

# El Problema del Comerciante Holandés: Análisis de Complejidad e Implementación de Algoritmos

Tony Cadahía Poveda, Manuel Alejandro Gamboa Hernández, David Sánchez Iglesias  
Diseño y Análisis de Algoritmos

Universidad de La Habana  
Facultad de Matemática y Computación  
Curso 2025-2026

**Resumen**—En este trabajo se estudia el Problema del Comerciante Holandés (Dutch Trader Problem, DTP), un problema de optimización combinatoria que modela la planificación de rutas y operaciones comerciales bajo restricciones de tiempo, capacidad y capital. Se presenta una demostración formal de que DTP es NP-completo y NP-duro mediante reducción desde el Problema del Viajante (Traveling Salesman Problem, TSP) y el Problema de la Mochila (Knapsack). Se describe el modelado computacional implementado en Python, y se analizan dos enfoques algorítmicos: un algoritmo de fuerza bruta que garantiza optimalidad y un algoritmo greedy heurístico con optimización local. Los resultados experimentales demuestran el trade-off entre optimalidad y eficiencia computacional.

## I. INTRODUCCIÓN

El Problema del Comerciante Holandés (Dutch Trader Problem, DTP) es un problema de optimización combinatoria que integra aspectos del Problema del Viajante (Traveling Salesman Problem, TSP), el Problema de la Mochila (Knapsack Problem), y la planificación bajo restricciones múltiples. El problema modela el escenario de un comerciante que parte del puerto de Ámsterdam con capital inicial, debe visitar otros puertos para comprar y vender mercancías, y debe regresar a Ámsterdam maximizando su capital final.

### I-A. Motivación

El DTP captura la complejidad de problemas reales en logística y comercio marítimo, donde las decisiones sobre rutas, selección de mercancías y gestión de recursos deben tomarse simultáneamente. La naturaleza multi-objetivo del problema (maximizar beneficio, minimizar tiempo de viaje, respetar restricciones de capacidad) lo convierte en un caso de estudio relevante para el análisis de algoritmos.

### I-B. Contribuciones

Las principales contribuciones de este trabajo son:

- Demostración formal de la NP-completitud y NP-dureza del DTP
- Diseño e implementación de un modelo computacional orientado a objetos

- Implementación y análisis de un algoritmo exacto de fuerza bruta
- Diseño de un algoritmo greedy con optimización local mediante knapsack
- Evaluación experimental comparativa de ambos enfoques

## II. DEFINICIÓN FORMAL DEL PROBLEMA

**Definición 1** (Problema del Comerciante Holandés). *Dada una instancia  $I = (G, M, C_0, T_{max}, W_{max}, B_{min})$  donde:*

- $G = (V, E)$  es un grafo dirigido con  $|V| = n+1$  vértices (puertos  $0, 1, \dots, n$ ), donde 0 representa Ámsterdam
- Para cada arista  $(i, j) \in E$  existen funciones de costo  $c(i, j) \in \mathbb{R}^+$  y tiempo  $t(i, j) \in \mathbb{R}^+$
- $M = \{1, 2, \dots, m\}$  es el conjunto de mercancías
- Para cada mercancía  $k \in M$  y puerto  $p \in V$ :
  - $P_c[k, p]$ : precio al que el puerto compra (comerciante vende)
  - $P_v[k, p]$ : precio al que el puerto vende (comerciante compra)
  - $O[k, p]$ : oferta máxima disponible
  - $w_k$ : peso por unidad
- $C_0$ : capital inicial del comerciante
- $T_{max}$ : tiempo máximo de viaje permitido
- $W_{max}$ : capacidad máxima de bodega
- $B_{min}$ : capital mínimo requerido al retornar

*El objetivo es encontrar:*

1. Una ruta  $R = (r_0 = 0, r_1, \dots, r_s, r_{s+1} = 0)$  que parte y termina en Ámsterdam
2. Matrices de operaciones  $Compras[k, i]$  y  $Ventas[k, i]$  indicando las cantidades de cada mercancía  $k$  compradas/vendidas en el paso  $i$  de la ruta

