

Control en tiempo discreto, 7 métodos diferentes.

Galvis. David. Restrepo. Camilo.

{u1802584,u1802556}@unimilitar.edu.co

Universidad Militar Nueva Granada

Resumen--- En este laboratorio se va a realizar el montaje de una planta física tipo masa - resorte introducida en un fluido la cual está conectada a un motor que le transmite su potencia mediante poleas, el funcionamiento de dicha planta es mediante un circuito PUSH-PULL y un sensor de efecto hall.

A la planta descrita se le van a aplicar diversos controladores discretos y se va a analizar el comportamiento de todo el sistema con base a cada uno de los respectivos controladores con el fin de realizar una comparación y determinar cuáles pueden ser mejores en funcionamiento y en facilidad de implementación.

Abstract--- This practice has the purpose of making the assembly of a physical plant type mass - spring introduced into a fluid which is connected to a motor that transmits its power through pulleys, the operation of this plant is through a PUSH-PULL circuit and a hall effect sensor.

A variety of discrete controllers will be applied to the plant described and the behavior of the entire system will be analyzed based on each of the respective controllers in order to make a comparison and determine which can be better in operation and in ease of implementation.

Palabras clave--- Control discreto, ecuación en diferencias, saturación.

Objetivo General--- Implementar diferentes estrategias de control en tiempo discreto usando ecuaciones en diferencias.

Objetivos específicos--

- * Diseñar e implementar un controlador PID en tiempo continuo y discretizarlo.
- * Diseñar e implementar un controlador PID en tiempo discreto.
- * Diseñar e implementar un controlador mediante el método del lugar geométrico de las raíces.
- * Diseñar e implementar un compensador en frecuencia en tiempo discreto.
- * Diseñar e implementar un controlador por anulación de planta.
- * Diseñar e implementar un controlador por oscilaciones muertas.
- * Diseñar e implementar un servosistema en tiempo discreto.

INTRODUCCIÓN

En el siguiente documento se presenta el diseño de 7 controladores en tiempo discreto y los resultados obtenidos para cada uno de estos. Mediante la utilización de los software Matlab y LabView.

CONTROL DISCRETO:

Los sistemas de control en tiempo discreto son aquellos sistemas en los cuales una o más de las variables pueden cambiar sólo en valores discretos de tiempo. Estos instantes, se denotan con kT o $tk =$

* Planta (Motor DC, poleas, fluido aceite de coco, resorte, soporte en madera, sensor de efecto hall).

2. PROCEDIMIENTO

Utilizando la planta caracterizada en la entrega 2 del laboratorio, se utiliza la siguiente función de transferencia para todos los controladores, no fue necesario una nueva caracterización.

$$\frac{1.606}{s^2 + 2.861s + 2.047}$$

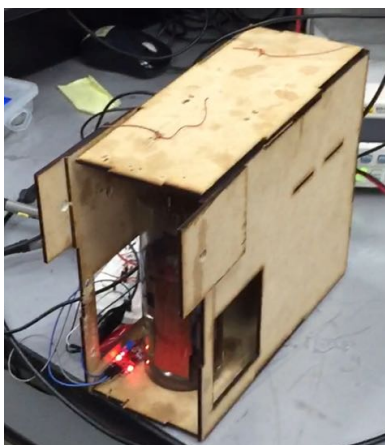


Figura 4 Montaje físico de la planta

La interfaz gráfica general utilizada para todos los controladores se muestra a continuación:

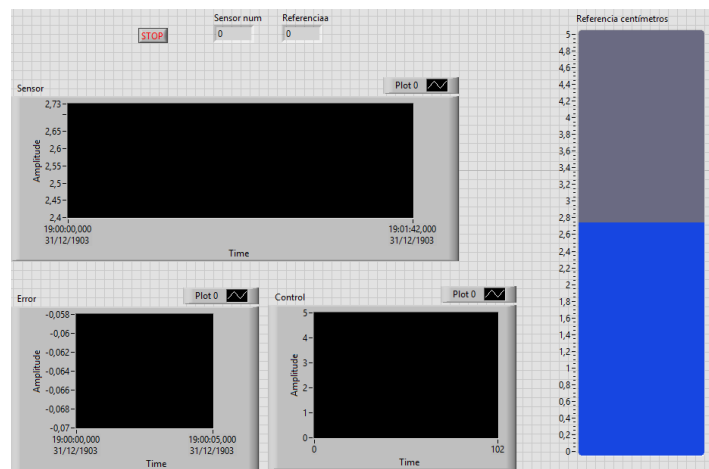


Figura 5: Interfaz gráfica en LabView

Para la planta, los centímetros o distancia se comienza a medir desde la superficie de la mesa hacia arriba, en ese caso 1cm es lo más cercano a la superficie y 5 cm es el punto más alto al cual la masa puede llegar, adicional a esto la referencia el slider se encuentra en centímetros y la del wavechart o gráfico se encuentra en voltios, entra más cercano a la superficie se encuentre la masa, el voltaje de salida es mayor, para el sensor de efecto hall utilizado.

PID continuo discretizado.

Teniendo la planta en continuo:

$$\frac{1.606}{s^2 + 2.861s + 2.047}$$

y aplicando un controlador PID continuo, el cual tiene el siguiente polinomio:

$$PID = \frac{kds^2 + kps + ki}{s}$$

El sistema general resulta de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{PID.planta}{1 + PID.planta}$$

