

# Laboratorio 5: Realimentación de estados y linealización de modelos no lineales.

Galvis, David. López, Daniel.

{u1802584,u1802530}@unimilitar.edu.co

Universidad Militar Nueva Granada

**Resumen---** Los manipuladores robóticos son parte esencial en la industria de la automatización y se pueden controlar a través de distintos métodos, en este documento se realiza el modelado de un manipulador robótico conformado por un motor DC con constantes reales acoplado a una barra mediante una articulación flexible. Se controla el manipulador con retroalimentación para el sistema linealizado, que permite controlar la velocidad angular del brazo. Y se realiza un observador que permite controlar la posición del brazo.

**Abstract---** Robotic manipulators are an essential part of the automation industry and can be controlled through different methods. In this document, the modeling of a robotic manipulator made up of a DC motor with real constants coupled to a rod by a flexible joint is performed. The manipulator is controlled with feedback for the linearized system, which allows controlling the angular velocity of the arm. And an observer is made to control the position of the arm.

**Palabras clave---** Manipulador, Retroalimentación, Estado, Observador.

**Objetivo General---** Controlar un sistema no lineal usando retroalimentación y observadores de estado.

**Objetivos específicos--**

\* Comprobar el modelo matemático de la guía usando la teoría de Newton-Euler y Euler-Lagrange.

\* Encontrar la representación lineal de un

sistema no lineal, considerando los puntos de equilibrio y de operación.

\* Realizar un controlador por retroalimentación de estados que asegure error en estado estable igual a cero para entrada escalón, rampa y aceleración.

\* Diseñar el observador de estados que permita la estimación de los estados y la implementación del controlador.

## 1. INTRODUCCIÓN

### Marco teórico

Un sistema de control moderno puede tener muchas entradas y muchas salidas, y estas están interrelacionadas de manera compleja. Los métodos en el espacio de estado para el análisis y la síntesis de sistemas de control son más adecuados para tratar con sistemas con varias entradas y varias salidas que se requiere sean óptimos en algún sentido.

Este método se basa en la descripción del sistema en términos de  $n$  ecuaciones en diferencias o diferenciales de primer orden, que pueden combinarse en una ecuación matricial en diferencias o diferencial de primer orden. La utilización de la notación matricial simplifica en gran medida la representación matemática de los sistemas de ecuaciones.

Los métodos en el espacio de estado permiten incluir condiciones iniciales dentro del diseño. Ésta es una característica muy importante no contemplada en los métodos de diseño convencional [1].

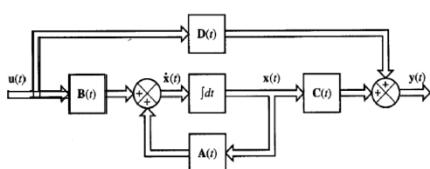
**Estado:** El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables (llamadas variables de estado) tales que el conocimiento de dichas variables en  $t = t_0$  junto con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ . Determinan por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ .

**Variables de estado:** Las variables de estado de un sistema dinámico son las que conforman el conjunto más pequeño de variables que determinan el estado del sistema dinámico. Si para describir en su totalidad el comportamiento de un sistema dinámico se requiere de por lo menos  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (de tal forma que una vez dada la entrada para  $t \geq t_0$  y el estado inicial en  $t = t_0$ , el estado futuro del sistema queda completamente determinado), entonces dichas  $n$  variables se consideran un conjunto de variables de estado.

**Vector de estado:** Si se necesitan  $n$  variables de estado para describir completamente el comportamiento de un sistema dado, entonces estas  $n$  variables de estado se pueden considerar como los  $n$  componentes de un vector  $\vec{x}$ . Dicho vector se conoce como vector de estado. Un vector de estado es, por tanto, un vector que determina en forma única el estado  $\vec{x}(t)$  del sistema para cualquier tiempo  $t \geq t_0$ , una vez dado el estado en  $t = t_0$  y especificada la entrada  $u(t)$  para  $t > t_0$ .

**Espacio de estado:** El espacio de  $n$  dimensiones cuyos ejes coordenados están formados por el eje  $x_1$ , eje  $x_2$ , ..., eje  $x_n$  se conoce como espacio de estado. Cualquier estado puede representarse por un punto dentro de dicho espacio de estado [2].

La **Imagen 1** muestra el diagrama básico de la representación por estados de sistema y las ecuaciones.



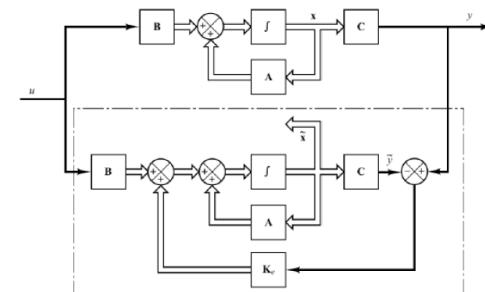
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

**Imagen 1:** Representación de estados de un sistema.

Los reguladores por retro de estado se basan en la formulación de la ley de control  $u = -K\vec{x}$ , donde  $\vec{x}$  son los estados del sistema (medibles y/o estimados según aplique), y  $K$  es la ganancia de realimentación. Si se quiere error de estado estable cero en el diseño por realimentación de, se hace un lazo adicional de realimentación, donde la salida es comparada directamente con la referencia deseada (Entrada(t)-Salida(t)). Luego debe ser este error multiplicado por una ganancia e integrado para ser sumado a los términos de realimentación antes mencionados.

**Observadores de Estado:** Cuando no se pueden medir todos los estados  $\vec{x}$  (como es el caso común), se puede construir un observador para estimarlos, mientras sólo se mide la salida  $(t) = C\vec{x}(t)$ . El esquema se muestra en la imagen 2 .



**Imagen 2 :** Representación de estados de un sistema.

El observador es básicamente una copia de la planta; tiene la misma entrada y casi siempre la misma ecuación diferencial. Un término extra compara la medición de la salida actual con la salida estimada  $\hat{y}(t)$ ; causando que los estados estimados se aproximen a los valores reales de los estados. La dinámica del error del observador está dada por los polos de  $(A - LC)$ .

[3]

## 2. MATERIALES

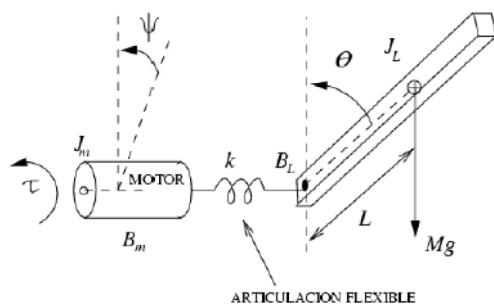
\* Software: MATLAB ®

\* Bata blanca.

### 3. PROCEDIMIENTO

Para la realización de la práctica, primero asignan valores a las constantes del manipulador robótico. Entonces tanto para el motor como para la barra se deben tener constantes que sean preferiblemente obtenidas de la práctica, ya que entonces la aplicación no tendría resultados incoherentes y podrían aplicarse a un caso el cual se vaya a probar físicamente.

El esquema del manipulador a modelar se encuentra en la **Imagen 3**.



