

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Conception et mise en œuvre de commande à temps réel

---

## - Rapport 1 : ANALYSE THÉORIQUE -

---

*Auteurs :*

Lucien RAKOTOMALALA  
David TOCAVEN

*Encadrants :*

Sylvain DUROLA  
Frédéric GOUAISBAUT  
Yann LABIT





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Modélisation</b>	<b>2</b>
1.1 Choix du formalisme et de la modélisation . . . . .	2
1.2 Maquette et équations physiques . . . . .	2
1.2.1 Maquette : . . . . .	2
1.2.2 Équations physique . . . . .	2
1.2.3 Linéarisation . . . . .	4
1.2.4 Invariance . . . . .	4
1.3 Modèle de niveau 0, modèle EE0 . . . . .	4
1.4 Espace d'état d'ordre 3, modèle EE1 . . . . .	5
1.5 Espace d'état d'ordre 2, modèle EE2 . . . . .	5
<b>2 Analyse</b>	<b>6</b>
2.1 Analyse des modèles . . . . .	6
2.1.1 Stabilité . . . . .	6
2.1.2 Commandabilité . . . . .	6
2.1.3 Observabilité . . . . .	7
2.1.4 Modèle d'ordre 4, EE0 . . . . .	7
2.1.5 Modèle d'ordre 3, EE1 . . . . .	7
2.1.6 Modèle d'ordre 2, EE2 . . . . .	7
2.2 Analyse temporelles et fréquentielle . . . . .	7
2.2.1 Modèle d'ordre 4,EE0 . . . . .	7
2.2.2 Modèle d'ordre 3, EE1 . . . . .	7
2.2.3 Modèle d'ordre 2,EE2 . . . . .	7
<b>3 Synthèse de commande</b>	<b>8</b>
3.1 Commande du système EE2 . . . . .	8
3.1.1 Rédaction du cahier des charges et démarche de réponse . . . . .	8
3.1.2 Observateur ordre plein sur EE2 . . . . .	8
3.2 Adaptation de l'état de EE1 . . . . .	8
<b>4 Planification de la suite de l'asservissement</b>	<b>10</b>
<b>Annexes</b>	<b>12</b>
<b>TITRE</b>	<b>12</b>
TITRE . . . . .	12
<b>Annexe 2 - TITRE</b>	<b>13</b>

# Introduction

Dans cet UE, nous devons réaliser la commande d'un système temps réel du prototypage à l'implémentation sur un microcontrôleur : nous devons asservir un banc de moteurs à courant continu à l'aide d'un micro-contrôleur C167.

Ce premier rapport contient toute la partie théorique. Celle-ci est décomposée dans les trois premiers chapitres et un dernier chapitre qui détaille la suite des étapes à réaliser.

Le *chapitre 1 : Modélisation* contient l'étude physique qui nous a été donné en cours, le modèle le plus précis, non linéaire et variant, les différentes simplifications de celui-ci.

Ensuite, dans le *chapitre 2 : Analyse*, nous avons effectué une analyse de nos différents modèles afin de maîtriser l'impact de nos simplifications, étudier les performances de notre systèmes et définir celles souhaitées. Nous avons réalisé cela grâce, autant que nous avons pu, à une approche théorique et grâce à des simulations.

Le *chapitre 3 : Synthèse de commande*, qui est le dernier chapitre de la partie théorique, contient la conception de l'asservissement et l'étude des performances de celle-ci sur les différents modèles de notre système.

Dans le *chapitre 4 : Planification de la suite de l'asservissement*, nous détaillons comment nous allons testé la validité de nos modèles par rapport au modèle physique et les différentes étapes de la mise en œuvre sur micro-contrôleur. Ce chapitre nous permettra d'organiser au mieux notre démarche afin que la commande implémentée respecte bien les contraintes temps réel, garantisse la stabilité et les performances attendues tout en étant adaptée au support d'implémentation et au moteur asservi.

