Laboratorio 1: Modelado de sistemas mecatrónicos.

Galvis, David. , Lopez, Daniel

{u1802584,u1802530}@unimilitar.edu.co

Universidad Militar Nueva Granada

Resumen--- En este informe se desarrollan distintos sistemas mecatrónicos, los cuales se solucionarán por el método de Newton-Euler y el método Euler-Lagrange. Se simula su respuesta dinámica en el software de MATLAB y analiza el resultado.

Abstract--- In this paper various mechatronics systems are developed and analyzed, through Newton-Euler or Euler-Lagrange method. Its dynamic response is simulated using MATLAB for further analyzing.

Palabras clave--- Sistema, variable de estado, respuesta dinámica.

Objetivos General-- Fortalecer los conocimientos relacionados con el modelado de sistemas mecatrónicos y sus diversas representaciones, tras el uso de la teoría de Newton-Euler.

Objetivos específicos--

*Modelar sistemas mecatrónicos empleando la teoría de Newton-Euler y Euler-Lagrange.

*Encontrar las diversas representaciones de los sistemas mecatrónicos.

*Halla la respuesta de la dinámica de los sistemas mecatrónicos y observar su comportamiento al variar los parámetros del modelo que los representa.

*Utilizar analogías para simplificar el hallazgo de modelos de sistemas mecatrónicos.

1. INTRODUCCIÓN

En este documento se encuentra el desarrollo de 9 sistemas mecatrónicos propuestos con el fin de analizar cada uno de los sistemas y encontrar sus principales características de la respuesta dinámica del sistema. Además se resuelven preguntas que ayuden a una mejor comprensión de lo que se trata un sistema lineal, sus analogías y qué lo compone.

2. MARCO TEÓRICO

El modelado o representación matemática de un sistema dinámico permite el entendimiento y caracterización del comportamiento de ellos.

Los sistemas se pueden clasificar en mecánicos, eléctricos, hidráulicos, térmicos entre otros, o la interacción de ellos. Dentro del modelado, se tienen herramientas matemáticas que ayudan al estudio del comportamiento de su dinámica. Las ecuaciones diferenciales, funciones de transferencia, ecuaciones de estado y energías, permiten encontrar dichos modelos matemáticos o también conocidos en la literatura de control como modelos de simulación. Dentro de la teoría que se usa para esta labor, se encuentra el modelado por Newton-Euler (Definido en las leyes física estáticas y dinámicas) y Euler-

Lagrange(Definido por las leyes de conservación de energía).

3. MATERIALES

Software: MATLAB 2014

Elementos de seguridad: Bata blanca

4. PROCEDIMIENTO

- **¿Qué tipo de analogías existen?**

Existen dos tipos de analogías, entre sistemas mecánicos y eléctricos.

Sistema mecánico	Variable	Sistema eléctrico	Variable
Fuerza (Par)	F T	Voltaje	V
Masa	M	Inductancia	L
Fricción viscosa	Fv , D	Resistencia	R
Constante del resorte	K	Capacitancia	C
Desp angular	X , θ	Carga	q
Vel. angular	V , ω	Corriente	i

Tabla 1: Analogía Sistemas mecánico-eléctrico

Sistema térmico	Variable	Sistema eléctrico	Variable
Flujo de calor	q	Corriente	I
Diferencia de temperatura	Δθ	Diferencia de Potencial	ΔV
Resistencia térmica	Rt	Resistencia	R
Inercia térmica	Ct	Capacidad	C

Tabla 2: Analogía de sistemas térmico-eléctrico

¿Qué elementos son necesarios para modelar los diferentes tipos de sistemas (resistencia, masa, altura, etc.)? ¿Cuáles son sus unidades?

a) Sistema mecánico de traslación:

Masas [kg], constantes elásticas[N/m], coeficientes de amortiguamiento[(N*s)/m^2], coeficientes de fricción[N/m], distancias de palanca[m], fuerzas externas[N].

b) Sistema mecánico rotacional:

Inercias[kg*m^2], constantes elásticas[N/m], coeficientes de amortiguamiento[(N*s)/m^2],, coeficientes de fricción[N/m],, relación de transmisión, torques externos[N.m].

c) Sistema eléctrico:

Resistencias[Ω], capacitancias[F], inductancias[H].

d) Sistema de nivel de líquido:

Capacitancias[m3], resistencias[R],altura[m]

e) Sistemas térmicos:

Capacitancias térmicas[c*m], resistencias térmicas[$m^2 \cdot K \cdot W^{-1}$], temperaturas externas[K].

***¿Qué propiedades debe cumplir un sistema lineal?**

Un sistema lineal debe cumplir con dos parámetros fundamentales, el de la homogeneidad y el de superposición; la homogeneidad esta descrita de la siguiente manera:

Si se tiene:

$$f(x) = y$$

Entonces:

$$f(kx) = ky$$

Lo que involucra una proporcionalidad u homogeneidad entre la salida y la entrada.

La superposición indica que si se tiene:

$$f(x) = y \,; f(w) = v$$

Entonces:

$$f(kx + kw) = ky + kv$$

Esto indica que cuando en el sistema se presentan dos factores causantes (Que generan efectos), la salida puede ser representada como la suma de los efectos individuales; véase que ya está incluido el parámetro de homogeneidad.

Debe cumplir que la salida del sistema es una expresión que depende de forma lineal con la entrada.

***¿Cómo se puede determinar la linealidad de un sistema?**

La salida debe tener una relación lineal con la entrada, para que se cumpla la linealidad del sistema.
La linealidad de un sistema se puede determinar realizando la comprobación matemática de ambos parámetros previamente establecidos.

***¿Cómo se define variable de estado?**

Es la variable del sistema que cambia durante el proceso en el que el modelo entra en funcionamiento o responde a una entrada.

***¿Qué dimensión debe tener cada una de las matrices del espacio de estados si se tienen q entradas, n estados y p salidas?**

La matriz A debe ser de dimensión **nxn**.
La matriz B debe ser de dimensión **nxq**.
La matriz C debe ser de dimensión **1xp**.

***Resolver los sistemas presentados desde la figura 4 hasta la 12 planteados por Newton-Euler.**

Ver Anexo 1

***Sistemas presentados en la figura 6,7 y 12 plantear Euler-Lagrange los modelos matemáticos que representen la dinámica de los sistemas.**

Ver Anexo 1

5. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para todos los sistemas se configuró como entrada un escalón unitario.

Los resultados presentados por el software MATLAB se encuentran en el anexo 2.

a) Figura 4:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este respondió con un comportamiento sub-amortiguado.

b)Figura 5:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este se nota inestable, lo que implica que en el polinomio característico, existe una raíz ubicada en el semiplano derecho.

c)Figura 6:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este respondió con un comportamiento sub-amortiguado, a diferencia con el descrito por la **Figura 4,** este realiza menos oscilaciones antes de estabilizarse, lo que indica la presencia de un cero más cercano al eje horizontal.

d)Figura 7:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este respondió con un comportamiento sobre-amortiguado, que implica un tiempo de respuesta mayor en comparación a un sistema críticamente amortiguado.

e)Figura 8:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este respondió con un comportamiento sub-amortiguado, su diferencia a los demás radica en que se presenta un coeficiente de amortiguamiento tal que la respuesta es casi inmediata.

f)Figura 9:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este demuestra un comportamiento propio de un integrador inversor puro.

g)Figura 10:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este respondió con un comportamiento inestable, a diferencia del presentado en la **Figura 5,** este incrementa de forma más lenta.

h)Figura 11:

De acuerdo a los valores establecidos para el sistema, este respondió con un comportamiento sub-amortiguado; según la escala presentada en la simulación se muestra que la salida no es muy significante con respecto a la entrada, por lo que se podría decir que el sistema no varió.