**Imagen 3:** Manipulador robótico flexible modelo

#### Motor:

Para el motor DC que rota la barra, se utilizan las constantes físicas obtenidas de un motor real, durante una práctica en los laboratorios de pregrado de ingeniería de la Universidad Carnegie Mellon ubicada en Pittsburg, USA. [4]

Basandonos en las constantes referenciadas, el momento de inercia del motor es:

$$J_m = 3,2284 \times 10^{-6} \text{ [kg}\cdot\text{m}^2]$$

Y la fricción viscosa del motor:

$$B_m = 3,5077 \times 10^{-6} \text{ [N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}]$$

#### Barra:

Para la barra se debe tener en cuenta que no debe tener una masa muy grande, y dimensiones similares a la de un brazo de tamaño real.

Se escogen los siguientes valores:

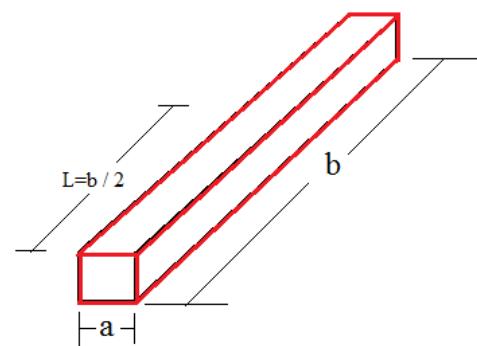
$$m = 1 \text{ kg.}$$

$$a = 0.05 \text{ m}$$

$$b = 1 \text{ m}$$

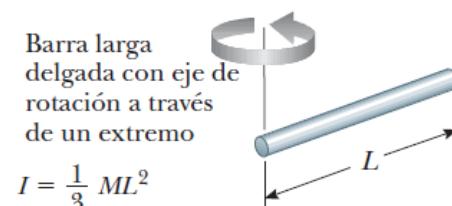
$$L = 0.5 \text{ m}$$

Siendo a y b las dimensiones de la barra que se observan en la **Imagen 4**.



**Imagen 4:** Manipulador robótico: modelo de la barra.

Y como el momento de inercia de la barra debe estar respecto de un extremo de esta (que es de donde va a estar acoplada al motor), se toma la ecuación de la tabla 10.2 del libro Física para ciencias e ingeniería [5] y que se encuentra en la **Imagen 5** de este documento.



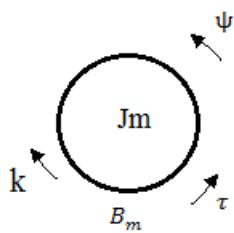
**Imagen 5:** Momento de inercia de una barra

Aplicando la ecuación nombrada, el momento de inercia para la barra de esta aplicación es el siguiente.

$$J_L = \frac{1}{3} (1 \text{ kg})(1 \text{ m})^2$$

$$J_L = 0.33 \text{ [kg}\cdot\text{m}^2] \psi$$

### Modelado motor Newton-Euler:



**Imagen 6 :** Diagrama del motor

De la **Imagen 6** se deriva la ecuación 1, se le resta la posición del eje del motor a la posición angular del brazo debido a que está acoplados.

$$J_m \ddot{\psi} + B_m \dot{\psi} - k(\theta - \psi) = \tau \quad (1)$$

### Modelado motor Euler-Lagrange:

Se toma el diagrama del motor presente en la imagen 6 para realizar el modelado por la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dq} \right) - \frac{dL}{dq} + \frac{dP}{dq} = Qi$$

En donde las variables tienen la siguiente equivalencia para este modelo.

$$\text{Lagrangiano: } L = K_e - V$$

$$\text{Energía cinética: } K_e = \frac{1}{2} J_m \dot{\psi}^2$$

$$\text{Energía potencial: } V = \frac{1}{2} K(\psi - \theta)^2$$

$$\text{Energía disipativa: } P = \frac{1}{2} B_m (\dot{\psi})^2$$

$$Qi = \text{Fuerzas generalizadas}$$

$$q = \text{Coordenada generalizada}$$

Donde para esta aplicación la coordenada generalizada será  $\psi$  y la fuerza generalizada  $\tau$ .

Primero se resuelve el lagrangiano.

$$L = \frac{1}{2} J_m \dot{\psi}^2 - \frac{1}{2} K(\psi - \theta)^2$$

Y se resuelven cada uno de los términos de la ecuación de Lagrange, para luego juntarlos, de manera que el desarrollo sea más simplificado. Se deriva el Lagrangiano primero respecto a  $\dot{\psi}$  y luego respecto al tiempo, resultando:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\psi}} \right) = \frac{d}{dt} (J_m \dot{\psi}) = J_m \ddot{\psi}$$

Ahora, se deriva el lagrangiano respecto al ángulo.

$$\frac{dL}{d\psi} = -k(\psi - \theta)$$

Y por último, la derivada de la energía disipativa respecto a la velocidad angular.

$$\frac{dP}{d\dot{\psi}} = B_m \dot{\psi}$$

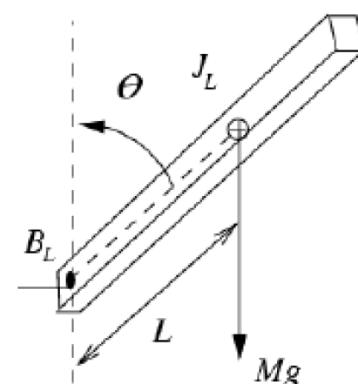
Y finalmente, se reemplazan los términos en la ecuación general:

$$J_m \ddot{\psi} - (-k(\psi - \theta)) + B_m \dot{\psi} = \tau$$

Simplificando y reorganizando queda la ecuación igual a la ecuación (1).

$$J_m \ddot{\psi} + B_m \dot{\psi} - k(\theta - \psi) = \tau$$

### Modelado barra Newton-Euler:

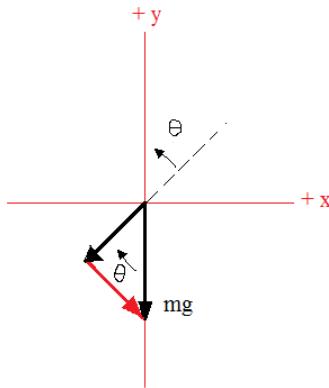


**Imagen 7 :** Variables y constantes de la barra

Donde se tiene la masa M, de 1kg, el momento de inercia y la fricción viscosa de la barra. Que son las constantes que influyen directamente para luego de realizar el modelado, reemplazar

para obtener datos verídicos.

Y el diagrama fuerzas, se toma del diagrama planteado para la barra de la **Imagen 7**:



**Imagen 8 : Variables y constantes de la barra**

En la **Imagen 8** se encuentra el diagrama de cuerpo libre de la barra, y se procede a obtener la ecuación (2).

$$- B_L \dot{\theta} - k(\theta - \psi) - mgL \sin\theta = J_L \ddot{\theta}$$

Despejando e igualando (2) a 0, resulta (3).

$$J_L \ddot{\theta} + B_L \dot{\theta} + K(\theta - \psi) + mgL \sin\theta = 0$$

Para cuando  $\bar{\tau} = 0$

### Puntos de equilibrio:

#### Motor:

De (1), si se hacen las derivadas iguales a cero, queda como se representa en (4).

$$- k(\bar{\theta} - \bar{\psi}) = \bar{\tau} \quad (4)$$

Sabiendo

$$\bar{\theta} = \bar{\tau}$$

$$\bar{\psi} = 0$$

#### Barra:

De (3), también se hacen las variaciones iguales a cero, quedando la ecuación de la siguiente

manera:

$$k(\bar{\theta} - \bar{\psi}) + mgL \sin\bar{\theta} = 0$$

$$mgL \sin\bar{\theta} = 0$$

Esto se da cuando los ángulos son pequeños, menores a 5 grados, que es el caso de la aplicación.

