El Comerciante Holandés

David Sánchez Iglesias
Manuel Alejandro Gamboa
Tony Cadehia Pontes

December 2025

Problema:

La prestigiosa Compañía Holandesa de las Indias Orientales, en su afán por dominar el comercio mundial, se enfrenta a un desafío monumental. Un capitán experimentado, al mando de una de sus valiosas flotas, debe emprender una expedición comercial que partirá de Ámsterdam y, tras recorrer los puertos más lucrativos del Viejo y Nuevo Continente, deberá regresar a su puerto de origen.

Los inversores de la Compañía han proporcionado un capital inicial considerable y han establecido un plazo máximo para la duración de la expedición. El capitán tiene la libertad de elegir qué puertos visitar y en qué orden, con la única condición de no visitar el mismo puerto dos veces en el mismo viaje (por cuestiones de acuerdos comerciales y evitar saturación del mercado).

En cada puerto, el capitán encontrará una lista de mercancías disponibles, con sus respectivos precios de compra y venta (que pueden variar significativamente). El capitán puede vender las mercancías que lleva a bordo y comprar nuevas. Sin embargo, debe ser astuto:

- La capacidad de carga de su barco es limitada, por lo que no puede llevar más de lo que su bodega permite.
- No es necesario vender todas las mercancías al llegar a un puerto; el capitán puede decidir retener parte de su cargamento si cree que podrá venderlo a un precio más alto en un puerto posterior.

- Debe asegurarse de que, después de cada operación de compra, le quede suficiente dinero para cubrir los salarios de la tripulación, los impuestos portuarios y las posibles reparaciones del barco hasta el siguiente destino.
- El tiempo es oro; la duración total del viaje, incluyendo el tiempo de navegación entre puertos, no debe exceder el plazo fijado por los inversores.

El objetivo del capitán es claro: planificar la ruta y las transacciones en cada puerto de tal manera que, al regresar a Amsterdam, el capital final de la expedición sea el máximo posible, superando con creces la inversión inicial.

Definición Formal

Entrada:

1. Un grafo dirigido $G = (V, A)$:
   - $V = \{0, 1, ..., n\}$ puertos, con $0 =$ Ámsterdam
   - $A = \{(i, j) : i, j \in V, i \neq j\}$ arcos navegables
2. Para cada arco: $(i, j) \in A$:
   - Tiempo de viaje $t_{ij} \in R_+$
   - Coste mínimo asociado al tramo $c_{ij} \in R_+$ (despúes de haber hecho los intercambios).
3. Límite de tiempo total $T_{max} \in R_+$.
4. Capacidad de la bodega $D \in R_+$
5. Capital inicial $B_0 \in R_+$
6. Reserva mínima de capital $\underline{C} \in R_+$ que nunca se puede violar tras las transacciones hechas en cada puerto.
7. Conjunto de mercancías $K = \{1, 2, ..., m\}$
8. Para cada mercancía $k \in K$:
   - Peso o volumen por unidad $w_k \in R_+$
9. Por cada puerto $i \in V$ y mercancía $k \in K$:
   - Precio de compra $p_{ik}^{buy} \in R_+ \cup \{+\infty\}$(si es $+\infty$ entonces ahí no se puede comprar el producto k)
   - Precio de venta $p_{ik}^{sell} \in R_+ \cup \{0\}$(si es 0, entonces en i no se puede vender k)
   - Oferta máxima $u_{ik} \in R_+$ de unidades de k que se puede comprar en i
10. Umbral objetivo de beneficio $P \in R$

Demostracion de NP-Completo

Se trata de un problema de planificación de ruta y transacciones que combina tres ingredientes clásicos:

1. Elección de ruta sin repetir puertos
2. Decisiones de compra-venta con capacidad acotada
3. Viablidad financiera mínima en cada paso

En la literatura anglosajona, problemas análogos se conocen como **Dutch Trader** o, más ampliamenta conocido como variantes de **Traveling Salesman with Profits/Resources**

Objetivo: Formalizar el problema de decisión (DCH) y probar su NP-Completitud mediante una reducción en tiempo polinomial de TSP

Teorema: El problema de decisión del Comerciante Holandés es NP-Completo.