6. CONCLUSIONES

Mediante el análisis físico de ciertos sistemas se llegó a una representación de dicho sistema mediante el espacio de estados y la función de transferencia de cada modelo.

Existen diferentes tipos de análisis que se pueden realizar sobre un sistema para llegar a su respectivo modelo, en este caso siendo mediante Newton-Euler o Euler-Lagrange.

Dependiendo de los valores que se le den a los elementos que conforman el sistema, este responde de diferentes maneras.

7. REFERENCIAS

[1]M. Alarcón, "Sistemas de control I, modelado de sistemas físicos". 2011. Consultado el (13/02/2017). En línea. *www1.herrera.unt.edu.ar/faceyt/sci/files/2013/10/Modelado.pdf*

[2] K. Ogata, "Dinámica de sistemas", 1era ed,vol 1, Ed Prentice hall, 1987,pp.596 "Ecuaciones de Lagrange".

ANEXO 1

FIGURA 4

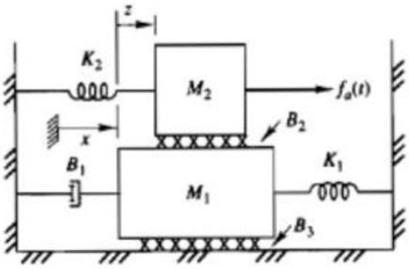
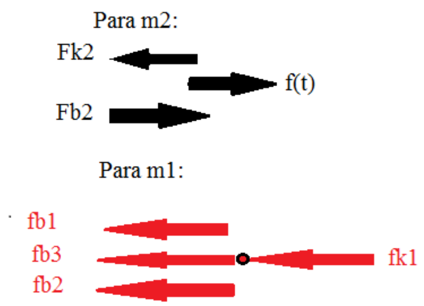


Figura 4: Sistema mecánico traslacional



a) Para m2

$$f(t) + B_2(\dot{x_1} - \dot{x_2}) - k_2 x_2 = m_2 \ddot{x_2}$$

$$\ddot{x_2} + \frac{B_2}{m_2}\dot{x_2} + \frac{k_2}{m_2}x_2 = \frac{B_2}{m_2}\dot{x_1} + \frac{1}{m_2}f(t) \qquad Ec.1$$

Para m1

$$-B_1\dot{x_1} - B_2(\dot{x_1} - \dot{x_2}) - B_3\dot{x_1} - k_1 x_1 = m_1\ddot{x_1}$$

$$\ddot{x_1} + \frac{(B_1 + B_2 + B_3)}{m_1}\dot{x_1} + \frac{k_1}{m_1}x_1 = \frac{B_2}{m_1}\dot{x_2} \qquad Ec.2$$

b) $\dot{x_1} = x_3$

$\dot{x_2} = x_4$

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1}{m_1} & 0 & \frac{(B_1 + B_2 + B_3)}{m_1} & \frac{B_2}{m_1} \\ 0 & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{B_1}{m_2} & \frac{-B_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} [f(t)]$$

c)Condiciones Iniciales = 0

$$: s^2X_2(s) + \frac{B_2}{m_2}sX_2(s) + \frac{k_2}{m_2}X_2(s) = \frac{B_2}{m_2}sX_1(s) + \frac{1}{m_2}F(s)$$

$$: s^2X_1(s) + \frac{(B_1 + B_2 + B_3\ )}{m_1}sX_1(s) + \frac{k_1}{m_1}X_1(s) = \frac{B_2}{m_1}sX_2(s)$$

$$: X_1(s)\left(s^2 + \frac{(B_1 + B_2 + B_3\ )}{m_1}s + \frac{k_1}{m_1}\right) = \frac{B_2}{m_1}sX_2(s)$$

$$: X_1(s) = \frac{B_2 s}{m_1s^2 + (B_1 + B_2 + B_3\ )s + k_1}X_2(s)$$

$$: X_2(s)\left(s^2 - \frac{{B_2}^2s^2}{m_1m_2s^2+m_2(B_1+B_2+B_3\ )s+ k_1m_2} + \frac{B_2}{m_2}s + \frac{k_2}{m_2}\right) = \frac{1}{m_2}F(s)$$

$$: X_2(s)\left(s^2m_2 + B_2s + k_2 - \frac{{B_2}^2s^2}{m_1s^2 + (B_1 + B_2 + B_3\ )s + k_1}\right) = F(s)$$

$$: \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1s^2 + (B_1 + B_2 + B_3\ )s + k_1}{m_1m_2s^4 + (m_2(B_1 + B_2 + B_3) + B_2m_1)s^3 + (k_1m_2 + B_2(B_1 + B_3) + k_2m_1)s^2 + (B_2k_1 + k_2(B_1 + B_2 + B_3\ ))s}$$

El denominador de la ecuación anterior será P(s)

$$: \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{B_2 s}{P(s)} \qquad Ec.3$$

FIGURA 5

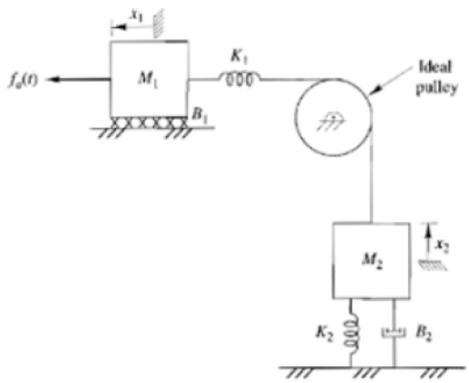
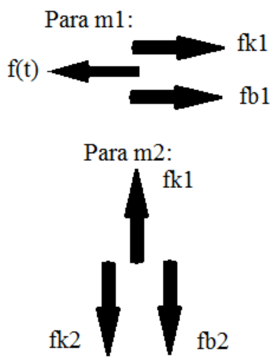


Figura 5: Sistema mecánico con polea



a) Para m_1 :

$$f(t) - k_1(x_1 - x_2) - B_1\dot{x_1} = m_1\ddot{x_1}$$

$$\ddot{x_1} + \frac{B_1}{m_1}\dot{x_1} + \frac{k_1}{m_1}x_1 = \frac{k_1}{m_1}x_2 + \frac{1}{m_1}f(t) \qquad Ec.4$$

Para m_2 :

$$k_1(x_1 - x_2) - k_2x_2 - B_2\dot{x_2} = m_2\ddot{x_2}$$

$$\ddot{x_2} + \frac{B_2}{m_2}\dot{x_2} + \frac{(k_1 + k_2)}{m_2}x_2 = \frac{k_1}{m_2}x_1 \qquad Ec.5$$

b)

$\dot{x_1} = x_3$

$\dot{x_2} = x_4$

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\\ \dot{x_4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{-B_1}{m_1} & 0\\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{-(k_1 + k_2)}{m_2} & 0 & \frac{-B_2}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \frac{1}{m_1}\\ 0\end{bmatrix}[f(t)]$$

c) Condiciones iniciales = 0

$$: \; s^2X_1(s) + \frac{B_1}{m_1}sX_1(s) + \frac{k_1}{m_1}X_1(s) = \frac{k_1}{m_1}X_2(s) + \frac{1}{m_1}F(s)$$

$$: \; s^2X_2(s) + \frac{B_2}{m_2}sX_2(s) + \frac{(k_1 + k_2)}{m_2}X_2(s) = \frac{k_1}{m_2}X_1(s)$$

$$: \; X_2(s)\left(s^2 + \frac{B_2}{m_2}s + \frac{(k_1 + k_2)}{m_2}\right) = \frac{k_1}{m_2}X_1(s)$$

$$: \quad X_2(s) = \frac{k_1}{m_2 s^2 + B_2 s + k_1 + k_2} X_1(s)$$

$$: \quad X_1(s)\left(s^2 + \frac{B_1}{m_1}s - \frac{{k_1}^2}{m_2 s^2 + B_2 s + k_1 + k_2} + \frac{k_1}{m_1}\right) = \frac{1}{m_1}F(s)$$

$$: \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{m_2 s^2 + B_2 s + k_1 + k_2}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 B_2 + B_1 m_2)s^3 + (m_1 k_1 + m_1 k_2 + B_1 B_2 + k_1 m_2)s^2 + (B_1 k_1 + B_1 k_2 + B_2 k_1)s + {k_1}^2 - m_1 {k_1}^2 + k_1 k_2}$$