Sujeto a las restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^s t(r_i, r_{i+1}) &\leq T_{max} & (\text{tiempo}) \\ \sum_{k \in M} w_k \cdot cargo_k(i) &\leq W_{max} \quad \forall i & (\text{capacidad}) \\ capital(i) &\geq 0 \quad \forall i & (\text{solvencia}) \\ Compras[k, i] &\leq O[k, r_i] \quad \forall k, i & (\text{oferta}) \\ capital(s+1) &\geq B_{min} & (\text{capital mínimo}) \end{aligned}$$

Y maximizando:

$$beneficio = capital(s+1) - C_0 \quad (1)$$

### III. ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD

#### III-A. NP-Compleitud del DTP

**Teorema 1.** El Problema del Comerciante Holandés es NP-completo.

*Demostración.* La demostración procede en dos pasos: mostrar que DTP ∈ NP y que DTP es NP-duro.

##### Paso 1: DTP ∈ NP

Dado un certificado (una solución candidata) que consiste en:

- Una ruta  $R = (r_0, r_1, \dots, r_s, r_{s+1})$
- Matrices Compras[k, i] y Ventas[k, i]

Podemos verificar en tiempo polinomial:

1.  $r_0 = r_{s+1} = 0$  (comienza y termina en Ámsterdam)
2.  $\sum_{i=0}^s t(r_i, r_{i+1}) \leq T_{max}$  (tiempo total  $O(s)$ )
3. Para cada paso  $i$ , simular operaciones comerciales:
  - Verificar restricción de capacidad:  $O(m \cdot s)$
  - Actualizar capital:  $O(m \cdot s)$
  - Verificar restricción de oferta:  $O(m \cdot s)$
4.  $capital_{final} \geq B_{min}$
5. beneficio  $\geq$  umbral (si es un problema de decisión)

Complejidad total:  $O(s \cdot m) = O(n \cdot m)$ , polinomial en el tamaño de entrada. Por tanto, DTP ∈ NP.

##### Paso 2: DTP es NP-duro

Reducimos el Problema del Viajante (TSP) al DTP. Dado una instancia de TSP con grafo  $G = (V, E)$  y función de costo  $d : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ , construimos una instancia de DTP:

- Usar el mismo grafo  $G$  con  $c(i, j) = d(i, j)$  y  $t(i, j) = d(i, j)$
- $M = \{1\}$  (una sola mercancía)
- Para cada puerto  $p \neq 0$ :
  - $O[1, p] = 1$  (oferta unitaria)
  - $P_v[1, p] = 1, P_c[1, p] = 1$  (precio constante, sin ganancia)
- Puerto 0 (Ámsterdam):  $O[1, 0] = 0$  (sin oferta)
- $w_1 = 0$  (peso cero, sin restricción de capacidad)
- $C_0 = \sum_{p \neq 0} 1 = n$  (suficiente para comprar en todos los puertos)
- $T_{max} = K$  (límite del TSP)
- $W_{max} = n, B_{min} = 0$

##### Análisis de la reducción:

Una solución del TSP con costo  $\leq K$  corresponde a una ruta en DTP que:

1. Visita cada puerto exactamente una vez (por la oferta unitaria)
2. Cumple  $\sum t(r_i, r_{i+1}) = \sum d(r_i, r_{i+1}) \leq K$
3. Es factible (precios neutros, sin restricciones de capacidad)

Recíprocamente, cualquier solución factible de DTP que visite todos los puertos define una ruta de TSP con el mismo costo.

La reducción es polinomial:  $O(n^2 + m \cdot n) = O(n^2)$  para construir las matrices.

Por tanto, TSP  $\leq_p$  DTP, y como TSP es NP-completo, DTP es NP-duro.

Combinando ambos pasos: DTP ∈ NP y DTP es NP-duro  $\Rightarrow$  DTP es NP-completo.  $\square$

#### III-B. NP-Dureza del Problema de Optimización

El DTP como problema de optimización (maximizar beneficio sin umbral fijo) es NP-duro:

##### Corolario 1. El problema de optimización DTP es NP-duro.

*Demostración.* Si existiera un algoritmo polinomial para resolver el DTP de optimización, podríamos resolver el DTP de decisión (NP-completo) en tiempo polinomial:

1. Ejecutar el algoritmo de optimización para obtener beneficio<sub>óptimo</sub>
2. Comparar si beneficio<sub>óptimo</sub>  $\geq$  umbral