El polinomio característico resulta del denominador de $G(s)$, del cual se obtiene lo siguiente:

$$P_c = s^3 + s^2(1.606kd + 1) + s(1.606kp + 2.047) + 1.606ki$$

El polinomio deseado es de la forma:

$$(s^2 + 2\xi wn s + wn^2)(s + 5\xi wn)$$

Se requiere un tiempo de establecimiento de 2 segundos y un coeficiente de amortiguamiento de 0.7

$$wn = \frac{4}{\xi \cdot ts} = \frac{4}{(0.7)(2)} = 2.8571 \frac{rad}{s}$$

Luego el polinomio deseado resultante es:

$$P_d = s^3 + 14s^2 + 48.163s + 81.633$$

Igualando los coeficientes de ambos polinomios:

$$14 = 1.606kd + 1$$

$$48.163 = 1.606kp + 2.047$$

$$81.633 = 1.606ki$$

$$kd = 8.0946$$

$$kp = 28.7148$$

$$ki = 50.83$$

Ahora se procede a discretizar por tustin, eligiendo un tiempo de muestreo 30 veces menor al tiempo de establecimiento deseado, los valores obtenidos son:

$$q_0t =$$

$$151.8281$$

$$q_1t =$$

$$-269.8585$$

$$q_2t =$$

$$121.4190$$

PID discreto

Para el controlador PID en discreto se selecciona un coeficiente de amortiguamiento (zita) de 0.7 y un tiempo de establecimiento deseado de 4 segundos. El tiempo de muestreo se selecciona como la décima parte del tiempo de establecimiento deseado, siendo entonces de 400 ms. Se diseña entonces un PID con filtro y para este caso el polinomio deseado debe ser de 3 orden, se toma el método habitual en tiempo discreto $(z - re + j \cdot im) \cdot (z - re - j \cdot im)$ y además se multiplica por el polo no dominante universal $(z - 0.05)$. Realizando la realimentación del controlador por la planta, igualando el denominador de la función de transferencia de la realimentación con el polinomio deseado. Posteriormente utilizando la función <solve> de matlab se consigue despejar y obtener los valores q_0 , q_1 , q_2 y s_0 que conforman el controlador.

LGR

Se tiene la planta en lazo abierto:

```
sysLA =

      1.606
-----
s^2 + 2.861 s + 2.047

Continuous-time transfer function.
```

Y en lazo cerrado:

```
sysLC =

      1.606
-----
s^2 + 2.861 s + 3.653

Continuous-time transfer function.
```

La cual tiene la siguiente respuesta:

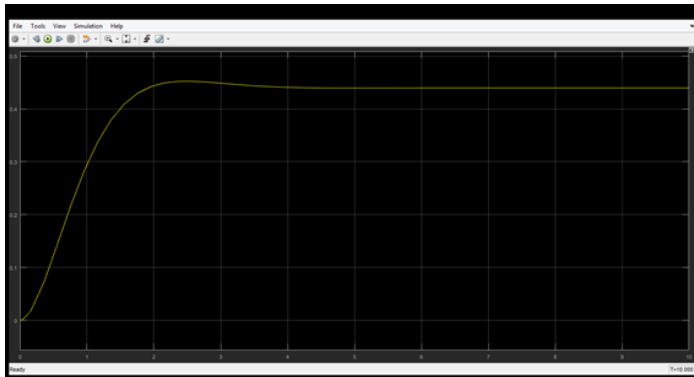


Figura 6: Respuesta de la planta en lazo abierto

Cálculo de zita y wn de la planta:

$$wn = \sqrt{3.653} = 1.9113 \text{ rad/s}$$

$$zita = \frac{2}{2 * wn} = 0.7486$$

$$ts = \frac{4}{(zita)(wn)} = 2.7957 \text{ seg}$$

Lo cual es acorde con la respuesta de la planta en LC puesto que su zita es igual a 0.7486, lo que indica una respuesta sub amortiguada.

OBJETIVOS DE CONTROL:

Se quiere un tiempo de establecimiento del 50% y un zita de 0.5

$$tsd = 0.5(2.7957) = 1.3979 \text{ seg}$$

$$wn = \frac{4}{(0.5)(1.3979s)} = 5.723 \text{ rad/s}$$

$$wd = \left(\frac{5.723 \text{ rad}}{s} \right) * \sqrt{1 - 0.5^2} = 4.9563 \text{ rad/s}$$

Se asume un tiempo de muestreo 20 veces menor, y se verifica que cumpla la condición ($ws > 8wd$):

$$Tm = \frac{1.3979s}{30} = 0.0466s$$

$$Ws = \frac{2 * \pi}{0.466s} = 134.8450$$

$$8wd = (8)(4.9563) = 39.6501$$

$$134.8450 > 39.6501 \text{ Cumple la condición}$$

$$s = -(zita)wn \pm jwd$$

$$z = e^{-(Tm)(zita)(wn) \pm jwd}$$

$$|z| = e^{-(Tm)(zita)(wn)} = e^{-(0.046)(0.5)(5.72)} = 0.8752$$

$$ang(z) = Tmwd = (0.046)(3.46) = 0.2309 \text{ rad}$$

$$z = 0.8519 + j 0.2003 \quad \text{Este representa el polo deseado}$$

Ahora se discretiza la planta en MATLAB por c2d con `zoh` y se obtiene:

```
sysd =
0.001668 z + 0.001595
-----
z^2 - 1.871 z + 0.8752

Sample time: 0.046596 seconds
Discrete-time transfer function.
```

La planta en discreto como contiene un integrador se puede expresar también así:

$$H(z) = \frac{0.0017(z + 0.9565)}{(z - 0.9358)(z - 0.9352)}$$

Se puede notar que la planta contiene un Zero en -0.9565 y dos polos en 0.9358 y 0.9352 respectivamente. Se calculan los ángulos que forman el Zero y los polos con respecto al polo deseado de la siguiente forma:

$$\phi_1 - \theta_1 - \theta_2 = -180^\circ$$

$$6.3208^\circ - 112.71^\circ - 112.5728^\circ = -218.96^\circ$$

El exceso de ángulo que se presenta es:

$$-218.96^\circ - (-180^\circ) = -38.96^\circ$$

Para eliminar este efecto se utiliza el compensador de tal forma que la suma de los ángulos sea igual a -180° .

