А3 – ИСПИТНА ПИТАЊА

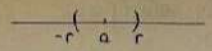
1 Отворени и затворени скупови у $\mathbb{R}^n$.

$d(x,a)$ „ растојање

Деф. Отворена лопта са центром у тачки $a\in\mathbb{R}^n$ и полупречника $r>0$ је скуп $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|<r\}$.
Затворена лопта са центром у тачки $a\in\mathbb{R}^n$ и полупречника $r>0$ је скуп $B[a,r]=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-a\|\leq r\}$.

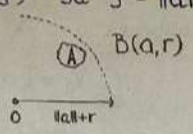
$B(a,r)$ $\quad$ $B[a,r]$ (укључене граничне тачке)

пример: За $n=1$: $B(a,r)=(a-r,a+r)$



Деф. Скуп $A\subset\mathbb{R}^n$ је ограничен ако постоје $a\in\mathbb{R}^n$ и $r>0$ такви да је $A\subset B(a,r)$.

- Следи: $A\subset B(0,\rho)$ за $\rho=\|a\|+r$.



ТВРЂЕЊЕ: 1° Подскуп ограниченог скупа је ограничен.
2° Ако су $A_1,\dots,A_k$ ограничени скупови, тада је и $\bigcup_{j=1}^{k} A_j$ ограничен. $\quad A_j\subset B(0,r_j)$, $r=\max_{1\leq j\leq k} r_j$

Деф. Нека је $A\subset\mathbb{R}^n$. Кажемо да је тачка $a\in\mathbb{R}^n$ РУБНА или ГРАНИЧНА ТАЧКА СКУПА A ако за свако $\varepsilon>0$ постоје: 1) тачка x која припада скупу A и удаљена је од a за мање од ε
2) тачка y која не припада скупу A и удаљена је од a за мање од ε

Деф. Скуп рубних тачака зовемо РУБОМ или ГРАНИЦОМ скупа A и означавамо са ∂A.

пример: Руб отворене и затворене лопте је исти скуп тачака који се назива СФЕРА.

$$\partial B(x_0,r)=\partial B[x_0,r]=\{x\in\mathbb{R}^n \mid d(x,x_0)=r\}$$

Деф. (са предавања): Подскуп U од $\mathbb{R}^n$ је отворен ако за свако a из U постоји $r>0$ такво да је $B(a,r)\subset U$.
$B(a,\varepsilon)$ зове се ε-околина тачке a.

$\Updownarrow$

Деф. (из књиге): Нека је $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Кажемо да је скуп A ЗАТВОРЕН ако садржи све своје рубне тачке, а да је ОТВОРЕН ако не садржи ниједну рубну тачку.

пример: Скуп $A=\{(x,y)\mid x^2+y<1\}$ је отворен, а скуп $B=\{(x,y)\mid x^2+y\leq 1\}$ затворен у $\mathbb{R}^2$. Рубне тачке једног и другог скупа чине параболу $\partial A=\partial B=\{(x,y)\mid x^2+y=1\}$.

СТАВ: Отворена лопта $B(a,r)$ је отворен скуп.

НАПОМЕНА: Затворена лопта је затворен скуп.
Сфера је затворен скуп.

доказ:
$x\in B(a,r)$
$B(x,\rho)\subset B(a,r)$ за $\rho=r-d(x,a)$

(+) (својства отворених скупова): 1° Ако су $U_1,\dots,U_k$ отворени, онда је и $\bigcap_{j=1}^{k} U_j$ отворен.
2° Ако су U_α $(\alpha\in A)$ отворени, онда је $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ отворен.
3° $\mathbb{R}^n$ и $\emptyset$ су отворени.

доказ: 1° $a\in\bigcap_{j=1}^{k} U_j=V$

$a\in U_1 \quad B(a,r_1)\subset U_1$ за неко $r_1>0$
$\vdots \qquad \vdots$
$a\in U_k \quad B(a,r_k)\subset U_k$ за неко $r_k>0$

$r=\min_{1\leq j\leq k} r_j>0 \Rightarrow B(a,r)\subset V$

2° $a\in\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha=V \Rightarrow a\in U_{\alpha_0}$ за неко $\alpha_0\in A$
$\Rightarrow (\exists r>0)\ B(a,r)\subset U_{\alpha_0}\subset V$

3. B(a, r) je podskup od R^n po definiciji, a jedini podskup praznog skupa je prazan skup

Def. Подскуп F од $\mathbb{R}^n$ је затворен ако је $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ отворен.

примери: $B[x,r]$ је затворен.

$B[x,r]^c = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) > r\}$

- $\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)$ је затворен.

НАПОМЕНА: Постоје скупови који нису ни отворени ни затворени; то су скупови који садрже неке, али не и све своје рубне тачке.

(+) (својства затворених скупова): 1° Ако су $F_1, \dots, F_k$ затворени, онда је $\bigcup_{i=1}^{k} F_i$ затворен.

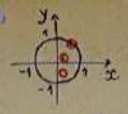
2° Ако су F_α $(\alpha \in A)$ затворени, онда је $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ затворен.

3° $\mathbb{R}^n$ и $\emptyset$ су затворени.

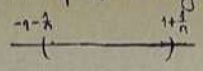
доказ: 2° $\left(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\right)^c \underset{\text{Де-Морган}}{=} \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha^c$

1. Fi su zatvoreni => R^n \ Fi je otvoren => R^n \ UFi je otvoren => UFi je zatvoren
3. R^n = R^n \ prazan skup, prazan skup = R^n \ R^n, a R^n i prazan skup su otvoreni

примери: 1° $n=2$ $B[0,1] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ је затворен, али није отворен.



2° $n=1$ $V_n = (-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$, $n = 1,2,\dots$



$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = [-1,1]$

(*) ПРОБЛЕМ: Зато је $A \subset \mathbb{R}^n$. Да ли постоји највећи (по инклузији) затворен скуп који садржи A? (Постоји.)

$\mathcal{F}_A = \{F \mid A \subset F$ и F је затворен$\}$ $\quad \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F = \bigcap_{\substack{F \text{ затворен} \\ A \subset F}} F = \bar{A}$ ← затворење скупа A $\quad A^\circ \subset A \subset \bar{A}$

ПРОБЛЕМ: Зато је скуп $A \subset \mathbb{R}^n$. Да ли постоји највећи (по инклузији) отворен скуп који је садржан у A? (Постоји.)

$\mathcal{O}_A = \{V \mid V \subset A$ и V је отворен$\}$ $\quad \bigcup_{V \in \mathcal{O}_A} V = A^\circ$ – унутрашњост скупа A

(унија коначно много отворених скупова је отворен скуп)

[redacted]

СТАВ: За $A \subset \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}^n$ следећа тврђења су еквивалентна: 1° $x \in \bar{A}$

2° $(\forall \varepsilon > 0)\, B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

доказ: 1° ⇒ 2°: ППС. За неко $\varepsilon > 0$ важи $B(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$

$\underset{\text{затворен}}{B(x,\varepsilon)^c} \supset A \Rightarrow \bar{A} \subset B(x,\varepsilon)^c \Rightarrow x \notin \bar{A}$ ↯

2° ⇒ 1°: ППС. $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{A}^c = \underset{\text{отворен скуп}}{\bigcup} \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)\, B(x,\varepsilon) \subset \bigcup$

$B(x,\varepsilon) \cap \bar{A} = \emptyset$ ↯

Def. Затворен и ограничен скуп у $\mathbb{R}^n$ назива се КОМПАКТАН СКУП.

Def. Нека је $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Кажемо да је тачка $a \in \mathbb{R}^n$ ТАЧКА НАГОМИЛАВАЊА СКУПА A ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји тачка $x \neq a$ која припада скупу $B(a,\varepsilon) \cap A$.

2. Низови у $\mathbb{R}^n$. Затворење и унутрашњост скупа.

** Од стаоке (*) проблем у питању бр. 1 до краја питања обрађени су затворење и унутрашњост скупа.

- Низ у $\mathbb{R}^k$ је низ уређених k-торки $(x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn})$. Низ у $\mathbb{R}^k$ је пресликавање $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^k$.

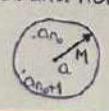
Def. Кажемо да низ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ тачака из $\mathbb{R}^k$ теži или конвергира ка тачки $a \in \mathbb{R}^k$ кад $n \to \infty$ ако низ растојања $d(a_n, a)$ – што је низ реалних бројева – теži нули у $\mathbb{R}$. Пишемо:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0 \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \ge n_0 \Rightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon)$$

Тачку a зовемо граничном вредношћу или лимесом низа a_n.

СТАВ: Сваки конвергентан низ у $\mathbb{R}^k$ је ограничен.

доказ:

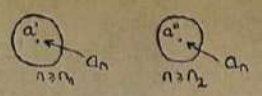


$\|a_n\| \le M$

nakon nekog člana svi se nalaze u epsilon pojasu, pa se niz može ograničiti sa min i max elemenata van pojasa

СТАВ: $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a' \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a''\end{array}\right\} \Rightarrow a' = a''$ (јединственост лимеса)

доказ:



$\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$

rastojanje između a' i a'' ne može biti veće od 0
jer možemo izabrati epsilon > 0 tako da u epsilon
okolinama a' i a'' ima beskonačno mnogo tačaka

Т Нека је $a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^k)$ низ у $\mathbb{R}^k$ и нека је $a = (a^1, a^2, \dots, a^k)$ тачка из $\mathbb{R}^k$. Тада су следећа тврђења еквивалентна: 1° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^1 = a^1, \dots, \lim\limits_{n\to\infty} a_n^k = a^k$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^j = a^j$, $1 \leq j \leq k$

доказ: 1° ⇒ 2°: $a_n - a = (a_n^1 - a^1, \dots, a_n^k - a^k)$

$0 \leq |a_n^1 - a^1| \leq \|a_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad |a_n^1 - a^1| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (на основу Т о 2 полицајца)

2° ⇒ 1°: $\|a_n - a\| \leq \underbrace{|a_n^1 - a^1|}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{|a_n^2 - a^2|}_{\downarrow\, 0} + \dots + \underbrace{|a_n^k - a^k|}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Следи да $\lim\limits_{n\to\infty} \|a_n - a\| = 0$.

ПОДСЕТНИК: $x = (x_1, \dots, x_n)$ • $|x_j| \overset{①}{\leq} \|x\| \overset{②}{\leq} |x_1| + \dots + |x_n|$

①: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \geq \sqrt{x_j^2} = |x_j|$ ②: квадрирати обе стране

Def. Низ a_n у $\mathbb{R}^k$ је Кошијев ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји n_0 (које зависи од ε) (што мање ε, то је веће n_0) такво да важи:

$m, n \geq n_0 \Rightarrow \|a_m - a_n\| < \varepsilon$.

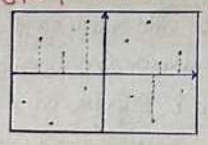
СТАВ: Сваки Кошијев низ у $\mathbb{R}^k$ је конвергентан.

доказ: $0 \leq |a_n^j - a_m^j| \leq \|a_n - a_m\| \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$

Следи да је низ $(a_n^j)_{n=1}^{\infty}$ Кошијев за свако $j = 1, 2, \dots, k$. Следи да за свако $j = 1, 2, \dots, k$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^j = a^j$. Претходна теорема (смер 2° ⇒ 1°) завршава доказ.

Т (Болцано-Вајерштрас): Сваки ограничен низ у $\mathbb{R}^k$ садржи конвергентан подниз.

доказ: $k = 2$:



$a_n = (x_n, y_n)$

$-M \leq x_n \leq M$

$-M \leq y_n \leq M$

$-M \leq x_1, x_2, x_3, x_4, \dots \leq M$

Постоји подниз x_{n_k} који конвергира. $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

$x_2 \quad x_4 \quad x_6 \quad x_8 \quad x_{10} \dots$

$y_2 \quad y_4 \quad y_6 \quad y_8 \quad y_{10} \dots$

можда не конв.

правимо подниз од подниза

$\left.\begin{array}{l} y_{n_{k_\ell}} \to y \\ x_{n_{k_\ell}} \to x \end{array}\right\} \Rightarrow a_{n_{k_\ell}} \to a = (x, y)$

СТАВ: Нека је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ (у $\mathbb{R}^k$). Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$. Додатно, ако је $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ (у $\mathbb{R}$), тада је $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n a_n = \lambda a$.

доказ: $\|a_n + b_n - (a+b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\begin{aligned} \|\lambda_n a_n - \lambda a\| &= \|\lambda_n a_n - \lambda a_n + \lambda a_n - \lambda a\| \leq \|\lambda_n a_n - \lambda a_n\| + \|\lambda a_n - \lambda a\| \\ &= |\lambda_n - \lambda| \cdot \|a_n\| + |\lambda| \cdot \|a_n - a\| \\ &\leq |\lambda_n - \lambda| \cdot \underbrace{M}_{\text{сваки конв. низ је ограничен}} + |\lambda| \cdot \|a_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

3. Непрекидне функције. Лимес функције.

Def. Нека је f функција n променљивих и тачка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тачка нагомилавања домена D_f фје f. Кажемо да је $L \in \mathbb{R}$ гранична вредност или лимес функције f кад $x \to x_0$ ако важи:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 \overset{*}{<} d(x, x_0) < \delta,\ x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$. Пишемо: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

* - не мора бити дефинисана у x_0

НАПОМЕНА: Ова дефиниција разликује се од дефиниције из А1 само по томе што смо $|x - x_0|$ заменили са $d(x, x_0)$.

ТВРЂЕЊЕ: Нека су f и g две ф-је n променљивих и тачка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ тачка нагомилавања скупа $D_f \cap D_g$. Претпоставимо да постоје $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Тада је:

1° $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2° $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3° Ако је $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, онда је:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

доказ: Аналоган доказу одговарајућег тврђења у случају једне променљиве.

1° Нека је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \in \mathbb{R}$. Нека је $\varepsilon > 0$ дато и нека су δ_1 и δ_2 изабрани тако да је:

$$0 < d(x,x_0) < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad 0 < d(x,x_0) < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека је $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ и $0 < d(x,x_0) < \delta$. Како је

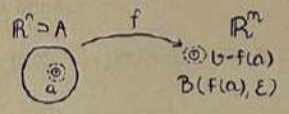
$$\begin{aligned} |f(x)+g(x) - (A+B)| &\le |f(x) - A| + |g(x) - B| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

то је $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B$.

Def. Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ и нека је $f: A \to \mathbb{R}^m$. Кажемо да је f непрекидна у тачки $a \in A$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да је $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$ кад год је $\|x - a\| < \delta$ и $x \in A$.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in A \wedge \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(f(B(a,\delta) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon))$$



ТВРЂЕЊЕ: $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n$. f је непрекидна у тачки $x_0 \in A$ акко је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

ТВРЂЕЊЕ: Нека су f и g непрекидне у тачки x_0. Тада су и ф-је $f \pm g$ и $f \cdot g$ непрекидне у x_0. Ако је $g(x_0) \neq 0$, онда је и ф-ја $\frac{f}{g}$ непрекидна у тачки x_0.

ТВРЂЕЊЕ: Нека је x_0 тачка нагомилавања домена D_f ф-је f (више променљивих). Тада је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ акко за сваки низ $x_n \in D_f$ тачака различитих од x_0 који тежи ка x_0, важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

доказ: Аналоган доказу одговарајућег тврђења у случају једне променљиве.

($\Rightarrow$): Нека је $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и нека је $x_n \neq x_0$ низ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. (*) За дато $\varepsilon > 0$, изаберимо $\delta > 0$ такво да је $0 < d(x,x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. (**) Из (*) следи да за $n \ge n_0$ важи $0 < d(x_n, x_0) < \delta$, а из (**) следи да за $n \ge n_0$ важи $|f(x_n) - A| < \varepsilon$. То значи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

($\Leftarrow$): ПП. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A$. То значи да постоји $\varepsilon > 0$ такво да за свако $\delta > 0$ постоји $x \neq x_0$ за које важи $0 < d(x,x_0) < \delta$, али $|f(x) - A| \ge \varepsilon$. (***) За овакво ε, бирајмо да δ буде $\frac{1}{n}$, а одговарајуће x које задовољава (***) за $\delta = \frac{1}{n}$ означимо са x_n. Конструисали смо низ тачака $x_n \neq x_0$ који тежи ка x_0, такав да низ $f(x_n)$ не конвергира ка A. ↯

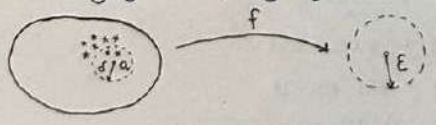
Т (Хајнеова): Нека је $A \subset \mathbb{R}^n$ и $f: A \to \mathbb{R}^m$ и нека је $a \in A$.

1) Ако је f непрекидна у тачки a и ако је $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ низ тачака из A такав да је $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, онда је $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(a)$.

2) Претпоставимо да је $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = f(a)$ за сваки низ $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ тачака из A који конвергира ка a. Тада је f непрекидна у тачки a.

доказ:

1)



Задајмо $\varepsilon > 0$. $(\exists \delta > 0)\ \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

$(\exists k_0):\ k \ge k_0 \Rightarrow \|a_k - a\| < \delta$

$\Rightarrow \|f(a_k) - f(a)\| < \varepsilon$

2) ПП. $(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x)\ \|x - a\| < \delta$ и $x \in A$ али $\|f(x) - f(a)\| \ge \varepsilon$.

$\delta = \frac{1}{n}$ $\quad x_k \in A:\ \|x_k - a\| < \frac{1}{k}$ $\quad \|f(x_k) - f(a)\| \ge \varepsilon$

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ али $f(x_k) \not\to f(a)$ ↯

Def. Ако је ф-ја непрекидна у свакој тачки области своје дефинисаности, кажемо да је она непрекидна.

(Т) Композиција две непрекидне ф-је је непрекидна ф-ја. Специјално, ако је f непрекидна у a, g непр. у b, тада је $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}^p$ непрекидна у a.

ДОКАЗ: $a_k \to a \overset{\text{Хајне 1)}}{\Longrightarrow} f(a_k) \to f(a) \overset{\text{Хајне 1)}}{\Longrightarrow} \underbrace{g(f(a_k))}_{h(a_k)} \to \underbrace{g(f(a))}_{h(a)}$. (формално исписан доказ у књизи на 8. страни)

$\mathbb{R}^n \supset A \xrightarrow{f} B \subset \mathbb{R}^m$, $a \in A$, $f(a) = b$, $B \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$, $h : A \to \mathbb{R}^p$

Доказано је: $a_k \to a \Rightarrow h(a_k) \to h(a)$. Хајне 2) даје да је h непрекидна у a.

примери непрекидних функција: I константна ф-ја

II id_A $(\delta = \varepsilon)$

III $\mathbb{R}^k \xrightarrow{pr_j} \mathbb{R}$ пројекција $\quad pr_j(x_1, x_2, \dots, x_k) = x_j \quad |pr_j x - pr_j a| = |x_j - a_j| \le \|x - a\| \quad (\delta = \varepsilon)$

ДОКАЗ ДА ЈЕ ЗБИР ДВЕ НЕПРЕКИДНЕ Ф-ЈЕ НЕПРЕКИДНА Ф-ЈА: $a \in A$ Претпоставимо: $\underset{A}{\underset{\cap}{a_k}} \to a$. Тада $f(a_k) \to f(a)$ и $g(a_k) \to g(a)$.

