

# Almacenamiento de energía calorífica

Cedillo, Fernando., Echeveste, Mauricio., Santana, Alfredo., Zúñiga, David., García, Alejandro., Martínez, Edson.  
{A01378820, A01169714, A01373241, A01378821, A01370882, A01377998}@itesm.mx

Tecnológico de Monterrey

**Resumen**—En el presente documento se realiza un estudio detallado del modelo de masa constante para un evento de transferencia de calor. A partir del uso de un material de tipo MCF y su implementación en el modelo de masa constante, el análisis de la transición entre dos fases es realizado para encontrar las curvas características del comportamiento de esta configuración. A partir de dicho estudio, la posición de la interfaz, la longitud de la barra, el cambio de las masas y la energía absorbida fueron calculadas.

**Palabras clave**— Energía, MCF, transferencia, calor, fase, fusión, sólido, líquido, interfaz, temperatura, condiciones de frontera.

## I. NOMENCLATURA

*MCF: Material de Cambio de Fase*

$m$  = masa

$\xi(t)$  = Posición de la interfaz en tiempo  $t$

$\rho$  = densidad

$L_f$  = Calor latente de fusión

$C_{l(s)}$  = Calor específico

$T_{l(s)}$  = Temperatura

$k_{l(s)}$  = Coeficiente de conductividad térmica

$L$  = Longitud de la barra

$Q$  = Calor (Energía)

## II. OBJETIVO

Para esta actividad de semana-i, se busca determinar soluciones de la ecuación de movimiento y posición de la zona de interfase líquido-sólido en un sistema de almacenamiento térmico de cambio de fase y masa constante de una placa de Xylitol, así como la evolución de la energía absorbida por ambas fases en el tiempo. Esto a partir de un análisis asistido por computadora con el uso de MATLAB y la comparación con el estado estacionario para el régimen asintótico en el tiempo.

## III. INTRODUCCIÓN

En la práctica ingenieril, la selección y uso de materiales es fundamental para el diseño de nuevas herramientas o dispositivos. En aplicaciones que involucran significativamente condiciones de transferencia de calor, las características y propiedades de ciertos materiales son

aprovechados para implementar diseños en aplicaciones funcionales. Estos fenómenos se deben a propiedades como el calor latente, el calor sensible, conductividad térmica y temperatura de fusión.

El calor sensible se define como la cantidad de calor que absorbe o libera un cuerpo sin que ocurra un cambio de fase, mientras que el calor latente es la cantidad de calor liberada o absorbida por un cuerpo al cambiar de fase.

Los MCF son aquellos cuyo calor latente es alto y, a la temperatura de cambio de fase (generalmente sólido-líquido) son capaces de almacenar grandes cantidades de energía, pudiendo liberar hasta 100 veces más energía que la liberada con el calor sensible. Hoy en día, toman un papel importante en el desarrollo de nuevas tecnologías sustentables, siendo usados para mejorar la eficiencia de almacenamiento de sistemas termosolares, o geotérmicos, entre otros.

A nivel residencial son usadas para almacenar por largos periodos de tiempo energía calorífica captada del sol, y disponerla posteriormente para su uso. Estos son generalmente sales hidratadas, parafinas, ácidos grasos o mezclas de ácidos grasos.

## IV. TEORÍA

En el presente estudio, se analiza el comportamiento de un sistema en el cual una placa de MCF es sometida a distintas temperaturas en cada uno de sus bordes. Estas condiciones son conocidas como condiciones de frontera isotérmica en donde dichas temperaturas permanecen constantes para todo tiempo. Una de estas temperaturas se fija a un valor mayor de la temperatura de fusión del material del lado izquierdo de la placa, la cual se conoce como  $TH$ . Por otro lado, la segunda temperatura se fija a un valor menor a la temperatura de fusión del lado derecho de la placa conocido como  $TC$ . Como consecuencia, dos fases interactúan de tal manera que el flujo de calor (*en una sola dirección*), provoca un cambio de fase en el tiempo a través del material, siendo así desplazada la interfase entre ellas. Asumiendo que la diferencia de los flujos es diferente a cero, el calor restante es utilizado para cambiar de fase, por lo tanto, la interfase se desplaza.

### A. Ecuaciones / Métodos numéricos.

Para llevar a cabo el análisis desarrollado en este proyecto, la utilización de diferentes ecuaciones que describen el comportamiento del calor transferido a través de la placa fue necesaria. A partir de dichas ecuaciones, la descripción del comportamiento del material a lo largo del tiempo fue realizado. El modelo de balance de calor integral fue utilizado para este estudio y es mostrado a continuación en la figura 1.

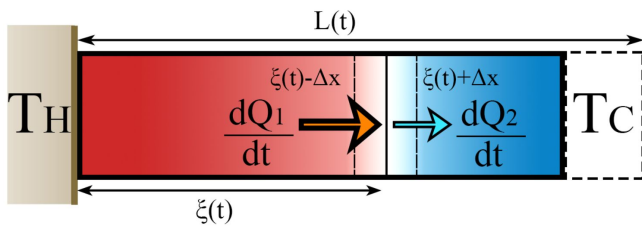


Fig. 1. Diagrama del sistema con variables de estudio

En este modelo, la ubicación inicial del extremo izquierdo de la barra será la referencia del sistema, y este se asumirá como fijo (empotrado) a dicha posición de referencia en todo instante del fenómeno; por tanto, la expansión del elemento es permitida únicamente hacia el lado derecho.

Posteriormente, se determinó una condición de flujo través de la placa a partir de la ecuación de conductividad. Dado que el flujo de la fase líquida del material es mayor al flujo de la fase sólida, podemos asegurar que la diferencia de ambos valores de flujos debe ser mayor a cero, ya que existe una cantidad de calor que se utiliza para cambiar de fase.

Así:

$$\frac{dQ_l}{dt} - \frac{dQ_s}{dt} > 0 \quad (1)$$

Discretizando las expresiones de flujo para cada fase, si se toma en cuenta que las derivadas correspondientes serán negativas:

$$\frac{dQ_l}{dt} = -k_l \frac{T_l(\xi(t), t) - T_l(\xi(t) - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (2)$$

$$\frac{dQ_s}{dt} = -k_s \frac{T_s(\xi(t) + \Delta x, t) - T_s(\xi(t), t)}{\Delta x} \quad (3)$$

En el límite, cuando  $\Delta x$  tiende a un valor 0:

$$\frac{dQ_l}{dt} \lim_{x \rightarrow 0} = -k_l \left. \frac{\delta T_l(x, t)}{\delta x} \right|_{x=\xi(t)} \quad (4)$$

$$\frac{dQ_s}{dt} \lim_{x \rightarrow 0} = -k_s \left. \frac{\delta T_s(x, t)}{\delta x} \right|_{x=\xi(t)} \quad (5)$$

Hasta ahora, no se ha considerado el cambio volumétrico que existirá debido al cambio de densidad entre fase y fase; continuar con el análisis de esta manera, resultará en un inexplicable cambio de masa del sistema. Para atender lo anterior, es necesario determinar una expresión que relacione las masas de cada fase, con una masa total que siempre es constante.