# Chapitre 1

## Modélisation

### 1.1 Choix du formalisme et de la modélisation

#### *Écriture des modèles sous forme d'espace d'état*

Notre modélisation sera basée sur les modèles physiques qui décrivent les différents constituants de notre système de procédé : deux moteurs couplés l'un à l'autre par un arbre simple. L'un étant générateur de force mécanique et l'autre générateur de courant afin de faire office de charge (il dissipe son énergie sur une résistance). Il y a aussi un tachymètre couplé à l'arbre principal par un réducteur. Nos modèles seront donc des modèles de connaissances.

Nous avons choisis de faire une modélisation espace d'état pour différentes raisons. La première est que cette représentation permet de d'étudier facilement la valeur des différents états (l'étude de la stabilité asymptotique, par exemple, est simplifiée en dans un modèle espace d'état). Elle permet aussi de garder les états non observables et non commandables dans le modèle, une modélisation par fonctions de transferts ne le permet pas. Ce choix nous permet aussi, pour la suite, de concevoir un asservissement par retour d'état basé observateur, qui est l'asservissement que nous avons choisi. Le choix d'un modèle de connaissance améliore aussi l'analyse de l'influence des différents paramètres du modèle, ce qui nous permettra d'affiner notre modèle lors des tests sur le système réel.

### 1.2 Maquette et équations physiques

#### 1.2.1 Maquette :

Voici, figure 1.1, un schéma électrique et physique du banc qui fait office de procédé dans notre asservissement. Le circuit électrique de gauche correspond au Moteur à Courant Continu 1 (MCC) qui délivre la puissance mécanique à partir d'une tension d'entrée  $V_M$ . Celle-ci est l'entrée de notre procédé. Le schéma électrique de droite représente le MCC 2, générateur de puissance électrique qui fait office de charge en alimentant une résistance  $R_{CH}$ . Entre ces deux schémas électriques, se trouve une représentation de l'arbre, des forces qu'il subit, du réducteur et du tachymètre qui délivre une tension proportionnelle à la position du moteur, c'est le signal  $V_s$  que nous étudions en tant que sortie.

#### 1.2.2 Équations physique

Voici les différentes équations décrivant notre procédé :

- Équations des moteurs :