Para conocer el valor de alfa:

Se puede notar que los polos de la planta se pueden anular entonces los zeros del compensador se encuentran en 0.9358 y 0.9352 (El sistema final controlado tiene que contener integrador) Por ende ya se puede conocer con facilidad el numerador que debe contener el COMPENSADOR, el cual para este caso es de la forma:

$$G_c(z) = K \frac{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)}{(z - 1)(z - \beta)}$$

El compensador hasta ahora va quedando:

$$G_c(z) = K \frac{(z - 0.9358)(z - 0.9352)}{(z - 1)(z - \beta)}$$

Para conocer el valor de beta:

Primero se debe reemplazar por el ángulo del polo menos dominante el cual ya se canceló con el numerador del compensador, y se debe cumplir lo siguiente:

$$\phi_1 - \theta_1 - \theta_\beta = -180^\circ$$

$$\theta_\beta = 180^\circ + \phi_1 - \theta_1$$

$$\theta_\beta = 180^\circ + 6.32^\circ - 12.71^\circ$$

$$\theta_\beta = 73.6046^\circ$$

$$\tan \theta_\beta = \frac{im}{re - \beta}$$

$$\beta = re - \frac{im}{\tan \theta_\beta}$$

$$\beta = 0.8519 - \frac{0.2003}{\tan(73.6^\circ)}$$

$$\beta = 0.8973$$

El compensador va quedando así:

$$G_c(z) = K \frac{(z - 0.9358)(z - 0.9352)}{(z - 1)(z - 0.8973)}$$

Para conocer el valor de K

La magnitud del producto entre la planta en lazo abierto y el compensador evaluado en el polo deseado debe ser igual a 1.

$$|Gc(z) \cdot H(z)|_{z=0.515+j0.428} = 1$$

$$\left| K \frac{(z - 0.9358)(z - 0.9352)}{(z - 1)(z - 0.8973)} \cdot \frac{0.0017(z + 0.9565)}{(z - 0.9358)(z - 0.9352)} \right|_{z=0.8519+j0.2003} = 1$$

En MATLAB se hace:

$$K = \frac{1}{\text{abs}(\text{subs}(|Gc(z) \cdot H(z)|, z, 0.8519 + j0.2003))}$$

K=16.8421

El compensador quedó:

$$Gc(z) = 16.8421 \frac{(z - 0.9358)(z - 0.9352)}{(z - 1)(z - 0.8973)}$$

Anulación de planta

La ecuación general para cualquier controlador por el método de anulación de planta está expresada como:

$$Dc(z) = \frac{1}{Gp(z)} \cdot \frac{M(z)}{1-M(z)}$$

Donde M(z) es el comportamiento deseado, o de una forma matemática, se puede describir de la siguiente forma:

$$M(z) = \frac{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}{z - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

Se define como $T = ts/5$, $\tau = ts/10$, siendo ts el tiempo de establecimiento deseado.

Oscilaciones muertas

Este controlador nos asegura oscilaciones muertas, quiere decir error en estado estable igual a cero, entonces el comportamiento deseado es $M(z) = 1 - (1 - Z^{-1})^n F(z)$, donde n es el orden del sistema, cuando el sistema es de segundo orden entonces el F(z) debe ser también de segundo orden. Se generan entonces

dos variables m1 y a1 que se deben hallar, y que para este caso luego de hallarlas sus respectivos valores.

$$Dc(z) = \frac{1}{Gp(z)} \cdot \frac{M(z)}{1-M(z)}$$

$$\frac{M(z)}{1-M(z)} = \frac{(1 + \text{zero} \cdot z^{-1}) \cdot m1 \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 + a1 \cdot z^{-1})}$$

Compensador en frecuencia

Para el diseño del compensador en frecuencia, primero se debe discretizar la planta como se realizó con los controladores anteriores. Luego se traslada la planta en discreto a la herramienta sisotool de matlab. Donde se diseña el compensador, primero seleccionando un zita y un tiempo de establecimiento deseado y se observa la respuesta a medida que se ubican polos y zeros en el lugar de las raíces así como se ajusta la ganancia de fase y magnitud en el diagrama de Bode, con el fin de obtener el controlador que permita que la planta responda de la manera deseada, ya que va indicando cada cambio hecho y cómo afecta la salida.

Servosistema

Para el diseño del servosistema discreto lo primero que se debe obtener son las matrices G y H del sistema. Las matrices G y H se obtienen de la siguiente manera:

$$G(T) = e^{A\tau} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - e^{-2\tau}) \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix}$$

$$H(T) = \left(\int_0^T e^{A't} dt \right) B$$

Siendo t el tiempo de muestreo.

Debido a que el servosistema se debe utilizar con las matrices del espacio de estados, por el método de

Ackerman, se deben hallar las matrices empaquetadas del sistema:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ C \cdot G & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} H \\ C \cdot H \end{bmatrix}$$

Para que con este valor hallar α de G empaquetada, que permite introducir los valores α del polinomio deseado.

$$\varphi(\hat{G}) = \hat{G}^3 + \hat{G}^2 \alpha_1 + \hat{G} \alpha_2 + I \alpha_3$$

Y luego utilizando el método de Ackerman con el cual hallamos la constante de realimentación y la constante integral.

$$K = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot [\hat{H} \quad \hat{G}\hat{H} \quad \hat{G}^2\hat{H}]^{-1} \cdot \varphi(\hat{G})$$

$$K = [k1 \quad k2 \quad ki]$$

Y el diseño del observador mediante oscilaciones muertas, como la planta es de segundo orden, el término α de G pasa a ser G^n siendo n el orden.

$$K_e = G^2 \cdot \begin{bmatrix} C \\ C \cdot G \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

PID continuo discretizado.

Simulando con el PID en continuo se obtiene lo siguiente:

