1. Однос стварности и модела и разлози за моделирање

Математички модел представља опис неког система или појаве (нпр. физички закони, промена броја јединки у посматраном станишту) коришћењем математичких концепата и језика. Процес стварања оваквог модела на основу расположивих информација назива се математичко моделирање.

Међутим, математички модели најчешће не осликавају савршено дату појаву у природи. Веома често је потребно увести неке претпоставке и поједностављења која не важе увек, што доводи до одређене грешке. Такође, сам модел (нпр. нека диференцијална једначина) се често не може решити аналитички, већ је потребно користити нумеричке методе које доносе додатну грешку. Уз то, модел често захтева неко нумеричко решавање ради добијања конкретних вредности што опет може увести додатну грешку због ограничености у прецизности записа бројева у покретном зарезу. Битно је напоменути да информације које користимо приликом моделирања често добијамо мерењем или опажањем, што исто доноси грешку.

Уколико предвиђања добијена моделом одступају од стварности за више од дозвољене вредности грешке, модел се одбацује и трага се за новим, а у супротном се може користити за даље симулације.

Све у свему, математички модел можемо схватити као идеализацију стварности, тј. система или појаве коју моделирамо.

Математичко моделирање је изузетно корисно и разлози за његову употребу су вишеструки. Навешћемо неке примере где је та корист доста изражена:

Scanned with CamScanner

1° Експеримент је немогуће извести
(сударање галаксија, животни циклус звезде, неадекватно у прогнози времена, ...)

2° Експеримент није пожељно извршити
(нпр. због опасности уколико би се извели - фисија и фузија у нуклеарној технологији, изазивање поплаве или лавине, тестирање стабилности грађевина,...)

3° Експеримент је веома скуп
(утицај развијања на генетски материјал, аеродинамика и турбуленција,...)

4° Контрола процеса у реалном времену
(често је потребно контролисати процесе ради сигурности и/или оптимизовати их ради уштеде ресурса или времена - пример би била максимизација улова морске рибе током неког времена без нарушавања морског екосистема)

5° Моделирање за конструкцију мерних уређаја
(велики број мерних уређаја користи физичке законе који повезују тражену величину са величинама које је лакше измерити - пример овога је живин термометар који помоћу ширења живе мери температуру)

6° Боље разумевање појаве на основу математичког модела

7° Коришћење модела у образовању
(комплексни системи се често могу заменити једноставнијим математичким моделом који је лакши за разумевање и представљање)

Scanned with CamScanner

2. Корацн и смернице у процесу математичког моделирања.

Процес моделирања се, у најкраћим цртама, може поделити на четири корака:

1° Препознавање проблема

Прво што је потребно урадити је одредити део стварности који одговара проблему који ћемо моделирати, као и шта желимо постићи самим моделирањем (одређивање циља - да ли је то налажење решења проблема, оптимизација неког процеса или нешто друго). Такође, прва смерница ~~јаст~~ гласи - морају бити јасна намена и циљ моделирања. Овај корак такође обухвата и сакупљање свих постојећих експерименталних података, као и планирање потенцијалних нових експеримената ради тестирања и унапређења модела.

2° Формулација математичког модела

Следеће што је потребно урадити је одредити, на основу расположивих података, променљиве и параметре битне за наш модел, као и облик њихове међусобне зависности (облик зависности зависи доста од природе проблема - да ли је то нека диференцијална једначина, оптимизациони проблем, ...). Те променљиве и параметре је затим потребно рангирати по важности ради потенцијалног поједностављења модела, што доводи до следеће смернице - у односу на циљеве, модел мора бити што једноставнији и комплексан само колико је то неопходно.

~~Могуће је уз по~~ Уз помоћ димензионе анализе могуће је свести модел на бездимензионе величине, што често доводи до тога да један исти модел описује више различитих појава у природи. Међутим, опет је потребно знати интерпретацију тих нових, бездимензионих, променљивих и параметара, што даје следећу смерницу - променљиве и параметри у моделу морају имати своју интерпретацију у стварности.

Scanned with CamScanner

3° Тестирање квалитета модела

Потребно је одредити за које опсеге променљивих и параметара модел даје прихватљиве резултате. Уколико је тај опсег превише мали, врши се корекција модела. Ово даје још једну смерницу - уколико модел не испуњава постављене захтеве, мора се модификовати или одбацити у корист новог модела

4° Презентација модела и резултата

Потребно је упознати оне којима је конкретни математички модел од користи са самим моделом и добијеним резултатима.

Scanned with CamScanner

3. Врсте математичких модела и улога математичара у процесу моделирања.

Врста математичког модела зависи од саме природе проблема, као и од коришћеног математичког апарата у процесу моделирања. Можемо направити више независних подела:

1° континуални или дискретни

Континуални модели користе реалне променљиве (диференцијалне једначине,...), док дискретни модели користе дискретне променљиве (графови, комбинаторика,...). Постоје и мешовити модели који користе и једне и друге. Најчешће се континуални модели користе за континуалне проблеме, а дискретни за дискретне, мада је могуће и обратно (ћелијски аутомати за континуалне проблеме, диференцијалне једначине за модел саобраћаја,...).

2° детерминистички или стохастички

За проблеме где постоји случајно понашање користе се стохастички модели (Монте-Карло методе, фази логика,...), а за појаве које су детерминистичке користе се детерминистички модели (динамика флуида, оптимизација,...). Међутим понекад се стохастички модели користе и за детерминистичке појаве (одређивање атрактора Јулија скупова, временска прогноза,...).

3° линеарни или нелинеарни

Линеарни модели су једноставнији и за њих постоји развијенији математички апарат, док нелинеарни могу моделирати комплекснije понашање (хаос, бифуркације,...).

Scanned with CamScanner

4° статички или динамички

Статички модели не користе време као променљиву, а динамички је користе и због тога се најчешће описују диференцијалним или диференцним једначинама.

5° дедуктивни или индуктивни

Дедуктивни модел настаје логичким извођењем из познатих законитости, а индуктивни настаје генерализацијом постојећих опажања и мерења. Пример дедуктивног модела је Њутнов модел кретања планета јер је настао извођењем из Њутновог закона гравитације, а пример индуктивног модела је Кеплеров модел кретања планета по елиптичним путањама јер је настао на основу астрономских опажања током дужег низа година.

Што се тиче улоге математичара у процесу моделирања, његово знање је потребно, између осталог, због познавања постојећих математичких теорија и методологија које се користе у процесу моделирања. Често је за неке проблеме потребно развити нову математичку методологију, што је у великом броју случајева довело до развијања самог математичког знања кроз историју.

Математичар је често задужен и за испитивање модела са апстрактне, математичке стране. Ово подразумева доказивање да модел има решење, испитивање да ли је то решење јединствено, да ли је модел уопште коректно постављен, утврђивање да ли је процедура за решавање проблема стабилна или не,...

Међутим, за развијање математичког модела често је потребно и доменско знање које поседују остали научници из тог домена, а математичар нужно не. Из тог разлога је потребно да он савлада терминологију и одређену количину знања из те области ради успешне комуникације и рада са осталим члановима тима.

Scanned with CamScanner

4. Кос хитац.

У овом проблему потребно је одредити пројекторију неког испаљеног пројектила уколико нам је позната његова почетна брзина по изласку из цеви, v_0, као и угао испаљивања, θ_0.

Уводимо неколико претпоставки које поједностављују модел:

1° Пројектил је тачкасто тело са позитивном масом (ово је физички немогуће, али је оправдано као поједностављење јер гравитациона сила ~~сфе~~ делује на сферно симетрично тело исто као и кад би сва маса била сконцентрисана у његовом центру).

2° Цев из које излази пројектил је укопана у земљу тако да је излаз поравнат са x осом.

3° У сваком тренутку t можемо измерити висину, $y(t)$, и удаљеност $x(t)$, пројектила. Мерење почиње од координатног почетка ($x(0)=0$, $y(0)=0$).

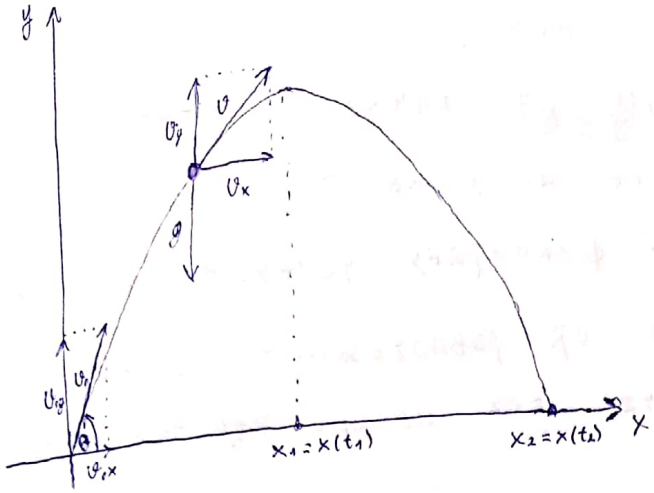
4° Пројектил се испаљује у вакууму, па нема отпора ваздуха.

5° Претпоставка је да је земља равна и да гравитациона сила делује надоле, управно на тло. ↓↓↓↓. Ова претпоставка је валидна јер за мање раздаљине можемо занемарити закривљеност земље.

6° Сила земљине теже не зависи од висине тела, већ је константна ($F_g = mg$, ~~[illegible]~~ $g \approx 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$).

7° $x(t)$ и $y(t)$ су два пута непрекидно диференцијабилне (други извод им је непрекидан у свакој тачки t). Ово нам омогућава несметану употребу интегралног и диференцијалног рачуна.

Scanned with CamScanner



Убрзање, као и брзина, се могу разложити на вертикалну (y) и хоризонталну (x) компоненту. С обзиром да је убрзање заправо други извод функције положаја по времену, и да једино гравитационо убрзање делује на вертикалну компоненту убрзања, а на хоризонталну не делује ништа, имамо:

$y''(t) = -g \quad /\int$

$y'(t) = -gt + \overset{c}{v_{0y}} \quad /\int$

$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_{0y}t + \overset{c}{y_0} = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2$, $y_0 = 0$

$x(t) = v_{0x} \cdot t$

$\sin\theta = \frac{v_{0y}}{v_0} \Rightarrow v_{0y} = v_0 \sin\theta$

$\cos\theta = \frac{v_{0x}}{v_0} \Rightarrow v_{0x} = v_0 \cos\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} &x(t) = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t, \\ &y(t) = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{g}{2}t^2, \\ &v_0 \geq 0,\ 0 < \theta < \pi,\ 0 \leq t \leq t_2 \end{aligned}}$$

Максимална висина се достиже у тренутку t_1 за који важи $y'(t_1) = 0$, тј. $v_0 \sin\theta - gt_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$

Пројектил пада на тло у тренутку t_2 за који важи $y(t_2) = 0,\ t_2 \neq 0$:

$v_0 \sin\theta\, t_2 - \frac{g}{2}t_2^2 = 0$

$t_2(v_0 \sin\theta - \frac{g}{2}t_2) = 0$

$v_0 \sin\theta - \frac{g}{2}t_2 = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} = 2t_1$

Можемо показати и да је облик трајекторије пројектила парабола:

$x = v_0 \cos\theta\, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$

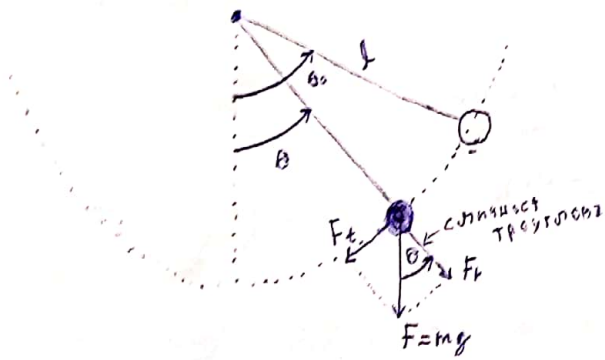
$y = v_0 \sin\theta\, t - \frac{g}{2}t^2 = v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2 = \operatorname{tg}\theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$

Scanned with CamScanner

5. Математичко клатно.