Demostración:
Parte 1: Verificación de tiempo polinómico ($DHC \in NP$)
Para que DHC esté en NP, debemos demostrar que existe un **(certificado verificable en tiempo polinómico)**

Certificado: Una solución candidata que consiste en:

- Ruta: $v_0, v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}$ con $v_{r+1} = 0$
- Operaciones: $\alpha_{k,j}, \beta k, j$ (compras y ventas en cada caso)

Verificador:

1. **Validar la ruta:** $O(n)$
   - Verificar $v_0 = v_{r+1} = 0$ $O(1)$
   - Verificar que $v_1, \ldots, v_r$ son distintos (usar tabla hash): $O(r) = O(n)$
   - Calcular el tiempo total $\sum_{k_0}^{r} t_{v_k v_{k+1}}$ (suma de $r + 1 \leq n + 1$): $O(n)$
   - Verificar $\sum_{k_0}^{r} t_{v_k v_{k+1}} \leq T_{\max}$: $O(1)$
   - **Subtotal:** $O(n)$
2. **Simular operaciones paso a paso** ($O((r + 1) \cdot m) = O(n \cdot m)$):
   - Para cada paso $k = 0, \ldots, r + 1$ (máximo $n + 1$ pasos):
     - Para cada mercancía $j \in K$ (máximo m mercancías):
       - Verificar límite oferta: $O(1)$

$$\alpha_{k,j} \leq u_{v_k j}$$

* Actualizar inventario: $O(1)$

$$q_{k,j} = q_{k-1,j} + \alpha_{k,j} - \beta_{k,j}$$

* Verificar no vender exceso: $O(1)$

$$\beta_{k,j} \leq q_{k-1,j}$$

– Verificar capacidad (suma sobre m mercancías): $O(m)$

$$\sum_j w_j q_{k,j} \leq D$$

– Actualizar capital (suma sobre m mercancías): $O(m)$

$$B_k = B_{k-1} - \sum_j p^{buy}_{v_k j} \alpha_{k,j} + \sum_j p^{sell}_{v_k j} \beta_{k,j} - c_{v_{k-1} v_k}$$

– Verificar capital mínimo: $O(1)$

$$B_k \geq \underline{C}$$

- **Coste por paso**: $O(m)$

3. **Subtotal**: $O(n) \cdot O(m) = O(n \cdot m)$
4. **Verificar umbral beneficio** ($O(1)$):

$$B_{r+1} - B_0 \geq P$$

Complejidad total polinómica en la talla de la entrada:

$$\boxed{O(n) + O(n \cdot m) + O(1) = O(n \cdot m)}$$

Por lo tanto, DCH $\in$ NP.

Parte 2: NP-hardness (reducción polinómica desde TSP)

Mostraremos que **TSP de decisión** se reduce polinómicamente a DCH:

$$\text{TSP} \leq_p \text{DCH}$$

Problema TSP de decisión

Entrada:

- Grafo completo $G = (V, A)$ con $n + 1$ nodos
- Distancias $d_{ij} \in R_+$ para cada arco (i, j)
- Umbral $L \in R_+$

Pregunta: ¿∃ ciclo hamiltoniano desde el nodo 0 que regresa a 0 con longitud total:

$$\sum_{k=0}^{n} d_{v_k v_{k+1}} \leq L?$$

Construcción de la reducción

Dada una instancia de TSP (G, d, L), construimos una instancia de DCH:

1. **Grafo y tiempos**:
   - Mismo conjunto de vértices: $V = \{0, 1, \dots, n\}$
   - Tiempos de viaje(coinciden con distancias TSP):
     $$t_{ij} = d_{ij} \quad \forall (i, j)$$
   - Límite tiempo:
     $$T_{\max} = L$$
2. **Costes de viaje**:
   - Coste operativo uniforme y no nulo:
     $$c_{ij} = 1 \quad \forall (i, j)$$
3. **Capital**:
   - Capital inicial(cubre n compras y $n+1$ costes de viaje): $B_0 = 2n+1$
   - Reserva mínima: $\underline{C} = 0$
   - Umbral beneficio(neto tras viajes y compras): $P = n - 1$
4. **Mercancías**:
   - Una única mercancía: $K = \{1\}$
   - Peso unitario: $w_1 = 1$
   - Capacidad bodega: $D = n$
5. **Precios y ofertas en puerto** $i \in V$: Para forzar un ciclo hamiltoneano, definimos:

- **Precio de compra**(1 en puertos salvo Ámsterdam, prohibido allí):

$$p_{i,1}^{buy} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq 0 \\ n^2 + 1 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

- **Precio de venta**:(3 en Ámsterdam, 0 en otros puertos):

$$p_{i,1}^{sell} = \begin{cases} 3 & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i \neq 0 \end{cases}$$

- **Oferta máxima**(1 en cada puerto salvo Ámsterdam):

$$u_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq 0 \\ 0 & \text{si } i = 0 \end{cases}$$

Intuición de la construcción

El comerciante debe comprar exactamente 1 unidad de mercancía en cada puerto visitado(excepto Ámsterdam) pagando 1, y al regresar vender todas las unidades acumulando a precio 3 cada una. Así:

Si visita r puertos:

- Gasto en compras + viajes = $2r + 1$
- Ingreso en ventas = $3r$
- Beneficio neto: $3r - (2r + 1) = r - 1$
- Para alcanzar beneficio $P = n - 1$ necesita $r - 1 \geq n - 1$ es decir $r \geq n$.
- Comprar en Ámsterdam cuesta $n^2 + 1 > 2n + 1 = B_0$ (imposible)
- La capacidad $D = n$ permite transportar exactamente n unidades

Conclusión: Fuerza un ciclo hamiltoneano visitando todos los n puertos.

Coste de la transformación

La cosntrucción de la instancia DHC a partir de TCP involucra:

1. **Copiar grafos y tiempos**($O(n^2)$):
   - Crear matriz de tiempos $t_{ij} = d_{ij}$ para cada (i, j): $O(n^2)$

2. **Establecer parámetros escalares**($O(1)$):
   - Capital inicial, umbrales, costes: $O(1)$
3. **Definir estructuras de precios y ofertas**($O(n)$):
   - Para cada puerto i (máximo $n+1$) y mercancías j (máximo $m=1$): asignar $p_{ij}^{buy}, p_{ij}^{sell}, u_{ij}$: $O(n)$

Coste total de la transformación:

$$O(n^2) + O(1) + O(n) = O(n^2)$$

Claramente polinómico.

Parte 3: Correctitud de la reducción

Dirección 1: TSP SÍ $\implies$ DCH SÍ

$\exists$ ciclo hamiltoniano $(0, v_1, \ldots, v_n, 0)$ con $\sum_{k=0}^{n} d_{v_k v_{k+1}} \leq L$.

Construcción Solución DCH: Dada la ruta hamiltoneana, construimos explícitamente una solución factible de DHC:

- **Ruta**: $(0, v_1, \ldots, v_n, 0)$
- **Operaciones**:
  - En Ámsterdam inicial(paso 0): no hacer nada ($\alpha_{0,1} = \beta_{0,1} = 0$)
  - Cada puerto $v_k (k = 1, \ldots, n)$: comparar una unidad ($\alpha_{k,1} = 1$, $\beta_{k,1} = 0$)
  - Al regresar a Ámsterdam(paso a $n+1$): vender todas las n unidades ($\alpha_{n+1,1} = 0$, $\beta_{n+1,1} = n$)

Verificación de Factibilidad: Todas las restricciones se satisfacen:

- **Ruta válida**: todos los nodos visitados exactamente una vez
- **Tiempo:**

$$\sum_{k=0}^{n} t_{v_k v_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} d_{v_k v_{k+1}} \leq L = T_{\max}$$

- **Capacidad de Bodega:**: en paso k, inventario $= k$ unidades, peso $= k \leq n = D$