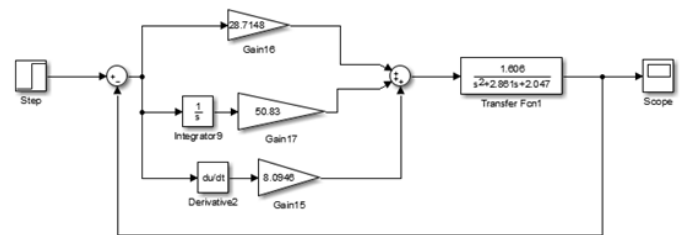


Figura 7 : Diagrama PID continuo

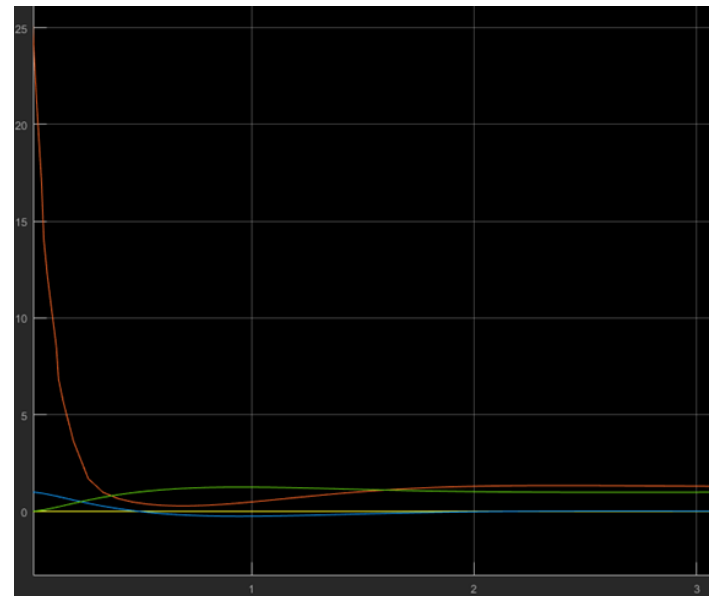


Figura 8 : Scope PID en continuo

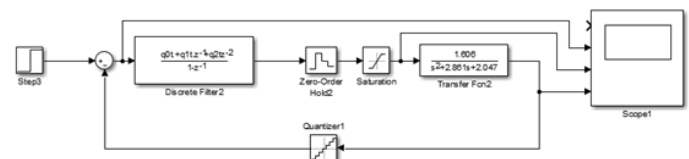


Figura 9 : Diagrama PID discretizado

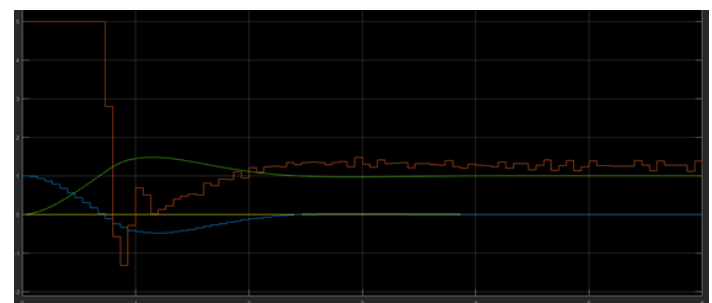


Figura 10 : Scope PID discretizado

Se puede observar que por causa del saturador hay un comportamiento un poco oscilatorio para la señal de control, la cual converge a aproximadamente 1,3.

PID discreto

Planta discretizada en un tiempo de muestreo de 0.4 s.

$$T_m = 0.4000$$

$$\text{disc} = \frac{0.08855 z + 0.06044}{z^2 - 1.129 z + 0.3184}$$

El polinomio deseado se expresa como:

$$Z_{\text{deseado}} = z^4 - 1.33z^3 + 0.575z^2 - 0.048z + 0.00112$$

Igualando el polinomio con el denominador del pid+filtro se obtienen las constantes:

$$T_m = 0.4000$$

$$q_0 = 5.3695$$

$$q_1 = -5.7617$$

$$q_2 = 1.7173$$

$$s_0 = 0.3225$$

Y se obtuvo la siguiente respuesta en simulink, que se observa en la figura , donde: Verde=Control, Azul=Referencia, Rojo=Error, Amarillo=Salida (respuesta del sistema).