$$\bar{\theta} = 0$$

### Sistema lineal:

#### Motor:

Partiendo de (1), se despeja  $\ddot{\psi}$ .

$$\ddot{J}_m \ddot{\psi} = -B_m \dot{\psi} + k(\theta - \psi) + \tau$$

Dividiendo la ecuación entre  $J_m$ .

$$\ddot{\psi} = \frac{-B_m}{J_m} \cdot \dot{\psi} + \frac{k}{J_m} \cdot (\theta - \psi) + \frac{\tau}{J_m}$$

Se restan sus valores nominales, para luego poder simplificar.

$$\ddot{\psi} - \bar{\ddot{\psi}} = \frac{-B_m}{J_m} (\dot{\psi} - \bar{\dot{\psi}}) +$$

$$\frac{k}{J_m} (\theta - \bar{\theta}) - \frac{k}{J_m} (\psi - \bar{\psi}) + \frac{1}{J_m} (\tau - \bar{\tau})$$

Dejando en términos de variaciones.

$$\ddot{\psi}d = \frac{-B_m}{J_m} \cdot \bar{\dot{\psi}}d + \frac{k}{J_m} \cdot \theta d - \frac{k}{J_m} \cdot \psi d \quad (5)$$

#### Barra:

Despejando de (2)  $\ddot{\theta}$ , y pasando las variables a variaciones, queda la ecuación de la siguiente manera.

$$\ddot{\theta}d = \frac{-B_L}{J_L} \dot{\theta}d - \left( \frac{k+mgL}{J_L} \right) \theta d + \frac{k}{J_L} \psi d \quad (6)$$

Antes de pasar a la representación en espacio de estados, se hacen cambios de variable, debido a que en la ecuación de espacio de estados no hay

segundas derivadas, los cambios son los siguientes:

Para la posición angular de la barra del manipulador robótico.

$$\theta = \theta_1$$

$$\dot{\theta}_1 = \theta_2$$

$$\ddot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2$$

Y para la posición angular del motor:

$$\psi = \psi_1$$

$$\dot{\psi}_1 = \psi_2$$

$$\ddot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$$

Con las ecuaciones (5) y (6) se crea la matriz A.

En la **imagen 9** se encuentra la representación de estados del manipulador flexible con el que se desarrolla la práctica.

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 d \\ \dot{\theta}_2 d \\ \dot{\psi}_1 d \\ \dot{\psi}_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -B/J_L & k/J_L & 0 \\ -k/mg & 0 & 0 & 1 \\ k/J_m & -k/J_m & -k/J_m & -B_m/J_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 d \\ \theta_2 d \\ \psi_1 d \\ \psi_2 d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J_m \end{bmatrix} \tau_d$$

$$y(t) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \theta_1 d \\ \theta_2 d \\ \psi_1 d \\ \psi_2 d \end{bmatrix}$$

**Imagen 9:** Representación de estados del sistema.

A la variable k, se le asigna un valor de  $3*10^{-4}$  N/m, que representa el coeficiente de elasticidad del eje del motor.

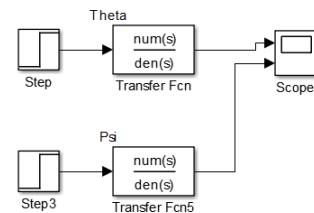
#### Criterios de diseño:

Se decide implementar un tiempo de establecimiento en lazo cerrado de 2 s con un coeficiente de amortiguamiento de 0.9. Con esto y un margen de error deseado del 1% se da una frecuencia natural de 2.5 rad/s.

## 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

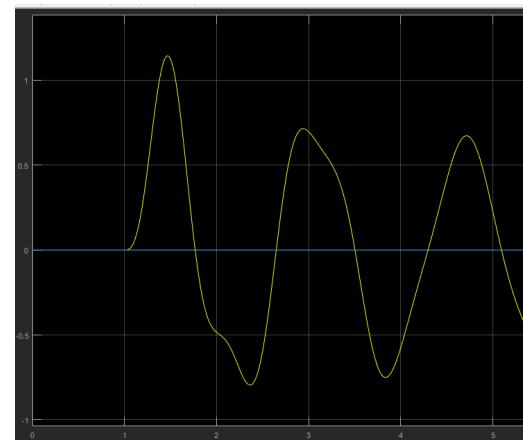
### Sistema lineal

#### Entrada escalón:



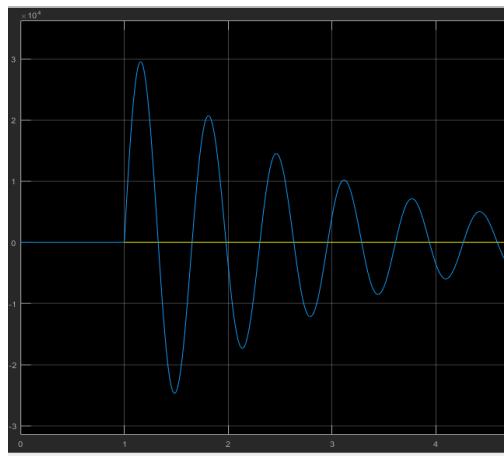
**Imagen 10:** Lazo abierto entrada escalón.

En la **imagen 10** se observa el diagrama de bloques que permite el análisis en lazo abierto de la variables  $\theta$  y  $\psi$  ante una entrada escalón en  $t = 1$  s.



**Imagen 11:** Variable  $\theta$ .

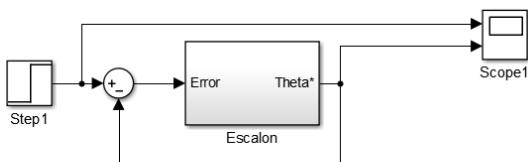
En la **imagen 11** se observa la respuesta en lazo abierto ante entrada escalón de la variable  $\theta$ . Como se observa, el sistema presenta oscilaciones, pero su disminución progresiva de amplitud indica que se puede decir estable cuando "t" tiende a infinito.



**Imagen 12:** Variable  $\psi$

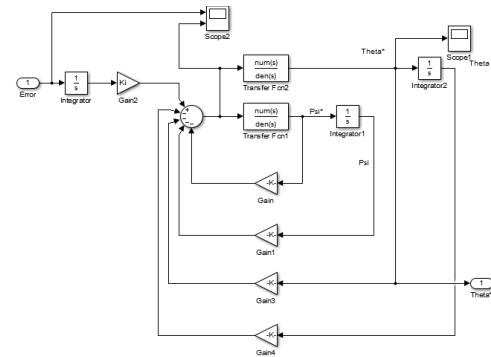
En la **imagen 12** se observa la respuesta en lazo abierto ante entrada escalón de la variable  $\psi$ . Se presentan las mismas oscilaciones y disminución de amplitud progresiva, se observa que el sistema tiende a estabilizarse cuando  $t$  tiende a infinito, se puede ver que la escala en el eje vertical es de  $x10^4$  por lo que se dice que la variable  $\psi$  tarda mucho más tiempo que la variable  $\theta$  en considerarse estable.

Observando el resultado obtenido en el **anexo 1**, se ve que en el momento de realizar una asociación término a término del denominador de la función de transferencia con el polinomio deseado, se genera un sistema de 4 ecuaciones con 5 incógnitas, con esto, se decide dejar la variable  $K_i$  en términos de la variable  $k_2$  y a esta última asignarle valores tal que el error sea lo más cercano a cero posible.