(аналогно и за производ: $f(a_k)g(a_k) \to f(a)g(a) \dots$) Следи $f(a_k) + g(a_k) \to f(a) + g(a)$. Хајне 2) $\Rightarrow$ непрекидна

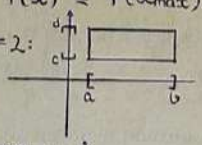
IV $n = 3$ $f(x,y,z) = xz$ (пројекција на I координату · пројекција на III координату; производ две непр. ф-је је непр. ф-ја)

V $\|x\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ композиција и збир непр. ф-је

VI $g(x,y,z) = e^{x^2 - 1 + 3xz}$

(Т) (Вајерштрас): Непрекидна ф-ја на компактном скупу је ограничена и достиже свој минимум и максимум. Прецизније, ако је $K \subset \mathbb{R}^n$ компактан и $f : K \to \mathbb{R}$ непрекидна, тада постоје $x_{min}, x_{max} \in K$ такви да важи: $f(x_{min}) \le f(x) \le f(x_{max})$, $\forall x \in K$

примери компактних скупова: $n = 1$: $[a, b]$ $\quad n = 2$: $[a,b] \times [c,d]$



∘ $B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \le r\}$

ТВРЂЕЊЕ: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{a\} \\ b, & x = a \end{cases}$

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ АККО f је непрекидна у a

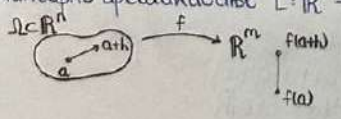
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ АККО за сваки низ a_n у $A \setminus \{a\}$ који конвергира ка a важи $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = b$

4 Извод. Извод у правцу. Диференцирање. Парцијални изводи.

∘ A1: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ Ово нема смисла у $\mathbb{R}^n$ - не можемо делити векторе!

∘ Међутим, можемо фиксирати једну променљиву, а да варирамо другу (тако добијамо парцијални извод) или да фиксирамо правац и посматрамо промену ф-је по том правцу (тако добијамо извод у правцу).

Деф. Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и нека $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Кажемо да је f диференцијабилна у тачки a отвореног скупа Ω ако постоји линеарно пресликавање $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, такво да је $f(a+h) = f(a) + L \cdot h + \sigma(h)$, $h \to 0$.



$f(a+h) - f(a) = \underbrace{Lh}_{\text{слика из } \mathbb{R}^n \text{ у } \mathbb{R}^m} + \sigma(h)$, $h \to 0$

$\sigma(h)$ - ф-ја облика $\varepsilon(h) \cdot \|h\|$. $\varepsilon(h) \to 0$ кад $h \to 0$

$f(a+h) - f(a) - Lh = \sigma(h)$

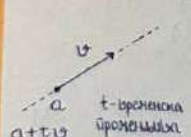
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|f(a+h) - f(a) - Lh\|}{\|h\|} = 0$

∘ Ако је f диференцијабилна у свакој тачки скупа Ω, кажемо да је f диференцијабилна на Ω.

СТАВ: Ако је $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ диференцијабилна (у тачки a), онда је она непрекидна (у тачки a). (Обрат не важи.)

ДОКАЗ: $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = \lim\limits_{h \to 0} (f(a) + \cancelto{0}{Lh} + \cancelto{0}{\sigma(h)}) = f(a)$. (Линеарно пресликавање је непрекидно, па Lh тежи нули.)

Деф. (ПРЕДАВАЊЕ): Нека је a из отвореног скупа $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и нека $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$. Затим, нека је v из $\mathbb{R}^n$. Уколико постоји $\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\right.$ (извод по t у нултом тренутку ф-је)$\left.\right)$ $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(a+tv) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$, онда кажемо да f има <u>извод у правцу вектора v</u>. Ознака: $\frac{\partial f}{\partial v}(a) \in \mathbb{R}^m$.



Специјално: $v = e_j$ $\quad \frac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ

∘ $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$

$* \quad f(a+h) = f(a) + Lh + \sigma(h)$

$v \in \mathbb{R}^n$: $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a) + Ltv + \sigma(tv) - f(a)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{tLv + \sigma(tv)}{t} = Lv + \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sigma(tv)}{t}$

$= Lv$

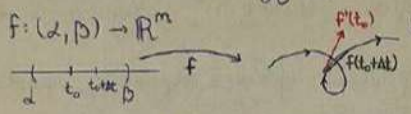
ЗАКЉУЧАК: Ако је f диференцијабилна у $a \in \Omega$, онда $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ постоји за свако v из $\mathbb{R}^n$ и $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = Lv = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$.

Дакле, L из дефиниције је јединствено одређено. Зовемо га ИЗВОДОМ ОД f У ТАЧКИ a. Означавамо га са $f'(a)$. Дакле, $f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \sigma(h)$, $h \to 0$.

(У суштини, доказали смо: $f(a) + L_1 h + \sigma(h) = f(a+h) = f(a) + L_2 h + \sigma(h) \Rightarrow L_1 = L_2$)

$$f'(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) \qquad f'(a)e_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

- Случај $n=1$: $f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^m$



вектор брзине (тангенте)

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \in \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{R}^m)$$

ПРИМЕРИ: 1° Ако је $f(x) = b$, $x \in \Omega$, $b \in \mathbb{R}^m$, онда је $f'(x) = 0$ за свако x из Ω.

2° $f(x) = Ax$, где је $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ линеарно пресликавање. $f'(x) = A$ $\quad f(x+h) = A(x+h) = Ax + Ah = f(x) + Ah$

3° $pr_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x_1, \dots, x_n) \to x_j$ $\qquad pr_j'(a) = pr_j$

ТВРЂЕЊЕ ($n=2$, важи $\forall n \in \mathbb{N}$): Ако је f диференцијабилна у (x_0, y_0), тада постоје парцијални изводи $f'_x(x_0,y_0)$ и $f'_y(x_0,y_0)$.

ЗАКЉУЧАК: Ако хоћемо да испитамо диференцијабилност неке ф-је у (x_0,y_0), прво треба да потражимо парцијалне изводе у тој тачки. Ако неки од њих не постоји, ф-ја није диференцијабилна. Уколико постоје оба, проверавамо да ли израз $\dfrac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f'_x(x_0,y_0)h - f'_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$ тежи нули кад $(h,k) \to (0,0)$. Ако то јесте случај, ф-ја јесте диференцијабилна у (x_0,y_0), у супротном није.

ТВРЂЕЊЕ: Ако је f диференцијабилна у тачки (x_0,y_0), тада постоји извод $f'_v(x_0,y_0)$ у сваком правцу v ф-је f у тачки (x_0,y_0)
(4А) и једнак је $df(x_0,y_0)v = \langle \underbrace{\nabla f(x_0,y_0)}_{\text{градијент}}, v \rangle$. (Ово тврђење биће доказано у питању бр. 8 које се односи на градијент ф-је.)

НАПОМЕНА: Обрат претходног тврђења не важи.

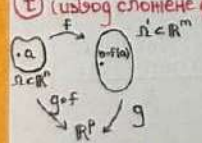
5 Правила диференцирања. Извод сложене функције.

СТАВ: $f, g: \Omega \to \mathbb{R}^m$ диференцијабилне у $a \in \Omega$. Тада важи: 1) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2) $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

ДОКАЗ:
$$\left.\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)\cdot h + \sigma(h) \\ g(a+h) &= g(a) + g'(a)\cdot h + \sigma(h) \end{aligned}\right] +$$

$$(f+g)(a+h) = (f+g)(a) + \underbrace{(f'(a) + g'(a))}_{(f+g)'(a)\ \text{линеарно}}\cdot h + \sigma(h)$$

(t) (извод сложене ф-је): Нека су $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ отворени, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $g: \Omega' \subset \mathbb{R}^p$, $a \in \Omega$, $f(a) = b \in \Omega'$.



Ако је f диференцијабилна у a, g диференцијабилна у b, онда је и $g \circ f$ диференцијабилна у a и њен извод се рачуна по формули: $\underset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p}{(g\circ f)'(a)} = \underset{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p}{g'(f(a))} \circ \underset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}{f'(a)}$

ДОКАЗ: $g(f(a+h)) = g(f(a) + \overbrace{f'(a)\cdot h + \sigma(h)}^{k})$

$$g(b+k) = g(b) + g'(b)\cdot k + \sigma(k) = g(f(a)) + g'(f(a))\cdot(f'(a)\cdot h + \sigma(h)) + \sigma(f'(a)\cdot h + \sigma(h))$$
$$= g(f(a)) + g'(f(a))\cdot f'(a)\cdot h + \underbrace{g'(f(a))\cdot\sigma(h) + \sigma(f'(a)\cdot h + \sigma(h))}_{\sigma(h)}$$

6 4,5

КОМЕНТАР: У случају ф-је једне променљиве, извод композиције је био производ извода (у одговарајућим тачкама). У случају вектор-функција више променљивих, извод у тачки је линеарно пресликавање, па ће извод сложене ф-је бити композиција одговарајућих линеарних пресликавања. Ако линеарно пресликавање поистоветимо са матрицом, извод композиције биће производ одговарајућих матрица.

НАПОМЕНА: Посматрајмо Јакобијеве матрице које одговарају линеарним пресликавањима $(g\circ f)'(a)$, $g'(f(a))$, $f'(a)$. Како је матрица која одговара композицији линеарних пресликавања једнака производу одговарајућих матрица, важи: $A_{(g\circ f)'(a)} = A_{g'(f(a))} \cdot A_{f'(a)}$.

ПОСЛЕДИЦА (извод инверзне ф-је): Нека је $U\subset\mathbb{R}^n$ и $F: U\to\mathbb{R}^n$ и нека је $G=F^{-1}$ њена инверзна ф-ја (дефинисана на некој лопти са центром у $b=F(a)$, $a\in U$). Ако су F и G диференцијабилне, тада је:

$$G'(F(a)) = (F'(a))^{-1}.$$

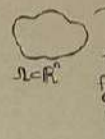
ДОКАЗ: $\left.\begin{array}{l} F\circ G = id \\ G\circ F = id \end{array}\right\} \overset{\oplus}{\Rightarrow} A_{F'(a)}\cdot A_{G'(F(a))} = E, \quad A_{G'(F(a))}\cdot A_{F'(a)} = E$

СТАВ: f диференцијабилна (у тачки $a\in\Omega$) $\Leftrightarrow$ Све ф-је $f_j:\Omega\to\mathbb{R}$, $1\le j\le m$, су диференцијабилне (у тачки a).

ДОКАЗ: $(\Rightarrow)$: $f_j = pr_j\circ f$ (f диференцијабилна, pr_j линеарно пресликавање)

$f_j'(a) = pr_j'(f(a))\circ f'(a)$

$f_j'(a) = pr_j\circ f'(a) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$



$f=(f_1,\dots,f_m)$
$f_j:\Omega\to\mathbb{R}$
$1\le j\le m$

$F(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))$
$x=(x_1,\dots,x_n)\in\Omega$

f_j - jта компонента f

$(\Leftarrow)$: $f_1(a+h) = f_1(a) + f_1'(a)\cdot h + o(h)$

$\vdots$

$f_m(a+h) = f_m(a) + f_m'(a)\cdot h + o(h)$

$$\begin{aligned} f(a+h) = (f_1(a+h), f_2(a+h), \dots, f_m(a+h)) &= (f_1(a)+f_1'(a)\cdot h+o(h), \dots, f_m(a)+f_m'(a)\cdot h+o(h)) \\ &= (f_1(a)+\dots+f_m(a)) + (f_1'(a)\cdot h+\dots+f_m'(a)\cdot h) + (o(h),\dots,o(h)) \\ &= f(a) + f'(a)\cdot h + o(h) \end{aligned}$$

Дакле, доказано је:
1) $f_j(a) = pr_j\circ f'(a)$
2) $f'(a)\cdot h = (f_1'(a)\cdot h, \dots, f_m'(a)\cdot h)$, $h\in\mathbb{R}^n$

6. Јакобијева матрица.

Деф. Нека је $U\subset\mathbb{R}^m$ отворен и $x_0\in U$. Вектор-функција $F: U\to\mathbb{R}^n$ је диференцијабилна у тачки x_0 ако постоји линеарно пресликавање $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ такво да важи: $F(x_0+h) = F(x_0) + Lh + o(h)$, $h\to 0$, (*) при чему под $o(h)$ подразумевамо вектор-функцију $o(h) = (o_1(h), \dots, o_n(h))$, тако да је $o_j = o(h)$, за $j=1,\dots,n$.

- Свако линеарно пресликавање $L:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ дато са $Lh = A_L h$, где је A_L матрица димензија $n\times m$.

Запишимо претходну једнакост у координатама: $A_L = [a_{ij}]$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$

$$\begin{bmatrix} f_1(x_0+h) \\ \vdots \\ f_n(x_0+h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_n(x_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} o(h) \\ \vdots \\ o(h) \end{bmatrix},$$ кад $h\to 0$. Дакле, услов диференцијабилности (*) еквивалентан је услову $f_j(x_0+h) = f_j(x_0) + L_j h + o(h)$, $h\to 0$, $j=1,\dots,n$, где су L_j линеарна пресликавања чије су матрице: $A_{L_j} = [a_{j1}\ a_{j2}\ \dots\ a_{jm}]$. Знамо (одранije): $A_{L_j} = \left[\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x_0)\ \frac{\partial f_j}{\partial x_2}(x_0)\ \dots\ \frac{\partial f_j}{\partial x_m}(x_0)\right]$.

Закључујемо: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\forall j$.

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ $\mathbb{R}^n \ni f'(x_0)e_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ $\qquad$ $\downarrow$ $f'(x_0)e_n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_1}(f_1(x_0),\dots,f_n(x_0)) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0),\dots,\frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0)\right)$$

Деф. Матрицу A_L називамо МАТРИЦОМ ИЗВОДА или Јакобијевом матрицом вектор-функције F у тачки x_0. [redacted] Линеарно пресликавање L називамо ИЗВОДОМ ВЕКТОР-ФУНКЦИЈЕ F У ТАЧКИ x_0 и означавамо са $F'(x_0)$ (или $\frac{dF}{dx}(x_0)$).

Деф. Ако је $m=n$, онда се детерминанта Јакобијеве матрице назива ЈАКОБИЈАН ПРЕСЛИКАВАЊА F у тачки x_0 и означава $J_F(x_0)$.

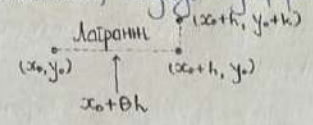
7. Довољан услов диференцијабилности.

• Наредно тврђење нема пандан у А1 - важи искључиво у више димензија!

ТВРЂЕЊЕ: $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $a \in \Omega$. Ако постоје парцијални изводи $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $1 \le j \le m$ у тачки a и уз то су и непрекидни у тачки a, тада је f диференцијабилна у a.

ДОКАЗ: $m=1$, $n=2$

$f(x,y)$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\eta k)\cdot k$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + o(1)\right) h + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o(1)\right) k$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k \quad , \quad (h,k) \to (0,0)$$

разлика тежи 0 кад $(h,k) \to (0,0)$ због непрекидности

8. Градијент. Лагранжова теорема.

Деф. $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\Omega} \to \mathbb{R}$. $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = \nabla f(x)$ градијент функције f у тачки x из Ω

• $f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + o(h)$, $h \to 0$ $\quad h = (h_1, \dots, h_n)$

$f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\cdot h_n + o(h)$, $h \to 0$

$\Rightarrow f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + o(h)$, $h \to 0$

• $\max\limits_{\|v\|=1} \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \max\limits_{\|v\|=1} \langle \nabla f(x), v \rangle$

$= \max\limits_{\|v\|=1} \|\nabla f(x)\| \cdot \|v\| \cdot \cos\measuredangle(\nabla f(x), v)$

$= \max\limits_{\|v\|=1} \|f(x)\| \cdot \cos\measuredangle(\nabla f(x), v)$

$= \|\nabla f(x)\|$, за $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$, $\nabla f(x) \neq 0$

Т (Лагранж): Нека је $f: \Omega \to \mathbb{R}$ диференцијабилна у $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и нека су a, b из Ω такве да $[a,b] \subset \Omega$ $\left([a,b] = \{(1-t)a + tb \mid 0 \le t \le 1\}\right)$. Тада постоји c из $[a,b]$ такво да је $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a)$ $\left(\Leftrightarrow f(b) - f(a) = \langle \nabla f(c), b-a \rangle\right)$.

ДОКАЗ: $\varphi(t) = f((1-t)a + tb)$, $0 \le t \le 1$ $\qquad \varphi'(t) = f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$

$= f(\gamma(t))$, $\gamma(t) = (1-t)a + tb$ $\qquad = f'(\gamma(t))\cdot(b-a)$

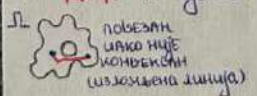
$\gamma'(t) = b-a$

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\varphi"'] & \Omega \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Из Лагранжове Т за φ (А1): $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)\cdot(1-0)$

$f(b) - f(a) = f'(\gamma(\xi))\cdot(b-a) = f'(c)\cdot(b-a)$

ПОСЛЕДИЦА: Ако је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ повезан и $f: \Omega \to \mathbb{R}$ диференцијабилна и $f'(x) = 0$ за свако x из Ω, онда је $f = \text{const}$.



ПРИМЕР: $n=1$ $\quad \Omega = \mathbb{R}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ (намотавање на јединичну кружницу)

$f(t) = (\cos t, \sin t)$

$f'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$\|f'(t)\| = 1$ за $t \in \mathbb{R}$

$\underset{(1,0)}{f(2\pi)} - \underset{(1,0)}{f(0)} = f'(c)\cdot 2\pi$

$(0,0) = (-\sin c, \cos c)\cdot 2\pi$ НЕТАЧНО $\Rightarrow$ Лагранжова Т важи искључиво за скаларновредносне ф-је!

$f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ ✗ не важи

• $|f(b) - f(a)| = |f'(c)|\cdot(b-a) \le \sup\limits_{a<x<b} |f'(x)|\cdot(b-a)$

• $\|f(b) - f(a)\|_{\mathbb{R}^m} \le \sup\limits_{x\in[a,b]} \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} \cdot \|b-a\|_{\mathbb{R}^n}$ ✓ (ВАЖИ)

$\|L\|_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m} = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Lx\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x\|_{\mathbb{R}^n}}$ (максимално истезање)

9. Парцијални изводи вишег реда. Шварцова теорема.

- $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)$ постоје за $x \in \Omega$

Тада су $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \to \mathbb{R}$ ф-је n реалних променљивих, па има смисла говорити о њиховим парцијалним изводима. $_{1 \le j \le n}$

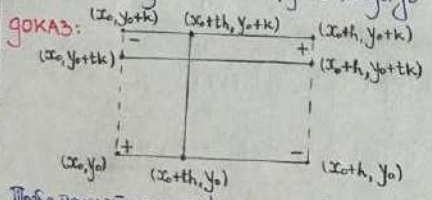
$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(x) \quad \text{(по дефиницији)}$$

- Индуктивно се уводе изводи реда $k > 1$.

$$f(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}(x) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)(x)$$

Т (Шварц): $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Претпоставимо да постоје $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ у Ω и да су непрекидни у тачки (x_0, y_0). Тада је $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

доказ:



Треба показати да се правоугаоник „сабија" у (x_0, y_0).

$$\Delta = f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0, y_0) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k)$$

$$\varphi(t) = f(x_0+th, y_0+k) - f(x_0+th, y_0), \quad 0 \le t \le 1$$

$$\varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$$

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \varphi(1) - \varphi(0) = \Delta$$

Лагранж Т А1 $\Rightarrow \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi) \cdot (1-0)$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+k) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0) \cdot h$$

$$\Rightarrow \varphi(1) - \varphi(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\xi h, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\xi h, y_0)\right) \cdot h$$

$$\overset{\text{Лагранж}}{=} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0+\xi h, y_0+\eta k)\, kh}_{\Delta} \qquad \begin{matrix} 0 < \xi < 1 \\ 0 < \eta < 1 \end{matrix}$$

Аналогно, $\psi(t) = f(x_0+h, y_0+tk) - f(x_0, y_0+tk)$.