Esto violaría P  $\neq$  NP (asumiendo la conjectura estándar), por tanto el problema de optimización es NP-duro.  $\square$

#### III-C. Reducción desde Knapsack

El DTP también contiene como subproblema el Problema de la Mochila (Knapsack):

##### Lema 1. Knapsack $\leq_p$ DTP

*Demostración.* Dada una instancia de Knapsack con ítems  $(v_i, w_i)$ , valores, pesos y capacidad  $W$ , construir DTP con:

- Dos puertos:  $V = \{0, 1\}$
- Costos y tiempos triviales:  $c(0, 1) = c(1, 0) = 0, t(0, 1) = t(1, 0) = 1$
- Mercancías: cada ítem  $i$  es una mercancía con:
  - $P_v[i, 1] = 0$  (gratis en puerto 1)
  - $P_c[i, 0] = v_i$  (vender en Ámsterdam da el valor)
  - $O[i, 1] = 1, w_i$  el peso del ítem
- $W_{max} = W, C_0 = \infty, T_{max} = 2$

La ruta es fija ( $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ), y el problema se reduce a seleccionar qué ítems (mercancías) cargar en puerto 1 para maximizar el valor de venta en puerto 0, respetando la capacidad  $W$ . Esto es exactamente el problema de Knapsack.  $\square$

## IV. MODELADO COMPUTACIONAL

#### IV-A. Arquitectura del Sistema

La implementación sigue un diseño orientado a objetos con clara separación de responsabilidades:

**Listing 1.** Estructura del proyecto

```
solver/
    schemas/
        dtp.py          # Estructuras de datos
    models/
        solver.py      # Interfaz abstracta
        brute.py       # Solver exacto
        greedy.py     # Solver heuristico
```

#### IV-B. Esquemas de Datos

El módulo `schemas/dtp.py` define las estructuras fundamentales:

**Listing 2.** Clase `DTPInstance`

```
@dataclass(slots=True)
class DTPInstance:
    """Instancia del problema DTP"""
    tiempos: MatrixFloat      # (n+1) x (n+1)
    costos: MatrixFloat       # (n+1) x (n+1)
    precios_compra: MatrixFloat # m x (n+1)
    precios_venta: MatrixFloat # m x (n+1)
    oferta_max: MatrixFloat   # m x (n+1)
    pesos: VectorFloat        # m

    capacidad_bodega: int
    capital_inicial: int
    tiempo_maximo: int
    umbralBeneficio: float
    capital_minimo: float
```

**Convención de precios:** Los precios están desde la perspectiva del puerto:

- `precios_compra[k, p]`: precio al que el puerto  $p$  compra la mercancía  $k$  del comerciante
- `precios_venta[k, p]`: precio al que el puerto  $p$  vende la mercancía  $k$  al comerciante
- Invariante: `precios_compra < precios_venta` (el puerto compra barato, vende caro)

**Listing 3.** Clase `DTPSolution`

```
@dataclass(slots=True)
class DTPSolution:
    """Solución del problema DTP"""
    ruta: tuple[int, ...]          # Secuencia de
                                    # puertos
    compras: MatrixFloat           # m x len(ruta)
    ventas: MatrixFloat            # m x len(ruta)
    beneficio_final: float
```

#### IV-C. Interfaz Abstracta de Solvers

El patrón Strategy permite implementar múltiples algoritmos con interfaz uniforme:

**Listing 4.** ABCSolver

```
class ABCSolver(ABC):
    @abstractmethod
    def solve(self, instance: DTPInstance) -> DTPSolution:
        """Resuelve la instancia"""

    @abstractmethod
    def is_feasible(self, instance: DTPInstance,
                   solution: DTPSolution) -> bool:
        """Verifica factibilidad"""

    @abstractmethod
```

```
def evaluate(self, instance: DTPInstance,
            solution: DTPSolution) -> float:
    """Evalua calidad de solucion"""
```

## V. ALGORITMO DE FUERZA BRUTA

### V-A. Descripción del Algoritmo

El `BruteForceSolver` explora exhaustivamente el espacio de soluciones mediante búsqueda en profundidad (DFS):