Por lo anterior, fue necesario involucrar otra ecuación que garantizara el cumplimiento de la conservación de la masa. Considerando un área transversal constante, la longitud de la barra cambiará con respecto al tiempo.

$$m_{final} = m_{inicial} = m_t \quad (6)$$

$$m_{inicial} = \rho_l \xi(0) + \rho_s (x_s(0) - \xi(0)) \quad (7)$$

$$m_t = \rho_l \xi(t) + \rho_s (x_s(t) - \xi(t)) \quad (8)$$

Dado que la masa es constante, el cambio de esta en el tiempo es nulo.

$$\frac{dm}{dt} = \rho_l \frac{d\xi(t)}{dt} + \rho_s \left( \frac{dx_s(t)}{dt} - \frac{d\xi(t)}{dt} \right) = 0 \quad (9)$$

Ahora, dada la expresión (1), podemos decir que el flujo neto será el encargado de realizar el cambio de fase. Entonces, recordando la proposición de que una parte del sólido se va a convertir en líquido, la expresión de calor de fusión que relaciona la masa que cambia de fase con el calor latente del material es:

$$\Delta Q = L_f m_s(t) \quad (10)$$

Entonces  $\Delta Q$  en el tiempo:

$$\frac{dQ}{dt} = L_f \rho_s \frac{d\xi(t)}{dt} \quad (11)$$

Tomando en cuenta de (9) que los cambios de masa tanto en líquido como en sólido son los mismos pero de naturaleza opuesta, podemos sustituir el cambio de masa del sólido por el del líquido de la siguiente manera:

$$\rho_l \frac{d\xi(t)}{dt} = -\rho_s \left( \frac{dx_s(t)}{dt} - \frac{d\xi(t)}{dt} \right) \quad (12)$$

Igualando las ecuaciones de conservación de la masa y conservación de la energía obtenemos la ecuación de

movimiento de la interfase:

$$L_f \rho_l \frac{d\xi(t)}{dt} = -k_l \frac{\delta T_l(x,t)}{\delta x} \Big|_{x=\xi(t)} + k_s \frac{\delta T_s(x,t)}{\delta x} \Big|_{x=\xi(t)} \quad (13)$$

Igualando los flujos  $\frac{dQ_l}{dt} = \frac{dQ_s}{dt}$ , podemos obtener la siguiente ecuación cuando  $\xi$  obtiene su valor máximo; en el estado estacionario:

$$\xi_{lim} = \frac{k_l x_{lim} (T_F - T_H)}{k_s (T_C - T_F) + k_l (T_F - T_H)} \quad (14)$$

Para encontrar la elongación máxima de la barra, las masas fueron igualadas en el estado inicial y final del sistema, esto debido a la conservación de la masa. A partir de dicha igualación, la expresión que relaciona ambas masas resulta ser la siguiente.

$$\rho_l \xi(0) + \rho_s (x_s(0) - \xi(0)) = \rho_l \xi_{lim} + \rho_s (x_{s,lim} - \xi_{lim}) \quad (15)$$

De la ecuación anterior, sabemos que  $L_{lim} = x_{s,lim}$ , por lo tanto, sustituyendo la ecuación (14) y resolviendo para  $L_{lim}$  obtenemos:

$$L_{lim} = \frac{[\xi(0)(\rho_l - \rho_s) + \rho_s x_s(0)]}{\rho_s k_s (T_C - T_F) + \rho_l k_l (T_F - T_H)} \quad (16)$$

Una vez obtenidas las relaciones según las cuales cambiarán las dimensiones del sistema y la interfase, es necesario determinar la cantidad de energía almacenada por este tanto por el calor sensible, como por el calor latente. El proceso de absorción de calor sensible puede dividirse en cuatro etapas a partir de las cuales se determina, conservando el análisis de conservación de masa, el cambio de energía interna. Para resolverlo, primeramente se determinan las ecuaciones de posición de la interfase, de la longitud total de la placa, de las masas de cada fase y de la distribución de temperatura con la ayuda de un análisis asistido por computadora que implementa un método Runge Kutta.

En la primera etapa del proceso, la masa del líquido inicial hasta la interfase a un tiempo determinado elevará su temperatura en un intervalo de tiempo posterior. El cambio de energía interna será, entonces, el cambio de calor sensible que existe entre la diferencia de tiempos en esta masa. Esta es, en general, la energía que absorbe el líquido inicial al aumentar su temperatura.

$$\Delta U_I = A C_l \rho_l \left( \int_0^{\xi(t)} T_l(x, t + \Delta t) dx - \int_0^{\xi(t)} T_l(x, t) dx \right) \quad (17)$$

Por conservación de la masa, el cambio de masa en cada fase será el mismo en magnitud. Posteriormente, para calcular el calor sensible absorbido por el sólido previo a fundirse, se determina el volumen que dicha masa de sólido conformará. Al conocer dicho cambio del análisis anterior, podemos estimar la posición que delimita a dicho volumen, siendo  $x_a$  correspondiente. Luego, se considera que esta ya ha alcanzado la temperatura de fusión en este estado, y se calcula el cambio de energía interna mediante una diferencia. Esta energía representa a la energía absorbida por el sólido que se convierte a líquido para alcanzar la temperatura de fusión.

$$\Delta M_s = A \rho_s \int_{\xi(t)}^{x_a} dx \quad (18)$$

$$\Delta U_{II} = \Delta M_s C_s T_f - A C_s \rho_s \int_{\xi(t)}^{x_a} T_s(x, t) dx \quad (19)$$

Una vez que la masa de sólido ha cambiado de fase, se determina el calor sensible resultante de la elevación de temperatura de ésta; sin embargo, en este punto, debido a la menor densidad del líquido, el volumen total de la placa, y por tanto el de la masa que se ha fundido, cambia, desplazando los límites longitudinales de dicha masa. Esta energía es la absorbida para elevar la temperatura del líquido que se transformó superando la temperatura de fusión.

$$\Delta U_{III} = A C_l \rho_l \left[ \int_{\xi(t)}^{\xi(t+\Delta t)} T_l(x, t + \Delta t) dx \right] - \Delta M_s C_l T_f \quad (20)$$

Así pues, la masa de sólido que no cambió de fase, almacena también calor sensible al aumentar su temperatura en un intervalo de tiempo. Es importante considerar nuevamente el cambio volumétrico del sistema debido al cambio de fase de la masa sólida anteriormente analizada.

$$\Delta U_{IV} = A C_s \rho_s \left[ \int_{\xi(t+\Delta t)}^{L(t+\Delta t)} T_s(x, t + \Delta t) dx - \int_{\xi(t)}^{L(t)} T_s(x, t) dx \right] \quad (21)$$

La suma de las cuatro etapas serán la energía de calor sensible absorbido en el intervalo de tiempo.