$$V_m(t) = Ri_1(t) + L\frac{di_1(t)}{dt} + e_1(t) \quad (1.1)$$

$$e_2(t) = (R + R_{CH})i_2(t) + L\frac{di_2(t)}{dt} \quad (1.2)$$

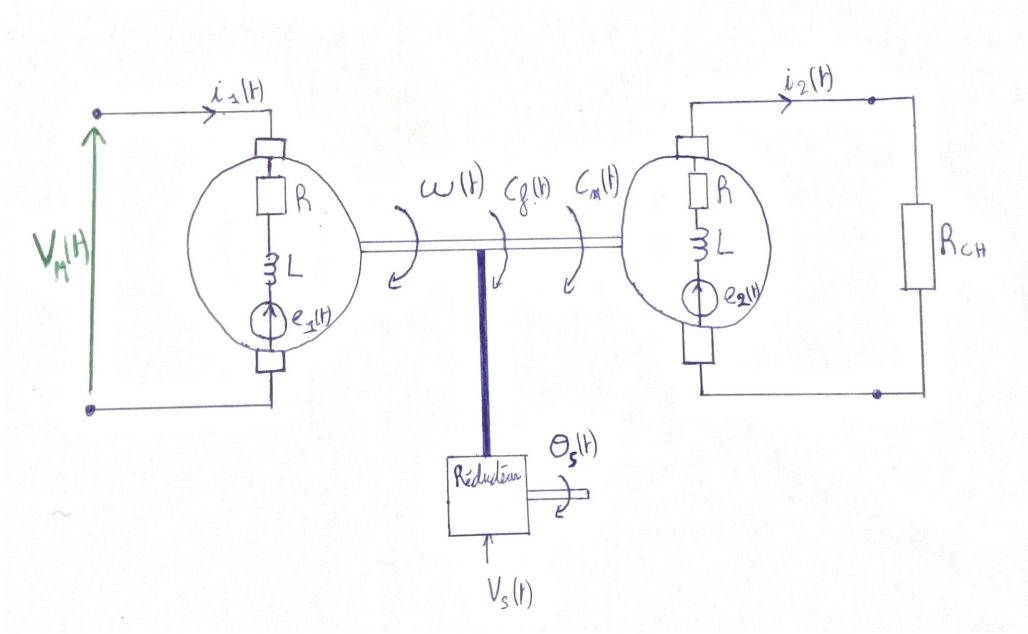


FIGURE 1.1 – Schéma électrique/physique du banc moteur

- Équations banc :

$$J_2 \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) + C_f(t) \quad (1.3)$$

$$\frac{d\theta_s(t)}{dt} = \omega(t) \quad (1.4)$$

$$e_1(t) = K_e \omega(t) \quad (1.5)$$

$$e_2(t) = K_e \omega(t) \quad (1.6)$$

$$C_m(t) = K_c i_1(t) - K_c i_2(t) \quad (1.7)$$

$$C_f(t) = -\mu \omega(t) - C_0(t) \quad (1.8)$$

$$R_{CH}(t) = R_{CHn} + r R_{CH}(t) \Delta_1 \quad (1.9)$$

$$C_0(t) = -\text{sign}(C_m(t)) C \quad (1.10)$$

$$V_s(t) = K_r K_s \theta_s(t) \quad (1.11)$$

$$V_g(t) = K_g \omega(t) \quad (1.12)$$

Où :

$R$  La résistance de l'induit aux moteurs.

$L$  L'inductance de l'induite des moteurs.

$i_1(t), i_2(t)$  Respectivement le courant dans les moteurs 1 et 2.

$e_1(t), e_2(t)$  Respectivement la force électromotrice des moteurs 1 et 2.

$R_{CH}(t)$  Résistance de charge.

$J_2$  Inertie totale (somme des inerties du rotor, du réducteur et de la charge).

$\omega_s(t)$  Vitesse radiale de l'arbre.

$\theta_s$  Position de rotation de l'arbre.

$C_m(t)$  Couple de l'arbre.

$C_f(t)$  Couple de frottement.

$K_e$  Constante de force électromagnétique.

$K_c$  Constante de couple.

$\mu$  Coefficient de frottement visqueux.

$C_0(t)$  Couple de frottement sec si rotation.

$R_{CHn}$  Résistance de charge nominale.

$r R_{CH}$  Rayon de l'incertitude de la résistance de charge.

$\Delta_1$  Perturbation de la résistance de charge bornée en  $[-1; 1]$ .

$K_r$  Facteur de réduction.

$K_s$  Constante du potentiomètre.

$K_g$  Constante de la génératrice tachymétrique.

$V_g(t)$  Tension reflétant la vitesse de rotation de l'arbre. Sortie de performance non mesurée.

$C$  Couple de frottement sec si  $\omega(t)$  assez grande.

### 1.2.3 Linéarisation

Les équations ci-dessous permettent de former un modèle du procédé. Néanmoins, l'équation 1.10 exprime une non linéarité sur les frottements secs du banc moteur. Afin d'avoir un modèle linéaire du moteur, nous avons transformé cette non linéarité en incertitude. Ainsi nous exprimons :

$$C_0(t) = C_{0n} + rC_0\Delta_2 \quad (1.13)$$

Où :

$C_{0n}$  Couple de frottement sec nominal.

$rR_{CH}$  Rayon d'incertitude du Couple de frottement sec.

$\Delta_1$  Perturbation du couple de frottement sec bornée en  $[-1; 1]$ .

Nous avons maintenant des équations linéaires mais deux d'entrées présentent des incertitudes dues aux perturbations  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  respectivement liés à la température de la résistance de charge et à la non linéarité du couple de frottement sec.