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0+\xi' h, y_0+\eta' k)\, hk \qquad \begin{matrix} 0 < \xi' < 1 \\ 0 < \eta' < 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\underset{\substack{\downarrow \\ (x_0, y_0)}}{x_0+\xi h}, \underset{\text{због непр.}}{y_0+\eta k}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\underset{\substack{\downarrow \\ (x_0, y_0)}}{x_0+\xi' h}, \underset{\text{због непр.}}{y_0+\eta' k}), \quad \begin{matrix} h \to 0 \\ k \to 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

- Ова теорема се преноси и на више од 2 димензије. Важи и за векторовредносне ф-је.

Деф. Квадратну матрицу:

$$\begin{bmatrix} f''_{x_1x_1}(A) & f''_{x_1x_2}(A) & \dots & f''_{x_1x_n}(A) \\ f''_{x_2x_1}(A) & f''_{x_2x_2}(A) & \dots & f''_{x_2x_n}(A) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(A) & f''_{x_nx_2}(A) & \dots & f''_{x_nx_n}(A) \end{bmatrix}$$

називамо матрицом другог извода ф-је f у тачки A или хесијаном ф-је f у тачки A (Хесијанова матрица) и означавамо са $d^2f(A)$ или $Hf(A)$

- Уколико f задовољава услове Шварцове теореме, матрица $d^2f(A)$ је симетрична.

10. Тејлорова формула.

Деф. $C^k\Omega$ – сви парцијални изводи реда мањег или једнаког k су непрекидни.

- Тејлор: $n=1 \to$ $f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \underbrace{\frac{f^{(k+1)}(a+\xi h)}{(k+1)!}h^{k+1}}_{\text{Лагранжов остатак}}$ за неко $0 < \xi < 1$ зависи од h

- $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k$

$\varphi(t) = f(x_0+th, y_0+tk)$, $\varphi(1) = f(x_0+h, y_0+k)$

$\varphi(1) = \varphi(0) \cdot \frac{\varphi'(0)}{1!}(1-0) + \frac{\varphi''(0)}{2!}(1-0)^2 + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \frac{\varphi^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1}$

$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+th, y_0+tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+th, y_0+tk)k = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}) f(x_0+th, y_0+tk)$

$\varphi''(t) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0+th, y_0+tk) = (h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}) f(x_0+th, y_0+tk)$

$\vdots$

$\varphi^{(j)}(t) = (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^j f(x_0+th, y_0+tk)$, $0 \le j \le k+1$ (k у смислу степена полинома)

Т (Тејлорова развој): $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + (h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}) f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0) + \dots + \frac{1}{k!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0,y_0)$

$P_n(x_0,y_0)(h,k)$
ОЗНАКА

$+ \frac{1}{(k+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{k+1} f(x_0+\xi h, y_0+\xi k)$

$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) = f(x_1,\dots,x_n) + (\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j}) f(x) + \frac{1}{2!}(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j})^2 f(x) + \dots + \frac{1}{k!}(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j})^k f(x)$

$+ \frac{1}{(k+1)!}(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j})^{k+1} f(x+\xi h)$

$\parallel$

ОСТАТАК $R_n(x_0,y_0)(h,k)$

Деф. Разлика $R_n(x_0,y_0)(h,k) := f(x_0+h, y_0+k) - P_n(x_0,y_0)(h,k)$ назива се остатком Тејлоровог полинома.

*** НАРЕДНА ТЕОРЕМА НИЈЕ ОБРАЂЕНА НА ПРЕДАВАЊИМА. Доказ је на страни 29 у књизи.

Т 2.57. Нека ф-ја f две променљиве има непрекидне све парцијалне изводе до реда n+1 у некој отвореној кугли $B((x_0,y_0),r)$ са центром у тачки (x_0,y_0). Тада је остатак Тејлоровог полинома $R_n(x_0,y_0)(h,k) = o(\|(h,k)\|^n)$.

НАПОМЕНА: Теорема важи и под слабијим претпоставкама.

НАПОМЕНА: Теорема важи и у $n>2$ димензија.

11. Локални минимуми и максимуми. Силвестеров критеријум.

Деф. $f: \underset{\mathbb{R}^n}{A} \to \mathbb{R}$. f има локални минимум (максимум) у тачки $a \in A$ ако постоји $\varepsilon > 0$ тако да је $f(a) \le f(x)$ $(f(a) \ge f(x))$ за свако $x \in A \cap B(a,\varepsilon)$.

Деф. Кажемо да је тачка a унутрашња тачка скупа A ако постоји $r>0$ тако да је $a \in B(a,r) \subset A$. Скуп унутрашњих тачака скупа A зове се унутрашност скупа A и означава са $\operatorname{int} A$.

Деф. $f \in C^1(\Omega)$. $\operatorname{Crit}(f) = \{a \in \Omega : f'(a) = 0\} = \{a \in \Omega : \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0\} = \{a \in \Omega : \nabla f(a) = 0\}$

критичне тачке
стационарне

СТАВ: $f \in C^1(\Omega)$ и $a \in \Omega$ је тачка локалног екстремума $\Rightarrow$ a је критична тачка ($f'(a) = 0$, $\nabla f(a) = 0$) тј. $f'_{x_j}(a) = 0$, $\forall j = 1, \dots, n$)

ДОКАЗ: $f'(a)v = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \varphi'(0) = 0$

$\varphi(t) = f(a+tv)$ $\quad \varphi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$ (свели смо на 1D случај – А1 !)

КОМЕНТАР: Претходни став даје нам потребне, али не и довољне услове да тачка буде локални екстремум.
На пример: 1° $f(x,y) = x^3 + y^3$ тачка (0,0) јесте стационарна, али није локални екстремум
2° $f(x) = x^3$ тачка 0 јесте стационарна, али није локални екстремум

Деф. Квадратна форма је пресликавање $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ облика: $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i$

НАПОМЕНА: Свакој симетричној квадратној матрици $A = [a_{ij}]$ можемо придружити квадратну форму $q_A(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i$. И обратно, свакој квадратној форми $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_jx_i$ можемо придружити симетричну матрицу коефицијената $A_q = [\alpha_{ij}]$, где је $\alpha_{ii} := a_{ii}$, а $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$. Ову матрицу зовемо матрицом квадратне форме q.

НАПОМЕНА: Свака квадратна форма одређена је својим вредностима на јединичној сфери: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Заиста, за сваки ненула вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$, вектор $\frac{x}{\|x\|}$ је јединични, па како је $\frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{x_1}{\|x\|}, \dots, \frac{x_n}{\|x\|}\right)$, то је $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \|x\|^2 \sum_{i,j} a_{ij} \frac{x_i}{\|x\|} \frac{x_j}{\|x\|} = \|x\|^2 q\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$

- $[h\ k] \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = a_{11} h^2 + 2a_{12} hk + a_{22} k^2$ (*) Је симетрична: $a_{12} = a_{21}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f$$

Деф. Квадратна форма q је:
1. позитивно полудефинитна ако је $q(x_1, \dots, x_n) \geq 0$ ((*) ≥ 0) за свако $(x_1, \dots, x_n)$
2. негативно полудефинитна ако је $q(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ ((*) ≤ 0) за свако $(x_1, \dots, x_n)$
3. позитивно дефинитна > 0 ((*) > 0)
4. негативно дефинитна < 0 ((*) < 0)
5. променљивог знака ако је $q(x_1, \dots, x_n) < 0$ за неко $(x_1, \dots, x_n)$, а $q(y_1, \dots, y_n) > 0$ за неко $(y_1, \dots, y_n)$

нпр. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow h^2 - k^2$

- $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ $a_{ij} = a_{ji}$

$Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$h = (h_1, \dots, h_n)$ $Q_A(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_j h_i$ $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$

$$[h_1\ h_2\ \dots\ h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = Q_A(h) = Q(h)$$

$a_{23} h_2 h_3 + a_{32} h_3 h_2 = 2a_{23} h_2 h_3$

- кад би било линеарно: $Q_A(th) = t \cdot Q_A(h)$, $t \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^n$; нејутим, важи (јер је квадратна форма): $Q_A(th) = t^2 \cdot Q_A(h)$ (доказ = директан рачун у матрици)

СТАВ: Ако је квадратна форма Q позитивно/негативно дефинитна (доказујемо за ово), онда постоји константа $\delta > 0$ таква да је: $Q(h) \geq \delta \|h\|^2$ или $Q(h) \leq -\delta \|h\|^2$.

ДОКАЗ: $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 1\}$. $S^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

S^{n-1} је ограничен и затворен подскуп од $\mathbb{R}^n$. (*) (*) $\Rightarrow S^{n-1} = \underbrace{B[0,1]}_{\text{зтв.}} \cap \underbrace{(B(0,1))^c}_{\text{зтв.}}$. Дакле, S^{n-1} је компактан подскуп од $\mathbb{R}^n$.

Q непрекидна на $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ непрекидна и на S^{n-1}. $Q : S^{n-1} \to (0, +\infty)$ (јер је позитивно дефинитна)

S^{n-1} компактан $\Rightarrow \underset{>0}{\delta} = \min_{S^{n-1}} Q = \min_{\|h\|=1} Q(h) = Q(\bar{h})$, где је $\|\bar{h}\| = 1$ (у некој тачки се достиже min).

$Q(h) \geq \delta$ за свако $\|h\| = 1$. $Q(h) = Q\left(\|h\| \cdot \frac{h}{\|h\|}\right) = \|h\|^2 \cdot \underbrace{Q\left(\frac{1}{\|h\|} \cdot h\right)}_{\geq \delta} \geq \delta \|h\|^2$.

ТВРЂЕЊЕ: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ отворен, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^3(\Omega, \mathbb{R})$, $a \in \Omega$ стационарна тачка.

Означимо са q квадратну форму придружену матрици другог извода у тачки a. $H_f(x) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right]_{n \times n}$ Хесијанова матрица за ф-ју f

квадратна и симетрична (по Шварцу ⊕)

Тада важи:
1. q позитивно дефинитна $\Rightarrow a$ локални min
2. q негативно дефинитна $\Rightarrow a$ локални max
3. q променљивог знака $\Rightarrow a$ није локални екстремум

ДОКАЗ: (скроз формални доказ: књига, стр. 33)

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!} \underbrace{\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(a)}_{= 0 \text{ (крит. тачка)}} + \frac{1}{2!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(a) + r_2(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2!} \cdot \underbrace{\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)}_{\text{квадратна форма настала од Хесијанове матрице у тачки } a} + r_2(h)$$

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q_H(h) + \frac{1}{3!} \underbrace{\left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^3 f(a + \xi h)}_{\sigma(\|h\|)^3 \text{ (ограничено овим)}}, \quad 0 < \xi < 1$$

$$f(a+h) - f(a) \geq \frac{1}{2} \delta \|h\|^2 + \sigma(\|h\|)^3 = \underset{>0}{\|h\|^2} \underbrace{\left(\underset{>0}{\frac{1}{2}\delta} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\sigma(\|h\|)}\right)}_{\frac{\delta}{2} > 0} \text{ за } \|h\| < \mu$$

$\Rightarrow f(a+h) - f(a) > 0$ за $0 < \|h\| < \mu$

• $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = \det[a_{11}]$, $\Delta_2 = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $\dots$, $\Delta_n = \det A$

главни минори

Т (Силвестеров критеријум): Нека је $A = [a_{ij}]$ симетрична квадратна матрица и $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ њени главни минори. Тада:

1 q_n позитивно дефинитна $\iff$ $(\forall j)\ 0 \le j \le n$ $\Delta_j > 0$

2 q_n негативно дефинитна $\iff$ $(-1)^j \Delta_j > 0$ (главни минори наизменично мењају знак; први је негативан) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

Деф. Ако је a стационарна тачка, али у свакој њеној околини постоје тачке у којима f узима и веће и мање вредности од $f(a)$, онда тачку a називамо ТАЧКОМ СЕДЛА или СЕДЛОМ.

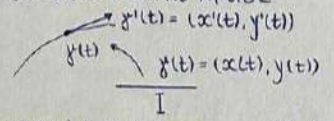
12. Криве и површи. Тангента и тангентна раван.

Деф. Параметризована крива у $\mathbb{R}^n$ је пресликавање $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, где је $I \subset \mathbb{R}$ интервал такав да: 1 $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ 2 $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in I$

• $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t))$ (као брзина)

• непрекидно-диференцијабилне криве зовемо и ГЛАТКЕ КРИВЕ

(пример) $\mathbb{R} \ni t \xrightarrow{\gamma} \underset{\gamma_1(t)}{\overset{x(t)}{\cos t}}, \underset{\gamma_2(t)}{\overset{y(t)}{\sin t}}$



• вектор тангенте на криву у тренутку t је $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$

Деф. Кажемо да је права t тангента на криву γ у тачки $a = \gamma(t_0)$, ако пролази кроз a, а вектор правца јој је $\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0))$.

КОМЕНТАР: За би ова дефиниција имала смисла, неопходно је да извод $\gamma'(t_0)$ буде различит од нула-вектора. Криве за које ово важи називају се РЕГУЛАРНЕ КРИВЕ у тачки t_0.

ПРИМЕРИ: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ „скуп свих решења ј-не $F(x,y) = 0$ је крива"

„$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$ је крива"

$F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$ круг

$F(x,y) = x^2 - y$ ПАРАБОЛА $\nabla F(x,y) = (2x, -1) \neq (0,0)$ увек

$F(x,y) = xy - 1$ ХИПЕРБОЛА $\nabla F(x,y) = (y, x)$

$F(x,y) = x^2 + y^2 + 25$ ПРАЗАН СКУП – НИЈЕ КРИВА

$F(x,y) = x^2 + y^2$ ТАЧКА – НИЈЕ КРИВА $\nabla F(x,y) = (2x, 2y)$

$F(x,y) = xy$ ДВЕ ПРАВЕ

$F(x,y) = x^2 - y^2$ ДВЕ ПРАВЕ $\nabla F(x,y) = (2x, -2y)$

СТАВ: $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $l = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\} \subset \Omega$. Ако: 1 $l \neq \emptyset$ 2 $\nabla F(x,y) \neq 0$ за свако $(x,y) \in l$, тада је l крива (може се локално параметризовати).

Деф. $M \subset \mathbb{R}^3$ је ГЛАТКА ПОВРШ ако $(\forall P \in M)(\exists$ околина V од P на $M)$ и $r: \underset{\mathbb{R}^2}{\overset{\cup}{W}} \xrightarrow[\text{„НА"}]{\text{„1-1"}} V$, $r \in C^3(W, \mathbb{R}^3)$ и вектори $\frac{\partial r}{\partial u}$ и $\frac{\partial r}{\partial v}$ нису колинеарни.

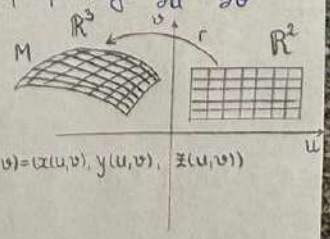
Деф. РЕГУЛАРНА ПОВРШ у простору је скуп $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = 0\}$, где је ф-ја $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ регуларна на скупу $\mathcal{P}$, што по дефиницији значи да $\nabla f(a) \neq 0$, $\forall a \in \mathcal{P}$. (пример: јединична сфера)

Деф. Нека је $\mathcal{P}$ регуларна површ. Унија свих тангенти на све криве r које пролазе кроз тачку $a \in \mathcal{P}$ и које припадају површи $\mathcal{P}$ називамо ТАНГЕНТНА РАВАН У ТАЧКИ a НА ПОВРШ $\mathcal{P}$.

СТАВ: $F(x,y,z) = 0$ (*) задаје површ ако: 1 $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ 2 $F(x,y,z) = 0$ има решење 3 $\nabla F(x,y,z) \neq 0$ кад год $F(x,y,z) = 0$.

$$\underset{\text{ЛИНЕАЛ}}{\mathcal{L}in}\left(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}\right) = \underset{T_P M}{\underset{\cap}{\left\{\lambda_1 \frac{\partial r}{\partial u} + \lambda_2 \frac{\partial r}{\partial v} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}}} \to \text{тангентна раван}$$

• вектор нормале је $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$



СТАВ: Када је површ задата као скуп решења ј-не (*), вектор нормале је $\nabla F(x,y,z)$.

ДОКАЗ: $F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0$

$\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \backslash$ $\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0$

$$\left.\begin{aligned} \langle \nabla F, \frac{\partial r}{\partial u} \rangle = 0 &\Rightarrow \nabla F \perp \frac{\partial r}{\partial u} \\ \langle \nabla F, \frac{\partial r}{\partial v} \rangle = 0 &\Rightarrow \nabla F \perp \frac{\partial r}{\partial v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla F \perp \mathcal{L}in\left(\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}\right) = T_P M$$

КОМЕНТАР: Из претходног тврђења јасно је да тангенте у тачки a на све криве које припадају површи $\mathcal{P}$ леже у равни кроз a са вектором нормале $\nabla f(a)$. Може се доказати да унија свих оваквих тангенти заиста чини раван ако је површ регуларна. Зато, важи следеће тврђење:

ТВРЂЕЊЕ: Ако је површ $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0\}$ регуларна у тачки a, онда је њена тангентна раван у a заиста раван, чији је вектор нормале $\nabla f(a)$.

НАПОМЕНА: Тангентну раван на површ $\mathcal{P}$ у тачки a означавамо са $T_a\mathcal{P}$.

НАПОМЕНА: Некада је крива у простору задата као пресек две површи $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ (нпр. круг је пресек равни и сфере). Могуће је наћи једначину тангенте у некој тачки a иако не умемо да нађемо експлицитну једначину криве. Пошто тражена тангента припада обема тангентним равнима $T_a\mathcal{P}_1$ и $T_a\mathcal{P}_2$, она је једнака њиховом пресеку: $t = T_a\mathcal{P}_1 \cap T_a\mathcal{P}_2$.

[redacted]

ТВРЂЕЊЕ: $S_1 \quad F_1(x,y,z) = 0$

$S_2 \quad F_2(x,y,z) = 0$

$F_1, F_2 \in C^1$, $\underset{\text{на } S_1}{\nabla F_1 \neq 0}$, $\underset{\text{на } S_2}{\nabla F_2 \neq 0}$, $\ell = S_1 \cap S_2$ (услови: $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, ∇F_1 и ∇F_2 линеарно независни на ℓ)

Наведени услови гарантују да је $\ell = S_1 \cap S_2$ крива (или више кривих). $\ell : \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ */

[redacted]

13. Условни локални екстремуми. Множитељи Лагранжа. [redacted]

- Посматрајмо ф-ју f дефинисану на неком подскупу $S \subset \mathbb{R}^n$ који је дефинисан системом једначина:

$$S := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Циљ нам је да нађемо локалне екстремуме рестрикције $f|_S$.