#### Algorithm 1 BruteForceSolver

```
1: procedure SOLVE(instance)
2:   best  $\leftarrow$  solución trivial
3:   for all perm  $\in$  Perm( $\{1, \dots, n\}$ ) do
4:     route  $\leftarrow$   $(0) + perm + (0)$ 
5:     if Time(route)  $> T_{max}$  then
6:       continue
7:     end if
8:     cand  $\leftarrow$  SEARCHTRADES(route)
9:     if cand.benef  $>$  best.benef then
10:      best  $\leftarrow$  cand
11:    end if
12:   end for
13:   return best
14: end procedure
```

#### Algorithm 2 SearchTrades

```
1: procedure SEARCHTRADES(route)
2:   best_cap  $\leftarrow -\infty$ 
3:   DFS( $0, C_0, \vec{0}, 0$ )
4:   return solución con best_cap
5: end procedure
6: procedure DFS(i, cap, cargo, t)
7:   if i  $> 0$  then
8:     cap  $\leftarrow$  cap  $- c(route[i-1], route[i])$ 
9:     t  $\leftarrow$  t  $+ t(route[i-1], route[i])$ 
10:    if cap  $< 0 \vee t > T_{max}$  then
11:      return
12:    end if
13:   end if
14:   p  $\leftarrow route[i]$ 
15:   for all v  $\in$  Ventas(cargo) do
16:     cap'  $\leftarrow cap + \sum_k v[k] \cdot P_c[k, p]$ 
17:     for all c  $\in$  Compras(cap', p) do
18:       if Fact(cap', cargo', W, O) then
19:         if i  $= |route| - 1$  then
20:           best_cap  $\leftarrow$  máx(best_cap, cap')
21:         else
22:           DFS(i + 1, cap', cargo', t)
23:         end if
24:       end if
25:     end for
26:   end for
27: end procedure
```

## V-B. Análisis de Complejidad

### Complejidad temporal:

$$T(n, m) = n! \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n+1} \prod_{k=1}^m}_{\text{combinaciones de comercio}} (O[k, r_i] + 1)$$

$$= O(n! \cdot \exp(m \cdot n \cdot \bar{O}))$$

donde  $\bar{O}$  es la oferta promedio. La complejidad es factorial en  $n$  y exponencial en  $m$ .

**Complejidad espacial:**  $O(m \cdot n)$  para almacenar las matrices de operaciones.

**Optimalidad:** El algoritmo garantiza encontrar la solución óptima global al explorar exhaustivamente todas las combinaciones factibles.

## V-C. Optimizaciones Implementadas

1. **Poda por tiempo:** Descarta rutas cuyo tiempo mínimo (sin comercio) excede  $T_{max}$
2. **Poda por capital:** Termina ramas donde el capital se vuelve negativo
3. **Cálculo incremental:** Mantiene estado de capital y cargo entre pasos

## VI. ALGORITMO GREEDY CON OPTIMIZACIÓN LOCAL

### VI-A. Diseño del Algoritmo

El GreedySolver aplica una estrategia golosa en dos niveles:

1. **Selección de puerto:** Elige el siguiente puerto no visitado minimizando costo/tiempo
2. **Operaciones comerciales:** En cada puerto, resuelve un subproblema de knapsack para optimizar compras

### VI-B. Selección de Puerto

### VI-C. Optimización de Compras mediante Knapsack Greedy

En cada puerto, el comerciante debe decidir qué comprar sabiendo que:

- Venderá todo el cargo en el próximo puerto visitado
- El próximo puerto ya fue seleccionado por la heurística greedy

Esto se modela como un problema de knapsack con doble restricción (capital y capacidad):

**Garantía de capital para viaje:** Antes de comprar, se reserva el costo del viaje:

```
travel_cost = instance.costos[port, next_port]
capital_disponible = capital - travel_cost
compras = KnapsackGreedy(..., capital_disponible,
    ...)
```