La energía almacenada por la masa de sólido fundido en el cambio de fase debida al calor latente, será simplemente calculada por:

$$\Delta Q_f = L_f \Delta m_s \quad (22)$$

Siendo el cambio de masa:

$$\Delta m_s = A \rho_s [(L(t) - \xi(t)) - (L(t + \Delta t) - \xi(t + \Delta t))] \quad (23)$$

Finalmente, la energía total almacenada será la suma de la debida al calor latente, y la debida al calor sensible.

$$\Delta Q_T = \Delta Q_f + \Delta U_I + \Delta U_{II} + \Delta U_{III} + \Delta U_{IV} \quad (24)$$

#### V. DESARROLLO DE ACTIVIDADES

##### A. Comprobación de caso alterno

La energía igualada al flujo neto en la sección anterior corresponde, como se mencionó, a la energía del sistema aprovechada en el cambio de fase, a partir de la cual la interfase se desplazará. Para el análisis anterior, se fijó la posición de la superficie izquierda de la placa, forzando al sistema a expandirse hacia la derecha. A fin de comprobar la expresión encontrada, a continuación se asumirá que la posición de la superficie derecha se fijará, forzando al sistema a expandirse hacia la izquierda, hacia el negativo de la referencia longitudinal establecida.

Cuando el sólido se derrite:

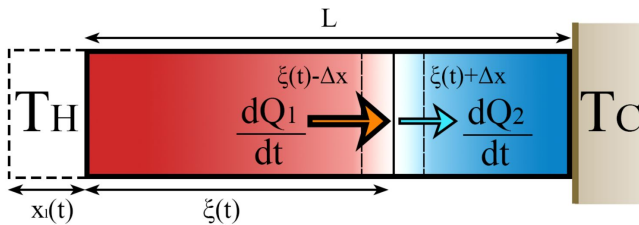


Fig. 2: Modelo con restricción en L cuando el sólido se derrite

##### Ecuación de balance de energía

$$\dot{q} = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)}$$

##### Ecuación de conservación de masa

$$\rho_l \left( \frac{d\xi(t)}{dt} - \frac{dx_L(t)}{dt} \right) + \rho_s \left( \frac{dL}{dt} - \frac{d\xi(t)}{dt} \right) = 0$$

Donde  $\frac{dL(t)}{dt}$  es constante y su derivada es igual a 0.

##### Ecuación de balance en la interfaz

$$L_f \rho_s \left( \frac{d\xi(t)}{dt} \right) = -k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} + k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)}$$

Cuando el líquido se solidifica:

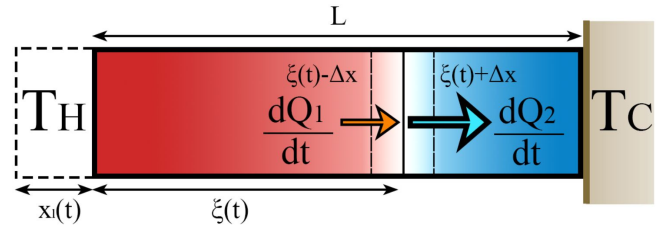


Fig. 3: Modelo con restricción en L cuando el líquido se solidifica

##### Ecuación de balance de energía

$$\dot{q} = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} + k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)}$$

##### Ecuación de conservación de masa

$$\rho_l \left( \frac{d\xi(t)}{dt} - \frac{dx_L(t)}{dt} \right) + \rho_s \left( \frac{dL}{dt} - \frac{d\xi(t)}{dt} \right) = 0$$

Donde  $\frac{dL(t)}{dt}$  es constante y su derivada es igual a 0.

##### Ecuación de balance en la interfaz

$$L_f \rho_s \left( \frac{d\xi(t)}{dt} \right) = -k_s \frac{\partial T_s}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)} + k_l \frac{\partial T_l}{\partial x} \Big|_{x=\xi(t)}$$

##### B. Desarrollo y creación del código

Para poder realizar el análisis experimental de las ecuaciones teóricas deducidas anteriormente, y obtener los resultados de las curvas de comportamiento de las variables previamente establecidas, es necesario desarrollar un código capaz de resolver el problema por medio de un método numérico. Debido a la naturaleza de este problema, el cual resulta ser un sistema de ecuaciones diferenciales, la implementación de un método numérico es esencial ya que la resolución del modelo de forma analítica es imposible de realizar. Resolver las diferentes ecuaciones diferenciales es un problema extremadamente complicado, el cual debe ser aproximado por un método numérico. Con esto en mente, un código previo de MATLAB fue utilizado para establecer la base fundamental de la estructura del código que fue construido. Para eso, es importante describir las funciones claves que permiten la resolución correcta de este modelo.

Debido a la complejidad del problema analizado, es necesario proponer una solución que nos permita aproximar un resultado. Como mencionamos anteriormente, el análisis analítico es imposible de resolver sin la utilización de un método numérico. Es por esta razón que el modelo puede ser resuelto de forma semi-analítica al proponer soluciones de distribuciones de temperatura. A esta proposición se le conoce como el método de Goodman,

en el cual las temperaturas de las fases son consideradas como distribuciones cuadráticas que están estructuradas en función de la posición y del tiempo. Estas propuestas de distribuciones se muestran a continuación.

$$T_\ell(x, t) = a_\ell(x - \xi(t)) + b_\ell(x - \xi(t))^2 + T_f$$

$$T_s(x, t) = a_s(x - \xi(t)) + b_s(x - \xi(t))^2 + T_f$$

Con estas funciones de temperatura propuestas, las condiciones de frontera isotérmicas son aplicadas en las respectivas distribuciones. Para el líquido, la temperatura en la posición 0 en todo tiempo debe ser igual a la  $TH$ . Adicionalmente, la temperatura del sólido en la posición  $L$  a todo tiempo, debe ser igual a la temperatura  $TC$ . La evaluación de las condiciones de frontera se observan a continuación.

$$b_1(t) \xi(t)^2 - a_1(t) \xi(t) + T_f = TH$$

$$T_f + a_2(t) (L - \xi(t)) + b_2(t) (L - \xi(t))^2 = TC$$

Gracias a las propuestas de temperatura, es ahora posible evaluar  $\xi(t)$  en la ecuación de balance de energía, o bien, en la *ecuación de movimiento de la interfaz (13)*. Por lo tanto, al realizar la evaluación de la  $\xi(t)$  en la ecuación de balance, el resultado es el siguiente.

$$L_F \rho_L \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = k_2 a_2(t) - k_1 a_1(t)$$

La ecuación anterior es la primer ecuación de la matriz de  $4 \times 4$  construida, por lo tanto, tres ecuaciones adicionales son necesarias. Para obtener dos de las tres expresiones restantes, un promedio de las ecuaciones de calor para el líquido y sólido es realizado a partir del método de la integral de balance de calor. Este método es sumamente útil porque nos permite obtener dos ecuaciones diferenciales ordinarias únicamente en función del tiempo. Estas ecuaciones diferenciales reducidas se observan a continuación. Nótese que las diferenciales de las ecuaciones ahora están únicamente en función del tiempo y no de la posición.