El denominador de la función inmediatamente anterior, será $P(s)$

$$: \frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{k_1}{P(s)} \qquad Ec. 6$$

FIGURA 6

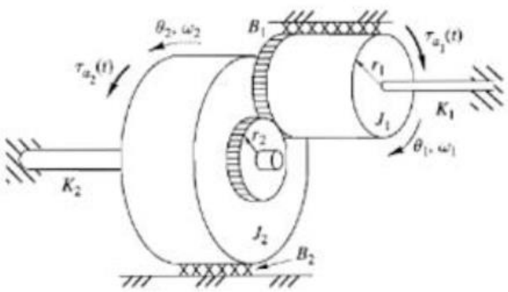
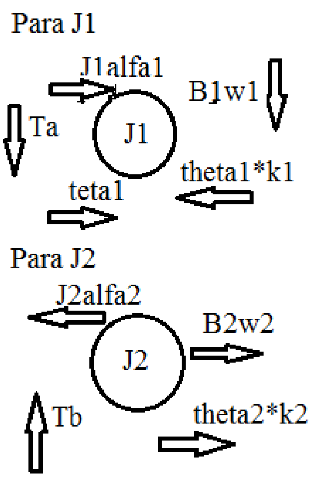


Figura 6: Sistema mecánico rotacional



a) Para J_1 :

$$\tau_a - B_1\dot{\theta}_1 - \theta_1 k_1 = J_1\ddot{\theta}_1$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{B_1}{J_1}\dot{\theta}_1 + \frac{k_1}{J_1}\theta_1 = \tau_a(t) \qquad Ec. 7$$

Para J_2 :

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{B_2}{J_2}\dot{\theta}_2 + \frac{k_2}{J_2}\theta_2 = \frac{r_2}{r_1}\tau_a(t) \qquad Ec. 8$$

b)

$\dot{\theta}_1 = \theta_3$

$\dot{\theta}_2 = \theta_4$

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\\ \dot{\theta}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{-k_1}{J_1} & 0 & \frac{-B_1}{J_1} & 0\\ 0 & \frac{-k_2}{J_2} & 0 & \frac{-B_2}{J_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\ \frac{r_2}{r_1}\end{bmatrix}[\tau_a(t)]$$

c) Condiciones iniciales = 0

$: \; s^2\theta_1(s) + \frac{B_1}{J_1}s\theta_1(s) + \frac{k_1}{J_1}\theta_1(s) = \tau_a(s)$

$: \; s^2\theta_2(s) + \frac{B_2}{J_2}s\theta_2(s) + \frac{k_2}{J_2}\theta_2(s) = \frac{r_2}{r_1}\tau_a(s)$

$: \; \theta_2(s)\left(s^2 + \frac{B_2}{J_2}s + \frac{k_2}{J_2}\right) = \frac{r_2}{r_1}\tau_a(s)$

$: \; \frac{\theta_2(s)}{\tau_a(s)} = \frac{J_2}{J_2 s^2 + B_2 s + k_2}\frac{r_2}{r_1}$

$: \; \theta_1(s)\left(s^2 + \frac{B_1}{J_1}s + \frac{k_1}{J_1}\right) = \tau_a(s)$

$: \; \frac{\theta_1(s)}{\tau_a(s)} = \frac{J_2}{J_1 s^2 + B_1 s + k_1} \qquad Ec. 9$

Por Euler-Lagrange

$L = k_e - U$

$k_e = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1{}^2 += \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2{}^2$

$U = \frac{1}{2}k_1{\theta_1}^2 + \frac{1}{2}k_2{\theta_2}^2$

$L = \frac{1}{2}J_1{\dot{\theta}_1}^2 += \frac{1}{2}J_2{\dot{\theta}_2}^2 - \frac{1}{2}k_1{\theta_1}^2 - \frac{1}{2}k_2{\theta_2}^2$

FIGURA 7

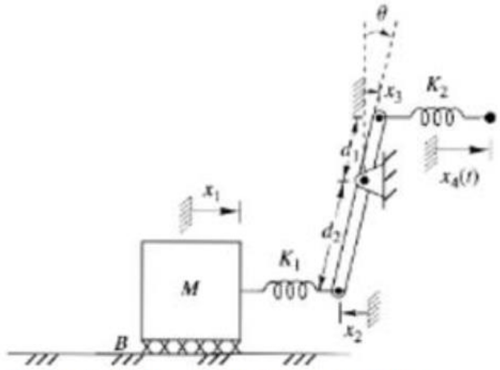
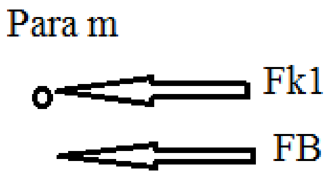


Figura 7: Sistema mecánico con palanca



a) Para m:

$$-k_1\,(x_1 + x_2) - B\dot{x_1} = m\ddot{x_1}$$

$$\ddot{x_1} + \frac{B}{m}\,\dot{x_1} + \frac{k_1}{m}x_1 = \frac{-k_1}{m}x_2 \qquad Ec. 10$$

Para la palanca:

$x_3 = \frac{d_1}{d_2}x_2$

$d_1 f_{k_2} = d_2 f_{k_1}$

$d_1 k_2(x_4 - x_3) = d_2 k_1(x_1 + x_2)$

$$d_1 k_2\left(x_4 - x_3 = \frac{d_1}{d_2}x_2\right) = d_2 k_1(x_1 + x_2)$$

$$d_1 k_2 x_4 - \ d_2 k_1 x_1 = \left(\frac{{d_1}^2}{d_2}k_2 + \frac{{d_2}^2}{d_2}k_1\right)x_2 \ \rightarrow \ x_2 = \frac{d_1 d_2 k_2 x_4 - {d_2}^2 k_1 x_4}{{d_1}^2 k_2 + {d_2}^2 k_1}$$

$$m\ddot{x_1} + B\dot{x_1} + \frac{k_1k_2{d_2}^2}{{d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1}x_1 = -\frac{k_1k_2d_1d_2}{{d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1}x_4$$

$$\dot{x_1} = w_1 = \begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{w_1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{k_1k_2{d_2}^2}{m({d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1)} & -\frac{B}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ w_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -\frac{k_1k_2d_1d_2}{m({d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1)}\end{bmatrix}[x_4(t)]$$

Para condiciones iniciales = 0.

$$:\quad ms^2X_1(s) + BsX_1(s) + \frac{k_1k_2{d_2}^2}{({d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1)}X_1(s) = -\frac{k_1k_2d_1d_2}{{d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1}X_4(s)$$

$$:\quad X_1(s)\left(ms^2 + Bs + \frac{k_1k_2{d_2}^2}{({d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1)}\right) = -\frac{k_1k_2d_1d_2}{{d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1}X_4(s)$$

$$:\quad \frac{X_1(s)}{X_4(s)} = \frac{k_1k_2d_1d_2}{s^2(m{d_1}^2k_2 + {d_2}^2k_1) + s(B{d_1}^2k_2 + B{d_2}^2k_1) + k_1k_2{d_2}^2} \qquad Ec. 11$$