---

### Algorithm 3 GreedySolver

---

```

1: procedure SOLVE(inst)
2:   cur  $\leftarrow 0$ , cap  $\leftarrow C_0$ , cargo  $\leftarrow \vec{0}$ 
3:   t  $\leftarrow 0$ , vis  $\leftarrow \{0\}$ , route  $\leftarrow [0]$ 
4:   nxt  $\leftarrow \text{SELPORT}(cur, vis, cap, t)$ 
5:   (v, c, cap, cargo)  $\leftarrow \text{TRADE}(cur, cargo, cap, nxt)$ 
6:   while |vis|  $\leq n$  do
7:     nxt  $\leftarrow \text{SELPORT}(cur, vis, cap, t)$ 
8:     if nxt = None then
9:       break
10:      end if
11:      cap  $\leftarrow cap - c(cur, nxt)$ 
12:      t  $\leftarrow t + t(cur, nxt)$ 
13:      if cap < 0  $\vee$  t >  $T_{max}$  then
14:        break
15:      end if
16:      cur  $\leftarrow nxt$ , vis.add(nxt)
17:      route.append(nxt)
18:      la  $\leftarrow \text{SELPORT}(cur, vis, cap, t)$ 
19:      (v, c, cap, cargo)  $\leftarrow \text{TRADE}(cur, cargo, cap, la)$ 
20:   end while
21:   return BUILD(route, c, v, cap)
22: end procedure

```

---

### Algorithm 4 SelPort

---

```

1: procedure SELPORT(cur, vis, cap, time)
2:   bp  $\leftarrow$  None, bs  $\leftarrow \infty$ 
3:   for all p  $\in \{1, \dots, n\} \setminus vis$  do
4:     cst  $\leftarrow c(cur, p)$ , tm  $\leftarrow t(cur, p)$ 
5:     if cap < cst  $\vee$  time + tm >  $T_{max}$  then
6:       continue
7:     end if
8:     s  $\leftarrow \begin{cases} cst & \text{min\_cost} \\ tm & \text{min\_time} \\ \frac{cst}{\max(c)} + \frac{tm}{\max(t)} & \text{combined} \end{cases}$ 
9:     if s < bs then
10:       bs  $\leftarrow s$ , bp  $\leftarrow p$ 
11:     end if
12:   end for
13:   return bp
14: end procedure

```

---

### VI-D. Análisis de Complejidad

#### Complejidad temporal:

- Selección de puertos:  $O(n^2)$  (en cada paso, revisar  $O(n)$  puertos)
- Por cada puerto visitado:
  - Vender cargo:  $O(m)$
  - Knapsack greedy:  $O(m \log m)$  (ordenamiento por ratio)
- Total:  $O(n^2 + n \cdot m \log m) = O(n^2 + nm \log m)$

**Complejidad espacial:**  $O(m \cdot n)$  para matrices de operaciones.

### Algorithm 5 KnapGreedy

```

1: procedure KNAPGREEDY( $cur, nxt, cap, W$ )
2:    $opp \leftarrow []$ 
3:   for all  $k \in M$  do
4:      $pb \leftarrow P_v[k, cur], ps \leftarrow P_c[k, nxt]$ 
5:      $pft \leftarrow ps - pb$ 
6:     if  $pft \leq 0$  then
7:       continue
8:     end if
9:      $mu \leftarrow \min(O[k, cur], cap/pb, W/w_k)$ 
10:     $r \leftarrow pft/w_k$ 
11:     $opp.append((k, r, pft, pb, w_k, mu))$ 
12:   end for
13:   Ordenar  $opp$  por  $r$  descendente
14:    $C \leftarrow \emptyset, cr \leftarrow cap, wr \leftarrow W$ 
15:   for all  $(k, r, pft, p, w, mu) \in opp$  do
16:      $q \leftarrow \min(mu, cr/p, wr/w)$ 
17:      $q \leftarrow \lfloor q \rfloor$ 
18:     if  $q > 0$  then
19:        $C[k] \leftarrow q$ 
20:        $cr \leftarrow cr - q \cdot p$ 
21:        $wr \leftarrow wr - q \cdot w$ 
22:     end if
23:   end for
24:   return  $C$ 
25: end procedure

```

**Garantías:** El algoritmo no garantiza optimalidad global, pero provee:

1. Soluciones factibles (respeta todas las restricciones)
2. Optimalidad local en el subproblema de knapsack (greedy es óptimo para knapsack fraccional, aproximado para knapsack entero)
3. Ejecución en tiempo polinomial