$$-C_1 \rho \left( \frac{\xi(t)^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} a_1(t) - \frac{\xi(t)^3}{3} \frac{\partial}{\partial t} b_1(t) - b_1(t) \xi(t)^2 \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) + a_1(t) \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) \right) - 2 k_1 b_1(t) \xi(t) = 0$$

$$C_2 \rho (L - \xi(t)) \left( 3 L \frac{\partial}{\partial t} a_2(t) + 2 \xi(t)^2 \frac{\partial}{\partial t} b_2(t) + 2 L^2 \frac{\partial}{\partial t} b_2(t) - 6 a_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) - 3 \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} a_2(t) - 6 L b_2(t) \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) - 4 L \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} b_2(t) + 6 b_2(t) \xi(t) \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) \right) - 2 k_2 b_2(t) (L - \xi(t)) = 0$$

Finalmente, para implementar el modelo de masa constante, necesitamos una ecuación más que relacione la conservación de masa del sistema. Para esto, la ecuación (9) es introducida al código. La ecuación de conservación de masa se observa a continuación.

$$\rho_l \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) + \rho_s \left( \frac{\partial}{\partial t} L(t) - \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) \right) = 0$$

Posteriormente, utilizando las condiciones iniciales,  $a_l(t)$  y  $a_s(t)$  fueron despejadas y dejadas en términos de  $\xi(t)$ ,  $b_l(t)$  y  $b_s(t)$ . Para nuestro caso de programación en MATLAB, la nomenclatura utilizada para las variables fueron 1 y 2 para el agua y el sólido respectivamente. Los despejes para  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  se observan a continuación.

$$\frac{b_1(t) \xi(t)^2 - TH + T_f}{\xi(t)} - \frac{T_f - TC + b_2(t) (L - \xi(t))^2}{L - \xi(t)}$$

Con las variables  $a_1(t)$  y  $a_2(t)$  en términos de  $b_1(t)$  y  $b_2(t)$ , la construcción de las matrices  $A$  y  $B$  fue realizada al sustituir los despejes anteriores en las ecuaciones previamente definidas. Con estas sustituciones, es ahora posible construir la matriz de coeficientes  $A$  de los diferenciales y la matriz  $B$  de “constantes”. Esta construcción de matrices se lleva a cabo a partir de una función encargada de extraer el diferencial y asignar solamente el coeficiente de la misma en una posición particular de una matriz  $A$ . Posteriormente, todos los términos de las ecuaciones que no poseen un término diferencial, son asignados a la matriz  $B$  la cual es un vector columna.

Con estas asignaciones, las matrices fueron recopiladas. Estas matrices se observan a continuación.

$$AA = \begin{pmatrix} L_f \rho_l & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Cl \rho_l (y_2 y_1^2 - TH + T_f)}{2} & -\frac{Cl \rho_l y_1^3}{6} & 0 & 0 \\ \frac{Cs \rho_s (y_3 y_1^2 - 2 y_3 y_1 y_4 + y_3 y_4^2 - TC + T_f)}{2} & 0 & \frac{Cs \rho_s (y_1 - y_4)^3}{6} & 0 \\ \rho_l - \rho_s & 0 & 0 & \rho_s \end{pmatrix}$$

$$BB = \begin{pmatrix} ks \frac{(T_f - TC + y_3 (y_1 - y_4)^2)}{y_1 - y_4} - \frac{kl (y_2 y_1^2 - TH + T_f)}{y_1} \\ 2 kl y_1 y_2 \\ -2 ks y_3 (y_1 - y_4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahora, para poder resolver el problema, los valores numéricos de las propiedades de los materiales fueron asignados a dichas ecuaciones. Para el xylitol, las propiedades utilizadas se muestran a continuación.

TABLA I  
PROPIEDADES DEL XYLITOL

	Líquido	Sólido
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1344.6	1505
$C_p$ [J/kgK]	2730	1270
$k$ [W/mK]	0.36	0.52
$L_f$ [J/kg]	237600	
$T_f$ [K]	363.15	

Por lo tanto, las matrices resultantes de este problema son:

$$AA = \begin{pmatrix} 319476960 & 0 & 0 & 0 \\ 433559102942085065 & -7882892780765183 y_1^2 y_2 & -7882892780765183 y_1^3 & 0 \\ 2147483648 & 4294967296 & 12884901888 & 0 \\ 955675 y_3 y_1^2 - 1911350 y_3 y_1 y_4 + 955675 y_3 y_1^2 + 9556750 & 0 & \frac{955675}{3} (y_1 - y_4)^3 & 0 \\ -\frac{802}{5} & 0 & 0 & 1505 \end{pmatrix}$$

$$BB = \begin{pmatrix} \frac{13}{25} (y_3 (y_1 - y_4)^2 + 10) - \frac{9}{25} (y_1^2 y_2 - 110) \\ \frac{18 y_1 y_2}{25} \\ -\frac{26 y_3 (y_1 - y_4)}{25} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, las condiciones iniciales del modelo deben ser planteadas para poder comenzar con la solución del problema. Estas condiciones se plantean en las ecuaciones de distribución de temperatura a partir del valor inicial de  $\xi(0)$  y sus condiciones de frontera en el tiempo inicial, esto es, en  $t=0$ . Evaluando y obteniendo  $b_1(0)$  y  $b_2(0)$ , la solución fue ejecutada en un intervalo de  $20 \times 10^6 s$  a partir del método numérico de Runge-Kutta. Con esta solución, una matriz con los valores de  $\xi(t)$ ,  $b_1(t)$ ,  $b_2(t)$  y  $L(t)$  para diferentes tiempos fue obtenida. Estos valores fueron utilizados para graficar el comportamiento de la interfaz y de la longitud de la barra a través del tiempo en las cuales, los valores límites (véase las ecuaciones 14 y 16) fueron desplegados para observar la convergencia al estado estacionario.

Después de haber resuelto el problema y haber encontrado el comportamiento de la interfaz y la longitud de la barra, se programaron las operaciones correspondientes para el cálculo de la energía total absorbida del sistema. Durante la teoría, las cuatro distintas etapas fueron explicadas y las expresiones que calculan las energías sensibles fueron deducidas. Debido a que poseemos los perfiles de temperaturas de Goodman, los datos de tiempo, distancias de la interfaz y distancias de la longitud, es posible desarrollar las integrales correspondientes para obtener los perfiles característicos de las energías durante las diferentes etapas de absorción. Para este proceso, una serie de evaluaciones fue realizada en

intervalos de tiempo para obtener los diferenciales de energía de cada etapa.

Posterior al análisis transitorio de las energías, los valores límite fueron calculados al considerar las energías en el estado estacionario. Debido a que nuestro modelo es más simple que el estudiado en la referencia [1], la expansión térmica es despreciada y el valor  $\beta$  es tomado como cero. Con esta suposición, las ecuaciones límite de las etapas de energía fueron introducidas y los calores en el estado estacionario fueron obtenidos. Asimismo, se pueden obtener los valores límite si se utilizan las ecuaciones de energía planteadas evaluando un tiempo futuro con tendencia a infinito.

Haciendo uso del valor de la energía total absorbida se estimó el costo que la generación de esta ocasionaría si se utilizara gas natural y gas LP, al ser estos los tipos de gas comúnmente utilizados en hogares; ya que este modelo es utilizable en este tipo de aplicaciones. Para ello, fue necesario investigar el poder calorífico de ambos combustibles, así como su costo por litro, estos datos se muestran en la tabla II.