ПРИМЕР: Неке скупове већ знамо да описујемо једном или двема једначинама:

1. права у равни $\mathbb{R}^2$ дефинисана је једном једначином $\varphi(x,y) = 0$, где је $\varphi(x,y) = ax + by + c$.
2. елипса у равни дефинисана је једном једначином $\varphi(x,y) = 0$, где је $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$.
3. раван у $\mathbb{R}^3$ дефинисана је једном једначином $\varphi(x,y,z) = 0$, где је $\varphi(x,y,z) = ax + by + cz + d$.
4. јединична сфера у $\mathbb{R}^3$ дефинисана је једном једначином $\varphi(x,y,z) = 0$, где је $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
5. права у простору дефинисана је двема једначинама $\varphi_1(x,y,z) = \varphi_2(x,y,z) = 0$, за $\varphi_1(x,y,z) = a_1x + b_1y + c_1z + d_1$, $\varphi_2(x,y,z) = a_2x + b_2y + c_2z + d_2$

КОМЕНТАР: Приметимо да су 1D објекти (праве, криве) дефинисани једном једначином у равни, а двема једначинама у простору, док су 2D објекти (равни, површи) у простору дефинисани само једном једначином.
Ово је УГЛАВНОМ (*) правило: збир броја једначина k и димензије објекта једнак је броју променљивих n. Овде димензију објекта можемо да схватимо као број параметара који учествују у параметарској једначини објекта (праву и криву и у равни и у простору можемо параметризовати једним параметром, а раван и површи другог реда помоћу два параметра.

(*): ако су ф-је φ_j независне у свакој тачки поменутог скупа, видети дефиницију 2.79

2.79 **Деф.** Нека су ф-је $\varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, k$ диференцијабилне. Кажемо да су оне НЕЗАВИСНЕ У ТАЧКИ x_0 ако су вектори $\nabla \varphi_j(x_0)$, $j = 1, \dots, k$, линеарно независни.

- Следећа теорема даје нам неопходне услове под којима је тачка локални екстремум рестрикције $f|_S$.

Т Нека је скуп S дефинисан једначинама: $S := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0\}$ (□) и нека су ф-је φ_j диференцијабилне и независне у свакој тачки $x \in S$. Нека је ф-ја f диференцијабилна на неком отвореном скупу у који садржи S и нека је x_0 тачка локалног екстремума рестрикције $f|_S$. Тада постоје реални бројеви $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такви да је: $\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla \varphi_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla \varphi_k(x_0)$. (○) (у доказу: $x_0 \equiv a$)

ДОКАЗ: Доказаћемо теорему у случајевима $n=3, k=1$ (површ у простору) и $n=3, k=2$ (крива у простору), ради поједностављења записа (обе две слике можемо записати и нацртати).

$n=3, k=1$: Нека је површ у простору дата ј-ном $\varphi(x,y,z) = 0$. Услов линеарне независности овде значи да је вектор $\nabla\varphi(x,y,z) \neq (0,0,0)$ за свако $(x,y,z) \in S$, тј. да је површ регуларна. Нека је $a = (x_0, y_0, z_0)$ тачка локалног екстремума ф-је $f|_S$ и нека је $\gamma : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^3$ регуларна крива на површи S (тј. $\gamma(t) \in S$) која пролази кроз a, $\gamma(t_0) = a$. Из дефиниције условног локалног екстремума и чињенице да је $\gamma(t) \in S$ следи да реална ф-ја $f \circ \gamma$ има локални екстремум у тачки $t = t_0$. Како је $f \circ \gamma$ диференцијабилна, то је $(f \circ \gamma)'(t_0) = 0$. То значи да је: $0 = (f \circ \gamma)'(t_0) = \langle \nabla f(\gamma(t_0)), \gamma'(t_0) \rangle = \langle \nabla f(a), \gamma'(t_0) \rangle$, тј. $\nabla f(a) \perp \gamma'(t_0)$. Како ово важи за сваку регуларну криву γ која припада површи S и пролази кроз a, следи $\nabla f(a) \perp T_aS$. Како је $\nabla\varphi(a)$ вектор нормале на T_aS и $\nabla\varphi(a) \neq (0,0,0)$, то постоји $\lambda \in \mathbb{R}$ тд. је $\nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla\varphi(a)$.

$n=3, k=2$: Нека је S крива у простору $\mathbb{R}^3$ дефинисана ј-нама $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и $\gamma(t)$ њена регуларна параметризација, тј. регуларна крива која припада површима $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 0$. Тада је $\gamma'(t_0) \perp \nabla\varphi_1(a)$ и $\gamma'(t_0) \perp \nabla\varphi_2(a)$. Претпоставимо да је $\gamma(t_0) = a$ тачка локалног екстремума. Како диференцијабилна реална ф-ја $f \circ \gamma$ има локални екстремум у тачки $t = t_0$, то је, исто као и малопре, $\nabla f(a) \perp \gamma'(t_0)$. То значи да су вектори $\nabla\varphi_1(a)$, $\nabla\varphi_2(a)$ и $\nabla f(a)$ линеарно зависни (пошто су сви ортогонални на исти вектор), али, пошто су $\nabla\varphi_1(a)$ и $\nabla\varphi_2(a)$ линеарно независни, то постоје $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ такви да важи: $\nabla f(a) = \lambda_1 \cdot \nabla\varphi_1(a) + \lambda_2 \cdot \nabla\varphi_2(a)$.

НАПОМЕНА: Бројеви $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ из претходне теореме називају се МНОЖИТЕЉИ ЛАГРАНЖА.

НАПОМЕНА: Услове:
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda_1 \nabla\varphi_1 + \dots + \lambda_k \nabla\varphi_k \\ \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$
можемо заменити једним: $\nabla F \overset{(*)}{=} 0$, где је F нова, помоћна ф-ја $n+k$ променљивих, коју дефинишемо са $F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) := f(x_1, \dots, x_n) - (\lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n))$. Векторска ј-на (*) је систем од $n+k$ ј-на по $n+k$ непознатих. Првих n ј-на (парц. изводи по x_j) представљају ј-ну (○), а последњих k (парц. изводи по λ_j) услов (□). Решавањем система (*) по x_j, λ_j добијамо потенцијалне тачке условних локалних екстремума.

- Наводимо без доказа критеријум помоћу ког можемо проверити да ли је стационарна тачка заиста тачка условног локалног екстремума.

ТВРЂЕЊЕ: Нека је $x_0 \in S$ стационарна тачка, тј. решење система $\nabla F = 0$ (погледати претходну напомену).
Посматрајмо квадратну форму $n-k$ променљивих: $q(h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_n) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$, при чему се на десној страни једнакости јављају само $h_{k+1}, \dots, h_n$, док се променљиве $h_1, \dots, h_k$ изражавају преко $h_{k+1}, \dots, h_n$ из система $df_j(x_0)(h_1, \dots, h_n) = 0$, $j = 1, \dots, k$. Тада важи:

1. q + дефинитна $\Rightarrow$ x_0 условни лок. min
2. q − дефинитна $\Rightarrow$ x_0 условни лок. max
3. q променљивог знака $\Rightarrow$ x_0 није условни лок. екстремум

14. Жордан-мерљиви скупови.

Деф. $A \subset \mathbb{R}^2$ је Лебегове мере нула $(m(A) = 0)$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји низ $(\Pi_n)_{n=1}^{\infty}$ правоугаоника такав да:
1. $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n$ (покривају цео сегмент те површине) (низ)
2. $\sum_{n=1}^{\infty} |\Pi_n| < \varepsilon$ (површина је мања од ε)

/* ПОДСЕТИТИ СЕ СКУПОВА МЕРЕ НУЛА СА А2 */

Деф. $A \subset \mathbb{R}^2$ је Жордан-мерљив ако:
1° A је ограничен
2° ∂A је мере нула

$\partial A = \bar{A} \setminus A^{\circ}$ (ГРАНИЦЕ СКУПА A = ЗАТВОРЕЊЕ БЕЗ УНУТРАШЊОСТИ)

$x \in \partial A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ B(x, \varepsilon)$ сече A и A^c

ПРИМЕР:
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 < 5\}$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + (y+1)^2 \leq 4\}$
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$
$[0,5] \times [-2,-1]$
] јесу мерљиви јер им је руб мере нула

- Сви скупови који имају за руб део-по-део глатку границу јесу мерљиви.

ПРИМЕР НЕМЕРЉИВОГ СКУПА: Нека је A скуп свих тачака у квадрату који имају рационалне обе координате: $A := \{(x,y) \mid x, y \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}$. Показаћемо да је руб скупа A цео квадрат $[0,1] \times [0,1]$. Заиста, било која тачка (a,b) из квадрата $[0,1] \times [0,1]$ имаће својство да у свакој њеној околини постоји тачка $(p,q) \in [0,1] \times [0,1]$ таква да су p, q рационални (јер је скуп $\mathbb{Q}$ густ у $\mathbb{R}$), али и да у свакој њеној околини постоји тачка (c,d) тако да с није у $\mathbb{Q}$, јер су и ирационални бројеви густи у $\mathbb{R}$. То значи да у свакој околини тачке $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$ постоје и тачке из A и оне које нису у A. То значи да је: $[0,1] \times [0,1] \subset \partial A$.
С друге стране, ако $(a,b) \notin [0,1] \times [0,1]$, тада очигледно постоји околина тачке (a,b) која се не сече са A, па је $[0,1] \times [0,1] = \partial A$. Пошто скуп $[0,1] \times [0,1]$ није мере нула, видимо да скуп A није мерљив.

СТАВ: A и B Жордан-мерљиви скупови $\Rightarrow$ $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B$ су Жордан-мерљиви скупови.

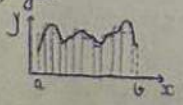
ДОКАЗ: (1) $\partial(A \cap B) \subset \underbrace{\partial A}_{\text{мере нула}} \cup \underbrace{\partial B}_{\text{мере нула}}$ (јер је Н.М.)
$\Rightarrow$ мере нула

- подскуп, унија, ... скупова МЕРЕ НУЛА ЈЕ МЕРЕ НУЛА!

15. Риманов интеграл по правоугаонику.

ПОДСЕТНИК: У А2 смо дефинисали интеграл ф-је на интервалу $[a,b]$ као граничну вредност збира површина малих правоугаоника, који су за основицу имали $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, а за висину вредност $f(\xi_j)$ ф-је f у некој тачки $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$.

$\int_a^b f(x)dx$



$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ $\quad \mathcal{P}$
$\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$
$\sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) \cdot |\Delta_j|$ $\quad \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0} \sigma(f, \mathcal{P}, \xi) = \int_a^b f(x)dx$ $\quad \lambda(\mathcal{P}) = \max_{1 \leq j \leq n} |\Delta x_j|$ финоћа поделе

- Двоструки и троструки интеграл дефинисаћемо слично. Двоструки интеграл ће бити дефинисан за ф-је две променљиве, а троструки за ф-је три променљиве. Дужину основице малог правоугаоника који је учествовао у дефиницији једноструког интеграла заменићемо површином малог правоугаоника у случају двоструког, тј. запремином малог квадра у случају троструког интеграла. Затим ћемо формирати интегралне суме, и као у А2 интеграл дефинисати као лимес интегралних сума у простору подела.
- Оно што је ново у односу на интеграл у $\mathbb{R}$ јесте класа скупова по којима интегралимо ф-је. У $\mathbb{R}$ смо интегралили углавном само по интервалима, док у случају ф-ја више променљивих интегралимо пре свега по једним усмереним интервала (а то су правоугаоници и квадри), али и по знатно већој класи скупова разних облика.

• Геометријска интерпретација двоструког интеграла слична је као у случају једноструког: интеграл ф-је која је константна и једнака јединици је површина области по којој интегралимо (у случају једне променљиве била је дужина интервала), а интеграл позитивне ф-је јесте запремина области у простору испод графика ф-је.

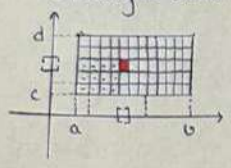
* Нека је ф-ја f две променљиве дефинисана на правоугаонику $\Pi = [a,b] \times [c,d]$ (са вредностима у $\mathbb{R}$).

2еф. Нека је $\Pi = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ и нека је: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ (*). Означимо са Π_{ij} правоугаоник $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$. Подела $\mathcal{P}$ правоугаоника Π је скуп правоугаоника $\{\Pi_{ij} \mid i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$.

(финоћа поделе) Дијаметар поделе $\mathcal{P}$ је вредност $\lambda(\mathcal{P}) := \max\{|x_1 - x_0|, \dots, |x_m - x_{m-1}|, |y_1 - y_0|, \dots, |y_n - y_{n-1}|\}$.

Подела са означеним тачкама $(\mathcal{P}, A)$ правоугаоника Π јесте подела $\mathcal{P}$ заједно са скупом тачака $A_{ij} \in \Pi_{ij}$.

Очигледно важи $\Pi = \bigcup_{ij} \Pi_{ij}$.



$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \Pi_{ij}$

$|\Pi_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$

↓

површина правоугаоника Π_{ij}

$$\mathrm{I}\ \lambda(\mathcal{P}) = \max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} (\max(x_i - x_{i-1}), \max(y_j - y_{j-1}))$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{II}\ \lambda(\mathcal{P}) = \max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} ((x_i - x_{i-1}) + (y_j - y_{j-1}))$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{III}\ \lambda(\mathcal{P}) = \max_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

НАПОМЕНА: Приметимо да је задавање поделе $\mathcal{P}$ правоугаоника Π еквивалентно задавању скупа тачака: $\{(x_i, y_j) \mid i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$ у равни таквих да важи (*), тако да ћемо под поделом подразумевати и овај скуп.

2еф. ИНТЕГРАЛНА СУМА ф-ЈЕ f $(f: \Pi \to \mathbb{R})$ која одговара подели $\mathcal{P}$ са означеним тачкама A јесте величина:

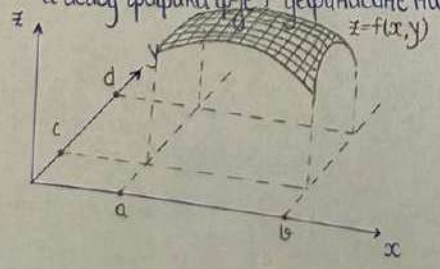
$$\sigma(f, \mathcal{P}, A) := \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} f(A_{ij})\,|\Pi_{ij}|$$

2еф. Уколико постоји $I \in \mathbb{R}$ такав да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да за произвољну поделу са означеним тачкама за коју важи $\lambda(\mathcal{P}) < \delta$ важи $|\sigma(f, \mathcal{P}, A) - I| < \varepsilon$ за све изборе A, кажемо да је f Риман интеграбилна на правоугаонику Π и (будући да се лако види јединственост I) пишемо: $\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = I$.

$$\mathcal{R}(\Pi) = \{ f: \Pi \to \mathbb{R} \mid f \text{ је Риман-интеграбилна на } \Pi \}$$ скуп Риман-интеграбилних ф-ја

НАПОМЕНА: У А2 смо учили да су све непрекидне ф-је интеграбилне, као и да су интеграбилне оне чији је скуп тачака прекида мере нула и чији су прекиди само прве врсте. За двоструки интеграл важи слично: ограничена ф-ја је интеграбилна ако је њен скуп тачака прекида мере нула.

НАПОМЕНА: Геометријска интерпретација двоструког интеграла је следећа. Нека је f позитивна ф-ја. Тада је интегрална сума на правоугаонику $S(f, \mathcal{P}, A)$ једнака збиру малих квадара који за основицу имају површину $|\Pi_{ij}|$, а за висину $f(A_{ij})$. Затим је двоструки интеграл запремина области изнад Oxy-равни и испод графика ф-је f дефинисане на правоугаонику Π.



• Ако је ф-ја f интеграбилна на правоугаонику Π, тада је интеграл $\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy$ једнак лимесу низа:

$$S_n(f, \mathcal{P}, A) = \frac{(b-a)(d-c)}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} f\left(a + i\cdot\frac{b-a}{n},\ c + j\cdot\frac{d-c}{n}\right).$$

Наиме, за поделу можемо узети правоугаонике који су добијени дељењем дужи $[a,b]$ и $[c,d]$ на n једнаких делова (дијаметар ове поделе очигледно тежи нули), а за тачке A_{ij} горњи десни угао правоугаоника Π_{ij}, тј. $A_{ij} := \left(a + i\cdot\frac{b-a}{n},\ c + j\cdot\frac{d-c}{n}\right)$.

16. Линеарност интеграла. Услов интеграбилности.

• Из линеарности лимеса низа и чињенице да је скуп тачака прекида ф-ја f и g, следе следећа својства интеграла:

ЛИНЕАРНОСТ: $f, g \in \mathcal{R}(\Pi) \Rightarrow f+g \in \mathcal{R}(\Pi) \wedge \lambda f \in \mathcal{R}(\Pi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и важи:

доказ: $\sigma(f+g, \mathcal{P}, A) = \underbrace{\sigma(f, \mathcal{P}, A)}_{\iint f} + \underbrace{\sigma(g, \mathcal{P}, A)}_{\iint g}$ $\Big/ \lim_{\lambda(\mathcal{P})\to 0}$

1 $\iint_\Pi (f(x,y) + g(x,y))\,dx\,dy = \iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy + \iint_\Pi g(x,y)\,dx\,dy$

2 $\iint_\Pi (\lambda f(x,y))\,dx\,dy = \lambda \cdot \iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy$

МОНОТОНОСТ: $f, g \in \mathcal{R}(\Pi)$ и $f(x,y) \le g(x,y)$ за свако $(x,y) \in \Pi$. Следи $\iint_\Pi f(x,y)\,dxdy \le \iint_\Pi g(x,y)\,dxdy$.

ДОКАЗ: $\sigma(f, \mathcal{P}, \lambda) \le \sigma(g, \mathcal{P}, \lambda) \Big/ \lim_{\lambda(\mathcal{P}) \to 0}$ (постоји јер су обе Риман-интеграбилне)

сваки сабирак је мањи од сваког збирна садржана горње суме се дефинишу о

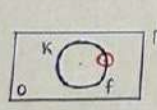
- $\iint_\Pi c\,dxdy = c|\Pi|$
- $\sigma(c, \mathcal{P}, \lambda) = \sum_{i,j} |\Pi_{ij}| = |\Pi|$

Т (услов интеграбилности): Свака непрекидна функција на правоугаонику Π је Риман-интеграбилна на том правоугаонику.

ДОКАЗ: ИСТИ КАО НА А2

СТАВ: $f \in \mathcal{R}(\Pi) \Rightarrow f$ је ограничена на Π (доказ у питању бр. 17)

Т $f \in \mathcal{R}(\Pi)$ акко 1° f је ограничена
2° $D_f = \{(x,y) \in \Pi : f$ има прекид у $(x,y)\}$ је мере нула.



$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in K \\ 0, & (x,y) \in \Pi \setminus K \end{cases}$$

ako želimo da integralimo po nekom obliku obuhvatimo ga pravougaonikom, imaćemo prekide ali skup prekida će biti mere nula

17. Интеграција по Жордан-мерљивом скупу. Линеарност и адитивност.

