Matemática discreta - Examen Mundial
Curso 2023-2024

Nombre y apellidos: ______________________________ Grupo: ________

1. Sea *Chill* el lenguaje que reconoce las Máquinas de Turing tales que, para cualquier entrada, se pasa por todos los índices de la pista una cantidad finita de veces. Demuestre que Chill no es decidible.

2. Se define la operación $shuffle$ ($||$) de la siguiente forma:
   Sean x, y dos cadenas, $x||y$ es el subconjunto que se obtiene de mezclar x y y de todas las formas posibles. Por ejemplo:
   $$ab||cd = \{abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab\}$$
   Sean A y B dos lenguajes:
   $$A||B \stackrel{def}{=} \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} x||y$$
   Por ejemplo:
   $$\{ab\}||\{cd, e\} = \{abe, eab, aeb, abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab\}.$$
   Demuestre que sean A y B regulares, $A||B$ también lo es.

3. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función total, demuestre que si el lenguaje $L = \{< x, f(x) > | x \in N\}$ es decidible, entonces $f(x)$ es computable.

4. Demuestre el teorema de *Hall* [1]. En un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ existe un emparejamiento de X a Y si y solo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$ no vacío.

5. Demuestre que para todo entero positivo k existe un grafo con $X(G) = k$ sin triángulos

[1] El ejercicio iba a llegar hasta aquí de no ser porque Daniel dijo que era demasiada violencia, denle las gracias luego