- **Capital Mínimo:**($B_k = (2n+1) - 2k$):
  - Para $k = 1, \dots, n$:

$$B_k = (2n+1) - 2k \geq (2n+1) - 2n = 1 \geq 0 = \underline{C}$$

  - Para $k = n+1$:

$$B_{n+1} = 3n \geq 0 = \underline{C}$$

- **Ofertas Respetadas:** compramos una unidad por puerto:

$$\alpha_{k,1} = 1 \leq u_{v_k,1} = 1 \quad \forall k = 1, \dots, n$$

- **Beneficio:**

$$B_{n+1} - B_0 = 3n - (2n+1) = n - 1 = P$$

- **Conclusión:** DHC responde sí

Dirección 2: DCH SÍ $\implies$ TSP SÍ

$\exists$ solución DCH factible $(v_1, \dots v_r, 0)$ con $B_{r+1} - B_0 \geq n - 1$.

Análisis de como obtener el beneficio $\geq n-1$:
La única manera forma de ganar dinero es:

- Comprar mercancía en puertos $i \neq 0$ a precio 1
- Vender mercancías 1 en Ámsterdam a precio 3

¿Por qué no comprar en Ámsterdam? El precio $p_{0,1}^{buy} = n^2 + 1 > 2n + 1 = B_0$, por lo que es imposible comprar allí con el capital inicial. Incluso si tuviéramos suficiente capital, comprar a $n^2 + 1$ y vender a 3 genera pérdidas.

Si compráramos x unidades en total (en diferentes puertos) y las vendemos todas en Ámsterdam:

$$\text{Gasto total en compras} = x$$

$$\text{Gasto total en viajes} = x + 1$$

$$\text{Ingreso total por ventas} = 3x$$

$$\text{Beneficio neto} = 3x - (x + x + 1) = x - 1$$

Para que $B_{r+1} - B_0 \geq n - 1$, necesitamos:

$$x - 1 \geq n - 1 \Rightarrow x \geq n$$

Restricción de oferta fuerza visita a todos los puertos:

Como $u_{i,1} = 1 \ \forall i \neq 0$. solo podemos comprar **máximo 1 unidad por puerto**. Por lo tanto, para comprar $x \geq n$ unidades, debemos visitar **al menos** n **puertos distintos** (sin contar Ámsterdam).

Como hay exactamente n puertos además de Ámsterdam ($V = \{0, 1, \dots, \}$), necesariamente:

- $r \geq n$ (visitamos al menos n puertos distintos)
- Pero solo hay n puertos disponibles (excluyendo Ámsterdam)
- Por lo tanto, $r = n$ y visitamos **todos** los puertos exactamente una vez

Conclusión sobre la ruta: La ruta es un ciclo hamiltoniano $(0, v_1, \dots, v_n, 0)$ que visita todos los puertos **exactamente una vez**.

Restricción de Tiempo garantiza Cota TSP:

Como la solución DHC es factible:

$$\sum_{k=0}^{n} t_{v_k v_{k+1}} \leq T_{max} = L$$

Usando $t_{ij} = d_{ij}$:

$$\sum_{k_0}^{n} d_{v_k v_k + 1} \leq L$$

Por lo tanto, el ciclo hamiltoniano $0, v_1, \dots, v_n, 0$ en TSP tiene longitud total $\leq L$.

Conclusión: TSP responde SÍ

Conclusión

Hemos demostrado que:

1. **DCH** $\in$ **NP** (verificación $O(n \cdot m)$)
2. **DCH es NP-hard** (reducción TSP $\leq_p$ DCH en $O(n^2)$)

Por lo tanto, DCH es NP-complete.

Observaciones adicionales

- La reducción es **forzosa**: el sistema de precios y ofertas garantiza que la única forma de alcanzar beneficio $P = n - 1$ es visitando todos los n puertos (ciclo hamiltoniano)
- La mercancía funciona como un **certificado de visita**: compramos 1 unidad en cada puerto visitado.
- DHC es además **strongly NP-hard** porque TSP lo es.