**Imagen 13:** Diagrama en lazo cerrado

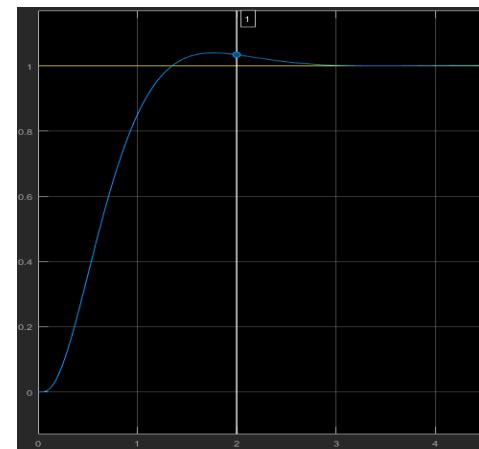
En la **imagen 13** está el diagrama del sistema para entrada escalón en realimentación, simplificando la planta y el control con herramientas de Simulink.



**Imagen 14:** Control por retroalimentación: escalón

La **imagen 14** presenta el diagrama particular del sistema con retroalimentación y la acción integral.

Los valores de las variables obtenidas se muestran en la **imagen 16**.



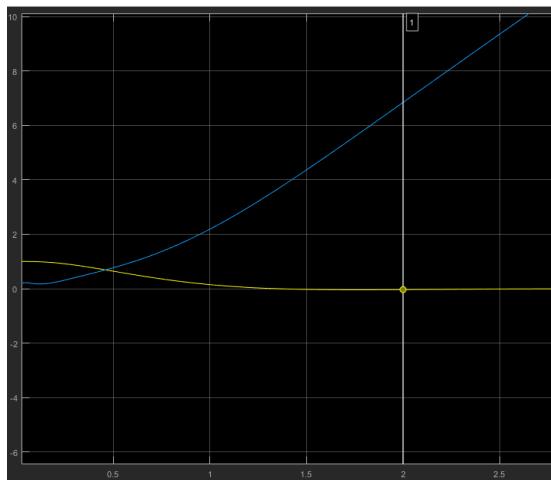
Time	Value
1   2.000	1.034e+00
2   7.500	1.002e+00

**Imagen 15:** Scope: Sistema controlado

En un  $t = 2s$  la salida presenta un error del 3%, y cuando  $t$  tiende a infinito, se presenta un error del 0.2% esto debido a la incertidumbre que presentan los valores  $k_2$  y  $K_i$ .

```
%Entrada escalón
K1e=5.46;
K2e=-36.32;
K3e=1.55e-4;
K4e=1.92e-3;
Ki=-22.43-K2e;
```

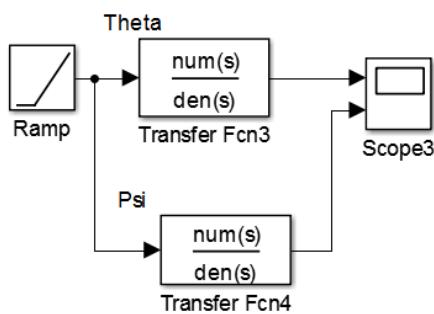
**Imagen 16:** Constantes de retroalimentación: entrada escalón.



**Imagen 17:** Señal de error(Amarillo) y señal de control (Azul)

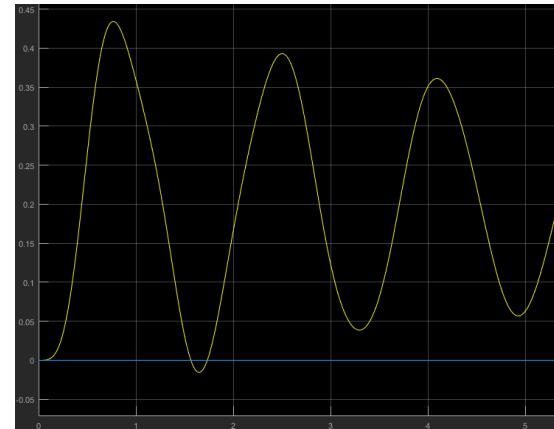
Como se observa, la señal de error no se vuelve cero tan rápido, esto se debe a que la señal de control es suave al inicio, aunque tiende a ser muy grande a medida que  $t$  tiende a infinito.

#### Entrada rampa:



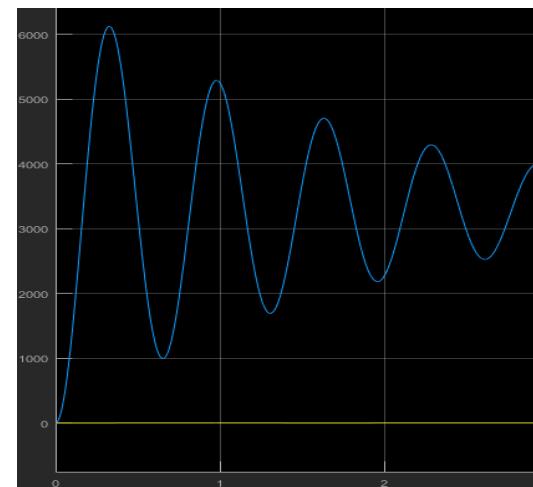
**Imagen 18:** Lazo abierto entrada rampa.

Se realiza tanto para la velocidad angular del motor como para la de la barra.



**Imagen 19:** Variable  $\theta$ .

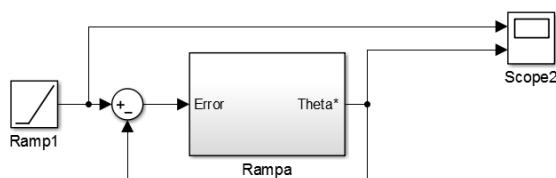
La **Imagen 19** muestra la salida de la velocidad angular de la barra ante una entrada rampa, en lazo abierto, se observa una baja, amplitud, que alcanza poco más de 0.4 u.



**Imagen 20:** Variable  $\psi$

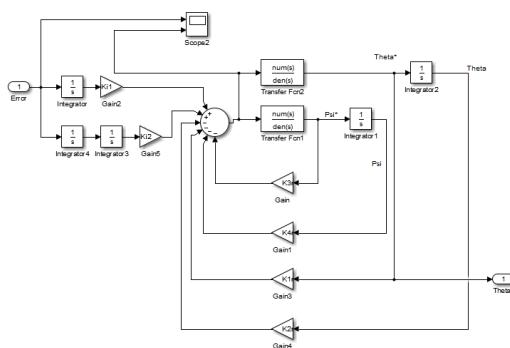
La **Imagen 20** muestra la respuesta en lazo abierto ante una entrada rampa de la variable  $\psi'$ , y se observa una amplitud muy grande, además de oscilación en el sistema.

Realizando el mismo procedimiento expuesto en el **anexo 1**, se obtiene el siguiente sistema de control:



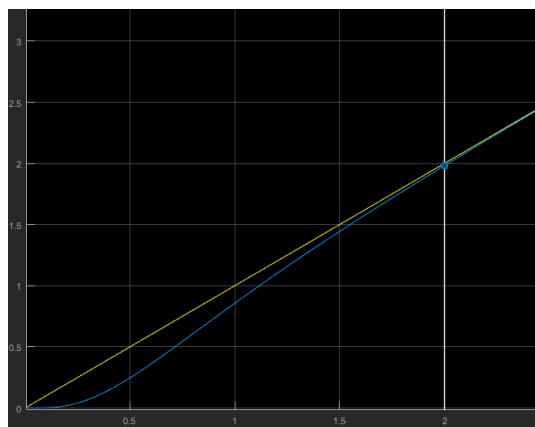
**Imagen 21:** Diagrama en lazo cerrado

En la **imagen 21** se observa el diagrama del sistema en lazo cerrado que internamente viene dado por lo mostrado en la **imagen 22**.