FIGURA 8

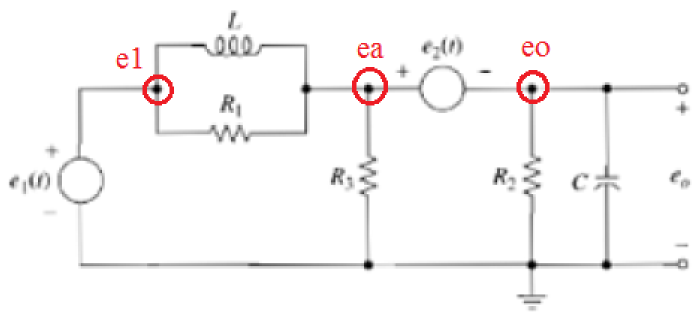


Figura 8: Sistema eléctrico

Entrada: $e_1(t)$

Variables de estado: i_L , e_C

Salida: e_O

Ecuaciones y relaciones iniciales para simplificar el reemplazo de variables:

$$e_1(t) - e_A = e_L(t)$$

$$e_1(t) - e_A = L\dot{i_L}$$

$$e_1(t) - L\dot{i_L} = e_A$$

$$e_A - e_O = e_2(t)$$

$$e_1(t) - L\dot{i_L} - e_O = e_2(t)$$

$$e_1(t) - e_2(t) - e_O = L\dot{i_L}$$

$$e_O = e_C$$

e_A Es el nodo que se encuentra justo sobre la resistencia R3.

Nodo $e_1(t)$

$$e_1(t) = i_L + i_{R1}$$

$$e_1(t) = i_L + \frac{e_1(t) - e_A}{R_1}$$

$$i_{e_1(t)} + i_{e_2(t)} = i_{R3}$$

$$i_L + L\frac{\dot{i_L}}{R_1} + i_{e_2(t)} = \frac{e_1(t) - L\dot{i_L}}{R_3} \qquad Ec.12$$

$$i_{e_2(t)} = i_{R2} + i_C = i_{R3} - i_{e_1(t)}$$

$$\frac{e_O}{R_2} + C\dot{e_O} = i_{e_2(t)}$$

$$\frac{e_O}{R_2} + C\dot{e_O} = \frac{e_1(t) - L\dot{i_L}}{R_3} - i_L + \frac{e_1(t) - e_A}{R_1}$$

$$\frac{e_O}{R_2} + C\dot{e_O} = \frac{e_1(t) - (e_1(t) - e_2(t) - e_O)}{R_3} - i_L + \frac{e_1(t) - (e_1(t) - (e_1(t) - e_2(t) - e_O))}{R_1}$$

$$\frac{e_O}{R_2} + C\dot{e_O} = \frac{e_O}{R_3} + \frac{e_2(t)}{R_3} - i_L + \frac{e_1(t)}{R_1} - \frac{e_O}{R_1} - \frac{e_2(t)}{R_1} \qquad Ec.13$$

$$\dot{e_O} = \frac{1}{C}\left(e_C\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{e_1(t)}{R_1} - i_L + e_2(t)\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1}\right)\right) \qquad Ec.14$$

Despejando $C\dot{e_O}$ de Ec.13 y reemplazando en la Ec.12:

$$i_L + L\frac{\dot{i_L}}{R_1} + \frac{e_O}{R_2} + \frac{e_O}{R_3} + \frac{e_2(t)}{R_3} - i_L + \frac{e_1(t)}{R_1} - \frac{e_O}{R_1} - \frac{e_2(t)}{R_1} - \frac{e_O}{R_2} = \frac{e_1(t) - L\dot{i_L}}{R_3}$$

Despejando $\dot{i_L}$:

$$\dot{i_L} = \frac{1}{L}\left(\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\left(e_1(t)\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1}\right) + e_2(t)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right) + e_O\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right)\right)\right) \qquad Ec.15$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e_C} \\ \dot{i_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) & -1 \\ \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\cdot\frac{1}{L}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}\cdot\frac{1}{L}\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1}\right) \end{bmatrix} [\, e_1(t)]$$

$$y = e_O = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} e_C \\ i_L \end{bmatrix}$$

FIGURA 9

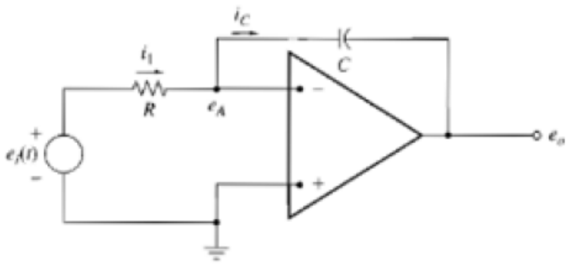


Figura 9 : Sistema eléctrico con operacionales

Entrada: $e_1(t)$

Variable de estado: e_C

Salida: e_O

Solución:

$$e_A = 0$$

$$i_1 = \frac{e_1(t) - e_A}{R}$$

$$i_C = C\dot{e_C}$$

$$e_O - e_A = e_C$$

Se toma i_C en dirección contraria a la mostrada por la figura 9

$$e_O = e_C$$

$$i_1 + i_C = 0$$

$$\frac{e_1(t)}{R} = -C\dot{e_O}$$

$$-\frac{e_1(t)}{RC} = \dot{e_O}$$

$$e_1(s) = -s[e_O(s)RC]$$

$$\frac{e_O(s)}{e_1(s)} = -\frac{1}{RCs}$$

$$[\dot{e_C}] = [\,0\,][e_C] + \left[-\frac{1}{RC}\right] e_1(t)$$

FIGURA 10

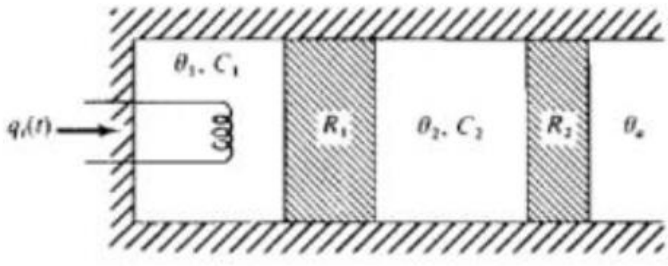


Figura 10: Sistema térmico

Entrada: $\widehat{Q\iota}$

Variables de estado: $\widehat{\dot{\theta_1}}$ y $\widehat{\dot{\theta_2}}$

Salida: $\widehat{\theta_2}$

$$\bar{q_\iota}(t) = \frac{1}{R_1}(\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}) \qquad Ec.16$$

$$q_{out2} = \frac{1}{R_2}(\theta_2 - \theta_a) \qquad Ec.17$$

$$\frac{1}{R_1}(\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}) = \frac{1}{R_2}(\overline{\theta_2} - \theta_a) \qquad Ec.18$$

$$\dot{\theta_1} = \frac{1}{C_1}[q_{i(t)} - \bar{q_i}(t)]$$

$$\dot{\theta_1} = \frac{1}{C_1}\left[q_{i(t)} - \frac{1}{R_1}(\theta_1 - \theta_2)\right] \qquad Ec.19$$

$$\dot{\theta_2} = \frac{1}{C_2}\left[\frac{1}{R_1}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{R_2}(\theta_2 - \theta_a)\right] \qquad Ec.20$$

$$\overline{\theta_1} = R_1\bar{q_\iota} + \overline{\theta_2}$$

Reemplazar en Ec.18

$$\bar{q_\iota} = \frac{1}{R_2}\overline{\theta_2} - \frac{1}{R_2}\theta_a$$

Se despeja $\overline{\theta_2}$

$$\overline{\theta_2} = \bar{q_\iota}R_2 + \theta_a$$

Reemplazar $\overline{\theta_2}$ en Ec.16 y se despeja $\overline{\theta_1}$

$$\overline{\theta_1} = \bar{q_\iota}(R_1 + R_2) + \theta_a$$

Pasar Ec.19 a variables incrementales

$$\dot{\widehat{\theta_1}} = \frac{1}{C_1}\overline{q_\iota} + \frac{1}{C_1}\widehat{q_\iota} + \frac{1}{C_1R_1}\left(-\overline{\theta_1} - \widehat{\theta_1} + \overline{\theta_2} + \widehat{\theta_2}\right)$$