Математичко клатно се састоји из тачкастог тела масе m које је крутим штапом (који се не може деформисати) ~~везано~~ ~~за~~ дужине l везано за неку фиксирану тачку. Клатно је у почетном тренутку отклоњено од равнотежног положаја за угао θ_0, а затим се тег пушта без икакве ~~почетне~~ спољашње силе да утиче на њега.

На тег делује сила земљине теже $F=mg$, $g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, а може утицати и сила трења услед отпора ваздуха (занемаримо то тренутно).



Циљ је одредити отклон клатна у произвољном тренутку t, тј. функцију $\theta(t)$.

Сила гравитације $F=mg$ која делује на тег (вертикално наниже) се може разложити на радијалну (F_r) и тангенцијалну (F_t) компоненту. Пошто је клатно нерастегљиво, радијална компонента F_r не утиче на кретање клатна. За F_t важи следеће:

$$\sin\theta = \frac{-F_t}{F} \Rightarrow F_t = -F\sin\theta = -mg\sin\theta.$$

Обележимо са $s(t)$ растојање тега од равнотежног положаја дуж лука ($s(t)<0$ ако је тег лево од равнотежног положаја). Важи $s(t)=l\cdot\theta(t)$.

Пошто је сила једнака производу масе и убрзања (другог извода по функцији положаја), тј. $F_t=-mg\sin\theta = m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$, следи:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\theta \overset{s=l\theta}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{l}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta,\\ \theta(0)=\theta_0,\ \frac{d\theta}{dt}(0)=0\end{array}}$$

У случају да ~~да~~ постоји и отпор ваздуха, треба урачунати и силу трења која је обрнуто пропорционална брзини тела, тј. $F_0=-b\frac{ds}{dt}$ из чега добијамо: $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{m}F_0 - \frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{b}{m}\frac{ds}{dt} - \frac{g}{l}\sin\theta = -\frac{b}{ml}\frac{d\theta}{dt} - \frac{g}{l}\sin\theta$

$F=ma$

Scanned with CamScanner

Међутим, ова диференцијална једначина се не може решити аналитички, већ мора нумерички. Ипак, за мале углове θ можемо претпоставити $\sin\theta \approx \theta$, па добијамо:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta, \\ &\theta(0) = \theta_0,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0 \end{aligned}}$$

Решавање:

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta$$

$$\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$K(r) = r^2 + \frac{g}{l} = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\frac{g}{l}} = \cancel{\sigma} \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = C_1 \cancel{e^{\sigma t}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \cancel{e^{\sigma t}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$= C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$$

$$\theta(0) = \theta_0 = C_1$$

$$\theta'(0) = 0 = 0 \cdot C_1 + \sqrt{\frac{g}{l}}C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}$$

Занимљиво је одредити и период осциловања (време потребно да се вратимо у почетни положај) T_0:

$$\theta(T_0) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}T_0\right) = \theta_0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}T_0\right) = 1$$

$$\sqrt{\frac{g}{l}}T_0 = 2\pi \Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},\ \theta_0 \ll 1}$$

Хајгенсов закон

Scanned with CamScanner

6. Математичко клатно (преко закона одржања енергије).

[Дефинисати математичко клатно као у 5.]

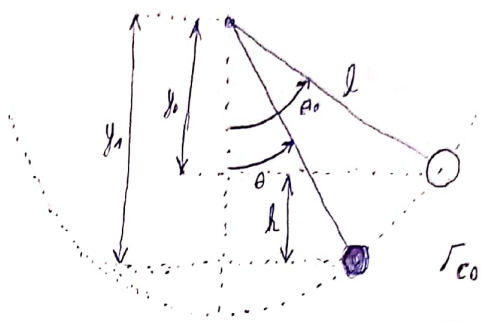
Математичко клатно могуће је моделирати преко закона одржања енергије. Наиме, из закона одржања енергије следи да је збир потенцијалне и кинетичке енергије тела константан, тј. да су промене потенцијалне и кинетичке енергије од почетног тренутка t једнаке:

$$\underset{mgh}{\underset{\parallel}{\Delta P}} = \underset{\frac{1}{2}mv^2}{\underset{\parallel}{\Delta K}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

[$\Delta P = mgy_1 - mgy_2 = mg(y_1 - y_2) = mgh$

$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$]



[Слика погрешна за изабран знак за v (изведено за $+\sqrt{2gh}$, а на слици је $-\sqrt{2gh}$ – грешка у книзи)]

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gh} \overset{s=l\theta}{\Longrightarrow} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{l}$$

[$\cos\theta_0 = \frac{y_0}{l}$

$\cos\theta = \frac{y_1}{l}$]

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{2gh}}{l} = \frac{\sqrt{2g(y_1 - y_0)}}{l} = \frac{\sqrt{2g(l\cos\theta - l\cos\theta_0)}}{l} = \sqrt{\frac{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}{l}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \overset{\text{правило ланца}}{=} \frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{2g}{l}(-\sin\theta)}{\cancel{\sqrt{\frac{2g(\cos\theta-\cos\theta_0)}{l}}}}\cdot\cancel{\sqrt{\frac{2g(\cos\theta-\cos\theta_0)}{l}}} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$\theta(0) = \theta_0,\ \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$

~~Користи~~ За мало θ, $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

[$K(r) = r^2 + \frac{g}{l} \Rightarrow r = \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\boxed{\theta(t) = C_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) = \theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}$$

$\theta(0) = \theta_0 = C_1$

$\theta'(0) = 0 = 0C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

исто као 5.]

Период се може израчунати на следећи начин:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} = \sqrt{\frac{l}{2g(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

Интеграцијом од 0 до θ_0 по θ добија се четвртина периода, па следи:

$$T_0 = 4\int_0^{\theta_0}\frac{dt}{d\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\theta_0}\sqrt{\frac{l}{2g(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\,d\theta = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}\,d\theta = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\,F\left(\sin\frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

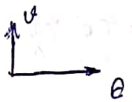
Лежандрова елиптичка функција

Scanned with CamScanner

Додатак за 5. и 6.

Могуће је направити и систем диф. једначина првог реда ~~на~~ чијим решавањем можемо направити фазни дијаграм зависности брзине тега од угла:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{l} v \qquad \left[v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \right]$$



$$\frac{dv}{dt} = -g \sin\theta \qquad \left[\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin\theta \right]$$

Scanned with CamScanner

7. Раст популације.

Нека је $N(t)$ број јединки неке посматране популације у датом тренутку t. Интересује нас број јединки након неког временског интервала Δt, тј. $N(t+\Delta t)$.

Познато је да су број новорођених јединки (наталитет) n и број умрлих јединки (морталитет) m пропорционални тренутном броју јединки $N(t)$ и протеклом временском интервалу Δt, па следи:

$$N(t+\Delta t) = N(t) + n\Delta t\, N(t) - m\Delta t\, N(t)$$

$$N(t+\Delta t) = N(t) + \Delta t\, N(t)(n-m)$$

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = (n-m)N(t)$$

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} = r N(t),$$ где је $r = n-m$ природни прираштај;

За мали временски интервал Δt, тј. када $\Delta t \to 0$, добијамо

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = r N(t)},$$ што следи директно из дефиниције извода у тачки.

Решавање:

$N' = rN$

$N' - rN = 0$

$K(k) = k - r = 0 \Rightarrow k = r \Rightarrow N(t) = C_1 e^{rt}$, $C_1 = N(0)$

$\boxed{N(t) = N(0)\, e^{rt}}$ Ово је тзв. експоненцијални модел раста популације (ако је $r<0$, број јединки експоненцијално тежи нули, а ако је $r>0$, он експоненцијално расте). Овај модел је добар у случају да је природни прираштај константан и укупан број јединки неограничен. Овакав модел је континуалан иако је у стварности број јединки дискретна величина. Међутим, тако уведена грешка је мала при великом броју јединки, а математички апарат за рад са реалним променљивим је развијенији.

Scanned with CamScanner

У случају да је укупна величина популације ограничена што је најчешће и случај услед ограничене количине хране, величине станишта, ...) уводимо нови параметар K који представља максимални број јединки који је одржив у станишту на неко дуже време. Модел сада гласи

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)}$$

Ово је тзв. логистички модел раста популације (приметимо да $\frac{dN}{dt} \to 0$ када $N \to K$).

Решавање:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

$$\frac{dN}{dt} = rN\frac{K-N}{K}$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{r}{K}N(K-N)$$

$$\frac{dN}{N(K-N)} = \frac{r}{K}dt \quad /\int$$

$$\int \frac{1}{N(K-N)}dN = \int \frac{r}{K}dt$$

$$\frac{1}{N(K-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{K-N} = \frac{A(K-N)+BN}{N(K-N)}$$

уз N^0: $AK = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{K}$

уз N^1: $-A + B = 0 \Rightarrow B = A = \frac{1}{K}$

$$\frac{1}{K}\int\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}\right)dN = \frac{r}{K}\int dt$$

$$\frac{1}{K}\left(\ln|N| - \ln|K-N|\right) = \frac{r}{K}t + C_1$$

$$\ln\left|\frac{N}{K-N}\right| = rt + C_2, \quad C_2 = KC_1$$

$$\left|\frac{N}{K-N}\right| = e^{rt+C_2}$$

$$\frac{N}{K-N} = C_3e^{rt}, \quad C_3 = e^{C_2}$$

$$N = C_3e^{rt}(K-N)$$

$$N + NC_3e^{rt} = C_3Ke^{rt} \Rightarrow N(t) = \frac{C_3Ke^{rt}}{1+C_3e^{rt}}$$

$$\frac{N}{K-N} = C_3e^{rt} \Rightarrow \frac{N(0)}{K-N(0)} = C_3 \quad (t=0 \Rightarrow e^{rt}=1)$$

$$N(t) = \frac{\frac{N(0)}{K-N(0)}Ke^{rt}}{1+\frac{N(0)}{K-N(0)}e^{rt}} = \frac{N(0)Ke^{rt}}{K-N(0)+N(0)e^{rt}} = \frac{N(0)Ke^{rt}}{K-N(0)(1-e^{rt})} = \boxed{\frac{N(0)e^{rt}}{1+\frac{N(0)}{K}(e^{rt}-1)}}$$

Сменом $x(t) = \frac{N(t)}{K}$ добијамо $\frac{dx}{dt} = rx(1-x)$ (логистичка једначина) чије је решење $x(t) = \frac{x(0)e^{rt}}{1+x(0)(e^{rt}-1)}$ (логистичка функција). Додатном сменом $\tau = rt$ добија се

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1-x).$$

Scanned with CamScanner

8. Грабљивци и плен.

Нека је $G(t)$ број грабљиваца (нпр. лисица), ~~у тренутку~~ а $P(t)$ број плена ~~у тренутку~~ (нпр. зечева) у тренутку t у неком посматраном станишту. Грабљивци G као храну користе искључиво плен P, а претпоставка је да плен P има довољно хране тако да она не утиче на њихову смртност.

Модел за ово можемо представити системом диф. једначина:

[Модел Лотка-Волтера]

$$\frac{dP}{dt} = aP - bPG$$

aP → промена популације плена када не би било грабљиваца (као експ. модел)

bPG → умањење популације услед напада грабљиваца где је број успешних једнако пропорционалан броју сусрета, а броју сусрета директно пропорционалан производу броја јединки обе популације

$$\frac{dG}{dt} = cPG - mG$$

cPG → стопа рађања грабљиваца директно зависи од броја успешног плена

mG → стопа смртности грабљиваца у одсуству плена (када је $P=0$, пop. грабљиваца опада експоненцијално)

Стационарна решења модела (она у којима нема даље промене у популацијама) добијају се решавањем система:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= aP - bPG = 0 \\ \frac{dG}{dt} &= cPG - mG = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P &= \frac{m}{c} \equiv P_s \\ G &= \frac{a}{b} \equiv G_s \end{aligned}$$

Модел можемо трансформисати у следећи облик:

$$\frac{dP}{dt} = aP\left(1 - \frac{G}{G_s}\right) \qquad \xrightarrow[y(t)=\frac{G(t)}{G_s}]{x(t)=\frac{P(t)}{P_s}} \qquad \frac{dx}{dt} = ax(1-y)$$

$$\frac{dG}{dt} = -mG\left(1 - \frac{P}{P_s}\right) \qquad \frac{dy}{dt} = -my(1-x)$$

$$\rightarrow dt = \frac{dx}{ax(1-y)} = \frac{dy}{-my(1-x)}$$

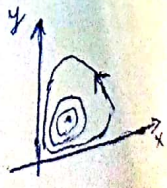
$$\Rightarrow ax(1-y)dy = -my(1-x)dx$$

$$ax(1-y)dy + my(1-x)dx = 0 \quad /: xy$$

$$a\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy + m\left(\frac{1}{x} - 1\right)dx = 0 \quad //$$

$$\boxed{a(\ln y - y) + m(\ln x - x) = C}$$

За различите константе C добијамо виљушкаст трајекторијс модела из којем се види да популације периодично и вечно осцилују.