**Imagen 22:** Control por retroalimentación: rampa.

La respuesta obtenida es la siguiente:



▼ Measurements		
	Time	Value
1	2.000	1.981e+00
2	10.000	1.000e+01
$\Delta T$	8.000 s	$\Delta Y$ 8.019e+00

Se observa que en  $t = 2\text{s}$  se da un error con respecto a la entrada de al menos un 1% y que

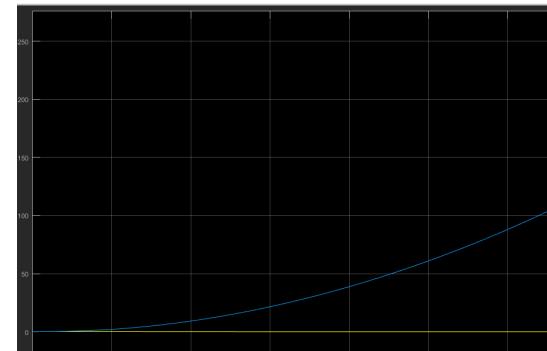
cuando  $t$  tiende a infinito la salida sigue a la entrada, por lo que se dice que la constante  $k_2$  utilizada es adecuada de tal forma que se cumplen los parámetros del diseño.

Las constantes usadas en esta retroalimentación se presentan en la **imagen 24**, de igual forma, la constante  $K_{1r}$  queda en términos de la constante  $k_2$  por lo que se espera el sistema presente desviaciones en los parámetros de diseño.

```

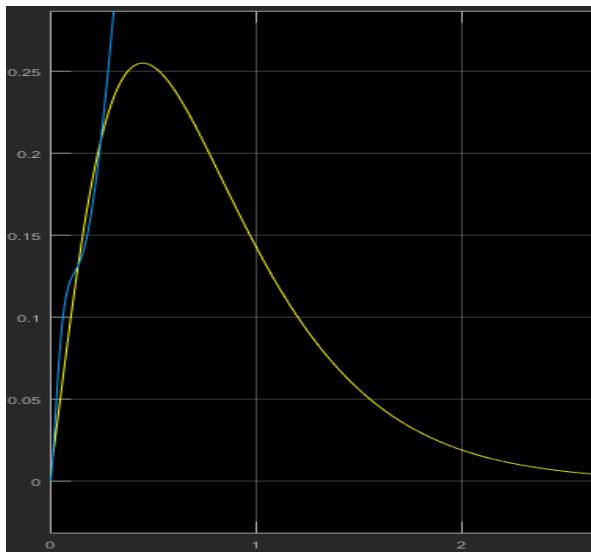
%Entrada Rampa
K1r=55.5;%Constante control theta
K2r=-96.32;%Constante control theta
K3r=2.28e-4;%Constante control Psi
K4r=5.5e-3;%Constante control Psi
K1l=110.7-K2r;%Constante proporcional
K2l=229.65;%Constante proporcional
  
```

**Imagen 24:** Constantes de retroalimentación: entrada rampa.

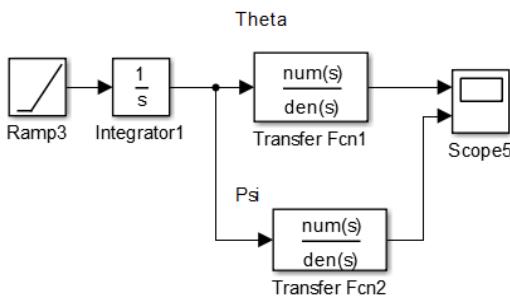


**Imagen 25:** Scopio de señales error y control..

En la **imagen 25** se muestran las señales de error (Amarillo) y la de control (Azul), se observa que el error es prácticamente cero, pero si se realiza un acercamiento se da que:

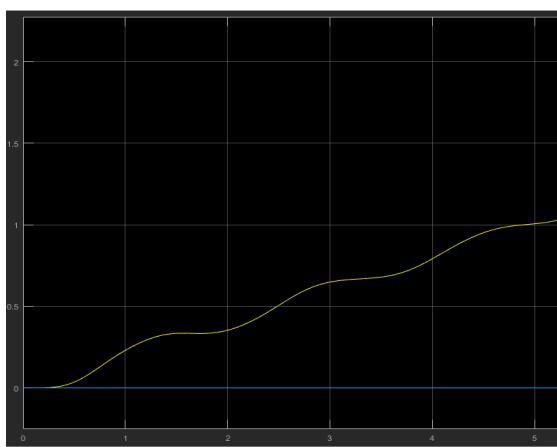


### Entrada aceleración:



*Imagen 26: Lazo abierto entrada aceleración.*

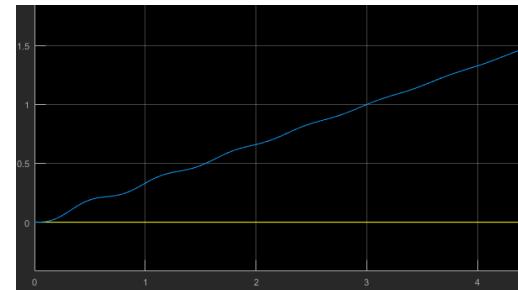
Se realiza el análisis en lazo abierto tanto para  $\Psi'$  como para  $\theta'$ . En la **Imagen 26** se observa el diagrama y ante una entrada rampa integrada, que produce una aceleración.



*Imagen 27: Variable  $\theta$ .*

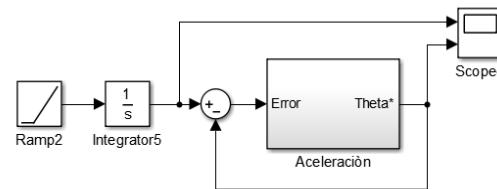
Se muestra la respuesta a entrada aceleración, de

la variable  $\theta^*$ , en la **Imagen 27**. Se puede observar que la velocidad angular del brazo tiene una amplitud baja, pese a estar frente a una entrada aceleración.



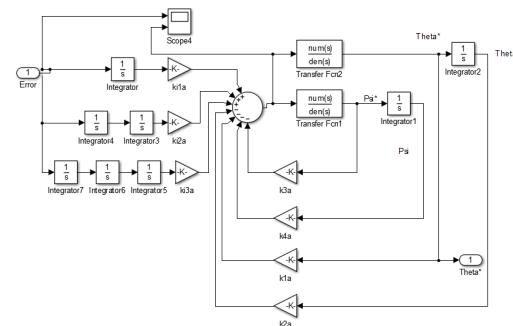
*Imagen 28: Variable  $\psi$*

La respuesta en lazo abierto ante una entrada aceleración para la variable  $\psi$  se observa en la **Imagen 28**, la amplitud es mucho más grande respecto a la variable  $\theta$ , dado que la escala vertical está en  $\times 10^4$ .