TABLA II  
PODERES CALORÍFICOS Y PRECIOS DEL GAS NATURAL Y DEL GAS LP.

	Gas Natural	Gas LP
PC [MJ/m <sup>3</sup> ]	38	46
Precio [\$/L]	4.16	10.99

Con estos datos y haciendo uso de la siguiente ecuación, se obtuvo el volumen en litros de cada gas necesario para generar lo equivalente a la energía total absorbida por el modelo. Para ello es necesario conocer el valor de la energía total absorbida ( $Q_{total}$ ) y el poder calorífico de cada gas ( $PC$ ).

$$V = \frac{Q_{total}}{PC} \cdot 1000 \quad (25)$$

Posteriormente, se calculó el costo ( $C$ ) con la siguiente ecuación utilizando el volumen de cada gas y su precio ( $P$ ).

$$C = V \cdot P \quad (26)$$

Asimismo, se obtuvo el tiempo de establecimiento de la energía absorbida total. Esto se llevó a cabo considerando el tiempo de establecimiento como el instante en que el valor de la energía total transiente alcanza el 98% del valor de la energía total límite.



Finalmente, para facilitar la introducción de datos y automatizar el proceso de cálculo, una interfaz gráfica fue programada en MATLAB en la cual, distintos tipos de materiales pueden ser introducidos, tales como el MCF *Nitrato de sal*. En dicha interfaz, las propiedades térmicas del material y el intervalo de tiempo puede ser modificado, y las distintas curvas características pueden ser desplegadas. Esta interfaz gráfica se muestra a continuación.

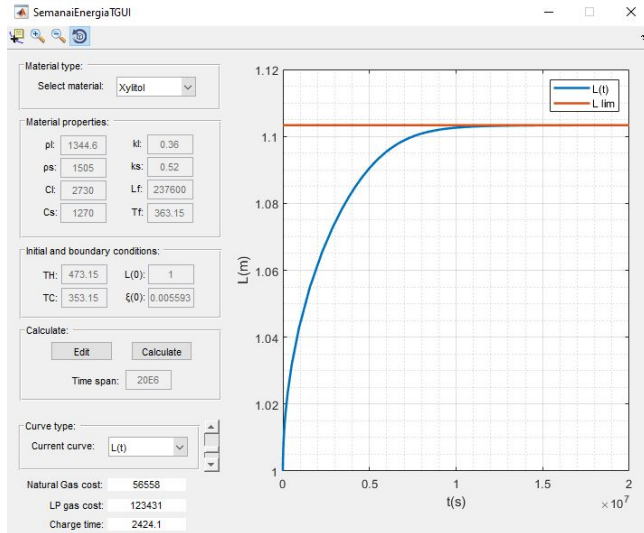


Fig. 4: Interfaz gráfica

## VI. RESULTADOS

A partir de la resolución del método numérico, la matriz de resultados del método numérico fue utilizada para graficar el comportamiento de la longitud del material a través del tiempo, así como el comportamiento de la interfase entre ambos estados del material. En estas gráficas la solución al estado estacionario, al igual que al estado transiente es mostrada. Adicionalmente, la curva del comportamiento de las masas fue obtenida en la cual, la relación entre la masa del sólido y líquido es observada. Para todos estos casos, los valores de el estado estacionario, fueron graficados a la par para corroborar la convergencia del modelo estudiado.

Por otro lado, las curvas de energía fueron calculadas en las cuales, el calor sensible, el calor latente y el calor total fueron graficados en su comportamiento transiente y su convergencia con el estado estacionario.

Asimismo, los perfiles de las distribuciones de temperatura para el sólido y el líquido fueron calculados. A partir de la resolución del problema previamente descrito, las funciones de temperatura fueron evaluadas en distintos tiempos para obtener las distribuciones a través del movimiento de la interfaz. Todos estos resultados pueden ser observados de forma detallada en las siguientes figuras.

Los costos calculados de cada gas se muestran en la tabla III, así como los volúmenes necesarios de cada uno.

TABLA III  
VOLÚMENES Y COSTOS ESTIMADOS DEL GAS NATURAL Y DEL GAS LP.

	Gas Natural	Gas LP
V [L]	13,596	11,231
Costo [\$]	56,557.972	123,430.917

El tiempo de establecimiento o de “recarga” observado fue de como se observa en la figura 6:

$$t_s = 2,424.096 \text{ horas}$$

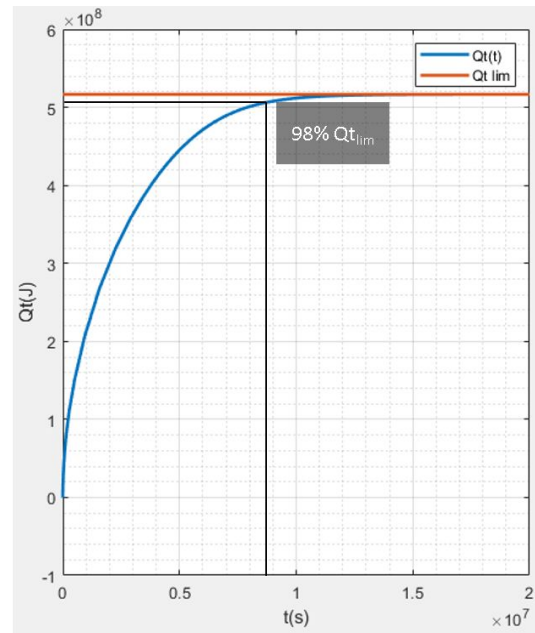


Fig 5. Tiempo de carga estimado.

