Conferencia 9 - Relaciones de Recurrencia

April 2, 2024

Teorema. *Sean* $\{x_n\}$ *y* $\{y_n\}$ *soluciones de la relación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$*, entonces* $Ax_n + By_n$ $(A, B \in \mathbb{R})$ *es solución de la ecuación de recurrencia dada.*

Demostración
Como $\{x_n\}$ es solución entonces $x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2}$ y
$Ax_n = Ac_1x_{n-1} + Ac_2x_{n-2}$
Como $\{y_n\}$ es solución entonces $y_n = c_1y_{n-1} + c_2y_{n-2}$ y
$By_n = Bc_1Y_{n-1} + Bc_2y_{n-2}$
Entonces $Ax_n + By_n = c_1(Ax_{n-1} + BY_{n-1}) + c_2(Ax_{n-2} + By_{n-2})$
luego $Ax_n + By_n$ es solución

Teorema. *Sean* q_1 *y* q_2 *soluciones de la ecuación* $x^2 - c_1x - c2 = 0$ *tal que* $q_1 \neq q_2 \neq 0$*, entonces* x_n *es solución de la relación* $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ *donde* $x_n = Aq_1^n + Bq_2^n$

Demostración
Por el Teorema previo se tiene entonces que las sucesiones de la forma x_n son solución

Ahora se debe demostrar que cualquier solución es de esta forma, que es equivalente a demostrar que el sistema siguiente tiene una única solución
$Aq_1 + Bq_2 = a_1$
$Aq_1^2 + Bq_2^2 = a2$
para ello el determinante debe ser distinto de 0 y se cumple pues
$q_1q_2^2 - q_2q_1^2 = q_1q_2(q_2 - q_1) \neq 0$

Teorema. *Sea* $q \in \mathbb{R}$*,* $q \neq 0$ *única raíz de la ecuación* $x^2 - c_1x - c2 = 0$*, entonces la sucesión* nq^n *es solución de la relación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$

Demostración
q es raíz de $x^2 - c_1x - c2$ luego $q^2 - c_1q - c2 = 0$
como q es raíz única por Vieta se tiene que $2q = c_1$ y $q^2 = -c_2$
entonces $a_n = 2qa_{n-1} - q_2a_{n-2}$
Luego
$nq^n = 2q(n-1)q^{n-1} - q^2(n-2)q^{n-2}$
$nq^n = 2(n-1)q^n - (n-2)q^n$
$nq^n = (2n - 2 - n + 2)q^n$
$nq^n = nq^n$

Teorema. *Sea* $q \in \mathbb{R}$ *raíz de multiplicidad 2 de la ecuación* $x^2 - c_1x - c2 = 0$*, entonces* x_n *es solución de la relación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ *si y solo si* $x_n = Aq^n + Bnq^n$

Demostración Ya se vio que las sucesiones de la forma x_n son solución

Ahora se debe demostrar que cualquier solución es de esta forma, que es equivalente a demostrar que el sistema siguiente tiene una única solución

$Aq + Bq = a_1$

$Aq^2 + 2Bq^2 = a2$

para ello el determinante debe ser distinto de 0 y se cumple pues

$2q^3 - q^3 = q^3 \neq 0$

Definición. *La ecuación característica de la relación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ *es de la forma* $p(x) = x^k - c_1x^{k-1} + c_2x^{k-2} + \ldots + c_k = 0$

Teorema. *Si la ecuación característica de la relación de recurrencia homogénea* $a_n = c_1a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ *tiene* k *raíces distintas, entonces* $A_1q_1^n + A_2q_2^n + \ldots + A_kq_k^n$ *es solución de la relación, donde* q_i $1 \leq i \leq k$ *son raíces de la ecuación característica (*$p(x)$*).*

Teorema. *Sea* $q \in \mathbb{R}$ *raíz de multiplicidad* t*,* $t \geq 1$*, de la ecuación característica de la relación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$*, entonces* q^n*,* nq^n*,* n^2q^n*,* $\ldots$*,* $n^{t-1}q^n$ *son soluciones de la relación de recurrencia.*

Teorema. *Si la ecuación característica de la relación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ *tiene raíces* $q_1, q_2, \ldots, q_t$ *con multiplicidades* $m_1, m_2, \ldots, m_t$*, entonces la relación de recurrencia tiene como solución* $P_1(n)q_1^n + P_2(n)q_2^n + \ldots + P_t(n)q_t^n$ *donde* P_i *es un polinomio en* n *de grado* m_i

Definición. *Una solución particular de una relación de recurrencia es una sucesión que cumple la recurrencia aunque no satisfaga las condiciones iniciales*

Teorema. *Sea* P_n *una solución particular de la relación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + f(n)$ *entonces la solución general de la misma es* $P_n + H_n$*, donde* H_n *es la solución de la relación homogénea asociada*

Solución Particular

Una solución particular P_n se puede encontrar en algunos casos:

1. Si $f(n) = T_k(n)$ (polinomio de grado k) entonces $P_n = Q_k(n)$ (polinomio de grado k), excepto si 1 es raíz característica con multiplicidad s, en cuyo caso $P_n = n^sQ_k(n)$

2. Si $f(n) = ca^n$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $P_n = qa^n$, $q \in \mathbb{R}$, excepto si a es raíz característica con multiplicidad s, en cuyo caso $P_n = n^s qa^n$