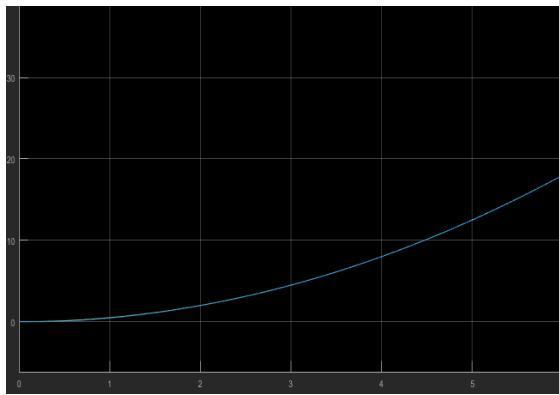
*Imagen 29: Diagrama en lazo cerrado.*

En la **Imagen 29** si bien se observa un diagrama de bloques, cuya estructura interna se observa en la **Imagen 30**. Su función es realizar el control correspondiente.



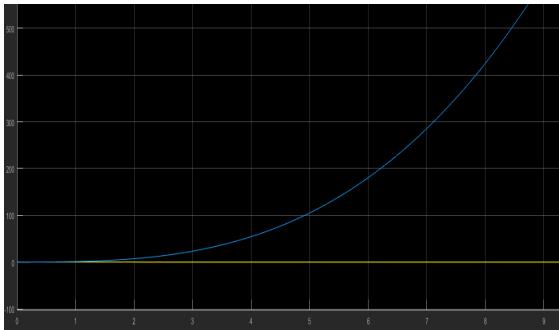
*Imagen 30: Control por retroalimentación: aceleración.*

La respuesta obtenida se observa en la **Imagen 31**.



**Imagen 31:** Scope4 - Entrada y señal controlada.

Como se puede ver, ambas señales son prácticamente iguales, lo que indicaría un error de cero y una acción de control muy fuerte ya que el error se hace cero prácticamente e  $t = 0$ s.



**Imagen 32:** Señal de error (Amarillo), señal de control (Azul).

Las constantes obtenidas para esta retroalimentación se encuentran en la **Imagen 33**.

```
%Entrada Aceleración
K1a=186.11;
K2a=-96.32;
K3a=3e-4;
K4a=10.7e-3;
K1a=1388-K2a;
K2a=4639;
K3a=5167;
```

**Imagen 33:** Constantes retroalim aceleración.

### Observadores:

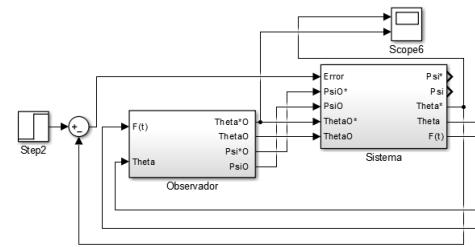
Dado que la única salida medible es la posición angular, la matriz C en el espacio de estados cambia a ser:

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Utilizado el método matricial (La matriz A' pasa a ser A-L\*C, donde L es la matriz del observador, en este caso es de 4x1, y se procede a obtener el determinante de la matriz SI-A') se hallan las constantes del observador, teniendo en cuenta que debe ser 10 veces más rápido que el sistema, estas se ven en la **Imagen 34**.

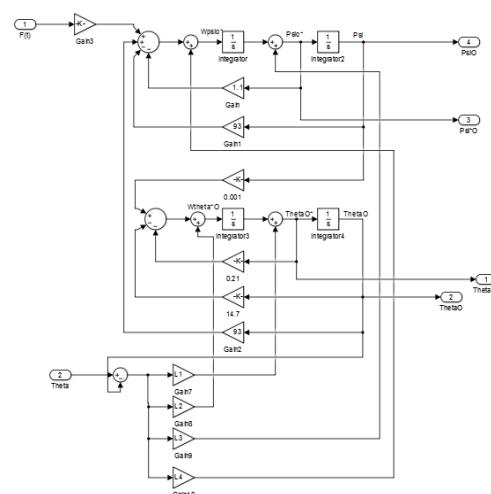
```
%Para el Observador
L1=494.8;
L2=71.2884e6;
L3=2.51e9;
L4=2.5e10;
```

**Imagen 34:** Constantes del observador



**Imagen 35:** Sistema con observador

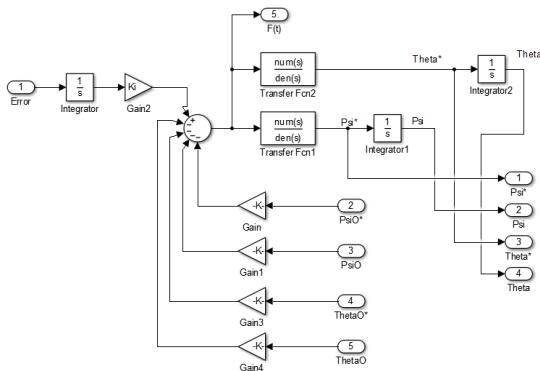
Se realizan 2 bloques para simplificar la presentación de los diagramas en matlab, en uno se encuentra el observador y en el otro se encuentra el sistema. A continuación se muestran cada uno de los bloques.



**Imagen 36:** Bloque del observador.

El diagrama presentado en la **Imagen 36** es el contenido del bloque “Observador” que se

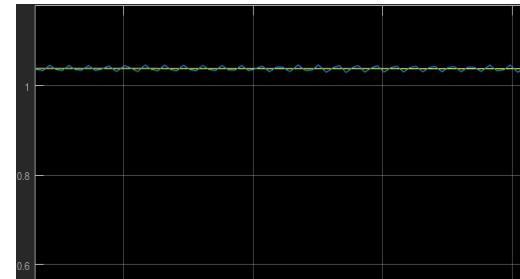
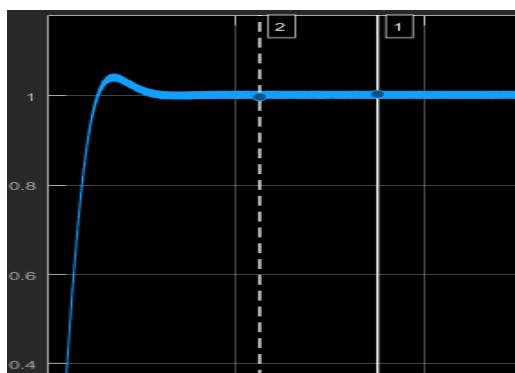
encuentra en la imagen 35. El observador se crea a partir de las mismas ecuaciones de estado del sistema, la diferencia recae en que las variables son las estimaciones requeridas, y a cada ecuación se le adiciona una corrección que depende de los valores de las variables del observador.



### **Imagen 37: Bloque de sistema**

En la **Imagen 37** se observa el contenido del bloque “sistema” que se encuentra conectado con el observador por lo tanto este diagrama es el mismo que se encuentra en la **Imagen 15** y conserva sus mismas constantes, pero en este caso cada constante debe ir conectada al observador para que este cumpla su función. Aunque si bien afecta Psi al sistema, la salida que se está midiendo es Theta.

Implementando el sistema con observador dado en la **Imagen 35** se obtiene la siguiente respuesta:

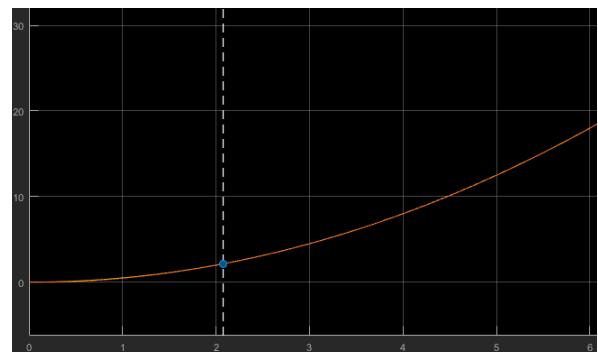


**Imagen 38:** Respuesta del observador (Azul) con respecto a la del sistema (Amarillo) para entrada escalón



**Imagen 39:** Respuesta del observador (Naranja) con respecto a la del sistema (Azul) para entrada rampa

El observador responde de la misma forma que el sistema, lo que indica que las estimaciones son prácticamente iguales a los valores reales, y que las correcciones a realizar son nulas.