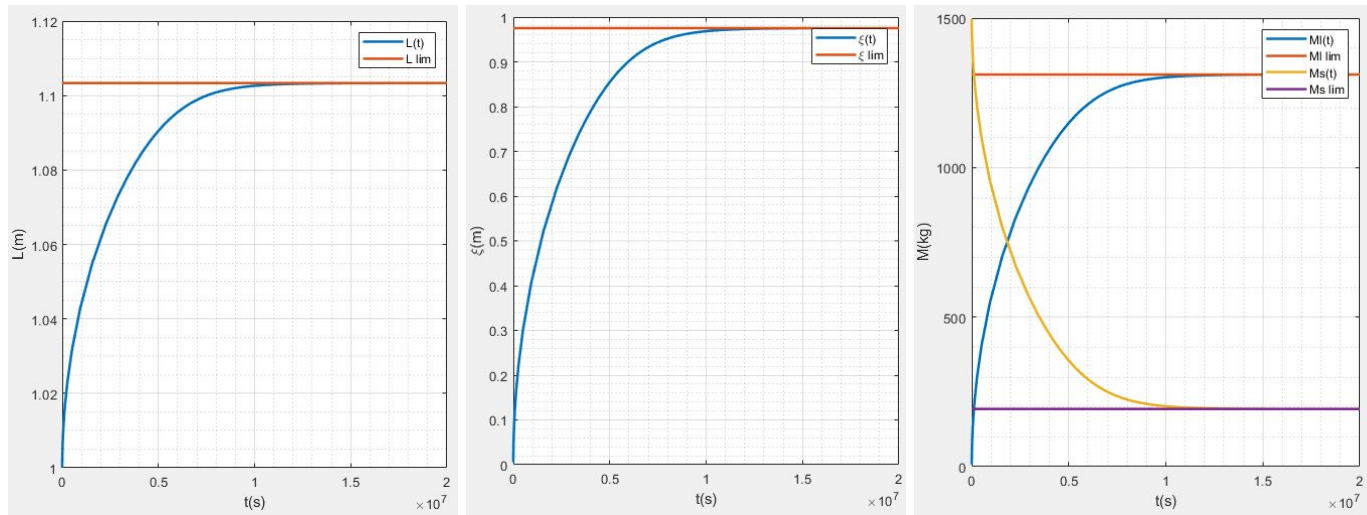


Fig.6: a) Evolución de  $L$  b) Evolución de  $\xi$  c) Evolución de las masas

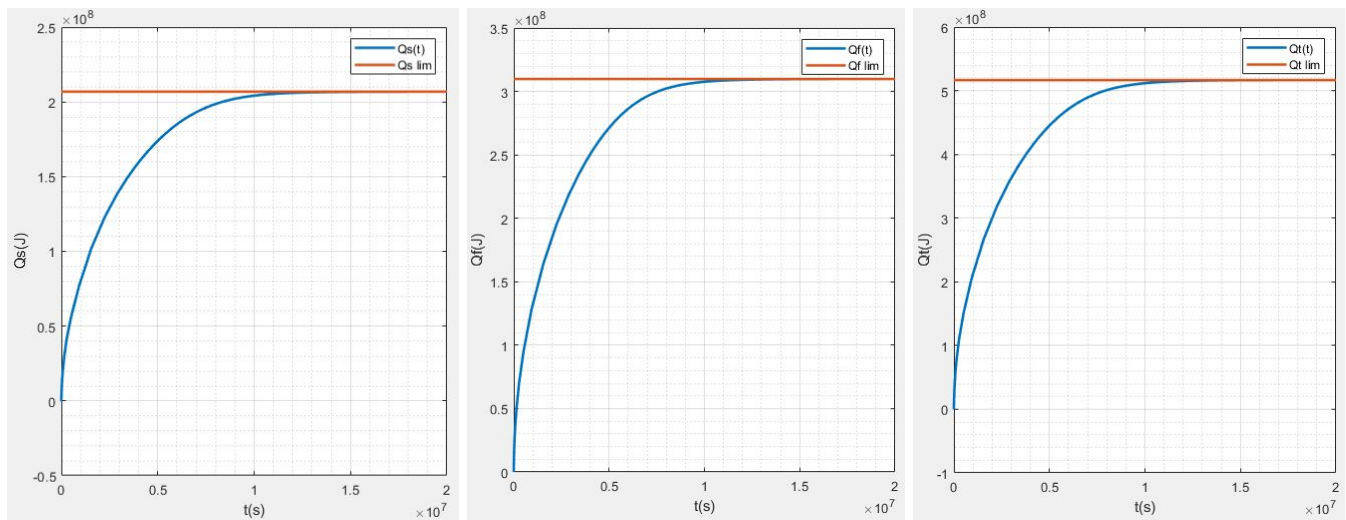


Figura 7. a) Evolución de  $Q_s$  absorbido (Calor sensible) b) Evolución de  $Q_f$  absorbido (Calor latente) c) Evolución Energía térmica absorbida  $Q_t$  (Calor total)



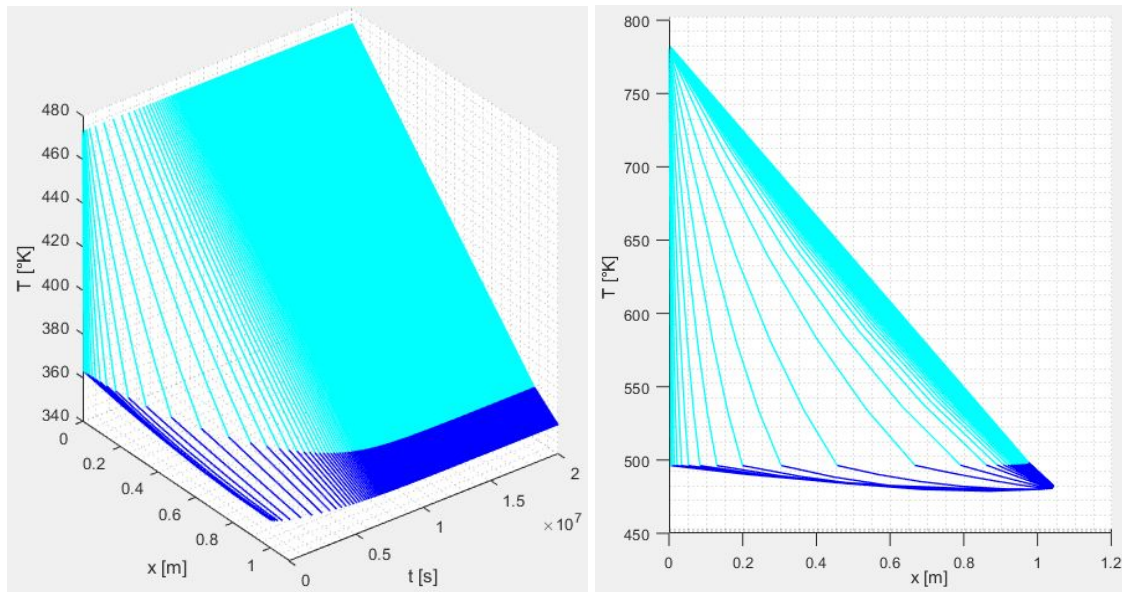


Figura 8. Perfiles de temperatura a distintos valores de tiempo.

## VII. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Explorando todos los panoramas posibles mediante los cuales puede darse la transferencia de calor a través de las placas, se analizaron los resultados obtenidos al fijar el extremo izquierdo de la placa para observar el comportamiento del modelo propuesto.

En los resultados anteriores es posible observar que en cada una de las gráficas obtenidas, se presenta la convergencia al estado estacionario en un rango de error muy pequeño. Para comprobar los resultados obtenidos por nuestro análisis, las curvas características de nuestro modelo fueron comprobadas con los resultados de la referencia [1]. Se puede observar que los resultados numéricos de convergencia o bien, del estado estacionario, son resultados muy cercanos a los valores obtenidos por nuestro análisis. Curiosamente, a pesar de despreciar la expansión térmica del material, los resultados obtenidos son extremadamente similares a aquellos obtenidos por la investigación de referencia. Esta similitud tan cercana se debe a que el material Xilitol posee una coeficiente de expansión térmica muy baja, por lo tanto el fenómeno no se ve reflejado de forma significativa.

En las siguientes figuras se muestra la comparación de los resultados de longitud final de la barra y energía total almacenada. En esta comparación es posible observar que los resultados obtenidos son muy similares, incluso con la expansión térmica despreciada.

