

- Entregue las respuestas en un documento escrito a mano con el nombre de los integrantes en la fecha y hora establecidas.
- Puede ser realizado en grupos de máximo 4 estudiantes.

1. 10 puntos Sabiendo por el Teorema Fundamental del Cálculo que

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x g(t) dt = g(x),$$

compruebe que la función

$$y = \frac{5}{x} + \frac{10}{x} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$x^2 y' + xy = 10.$$

Analice el intervalo de solución.

2. 10 puntos Analice y muestre con ejemplos cómo resolver ecuaciones diferenciales de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$.

3. 10 puntos Considere la ecuación diferencial

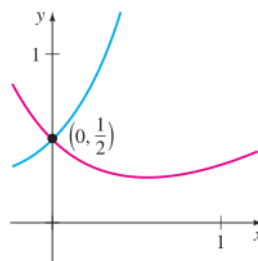
$$\frac{du}{dt} = e^{-t^2}.$$

- (a) Explique por qué una solución de la ED debe ser una función creciente sobre cualquier intervalo del eje de las t .
- (b) ¿A qué son iguales $\lim_{t \rightarrow 0} du/dt$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} du/dt$?
¿Qué le sugiere esto con respecto a una curva de solución conforme $t \rightarrow \pm\infty$?

4. 10 puntos Considere el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = 2x - y, \\ y(0) = 0.5. \end{cases}$$

Determine cuál de las dos curvas que se muestran en la figura es la única solución posible. Explique su razonamiento.



5. 10 puntos Determine un valor posible para x_0 para que la gráfica de la solución del problema con valor inicial

$$\begin{cases} y' + 2y = 3x - 6, \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

sea tangente al eje x en $(x_0, 0)$. Explique su razonamiento.

6. 10 puntos Resuelva el problema de valor inicial dado y determine su intervalo de solución.

(a)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 1}{t^2 - 1}, \\ x(2) = 2. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \sqrt{1-y^2}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0, \\ y(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

7. 10 puntos Un cadáver se encontró dentro de un cuarto cerrado en una casa donde la temperatura era constante a 21 °C. Al tiempo del descubrimiento la temperatura del corazón del cadáver se determinó de 29 °C. Una hora después una segunda medición mostró que la temperatura del corazón era de 27 °C. Suponga que el tiempo de la muerte corresponde a $t = 0$ y que la temperatura del corazón en ese momento era de 37 °C. Determine cuántas horas pasaron antes de que se encontrara el cadáver. [Sugerencia: Sea que $t_1 > 0$ denote el tiempo en que se encontró el cadáver.]

8. 10 puntos Resuelva el P.V.I. dado y determine su intervalo de solución.

(a)

$$\begin{cases} xy' + y = e^x, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y' - \sin(x)y = 2\sin(x), \\ y(\pi/2) = 1. \end{cases}$$

9. 10 puntos Un tanque contiene 200 litros de un líquido en el que se han disuelto 30 g de sal. Agua pura entra al tanque con una rapidez de 4 Litros por minuto, la solución bien mezclada sale del tanque con la misma rapidez. Encuentre la cantidad $A(t)$ de gramos de sal que hay en el tanque al tiempo t .
10. 10 puntos Halle la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} (e^x + y)dx + (2 + x + ye^y)dy = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$