Деф. $A \subset \mathbb{R}^2$ Жордан-мерљив скуп, $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \Pi$. Кажемо да је f интеграбилна на A ако је $\tilde{f} = \begin{cases} f \text{ на } A \\ 0 \text{ на } \Pi \setminus A \end{cases}$ интеграбилна на Π.

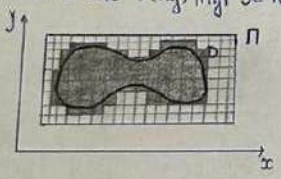
Тада је $\iint_A f(x,y)\,dxdy = \iint_\Pi \tilde{f}(x,y)\,dxdy$.

ОБЈАШЊЕЊЕ: Уколико је руб скупа A мере нула и ако је A садржан у неком правоугаонику Π, ф-ја $\tilde{f}$ биће интеграбилна на Π.

НАПОМЕНА: Може се показати да је горња дефиниција еквивалентна следећој:
Нека је $\mathcal{P}$ подела правоугаоника Π са уоченим тачкама $\mathcal{A}$. Интегрална сума на D је:

$$\sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{A}, D) := \sum_{i,j} \delta_{ij} f(A_{ij}) |\Pi_{ij}|, \text{ при чему је } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \Pi_{ij} \cap D = \emptyset \\ 1, & \Pi_{ij} \cap D \neq \emptyset \end{cases},$$

тј. у интегралној суми бројимо само оне $f(A_{ij})|\Pi_{ij}|$ за које правоугаоници Π_{ij} секу D.



Ако је I лимес оваквих интегралних сума, дефинисан као и до сад (тј. лимес у простору подела), може се показати да је $I = \iint_D f(x,y)\,dxdy$, у смислу горње дефиниције.

Т (својства интеграла): $f, g \in \mathcal{R}(\Pi)$, $D, D_1, D_2 \subset \Pi$ мерљиви

1 $\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$ (ЛИНЕАРНОСТ)

$\iint_D \lambda f(x,y)\,dxdy = \lambda \iint_D f(x,y)\,dxdy$

2 $f(x,y) \le g(x,y)$ за свако $(x,y) \in D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D g(x,y)\,dxdy$ (МОНОТОНОСТ)

3 $\iint_D 1\,dxdy = P(D)$ (ПОВРШИНА)

4 $P(D) = 0 \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$

5 $P(D_1 \cap D_2) = 0 \Rightarrow \iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

(специјално, важи и ако је $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ - АДИТИВНОСТ ПО СКУПУ)

ДОКАЗ: 1, 2 следе на основу одговарајућих својстава интеграла на Π и примене на $\tilde{f}$
3 следи из горње напомене
4 Пошто је f интеграбилна на Π, тада је она и ограничена, тј. $m \le f(x,y) \le M$. [redacted]

Из тачке 2 следи: $\iint_D m\,dxdy \le \iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D M\,dxdy$.

Из тачака 1 и 3 и услова $P(D) = 0$, имамо: $\iint_D m\,dxdy = \iint_D M\,dxdy = 0$,

па је и $\iint_D f(x,y)\,dxdy = 0$.

5 Доказ се ослања на коришћење својстава карактеристичне ф-је скупа. Ово није рађено на предавањима, али доказ није тешак. Налази се у књизи, на страни 55.

ТВРЂЕЊЕ: $D \subset \mathbb{R}^2$ Жордан-мерљив скуп, $f \in \mathcal{R}(D)$, $m = \inf_D f$, $M = \sup_D f$. Тада је $m \le \underbrace{\frac{1}{|D|} \cdot \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{средња вредност од } f \text{ на } D} \le M$.

ДОКАЗ: $m \le f(x,y) \le M, \quad (x,y) \in D$

$$\iint_D m\,dx\,dy \le \iint_D f\,dx\,dy \le \iint_D M\,dx\,dy \quad \text{(због монотоности)}$$

$$m \cdot |D| \le \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M \cdot |D| \qquad |D| > 0: \quad m \le \frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \le M \qquad \mu = \frac{1}{|D|} \iint f\,dx\,dy$$

* Додатно, нека је D компактан.

$$m = \min_D f = f(T_m) \qquad M = \max_D f = f(T_M) \qquad T_m, T_M \in D$$

$$f(T_m) \le \mu \le f(T_M)$$

** Ако је уз СВЕ НАВЕДЕНО D и повезан, онда постоји тачка $S \in D$ тд. $f(S) = \mu$ (Т о међувредности).

$$\frac{1}{|D|} \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(S) \text{ за неко } S \in D$$

18. Фубинијева теорема - случај правоугаоника.

УВОД: Фубинијева теорема своди вишеструки интеграл на понављени (више једноструких). Приметимо да израз $\int_a^b f(x,y)\,dx$ има различите вредности за различите вредности y (можемо га схватити као ф-ју од y) и слично за израз $\int_c^d f(x,y)\,dy$.

Т (Фубинијева) по правоугаонику: Нека је ф-ја f непрекидна на правоугаонику $\Pi = [a,b] \times [c,d]$. Тада су, за фиксиране y и x, ф-је $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$ и $\psi(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, непрекидне на интервалима $[a,b]$ и $[c,d]$ (редом) и важи:

$$\iint_\Pi f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\varphi(x)}\Big)\,dx = \int_c^d \Big(\underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{\psi(y)}\Big)\,dy$$

ДОКАЗ: Докажимо прво $\varphi \in C[a,b]$, $\psi \in C[c,d]$. Задајмо $\varepsilon > 0$. Постоји $\delta > 0$ са својством $d(P,Q) < \delta \Rightarrow |f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ $(P,Q \in \Pi)$ (ово важи због тврђења: „Ако је f непрекидна на правоугаонику Π, онаје и равномерно непрекидна (важи за све компактне скупове, не само за правоугаоник)).

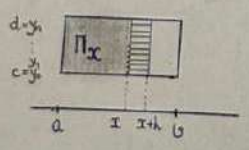
$x_1, x_2 \in [a,b]$, $|x_1 - x_2| < \delta$:

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \Big|\int_c^d f(x_2,y)\,dy - \int_c^d f(x_1,y)\,dy\Big| = \Big|\int_c^d (f(x_2,y) - f(x_1,y))\,dy\Big|$$

$$\le \int_c^d \underbrace{|f(x_2,y) - f(x_1,y)|}_{\le \varepsilon}\,dy$$

$$\le \int_c^d \varepsilon\,dy = (d-c)\varepsilon$$

(Аналогно се доказује $\psi \in C[c,d]$)



$$\Pi_x = [a,x] \times [c,d]$$

$$F(x) = \iint_{\Pi_x} f(u,v)\,du\,dv \qquad F'(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy, \quad F(a) = 0$$

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \Big(\iint_{\Pi_{x+h}} f(u,v)\,du\,dv - \iint_{\Pi_x} f(u,v)\,du\,dv\Big)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \iint_{\Pi_{x,h}} f(u,v)\,du\,dv$$

$$\iint_{\Pi_{x,h}} f(u,v)\,du\,dv \approx \sum_{j=1}^{n} f(x,\xi_j)\,h\,(y_j - y_{j-1}) \quad (*)$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{\substack{h \to 0 \\ \lambda(P) \to 0 \\ \text{подела по } y}} \sum_{j=1}^{n} f(x,\xi_j)(y_j - y_{j-1}) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

- F, G исти изводи на $[a,b]$
  $\Rightarrow$ разликују се за $C = \text{const.}$
- $F(a) = G(a)$

(**)

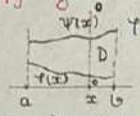
$$G(x) = \int_a^x \Big(\int_c^d f(u,v)\,dv\Big)\,du \qquad G'(x) = \int_c^d f(x,v)\,dv = F'(x), \quad G(a) = 0$$

$$\overset{(**)}{\Rightarrow} G(x) = F(x) \Rightarrow F(b) = G(b) \Rightarrow \underbrace{\iint_\Pi f\,dx\,dy}_{F(b)} = \underbrace{\int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)\,dx}_{G(b)}$$

НАПОМЕНА: Теорема важи и ако је $f \in \mathcal{R}(\Pi)$ уз додатне услове.

19. Фубинијева теорема - општи случај и примене.

Т (Фубинијева): $D \subset \mathbb{R}^2$ Жордан-мерљив, повезан, компактан; $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$; $\varphi, \psi \in C[a,b]$, $\varphi(x) \le \psi(x)$, $a \le x \le b$; $f \in C(D)$. Тада је:



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

(Доказ није рађен на предавањима али није тешко.)

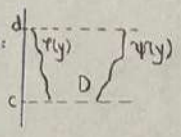
доказ: Доказ следи из Фубинијеве Т на правоугаонику. Важи: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_n \chi_D(x,y) f(x,y)\,dx\,dy$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d \chi_D(x,y) f(x,y)\,dy \right) dx.$$

За фиксирано x_0, подинтегрална ф-ја $\chi_D(x_0,y) f(x_0,y)$ једнака је ф-ји $f(x_0,y)$ за $(x_0,y) \in D$, а нули за $(x_0,y) \notin D$. Како за фиксирано x_0 важи $(x_0,y) \in D \Leftrightarrow y \in [\varphi(x_0), \psi(x_0)]$, то је:

$$\int_c^d \chi_D(x,y) f(x_0,y)\,dy = \int_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,y)\,dy,$$ одакле следи тврђење теореме.

* Аналогно:



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

ОПШТИ СЛУЧАЈ - ТРОСТРУКИ ИНТЕГРАЛ

увод: Троструки интеграли дефинишу се потпуно аналогно двоструким. Прво, посматрамо квадар у простору, на којем је дефинисана ф-ја (три променљиве), и на исти начин као код двоструког интеграла дефинишемо интегралне суме, с тим да реч „правоугаоник" заменујемо речју „квадар", а реч „површина" речју „запремина".

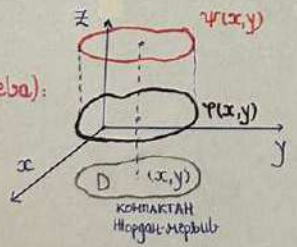
Т (Фубинијева - за квадар $K = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3]$):

$$\iiint_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1} \left(\iint_{[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)\,dy\,dz \right) dx$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$$

Primene su računanje površine na R^2, odnosno zapremine na R^3

Т (Фубинијева):



$\varphi, \psi \in C(D)$

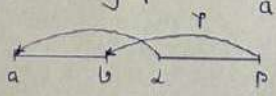
$\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ за $(x,y) \in D$

$T = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$

$$\Rightarrow \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

20. Смена променљиве код вишеструког интеграла.

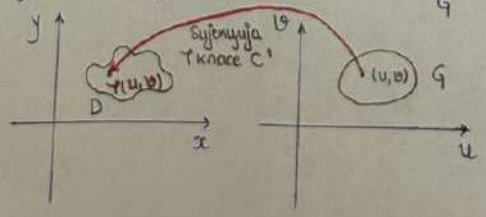
- Код интеграла ф-је једне променљиве смена се врши помоћу правила: $\int_a^b f(x)\,dx = \left(\begin{matrix} x = \varphi(t) \\ \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b \end{matrix} \right) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$



$\varphi : [\alpha,\beta] \xrightarrow{\text{бij.}} [a,b]$

- У случају ф-ја више променљивих, пресликавање φ ће имати онолико координатних ф-ја колико и променљивих (тј. биће $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), а извод φ' заменће јакобијан, тј. његова апсолутна вредност.

$n=2$: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \left((x,y) = \varphi(u,v) \right) = \iint_G f(\varphi(u,v)) \, |\det \varphi'(u,v)| \, du\,dv$



f непрекидна на G

D, G Жорданови

φ бијекција класе C^1, $\varphi : G \to D$

Зашто баш важи?

- извод ЛП је ЛП

ЛП - линеарно пресликавање

ПОЈЕДНОСТАВЉЕНО: $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ линеарно, $\det A \ne 0$

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

$f = 1$

$A(G) = D$ $\quad |D| = |\det A| \cdot |G|$ (променили формулу) $\quad |A(G)| = |\det A| \cdot |G|$ ✓ (позиција)

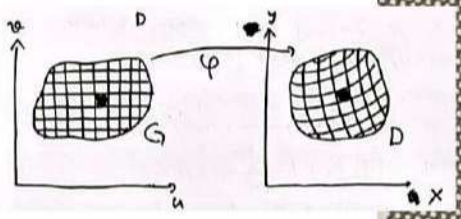
- но local делови $f \approx const.$ $\varphi \approx$ линеарно $\Rightarrow$ процунира се

$$\iint_G __ = \sum_k \iint_{\Pi_k} __ \qquad \iint_D __ = \sum_k \iint_{\varphi(\Pi_k)} __$$

▸ На овим малим деловима је φ отприлике линеарно

da li je L = D za svako k?

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_k \iint^{L}_{\varphi(\Pi_k)} \overset{?}{=} \sum_k \iint^{D}_{\Pi_k} = \iint_G f(\varphi(u,v))\,|\det \varphi'(u,v)|\,du\,dv$$



$$D \approx \iint_{\Pi_k} f(\varphi(P_k))\,|\det \varphi'(P_k)|\,du\,dv \approx f(\varphi(P_k))\cdot|\det \varphi'(P_k)|\cdot|\Pi_k| = f(\varphi(P_k))\cdot|\varphi(\Pi_k)|$$

отприлике константно преко тј. неког облика

$P_k \in \Pi_k$

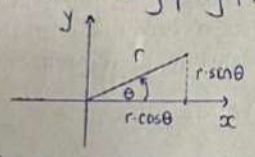
монотоне у низине интеграла

$$\approx \iint_{\varphi(\Pi_k)} f(x,y)\,dx\,dy = L$$

21. Поларне, цилиндричне и сферне координате.

ПОЛАРНЕ КООРДИНАТЕ

- Поларне координате у равни одређене су једном полуправом p (поларном осом) и њеним почетком O (центром). Свака тачка P у равни, осим центра, на јединствен начин је одређена паром (r,θ), где је r растојање од тачке до центра, а $\theta \in [0,2\pi)$ усмерен угао између полуправе p и полуправе OP. Дужина r зове се РАДИЈУС, а угао θ АЗИМУТ. → (или $[-\pi,\pi)$)
- Ако у Декартовом координатном систему изаберемо координатни почетак за центар, а позитиван део x-осе за полуправу p, тада је веза између Декартових и поларних координата дата са: $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$



$$(r,\theta) \xrightarrow{\varphi} (r\cdot\cos\theta,\ r\cdot\sin\theta) \qquad -\pi < \theta < \pi,\ r > 0 \qquad G = (0,\infty)\times(-\pi,\pi),\ D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$$

- Примећујемо да су координатне линије у случају поларних координата (тј. криве $r = const.$ $\theta = const.$) кругови и полуправе.

ⓣ Нека поларна смена $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\sin\theta$ слика мерљив скуп D_1 на мерљив скуп D и нека је f непрекидна на D. Тада је: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$ („$r\,dr\,d\theta = dx\,dy$")

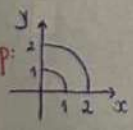
НАПОМЕНА: Примећујемо да је r које се појавило у подинтегралној ф-ји на десној страни једнакости јакобијан пресликавања $F: (r,\theta) \to (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

$$\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix} = r$$

КОМЕНТАР: Може се проверити да у дефиницији интеграла непрекидне ф-је, уместо поделе скупа на правоугаонике, можемо узети поделу на произвољне мерљиве скупове који се секу евентуално по граници:

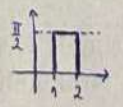
$$D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i, \quad D_i \cap D_j \subset \partial(D_i \cap D_j)$$

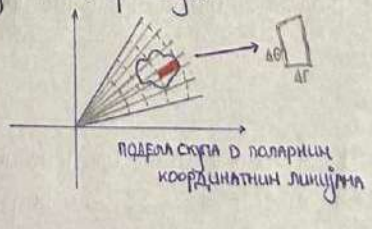
ПРИМЕР:



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

$$\Pi = [1,2]\times[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

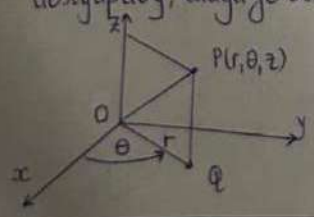




ПОДЕЛА СКУПА D ПОЛАРНИМ КООРДИНАТНИМ ЛИНИЈАМА

ЦИЛИНДРИЧНЕ КООРДИНАТЕ

- Нека је у простору задата раван α и у њој полуправа. ЦИЛИНДРИЧНЕ координате тачке P у простору су (r,θ,z), где су (r,θ) поларне координате пројекције Q тачке P на дату раван, а z растојање између тачака P и Q или висина (која може бити и негативна, у зависности од тога са које стране равни α је тачка P).
- Ако у Декартовом координатном систему за раван α изаберемо раван Oxy и позитиван део x-осе за полуправу, тада је веза између Декартових и цилиндричних координата дата са:

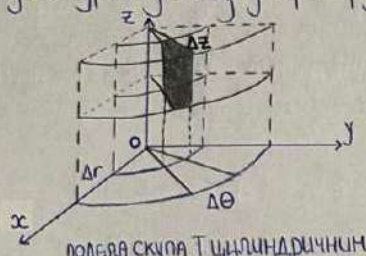


$$F: (r,\theta,z) \to (r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta, z)$$

- Координатне цилиндричне површи (површи које се добијају ако фиксирамо једну цилиндричну координату) су цилиндри, полуравни које садрже z-осу и равни паралелне Oxy равни у простору.
- Сличним поступком као у случају поларних координата, тј. дељењем области T на скупове

$$S_{ijk} := \{(r,\theta,z) \mid r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j,\ z_{k-1} \le z \le z_k\},$$ добијамо формулу за

цилиндричну смену у троструком интегралу: $$\iiint\limits_{F(D)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$



ПОДЕЛА СКУПА T ЦИЛИНДРИЧНИМ КООРДИНАТНИМ ПОВРШИНА

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad z = z$$

$$\varphi'(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

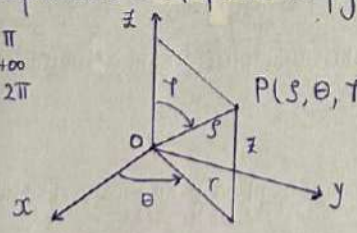
$$\det \varphi' = r$$

СФЕРНЕ КООРДИНАТЕ

- Нека је у простору фиксирана једна раван α и полуправа t нормална на њу, тако да је $t \cap \alpha = \{O\}$ и O теме полуправе t. Нека је P полуправа са теменом O у равни α. СФЕРНЕ координате тачке P у простору су уређена тројка (ρ,θ,φ), где је ρ растојање између тачака O и P, θ угаона координата пројекције P на раван α, а φ усмерен угао између полуправих t и OP. ρ – РАДИЈУС θ – АЗИМУТ φ – ЗЕНИТНИ УГАО
- Ако са r означимо радијалну поларну координату у равни α, а за полуправу t изаберемо позитивни део z-осе у Декартовим координатама, тада је: $r = \rho\sin\varphi \quad z = \rho\cos\varphi$.
- Пошто већ знамо везу између Декартових и поларних координата, закључујемо да је веза између Декартових и сферних координата дата са:

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi \qquad z = \rho\cos\varphi \qquad x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

$0 < \varphi < \pi$
$0 < r < +\infty$
$0 < \theta < 2\pi$



- Координатне површи код сферних координата су сфере ($z = const.$), полуконуси ($\varphi = const.$) и полуравни које садрже z-осу ($\theta = const.$).

