Euklidische Räume

Im Folgenden sei V stets ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

1. **Definition Bilinearform**
   Eine Abbildung $\gamma : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt **Bilinearform**, wenn sie linear in jedem Argument ist.

   (a) $\gamma(v_1 + v_2, w) = \gamma(v_1, w) + \gamma(v_2, w), \gamma(\lambda v, w) = \lambda\gamma(v, w) \forall v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$

   (b) analog im zweiten Argument

   Die Bilinearform γ heißt aymmetrisch, wenn $\gamma(v, w) = \gamma(w, v) \forall v, w \in \mathbb{R}$. Menge der Bilinearformen auf V ist definiert als Bil(V) .

2. **Definition Fundamentalmatrix**
   Sei $\gamma : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ eine BIlinearform auf V und $B := (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V. Die Matrix
   $$M_B(\gamma) = (\gamma(v_i, v_j))_{i,j}$$
   heißt **Fundamentalmatrix** von γ.
   Ist A eine weitere Basis von V, dann gilt die Transformationsmatrixformeö
   $$M_B(\gamma) = \left(T_A^B\right)^t M_A(\lambda) T_A^B,$$
   wobei T_A^B die entsprechende Transformationsmatrix darstellt. Sei nun $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine Basis von V. Die Abbildung
   $$\mathrm{Bil(V)} \longrightarrow M_{n,n}(\mathbb{R}), \gamma \longmapsto M_B(\gamma)$$
   ist ein Isomorphismus von R-Vektroräumen mit Umkehrabbildung
   $$M_{n,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Bil(V)}, G \longmapsto \gamma_B(G),$$
   wobei
   $$\gamma_B(G)(v, w) = a^t G b \text{ für } v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n, w = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

3. **Definition eines euklidischen Raumes**
   Sei γ eine symmetrische Bilinearform auf V. γ heißt positiv definit, wenn gilt
   $$\gamma(v, v) > 0 \forall v \in V, v \neq 0.$$
   Eine positiv definite symmetrische Bilinearform heißt ein **Skalarprodukt** auf V.
   EIn **euklidischer Raum** ist ein Paar (V, γ) bestehend aus einem endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und einem Skalarprodukt γ auf V.

4. **Definition Orthonormalbasis**
   Sei (V, γ) ein euklidischer Raum. Für $v \in V$ heißt
   $$||v|| := \sqrt{\gamma(v, v)}$$
   die **Norm** von v. Eine Basis $(v_1, \cdots, v_n)$ von V heißt eine **Orthonormalbasis von V**, wenn gilt:
   $$\gamma(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

(a) Jeder euklidische Raum besitzt eine Orthonormalbasis. Zur Bestimmung einer solchen kann das Gram-Schmidt-Verfahren verwendet werden

(b) Für doe Norm gelten

   i. die Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|\gamma(x,y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$,

   ii. die Dreiecksungleichung $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

   $\forall x, y \in V$.

5. **Beispiel:**
   $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standartskalarprodukt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \langle x, y\rangle = x^t y = x_1 y_1 + \cdots x_n y_n,$$

   gegeben. Hier ist

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

   die euklidisache Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Die kanonische Basis ist eine Orthonormalbasis vont $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

6. **Definition orthogonales Komplement**
   Sei (V, γ) ein euklidischer Raum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

$$U^{\perp} := \{v \in V | \gamma(v, u) = 0 \forall u \in U\}$$

   heißt das **orthogonale Komplemen** von U. Sind U, W Untervektorräume von V mit $V = U \oplus W$ und $\gamma(u, w) = 0$ $\forall u \in U, w \in W$, dann heißt V die **orthogonale direkte Summe** von U und W. Notation: $V = U \widehat{\oplus} W$. Für jeden Untervektorraum U von V ist $V = U \widehat{\oplus} U^{\perp}$.

7. **Definition orthogonal**
   Seien $(V, \gamma_V), (W, \gamma_W)$ euklidische Räume und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. f heißt **orthogonal**, wenn gilt:

$$\gamma_W(f(v_1), f(v_2)) = \gamma_V(v_1, v_2) \forall v_1, v_2 \in V.$$

   Eine Matrix $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ heißt **orthogonal**, wenn gilt:

$$A^t A = E_n.$$

   $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist genau dann orthogonal, wenn die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle), \ x \longmapsto Ax$$

   (a) Sei (V, γ) ein euklidischer Raum und $B = (v_1, \cdots, v_n)$ eine ONB von (V, γ). Dann ist die lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow (V, \gamma), e_i \longmapsto v_i$$

   ein orthogonaler Isomorphimus. D.h.: Jeder euklidischer Raum ist orgthogonal iosmorph zum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standartskalarprodukt.

   (b) Die Menge der orthogonalen $n \times n$-Matrizen bildet bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe, die **orthogonale Gruppe** $O(n)$. Die orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bilden hierin eine Untergruppe, die **spezielle orthogonale Gruppe** $SO(n)$.

8. **Satz adjungierte Abbildung**
   Sei (V, γ) ein euklidischer Raum und $f \in$ End(V) . Dann existiert genau eine lineare Abbildung $f* : V \longrightarrow V$ mit
   $$\gamma(v, f(w)) = \gamma(f*(v), w) \forall v, w \in V.$$
   Diese heißt die zu f **adjungierte Abbildung**. f heißt **selbstadjungiert**, wenn $f* = f$. Ist B eine ONB von(V, γ), dann isr
   $$M_B(f*) = M_B(f)^t.$$
   f ist genau dann selbstadjungiert, wenn $M_B(f)$ symmetrisch ist.

9. **Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen**
   Sei (V, γ) ein euklidischer Raum und $f \in$ End(V) ein sekbstadungierter Endomorphismus. Dann gibt es eine ONB von (V, γ) aus Eigenvektoren von f.

10. **Hauptachsentransformation**
    Sei A eine reelle symmetrische $n \times n$- Matrix, dann existiert eine orthogonale Matrix $T \in O(n)$, so dass $T^t AT$ eine Diagomnalmatrix ist.