Reemplazando $\overline{\theta_1}$ y $\overline{\theta_2}$ en la ecuación anterior

$$\dot{\widehat{\theta_1}} = \frac{1}{C_1}\overline{q_\iota} - \frac{1}{C_1R_1}\widehat{\theta_1} + \frac{1}{C_1R_1}\widehat{\theta_2} \qquad Ec.21$$

Pasando $\dot{\theta}_2$ a variables incrementales, realizando el mismo procedimiento que para obtener $\dot{\widehat{\theta_1}}$, queda:

$$\dot{\widehat{\theta_2}} = \frac{1}{C_2R_1}\widehat{\theta_1} - \widehat{\theta_2}\left(\frac{1}{C_2R_1} - \frac{1}{C_2R_2}\right) \qquad Ec.22$$

Haciendo Transformada de LaPlace de la Ec.21 para luego hacer transformada de Ec.22 y obtener una relación $\frac{Salida}{Entrada}$.Quedan

$$\widehat{\theta_1}(s) = \frac{R_1\widehat{Q\iota}(s) + \widehat{\theta_2}(s)}{C_1R_1s + 1}$$

$$\widehat{\theta_2}(s)\left(s + \frac{1}{C_2R_1} - \frac{1}{C_2R_2}\right) = \frac{1}{C_2R_1}\widehat{\theta_1}(s)$$

Reemplazamos $\widehat{\theta_1}(s)$ en la ecuación anterior con el fin de obtener la función de transferencia, queda:

$$\frac{\widehat{\theta_2}(s)}{\widehat{Q\iota}(s)} = \frac{\frac{1}{R_1C_1C_2}}{s^2 + s\left(\frac{1}{C_1R_1} + \frac{1}{C_2R_1} + \frac{1}{C_2R_2}\right) + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\widehat{\theta_2}} \\ \dot{\widehat{\theta_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_2R_1} - \frac{1}{C_2R_2} & \frac{1}{C_2R_1} \\ -\frac{1}{C_1R_1} & \frac{1}{C_1R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\theta_2} \\ \widehat{\theta_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C_1} \end{bmatrix} \widehat{Q\iota}$$

$$y = \widehat{\theta_2} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \widehat{\theta_2} \\ \widehat{\theta_1} \end{bmatrix}$$

FIGURA 11

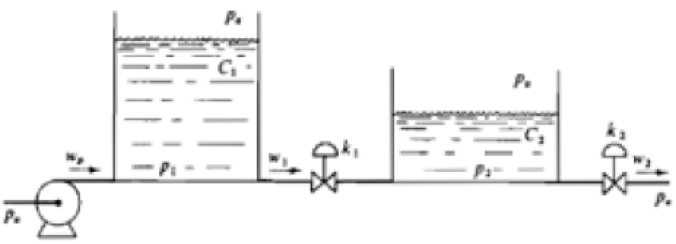


Figura 11: Sistema hidráulico

Entrada: $\widehat{w_\iota}$

Variables de estado: $\widehat{\dot{P_1}}$ y $\widehat{\dot{P_2}}$

Salida: $\widehat{P_2}$

$$P_1 - P_2 = \Delta P$$

$$w_i = K\sqrt{\Delta P}$$

$$\Delta P = K' w_i$$

$$\Delta P = K'K\sqrt{\Delta P}$$

$$\Delta P = (K'K)^2$$

$$\overline{w_i} = K'K^2$$

$$\dot{P_1} = \frac{1}{C_1}(w_i - w_1)$$

$$\dot{P_1} = \frac{1}{C_1}(w_i - k_1\sqrt{P_2 - P_a})$$

$$\dot{P_2} = \frac{1}{C_2}(w_1 - w_2)$$

$$\dot{P_2} = \frac{1}{C_2}(k_1\sqrt{P_2 - P_a} - k_2\sqrt{P_2 - P_a})$$

Pasar $\dot{P_1}$ y $\dot{P_2}$ a variables incrementales.

$$\widehat{\dot{P_1}} = \frac{1}{C_1}\left(\overline{w_i} - k_1\sqrt{\overline{\Delta P}}\right) + \frac{1}{C_1}\left(\widehat{w_i} - \left(\frac{k_1}{2\sqrt{\overline{\Delta P}}}\right)\widehat{P_1}\right)$$

$$\widehat{\dot{P_1}} = \frac{1}{C_1}\widehat{w_i} - \frac{k_1}{2C_1}\widehat{P_1}$$

$$\widehat{\dot{P_2}} = \frac{1}{C_2}\left(\overline{w_i} - k_2\sqrt{\overline{P_2} - P_a}\right) + \frac{1}{C_2}\left(\widehat{w_i} - \left(\frac{k_2}{2\sqrt{\overline{P_2} - P_a}}\right)\widehat{P_2}\right)$$

$$\widehat{\dot{P_2}} = \frac{1}{C_2}\widehat{w_i} - \frac{k_2}{2C_2}\widehat{P_2}$$

$$\begin{bmatrix}\widehat{\dot{P_1}}\\ \widehat{\dot{P_2}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-k_1}{2C_1} & 0\\ 0 & \frac{-k_2}{2C_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\widehat{P_1}\\ \widehat{P_2}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{C_1}\\ \frac{1}{C_2}\end{bmatrix}[\widehat{w_i}]$$

$$y = \widehat{P_2} = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}\widehat{P_1}\\ \widehat{P_2}\end{bmatrix}$$

FIGURA 12

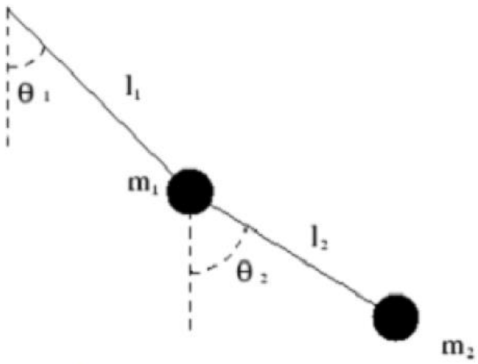


Figura 12: Péndulo doble

Posición del péndulo:

$$x = l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2$$

$$y = l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2$$

Velocidades:

$$\dot{x} = l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta_1} + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta_2} \qquad Ec. 23$$

$$\dot{y} = -l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta_1} - l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta_2} \qquad Ec. 24$$

$$\dot{v_2} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \qquad Ec. 25$$

$$v_1 = l_1 \dot{\theta}_1$$

Reemplazando Ec.24 en Ec.25

$$v_2 = (l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta_1} + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta_2})^2 + (-l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta_1} - l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta_2})^2 \qquad Ec. 26$$

La velocidad del péndulo uno depende solo de la longitud 1.

$$K_e = {}^1\!/_2\, m_1 v_1 + {}^1\!/_2\, m_2 v_2 \qquad Ec. 27$$

Reemplazar Ec.26 en Ec.27.