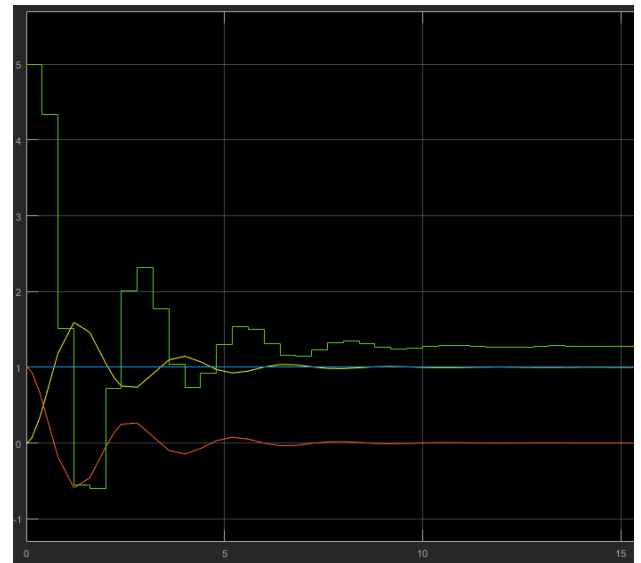


Figura 11 : Scope PID discreto-discreto

Ecuación en diferencias en LabView

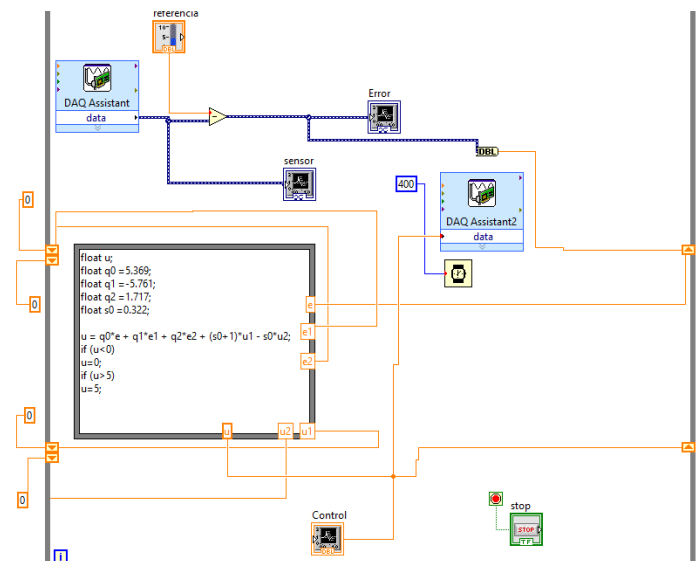


Figura 12 : Diagrama LabView PID discreto-discreto

LGR

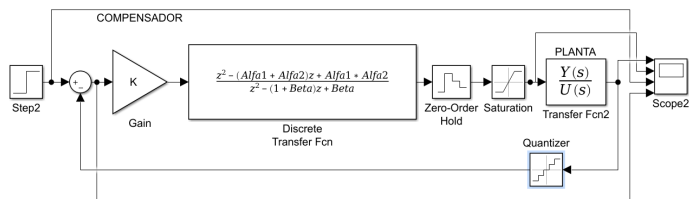


Figura 13: Diagrama Simulink LGR

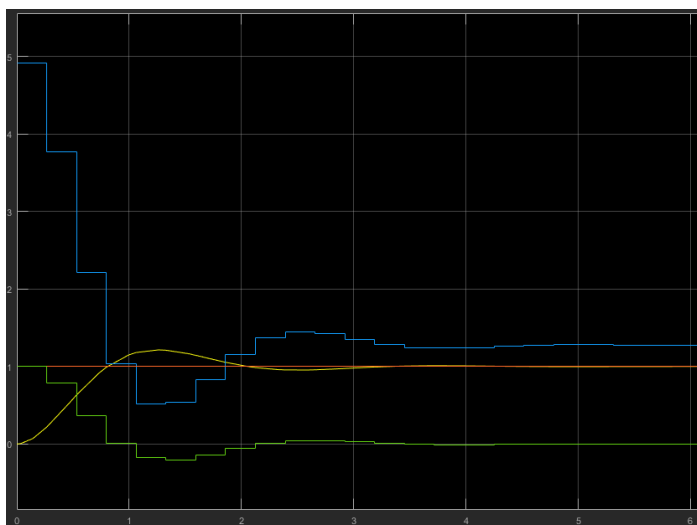


Figura 14: Scope LGR

Para la figura : Azul = control, Naranja = referencia, Verde = error, Amarillo = respuesta del sistema.

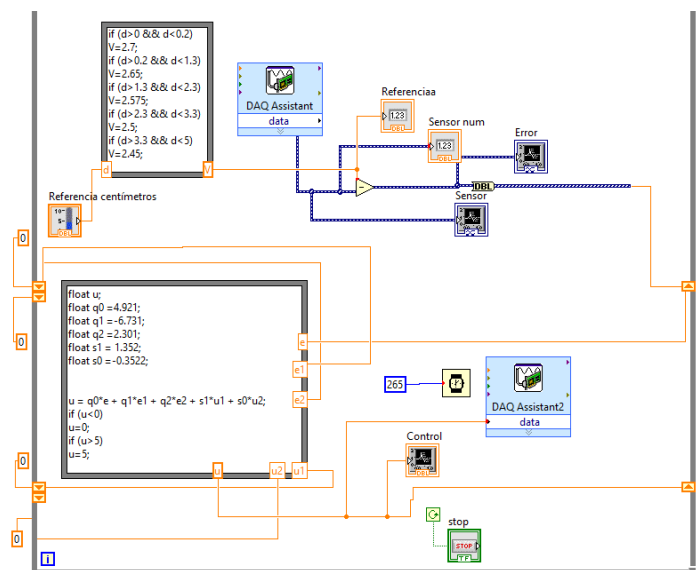


Figura 15 : Diagrama LabView LGR



Figura 16 : GUI LabView LGR

La señal de control que se muestra en la figura corresponde a la acción que desplazó la masa y cambió el voltaje del sensor de 2,45 a 2,65, donde en la señal de salida <Sensor> se observa una respuesta subamortiguada.

Anulación de planta

Se discretiza la planta utilizando un tiempo de muestreo de 419 ms.

$$\frac{0.09551 z + 0.06401}{z^2 - 1.098 z + 0.3016}$$

Con esto luego de realizar el procedimiento nombrado para este controlador, se obtiene la ecuación del controlador separada por el numerador y denominador.

$$\begin{aligned} \text{numDC1} &= 4.1197z^2 - 4.5234z + 1.2409 \\ \text{denDC1} &= z^2 - 0.32976z - 0.67024 \end{aligned}$$

Para usando la función de los coeficientes de MATLAB crear la función de transferencia que se utilizará en Labview

```
ukk =
4.1197*ek - 4.5234*ek1 + 1.2409*ek2 + 0.32976*uk1 + 0.67024*uk2
```

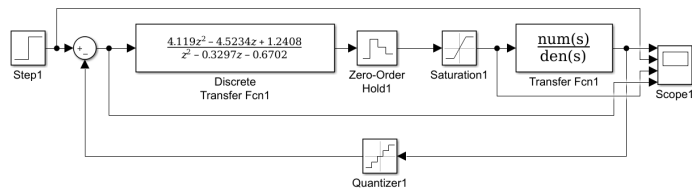


Figura 17 : Diagrama simulink Anulación de planta

En la simulación se obtuvo una respuesta sobreamortiguada tal cual responde una planta que tiene un controlador por anulación de planta.

Para la figura número : Rojo=control, Verde=error, Azul=referencia, Amarillo=Respuesta del sistema.

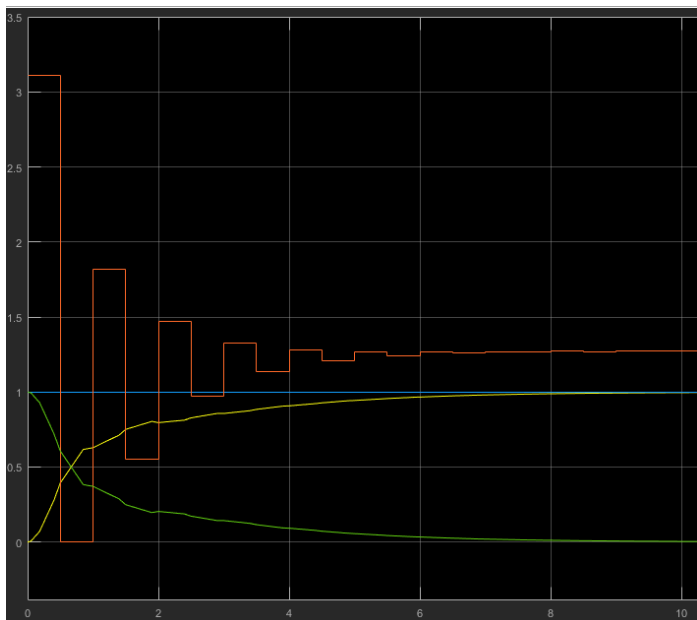


Figura 18 : Scope Anulación de planta

Se montan las constantes obtenidas en el script de LabView.