Гатто-фох проблем осциловање се наставља чак и када популација неке јединке постане јако мала (<2 код у пракси више није могућа репродукција)

9. Димензије и јединице физичких величина.

Димензиона анализа је метода којом се изводе закључци о некој појави само на основу претпоставке да се та појава може описати димензионо коректном једначином која повезује неке променљиве.

Свака физичка величина (убрзање, сила, маса, ...) Q има своју физичку димензију, у ознаци $\delta(Q)$. За физичке величине $Q_1, \dots, Q_n$ важи следеће:

$$\delta(Q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{a_n}) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \delta(Q_n)^{a_n}, \; a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q}$$

Различите научне области користе различите величине са различитим димензијама. Уводимо појам основних димензија научне области:

Димензије $\delta_1, \dots, \delta_k$ називамо основним димензијама неке научне области уколико се димензија сваке величине Q из те области може на јединствен начин представити у облику $\delta(Q) = \delta_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \delta_k^{a_k}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Q}$.

Један пример скупа основних димензија који се користи у механици је маса (M), дужина (L) и време (T). Као пример, димензија за брзину била би $\delta(v) = L T^{-1}$.

Још један важан појам је јединица физичке величине. Наиме, мерење физичких величина се изводи поређењем са неком другом физичком величином исте димензије која је по договору узета за еталон и која се назива основна јединица те физичке величине (мерење дужине стопама, лактима, ...).

Физичка величина Q се може представити као $Q = v(Q)[Q]$, где је $v(Q)$ нумеричка вредност, а $[Q]$ јединица.

Scanned with CamScanner

Основне јединице, у ознаци $[b_i]$, $i=\overline{1,k}$, су јединице основних физичких величина $Q_1, \dots, Q_k$ (нпр. маса-грам, дужина-метар, време-секунда), Остале јединице се изводе преко основних и називају се изведене јединице.

За једну област могуће је увести више система основних јединица, али најраспрострањенији је међународни SI систем јединица који је уведен ради стандардизације.

Scanned with CamScanner

10. Димензиона хомогеност.

Правила за операције над физичким величинама која су потребна да би се очувала димензиона (физичка) коректност:

1° Ако је $Q_1 = Q_2$, тада је $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$

2° $\delta(Q_1^{a_1} \cdot Q_2^{a_2}) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \delta(Q_2)^{a_2}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$

3° $Q_1 \pm Q_2$ је физичка величина $\overset{\Longleftrightarrow}{\text{ако}}$ је $\delta(Q_1) = \delta(Q_2)$ и тада важи $\delta(Q_1 \pm Q_2) = \delta(Q_1) = \delta(Q_2)$.

4° Бројеви су бездимензиони, тј. $\delta(\xi) = \delta(Q^0) = \delta(Q)^0 = 1$ за $\forall \xi \in \mathbb{R}$ и $\forall$ величину

5° Величине у аргументима експонијалних функција морају бити бездимензионе, нпр. да би $e^{\omega t}$ имало смисла за $\delta(t) = T$, мора важити $\delta(\omega) = T^{-1}$.

Нека је $Q = Q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{a_n}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$, тада је:

1° $\delta(Q) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \delta(Q_n)^{a_n}$

2° $[Q] = [Q_1]^{a_1} \cdot \ldots \cdot [Q_n]^{a_n}$

3° $\vartheta(Q) = \vartheta(Q_1)^{a_1} \cdot \ldots \cdot \vartheta(Q_n)^{a_n}$

За величине $Q_1, \ldots, Q_n$ кажемо да су димензионе независне ако важи следеће:

ако $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ и $Q = Q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{a_n}$ је бездимензиона величина ($\delta(Q) = 1$), тада мора бити $a_1 = \ldots = a_n = 0$. $\quad$ [$Q_1, \ldots, Q_n$ дим. независне за

$Q = Q_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot Q_n^{a_n}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow (\delta(Q) = 1 \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0)$]

Могућа је промена система основних јединица са $[\delta_1], \ldots, [\delta_k]$ на $[\delta_1]_*, \ldots, [\delta_k]_*$, где је $[\delta_i] = \underset{\text{фактор конверзије}}{x_i} [\delta_i]_*$, $i = \overline{1,k}$, $x_i \in \mathbb{R}_+$. У том случају за величину $Q = \vartheta(Q)[Q] = \vartheta_*(Q)[Q]_*$ важи:

1° $\vartheta_*(Q) = x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{a_k} \vartheta(Q)$

2° $[Q] = [\delta_1]^{a_1} \cdot \ldots \cdot [\delta_k]^{a_k}$

3° $[Q]_* = [\delta_1]_*^{a_1} \cdot \ldots \cdot [\delta_k]_*^{a_k}$

Scanned with CamScanner

Матрица $M = (m_{ij})_{i=1,\dots,k,\ j=1,\dots,n}$ (димензија $k \times n$) чији сваки ред одговара некој основној димензији $\delta_1, \dots, \delta_k$, а свака колона некој величини $Q_1, \dots, Q_n$ и где је сваки елемент m_{ij} једнак ~~одговарајућ~~ степену ~~ди~~ димензије δ_i у величини Q_j назива се димензионе матрице величина $Q_1, \dots, Q_n$. За сваку величину Q_j важи $\delta(Q_j) = \delta_1^{m_{1j}} \cdots \delta_k^{m_{kj}}$, $j = \overline{1,n}$

Пример:

m – маса тела

v – брзина тела

g – гравитационо убрзање

h – висина

$$\begin{array}{c} \\ M \\ L \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} m & v & g & h \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \end{array} \quad \delta(g) = M^0 \cdot L^1 \cdot T^{-2}$$

Нека је $Q = Q_1^{a_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{a_n}$, тада је:

$$\delta(Q) = \delta(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot \delta(Q_n)^{a_n} = (\delta_1^{m_{11}} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{k1}})^{a_1} \cdot \dots \cdot (\delta_1^{m_{1n}} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{kn}})^{a_n}$$

$$= (\delta_1^{m_{11}a_1} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{k1}a_1}) \cdot \dots \cdot (\delta_1^{m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{kn}a_n}) = \delta_1^{m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot \delta_k^{m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n}$$

За овакву величину Q важи да је бездимензионе ако је

$m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n = 0$

$\vdots$

$m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n = 0$,

или, еквивалентно, $Md = 0$ где је $d = (a_1, \dots, a_n)^T$.

Уколико је Q бездимензионе величине, променом система основних јединица не мења се њена бројна вредност, тј. $\delta(Q) = 1 \Rightarrow v_*(Q) = v(Q)$.

Доказ:

$$v_*(Q) = (x_1^{m_{11}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}} \cdot v(Q_1))^{a_1} \cdot \dots \cdot (x_1^{m_{1n}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{kn}} \cdot v(Q_n))^{a_n}$$

$$= (x_1^{m_{11}a_1} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}a_1} v(Q_1)^{a_1}) \cdot \dots \cdot (x_1^{m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{kn}a_n} v(Q_n)^{a_n})$$

$$= x_1^{m_{11}a_1 + \dots + m_{1n}a_n} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}a_1 + \dots + m_{kn}a_n} \cdot v(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot v(Q_n)^{a_n}$$

$$= x_1^0 \cdot \dots \cdot x_k^0 \cdot v(Q_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot v(Q_n)^{a_n} = v(Q)$$

Scanned with CamScanner

Нека је f функција од n променљивих и $Q_1, \dots, Q_n$ физичке величине, тада се за једначину $f(Q_1, \dots, Q_n) = 0$ каже да је физички смислена уколико важи:

1° $f(Q_1, \dots, Q_n)$ је такође физичка величина, тј.

$$\vartheta(f(Q_1, \dots, Q_n)) = f(\vartheta(Q_1), \dots, \vartheta(Q_n)),$$

$$\delta(f(Q_1, \dots, Q_n)) = \delta_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot \delta_k^{\beta_k}, \quad \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{Q},$$

$$[f(Q_1, \dots, Q_n)] = [\delta_1]^{\beta_1} \cdot \dots \cdot [\delta_k]^{\beta_k}.$$

2° За произвољне $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{R}$ и $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}_+$ важи:

$$f(x_1^{m_{11}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{k1}} \rho_1, \dots, x_1^{m_{1n}} \cdot \dots \cdot x_k^{m_{kn}} \rho_n) = x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k} f(\rho_1, \dots, \rho_n).$$

Функција f која задовољава ово назива се хомогена функција.

3° $[f(Q_1, \dots, Q_n)] = [Q_1]^{K_1} \cdot \dots \cdot [Q_n]^{K_n}$ за неке $K_1, \dots, K_n \in \mathbb{Q}$

↑ пошто је f изражена преко физичких величина $Q_1, \dots, Q_n$, онда и јединица за f мора бити изражена преко јединица за $Q_1, \dots, Q_n$ ✓

Физички смислена једначина је инваријантна на промену система основних јединица.

Доказ:

$$f(\vartheta_*(Q_1), \dots, \vartheta_*(Q_n)) \overset{1°}{=} \vartheta_*(f(Q_1, \dots, Q_n)) = x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k} \vartheta(f(Q_1, \dots, Q_n))$$

$$\overset{1°}{=} x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_k^{\beta_k} f(\vartheta(Q_1), \dots, \vartheta(Q_n)) \overset{=0}{=} 0.$$

↑ почетна претпоставка.

Scanned with CamScanner

(11.) Свођење на бездимензионе величине – пример слободног пада.

Свођењем величина које се користе у моделу на бездимензионе често можемо донети важне закључке о посматраној појави без решавања самог модела. Овиме такође често можемо и смањити број параметара у моделу. Битно је напоменути и да је ~~функционална~~ једначина $f(Q_1, \dots, Q_n)=0$ физички смислена за произвољну функцију f уколико су величине $Q_1, \dots, Q_n$ бездимензионе.

Посматрајмо слободан пад тела у вакууму под дејством гравитације. Потенцијално значајне величине за овај проблем су маса тела m, висина са које тело пада h, брзина тела v и гравитационо убрзање g. Следи да би једначина у моделу требала бити облика $f(m, h, v, g)=0$, међутим, погледајмо димензије сваке величине:

$\delta(m) = M$
$\delta(h) = L$
$\delta(v) = LT^{-1}$
$\delta(g) = LT^{-2}$

Димензија масе M се појављује само на једном месту па следи да је масу тела m немогуће искомбиновати са осталим величинама да би добили бездимензиону величину. Закључујемо да је маса тела m ~~непотребан~~ вишак у овом моделу и да она не утиче на кретање тела при слободном паду. Једначина у моделу је зато облика $f_1(h, v, g)=0$.

1° Елиминишимо димензију времена из модела: ~~$v^2 \cdot \frac{T^2}{L^2}$~~

$$\delta\left(\frac{v^2}{g}\right) = \frac{L^2}{T^2} \cdot \frac{T^2}{L} = L \Rightarrow f_2\left(\frac{v^2}{g}, h\right) = 0$$

2° Елиминишимо димензију дужине из модела:

$$\delta\left(\frac{v^2}{gh}\right) = \frac{L}{L} = 1 \Rightarrow f_3\left(\frac{v^2}{gh}\right) = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{gh} = const \Rightarrow \boxed{v = const \cdot \sqrt{gh}}$$

За одређивање тачне вредности константе потребно је даље разматрање и примена физичких закона, па видимо да дим. анализа није свемогућа.

