Corso di Metodi Numerici per le Equazioni alle Derivate Parziali

Docente E. Carlini

Foglio di esercizi n. 1
Problemi iperbolici: Trasporto e Onde

Trasporto Si consideri l'equazione del trasporto nel dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} u_t(x,t) + c(x,t) \cdot Du(x,t) = 0 & (x,t) \in \ \Omega \times (0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & (x,t) \in \Omega \times \{0\} \\ u(x,t) = g(x,t) & (x,t) \in \partial\Omega^{in} \times [0,T] \end{cases}$$

con condizioni al bordo periodiche o con condizioni Dirichlet assegnate sulla frontiera inflow.

1. Scrivere un programmi che implementa i metodi **Up-wind, Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff** (in Matlab o C o Fortran) per approssimarne la soluzione. I programmi vanno strutturati in funzioni e dovranno chiedere in *input* il campo velocità, il dato iniziale u_0, il dominio spaziale, il tempo finale T, il passo spaziale Δx ed il passo temporale Δt, tramite un menù con una lista di possibile scelte.
È consigliato che il programma proponga, dopo aver acquisito Δx e $c(x,t)$, un valore per Δt che verifichi la condizione di stabilità CFL.

2. *Studio dell'errore*: quando la soluzione analitica del problema è nota, calcolare l'errore di discretizzazione dei diversi metodi in funzione di Δx e Δt nelle norme l^∞, l^1, e confrontarlo con le stime a priori previste dalla teoria. Osservare come cambia l'ordine dei metodi in funzione della regolarità della soluzione.

Caso scalare $d = 1$. Alcuni dati di di input su cui testare il programma

1. $\Omega = (-1, 3)$, velocità positiva e dati iniziali

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin(2\pi x) & -1 \le x \le 1 \\ 0 & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

e

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin(4\pi x) & -1 \le x \le 0 \\ 0 & 0 < x \le 3 \end{cases}$$

con condizioni periodiche.

2. $\Omega = (0, 7)$; velocità negativa,

$$u(x,0) = 0$$

con condizione al bordo inflow $g(t) = \sin(t)$.

3. $\Omega = (-2, 2)$ e dato iniziale

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{in } [-1.1] \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1-|x| & \text{in } [-1.1] \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

con velocità:

(a) $c = 1.3$,
(b) $c = -0.7$,
(c) $c(x) = x$,
(d) $c(x) = x^2$,
(e) $c(x) = \text{atan}(x)$,
(f) $c(x) = \sin(x)$,

con condizione Dirichlet omogenea sul bordo inflow.

Caso bidimensionale $d = 2$. Ecco alcuni esempi su cui testare il programma:

1. $\Omega = (-\pi,\pi)\times(-\pi,\pi)$, dato iniziale $u_0(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ e velocità $c(x,y) = (a,b)$ con a, b valori scalari costanti e condizioni al bordo periodiche
2. $\Omega = (-2,2)\times(-2,2)$, dato iniziale $u_0(x,y) = 0$, velocità $c(x,y) = (x,1)$ e condizioni Dirichlet sul bordo inflow con $g(x,y) = \max(1-5x^2, 0)$
3. $\Omega = (-2,2)\times(-2,2)$, dato iniziale $u_0(x,y) = \max(0.5-x^2-y^2, 0)$, velocità $c(x,y) = (-1,y)$ e condizioni Dirichlet omogenee sul bordo inflow
4. $\Omega = (-2,2)\times(-2,2)$, dato iniziale $u_0(x,y) = \max(1-|x-0.5|-|y-0.5|, 0)$ velocità $c(x,y) = (y,-x)$ e condizioni Dirichlet omogenee sul bordo inflow
5. $\Omega = (-1,1)\times(0,1)$, dato iniziale $u_0(x,y) = 0$, velocità $c(x,y) = (y,-x)$ e condizioni sul bordo inflow date da

$$g(x,y) = \begin{cases} G(r), & 0.35 \le r = \sqrt{x^2+y^2} \le 0.65 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $G(r) = \cos^2(5\pi\frac{2r+1}{3})$ oppure $G(r) = 1$.

Onde Si consideri l'equazione delle onde nel dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} u_{tt} - \gamma^2\Delta u = f & (x,t) \in \ \Omega \times (0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) & (x,t) \in \Omega \times \{0\}, \\ u_x(x,t) = v_0(x) & (x,t) \in \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Scrivere un programma che approssimi il problemadelle onde con condizioni al bordo periodiche, Dirichlet e assorbenti tramite il metodo **Leap Frog**. Nel caso unidomensionale confrontare la soluzione esatta con la soluzione approssimata calcolando l'ordine di convergenza nelle norme infinito, uno e 2.

Caso scalare $d = 1$. Alcuni dati di di input su cui testare il programma

1. Assumere $\Omega = (0, 1)$, $\gamma = 1$, $T = 5$, $u_0(x) = \sin(2\pi x)$, $v_0(x) = 0$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $f = 0$ verificare che la soluzione esatta risulta: $u(x, t) = 0.5(u_0(x-\gamma t)+u_0(x+\gamma t))$

2. Assumere $\Omega = (0, 2\pi)i$, $\gamma = 1$, $T = 5$, $u_0(x) = \cos(x)$, $v_0(x) = 0$,$f = 0$ condizioni al bordo periodiche verificare che la soluzione esatta risulta: $u(x, t) = 0.5(u_0(x - \gamma t) + u_0(x + \gamma t))$

3. Assumere $\Omega = (0, 1)$, $\gamma = 0.5$, $T = 5$, $u_0(x) = 0$, $v_0(x) = \sin(\pi x)$,$u(0, t) = u(1, t) = 0$,$f = 0$ verificare che la soluzione esatta risulta: $u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sin(\pi x) \sin(\frac{\pi}{2} t)$

4. Assumere $\Omega = (0, 10)$, $\gamma = 1$, $T = 10$, $u_0(x) = \mathrm{sech(x - 5)}^6/10$, $v_0(x) = 0$,$f = 0$ condrontare le condizione assorbenti con le condizioni Dirichlet.

Caso scalare $d = 2$. Alcuni dati di di input su cui testare il programma

1. Assumere $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$,$\gamma = 1$, $T = 5$,$u_0(x, y) = \mathrm{sech}(x^2 + y^2)$, $v_0 = 0$, $f = 0$, condizioni al bordo Dirichlet omogeneo,

2. Assumere $\Omega = (0, 10) \times (0, 10)$,$\gamma = 1$, $T = 10$, $u_0 = v_0 = 0$, condizioni al bordo Dirichlet omogeneo, sorgente concentrata nel centro del dominio $f = 20 \sin(3\pi/2)\delta_{(5,5)}$ (modificare assumendo condizioni assorbenti)