ⓣ Нека је $F: (\rho,\theta,\varphi) \to (\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$, T нерљив скуп у $\mathbb{R}^3$ и f непрекидна на $F(T)$. Тада је:

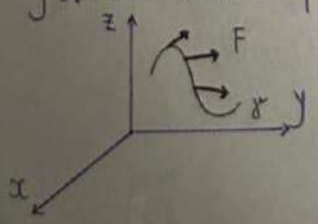
$$\iiint\limits_{F(T)} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{T} f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

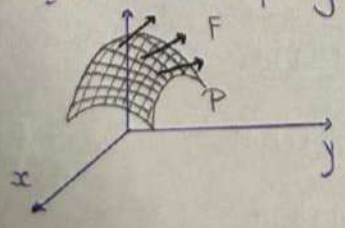
$$\det\begin{bmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} = \rho^2\sin\varphi \qquad \det J_f = \rho^2\sin\varphi$$

22. Криволинијски интеграл прве врсте: мотивација и дефиниција.

Увод: Могуће је интегралити и по „кривим" објектима (кривама и површима). У овом случају, можемо интегралити ф-је као и раније, али и векторска поља – у оба случаја ови појмови су уопштења већ познатих интеграла.

- У случају ф-је, дефиниција интеграла личи на оне које знамо од раније: интегралне суме су збир вредности ф-ја у појединим тачкама помножених са мером „малих" скупова (дужином у случају криволинијског, односно површином у случају површинског интеграла), а интеграл је лимес у простору подела. Изводимо формуле које своде криволинијске интеграле на обичне, а површинске на двоструке.
- Векторска поља дуж кривих (површи) у $\mathbb{R}^3$ су пресликавања дефинисана на кривама (површима) са вредностима у $\mathbb{R}^3$. О њима можемо размишљати као о стрелицама „закаченим" за дату криву, односно површ.





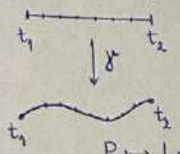
- Криволинијски интеграл векторског поља дуж криве дефинише се као криволинијски интеграл ф-је која је тангентна компонента датог векторског поља. Зато се криволинијски интеграл векторског поља дуж затворене криве назива и циркулација векторског поља, јер мери количину циркулације поља око криве.

/* ОВДЕ ЈЕ УКРАТКО СПОМЕНУТ И КРИВОЛИНИЈСКИ ИНТЕГРАЛ II ВРСТЕ САМО РАДИ ПОРЕЂЕЊА СА КРИВОЛИНИЈСКИМ ИНТЕГРАЛОМ I ВРСТЕ; ДЕТАЉНО ОБРАЂЕН У ПИТАЊУ БР. 24 */

- Нека је крива $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ дефинисана помоћу глатког пресликавања $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = \gamma(I)$, где је $I \subset \mathbb{R}$ интервал. Пресликавање γ називамо и параметризацијом криве, а аргумент $t \in \mathbb{R}$ пресликавања γ параметром. Ако је $\gamma(a) = \gamma(b)$, где су a и b крајеви интервала I, онда се крива γ назива затвореном. Крива без самопресека је она за коју је r „1-1" пресликавање, осим можда у крајевима. Сваке криве зовемо и простим.

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma^* = \{\gamma(t) \mid a \le t \le b\}$ носач криве



$$\int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} \longleftarrow l = \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(\tau)\| d\tau \quad \text{(по дефиницији)}$$

! ПОГЛЕДАТИ ДОДАТАК !

$P \mapsto L_P$ (изломљена линија) $\to$ дужина криве $\approx$ дужина изломљене линије

$l = \sup_P L_P$ $\quad \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$

- Нека је ф-ја f дефинисана на носачу $\gamma^* = \gamma([a,b])$ и непрекидна. Изаберимо $n+1$ тачку на кривој γ: $A_0, \dots, A_n \in \gamma$, $A_j = \gamma(t_j) = (x(t_j), y(t_j), z(t_j))$, (за $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.)

Означимо са $\mathcal{P}$ поделу интервала $[a,b]$ и посматрајмо интегралну сврху $\sigma(f, C, \mathcal{P}) := \sum_{j=1}^{n} f(C_j)\Delta s_j$, где је Δs_j дужина дела криве γ од тачке A_{j-1} до A_j, а C_j произвољна тачка на кривој γ између A_{j-1} и A_j (тј. $C_j = \gamma(\xi_j)_{j=1}^{n}$, за неко $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$).

Деф. Ако постоји број I такав да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да је $|\sigma(f, C, \mathcal{P}) - I| < \varepsilon$ кад год је $\max\{\Delta s_j \mid j = 1, \dots, n\} < \delta$, тада I називамо КРИВОЛИНИЈСКИМ ИНТЕГРАЛОМ Ф-ЈЕ f ДУЖ γ и означавамо са $\int_\gamma f(x,y,z)ds$.

НАПОМЕНА: $A_{j-1}A_j = \sqrt{(x(t_{j-1}) - x(t_j))^2 + (y(t_{j-1}) - y(t_j))^2 + (z(t_{j-1}) - z(t_j))^2} \overset{(*)}{=} \sqrt{x'(a_j)^2(t_j - t_{j-1})^2 + y'(b_j)^2(t_j - t_{j-1})^2 + z'(c_j)^2(t_j - t_{j-1})^2}$

$= \underbrace{\sqrt{x'(a_j)^2 + y'(b_j)^2 + z'(c_j)^2}}_{[1]} \cdot \Delta t_j$, $a_j, b_j, c_j \in (t_{j-1}, t_j)$

(*): Лагранжова Ⓣ о средњој вредности

ТВРЂЕЊЕ: Ако је f непрекидна, а r регуларна параметризација криве γ, тада криволинијски интеграл f дуж γ постоји и рачуна се по формули: $\int_\gamma f(x,y,z)ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$.

ДОКАЗ: Направимо поделу као и малопре (ако дефинишемо). $\gamma_j: [t_{j-1}, t_j] \to \mathbb{R}^3$ представља рестрикцију од γ на j-том сегменту.

$$\int_\gamma f(s)ds = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(s)ds \approx \sum_{j=1}^{n} f(C_j) \cdot l(\gamma_j) \overset{\text{деф}}{=} \sum_{j=1}^{n} f(C_j) \cdot \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\|dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\gamma'(t)\| f(\underbrace{\gamma(\xi_j)}_{C_j})dt$$

НАПОМЕНА: Израз $\|\gamma'(t)\|dt$ означавамо са ds и називамо елементом дужине.

$$\approx \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|dt$$

f непрекидна
смена $\gamma(\xi_j) = \gamma(t)$ не изазива велику грешку

$$= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|dt$$

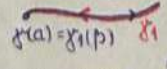
НАПОМЕНА: Из формуле [1] видимо да за $c_j \in (t_{j-1}, t_j)$ величина $\|\gamma'(c_j)\|\Delta t_j$ апроксимира дужину дела криве Δs_j и да је ова апроксимација тачнија што је подела ситнија (тј. што су Δt_j мањи).

НАПОМЕНА: Ако је крива дата са $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, онда је $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$, па је $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$.

23. Независност од репараметризације. Адитивност и линеарност.

Ⓣ Репараметризација криве не мења вредности криволинијског интеграла прве врсте. Исто важи и за оријентацију.

ДОКАЗ: Нека је γ „оригинална" крива. $\gamma = \gamma(t)$ и нека је $t = \tau(\tau)$, где је $\tau \in C^1[\alpha, \beta]$ строго монотона (свеједно је да ли је смена променљиве супротне оријентације (овде ћемо доказати тај случај) или исте). Нека је $\tau(\alpha) = b$, $\tau(\beta) = a$. „Нова" крива: $\gamma_1 = \gamma \circ \tau: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$.



(иста путања, супротан смер). Хоћемо: $\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_1} f ds$.

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|dt \overset{t = \tau(\tau)}{=} \int_\beta^\alpha f(\gamma(\tau(\tau))) \cdot \|\gamma'(\tau(\tau))\| \cdot \underbrace{\overbrace{\tau'(\tau)}^{\text{негативно}} d\tau}_{= dt}$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\tau(\tau))) \cdot \|\gamma'(\tau(\tau))\| \cdot (-\tau'(\tau))d\tau$$

$$= \int_\alpha^\beta f(\gamma(\tau(\tau))) \cdot \|\gamma'(\tau(\tau)) \cdot \tau'(\tau)\| d\tau$$

$$\overset{(*)}{=} \int_\alpha^\beta f(\gamma_1(\tau)) \cdot \|\gamma_1'(\tau)\| d\tau = \int_{\gamma_1} f dS$$

$$\boxed{\frac{d}{d\tau}\gamma_1 = \frac{d}{d\tau}\gamma(\tau(\tau)) = \gamma'(\tau(\tau)) \cdot \tau'(\tau) \quad (*)}$$

• Следећа својства криволинијског интеграла I врсте следе непосредно из формуле за израчунавање криволинијског интеграла:

ТВРЂЕЊЕ: 1 $\int_\gamma (f+g)ds = \int_\gamma f ds + \int_\gamma g ds$ 2 $\int_\gamma (\lambda f)ds = \lambda \cdot \int_\gamma f ds$ 3 $\int_\gamma 1 ds = l(\gamma)$, где је $l(\gamma)$ дужина криве γ

4 $(\forall (x,y,z)\in\gamma)\ f(x,y,z) \le g(x,y,z) \Rightarrow \int_\gamma f ds \le \int_\gamma g ds$

5 Ако се криве γ_1 и γ_2 „надовезују" једна на другу, тј. ако је $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, где је пресек кривих γ_1 и γ_2 једна тачка, тада је: $\int_\gamma f ds = \int_{\gamma_1} f ds + \int_{\gamma_2} f ds$

6 γ^* је компактан $\Rightarrow m = \min_{\gamma^*} f \le f(\gamma(t)) \le \max_{\gamma^*} f = M \quad / \cdot \|\gamma'(t)\|, \int_a^b$

$$\int_a^b m\|\gamma'(t)\|dt \le \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|dt \le \int_a^b M\cdot\|\gamma'(t)\|$$

$$m\cdot l(\gamma) \le \int_\gamma f(s)ds \le M\cdot l(\gamma)$$

$$m \le \underbrace{\frac{1}{l(\gamma)}\int_\gamma f(s)ds}_{\text{средња вредност по кривој тј. на } \gamma^*} \le M$$

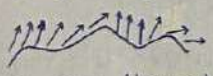
$\frac{1}{l(\gamma)}\cdot\int_\gamma f(s)ds = f(Q)$ за неко $Q\in\gamma^*$ (својство међувредности)

24. Криволинијски интеграл друге врсте.

УВОД: Криволинијски интеграл II врсте можемо схватити као рад силе (уложен или добијен) на неком путу.

$\xrightarrow{\vec F}$ s $A = F\cdot s$ (када су $\vec F$ и смер кретања колинеарни) $\nearrow \vec F$ $A = \langle \vec F, \vec r\rangle$ (општи случај)

• Уводимо појам ПОЉА СИЛА – у свакој тачки имамо силу (вектор) који варира од тачке до тачке – векторско поље.

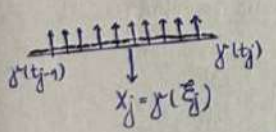


„простор" се креће по некој трајекторији – желимо да израчунамо рад

РЕШЕЊЕ: Исецкаћемо криву на „парчиће" на којима поље сила неће варирати (сматраћемо га константним).

$\gamma(t)\in\mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a\le t\le b$ $\vec F = (P,Q,R)$ $\left.\begin{array}{l} P = P(x,y,z)\\ Q = Q(x,y,z)\\ R = R(x,y,z)\end{array}\right\}$ ф-је (компоненте $\vec F$)

$\mathcal{P}$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ $A = \sum_{j=1}^n A_j$ A_j - рад у временском интервалу $t_{j-1}\le t\le t_j$



$\xi_j\in[t_{j-1}, t_j]$

приближно РАВНО

$$A_j \approx \langle \vec F(x_j), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\rangle \overset{\text{Лагранж}}{=} \langle \vec F(x_j), (t_j - t_{j-1})\gamma'(\xi_j)\rangle$$
$$= \langle \vec F(\gamma(\xi_j)), (t_j - t_{j-1})\gamma'(\xi_j)\rangle$$

као да сво ишао праволинијски и да је векторско поље константно

$$\Rightarrow A = \sum_{j=1}^n \langle \vec F(\gamma(\xi_j)), \gamma'(\xi_j)\rangle (t_j - t_{j-1})$$
$$= \int_a^b \langle \vec F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$
$$= \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t))dt$$

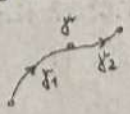
$dx = x'(t)dt$

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 1-форма (ЈЕДАН-ФОРМА)

2еф. $\int_\gamma \omega = \int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz \overset{\text{деф.}}{=} \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t))dt$ $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

ТВРЂЕЊЕ: 1 ЛИНЕАРНОСТ: $\int_\gamma(\omega_1+\omega_2) = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$ 2 МОНОТОНОСТ: не постоји (нема смисла)

$\int_\gamma \lambda\omega = \lambda\cdot\int_\gamma\omega$ 4 АДИТИВНОСТ: $\gamma = \gamma_1\cup\gamma_2$ (γ_2 је наставак од γ_1)



$\int_\gamma f(s)|ds| = \int_{\gamma_1} f(s)|ds| + \int_{\gamma_2} f(s)|ds|$

$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega$

3 ОРИЈЕНТАЦИЈА: А када се чува

$[\alpha,\beta]\ni s$: $t(s)\in[a,b]$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$

$\tilde\gamma(s) = \gamma(t(s))$ $\tilde\gamma'(s) = \gamma'(t(s))\cdot t'(s)$

$\tilde x(s) = x(t(s))$ $\tilde x'(s) = x'(t(s))\cdot t'(s)$

$$\int_\omega = \int_\alpha^\beta (P(\tilde\gamma(s))\cdot\tilde x'(s) + Q(\tilde\gamma(s))\cdot\tilde y'(s) + R(\tilde\gamma(s))\cdot\tilde z'(s))ds$$
$$= \int_\alpha^\beta (P(\gamma(t(s)))x'(t(s))\cdot t'(s) + Q(\gamma(t(s)))y'(t(s))\cdot t'(s) + R(\gamma(t(s)))z'(t(s))\cdot t'(s))ds$$
$$\overset{t(s)=t}{=} \int_a^b (P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t) + R(\gamma(t))z'(t))dt$$

Б када се мења ... $= \int_\beta^\alpha = \ldots$

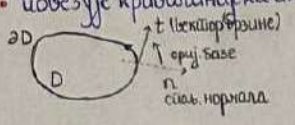
(мењамо модуо, како би минус арамеју границе)

23 23,24

СТАВ: $\int_\gamma \omega$ зависи од параметризације: $\int_{-\gamma}\omega = -\int_\gamma\omega$, али не зависи од репараметризације која чува оријентацију

25. Гринова формула.

• повезује криволинијски интеграл друге врсте и двоструки интеграл



$$* \int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega \; *$$

Гринова формула

• уводимо појам клинастог множења (ознака: $\wedge$)

$dx \wedge dx = 0$

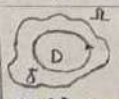
$dx \wedge dy = -dy \wedge dx$

$dy \wedge dy = 0$

$\omega = P dx + Q dy$ 1-форма

$$d\omega = d(Pdx + Qdy) = d(Pdx) + d(Qdy) = (dP)\wedge dx + (dQ)\wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy$$

$$= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy$$



γ оријентисана тако да приликом обиласка криве области D остаје са леве стране

$\gamma = \partial D$ део по део глатка

$D \subset \mathbb{R}^2$ компактан

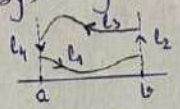
Ω отворен

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \quad \text{2-форма}$$

Гринова формула: $\int_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \quad P, Q \in C^1(\bar{D}), \quad D \subset \mathbb{R}^2$

доказ: I $Q=0$

Желимо: $\int_{\partial D} Pdx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$



$\varphi \in C^1[a,b]$

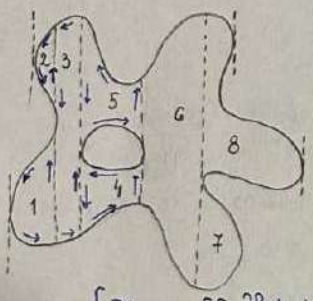
$\psi \in C^1[a,b]$

$\varphi(x) \le \psi(x), \; a \le x \le b$

$D = \{(x,y) : a \le x \le b, \; \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$

$$\int_{\partial D} Pdx = \int_{l_1} Pdx + \underbrace{\int_{l_2} Pdx}_{=0\,(x=\text{const.})} + \int_{l_3} Pdx + \underbrace{\int_{l_4} Pdx}_{=0\,(x=\text{const.})}$$

(Формално - зашто је $\int_{l_2} Pdx = 0$:
$l_2 : \gamma(y) = (b,y), \; \varphi(b) \le y \le \psi(b)$
$\int_{l_2} P(x,y)dx = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} P(b,y)\cdot 0 dy = 0$)



$l_1 : \gamma(x) = (x, \varphi(x)), \; a \le x \le b$

$$\int_{\partial D} Pdx = \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \overset{\text{(фубини)}}{=} -\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy\right)dx \overset{\text{Њутн-Лајбниц}}{=} -\int_a^b (P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x)))dx$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int_a^b P(x,\psi(x))dx$$

$$\int_{\partial D_j} Pdx = -\iint_{D_j} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \qquad \sum_j -\iint_{D_j} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

$$\sum_j \int_{\partial D_j} Pdx = \int_{\partial D} Pdx$$

• Сумирањем добијених једнакости из I и II добија се Гринова формула.

II $P=0$

Аналогно, $\int_{\partial D} Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$.

** $n=1$: $D = [a,b]$ $\quad \partial D = \{a, b\}$

$-$ a ——— b $+$

$\int_{\partial D} f = \int_D df \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$ Њутн-Лајбниц

пример: $D = D_R$ круг $\quad x = R\cos\theta, \; y = R\sin\theta, \; 0 \le \theta \le 2\pi$

$$|D_R| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (R\cos\theta \cdot R\cos\theta - R\sin\theta(-R\sin\theta))d\theta = \frac{1}{2}R^2 \int_0^{2\pi} 1 d\theta = R^2\pi$$

** $\int_{\partial D} xdy = \iint_D dxdy = \text{area}(D)$

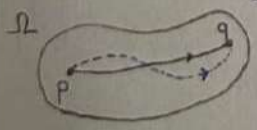
$\int_{\partial D} -ydx = \iint_D -dy\wedge dx = \iint_D dxdy = \text{area}(D)$

$\Rightarrow |D| = \frac{1}{2}\cdot\int_{\partial D} xdy - ydx$

26. Независност интеграције од пута.

• $f = f(x,y)$ класе C^1 у $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$\omega = df = f_x dx + f_y dy$ 1-форма



$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = f(q) - f(p) \quad \text{(Њутн-Лајбниц)}$$

$$\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \int_a^b (f_x(\gamma(t))x'(t) + f_y(\gamma(t))y'(t))dt = I \quad (*)$$

$\gamma : [a,b] \to \Omega$

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \qquad f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t))$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f_x(x(t),y(t))\,x'(t) + f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t) \quad (**)$$

$$(*),(**) \Rightarrow I = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(q) - f(p)$$

• Овим је доказан следећи став:

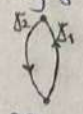
СТАВ: Ако је $\omega = df$, $f \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$, онда $\int_\gamma \omega$ зависи само од $p = \gamma(a), q = \gamma(b)$ (само од почетне и крајње тачке).