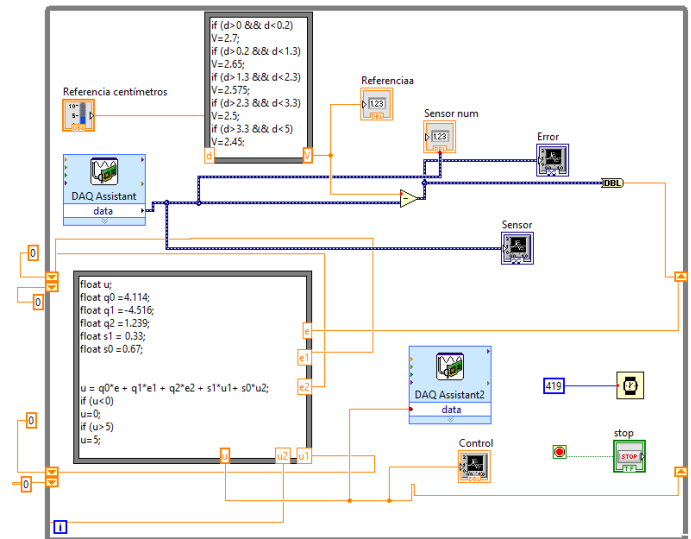


Figura 19 : Diagrama LabView Anulación de planta

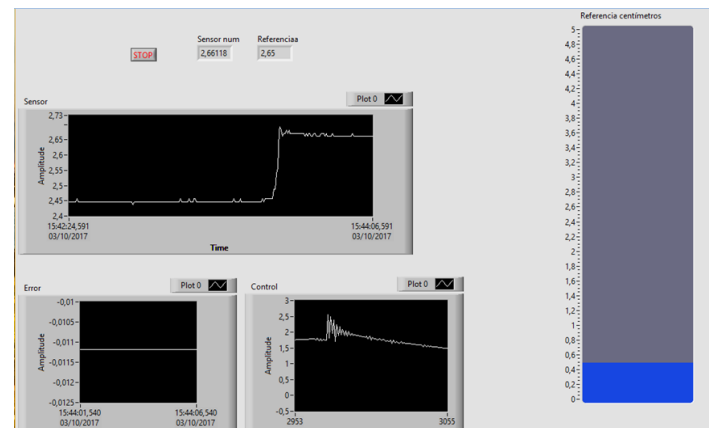


Figura 20 : GUI LabView Anulación de planta

Se observa que la señal de control al igual que en la simulación realizada en simulink, oscila más que los otros controladores hasta que llega al valor que le permita al sistema alcanzar la referencia.

Oscilaciones muertas

En oscilaciones muertas el tiempo de muestreo (ts) se selecciona como el tiempo de establecimiento deseado (tss) dividido en el orden de la planta. $t_s =$

tss/n, entonces para un tiempo de establecimiento de 1 segundo, el tiempo de muestreo es 500 ms y la planta discretizada queda de la siguiente manera.

$$\frac{0.1265 z + 0.07842}{z^2 - 0.9781 z + 0.2392}$$

Los valores de m1 y a1 haciendo uso de la ecuación nombrada en el procedimiento y sabiendo que el zero de la discretización se ubica en 0.6202, son los siguientes:

m1 = 0.6172 y a1 = 0.3828, siempre el resultado de la suma de ambos debe ser de 1, lo cual signific que se realizó bien el procedimiento.

Sabiendo lo anterior, la ecuación en diferencias queda de la siguiente manera.

$$ukk = 4.881 \cdot ek - 4.7739 \cdot ek1 + 1.1675 \cdot ek2 + 0.61721 \cdot uk1 + 0.38279 \cdot uk2$$

La respuesta en simulink para este controlador se encuentra a continuación, en donde en el Scope: Verde=Control, Naranja=Error, Azul=Referencia y la amarilla es la respuesta del sistema, que se estabiliza en 1 segundo.