Así se obtiene la energía cinética del sistema:

$$\begin{aligned} K_e &= {}^1\!/_2\, m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 \\ &+ {}^1\!/_2\, m_2 \left((l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta_1} + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta_2})^2 \right. \\ &+ \left. (-l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta_1} - l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta_2})^2 \right) \qquad Ec. 28 \end{aligned}$$

Ahora, para la energía potencial U:

$$U = m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos\theta_1) + l_2 (1 - \cos\theta_2)] \qquad Ec. 29$$

Luego, para obtener el Lagrangiano $L = K_e - U$

$$L = {}^{1}/_{2}\, m_1 (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + {}^{1}/_{2}\, m_2 \left((l_1 \cos\theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos\theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (-l_1 \sin\theta_1 \dot{\theta}_1 - l_2 \sin\theta_2 \dot{\theta}_2)^2 \right) - m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) + m_2 g [l_1 (1 - \cos\theta_1) + l_2 (1 - \cos\theta_2)] \qquad Ec.30$$

Ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \qquad Ec.31$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \qquad Ec.32$$

Solucionando las derivadas del sistema para las variables de estado:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) {l_1}^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad Ec.33$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) {l_1}^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad Ec.34$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 {l_2}^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) \qquad Ec.35$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - m_2 g l_2 \sin(\theta_2) \qquad Ec.36$$

Reemplazando las derivadas en las ecuaciones de Lagrange, se obtienen las siguientes ecuaciones resultantes.

$$(m_1 + m_2) {l_1}^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \left[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta_2}^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)\right] + (m_1 + m_2) g \sin(\theta_1) = 0 \qquad Ec.37$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) + \dot{\theta_1}^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)] + g \operatorname{sen}(\theta_2) = 0$$

$$\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)\left(\frac{l_2}{l_1}\right) [\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta_2}^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)] + \frac{g}{l_1} \operatorname{sen}(\theta_2) = 0 \qquad Ec.38$$

$$\ddot{\theta}_2 + \left(\frac{l_1}{l_2}\right)\left[\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \dot{\theta_1}^2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)\right] + \frac{g}{l_2} \operatorname{sen}(\theta_2) = 0 \qquad Ec.39$$

ANEXO 2

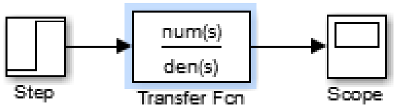
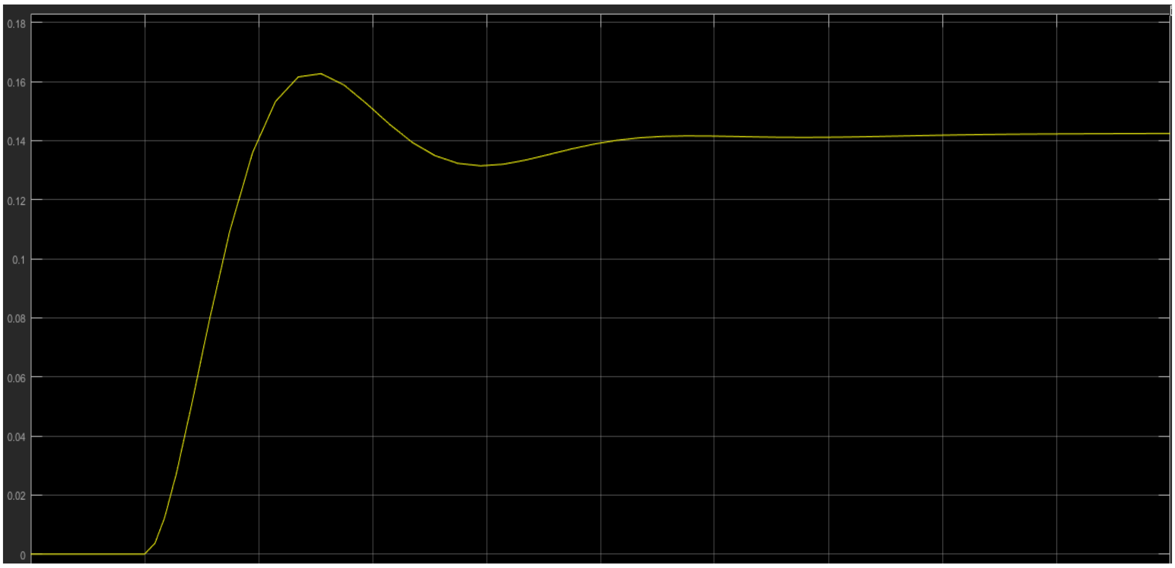


Imagen 0. Diagrama en Simulink

Para todos los modelos se implemento en Simulink el diagrama mostrado en la **Imagen 0,** donde se utiliza un bloque ***Transfer Fcn*** o función de transferencia donde posteriormente en cada archivo **.m,** se asignan valores al numerador y al denominador, lo que determina el comportamiento del sistema; un bloque ***Step*** o escalón como entrada y un bloque ***Scope*** para visualizar la salida del sistema con respe

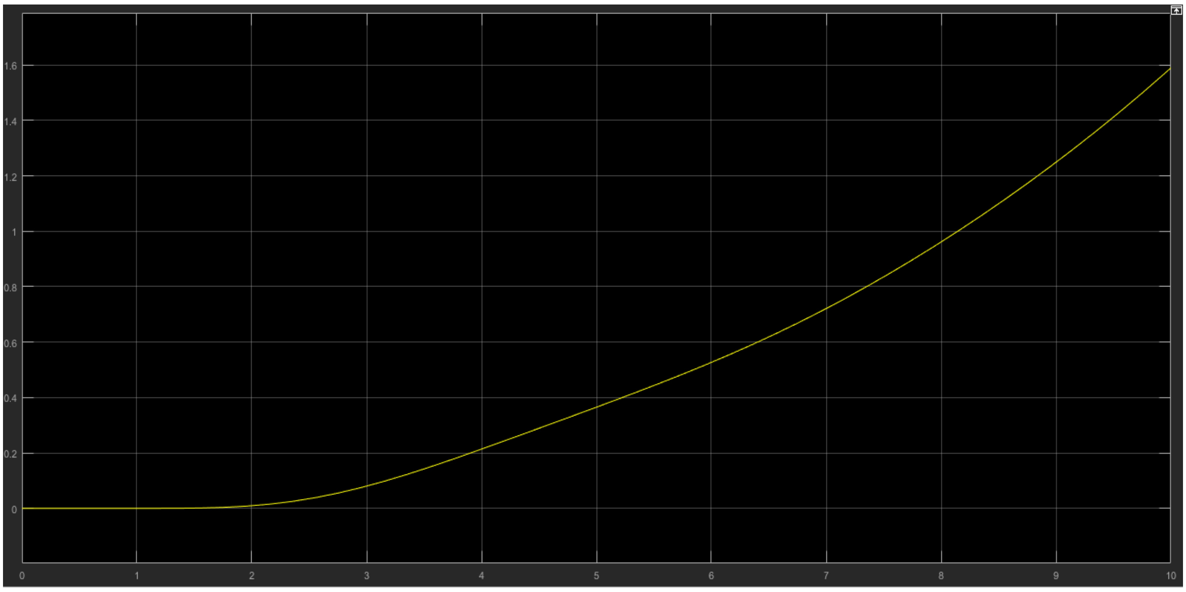
a) Figura 4:

```
m1=3;
m2=1;
k1=5;
k2=7;
b1=2;
b2=4;
b3=6;
num=[m1  (b1+b2+b3)  k1];
den=[(m1*m2)  (m2*(b1+b2+b3)+b2*m1)  (k1*m2+b2*(b1+b3)+k2*m1)  (b2*k1+k2*(b1+b2+b3))  k1*k2];
```