3. Si $f(n) = a^n T_k(n)$ entonces $P_n = a^n Q_k(n)$ excepto si a es raíz característica con multiplicidad s, en cuyo caso $P_n = n^s a^n Q_k(n)$

Solución General
La solución general se obtiene de la siguiente forma:

1. Se calcula la solución general de la ecuación homogénea
   $a_n = c_1 a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$

2. Se calcula una soluciín particular P_n de la ecuación
   $a_n = c_1 a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$

3. La suma de ambas soluciones es una solución general de la ecuación
   $a_n = c_1 a_{n-1} + a - 2c_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$

4. Se obtiene la solución correspondiente a las condiciones iniciales

Ejemplo 1
Sea la recurrencia $a_0 = 5$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} - 6n^2 + 26n - 25$

La relación homogénea tiene como polinomio característico a
$P(x) = x^2 - x - 6$ cuyas raíces son $q_1 = -2\, q - 2 = 3$ por lo que la solución general de la ecuación es $a_n = A(-2)^n + B3^n$

Como $f(n) = -6n^2 + 26n - 25$ es un polinomio de grado 2 entonces P_n es de grado 2 por lo que se prueba una solución particular de la forma $P_n = an^2 + bn + c$ que sustituida en la relación de recurrencia da una solución $a = 1\, b = 0\, c = 0$ por lo que una solución particular es $P_n = n^2$

Entonces la solución general de la no homogénea es $a_n = A(-2)^n + B3^n + n^2$

Cómo las condiciones iniciales son $a_0 = 5 = A + B$ y $a_1 = 1 = -2A + 3B + 1$ entonces $A = 3$ y $B = 2$ y la solución de la recurrencia es
$a_n = 3(-2)^n + 2 * 3^n + n^2$

Ejemplo 2
Sea la recurrencia lineal $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 2^n$

La homogénea tiene como polinomio característico $P(x) = x^2 - x - 6$

cuyas raíces son $q_1 = -2\, q - 2 = 3$ por lo que la solución general de la ecuación es $a_n = A(-2)^n + B3^n$

Como $f(n) = 2^n$ y $b = 2$ no es raíz del polinomio característico entonces se puede probar una solución particular de la forma $P_n = c2^n$ que cuando se sustituye en la recurrencia da como solución $c = -1$ luego una solución particular de la recurrencia es $P_n = -2^n$

Entonces la solución general de la no homogénea es $a_n = A(-2)^n + B3^n - 2^n$ y como las condiciones iniciales son $a_0 = 0 = A + B - 1$ y $A_1 = 1 = -2A + 3B - 2$ entonces $A = 0$ y $B = 1$ por lo que la solución de la recurrencia es $a_n = 3^n - 2^n$

Ejemplo 3
Sea la recurrencia lineal $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 3^n$

La homogénea tiene como polinomio característico $P(x) = x^2 - x - 6$ cuyas raíces son $q_1 = -2\, q - 2 = 3$ por lo que la solución general de la ecuación es $a_n = A(-2)^n + B3^n$

cuyas raíces son $q_1 = -2\, q - 2 = 3$ por lo que la solución general de la ecuación es $a_n = A(-2)^n + B3^n$

Como $f(n) = 3^n$ y $b = 3$ es raíz del polinomio característico con multiplicidad 1 entonces se prueba con una solución particular de la forma $P_n = cn3^n$ que cuando se sustituye en la recurrencia da $c = 3/5$ entonces la solución particular queda $P_n = \frac{n3^{n+1}}{5}$

Entonces la solución general de la no homogénea queda $a_n = A(-2)^n + B3^n + \frac{n3^{n+1}}{5}$ que, evaluando en las condiciones iniciales, queda $a_0 = 0 = A + B$ y $a_1 = 1 = -2A + (\frac{3}{5} + B)3$ luego $A = \frac{4}{25}$ y $B = -\frac{4}{25}$ por tanto la solución de la recurrencia es $a_n = \frac{4}{25}(-2)^n + (\frac{15n-4}{25})3^n$

Ejemplo 4
Sea la recurrencia $a_1 = 1$. $a_n = 2A_{n-1} + 1$ (Torres de Hanoi)

La relación homogénea ($a_n = 2A_{n-1}$) tiene como polinomio característico $P(x) = x - 2$ cuya raíz es $q = 2$ luego la solución general de la homogénea es $P_n = A2^n$

Entonces se prueba una solución particular de tipo $P_n = c$ que sustituida en la recurrencia da $c = -1$ luego la solución particular es $P_n = -1$
entonces la solución general de la homogénea es $a_n = A2^n - 1$
como la conidición inicial es $a_1 = 1 = 2A - 1$ entonces $A = 1$
por lo que la solución de la recurrencia es $a_n = 2^n - 1$

Teorema. *Si el término no homogéneo de la relación de recurrencia de orden k es de la forma $P_1(n)S_1^n + P_2(n)S_2^n + \ldots + P_n(n)S_n^n$ entonces hay una solución particular $f_1(n) + f_2(n) + \ldots + f_n(n)$ donde $f_i(n)$ es solución particular de la recurrencia de orden k $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} + P_i(n)S_i^n$*