Писмени испит из Анализе 1 за И смер **ЈУН 2 2021**

1. (15 поена) Нека је низ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је $x_1 = a > 0$ и $x_{n+1} = \sqrt[4]{1+4x_n} - 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
(а) Доказати да је $x_n > 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.
(б) Доказати да овај низ конвергира и израчунати његову граничну вредност.
(в) Доказати да важи $x_{n+1} = x_n - \frac{3}{2}x_n^2 + o\left(x_n^2\right)$, кад $n \to \infty$.
(г) Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

2. (15 поена)
(а) Одредити константе $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ такве да важи $\operatorname{arctg} x = a + bx + cx^2 + dx^3 + o\left(x^3\right),\ x \to 0$.
(б) Доказати да за свако $x \neq 0$ важи $e^{2x^2} > 1 + 2x^2$.
(в) Одредити константу $L \in \mathbb{R}$ такву да функција $f(x) = \begin{cases} \frac{x\sin(\operatorname{arctg} x) - x^2}{e^{2x^2}-1-2x^2}, & x \neq 0 \\ L, & x = 0 \end{cases}$ буде непрекидна на скупу $\mathbb{R}$.

3. (20 поена) Дата је функција $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right| + |x+1|$.
(а) Испитати ток и скицирати график функције f.
(б) Одредити број решења једначине $|f(x)| = 2021$.

4. (10 поена) Нека су $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ и функције $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидне на $[a,b]$ и диференцијабилне на (a,b) за које важи $f(a)g(b) = f(b)g(a)$ и $f(x)g(x) \neq 0$ за свако $x \in [a,b]$. Доказати да постоји $c \in (a,b)$ такво да важи $\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{g'(c)}{g(c)}$.

(Писмени испит укупно вреди 60 поена. Време за рад је 3 сата.)