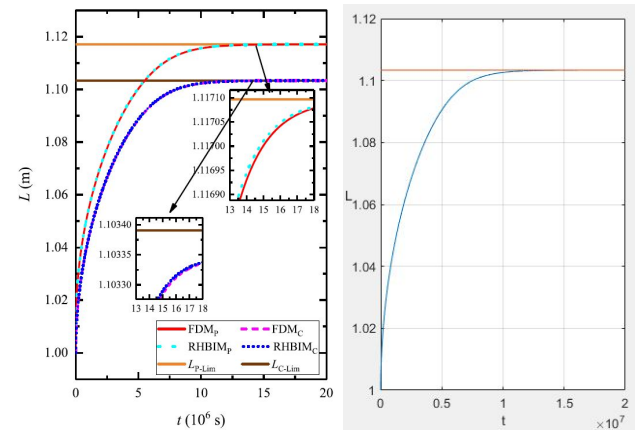


Fig. 9. Comprobación de resultados de longitud de la barra

En la figura anterior, podemos observar que el valor numérico de la barra en el estado estacionario en el artículo de investigación, es de aproximadamente 1.10337 m. Observando detalladamente nuestros resultados y desplegando la función de cursores en MATLAB para obtener un valor de mayor precisión, podemos determinar una longitud final de 1.10335 m. Con esta comprobación podemos asegurar que el análisis y modelo ejecutado es correcto ya que los valores son extremadamente similares.

A pesar de la comprobación de resultados y la convergencia de los mismos, es importante mencionar que aún existe un error entre el estado estacionario y la solución numérica del modelo. En la siguiente gráfica es posible observar la diferencia que existe entre estos dos estados.

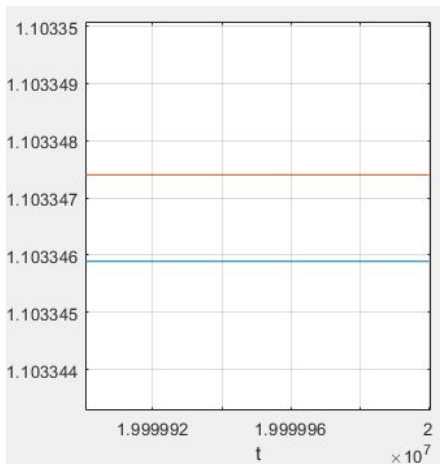


Fig. 10: Error de  $L$  entre el estado estacionario y la solución numérica

A partir de esta magnificación, es posible calcular el error porcentual que existe entre los dos estados. Dicha diferencia es de aproximadamente 0.0002% lo cual es extremadamente razonable para el propósito de nuestra actividad.

Posteriormente, la comprobación de la energía total fue realizada con el artículo de investigación de referencia. Esta comprobación se puede visualizar en la siguiente figura.

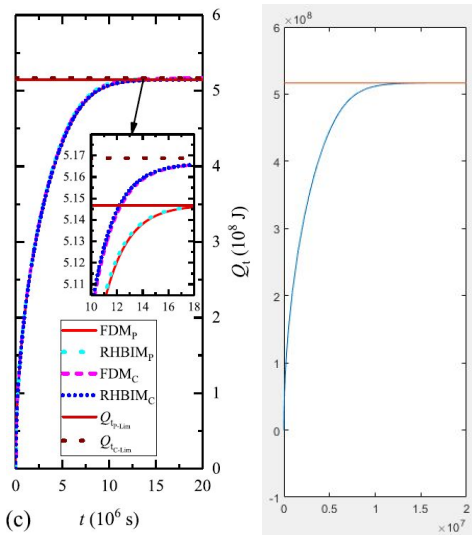


Fig. 11: Comprobación de los resultados de calor total absorbido

En los resultados de referencia, la energía total absorbida por el material en el estado estacionario es de aproximadamente  $5.17 \times 10^8 J$ . Para nuestro modelo, la energía total absorbida es de  $5.166 \times 10^8 J$  en el mismo estado. Esta diferencia puede ser resultado de lectura de la gráfica de referencia ya que no es posible leer dicho valor con buena precisión. Los resultados mostrados con anterioridad nos corroboran que el proceso de obtención de

energía en las cuatro etapas del calor sensible, al igual que el cálculo del calor latente, fue realizado de forma correcta, sin embargo, similar al caso anterior, existe una pequeña diferencia entre el estado estacionario calculado y la solución numérica. Esta diferencia se observa en la siguiente figura.

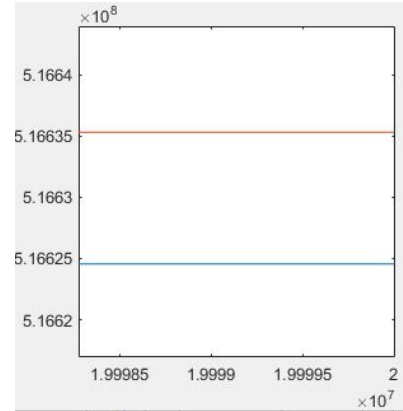


Fig. 12: Error de  $Q_t$  entre el estado estacionario y la solución numérica

Realizando el mismo procedimiento que el anterior, el error es aproximadamente de 0.00178%. Este resultado nos indica que el error porcentual incrementó de manera considerable con respecto a la curva de longitud, sin embargo dicho valor es más que aceptable para nuestro estudio.

Por otro lado, analizando el tiempo de establecimiento, se puede observar que este resulta demasiado largo. Esto nos indica que si se llevara a cabo un proceso como el del modelo ideal, mantener las condiciones isotérmicas de frontera constantes por tanto tiempo resulta imposible en la realidad, o al menos lo es para lograr una absorción de energía de esta magnitud.

Considerando los enormes costos generados observables en la tabla III, queda claro que una de las ventajas de los MCF es la gran capacidad de almacenamiento que poseen. Sin embargo, un análisis esencial sería el de costos. Es de vital importancia comparar el costo por la implementación de este tipo de tecnología con el costo de mantener el uso de los combustibles como los mencionados anteriormente. Sin embargo, otra ventaja de los MCF, que puede considerarse como la más importante para el futuro, es que son amigables con el medio ambiente al no producir gases de efecto invernadero en su funcionamiento.

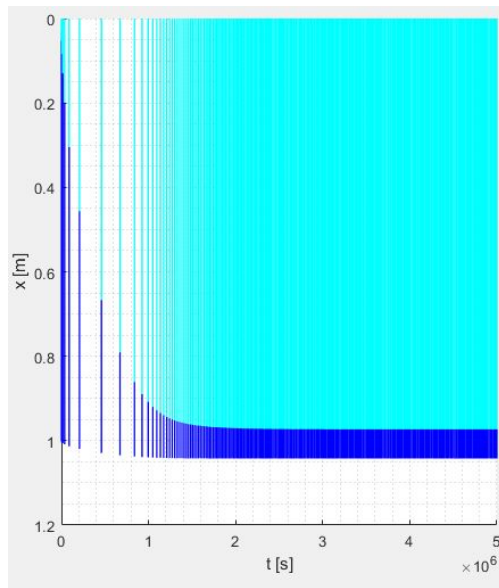


Fig. 13. Perfil de temperaturas,  $x$  vs  $t$

Por otro lado, la distribución de temperaturas y el perfil generado a través del tiempo, es un resultado muy interesante. En la siguiente figura se observa una vista “superior” de las curvas mostradas en la figura 7. En estos resultados es posible verificar el comportamiento de las fases a medida que se derrite el sólido y la interfaz se desplaza. Gracias a que en este reporte se realizó el modelo de masa constante y la longitud de la barra aumenta, es posible observar la forma en que el sólido disminuye en masa mientras que su frontera se desplaza hasta el valor límite de longitud. Por otro lado, a partir de este resultado, podemos ver la gráfica del comportamiento de la interfaz de la figura 5 b) pero con ambas fases presentes acotadas por el valor final de la barra.