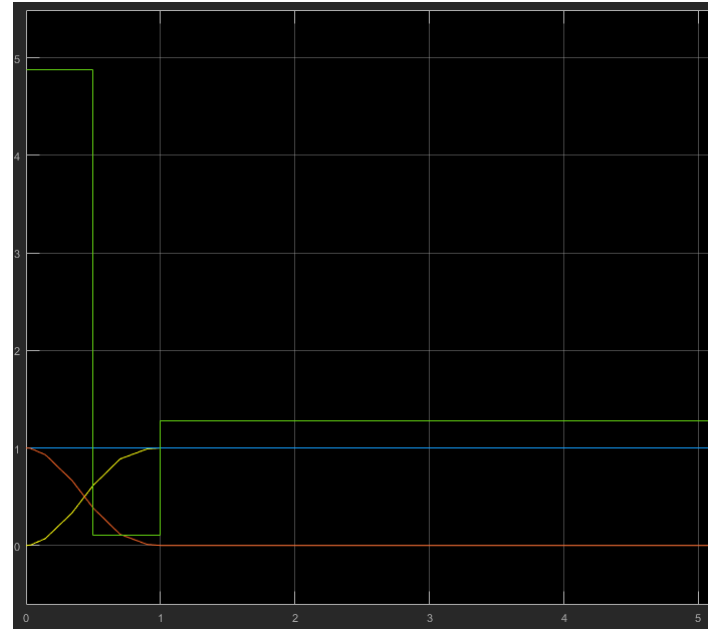


Figura 21 : Scope Oscilaciones muertas

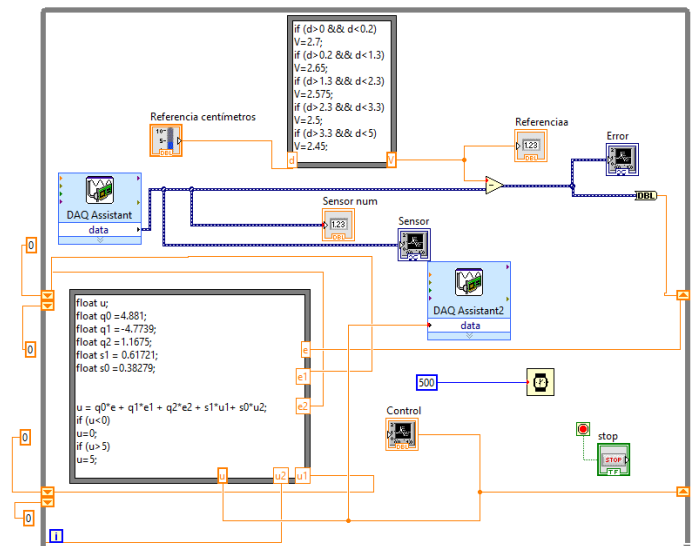


Figura 22 : Diagrama LabView Oscilaciones muertas

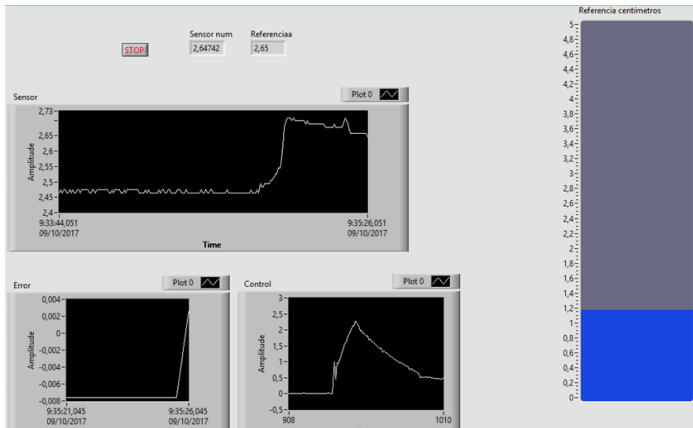


Figura 23 : GUI LabView Oscilaciones muertas

Se observa que la señal de control cuando tiene pendiente positiva solo se dirige a dos valores (de 0 a 1, y de 1 a 2,3)ya que se estabiliza en 2 muestras, como se puede comprobar en el scope de simulink. Y también se aprecia que la salida del sensor tiene un respuesta sobreamortiguada cuando se dirige de 2,47 a 2,69. En el screenshot luego se observa que se baja la referencia con el fin de apreciar el cambio en la señal de control, que en este caso empieza luego de alcanzar el valor de 2,5 toma una pendiente negativa.

Compensador en frecuencia

La planta discretizada para un tiempo de muestreo de 0.15 segundos, queda de la siguiente manera:

$$\frac{0.01568 z + 0.01359}{z^2 - 1.614 z + 0.6511}$$

Luego se procedió a tomar un η de 0.7 y un tiempo de establecimiento.

Se muestra a continuación el diagrama de Bode y el lugar de las raíces que son característicos del compensador diseñado.

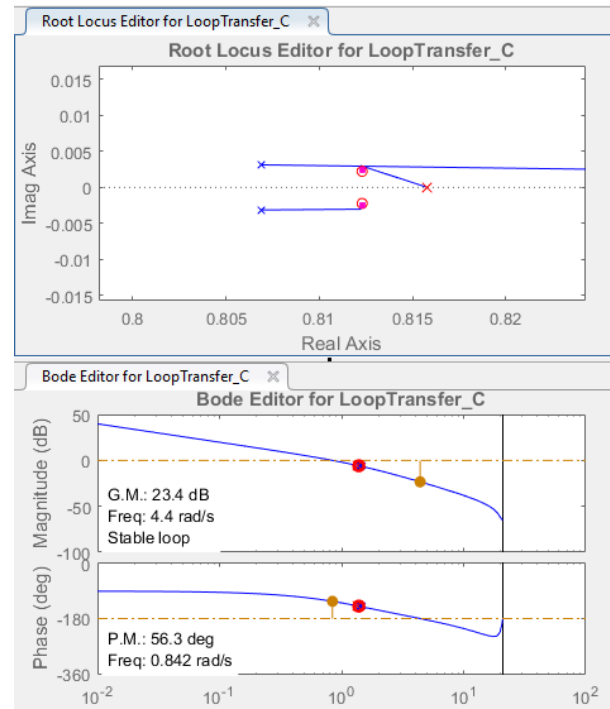


Figura 24: Diagrama de Bode y lugar de las raíces Compensador en frecuencia

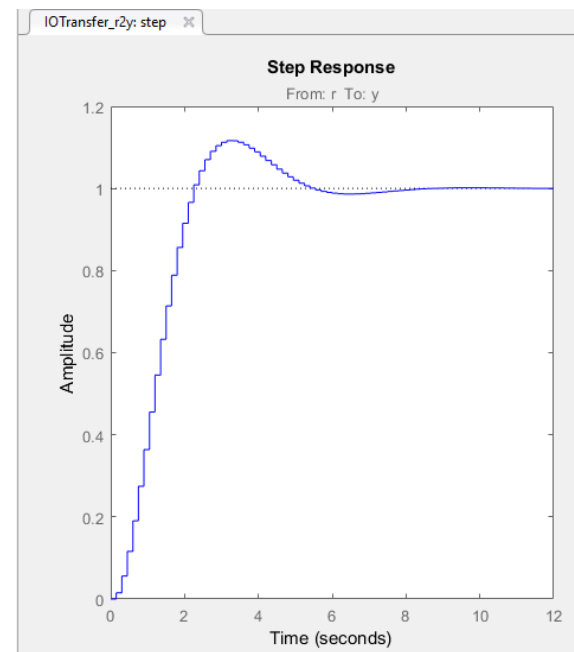


Figura 25 : Visualización de la respuesta esperada Compensador en frecuencia

Name: C
Sample Time: 0.15
Value:
0.97496 (z^2 - 1.625z + 0.6598)

(z-1) (z-0.8158)

Esta es la función de transferencia del compensador que luego se exportará al workspace con el fin de obtener resultados utilizando las funciones step y feedback de matlab.

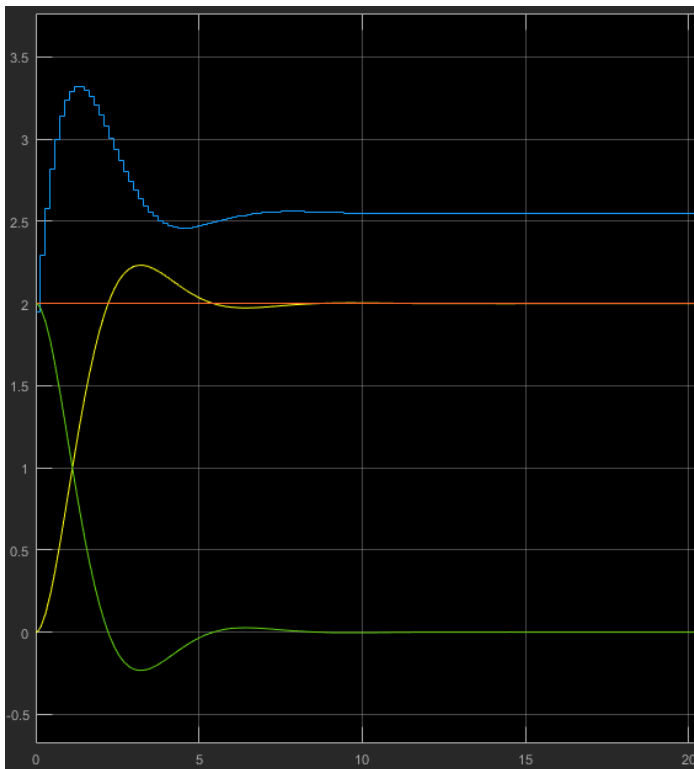


Figura 26 : Scope simulink Compensador en frecuencia

En la figura anterior se tiene la simulación realizada en simulink del compensador en frecuencia, donde la señal azul corresponde a la señal de control, verde es el error, la señal naranja es la referencia y la señal amarilla es la respuesta del sistema.