### 1.2.4 Invariance

Nous souhaitons exprimer le modèle du procédé sous la forme d'un espace d'état linéaire et invariant, donc il faut rendre invariant nos équations. Pour cela, nous allons considérer que la résistance de charge  $R_{CH}(t)$ , exprimée dans l'équation 1.9 et  $C_0(t)$ , dans l'équation 1.13 valent leurs valeurs nominales.

$$R_{CH}(t) = R_{CHn} \quad (1.14)$$

$$C_0(t) = C_{0n} \quad (1.15)$$

Nous pouvons maintenant former un modèle linéaire et invariant.

## 1.3 Modèle de niveau 0, modèle EE0

Notre modèle présente 4 dynamiques, nous avons donc 4 états dans notre vecteur d'état.

Le vecteur d'état choisit est :

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \Omega_m \\ \Theta_m \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

L'entrée  $u(t)$  du modèle est  $u(t) = V_m(t)$ .

$$\text{Les sorties sont } y(t) = \begin{bmatrix} V_g(t) \\ V_s(t) \end{bmatrix}.$$

Le modèle d'ordre 4 vaut donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 & -\frac{K_e}{L} \\ 0 & -\frac{(R+R_{ch})}{L} & 0 & -\frac{K_e}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_c}{J_2} & \frac{K_c}{J_2} & 0 & \frac{\mu}{J_2} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & K_g \\ 0 & 0 & K_r K_s & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases} \quad (1.17)$$

## 1.4 Espace d'état d'ordre 3, modèle EE1

Afin de faciliter la création d'une commande, nous avons retiré l'état  $i_2(t)$  de l'état de la modélisation. Il permettra une validation intermédiaire.

L'état vaut maintenant

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1 \\ \Omega_m \\ \Theta_m \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

L'entrée et les sorties n'ont pas changées.

L'espace d'état, d'ordre 3, vaut :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{K_e}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_e}{J_2} & 0 & \frac{\mu}{J_2} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K_g \\ 0 & K_r K_s & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{cases} \quad (1.19)$$

## 1.5 Espace d'état d'ordre 2, modèle EE2

Pour correspondre avec un modèle de comportement, nous allons à nouveau réduire la représentation d'état (1.19) pour obtenir un modèle d'ordre 2. Pour cela, nous allons annuler l'effet des dynamiques des courants  $i_1$  et  $i_2$  qui sont beaucoup plus grandes que les dynamiques de  $\omega$  et  $\theta$ , qui sont celles que nous sommes capable de mesurer et que nous souhaitons asservir. Ainsi nous avons un espace d'état où il sera plus facile de concevoir un retour d'état. Le système d'ordre 3 servira donc de modèle permettant une validation intermédiaire entre celui d'ordre 2 et celui d'ordre 4.

Le vecteur d'état vaut maintenant :

$$x(t) = \begin{bmatrix} \Omega_m \\ \Theta_m \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Le modèle espace d'état d'ordre 2 vaut :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{(K_e K_e)}{J_2 R} - \frac{\mu}{J_2} \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} \frac{K_e}{J_2 R} \\ 0 \end{pmatrix} V_m(t) \\ Y(t) = \begin{pmatrix} 0 & K_g \\ K_r K_s & 0 \end{pmatrix} X(t) \end{cases} \quad (1.21)$$



# Chapitre 2

## Analyse

Dans ce chapitre, nous allons dans une première partie, étudier la stabilité de nos différentes modélisations (espace d'état d'ordre 4, 3 et 2), puis leurs commandabilités et observabilités. Dans une seconde partie, nous étudierons les performances dynamiques des différents modèles à travers une analyse temporelles et fréquentielle. Dans l'ensemble du chapitre sera abordé l'impact des simplifications effectués sur les modèles espace d'état d'ordre 3 et 2. Comme nous souhaitons asservir le procédé en vitesse et non en position, nous étudierons la sortie de performance  $V_g(t)$  des modèles et non  $V_s(t)$ .

