Conferencia 7 - Combinatoria

April 12, 2024

Principio de Inclusión - Exclusión. *Permite calcular la cardinalidad de la unión de varios conjuntos*
$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}| \cap A_i|_{i\in I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},|I|=k}$

Demostración

Sea un elemento x del universo

Si x no cumple ninguna propiedad entre $A_1, A_2, \ldots, A_n$ entonces no se cuenta nunca en la suma.

Si x cumple exactamente una propiedad, o sea, $\exists\, i$ tal que $x \in A_i$ pero $\forall\, j,\, j \neq i$ implica que $x \notin A_j$, x se cuenta solo una vez

Si x cumple k propiedades al mismo tiempo entonces:

se cuenta k en $\sum_{1\leq i\leq m} |A_i|$

se cuenta $\binom{k}{2}$ en $\sum_{1\leq i<j\leq m} |A_i \cap A_j|$

...

...

se cuenta $\binom{k}{k}$ en la intersección de k propiedades

No tiene sentido verificar cuántas veces se cuenta x en la intersección de más de k propiedades porque solo aparece en k conjuntos

Entonces x se cuenta:

k - $\binom{k}{2}$ + $\binom{k}{3}$ - ... + $(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$

$=\binom{k}{0}$ + [-$\binom{k}{0}$ + $\binom{k}{1}$ - $\binom{k}{2}$ + $\binom{k}{3}$ - ... + $(-1)^{k+1}\binom{k}{k}$]

$=\binom{k}{0}= 1$

Definición. *Sea un universo tal que existen m posibles propiedades $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Si $\{P_{i_i}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}\}$ es un subconjunto de las m posibles propiedades se denota $N_{i_i,i_2,\ldots,i_k}$ a la cantidad de elementos que cumplen las propiedades $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_m}$.*

s_k es la cantidad de veces que se cumplen k propiedades

Entonces se define $S_0 = n$ donde $n = |U|$ y $S_k = \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_k\leq m} N_{i_i,i_2,\ldots,i_k}$ con $1 \leq k \leq m$

(Esto último sería todas las maneras en las que pueden cumplirse k propiedades de m)

Entonces el Principio de **Inclusión - Exclusión** puede escribirse:

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots (-1)^{m-1}S_m$

$|A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_m^c| = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots (-1)^{m}S_m$

Teorema. ***Generalización del Principio de Exclusión***. *Sea U un conjunto finito de elementos y P un conjunto arbitrario de m propiedades, el número de elementos de U que poseen exactamente R propiedades y $0 \leq R < m$ es $N(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$*

Demostración

Sea k un elemento del universo que cumple t propiedades

Si $t < R$ se cuenta 0 veces

Se puede notar que la fórmula comienza por S_R lo que implica que x no aparece en la interesección de más de t elementos

Si $t = R$ se cuenta 1 vez, solo se cuenta en S_R

Si $t > R$ entonces $N(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} S_{k+R}$ porque no se va a contar en interesecciones de más de t

Ahora $k + R \leq t$ por tanto el elemento se cuenta $\binom{t}{k+R}$ veces en S_{k+R}
por tanto x se cuenta en $N(R)$
$\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k} \binom{t}{k+R}$
ahora $\binom{k+R}{k}\binom{t}{k+R}=\binom{t}{R}\binom{t-R}{k}$ esto se obtiene luego de desarrollar
las combinaciones y multiplicar y dividir por $(t-R)!$
luego $\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{k+R}{k}\binom{t}{k+R}=\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t}{R}\binom{t-R}{k}$
$=\binom{t}{R}\sum_{k=0}^{t-R} (-1)^k \binom{t-R}{k}= 0$

Teorema. *Sea U un conjunto finito de elementos y P un conjunto arbitrario de m propiedades, el número de elementos de U que poseen satisfacen al menos R propiedades y $0 \leq R < m$ es $\bar{N}(R) = \sum_{k=0}^{m-R} (-1)^k \binom{k+R-1}{R-1} S_{k+R}$*

Principio del Palomar. *Si se tiene un palomar con n agujeros o casillas y m, $m > n$, palomas, entonces existe una casilla que contiene más de una paloma. De manera general, existe una casilla que tiene más de $\lfloor \frac{m}{n} \rfloor$ palomas.*

Ejemplo 1

En todo conjunto de n números enteros es posible encontrar un subconjunto tal que la suma de los elementos del subconjunto es divisible por n.

Tomando los subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tal que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n$:
$A_1 = \{a_1\}$
$A_2 = \{a_1, a_2\}$
$A_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$
$\ldots$
$\ldots$
$A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Si hay algún A_i tal que la suma de sus elementos $(S(A_i))$ cumple que $S(A_i) \equiv 0\,(n)$ entonces ya queda demostrado.

Si esto no ocurre entonces para estos conjuntos en sus sumas hay $n-1$ posibles restos entonces, por el **Principio del Palomar**, hay dos que dejan el mismo resto, o sea, existen i, j $i \neq j$ tal que $S(A_i) \equiv S(A_j)\,(n)$ luego $S(A_i) - S(A_j) \equiv 0\,(n)$

Entonces se toma el conjunto $A_i - A_j = A_{i-j}$ asumiendo, sin perdida de generalidad, que $|A_i| > |A_j|$, luego $S(A_{i-j}) \equiv 0\,(n)$

Ejemplo 2

Sea la relación de conocerse una relación mutua, entonces en un grupo de 6 personas hay al menos 3 personas que se conocen entre ellos o al menos 3 que no se conocen entre ellos.

Si se toman n casillas, entendiendo que si alguien está en la misma casilla se conocen entre ellos y si están en casillas diferentes no se conoce entre si. Para $n > 2$ cualquier distirbución significa que hay al menos tres que no conocen entre si. Ahora si $1 \leq n \leq 2$ entonces, por el **Prinicipio del Palomar**, en una casilla como mínimo habrá 3 personas y entonces habría al menos 3 personas que se conocen entre si.