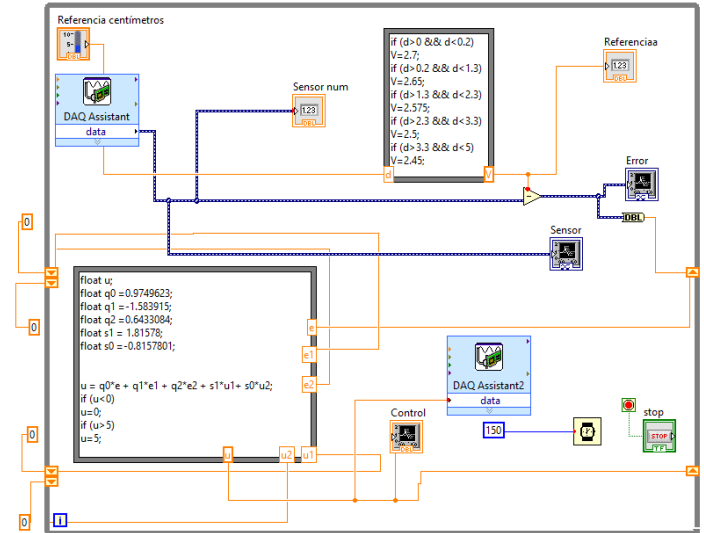


Figura 27 : Diagrama LabView Compensador en frecuencia

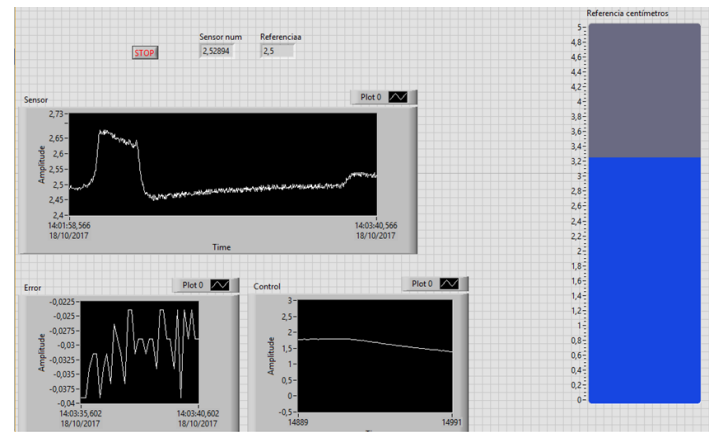


Figura 28 : GUI LabView Compensador en frecuencia

Se observa que la respuesta del sensor se presenta subamortiguada cuando se varió la referencia de 2,65 a 2,5 teniendo un overshoot que alcanza el valor de 2,45 ya que el tiempo de establecimiento que tiene la planta y como se observa en el scope del simulink, es que en 10 segundos se estabiliza por completo.

Servosistema

Matrices del sistema utilizando la función tf2ss de Matlab.

```
A =
    -2.8610    -2.0470
     1.0000         0
B =
     1
     0
C =
         0     1.6060
D =
     0
```

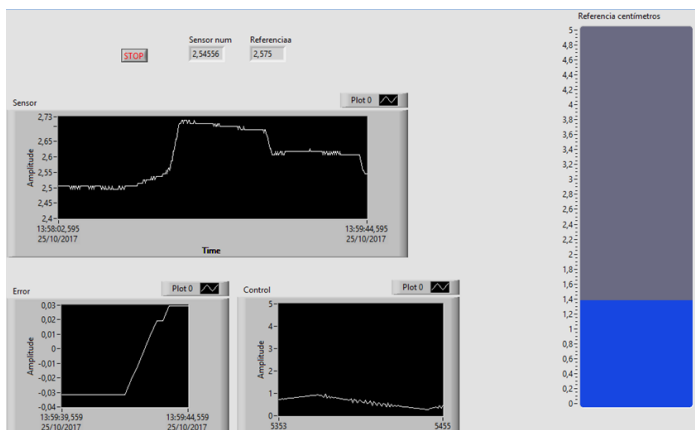



Figura 32 : GUI LabView Servosistema

4. CONCLUSIONES

- El servosistema y el control por oscilaciones muertas fueron los controladores que mejor funcionaron de los 7.
- El controlador PID discretizado funcionó en la simulación pero no en la implementación debido a que las constantes obtenidas fueron muy grandes y esto hizo que la señal de control se saturara demasiado.
- Se logró identificar cómo mejoró el control por oscilaciones muertas con respecto a la anulación de planta, puesto que en la última la señal de control presentaba pequeñas oscilaciones antes de llegar a su punto de convergencia, con oscilaciones muertas se eliminó ese efecto oscilatorio.
- Se logró utilizar SISOTOOL para el diseño del compensador en frecuencia manipulando el tiempo de establecimiento y el coeficiente de amortiguamiento para obtener un controlador de fácil manejo en LABVIEW.
- No se identificó una nueva función de transferencia para la planta, ya que la identificación obtenida en la práctica anterior respondió adecuadamente para todos los controladores.

5. REFERENCIAS

[1] K. Ogata, Sistemas de control en tiempo discreto, University of Minnesota, Prentice Hall, 2ed, 1996.

[2] Intro a amplificadores operacionales [en línea] Disponible en:

<http://www.forosdeelectronica.com/fl6/intro-amplificadores-operacionales-mini-tutorial-408/>

[3] Amplificador contrafásico o push-pull [en línea] Disponible en:

<https://unicrom.com/amplificador-contrafasico-o-push-pull/>