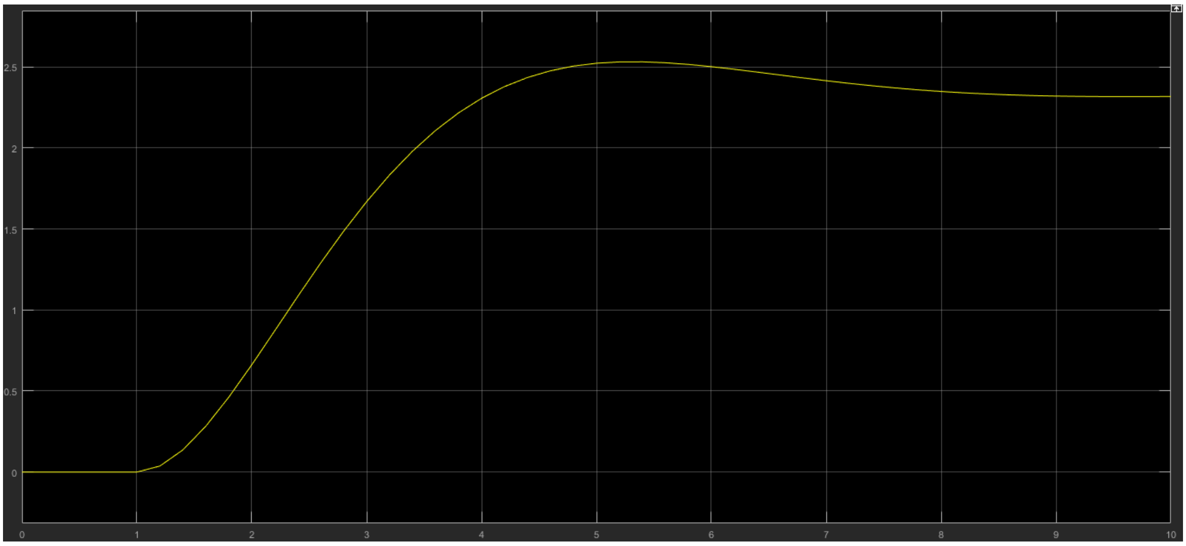
b) Figura 5:

```
m1=2;
m2=4;
k1=3;
k2=1;
b1=1;
b2=8;
num=k1;
den=[(m1*m2) (m1*b2+m2*b1) (m1*k1+m1*k2+b1*b2+k1*m2) (b1*k1+b1*k2+b2*k1) ((k1^2)-m1*(k1^2)+k1*k2)];
```



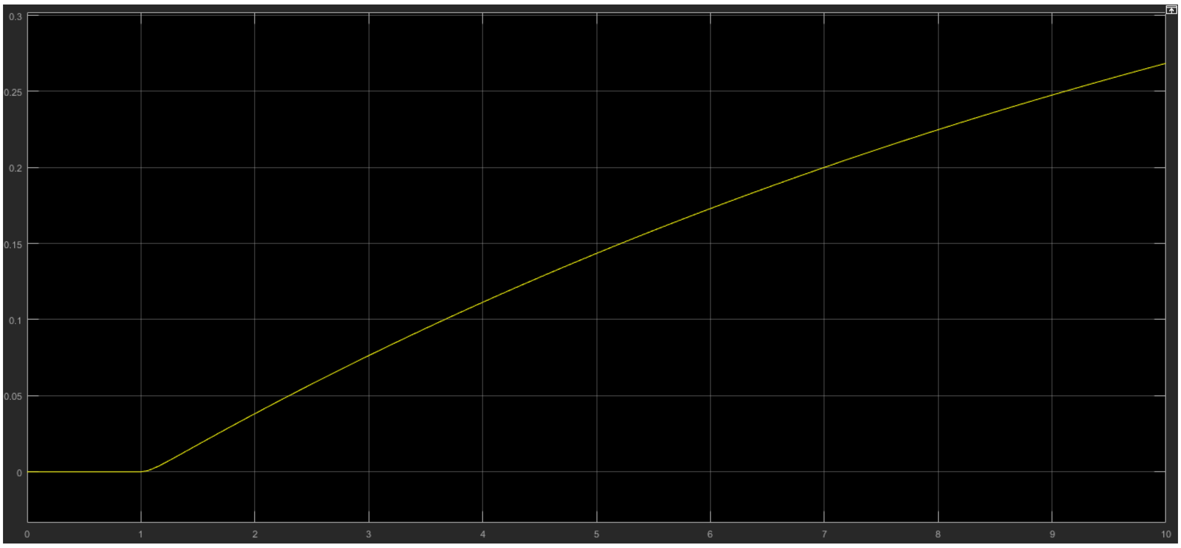
c) Figura 6:

```
j1=2;
j2=7;
k1=5;
k2=6;
b1=2;
b2=8;
r2=10;
r1=5;
num=[j2*r2];
den=[(j2*r1) (b2*r1) (k2*r1)];
```



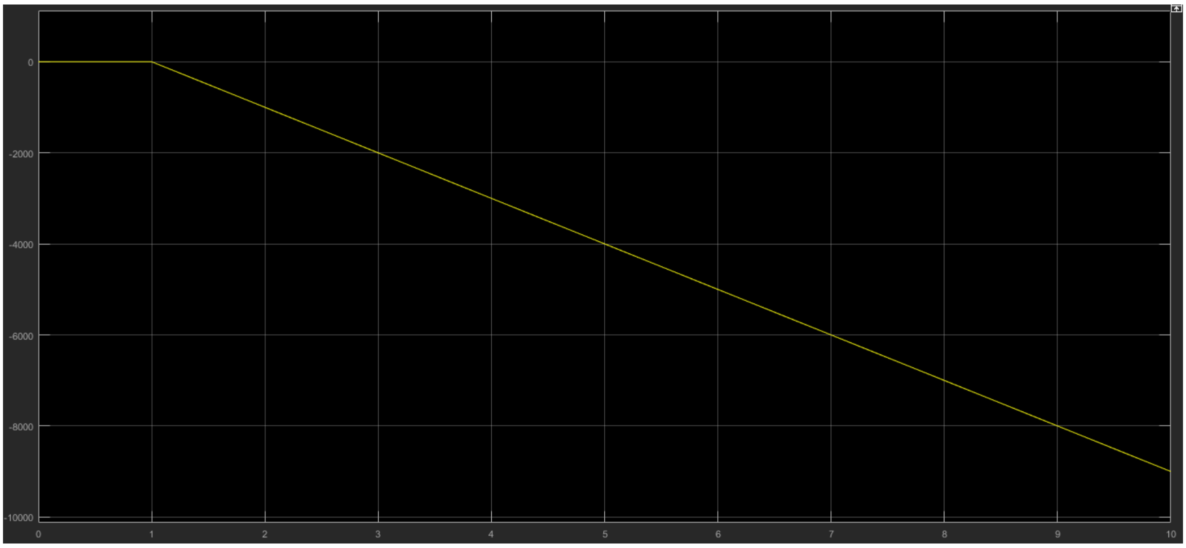
d) Figura 7:

```
m=5;
k1=3;
k2=2;
b=20;
d2=10;
d1=5;
num=[k1*k2*d1*d2];
den=[(m*(d1^2)*k2+(d2^2)*k1) (b*((d1^2)*k2+(d2^2)*k1)) (k1*k2*(d2^2))];
```