Scanned with CamScanner

12. Свођење на бездимензионе величине – ротација система два тела.

Преписати увод из 11.

Посматрајмо ротацију система два тела узроковану међусобним гравитационим привлачењем. Претпоставимо да су значајне величине за овај модел период ротације T_r, масе обе тела m_1 и m_2, и растојање између њих r. Димензије ових величина су:

$\delta(T_r) = T$

$\delta(m_1) = M$

$\delta(m_2) = M$

$\delta(r) = L$

Димензије T и L се појављују само једном, па Њутновим избацивањем добили би $\frac{m_1}{m_2} = const$ што није тачно. Закључујемо да нам фали нека величина која повезује све остале, а то је Њутнова гравитациона G, $\delta(G) = \frac{L^3}{MT^2}$; па имамо да је једначина модела облика $f_1(T_r, m_1, m_2, r, G) = 0$.

1° Елиминишимо димензију времена из модела:

$$\delta(T_r\sqrt{G}) = \cancel{T}\frac{\sqrt{L^3}}{\sqrt{M}\,\cancel{T}} = \sqrt{\frac{L^3}{M}} \Rightarrow T_r\sqrt{G} = f_2(m_1, m_2, r)$$

2° Елиминишимо димензију дужине из модела:

$$\delta\left(\frac{T_r\sqrt{G}}{\sqrt{r^3}}\right) = \sqrt{\frac{L^3}{M}}\cdot\frac{1}{\sqrt{L^3}} = \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow \frac{T_r\sqrt{G}}{\sqrt{r^3}} = f_3(m_1, m_2)$$

3° Елиминишимо димензију масе из модела:

f_4 мора бити бездимензионна

$$\delta\left(\frac{T_r\sqrt{Gm_2}}{\sqrt{r^3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{M}}\sqrt{M} = 1 \Rightarrow \frac{T_r\sqrt{Gm_2}}{\sqrt{r^3}} = \sqrt{m_2}\, f_3(m_1, m_2) = f_4(m_1, m_2) = f\left(\frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{T_r = \sqrt{\frac{r^3}{Gm_2}}\, f\left(\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

Из овога можемо добити трећи Кеплеров закон:

$$T_r^2 = \frac{r^3}{Gm_2} f^2\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{r^3}{Gm_2} f^2(0) \quad \text{за } m_1 \ll m_2$$

(претпоставка да је f непрекидна да би лимес ~~...~~ могао да уђе под f)

Scanned with CamScanner

13. Бакингемова π теорема и пример математичког клатна.

Бакингемова π теорема:

Нека су $Q_1, \dots, Q_n$ физичке величине, M димензиона матрица ових величина у односу на основне димензије $b_1, \dots, b_k$ и $r = \operatorname{rang} M$. Тада је свака физички смислена једначина $f(Q_1, \dots, Q_n) = 0$ еквивалентна једначини $F(\pi_1, \dots, \pi_{n-r}) = 0$ за неку функцију F где су π_i, $i = \overline{1, n-r}$ бездимензионе величине за које важи $\pi_i = Q_1^{\alpha_{1i}} \cdots Q_n^{\alpha_{ni}}$, $i = \overline{1, n-r}$ за неке бројеве $\alpha_{ji} \in \mathbb{Q}$. Вектори $a_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})^T$ су база простора решења система $Ma = 0$.

На основу теореме знамо да је увек могуће трансформисати физички смислену једначину на бездимензионе величине.

Посматрајмо математичко клатно. Период осциловања клатна T зависи од масе тега m, дужине клатна l, гравитационог убрзања g и почетног угла θ_0. Следи да би једначина модела требала да буде облика $f(T, m, l, g, \theta_0) = 0$.

$\delta(T) = T$
$\delta(m) = M$
$\delta(l) = L$
$\delta(g) = LT^{-2}$
$\delta(\theta_0) = 1$

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} T & m & l & g & \theta_0 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} T \\ M \\ L \end{array}, \quad r = \operatorname{rang} M = 3, \quad n - r = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{array}{l} \alpha_1 - 2\alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow a_1 = (2, 0, -1, 1, 0)$$
$$a_2 = (0, 0, 0, 0, 1)$$
$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{T^2 g}{l}, \quad \pi_2 = \theta_0$$
$$\Rightarrow F\left(\frac{T^2 g}{l}, \theta_0\right) = 0 \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{l}{g}}\, \phi(\theta_0)}$$

Scanned with CamScanner

(14.) Бакингемова π теорема и пример пробе нуклеарне бомбе.

[Навести теорему као у (13.)]

1945. у Америци је извршена прва пробна детонација атомске бомбе. Британски физичар Тејлор је само на основу снимка експлозије успео да процени количину ослобођене енергије. Наиме, полупречник ватрене лопте R зависи од протеклог времена од експлозије t, густине околног ваздуха ρ и ослобођене енергије E, па је једначина модела облика $f(R, t, \rho, E) = 0$.

$\delta(R) = L$

$\delta(t) = T$

$\delta(\rho) = \frac{M}{L^3}$

$\delta(E) = \frac{ML^2}{T^2}$

$$\mathcal{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & t & \rho & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ T \\ M \\ L \end{array}, \quad r = \operatorname{rang} \mathcal{M} = 3$$

$$n - r = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} \alpha_2 - 2\alpha_4 &= 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 &= 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_3 + 2\alpha_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_1 = (-5, 2, -1, 1)$$

$$\Rightarrow \pi_1 = R^{-5} t^2 \rho^{-1} E$$

$$\Rightarrow F(R^{-5} t^2 \rho^{-1} E) = 0$$

$$\Rightarrow R^{-5} t^2 \rho^{-1} E = const$$

$$\Rightarrow \boxed{E = const \cdot \frac{R^5 \rho}{t^2}}$$

Вредност константе се може добити експериментално са мањим експлозивом за који је позната количина ослобођене енергије. На тај начин је добијено $const \approx 1$, па на крају да је при експлозији атомске бомбе ослобођено енергије еквивалентне експлозији 19 килотона TNT-ја.

Scanned with CamScanner

15. Пензиона штедња.

Формула за промену капитала гласи $K(t+\Delta t) = K(t) + rK(t) = (1+r)K(t)$, где је r каматна стопа за период Δt, а $K(t)$ капитал у тренутку t.

Дискретизујмо овај проблем претпоставком да је период укамаћивања један месец. Сваког месеца у фонд уложи фиксиран новчани износ A, а капиталу K се приписује камата по стопи r. Потребно је одредити стање фонда након n месеци, с тим да је $K_0 = 0$ (фонд је иницијално празан). Слично формули за промену капитала добијамо:

$$K_{n+1} = (1+r)K_n + A$$

Решавање:

$$K_n = (1+r)K_{n-1} + A$$

$$K_n - (1+r)K_{n-1} = A$$

$$H_n - (1+r)H_{n-1} = 0$$

$$K(x) = x - (1+r) = 0 \Rightarrow x = 1+r$$

$$\Rightarrow H_n = C(1+r)^n$$

$P_n = S$ [$f(n) = A$, A је пол. нултог степена]

$$P_n - (1+r)P_{n-1} = A$$

$$S - (1+r)S = A$$

$$S(1-1-r) = A$$

$$-rS = A \Rightarrow S = -\frac{A}{r} \Rightarrow P_n = -\frac{A}{r}$$

$$K_n = H_n + P_n = C\cdot(1+r)^n - \frac{A}{r}$$

$$K_0 = C(\underbrace{1+r}_{1})^0 - \frac{A}{r} \Rightarrow C = \frac{A}{r}$$

$$\boxed{K_n = \frac{A}{r}\left((1+r)^n - 1\right)}$$

Scanned with CamScanner

16. Размножавање зечева.

Нека је Z_n укупан број зечева у неком станишту, O_n број парова одраслих зечева и M_n број парова младих зечева. Очигледно важи $Z_n = 2(M_n + O_n)$.

Претпоставимо да зечеви не умиру и да важе следећа правила:

1° За месец дана један пар одраслих зечева направи један пар младих зечева, тј. $M_{n+1} = O_n$ (не воваје се M_n јер ће они да одрасту по правилу 2°)

2° Младим зечевима је потребно месец дана да одрасту, тј. $O_{n+1} = O_n + M_n$

Из правила 1° и 2° следи $O_{n+1} = O_n + O_{n-1}$, а узећемо и $O_0 = 0, O_1 = 1$ (Фибоначијев низ).

Решавање:

$O_n = O_{n-1} - O_{n-2} = 0$ ← $O_n = O_{n-1} + O_{n-2}$

$K(x) = x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \varphi \\ 1-\varphi \end{cases}$ — однос златног пресека

$\Rightarrow O_n = C_1 \varphi^n + C_2 (1-\varphi)^n$

$O_0 = C_1 + C_2 = 0$

$O_1 = C_1 \varphi + C_2(1-\varphi) = 1$

$C_1 + C_2 = 0$

$\frac{1+\sqrt{5}}{2} C_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} C_2 = 1 \quad / \cdot 2$

$C_1 + C_2 = 0 \quad / \cdot (1+\sqrt{5})$

$(1+\sqrt{5})C_1 + (1-\sqrt{5})C_2 = 2 \quad /+$

$C_1 + C_2 = 0$

$(1-\sqrt{5})C_2 - (1+\sqrt{5})C_2 = 2 \Rightarrow C_2(1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}) = 2$

$-\sqrt{5} C_2 = 1$

$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \; C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\boxed{\begin{aligned} O_n &= \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} \\ M_n &= O_{n-1} = \dots \\ Z_n &= 2(M_n + O_n) = \dots \end{aligned}}$$

Scanned with CamScanner

17) Поморске битке.

Посматрајмо поморску битку две флоте. Нека су A_n и B_n, редом, број бродова у n-тој фази битке прве и друге флоте.

Претпоставка је да су губици једне стране након једне фазе битке пропорционални величини противничке флоте, па следи модел у облику система ~~диференцијалних~~ једначина:

$$A_{n+1} = A_n - a B_n$$
$$B_{n+1} = B_n - b A_n$$

убојитост противничке флоте

Решавање:

Запишимо претходни систем у матричном облику:

$$\begin{bmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -b & 1 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$$

Одредимо сопствене вредности и сопствене векторе матрице M:

$$Mv = \lambda v$$
$$Mv - \lambda v = 0$$
$$(M - \lambda I)v = 0$$
$$|M - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -a \\ -b & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - ab = 0$$
$$\Rightarrow 1-\lambda = \pm\sqrt{ab} \Rightarrow \lambda = 1 \mp \sqrt{ab}$$

1° $\lambda_1 = 1 - \sqrt{ab}$

$$\begin{bmatrix} 1-1+\sqrt{ab} & -a \\ -b & 1-1+\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{ab}\, v_{11} - a v_{12} = 0$$
$$-b v_{11} + \sqrt{ab}\, v_{12} = 0$$

(лин. зависни, можемо узети $v_{11} = \sqrt{a}$, $v_{12} = \sqrt{b}$)

$$v_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix}$$

2° $\lambda_2 = 1 + \sqrt{ab}$

$$\begin{bmatrix} 1-1-\sqrt{ab} & -a \\ -b & 1-1-\sqrt{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{ab}\, v_{21} - a v_{22} = 0$$
$$-b v_{21} - \sqrt{ab}\, v_{22} = 0$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Представимо $\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix}$ преко M и $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix} = M^2 \begin{bmatrix} A_{n-2} \\ B_{n-2} \end{bmatrix} = \dots = M^n \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = (*)$$

Представимо $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$ преко сопствених вектора v_1 и v_2 (као лин. комбинацију):

$$\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 = C_1 \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a}\, C_1 + \sqrt{a}\, C_2 \\ \sqrt{b}\, C_1 - \sqrt{b}\, C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a}\,(C_1 + C_2) \\ \sqrt{b}\,(C_1 - C_2) \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_0 = \sqrt{a}\,(C_1 + C_2) \;/ : \sqrt{a} \\ B_0 = \sqrt{b}\,(C_1 - C_2) \;/ : \sqrt{b} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_0}{\sqrt{a}} &= C_1 + C_2 \\ \frac{B_0}{\sqrt{b}} &= C_1 - C_2 \end{aligned}\right\} + \Rightarrow \frac{A_0}{\sqrt{a}} + \frac{B_0}{\sqrt{b}} = 2C_1 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} C_1 &= \frac{\sqrt{b}\,A_0 + \sqrt{a}\,B_0}{2\sqrt{ab}} \\ C_2 &= \frac{\sqrt{b}\,A_0 - \sqrt{a}\,B_0}{2\sqrt{ab}} \end{aligned}}$$

$$(*) = M^n (C_1 v_1 + C_2 v_2) = C_1 M^n v_1 + C_2 M^n v_2 = C_1 \lambda_1^n v_1 + C_2 \lambda_2^n v_2$$

$$= \frac{\sqrt{b}\,A_0 + \sqrt{a}\,B_0}{2\sqrt{ab}} (1 - \sqrt{ab})^n \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ \sqrt{b} \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{b}\,A_0 - \sqrt{a}\,B_0}{2\sqrt{ab}} (1 + \sqrt{ab})^n \begin{bmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{b} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}}\,B_0\right)(1 - \sqrt{ab})^n + \frac{1}{2}\left(A_0 - \sqrt{\frac{a}{b}}\,B_0\right)(1 + \sqrt{ab})^n \\ \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,A_0 + B_0\right)(1 - \sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,A_0 - B_0\right)(1 + \sqrt{ab})^n \end{bmatrix} \begin{matrix} \to A_n \\ \to B_n \end{matrix}$$

Ово је решење система.