**Imagen 40:** Respuesta del observador (Naranja) con respecto a la del sistema (Azul) para entrada aceleración (Amarillo)

En la imagen 40 se muestra la respuesta del sistema lineal con observador frente a una entrada aceleración, y se tiene que la respuesta del observador sigue a la respuesta del sistema controlado que controla frente a una entrada aceleración. Que todas las señales se encuentren una sobre la otra indica que el sistema controla de la con un error estado estable igual a 0 y que

el observador cumple su función correctamente.

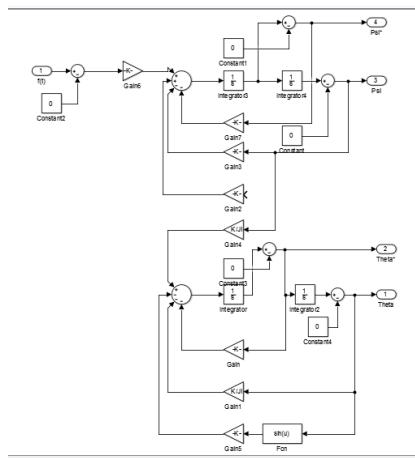
### Modelo no lineal

El diagrama dado para el sistema no lineal es el siguiente:



**Imagen 41:** Diagrama del modelo no lineal.

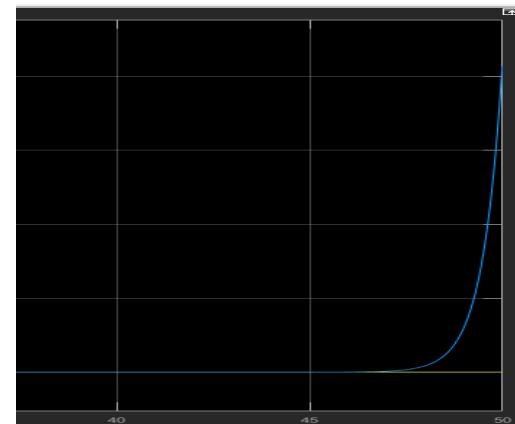
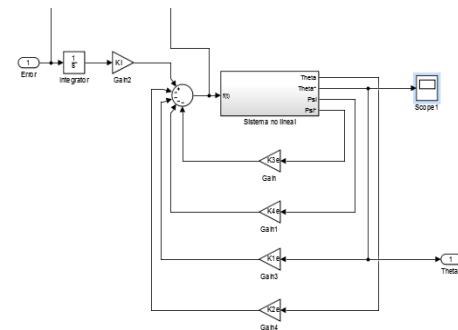
Cuya estructura interna se observa en la **Imagen 42**.



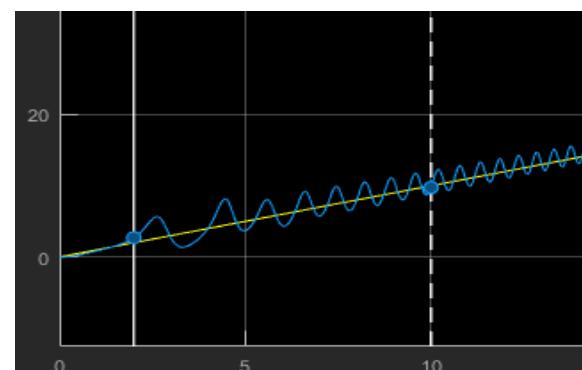
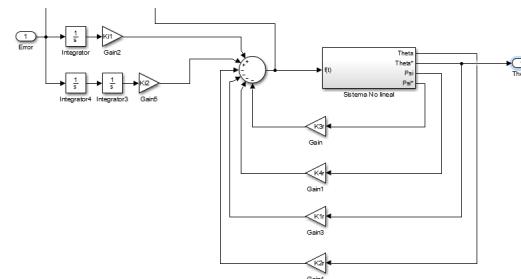
**Imagen 42:** Estructura interna del modelo no lineal.

La respuesta del sistema no lineal, ante una entrada escalón (Con el objetivo de compararlo contra el modelo lineal) se presenta en el **Anexo 2**. Como se observa, se comporta prácticamente de la misma manera, por lo que se comprueba su correcto funcionamiento.

Implementando el modelo no lineal con los distintos controles diseñados se obtienen las siguientes respuestas:

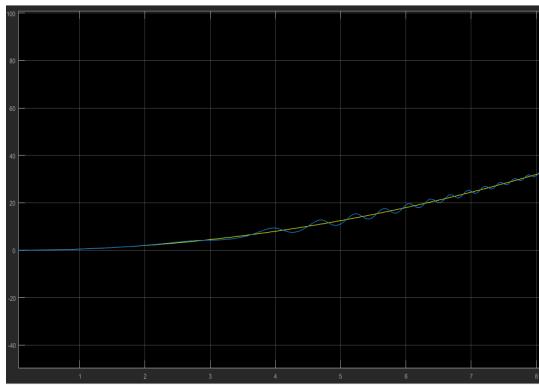
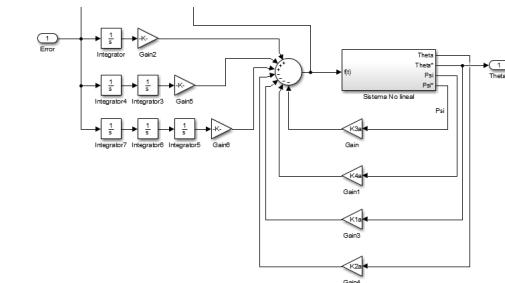


**Imagen 43-44:** Diagrama en bloques y respuesta del modelo no lineal con el control para una entrada escalón.



**Imagen 45-46:** Diagrama en bloques y respuesta del modelo no lineal con el control para una entrada rampa.

**Imagen 49:** Diagrama en bloques del sistema no lineal con observador.

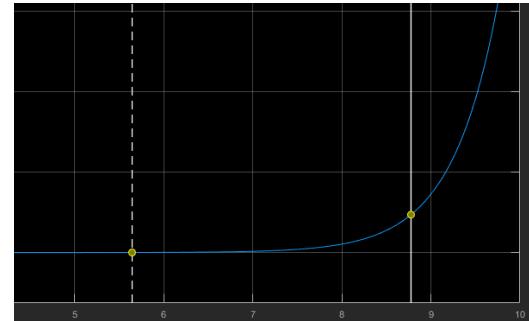
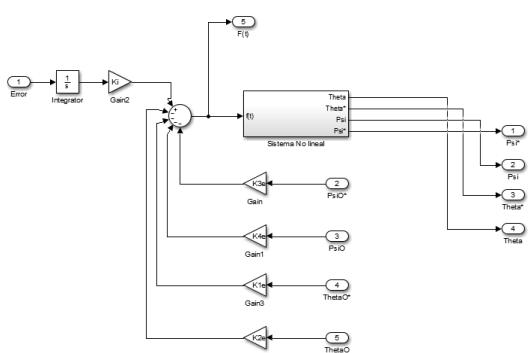


**Imagen 47-48:** Diagrama en bloques y respuesta del modelo no lineal con el control para una entrada aceleración.

En la **imagen 47-48** se observa que para la entrada aceleración, la salida del sistema no lineal tiende que a seguir la señal de entrada, pero presenta oscilaciones desde los 3 segundos y se empiezan a atenuar estas oscilaciones hasta que en un tiempo de aproximadamente 100s ya esté totalmente controlada, siendo el error en estado estable igual a 0.