## VII. RESULTADOS EXPERIMENTALES

### VII-A. Instancias de Prueba

Se diseñaron instancias específicas para evaluar diferentes aspectos:

Cuadro I  
CARACTERÍSTICAS DE LAS INSTANCIAS DE PRUEBA

Instancia	Puertos	Mercancías	$C_0$	$T_{max}$
TINY	2	2	500	100
SMALL	3	2	1000	180
MEDIUM	5	3	3000	300

### Descripción de las instancias:

- **TINY:** Instancia mínima para validación y comparación con fuerza bruta.
- **SMALL:** Instancia pequeña con complejidad moderada.
- **MEDIUM:** Instancia mediana que evalúa el desempeño de metaheurísticas.

Cuadro II  
RESULTADOS COMPARATIVOS DE BENEFICIO FINAL

Instancia	Brute Force	Greedy	ACO	GA+Beam
TINY	417.00	400.00	417.00	417.00
SMALL	—	420.00	420.00	420.00
MEDIUM	—	1900.00	1950.00	1920.00

Cuadro III  
TIEMPOS DE EJECUCIÓN

Instancia	Brute Force	Greedy	ACO	GA+Beam
TINY	1719.91s	79.2μs	25.5ms	37.7ms
SMALL	—	64.6μs	15.6ms	36.1ms
MEDIUM	—	53.2μs	21.4ms	53.5ms

### VII-B. Comparación de Algoritmos

#### Observaciones:

1. **Brute Force:** Encuentra el óptimo pero es inviable para  $n > 2$  (1720s para TINY)
2. **Greedy:** Extremadamente rápido ( $<100\mu s$ ) pero subóptimo en instancias complejas
3. **ACO:** Mejor calidad (+4.25 % en TINY, +2.63 % en MEDIUM vs Greedy) en tiempo razonable (<30ms)
4. **GA+Beam:** Calidad competitiva con ACO (+4.25 % en TINY, +1.05 % en MEDIUM vs Greedy)
5. En SMALL, todos los algoritmos encuentran la misma solución óptima (420)
6. Las metaheurísticas (ACO, GA+Beam) logran encontrar el óptimo en TINY

## VIII. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

### VIII-A. Conclusiones

Este trabajo ha presentado un análisis exhaustivo del Problema del Comerciante Holandés:

1. Se formalizó el problema y se demostró rigurosamente su NP-completitud y NP-dureza
2. Se diseñó e implementó un modelo computacional robusto y extensible
3. Se implementaron dos enfoques algorítmicos con trade-offs claros:
  - Fuerza bruta: optimalidad garantizada, escalabilidad limitada
  - Greedy: eficiencia computacional, calidad aproximada
4. Los experimentos confirman la intratabilidad práctica del problema para instancias realistas

### VIII-B. Trabajo Futuro

Direcciones prometedoras para investigación futura:

1. **Algoritmos avanzados:**
  - Branch and Bound con cotas ajustadas
  - Programación dinámica con reducción de estados
  - Metaheurísticas (Simulated Annealing, Algoritmos Genéticos, Ant Colony)
  - Programación Lineal Entera (ILP)
2. **Mejoras del greedy:**

- Look-ahead de múltiples pasos
- Búsqueda local (2-opt, 3-opt para la ruta)
- Combinación de múltiples heurísticas (portfolio approach)

### 3. Análisis teórico:

- Factores de aproximación del greedy
- Identificación de casos polinomiales especiales
- Cotas inferiores ajustadas para Branch and Bound

### 4. Extensiones del modelo:

- Precios estocásticos
- Eventos dinámicos (tormentas, cambios de oferta)
- Múltiples agentes (competencia entre comerciantes)

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue desarrollado como parte del curso de Diseño y Análisis de Algoritmos en la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana.

### REFERENCIAS

- [1] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., 1979.
- [2] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal, and W. J. Cook, *The Traveling Salesman Problem: A Computational Study*, Princeton University Press, 2006.
- [3] H. Kellerer, U. Pferschy, and D. Pisinger, *Knapsack Problems*, Springer, 2004.
- [4] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3rd ed., MIT Press, 2009.
- [5] C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, Dover Publications, 1998.
- [6] V. V. Vazirani, *Approximation Algorithms*, Springer, 2001.