Можемо одредити и фазу битке у којој се она завршава.

Претпоставимо да A_n побеђује - то ће се десити када је $B_n \le 0$:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,A_0 + B_0\right)(1 - \sqrt{ab})^n - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,A_0 - B_0\right)(1 + \sqrt{ab})^n \le 0 \;/ \cdot 2 \;\frac{-1}{(1 - \sqrt{ab})^n \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,A_0 - B_0\right)}$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}}\right)^n \ge \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}\,A_0 + B_0}{\sqrt{\frac{b}{a}}\,A_0 - B_0} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$\left(\frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}}\right)^n \ge \frac{\sqrt{b}\,A_0 + \sqrt{a}\,B_0}{\sqrt{b}\,A_0 - \sqrt{a}\,B_0} \;/ \ln$$

$$n \ln \frac{1 + \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}} \ge \ln \frac{\sqrt{b}\,A_0 + \sqrt{a}\,B_0}{\sqrt{b}\,A_0 - \sqrt{a}\,B_0}$$

$$n \ge \frac{\ln(\sqrt{b}\,A_0 + \sqrt{a}\,B_0) - \ln(\sqrt{b}\,A_0 - \sqrt{a}\,B_0)}{\ln(1 + \sqrt{ab}) - \ln(1 - \sqrt{ab})}$$

Scanned with CamScanner

Могуће је и одредити победника битке само на основу знака константе C_2. Посматрајмо претходне једнакости за A_n и B_n:

$$\begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = C_1 \lambda_1^n v_1 + C_2 \lambda_2^n v_2$$

$$\Updownarrow$$

$$A_n = \overbrace{\frac{1}{2}\left(A_0 + \sqrt{\frac{a}{b}} B_0\right)\underbrace{(1-\sqrt{ab})}_{\in(0,1)}{}^n}^{>0,\ \xrightarrow{n\to\infty} 0_+} + \overbrace{\frac{1}{2}\left(A_0 - \sqrt{\frac{a}{b}} B_0\right)(1+\sqrt{ab})^n}^{1^\circ\ \xrightarrow{n\to\infty} \pm\infty}$$

$$B_n = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} A_0 + B_0\right)(1-\sqrt{ab})^n}_{>0,\ \xrightarrow{n\to\infty} 0_+} - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} A_0 - B_0\right)(1+\sqrt{ab})^n}_{2^\circ\ \xrightarrow{n\to\infty} \pm\infty}$$

$\left[\begin{array}{l} a, b \in (0,1) \\ \Rightarrow \lambda_1 = 1-\sqrt{ab} < 1 \\ \quad \lambda_2 = 1+\sqrt{ab} > 1 \end{array}\right.$

$C_2 > 0$: $1^\circ \to +\infty$
$2^\circ \to -\infty$ $\Rightarrow$ A_n побеђује

$C_2 = 0$: $A_n, B_n \xrightarrow{n\to\infty} 0_+$ $\Rightarrow$ нерешено

$C_2 < 0$: $1^\circ \to -\infty$
$2^\circ \to +\infty$ $\Rightarrow$ B_n побеђује

Scanned with CamScanner

(18) Нелинеарне диференцијалне једначине - логистичко пресликавање.

За разлику од линеарних модела, нелинеарни могу ~~моделирати~~ испољити комплексније понашање попут хаоса и бифуркација.

Погледајмо пример логистичке једначине:

$$\frac{dy}{dt} = by(1-y), \quad y(0)=y_0 \in (0,1)$$

Ојлеровом методом за нумеричко решавање диференцијалних једначина првог реда добијамо израз:

$y_{n+1}=y_n+hby_n(1-y_n)$, $h=t_{i+1}-t_i$ (временски корак за Ојлерову методу)

[Што је h мање, мања је грешка методе, што је b веће, конвергенција ка стационарном решењу је бржа.]

Уведимо смену $y_n = \frac{1+hb}{hb}x_n$:

$$\frac{1+hb}{hb}x_{n+1} = \frac{1+hb}{hb}x_n + hb\frac{1+hb}{hb}x_n\left(1-\frac{1+hb}{hb}x_n\right) \Big/ \cdot \frac{hb}{1+hb}$$

$$x_{n+1} = x_n + hbx_n\left(1-\frac{1+hb}{hb}x_n\right)$$

$$x_{n+1} = x_n\left(1+hb\left(1-\frac{1+hb}{hb}x_n\right)\right)$$

$$x_{n+1} = x_n(1+hb-(1+hb)x_n)$$

$$x_{n+1} = x_n(r-rx_n), \quad r=1+hb$$

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n)$$

[Додатном сменом $z_n=\frac{r}{2}(1-2x_n)$ добијамо $z_{n+1}=z_n^2+c$]

У случају да је $r\in[0,4]$, са $x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$ ~~слика~~ се врши пресликавање са интервала $[0,1]$ на интервал $[0,1]$. Тада се ово назива логистичко пресликавање.

Одредимо интервал за x_0:

$$y_0 \in (0,1) \Rightarrow x_0 = \frac{hb}{1+hb}y_0 \in (0,1)$$

Одредимо граничну вредност за x_n:

$$y_n \xrightarrow{n\to\infty} 1 \Rightarrow x_n = \frac{hb}{1+hb}y_n = \frac{r-1}{r}y_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{r-1}{r}$$

претпоставка да нумеричко решење има исту граничну вредност као аналитичко, питање ?

Гранична вредност зависи од r вредности hb - уколико је она превелика, нећемо имати конвергенцију ка решењу већ осциловање и хаотично понашање.

Добићемо да је потребан корак $h \le \frac{2}{b}$ да би се обезбедила конвергенција ка решењу.

Scanned with CamScanner

Логистичко пресликавање $x_{n+1} = r x_n (1 - x_n)$, $x_0 \in (0,1)$, заправо представља итеративни поступак за решавање једначине $x = rx(1-x) \equiv g(x)$.

$x = rx - rx^2$

$rx^2 + x - rx = 0$

$x(rx + 1 - r) = 0$

$x = 0 \vee x = \frac{r-1}{r}$

За $r \in [0,1]$ има само једно решење $x = 0$, а за $r \in (1,4]$ има решења $x = 0$ и $x_r = \frac{r-1}{r}$.

Испитајмо конвергенцију итеративног процеса у околини решења x_r:

$g'(x) = r(1-x) - rx = r(1-2x)$

$|g'(x)| < 1$:

$-1 < r\left(1 - 2\underbrace{\frac{r-1}{r}}_{x_r}\right) < 1$

$-1 < r - 2r + 2 < 1$

$-1 < 2 - r < 1$

$-3 < -r < -1$

$1 < \boxed{r < 3}$

већ посматрамо $r \in (1,4]$

$$\frac{|g(x_1) - g(x_2)|}{|x_1 - x_2|} = |g'(\xi)|, \ \xi \in (x_1, x_2)$$

Лагранжова теорема о средњој вредности

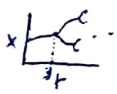
$r < 3 \Rightarrow |g'(x_r)| < 1 \Rightarrow g$ је оператор контракције за $r < 3$

Теорема о непокретној тачки

$\Rightarrow$ итеративни процес конвергира у околини решења (тј. ка x_r).

За $|g'(x_r)| > 1$ итеративни процес не може конвергирати ка x_r и тада може доћи до хаотичног понашања.

За $|g'(x_r)| = 1$, тј. $r = 3$, долази до удвајања тачке нагомилавања, тј. бифуркације.



(Овај бифуркациони дијаграм испољава фракталне особине)

Што се тиче стабилности нумеричке методе, из смене $r = 1 + hh$ следи $r = 1 + hh \leq 3 \Rightarrow hh \leq 2 \Rightarrow h \leq \frac{2}{h}$. Дакле, да би осигурали стабилност методе, морамо узети корак $h \leq \frac{2}{h}$.

Scanned with CamScanner

19. Чудни атрактори.

Анализирајући мале промене у орбитама комета, француски астроном Хенон дошао је до математичког модела представљеног ~~...~~ нелинеарном диференцном једначином другог реда:

$$x_{n+1} = b x_{n-1} + 1 - a x_n^2, \quad x_0 = x_1 = 0$$

За параметре $a = 1{,}4$ и $b = 0{,}3$, овај низ се понаша хаотично. У оваквим случајевима, понекад је могуће уочити неке правилности уз помоћ трансформације проблема, нпр. подизања на вишу димензију.

Тако је Хенон увео смену $y_n = b x_{n-1}$ и тиме добио систем две диференцне једначине ~~...~~ првог реда:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - a x_n^2,$$
$$y_{n+1} = b x_n,$$
$$x_1 = 0,\ y_1 = b x_0 = 0$$
$$x_0 = 0$$

Ово се може посматрати као пресликавање из Oxy равни у саму себе ($(x_n, y_n) \longrightarrow (x_{n+1}, y_{n+1})$).

На основу Јакобијана овог пресликавања, можемо утврдити да се пресликавањем било какве фигуре на Oxy равни њена површина смањује. Узастопним таквим пресликавањем добијамо да низ тачака конвергира скупу мере нула.

$$\cancel{J = \begin{bmatrix} -2ax_n \end{bmatrix}} \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2ax_n & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|J| = -2ax_n \cdot 0 - b = -b = -0{,}3$$

← свака наредна фигура је 30% површине претходне

Scanned with CamScanner

Скуп тачака нагомилавања у динамичким системима назива се атрактор. Уколико атрактор има необичну, чес и фракталну структуру, он се назива чудни атрактор.

У овом случају, Хеноновa атрактор је чудан. Он има фракта структуру – наиме, зумирањем видимо бесконачно много нових слојева (који подсећају на лиснато тесто).

Scanned with CamScanner

20. Фрактали. Мандебротов и Жулија скупови.

Фрактали су скупови који увећавањем (у смислу зумирања) личе (не морају бити скроз исти) на полазни скуп.

Код фракталних кривих често нас интересује њихова дужина. За класичне глатке (непрекидно диференцијабилне) криве, дужину смо могли да одредимо уз помоћ криволинијског интеграла. Ово је могуће јер довољним зумирањем у околину једне тачке, ту околину не би могли да разликујемо од праве линије (тј. зато што важи $f(x+h) = hf'(x) + o(h)$). Међутим, фракталне криве најчешће немају ту особину.

Посматрајмо пример Кохове пахуљице – почињемо од једнакостраничног троугла. У свакој итерацији одсецамо средњу трећину свих страница и над њом конструишемо одговарајући једнакостранични троугао:

Можемо приметити да сваком итерацијом увећавамо дужину пахуљице фактором $\frac{4}{3}$, па следи да је њена гранична дужина бесконачна. Ово је честа појава код фракталних кривих.