ПРОБЛЕМ: Претпоставимо да $\int_\gamma Pdx+Qdy$ зависи само од почетне и крајње тачке ($\gamma(a)$ и $\gamma(b)$), $P,Q\in C^1(\Omega)$. За ли тада постоји f такво да: $Pdx+Qdy=df$, $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$? (Постоји. Доказ - у наставку.)

СТАВ: За $\omega=Pdx+Qdy$ у Ω важи: независност од пута $\Leftrightarrow$ $\int_\gamma \omega=0$ за сваку петљу γ ($p=q$).

ДОКАЗ: ($\Rightarrow$):

$$\int_\gamma \omega=\int_{\gamma_1}\omega_1+\int_{\gamma_2}\omega_2=\int_{\gamma_1}\omega-\int_{\gamma_2^{супр}}\omega \underset{\text{независност пута}}{=} 0$$

($\Leftarrow$): 

$\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2^{супр}$ ПЕТЉА

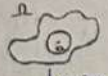
$$0=\int_\gamma\omega=\int_{\gamma_1}\omega-\int_{\gamma_2}\omega$$

СТАВ: $P,Q\in C^1(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $\omega=Pdx+Qdy$. Тада: $\int_\gamma\omega$ не зависи од пута $\Rightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

ДОКАЗ: 1 Претпоставићемо да смо доказали проблем изнад и искористићемо га.

$P=\frac{\partial f}{\partial x}$ $\quad Q=\frac{\partial f}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Из Шварцове Ⓣ и проблема изнад следи тврђење.

2 Доказ који не користи проблем изнад:



круг са центром у a

$$0=\int_{\partial C_r(a)}Pdx+Qdy=\iint_{C_r(a)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$ Следи $\iint_{C_r(a)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$ кад год је $C_r(a)\subset\Omega$.

ХИПОТЕЗА: $P,Q\in C^1(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ у Ω. За ли $\omega=Pdx+Qdy$ има својство независности $\int_\gamma\omega$ од пута?

(Одговор: генерално не (не уколико Ω има „рупу"))

контрапример: $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ $\quad \omega=\frac{xdy}{x^2+y^2}-\frac{ydx}{x^2+y^2}$ $\quad P=-\frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

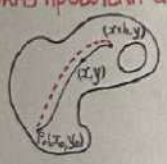
$$P_y=-\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad Q_x=\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$x=\cos t$
$y=\sin t$
$0\le t\le 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}(\cos^2 t-\sin t(-\sin t))\,dt=2\pi\neq 0 \Rightarrow \text{зависи од пута}$$

ЗАКЉУЧАК:
- петља око „рупе" $\Rightarrow$ хипотеза не важи
- област повезана, нема „рупе" $\Rightarrow$ хипотеза важи

ДОКАЗ ПРОБЛЕМА ИЗНАД:



$f(x,y)=\int_\gamma Pdx+Qdy$ од P_0 до $P(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=P$, $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma\cup L_{x,y}^{x+h,y}}Pdx+Qdy-\int_\gamma Pdx+Qdy\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{L_{x,y}^{x+h,y}}Pdx+Qdy$$

$l(t)=(x+th,y)$, $0\le t\le 1$
$x(t)=x+th$
$y(t)=y$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^1 hP(x+th,y)\,dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\int_0^1 P(x+th,y)\,dt$$
$$=\lim_{h\to 0}P(x+t_h\cdot h,y)\quad [\text{Ⓣ о средњој вредности}]$$
$$=P(x,y)\quad (\text{због непрекидности})$$

Ⓣ (закључак): Нека је $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ отворен и повезан. Нека су P,Q из $C^1(\Omega)$ и нека је $\omega=Pdx+Qdy$. Уочимо својства:
1 $\int_\gamma\omega$ зависи само од почетне и крајње тачке γ
2 $\int_\gamma\omega=0$ за сваку петљу γ
3 Постоји $f\in C^1(\Omega)$: $df=\omega$ тј. $P=\frac{\partial f}{\partial x}$ и $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$
4 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

Тада важи: $1\Leftrightarrow 2\Leftrightarrow 3\Rightarrow 4$. $\quad 4\Rightarrow 3$ важи ако је Ω просто повезана област (без рупа)

27. Параметризација површи у $\mathbb{R}^3$. Површина површи.

- Као и код кривих, и површи можемо доживљавати као скупове тачака у простору или као пресликавања. На пример, када исецамо лист из свеске и савијемо га, то је површ; пресликавање из равни (док је „лежао" у свесци) у простор - свака тачка из правоугаоника позиционира се у тренутну. Пресликавање - непрекидно и глатко.
- Та параметризација биће локална (део површи се параметризује).

$\vec r=\vec r(u,v): D\to\mathbb{R}^3$, $D\subset\mathbb{R}^2$ $\quad \vec r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ $\quad \vec r$ векторска ф-ја, класе C^1

parcijalni izvodi po u i v

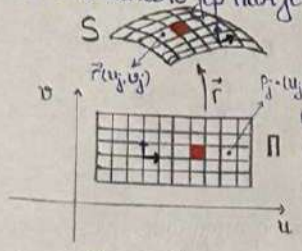
$\vec r_u,\vec r_v$ линеарно независни $\forall(u,v)\in D$ $\quad \vec r_u\times\vec r_v\neq 0$

(објашњење на следећој страни)

regularna parametrizacija

Зашто инсистирамо на линеарној независности $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$?

Узмимо, на пример, константно пресликавање. Извод му је нула – дакле, слика се у тачку или у сану себе, што не желимо јер нам је циљ да се преслика у $\mathbb{R}^3$.



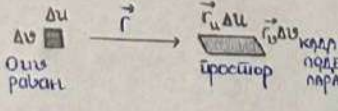
вектори паралелни осама сликају се при пресликавању $\vec{r}$ у векторе који су тангентни вектори на криве којима је површ S „издељена" у простору

парц. извод векторске ф-је (тангентни вектор)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(u+h,v)-\vec{r}(u,v)}{h}=(x_u(u,v),y_u(u,v),z_u(u,v))=\vec{r}_u$$

Слично за $\vec{r}_v$.

Линеал од $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ формира тангентну раван.
$\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ чине базу. $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\perp S$



када направимо ситну поделу ово је скоро паралелограм

Површина паралелограма: $|\vec{r}_u\Delta u\times\vec{r}_v\Delta v|=|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,\Delta u\Delta v$
(интензитет вект. производа)

Када сумирамо све „парчиће", површина површи (S) је:

$$P=\iint_П|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,du\,dv$$

НАПОМЕНА: Мој ли смо узети и неки скуп D: (нисмо морали правоугаоник)

Закле: $\text{area}(S)=\sum\sum|\vec{r}_u\Delta u\times\vec{r}_v\Delta v|=\iint_П|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|\,du\,dv$

28. Површински интеграл прве врсте.

- Посматрајмо површ са слике из претходног питања и замислимо да је направљена од нехомогеног лима. Желимо да нађемо њену тежину (тежина = површина · $\frac{\text{тежина}}{\text{јединица мере}}$)

елемент површине = фактор · сл. површине параметризовано

$dS=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$ $\quad\vec{r}:D\to M$ параметризација

$f:M\to\mathbb{R}$ непрекидна $\quad P(M)=\iint_D\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$

$$\iint_M f(x,y,z)\,dS\overset{\text{деф.}}{=}\iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$$

$$\iint_M f\,dS=\sum_j\iint_{M_j}f\,dS\approx\sum_j\iint_{M_j}f(\vec{r}(u_j,v_j))\,dS=\sum_j f(\vec{r}(u_j,v_j))\cdot\text{area}(M_j)=\sum_j f(\vec{r}(u_j,v_j))\iint_{D_j}\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$$

$$=\sum_j\iint_{D_j}f(\vec{r}(u_j,v_j))\,\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$$

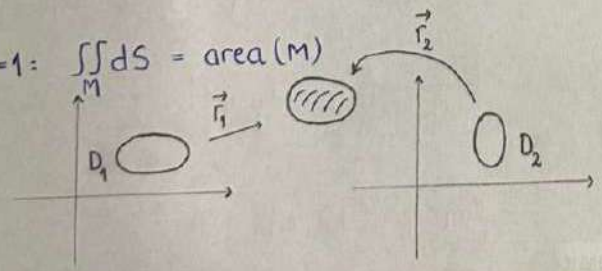
$$\approx\sum_j\iint_{D_j}f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$$

$$=\iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$$

за довољно ситну поделу вредности f се неће много мењати када се „шетамо" по ▭ (приближно константна на ▭)

вредност у тачки замењује вредност у околини – тачно изашли из ▭

- $f=1$: $\iint_M dS=\text{area}(M)$



- Вредност интеграла не зависи од начина параметризације! (како год параметризовали површ, тежина лима је иста)

примери: $M=S^2$ сферу не можемо параметризовати ⇒ делимо је на 2 дела

$M=T^2$ торус не можемо параметризовати ⇒ делимо га

⇓

након поделе: 2П

пример: График било које глатке ф-је $z=\varphi(x,y)$ јесте регуларна површ. Једна њена параметризација је: $x=u$, $y=v$, $z=\varphi(u,v)$, па је $r_u'=(1,0,\varphi_u')$, $r_v'=(0,1,\varphi_v')$, а ова два вектора су очигледно линеарно независна. $\nabla f=(\varphi_x',\varphi_y',-1)\neq 0$
$f(x,y,z)=\varphi(x,y)-z$

својства: 1 ЛИНЕАРНОСТ: $\iint_M(f+g)\,dS=\iint_M f\,dS+\iint_M g\,dS$

$\iint_M\lambda f\,dS=\lambda\cdot\iint_M f\,dS$

2 МОНОТОНОСТ: $f(P)\le g(P),\ \forall P\in M\Rightarrow\iint_M f\,dS\le\iint_M g\,dS$

3 АДИТИВНОСТ: Ако је $M=M_1\cup M_2$, при чему се површи M_1 и M_2 секу по регуларној криви (тј. скупу мере нула), онда је:

$$\iint_M f\,dS=\iint_{M_1}f\,dS+\iint_{M_2}f\,dS$$

4 M компактна (шире укључене), $f\in C(M)$: $\quad m=\min f\quad M=\max f$ (Теорема о средњој вредности)

$m\le f(P)\le M$ за $P\in M$

због монот. ⇒ $m\cdot\iint_M 1\,dS\le\iint_M f\,dS\le M\cdot\iint_M 1\,dS$

$m\cdot\text{area}(M)\le\iint_M f\,dS\le M\cdot\text{area}(M)$

$\frac{1}{\text{area}(M)}\cdot\iint_M f\,dS=f(P)$ за неко $P\in M$ (M повезана)

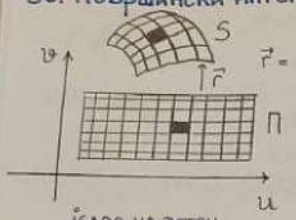
29. Поље нормала. Оријентабилност.

- Приметимо да већина површи има две стране (нпр. сфера, елипсоид и хиперболоид имају унутрашњу и стољашњу страну, параболоиди имају горњу и доњу – укратко, све регуларне параметризоване површи имају две стране).

Мотивација $M: \vec{r} = \vec{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$. Приметимо да је вектор $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ нормалан на тангентну раван TM у свакој тачки, јер је нормалан на два линеарно независна вектора $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ из TM. Вектор $\vec{r}_u$ припада TM јер је вектор тангенте на криву која лежи на површи M.

- Означимо са $\vec{n}$ јединични вектор нормале на површ: $\vec{n} := \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$. Можемо да дефинишемо страну површи која је индукована параметризацијом r као ону на коју вектор $\vec{n}$ „показује" (ако замислимо вектор $\vec{n}$ као човека
- канџе стрелица глава, онда је ова страна површи она по којој човек хода). Ову страну површи називамо страном индукованом датом параметризацијом r. Приметимо да замена места параметара u и v мења смер вектора $\vec{n}$.
- Дефиниање оријентабилности на глаткој површи: посматрајмо нормалу на ту површ и затим површ „придружимо" (нацртамо) затворену путању; процетајмо по тој путањи нормалу, и када се вратимо у почетну тачку, морамо добити исти правац нормале; ако се поклопи и смер, површ је оријентабилна (нпр. сфера – шетња по екватору).
- непрекидно поље јединичних нормала на M – ознака: $\vec{n} = \vec{n}(P)$, $P \in M$ (M повезана); супротна оријентација: $-\vec{n}$
- постоје неоријентабилне површи (Мебијусова трака, Клајнова боца)

30. Површински интеграл друге врсте.



$\vec{r} = \vec{r}(u,v)$

$\vec{F} = (P, Q, R)$

$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$

$\vec{n} = \vec{n}(u,v) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$

Мотив ■ – мали део једра – колико је проток кроз њега?
Ако вектор дува ортогонално на вектор нормале, струјања нема.
Ако вектор дува колинеарно вектору нормале – идеално!
⇒ проток одређује пројекција вектора брзине на вектор нормале

проток: $\langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS = \|\vec{F}\| \cos\measuredangle(\vec{F}, \vec{n})\, dS$

⇒ укупан проток $= \sum_j$ проток кроз H_j

$\approx \sum_j$ површина $H_j \cdot \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle$ — H_j је практично раван, па је $\vec{n}$ ту практично константан. (Брзина се од тачке до тачке мења „константно" због непрекидности.)

$= \sum_j \iint_{D_j} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du\, dv \cdot \vec{F}(\vec{r}(u_j, v_j)) \cdot \vec{n}(u_j, v_j)$

$= \sum_j \iint_{D_j} \vec{F}(\vec{r}(u_j, v_j)) \cdot \vec{n}(u_j, v_j) \cdot \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du\, dv$

ПОДСЕТНИК: $d\vec{S} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv$ $\quad dS = \|d\vec{S}\|$

$\vec{n}\, dS = d\vec{S}$

$\approx \sum_j \iint_{D_j} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\cancel{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}} \cdot \cancel{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \, du\, dv$

$= \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, du\, dv$

Def. $\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} \overset{\text{деф.}}{=} \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv$ ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛ ДРУГЕ ВРСТЕ

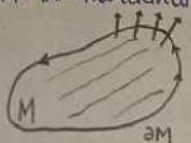
укупан проток (вредност овог интеграла зависи од оријентације)

Површински интеграл II врсте векторског поља $\vec{F}$ по оријентисаној површи $(M, \vec{n})$ је: $\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_M \langle \vec{F}, \vec{n} \rangle dS$ (скаларним производом свели смо на површински интеграл I врсте).

СВОЈСТВА:
1. ЛИНЕАРНОСТ ✓
2. АДИТИВНОСТ ✓ (поделимо M на два дела, M_1 и M_2; укупан проток добијамо сабирањем протока из M_1 и M_2)
3. ЗАВИСНОСТ ОД ОРИЈЕНТАЦИЈЕ (избор непрекидног поља јединичних нормала) $\iint_{M^{супр}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$

31. Стоксова формула.

- успоставља везу између површинског интеграла II врсте и криволинијског интеграла II врсте
- $M \subset \mathbb{R}^3$ компактна површ са оријентацијом $\vec{n}$ (задавање непрекидног поља јединичних вектора нормала)



∂M је оријентисана тако да при обиласку по горњој страни M површ остаје са леве стране

∂M $\quad \vec{F} = (P, Q, R)$, $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ (зависи од тачке до тачке); мора бити дефинисано на неком отвореном скупу који садржи M

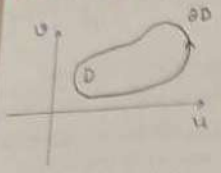
$\vec{F} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $M \subset \Omega$

• $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 1-форма у Ω

$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ $\quad d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ $\quad \vec{F}\cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz = \omega$

Стоксова формула: $\int_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_M \underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{F})}_{\text{векторско поље}}\cdot d\vec{S} = \iint_M (\vec{\nabla}\times\vec{F})\,\vec{n}\,dS$

п.и. II врсте $\qquad$ п.и. I врсте (мање нешто оријентацију)



$\mathbb{R}^2 \supset D \ni (u,v) \longmapsto (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \in M$

$a = t = v \qquad (u(t), v(t))$ параметризација ∂D

$(x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t)))$ параметризација за ∂M (*)

доказ: простор $\longrightarrow$ раван $\longrightarrow$ Гринова формула $\longrightarrow$ крај

Нека је (без умањења општости) $Q=0$ и $R=0$.

$$\int_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\partial M} Pdx = \int_a^b \underbrace{P(x,y,z)}_{(x(u(t)),v(t)),\dots)\ (*)} (x_u\cdot u'(t) + x_v\cdot v'(t))\,dt = \int_{\partial D} \overbrace{P(x,y,z)\,x_u}^{\text{фја од } u}\,du + \overbrace{P(x,y,z)\,x_v}^{\text{фја од } v}\,dv \quad (1)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ P & 0 & 0 \end{vmatrix} = jP_z + k(-P_y) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{F} = (0, P_z, -P_y)$$

нормални вектор на u и v: $\quad d\vec{S} = (x_u, y_u, z_u)\times(x_v, y_v, z_v)\,du\,dv \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (y_u z_v - y_v z_u,\ x_v z_u - x_u z_v,\ x_u y_v - x_v y_u)$

$$\iint_M (\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot d\vec{S} = \iint_D (P_z(x_v z_u - x_u z_v) - P_y(x_u y_v - x_v y_u))\,du\,dv \quad (2)$$

(1) = (2): $\quad (1) = \int_{\partial D} Px_u\,du + Px_v\,dv \overset{\text{Грин}}{=\!=} \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial u}(Px_v) - \frac{\partial}{\partial v}(Px_u)\right) du\,dv$

$$\frac{\partial}{\partial u}(Px_v) = \frac{\partial P}{\partial u}x_v + \underbrace{P\frac{\partial}{\partial u}x_v}_{\text{скраћује се (нисам писало)}} \longrightarrow = \iint_D (x_v(P_x\cdot x_u + P_y\cdot y_u + P_z\cdot z_u) - x_u(P_x x_v + P_y\cdot y_v + P_z z_v))\,du\,dv$$

$= (2)$

Аналогно се доказују случајеви $P=0, Q=0$ и $P=0, R=0$. Сумирањем одговарајућих једнакости у сва три случаја следи тврђење.

32. Формула дивергенције (формула Гауса-Остроградског).

(t) Нека је $T \subset \mathbb{R}^3$ тело ограничено са површи $M = \partial T$ (глатка граница), где је M оријентисана полем спољашњих јединичних нормала. Нека је $\vec{F}$ векторско поље класе C^1 у околини тела T. Тада важи следећа формула:

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dV, \quad dV = dxdydz,$$

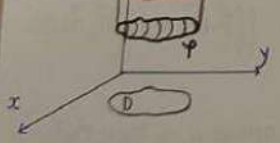
где је $\operatorname{div}\vec{F}$ дивергенција векторског поља $\vec{F}$ и по дефиницији представља скаларни производ оператора ∇ и векторског поља.

• веза између површинског интеграла I врсте и просторног интеграла!

$$\operatorname{div}\vec{F} = \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{оператор „набла"}}\cdot\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

(скаларна величина) „НАБЛА"

доказ: Нека је (без умањења општости) $P=0$ и $Q=0$. Треба доказати: $\iint_M (0,0,R)\cdot d\vec{S} = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$.