Finalmente, para entender la manera en que la energía es absorbida por el MCF, el análisis de este proceso en particular fue realizado para proyectar y representar el fenómeno de transferencia de calor durante el tiempo. El entendimiento detallado de las distintas etapas de absorción de calor sensible y su manifestación en el material a través del tiempo es crucial para la comprensión de la transferencia de calor de este modelo.

Para calcular el cambio en energía interna de nuestro sistema ( $\Delta Q$ ) se requirió hacer un análisis de los cuatro cambios de energía presentes en nuestro análisis siendo los siguientes:

$\Delta U_1$ : El primer estado analizado (Fig. 12), donde nuestro punto de enfoque es el líquido que está calentando la  $T_H$  desde nuestro punto de referencia 0 (la pared izquierda fija) hasta la  $\xi(t)$  de un tiempo  $t$  a un  $\Delta t$ .

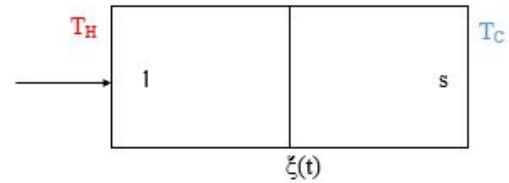


Fig. 14. Estado de  $\Delta U_1$

$\Delta U_2$ : Para nuestro segundo estado (fig. 13) empezamos a analizar el sólido calentado justo antes de fundirse, por lo cual nuestra temperatura final será la misma temperatura de fusión del material ( $T_f$ ), esto ocurre de  $\xi(t)$  a una  $x_a$  que es un valor de  $x$  diferencialmente más grande a  $\xi(t)$ . Se observa un desplazamiento en la interfaz por este mismo calentamiento.

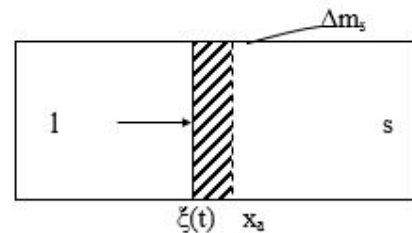


Fig. 15. Estado de  $\Delta U_2$

$\Delta U_3$ : Para el penúltimo estado (fig. 14) revisamos el estado del nuevo líquido fundido, analizamos el movimiento de la interfaz de  $\xi(t)$  a  $\xi(t+\Delta t)$ , para este estado el sólido que se había calentado en el estado dos se encuentra derretido lo cual causará un cambio en la longitud de la barra puesto que el volumen inicial del líquido ha aumentado desde la etapa 1.

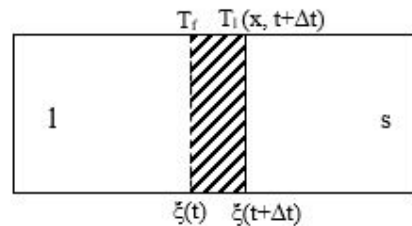


Fig. 16. Estado de  $\Delta U_3$

$\Delta U_4$ : Para este último estado (fig. 15) se considera la temperatura del sólido que se calentó pero no lo suficiente como para llegar al punto de fusión, manteniendo su estado sólido. También se analiza el cambio en la longitud de la barra, explicado en el punto pasado, debido al cambio de fase de una parte de la zona sólida.

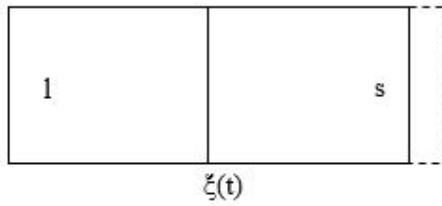


Fig. 17. Estado de  $AU_4$

## VIII. CONCLUSIONES

Durante la realización de este proyecto logramos comprender de manera teórica y analítica el comportamiento del material de cambio de fase Xylitol a través de la comprensión de la dinámica interna de dicho material cuando se expone a temperaturas más altas que su temperatura de fusión. Dicha dinámica fue comprendida teóricamente con conceptos como flujo de calor, calor sensible, calor latente, absorción de energía calorífica, expansión térmica, solidificación, derretimiento, conductividad térmica, entre otros. Para la parte analítica se utilizaron conceptos como el balance de energía y la conservación de masa para establecer un modelo de balance de calor integral que representara de mejor manera al fenómeno físico en cuestión. Dicho modelo simula la evolución de un sistema que involucra un material de cambio de fase en su interior, analizando el comportamiento del mismo a través del tiempo con base en la teoría y las leyes de conservación de masa y energía, lo cual, permite prever aspectos como el tiempo necesario en que se solidifica o liquidifica dicho material según sus propiedades fisicoquímicas y la energía calorífica transmitida y almacenada a través del mismo para su posterior utilización como energía renovable permitiendo un gran número de aplicaciones a nivel doméstico e industrial.

Si bien, se entendieron varios conceptos sobre este fenómeno; aún faltaría analizar los procesos posteriores al almacenamiento de la energía en el MCF como la conversión de dicha energía y su transporte. A su vez, estudiar procesos para hacer más eficiente y potenciar la obtención, transferencia y almacenamiento de la misma, incluyendo el tiempo de carga, para lograr disminuir o inclusive sustituir por completo el uso de combustible para el abastecimiento energético de empresas u hogares.

## IX. REFERENCIAS

[1] R. D. Santiago Acosta, J. A. Otero, E. M. Hernández Cooper, and R. Pérez-Álvarez, "Thermal expansion effects on the one-dimensional liquid-solid phase transition in high temperature phase change materials", Departamento de Ciencias, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Tecnológico de Monterrey Campus Estado de México, 2019.

[2] R. D. Santiago, E. M. Hernández Cooper, and J. A. Otero, "Constant mass model for the liquid-solid phase transition on a one-dimensional Stefan problem: Transient and steady state regimes", Tecnológico de Monterrey, Physics Department, Lago de Guadalupe, Edo. de Mex., México, 2017.

[3] S. Hohlein, A. König-Haagen, and D. Bruggemann, "Thermophysical Characterization of  $MgCl_2 \cdot 6H_2O$ , Xylitol and Erythritol as Phase Change Materials (PCM) for Latent Heat Thermal Energy Storage (LHTES)", Chair of Engineering Thermodynamics and Transport Processes (LTTT), Center of Energy Technology (ZET), University of Bayreuth, Universitätsstraße 30, 95440 Bayreuth, Germany, 2017.