### 2.1 Analyse des modèles

#### 2.1.1 Stabilité

Nous avons décidé d'étudier la stabilité asymptotique afin de savoir si l'ensemble des états de nos modèles sont stables et non uniquement ceux qui sont observables comme en stabilité BIBO.

Les valeurs propres de notre système d'ordre 4 sont : (calculé à l'aide de matlab)

$$0; -132749,8861; -4,0655; -7748,0483 \quad (2.1)$$

Nous remarquons que les valeurs propres sont toutes à partie réelle négatives, le système d'ordre 4 est donc asymptotiquement stable.

Les valeurs propres de notre système d'ordre 3 sont : (calculé à l'aide de matlab)

$$0; -7748,0484; -3,9516 \quad (2.2)$$

Nous remarquons que les valeurs propres sont toutes à parties réelles négatives, le système d'ordre 3 est donc asymptotiquement stable.

Cela était prévisible car le modèle d'ordre 3 est une simplification du modèle d'ordre 4, qui est stable. Nous remarquons aussi que la troisième valeur propre du système d'ordre 3, qui normalement doit être similaire à la troisième valeur propre du système d'ordre 4 a légèrement variée. Cette différence est une première conséquence de la perte d'une dynamique engendrée par la simplification.

Les valeurs propres de notre système d'ordre 2 sont : (calculé à l'aide de matlab)

$$0; -3,9506 \quad (2.3)$$

Nous remarquons que les valeurs propres sont toutes à parties réelles négatives, le système d'ordre 2 est donc asymptotiquement stable.

Comme précédemment, cette conclusion était prévisible, néanmoins on remarque une autre conséquence de la simplification sur la seconde valeur propre qui est légèrement différente de celle du modèle d'ordre 3.

#### 2.1.2 Commandabilité

L'étude de la commandabilité d'un système nous permettra de savoir quels états sont commandables, c'est à dire qu'il sera possible de modifier la dynamique qu'ils représentent par un asservissement. Cette étude se fera uniquement sur l'espace d'état d'ordre 4 car les deux autres modèles découlent de celui-ci. Un système (sous forme d'espace d'état) est commandable, d'après le critère de Kalman, si la matrice de commandabilité  $C_m$  est de rang plein donc égale à la dimension de A.

Où,  $C_m = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  Nous avons étudié la commandabilité sur matlab et le résultat est que :

$$\text{rang}(C_m) = n = 4$$

Donc le système est commandable. Cela nous permet de mettre en place un retour d'état.

### 2.1.3 Observabilité

L'étude de l'observabilité d'un système nous permettra de savoir quels états sont observables, c'est à dire s'il est possible de déterminer la valeur des états à partir de mesures de la sortie. Cette étude se fera uniquement sur l'espace d'état d'ordre 4 car les deux autres modèles découlent de celui-ci. Un système (sous forme d'espace d'état) est observable, d'après le critère de Kalman, si la matrice d'observabilité  $\mathcal{O}$  est de rang plein donc égale à la dimension de A.

$$\text{Où, } \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{Nous avons étudié l'observabilité sur matlab et le résultat est que :}$$

$$\text{rang}(\mathcal{O}) = \dim(A) = 4$$

Donc le système est observable, néanmoins intuitivement ce résultat semble faux.

## 2.2 Analyse temporelle et fréquentielle

Nous avons étudié les performances de notre système

### 2.2.1 Modèle d'ordre 4, EE0

Gain statique :  $K_0 = 1.465$  Pôles :  $-1.327 \times 10^5$ ,  $-7748$  et  $-4.066$  Zéros :  $-1.327 \times 10^5$  Compensation pôle/zéro  $\rightarrow$  transfert d'ordre 2 Marge de gain (figure)

### 2.2.2 Modèle d'ordre 3, EE1

Gain statique :  $K_0 = 1.508$  Pôles :  $-7748$  et  $-3.952$  Zéros : Aucun Pôle en  $10^5$  bye bye mais c'est pas grave, il n'était pas observable. Marge de gain (figure)