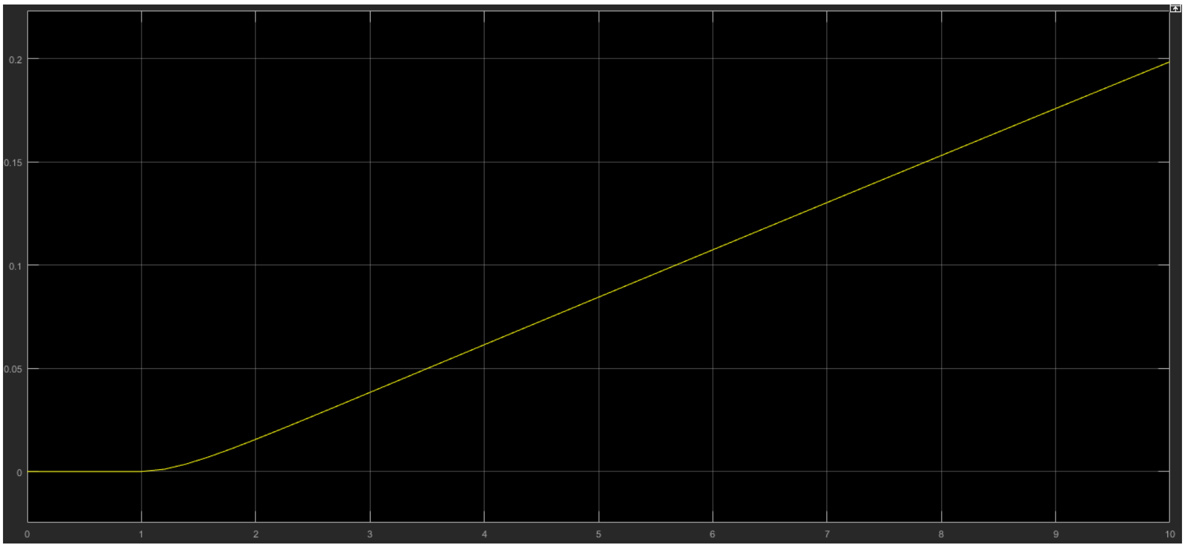
e) Figura 9:

```
R=1000;
C=10^(-6);
num=-1;
den=[R*C 0];
```



f) Figura 10:

```
r1=1;
r2=7;
c1=5;
c2=3;
num= [1/(r1*c1*c2)];
den=[1  ((1/c1*r1)+(1/c2*r1)+(1/c2*r2))  (1/(c1*c2*r1*r2))];
```



g) Figura 11

```
k1=7;
k2=10;
c1=4;
c2=9;
A=[(-k1/2*c1) 0; 0 (-k2/2*c2)];
B=[1/c1;1/c2];
C=[0 1];
D=0;
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1);
```

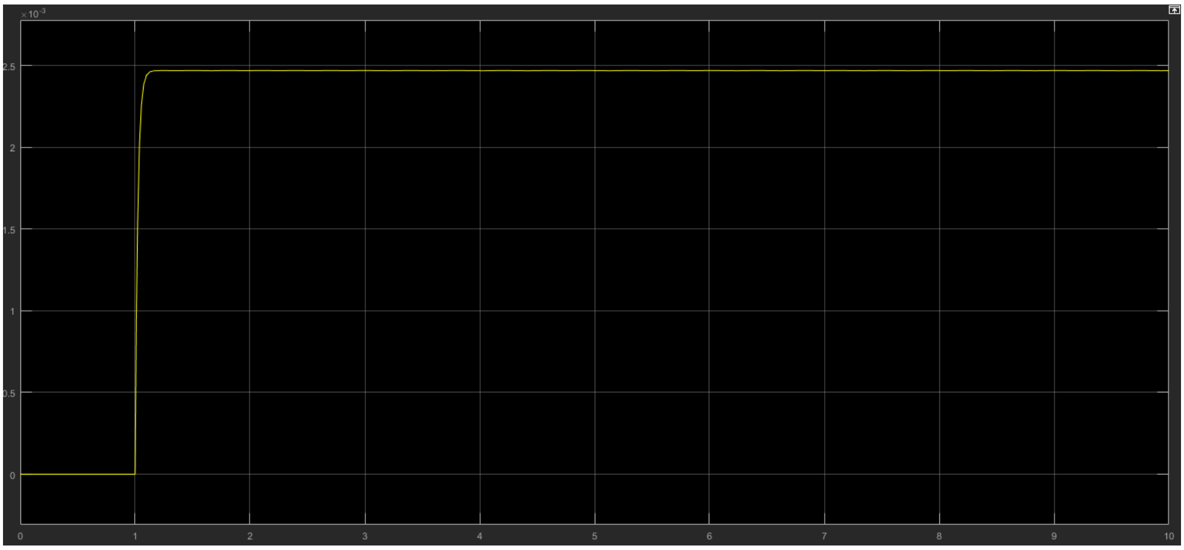
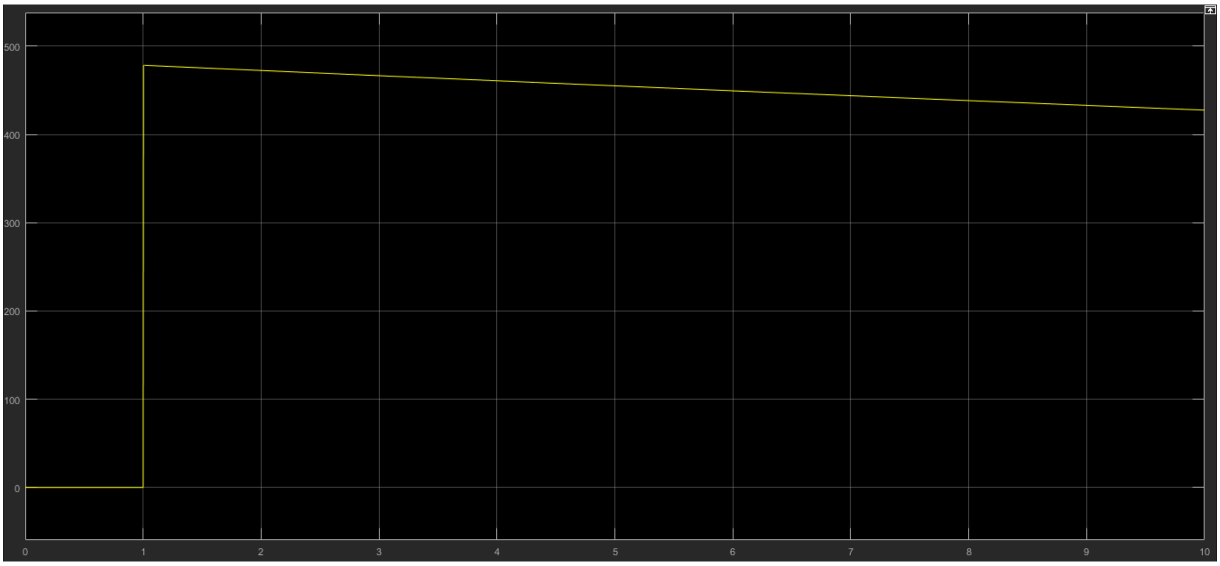


Figura 8:

```
r1=520;
r2=1000;
r3=1200;
c=10^(-6);
L=.1;
A=[(1/r3-1/r2-1/r1)/c -1; ((r1*r3)/r1+r3)*((1/r1-1/r3)/L) 0];
B=[1/c;((r1*r3)/r1+r3)*((1/r3-1/r1)/L)];
C=[1 0];
D=0;
[num,den]=ss2tf(A,B,C,D,1);
```


500
400
300
200
100
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10