Још једна особина која се посматра је фрактална (Хаусдорфова) димензија. Она се рачуна на следећи начин – опишимо скуп тачака (нпр. фракталне криве) ~~једним~~ квадратом (нека он у овом случају буде јединични). Изделимо тај квадрат на мрежу ~~на~~ квадратића дужине h (пошто је квадрат јединични, биће укупно $\frac{1}{h} \cdot \frac{1}{h} = \frac{1}{h^2}$ квадратића у мрежи). Нека је N број квадратића којих имају пресечне тачке са полазним скупом. Тада је $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{h}}$ фрактална (Хаусдорфова) димензија скупа и за Кохову пахуљицу је приближно једнака 1,2619... (ово се односи на димензију границе пахуљице без унутрашњости).

$\frac{\ln 4}{\ln 3}$

Манделбротов скуп

Посматрајмо низ $z_{n+1} = z_n^2 + c$, где је $c = a + ib$ неки комплексан број, а $z_0 = 0$.

Уколико је низ z_n ~~конвергира~~ ограничен за неко c, тада тачка c припада Манделбротовом скупу, а ако дивергира, односно бесконачно, онда не припада.

Бојењем тачака које припадају Манделбротовом скупу на комплексној равни можемо уочити његову фракталну структуру. Могуће је и бојење комплемента скупа неком другом палетом боја ради постизања лепог ефекта. Наиме, важи да ако је $|z_{n_0}| > 2$, за неко n_0, тада низ z_n дивергира. Боју можемо изабрати на основу индекса n_0 где се ова вредност прво достиже.

Битно је напоменути и да је Манделбротов скуп повезан (било које две тачке из скупа можемо повезати кривом потпуно садржаном у скупу).

Јулија скупови

Опет ~~посматрајмо~~ низ $z_{n+1} = z_n^2 + c$, али овај пут ~~посматрајмо~~ фиксирајмо вредност c, а мењајмо почетну вредност z_0. Ако је низ ~~конвергира~~ ограничен за неко z_0, тада оно припада конкретном Јулија скупу, а у супротном не припада. Јулија скупова има бесконачно много (колико и вредности за c) и нису сви повезани као Манделбротов скуп. Наиме, може се показати да уколико c припада Манделбротовом скупу, одговарајући Јулија скуп ће бити повезан, док ако не припада, биће неповезан. Најзанимљивији Јулија скупови се добијају за вредности c које су близу границе Манделбротовог скупа.

Scanned with CamScanner

21. Итерација система функција.

Посматрајмо низ $z_{n+1} = z_n^2 + c$ за добијање Жулија скупа (фиксирано c, променљива z_0). Овај низ се може посматрати као итеративно пресликавање $F: z \to z^2 + c$. Разлагањем тог пресликавања на реалну и имаginарну компоненту за $z = x + iy$ и $c = a + ib$ добијамо пресликавање $F(x,y) = (x^2 - y^2 + a, 2xy + b)$.

$$z^2 + c = (x+iy)^2 + a + ib = x^2 + i2xy - y^2 + a + ib,$$

Нека би помислили да би могли да нађемо атрактор овог пресликавања и тиме добијемо границе одговарајућег Жулија скупа, међутим, ова претпоставка је погрешна. Наиме, понављањем овог пресликавања, тачке близу границе Жулија скупа нас гурају ка бесконачности уместо да формирају неки атрактор. Из овог разлога је идеја да заправо посматрамо инверзно пресликавање, тј. уместо $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ посматрамо $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F^{-1}(x_n, y_n)$. Атрактор овог пресликавања биће граница одговарајућег Жулија скупа, али проблем је тај што ово пресликавање није једнозначно - свака тачка ће се заправо сликати у 4 различите тачке, тј. важиће:

$$F^{-1}(x,y) = \left(\pm f(x,y), \pm \frac{y-b}{2f(x,y)}\right), \text{ где је } f(x,y) = \sqrt{\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{2}}.$$

У случају да у свакој итерацији обрађујемо све четири гране, доћи ће до комбинаторне експлозије, док ако бирамо једну грану, добићемо само део границе Жулија скупа. Као добро решење се показало увођење вероватноћа p_1, p_2, p_3, p_4 којима се у свакој итерацији бира одговарајућа грана.

Scanned with CamScanner

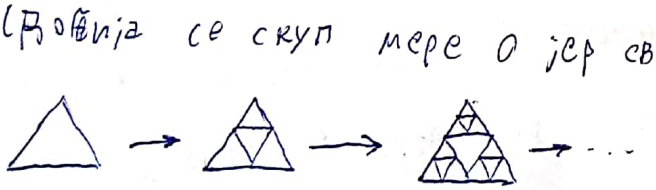
Претходни поступак се може уопштити на следећи начин:

Нека су дата пресликавања $F_1(x,y), F_2(x,y), \dots, F_k(x,y)$ и вероватноће ~~дат~~ $p_1, p_2, \dots, p_k$ такве да је њихова сума једнака 1. Тада је $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F_i(x_n, y_n)$ $i=\overline{1,k}$ где се пресликавање F_i бира са вероватноћом p_i.

~~Још један пример су троугао Сјерпинског~~

Још један пример је троугао Сјерпинског:

Почнемо од једнакостраничног троугла, у свакој итерацији избацујемо средњу четвртину свих троуглова (добија се скуп мере 0 јер сваким кораком множимо површину фактором $\frac{3}{4}$).



$F_1(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $F_2(x,y) = \left(\frac{2x+1}{4}, \frac{y+1}{2}\right)$, $F_3(x,y) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$; $(x_0, y_0) = (1,$

Још један пример је и Барнслијева папрат где имамо пресликавања F_1, F_2, F_3, F_4.

Scanned with CamScanner

22. Ћелијски аутомати.

Нека је дат скуп неких елемената, тзв. ћелија. Ћелије могу бити у једном од више предефинисаних стања (у најједноставнијем случају имамо два стања, нпр. 0 и 1 или мртво и живо).

Зависно од димензије простора, ћелије могу бити организоване геометријски на више начина. Тако, на пример, оне могу бити поређане у низ, у квадратну мрежу, у хексагоналну мрежу, у кошкасту тродимензионалну мрежу итд.

За ћелију се дефинише нека околина која ће утицати на промену њеног стања (ћелије ван те околине немају утицај на посматрану ћелију). Тако је нпр. у квадратној мрежи могуће дефинисати област од 8 суседних ћелија (област може бити и већа, и мања, не мора бити ни симетрична).

За сваки распоред стања ћелије и њене околине потребно је дефинисати стање које ће та ћелија узети у следећем временском тренутку. Ова пресликавања се зову правила.

Један овакав систем се назива ћелијски аутомат.

Посматрајмо пример једнодимензионих ћелијских аутомата (ћелије организоване у низ) са два дефинисана стања (0 и 1) и околином од две суседне ћелије. Таквој околини има $2^3 = 8$ и за сваку је потребно дефинисати правило. Пример једног таквог правила је:

(3 ← број ћелија у околини; 2 ← број стања)

111	110	101	100	011	010	001	000
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	0	0	1	1	1	1	0

Примећујемо да постоји $2^8 = 256$ различитих правила. Математичар Волфрам се досетио да овакве аутомате можемо нумерисати тако што се низ бинарних цифара из горње врсте конвертује у декадни број, па би претходни пример био аутомат број 30.

(8 ← број околина; 2 ← број стања)

Scanned with CamScanner

Идеја је да се, за неки почетни распоред стања ћелија, нове генерације приказују графички на вертикалној (дискретној) временској оси. За већину оваквих аутомата не добијамо занимљиве резултате, али за неке су резултати занимљиви (аутомат 90 даје троугао Сјерпинског за једну активну почетну ћелију, аутомат 150 даје шаре сличне оним на шкољкама итд.).

Сложенију варијанту представљају дводимензионални аутомати. У овом случају, нека је у питању квадратна мрежа са ћелијама које имају 2 стања и околину ћелије чине 8 суседних ћелија. Околина за овакве аутомате има $2^9 = 512$, а аутомата (правила) 2^{512}. Због овога је непрактична нумерација као код једнодимензионих. У овом случају се и правила најчешће записују другачије (битно је само покрити све околине), па је ово један пример:

Правило 1 од 8 – уколико у околини од 8 ћелија постоји тачно једна жива ћелија, посматрана ћелија постаје жива у следећој генерацији, а у супротном остаје у стању у којем је била (са овим правилом ћелије не могу да умру).

Пример комплекснијег аутомата је Конвејова игра живота:

1° жива ћелија окружена са мање од две живе ћелије умире
2° жива ћелија окружена са две или три живе ћелије наставља да живи
3° жива ћелија окружена са више од три живе ћелије умире
4° мртва ћелија окружена са тачно три живе ћелије постаје жива

Може се увести и више стања где се посматра протекло време (број генерација) од умирања.

Scanned with CamScanner

Могуће је и моделирати проблем грабљиваца и плена са ћелијским аутоматом еквивалентним моделу Лотка-Волтера.

Имамо три стања - трава, зец и лисица, а правила су:

1° Случајно изабрати једну ћелију (ћелију 1) и случајно изабрати још једну, њој суседну ћелију (ћелија 2).

2° Ћелија 1 лисица, ~~ћ~~ ћелија 2 зец - зец бива поједен, а ћелија 2 постаје лисица са вероватноћом p_1.

3° Ћелија 1 лисица, ћелија 2 трава или лисица - лисица умире са вероватноћом p_2.

4° Ћелија 1 зец, ћелија 2 трава - зец се размножава са вероватноћом p_3.

5° Ћелија 1 трава - садржај ћелије 2 се премешта на 1 (кретање

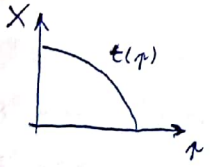
Scanned with CamScanner

23. Економски модели - монопол.

Наш циљ, у улози произвођача неке робе, је да остваримо оптимални профит (који се постиже услед оптималне производње).

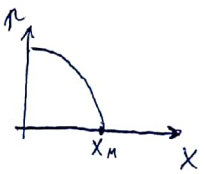
Претпоставимо да за нашу робу постоји тржиште (велики број потенцијалних купаца. Уколико смо ми једини произвођач те робе, овакав економски модел се назива монопол. Неки примери монопола су ЕПС или монопол услед патента над производом. У случају да постоје два произвођача, то се зове дуопол, а општије за више од једног произвођача назив је олигопол.

Што се тиче количине продате робе, у ознаци X, логично је претпоставити да ће са мањом ценом бити продато више робе, а са већом ценом мање робе. Из овог разлога количину продате робе X можемо представити као монотоно опадајућу функцију цене робе p, тј. $X = t(p)$. Функција t се зове функција тражње.



[За цену p продаћемо X робе]

Често је корисна и њој инверзна функција, тзв. инверзна функција тражње $p = p(X)$. Знамо да она постоји због монотоности функције тражње $t(p)$.



[Да би продали X робе треба ставити цену p]

Scanned with CamScanner

У случају монопола, функцију профита за количину робе X можемо представити као разлику прихода и расхода за X, тј.

$$\Pi(X) = \underset{\text{приходи}}{R(X)} - \underset{\text{расходи}}{C(X)} = \overset{\text{цена}}{p(X)} \cdot X - C(X)$$

У случају да је X мало, $\Pi(X)$ ће такође бити мало, а могуће и негативно. За велико X, тачније $X \geq X_m$, биће $p(X) = 0$, па опет важи исто. Максимум функције Π се налази негде између, а одредићемо га са условом $\Pi'(X) = 0$.

$$\Pi'(X) = R'(X) - C'(X) = 0 \Rightarrow R'(X) = C'(X)$$

У економији, $R'(X)$ се назива гранични приход и представља промену прихода за јединично увећање робе $(X \to X+1)$. Слично важи и за $C'(X)$, тј. гранични расход.