### 2.2.3 Modèle d'ordre 2, EE2

Gain statique :  $K_0 = 1.508$  Pôles :  $-3.951$  Zéros : Aucun Poles en  $-7748$  bye bye, il faudrait expliquer que la commande doit faire attention a ne pas l'exiter, il est très dangereux. Marge de gain (figure)

Proposition : analyse des réponses de  $V_g$  et  $V_s$ , pas de transfert ici (sauf sur MATLAB)

### 2.2.4 Modèle d'ordre 4, EE0

### 2.2.5 Modèle d'ordre 3, EE1

### 2.2.6 Modèle d'ordre 2, EE2

## Chapitre 3

# Synthèse de commande

### 3.1 Commande du système EE2

#### 3.1.1 Rédaction du cahier des charges et démarche de réponse

Après l'étude que nous venons de réaliser sur notre système, nous allons ici exprimer les attentes que doit réaliser la commande que nous allons implémenter. Nous souhaitons avoir :

- Erreur de position nulle.

Pour respecter, nous allons réaliser un placement de valeurs propres par retour d'état.

#### 3.1.2 Observateur ordre plein sur EE2

Pour pouvoir réaliser notre commande par retour d'état, nous devons tous d'abord reconstruire l'ensemble des états du système dont nous n'avons pas accès. Dans notre cas, nous disposons d'une mesure de la vitesse  $\Omega$  avec la tension de sortie  $V_s$  mais aucune information sur la position  $\Theta$ , l'implémentation d'un observateur est donc nécessaire pour au minimum reconstruire cet état.

Nous préférons reconstruire  $\Omega$  et  $\theta$  à partir de  $V_s$  et de l'entrée de EE2 pour simplifier les calculs nécessaires à sa construction. Il est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Hu(t) \\ \hat{x} = Mz(t) + Ny(t) \\ \epsilon = x - \hat{x} \end{cases}$$

où  $x$  représente l'état du système,  $\hat{x}$  l'état du système reconstruit et  $\epsilon$  l'erreur d'estimation à un temps  $t$ . Nous souhaitons contrôler la dynamique de ces paramètres pour pouvoir estimer correctement notre système. Pour cela, nous nous intéressons à :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ \Leftrightarrow \dot{\epsilon} &= Ax + Bu - F\hat{x} - Gy - Hu \text{ en considérant } M = 1 \text{ et } N = 0 \\ \Leftrightarrow \dot{\epsilon} &= Ax - F\hat{x} - GCx + u(B - H) \\ \dot{\epsilon} &= (A - GC - F)x + F\epsilon + u(B - H) \end{aligned}$$

Il vient alors  $F = A - GC$  et  $B = H$  pour obtenir  $\dot{\epsilon} = F\epsilon$ . Ainsi l'erreur d'estimation est autonome et ne dépend pas des entrées et sorties du système.

### 3.2 Adaptation de l'état de EE1

On a réorganisé les états de EE1 de façon à ce que les états observables soient en haut et les non observables en bas.

- États observables :  $\Omega_m$  et  $\Theta_m$ .
- État non observable :  $i_1$
- L'espace d'état est donc :

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \Omega_m \\ \Theta_m \\ i_1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Pour passer de  $X$  à  $\overline{X}$ , il faut faire une matrice de passage  $P_X$ .

$$P_X \quad / \quad \overline{X} = P_X \cdot X \quad (3.2)$$

$$P_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

Maintenant, nous devons calculer  $\overline{A}$ ,  $\overline{B}$ ,  $\overline{C}$ ,  $\overline{D}$  pour le nouvel espace d'état lié à  $\overline{X}$ .

$$\begin{cases} \overline{A} &= P^{-1}AP \\ \overline{B} &= P^{-1}B \\ \overline{C} &= CP \end{cases} \quad (3.5)$$

## Chapitre 4

# Planification de la suite de l'asservissement

# Annexes

## Annexe 1 - TITRE

## Annexe 2 - TITRE