$D \subset \mathbb{R}^2, \quad \varphi, \psi \in C^1(D)$

$\varphi(x,y) \le \psi(x,y), \quad (x,y)\in D \qquad T = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in D,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$

$$\iint_M (0,0,R)\cdot d\vec{S} = \iint_M (0,0,R)\,\vec{n}\,dS = \left(\underbrace{\iint}_{\text{дно}} + \underbrace{\iint}_{\text{поклопац}} + \underbrace{\iint}_{\text{омотач}}\right)(0,0,R)\,\vec{n}\,dS$$

$\vec{n} = (1,0,0)$

$$(*) \Rightarrow dS = \begin{cases} \sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}\,dxdy & \text{поклопац} \\ \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}\,dxdy & \text{дно} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_{\text{дно}} (0,0,R)\,\vec{n}\,dS = \iint_D -R\,dxdy \qquad \iint_{\text{поклопац}} (0,0,R)\,\vec{n}\,dS = \iint_D \overbrace{(0,0,R)}^{(x,y,\psi(x,y))}\underbrace{(-\psi_x, -\psi_y, 1)\frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}}}_{\vec{n}}\underbrace{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}\,dxdy}_{dS}$$

$$= \iint_D R\,dxdy$$

$$\Rightarrow \iint_M (0,0,R)\,d\vec{S} = \iint_D R(x,y,\psi(x,y))\,dxdy - \iint_D R(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy \quad (1)$$

параметризација:

дно $(x,y)\in D$ поклопац,

$(x,y) \mapsto (x,y,\varphi(x,y)) \qquad (x,y) \overset{\vec{r}}{\mapsto} (x,y,\psi(x,y))$

Тражимо $\vec{n}(x,y,\psi(x,y))$: $\vec{r}_x = (1,0,\psi_x)$, $\vec{r}_y = (0,1,\psi_y)$

$$\vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \psi_x \\ 0 & 1 & \psi_y \end{vmatrix} = (-\psi_x, -\psi_y, 1) \quad (*)$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_x^2+\psi_y^2}}(-\psi_x, -\psi_y, 1) \text{ поклопац}$$

Слично, $\vec{n}(x,y,\varphi(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}}(-\varphi_x, -\varphi_y, -1)$. дно

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dV \overset{\text{Фубини}}{=\!=} \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz\right)dxdy \overset{\text{Њутн-Лајбниц}}{=\!=} \iint_D R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\,dxdy \quad (2)$$

Из (1)=(2) и сабирања одговарајућих једнакости за $P=0, R=0$ и $Q=0, R=0$ следи тврђење.

• Важи и за области које се могу разложити на области цилиндричног типа. („РАЗРЕЗИВЕ")

поклопац једне је дно друге; супротне оријентације

„решено" изнутра z-цилиндре – све што је изрезано унутра се скраћује – само спољашњости доприносе

33. Лапласов оператор. Веза са дивергенцијом.

- $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ $\quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

  $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z) = (P,Q,R)$

  $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(P,Q,R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\,\vec{F}$

  $\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k = \mathrm{rot}\,\vec{F}$

  ротор векторског поља

  - ротор од векторског поља прави векторско поље!

- $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{F}) = 0$ (парцијални изводи по x,y,z од $\vec{\nabla}\times\vec{F}$; 6 сабирака, сви се скрате)

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \mathrm{div}(\vec{\nabla}f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f \qquad f \in C^2(\Omega)$

  Лапласијан од f (Лапласов оператор)

  $\Delta f = 0$ – хармонијске функције

- $\mathrm{rot}(\nabla f) = \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}f = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = (0,0,0)$, за $f \in C^2(\Omega)$

  Шварц

– Видели смо да $\nabla\times(\nabla f) = 0$, што значи да ако је $F = \nabla f$ (конзервативно поље), онда обавезно важи $\nabla\times F = 0$. Међутим ако област D у $\mathbb{R}^3$ има нека посебна својства, тада је овај услов довољан да поље буде интересантно.

<u>деф</u>: Нека је $D \subset \mathbb{R}^n$ област са следећим својством:
за сваку непр затворену криву $r: S^1 \to D$ постоји непр пресликавање $d: \mathbb{D}^2 \to D$ тако да је $d|_{S^1} = r$ где је $\mathbb{D}^2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. Кажемо да је D <u>простоповезана</u>.

<u>Објашњење неформално</u>: Простоповезана област је она код које свака затворена крива може да се „полупи" непрекидном површи. У равни, простоповезане површи су оне које „немају рупе". Ми ћемо овде подразумевати нешто јачу дефиницију, па да се свака део-по-део глатка затворена крива може проширити на површ која је такође глатка.

Т Нека је $D \subset \mathbb{R}^3$ простоповезана и F глатко векторско поље дефинисано у D. Тада су тврђења еквивалентна:

1) F је конзервативно $\qquad$ 2) $\nabla\times F = 0$

Д:

<u>1) ⇒ 2)</u>

пример испит

<u>2) ⇒ 1)</u>

$$\oint_{\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_M (\nabla\times F)\cdot d\vec{S} = \iint_M 0\cdot d\vec{S} = 0$$

за сваку затворену криву интеграл је нула ⇒ $F = \nabla f$ по неки теореми о путевима из пре. ∎

34 ПОЈАМ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, ЈЕДНАЧИНЕ КОЈЕ РАЗДВАЈАЈУ ПРОМЕНЉИВЕ

- **Диференцијална једначина** је једначина у којој је непозната ф-ја f, а у њој се појављују изводи ф-ије f. Ако је f ф-ја једне променљиве, онда се ј-на назива **обичном**, а у супротном **парцијалном**.
- **Ред диф ј-не** је ред највећег извода који се појављује. Решити диф ј-ну значи одредити све ф-ије f које је задовољавају.
- Проблем: $\begin{cases} F(y', y, x) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ или $\left.\begin{array}{l} F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots, y', y, x) = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right\}$ Кошијев услов

T Нека важи Липшицов услов за $y' = F(y, x)$: F-непр, $L \in \mathbb{R}$ $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$
Тада Кошијев проблем има јединствено решење.

- **Једначина која раздваја променљиве**

Алгоритам решавања:

$y' = \varphi(x)\psi(y)$

$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$

$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx \quad / \int$

$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + c$

$\Psi(y) = \Phi(x) + c \quad / \Psi^{-1}()$

$$\boxed{y = \Psi^{-1}(\Phi(x) + c)}$$

Објашњење и услови:

$\psi(y) \neq 0$, φ, ψ су непрекидне

$\Rightarrow \psi(y) > 0$ или $\psi(y) < 0$ $\forall y$

$\Psi'(y) = \frac{1}{\psi(y)}$ што је увек истог знака

$\Rightarrow \Psi$ строго расте или опада

$\Rightarrow \exists\, \Psi^{-1}$

- **Покажемо да је у решење:**

$\Psi(y) = \Phi(x) + c \quad / \frac{d}{dx}$ $\qquad \frac{1}{\psi(y)} y' = \varphi(x)$

$\Psi'(y) \cdot y' = \varphi(x)$ $\qquad y' = \varphi(x)\psi(x)$ ✓

- **Линеарна диференцијална ј-на првог реда**

– хомогена

$y' + p(x)y = 0$

$\frac{dy}{dx} = -y\,p(x)$

$\frac{dy}{y} = -dx\,p(x) \quad / \int$

$\ln|y| = \int -p(x)dx + c$

$|y| = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^c$

$$\boxed{y = c \cdot e^{-\int p(x)dx}}, \ c \in \mathbb{R}$$

Провера

$y' = c \cdot e^{-\int p x dx} \cdot (-1)p(x)$

$= -p(x) \cdot y$

$\Rightarrow y' + p(x)y = 0$ ✓

– нехомогена

$y' + p(x)y = q(x)$

метод варијације константи

$y = c(x)\, e^{-\int p(x)dx}$

$y' = c'(x)\, e^{-\int p(x)dx} + c(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} (-1)\, p(x)$

$y' + py = c' \cdot e^{-\int p(x)dx} + \cancel{c \cdot p \cdot e^{-\int p dx}} - \cancel{c p e^{-\int p dx}}$

$y' + py = c' \cdot e^{-\int p(x)dx} = q$

$c'(x) = q \cdot e^{\int p(x)dx} \quad / \int$

$c(x) = \int q(x)\, e^{\int p(x)dx} dx + c$

$$\boxed{y = e^{-\int p dx}\left(\int q\, e^{\int p dx} dx + c\right)}$$

35 Једначина $y' = f(\frac{y}{x})$, БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА

▶ $y' = f(\frac{y}{x})$

смена: $z = \frac{y}{x}$ $y = x \cdot z$

$y' = z + xz'$

$z + xz' = f(z)$

$xz' = f(z) - z$

$z' = \frac{f(z) - z}{x}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{f(z) - z}{x}$

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{f(z) - z}$ → ј-на која раздваја променљиве и умемо да је решимо

• Ако је $f(z) = z$

онда је $y' = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ и опет исто као горе

▶ БЕРНУЛИ

$y' + Py = Qy^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

$y^{-\alpha} y' + P y^{1-\alpha} = Q$

$z = y^{1-\alpha}$ $z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$

$\frac{z'}{1-\alpha} + Pz = Q$

$z' + (1-\alpha) Pz = (1-\alpha) Q$

свели смо на линеарну прог реда

36 Диференцијална ј-на са константним коефицијентима n-тог реда – општи резултати

▶ Линеарни диф. оператор n-тог реда

$$Lu = a_n(x)u^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)u^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x)$$

$L(u) + L(v) = L(u+v)$ $\quad \lambda L(u) = L(\lambda u) \Rightarrow L$ је линеарни

$\Rightarrow$ скуп решења једначине $Lu=0$ је векторски простор

▶ Хомогена диф. ј-на n-тог реда је $Lu=0$

(T) Кошијев проблем $Lu=0$, $u(x_0)=y_0$, $u'(x_0)=y_1$, ..., $u^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$ има јединствено решење $u \in C^n(I)$ за $\forall y_j \in \mathbb{R}$, $0 \le j \le n-1$

Последица: Скуп свих решења ј-не $Lu=0$ је n-dim В.П.

Д: $V = \{u \mid Lu=0\}$

фиксирајмо x_0 из I, формирајмо $A: V \to \mathbb{R}^n$, $u \xmapsto{A} (u(x_0), u'(x_0), \dots, u^{(n-1)}(x_0))$

Нека је $\overbrace{(y_0, y_1, \dots y_{n-1})}^{y} \in \mathbb{R}^n$, на основу теореме постоји решење u т.д. $Lu=0$ и $Au=y$ па је A пресликавање „НА". Такође A је „1-1" због јединствености решења.

A је линеарни изоморфизам V на $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim V = \dim \mathbb{R}^n = n$ ■

• Базу добијамо као слике базних вектора из $\mathbb{R}^n$

$e_j = (0, \dots 0, \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}, 0 \dots 0)$ $\qquad u_j: Lu_j = 0$ и $Au_j = e_j$, тј

$u_j^{(j)}(x_0) = 1$, $u_j^{(k)}(x_0) = 0$ за $k \ne j$

– Ако имамо n решења ј-не, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Тада скуп решења $\{y_1, \dots y_n\}$ чини базу простора $Lu=0$ ако

$$W(y_1, \dots y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \ne 0$$

Ова детерминанта се зове детерминанта Вронског

$\{y_1, \dots, y_n\}$ се зове фундаментални ~~скуп~~ систем решења

Тада су сва друга решења облика $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$

37. КАРАКТЕРИСТИЧАН ПОЛИНОМ – СЛУЧАЈ РЕАЛНИХ И РАЗЛИЧИТИХ НУЛА

Разгледајмо нехомогену лин. диф. ј-ну n-тог реда $Ly=b$, $b=b(x)$

Претпоставимо да имамо неко решење y_p тј. $Ly_p=b$, тада имамо

$Ly=Ly_p$, $L(y-y_p)=0 \iff y-y_p=c_1y_1+___+c_ny_n$ где је $\{y_1,___,y_n\}$ фундаментални систем решења.

Опште решење нехомогене ј-не $Ly=b$ је $y=y_p+c_1y_1+___+c_ny_n$. Ово значи да ако нађемо једно решење, можемо добити сва остала ако имамо фундаментални систем решења.

▶ Надаље се бавимо константним коефицијентима, тј $a_j(x)=a_j\in\mathbb{R}$

$Ly=y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+___+a_1y'+a_0y$ (*)

▶ Разматрајмо хомоген случај, $Ly=0$ $\boxed{y=e^{\lambda x}}$

$Ly=\lambda^n e^{\lambda x}+___+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0e^{\lambda x}=0$

$Ly=e^{\lambda x}(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+___+a_1\lambda+a_0)=0 \Rightarrow \underbrace{\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+___+a_1\lambda+a_0}_{\text{КАРАКТЕРИСТИЧНИ ПОЛИНОМ за ј-ну (*)}}=0$

$P(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+___+a_1\lambda+a_0$

За свако решење $\tilde{\lambda}$ од $P(\lambda)=0$ имамо решење $\tilde{y}(x)=e^{\tilde{\lambda}x}$ почетне ј-не.

Нажалост ово нам не даје жељених n лин. нез. решења за базу јер неки могу бити вишеструки или комплексни.

▶ СЛУЧАЈ РЕАЛНИХ И РАЗЛ НУЛА

$\lambda_1,\lambda_2,___,\lambda_n$ су реалне и разл нуле $P(\lambda)$. Тада имамо решења полазне ј-не $y_1=e^{\lambda_1x},___,y_n=e^{\lambda_nx}$. Хоћемо да види да су ова решења лин. нез.

$\boxed{\text{СТАВ}}$ Горња решења су лин. нез. па је опште решење облика $c_1e^{\lambda_1x}+___+c_ne^{\lambda_nx}$

Δ:

ПП. $c_1e^{\lambda_1x}+___+c_ne^{\lambda_nx}=0 \;/()'$

$c_1\lambda_1e^{\lambda_1x}+___+c_n\lambda_ne^{\lambda_nx}=0 \;/()'$

$\vdots$

$c_1\lambda_1^ne^{\lambda_1x}+___+c_n\lambda_n^ne^{\lambda_nx}=0$

матрица система је

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & ___ & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & ___ & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & ___ & \lambda_n^2\\ | & | & & |\\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & ___ & \lambda_n^n\end{bmatrix}$$

Ово је Вандермондова матрица $\Rightarrow$ $\det A=\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i)$

али пошто смо $\lambda_j\neq\lambda_i$ за $i\neq j$

$\Rightarrow \det A\neq 0$

$\Rightarrow$ једино решење су

$c_1=c_2=___=c_n=0$ ■

Узмимо $x=0$

$$\left.\begin{aligned}&c_1+c_2+___+c_n=0\\ &c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+___+c_n\lambda_n=0\\ &\quad|\\ &c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n+___+c_n\lambda_n^n=0\end{aligned}\right\}\text{ систем од } n \text{ непознатих } c_i$$

38 | КАРАКТЕРИСТИЧАН ПОЛИНОМ – СЛУЧАЈ РАЗЛИЧИТИХ НУЛА

Пример

$y'' + y = 0$

Погодимо решења:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos x \end{array}\right\} y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Други начин, пробајмо као решне нуле:

$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$

$e^{ix} = \cos x + i \sin x \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$

▶ **СЛУЧАЈ РАЗЛ РЕШЕЊА**

$Ly = 0, \; P(\lambda) = 0$

$\downarrow$

решења су

$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}_{\text{разл, реални, вишеструкост 1}}$ и $\underbrace{\alpha_1 \pm i\beta_1, \ldots, \alpha_l \pm i\beta_l}_{\text{различити, комплексни, вишеструкост 1}}$

$\downarrow$ $\qquad\qquad\qquad

39 КАРАКТЕРИСТИЧАН ПОЛИНОМ - ОПШТИ СЛУЧАЈ

$P(\lambda)=(\lambda-\hat{\lambda})^k Q(\lambda)$

Реално решење вишеструкости k, $\hat{\lambda}$, генерише k лин.нез решења диф ј-не

$e^{\hat{\lambda}x}, xe^{\hat{\lambda}x}, ___, x^{k-1}e^{\hat{\lambda}x}$

Комплексно решење вишеструкости k $\alpha+i\beta$ иде у пару са $\alpha-i\beta$ исте вишеструкости и генеришу $2k$ решења:

$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, ___, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, ___, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Ово је негде отприлике интуитивно јер ако је $(\lambda-\hat{\lambda})^k=0$, њему одговара ј-на $y^{(k)}-\binom{k}{1}y^{(k-1)}+\binom{k}{2}y^{(k-2)}___$ па се ови x^j отприлике лепше изведе

Пример $\lambda^3=0$, $y'''=0 \Rightarrow y_0=c_0$, $y_1=c_1x$, $y_2=c_2x^2$

▶ Нехомоген случај

$Ly=b(x)$, из што смо рекли, ако нађемо једно решење, можемо да нађемо сва тако што решимо одговарајућу хомогену.

• Специјални случај $Ly=e^{\mu x}$

Пример

$y''-3y'+2y=e^{7x}$

$y=\underset{\substack{\downarrow\\ \text{партикуларно}\\ \text{решење}}}{y_p}+\underbrace{c_1e^{2x}+c_2e^{x}}_{\text{решење хомогене}}$

$y_p=e^{7x}\cdot c$

$(49e^{7x}-21e^{7x}+2e^{7x})\cdot c=e^{7x}$

$c=\frac{1}{30}$ $\boxed{y_p=\frac{1}{30}e^{7x}}$

Ако имамо $y''-3y'+2y=e^{2x}$, шта ћемо?

$y_p=(Ax+B)e^{2x}$

$y_p'=Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}$

$y_p''=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}$

$e^{2x}=e^{2x}(2A+2A+4Ax+4B-3A-6Ax-6B+2A+2B)$

$e^{2x}=e^{2x}A \Rightarrow A=1$

$\boxed{y_p=xe^{2x}}$

Генерално: $Ly=e^{\mu x}$

Ако $P(\mu)\neq 0$, $y_p=c\cdot e^{\mu x}$

Ако $P(\mu)=0$, вишеструкости 1, $y_p=c\cdot x\cdot e^{\mu x}$

Пробамо и погађамо.

Свођење j-не n-тог реда на 1-ред

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ___ + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y^{(n)} = -a_{n-1}y^{(n-1)} - ___ - a_1 y' - a_0 y$$

$y_0 = y$

$y_1 = y_0' = y'$

$y_2 = y_1' = y''$

$\vdots$

$y_{n-1} = y_{n-2}' = y^{(n-1)}$

$y_n = y_{n-1}' = y^{(n)}$

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \qquad Y' = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ -a_{n-1}y_{n-1} - \dots - a_1 y' - a_0 y \end{bmatrix}$$

$$Y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ___ & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ___ & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ___ & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}}_{Y} = AY$$

$\boxed{Y' = AY}$ → j-но првог реда

али овде је Y ф-ја више променљивих.

$Y' = AY$

$Y(x) = e^{Ax}$

$Y'(x) = A \cdot e^{Ax} = A \cdot Y(x)$ ✓

Како можемо e^{Ax}?

$e^{B} = E + \frac{B}{1!} + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + ___$ (развој где је B матрица)

$$\boxed{Y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} x^n}$$