Претпоставимо да су $p(X)$ и $C(X)$ линеарне функције, тј.

$$p(X) = a - bX, \quad C(X) = \underset{\text{иницијални расходи (нпр. изградња фабрике)}}{d} + \underset{\text{јединични расходи (трошак за производњу једног предмета)}}{eX}, \quad a, b, d, e > 0.$$

Тада важи:

$$\Pi(X) = (a - bX)X - (d + eX)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X} = a - 2bX - e = 0 \Rightarrow X_{opt} = \frac{a-e}{2b}, \quad \Pi_{opt} = \Pi(X_{opt}) = \frac{(a-e)^2}{4b} - d.$$

Претпоставка је да су параметри a, b, d, e такви да X_{opt} и Π_{opt} не буду негативни.

Scanned with CamScanner

24. Економски модели – Курнов дуопол.

Навести 1. страну из 23.

У случају да имамо два произвођача, у питању је дуопол. У зависности од понашања сваког произвођача постоје различити модели, а један од њих је Курнов дуопол. Наиме, он претпоставља опортунистичко понашање произвођача, што значи да сваки од произвођача прилагођава производњу у односу на другог, тежећи да максимизује свој профит.

Уколико први произвођач производи X_1 неке робе, а други X_2 те исте робе, функција профита првог произвођача гласи:

$$\Pi_1 = \underbrace{p}_{\text{инв. ф-ја тражње}}(X_1+X_2)X_1 - \underbrace{C_1(X_1)}_{\text{расходи}}$$

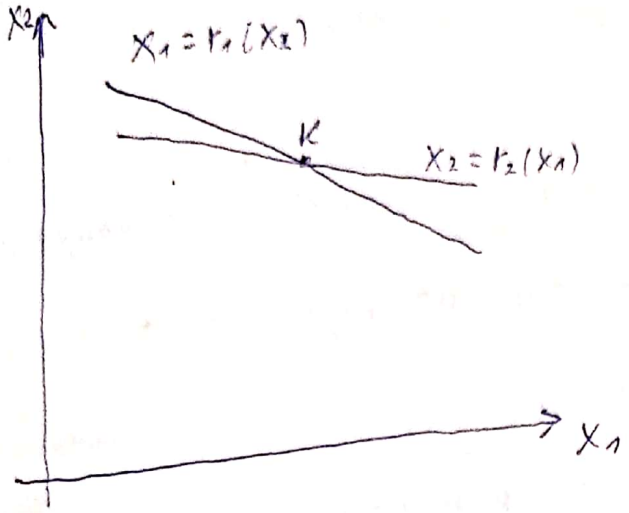
За неко фиксирано X_2, оптималну производњу за првог произвођача се може добити решавањем $\frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1}=0$. Решавањем ове једначине за свако X_2 добијамо тзв. функцију реакције произвођача 1 $X_1 = r_1(X_2)$, која враћа оптималну производњу за произвођача 1 ако произвођач 2 производи X_2 те исте робе.

Аналогним поступком, за произвођача 2 добијамо:

$$\Pi_2 = p(X_1+X_2)X_2 - C_2(X_2), \quad X_2 = r_2(X_1).$$

Уколико функције $r_1(X_2)$ и $r_2(X_1)$ представимо кривама на Ox_1x_2 равни, оне ће врло вероватно (у пракси) имати пресечну тачку (X_1^K, X_2^K). Ова тачка се зове тачка Курнове равнотеже и у њој важи $X_1^K = r_1(X_2^K)$, $X_2^K = r_2(X_1^K)$. Из овога следи да након достизања Курнове равнотеже, даљих прилагођавања производње неће бити. Ово решење је стабилно и узастопним цикличним прилагођавањем се долази до њега (под условом да почетно стање није равнотежно).

Scanned with CamScanner



Пример:

$p(X) = a - bX$

$C_1(X) = d_1 + e_1 X$

$C_2(X) = d_2 + e_2 X$

$$\Pi_1 = (a - b(X_1 + X_2))X_1 - (d_1 + e_1 X_1)$$

$$\Pi_2 = (a - b(X_1 + X_2))X_2 - (d_2 + e_2 X_2)$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial X_1} = a - b(X_1 + X_2) - bX_1 - e_1 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial X_2} = a - b(X_1 + X_2) - bX_2 - e_2 = 0$$

$$a - bX_2 - e_1 = bX_1 + bX_1$$

$$X_1 = \frac{a - bX_2 - e_1}{2b} = \frac{a - e_1}{2b} - \frac{X_2}{2} \equiv r_1(X_2)$$

$$X_2 = \frac{a - e_2}{2b} - \frac{X_1}{2} \equiv r_2(X_1)$$

Решавањем система по X_1 и X_2 добијамо $X_1^K = \frac{a - 2e_1 + e_2}{3b}$, $X_2^K = \frac{a - 2e_2 + e_1}{3b}$

Што се тиче предности монопола у односу на дуопол - монопол доноси већи профит произвођачу, а дуопол мање цене производа за купце.

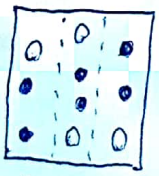
Scanned with CamScanner

25. Моделирање кор избора.

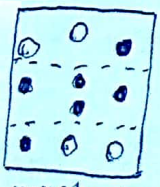
Пре самих избора, одређују се изборне јединице и мандати. Изборна јединица је географски простор на којем постоји једна изборна листа (листа учесника у изборима) и на којем се, на основу гласова, одређује ком кандидату ће припасти колико мандата. Изборне јединице се затим деле на бирачка места. Ово се ради из техничких разлога, као нпр. да се не би стварале гужве (обично се додељује до 1000 гласача по бирачком месту).

Што се тиче система поделе мандата, он може бити <u>већински</u>, где сви мандати одлазе учеснику који је освојио највише гласова, <u>пропорционални</u>, где се мандати деле пропорционално освојеном броју гласова (број мандата тада често није цео број и у том случају се он заокружује на одређени начин) или <u>мешовити</u>.

Претпоставимо да смо тренутно на власти и да смо испитивањем јавног мњења закључили да ће већина људи гласати за опозицију. У циљу да спречимо пораз, прекројићемо изборне јединице тако да тамо где побеђујемо, то урадимо са тесном већином, а тамо где губимо, губимо убедљиво. Овакав процес прекројавања изборних јединица се назива gerrymandering.



Губимо
1:2 или 0:3



Победујемо
2:1 (иако имамо само 40% гласова)

Scanned with CamScanner

Процена резултата у току изборне ноћи:

На основу неколико претходних избора, што сличнијим садашњим, делимо бирачка места у изборној јединици на тзв. стратуме. Стратум је скуп бирачких места (не морају бити географски близу) која су по резултатима претходних избора имала ~~сличну~~ међусобно сличну расподелу гласова. Након тога се из сваког стратума узима одређени број бирачких места чија је расподела гласова из претходних година што ближа просеку у том стратуму. Укупно се (кроз све стратуме) изабере 300 - 500 таквих репрезентативних бирачких места која заједно називамо репрезентативни узорак.

Након иницијалног пребројавања гласова, поуздани човек са бирачког места нам јавља резултате. На основу репрезентативног узорка из неког стратума (бар 50% репр. места) врши се екстраполација гласова за читав тај стратум, па се тако резултати из сваког стратума сабирају и то нам даје добру процену.

Гласање је могуће организовати и на други начин. Наиме, нека у изборном процесу учествује коначан број гласача и бар 3 кандидата (исто коначан број). Сваки гласач треба да састави своју ранг листу кандидата (слично као на Евровизији где су државе гласачи).

Дефинишимо релацију ранг праћа (преференције, бољи од) $\succ$:

1° За свако x и y, само једна од релација $x \succ y$, $y \succ x$, $x = y$ је тачна. По дефиницији је $x \prec y \iff y \succ x$.

2° За свако x важи $x = x$.

3° За свако x, y, z, $x \succeq y, y \succeq z \Rightarrow x \succeq z$, при чему је $x = z$ акко $x = y$ и $y = z$. По дефиницији је $x \succeq y \iff (x \succ y) \vee (x = y)$ и $x \preceq y \iff y \succeq x$.

Scanned with CamScanner

Претпоставимо рационалност гласача (сваки гласач рангира све кандидате у уређену листу) и слободну вољу гласача (сваки гласач има право да рангира кандидате у било ком редоследу, невезано од осталих гласача). Тада можемо увести појам изборног система и праведног изборног система.

Изборни систем је детерминистичка процедура која на основу ранг листи свих гласача даје једну (групну) тотално уређену листу кандидата.

Праведни изборни систем треба да задовољи следеће аксиоме:

1° (слободна воља) Могућа је свака која комбинација гласачких рангирања.

2° (непристрасност) Сви кандидати се исто третирају, тј. изборни систем је инваријантан на произвољне пермутације кандидата. (пермутацијом списка се не мења резултат)

3° (консензус) Ако је $(x \succeq y)_i$ (i-ти гласач је овако рангирао) за свако i, тада је $x \succeq y$ (финални списак), где је $x = y$ акко је $(x=y)_i$ за свако i.

4° (независност од небитних алтернатива) Ако у два изборна круга сви гласачи рангирају x и y међусобно исто, тада су и изборни резултати између x и y исти, независно од промене у рангирању неких других кандидата. Другим речима, ако важи $(x \succeq y)_i \Leftrightarrow (x \succeq y)_i$, тада важи и $(x \succeq y) \Leftrightarrow (x \succeq y)$, где је $\succeq$ релација рангирања у другом кругу. ~~Пример: ка~~ Пример: кандидати су x, y, z. Након првог круга је $x \succeq y \succeq z$, а $\succeq$ је затим дискваликификован, али остаје да важи $x \succeq y$.

5° (монотоност) Ако се у другом кругу повећа преференција x на y код гласача, исто се не може сменити у резултатима избора, тј. ако важи $(x \succeq y)_i \Rightarrow (x \succeq y)_i$ за свако i, тада важи и $(x \succeq y) \Rightarrow (x \succeq y)$.

6° (нема диктатора) Не постоји гласач такав да само од њега зависи исход избора, тј. не постоји i такво да је $(x \succeq y) \Leftrightarrow (x \succeq y)_i$.

Scanned with CamScanner

Међутим, теорема Kenneth Arrow-а каже да је немогуће направити овакав систем за више од два кандидата.

Пре доказа теореме, уведимо дефиницију кворума и помоћну лему везану за њега:

Кворум V је скуп гласача за x против y уколико важи да ако сви гласачи из скупа V гласају $(x \succcurlyeq y)_i$, тада су и резултати избора $x \succcurlyeq y$, без обзира на остале гласаче. Ако је $x = y$, тада је $(x = y)_i$ за свако $i \in V$.

Уколико претпоставимо да важе аксиоме праведних избора, за произвољан скуп V можемо проверити да ли је кворум анализирајући само изборе где је $(x \succcurlyeq y)_i$ за $i \in V$ и $(x \prec y)_i$ за $i \notin V$.

Ово следи директно из аксиоме 5° (монотоност).

Лема: Ако су скупови S и T кворуми, тада је и $S \cap T$ кворум.

Доказ:

Нека су x, y, z кандидати. Претпоставимо да важи:

$(x \succcurlyeq y)_i,\ i \in S,\ (x \prec y)_i,\ i \notin S$

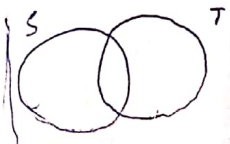
$(y \succcurlyeq z)_i,\ i \in T,\ (y \prec z)_i,\ i \notin T$

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ кворум} \Rightarrow x \succcurlyeq y \\ T \text{ кворум} \Rightarrow y \succcurlyeq z \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{транзитивност}} x \succcurlyeq z \quad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} (x \succcurlyeq y)_i,\ i \in S \\ (y \succcurlyeq z)_i,\ i \in T \end{array}\right\} \Rightarrow (x \succcurlyeq y)_i,\ (y \succcurlyeq z)_i,\ i \in S \cap T \xRightarrow{\text{транзитивност}} (x \succcurlyeq z)_i,\ i \in S \cap T \quad (**)$$

~~Претпоставимо~~ Покажимо да важи $(x \prec z)_i,\ i \notin S \cap T$:

$$\left.\begin{array}{l} (x \succcurlyeq y \succcurlyeq z)_i,\ i \in S \cap T \\ (z \succ x \succcurlyeq y)_i,\ i \in S \setminus T \\ (y \succcurlyeq z \succ x)_i,\ i \in T \setminus S \\ (z \succ y \succ x)_i,\ i \notin S \cup T \end{array}\right\} \Rightarrow (x \prec z)_i,\ i \notin S \cap T \quad (***)$$



$\Rightarrow x \succcurlyeq z \ (*),\ (x \succcurlyeq z)_i,\ i \in S \cap T \ (**),\ (x \prec z)_i,\ i \notin S \cap T \ (***) \Rightarrow S \cap T$ је кворум.