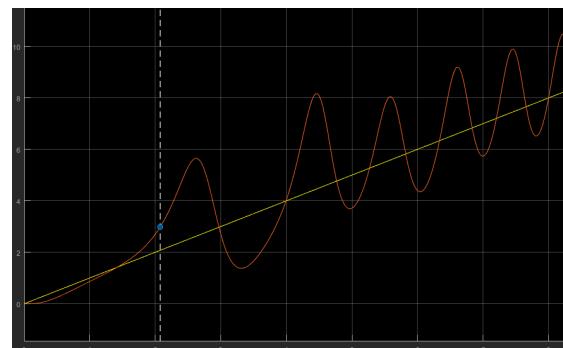
Ahora se acopla el observador al sistema no lineal y se observa su respuesta.

Al igual que en la **imagen 47-48**, se sigue el modelo dado en la **imagen 37**, acoplando el modelo no lineal.



**Imagen 50:** Respuesta del observador (Azul) y del sistema (Amarillo) para una entrada escalón.

Para el caso presentado en la **imagen 50**, se ven que las señales están una sobre la otra, pero solo se observa la respuesta del observador (azul) y los cursoros sobre la respuesta del sistema (amarillo). Para este caso en un tiempo mucho mayor, la señal tiende a una amplitud muy grande, aunque si bien se controla en el principio.



**Imagen 51:** Respuesta del observador (Naranja) y del sistema (Azul) para una entrada rampa (Amarillo)

De la **imagen 51** se ve la respuesta del observador (naranja) y la respuesta del sistema no lineal como tienen un movimiento oscilatorio alrededor de la entrada rampa (amarillo). Que esto ocurra puede deberse al único cambio que se realiza entre el sistema lineal y no- lineal, que para nuestro caso donde los puntos de equilibrio son iguales a cero y no afectan el cambio del sistema lineal al sistema no lineal, que es añadiendo la función seno a la variable controlada.

## CONCLUSIONES

\*Se comprueba que realizando el modelado del sistema tanto por Newton-Euler como para Euler-Lagrange, se llega a la misma ecuación planteada en la guía.

\* La linealización del modelo permite analizar el sistema en unos puntos de equilibrio y operación específicos, que hacen más sencillo el desarrollo al momento de realizar un control lineal.

\* La implementación y el diseño de las constantes del observador fueron óptimas para que siguiera la salida del sistema y tuviera un error mínimo de casi cero.

\* Al implementar el modelo no lineal en el sistema con observador, hubo una inconsistencia. El problema radica en la asociación término a término del denominador de la función de transferencia con el polinomio deseado.

\* La diferencia entre el control del sistema lineal y el sistema no lineal se observa en las oscilaciones que se presentan en el análisis del último, cuando se conecta junto con el observador. Uno de los factores que produce este cambio se puede deber al añadir la función  $\sin()$  a la variable de estado. Quedando el sistema sin linealizar, ya que los puntos de equilibrio para este caso son cero y no afectan de otra forma la respuesta no-lineal.

## REFERENCIAS

[1] K. Ogata, Sistemas de control en tiempo discreto, Prentice Hall, 1996.

[2] B. C. Kuo, Digital control system, Rinehart and Winston, 1996.

[3] F. d. I. d. l. UNaM, «Tutoriales de Control con MATLAB,» Regents of University of

Michigan, 18 Agosto 1997. [En línea].

[4] << Modeling DC Motor Position, Control Tutorials >>, Developed by Professor Dawn Tilbury (Michigan University) and Professor Bill Messner (Carnegie Mellon University). National Instruments. [En línea] Disponible en:

<http://www.ni.com/tutorial/6859/en/> [Último acceso: 12 Abril 2017]

[5] Serway. R. A., Jewett. J. W. , Física para ciencias e ingeniería, 7 ed, Vol 1, Cengage Learning Editores ®, México, 2008 , pp 278.

## ANEXO 1

**En este anexo se mostrará el procedimiento para obtener los coeficientes de la retro de estados y de la acción integral tal que se presente un error en estado estable igual a cero ante una entrada escalón.**

**Nota: Para las demás entradas se sigue el mismo procedimiento.**

### Procedimiento:

Se define una señal de entrada  $f(t)$  para la planta, que viene dada por la retro de estados, la acción integral y la señal de referencia.

$$f(t) = (Ref - \theta') * \frac{Ki}{S} - k1 * \theta' - k2 * \theta - k3 * \psi' - k4 * \psi$$

Dadas las ecuaciones del sistema para la variable Psi y Theta, se da que:

$$\psi' = W\psi$$

$$W\psi' = -1.1 * \psi' - 93 * \psi + 93 * \theta + 3.1e5 * f(t)$$

$$\theta' = W\theta$$

$$W\theta' = -0.21 * \theta' - 14.7 * \theta + 0.001\psi$$

Mediante la transformada de Laplace, y manejo algebraico se obtiene lo siguiente:

$$W\psi = -\theta * \left[ \frac{3.1e5*k1*s - 93 + 3.1e5*Ki + 3.1e5*k2}{S} \right] - \psi \left[ \frac{(1.1 + 3.1e5*k3)s + 93 + 3.1e5*k4}{S} \right] + \frac{3.1e5*Ki*Ref}{S^2}$$

$$\psi = -\theta * \left[ \frac{3.1e5*k1*S - 93 + 3.1e5*Ki + 3.1e5*k2}{S^2 + (1.1 + 3.1e5*k3)*S + 93 + 3.1e5*k4} \right] + \frac{3.1e5*Ki*Ref}{S * [S^2 + (1.1 + 3.1e5*k3)*S + 93 + 3.1e5*k4]}$$

$$W\theta = -\theta * \left[ \frac{0.21s + 14.7}{S} \right] - \psi \left[ \frac{0.001}{S} \right]$$

$$s\theta = -\theta \left[ \frac{0.21s + 14.7}{s} \right] - \theta \left[ \frac{(-0.093 + 310ki + 310k2) + 310k1s}{s^3 + (1.1 + (3.1e5)k3)s^2 + (93 + (3.1e5)k4)s} \right] + \frac{310*ki*Ref}{s^4 + (1.1 + (3.1e5)k3)s^3 + (93 + (3.1e5)k4)s^2}$$

$$\frac{\theta}{Ref} = \frac{310*ki}{[s^5 + (1.31 + 3.1e5)k3)s^4(107.931 + 3.1e5k4 + 65.1e3*k3)s^3 + (35.7 + 65.1e^3k4 + 4.5e6k3 + 310k1)s^2 + (1367.1 + 4.5e6k4 + 310ki + 310k2 + 0.093)s]}$$

Aquí se obtuvo la función de transferencia del sistema para la variable Theta; como se requiere es controlar la velocidad angular en vez de la posición angular del brazo, se multiplica por un factor S a ambos lados de la igualdad:

$$\frac{\theta'}{Ref} = \frac{310ki}{s^4 + (1.31 + 3.1e5)k5s^3 + (107.7 + 3.1e5k4 + 65.1e3k3)s^2 + (35.7 + 65.1e3k4 + 4.5e6k3 + 310k1)s + (1367.1 + 4.5e6k4 + 310ki + 310k2 + 0.093)}$$

## ANEXO 2

