)F_0}{m((w_0^2 - w^2)^2 + (2pw)^2)}, \quad b = \frac{2pwF_0}{m((w_0^2 - w^2)^2 + (2pw)^2)} \Rightarrow C = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + (2pw)^2}} \Rightarrow$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w^2)^2 + (2pw)^2}} \cos (wt - \gamma)$$

Konačno rešenje je $x(t) = x_p(t) + x_h(t) \rightarrow x_p(t), t \rightarrow \infty$. Primetimo da je x_p ograničena i periodična funkcija. Ona ima najveću amplitudu (udaljenost tela od ravnotežnog položaja) kada funkcija $g(w) = (w_0^2 - w^2)^2 + (2pw)^2$ dostiže maksimum (rešavanjem $g'(w) = 0$ dobijamo da je to u tački $w = \sqrt{w_0^2 - 2p^2}$. Za male vrednosti prigušenja p , ova vrednost je bliska w_0 i naziva se **praktična rezonantna frekvencija**, a $C = C(w)$ **praktična rezonantna amplituda**.