Scanned with CamScanner

Доказ теореме Kenneth Smith-а:

Нека је G скуп свих гласача. На основу аксиома 1° и 3°, он је кворум. Приметимо да је и скуп $G \setminus \{i\}$ кворум. Уколико не би било, исход би зависио само од ~~свих~~ гласача i, што нарушава аксиому 6° (нема диктатора). Нека је скуп V неки кворум и нека је $G_i = G \setminus \{i\}$ за неко $i \in V$ (G_i је кворум). Тада је ~~$V \cap G_i$ такође~~ $V \cap G_i = V \setminus \{i\}$ такође кворум (лема). Узастопним понављањем овог поступка добијамо да је празан скуп кворум, што је противно аксиоми 3° (консензус). Time је доказ завршен (уколико важи првих 5 аксиома, мора постојати диктатор).

Пример:

$$\left.\begin{array}{ll} 45 \text{ гласова} & x \succ y \succ z \\ 40 \text{ гласова} & y \succ z \succ x \\ 30 \text{ гласова} & z \succ x \succ y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

x има највише гласова, па је победник. Међутим, дисквалификовањем кандидата y добијемо:

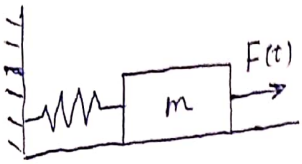
$$\left.\begin{array}{ll} 45 \text{ гласова} & x \succ z \\ 75 \text{ гласова} & z \succ x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

z је победник и аксиома 4° је нарушена

Scanned with CamScanner

26. Осциловање - механички и електрични модел.

Посматрајмо наредни механички систем:



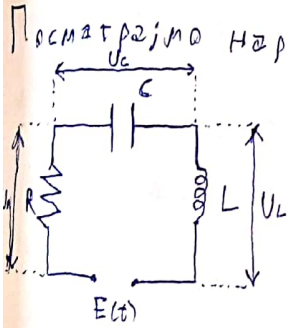
Тело масе m је везано за непокретан зид опругом са коефицијентом еластичности $k>0$. Коефицијент трења тела са подлогом је $\ell \geq 0$. Такође, на тело може да делује нека спољна сила $F(t)$.

Нека је $x=0$ положај тела у стању мировања када је $F(t)=0$. Сила опруге је, у случају малих промена положаја, једнака $-kx(t)$. Сила трења ~~је~~ једнака је $-\ell x'(t)$. По II Њутновом закону (у случају константне масе тела) укупна сила која делује на тело једнака је производу његове масе и убрзања, тј. $mx''(t)$. Она је такође једнака и збиру свих појединачних сила које делују на тело, па следи:

$$mx''(t) = -kx(t) - \ell x'(t) + F(t)$$

$$\Leftrightarrow \quad mx'' + \ell x' + kx = F(t)$$ диф. једначина 2. реда са константним коефицијентима

Посматрајмо наредно електрично коло:



Коло се састоји из генератора електромоторне силе (извора), отпорника отпорности R, кондензатора капацитивности C и калема индуктивности L.

Из другог Кирхофовог закона (сума падова напона у затвореном електричном колу је 0) следи $U_R + U_C + U_L = E(t)$.

Из Омовог закона ($I = \frac{U}{R}$ јачина струје) следи $U_R = RI$. Важи и $U_C = \frac{Q}{C}$ наелектрисање и $U_L = L\frac{dI}{dt}$, па враћањем овога у претходну формулу добијамо:

$$RI + \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = E(t)$$

Scanned with CamScanner

$$RI + \frac{1}{C}Q + L\frac{dI}{dt} = E(t) \quad (*) \quad \text{(преписано)}$$

Диференцирањем по времену добијамо:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt} \qquad I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

Међутим, применом формуле $I = \frac{dQ}{dt}$ у $(*)$, добијамо:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Овакав модел је заправо еквиваленан претходно наведеном за механички систем:

$$m\frac{d^2x}{dt} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

$$L\frac{d^2Q}{dt} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Еквивалентан модел се може добити и у случају да имамо тело масе m везано за таваницу опругом.

Scanned with CamScanner

27. Непригушене осцилације и резонанца.

Нацртати механички систем из 26.

Посматрајмо модел за механички систем:

$$mx'' + \ell x' + kx = F(t)$$

Нека у систему нема отпора подлоге, тј. нека је $\ell = 0_m$ и нека је спољна сила ~~ред~~ периодична, тј. $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Добијамо модел:

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t.$$

Решавање:

$$x = x_h + x_p$$

$$mx_h'' + kx_h = 0$$

$$k(r) = mr^2 + k = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow x_h(t) = C_1 e^{0t} \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 e^{0t} \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t$$

$$= \boxed{C \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad tg\,\varphi = \frac{C_2}{C_1}}$$

Нашли смо хомогено решење x_h (у случају да нема спољне силе). Сада треба да нађемо једно партикуларно решење:

1° $\omega \neq \omega_0$ ($i\omega$ није корен $K(r)$)

$x_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ Ово је облик решења јер је слободни члан $F_0\cos\omega t$ облика $A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$.

$$x_p' = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$$

$$x_p'' = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t$$

$$mx_p'' + kx_p = m(-a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t) + k(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$$

$$= \cos\omega t(-ma\omega^2 + ka) + \sin\omega t(-mb\omega^2 + kb) = F_0\cos\omega t$$

$$\Rightarrow -mb\omega^2 + kb = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$-ma\omega^2 + ka = F_0 \Rightarrow a = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0}{m(\frac{k}{m} - \omega^2)} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C \cdot \cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\cos\omega t$$

Приметимо да је у овом случају $x(t)$ ограничена периодична функција.

Scanned with CamScanner

2° $\omega = \omega_0$ ($i\omega = i\omega_0 = i\sqrt{\frac{k}{m}}$ јесте корен $K(r)$ вишеструкости 1)

$x_p(t) = t^1(a\cos\omega t + b\sin\omega t)$

$x_p' = \ldots$ Ганалоган поступак

$x_p'' = \ldots$ као у 1°

$$\boxed{x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow x(t) = C\cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin\omega_0 t$$

Приметимо да за разлику од случаја 1°, у случају 2° функција $x(t)$ више није ограничена (због множења са t):

Када $\omega \to \omega_0$, амплитуда функције ~~постаје~~ $x(t)$ постаје све већа, па је она и даље ограничена. Када $\omega = \omega_0$, ~~чак и када~~ функција постаје неограничена чак и када је F_0 јако мало. Овај ефекат се зове резонанца.

Неки примери где резонанца узрокује проблеме су вибрације моста које могу довести до његовог пада, микрофонија итд.

Scanned with CamScanner

28. Пригушене осцилације и практична резоненца.

Посматрати механички систем из (26.)

Посматрајмо модел за механички систем:

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

Претпоставка је да постоји отпор подлоге, тј. важи $c>0$, као и то да је спољна сила $F(t)$ периодична, тј. $F(t)=F_0\cos\omega t$.

Уведимо смене $p=\frac{c}{2m}$, $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$mx''+2pmx'+m\omega_0^2x=F_0\cos\omega t \quad /:m$$

$$x''+2px'+\omega_0^2x=\frac{1}{m}F_0\cos\omega t$$

Решавање:

$$x=x_h+x_p$$

$$x_h''+2px_h'+\omega_0^2x_h=0$$

$$K(r)=r^2+2pr+\omega_0^2=0$$

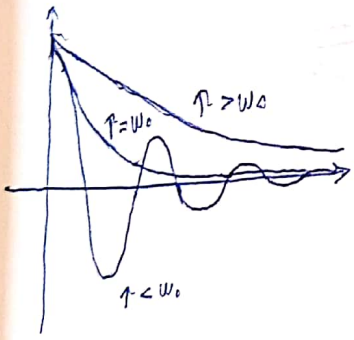
$$\Rightarrow r_{1,2}=\frac{-2p\pm\sqrt{4p^2-4\omega_0^2}}{2}=-p\pm\sqrt{p^2-\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow x_h(t)=\begin{cases} C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t}, & p>\omega_0 \\ C_1e^{-pt}+C_2te^{-pt}, & p=\omega_0 \\ e^{-pt}(C_1\cos\omega_1t+C_2\sin\omega_1t), & p<\omega_0 \end{cases}$$

$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-p^2}$

Добијемо чланове разлике због изласка i испред корена, тј. $\sqrt{p^2-\omega_0^2}=\sqrt{-(\omega_0^2-p^2)}=i\sqrt{\omega_0^2-p^2}$

$$\Rightarrow \boxed{x_h(t)\xrightarrow{t\to\infty}0 \text{ (у сва три случаја)}}$$



У случају $p=\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$, систем се јако брзо враћа у полазни положај у коначно је претходно био избачен из равнотеже. Тада се за систем каже да је критично пригушен. За мале вредности пригушења ($p<\omega_0$) долази до осцилација са све мањом амплитудом до враћања у почетни положај, а за велико пригушење ($p>\omega_0$), враћање у почетни положај је доста спорије, али нема осцилација.

Scanned with CamScanner

Пронађимо и партикуларно решење

$$x_p(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t = C\cdot\cos(\omega t - \varphi),\ C = \sqrt{a^2+b^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$x_p = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

$$x_p' = -a\omega\sin\omega t + b\omega\cos\omega t$$

$$x_p'' = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t$$

$$x_p'' + 2p x_p' + \omega_0^2 x_p = -a\omega^2\cos\omega t - b\omega^2\sin\omega t$$
$$- 2pa\omega\sin\omega t + 2pb\omega\cos\omega t$$
$$+ \omega_0^2 a\cos\omega t + \omega_0^2 b\sin\omega t$$
$$= \cos\omega t(-a\omega^2 + 2pb\omega + \omega_0^2 a) + \sin\omega t(-b\omega^2 - 2pa\omega + \omega_0^2 b) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\Rightarrow -b\omega^2 - 2pa\omega + \omega_0^2 b = 0$$
$$b(\omega_0^2 - \omega^2) = 2pa\omega$$
$$b = \frac{2pa\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$-a\omega^2 + 2pb\omega + \omega_0^2 a = \frac{F_0}{m}$$
$$-a\omega^2 + \frac{(2p\omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2}a + \omega_0^2 a = \frac{F_0}{m}$$
$$a\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{(2p\omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \frac{F_0}{m}$$
$$a\,\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2p\omega)^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{F_0}{m}$$

$$a = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F_0}{m((\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2p\omega)^2)},\quad b = \frac{2p\omega F_0}{m((\omega_0^2-\omega^2) + (2p\omega)^2)}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2F_0^2 + (2p\omega)^2F_0^2}{m^2((\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2p\omega)^2)^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2p\omega)^2}}$$

$$\Rightarrow x_p(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2p\omega)^2}}\cos(\omega t - \varphi),\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \dots$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \xrightarrow{t\to\infty} x_p(t) \quad (\text{jer } x_h \xrightarrow{t\to\infty} 0)$$

Приметимо да је x_p ограничена и периодична функција. Она има највећу амплитуду (која представља максималну удаљеност тела од равнотежног положаја) када функција $g(\omega) = (\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2p\omega)^2$ достиже минимум, а то је у тачки $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$.

$$g'(\omega) = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8p^2\omega = 0$$
$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2p^2) = 0$$
$$\omega \neq 0 \quad \omega^2 = \omega_0^2 - 2p^2$$
$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2p^2}$$

За мале вредности пригушености p, ова вредност је близка ω_0, тј. $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} \xrightarrow{p\to 0} \omega_0$. Она се назива практична резонантна фреквенција а $C = C(\omega)$ практична резонантна амплитуда.

Scanned with CamScanner