Conferencia 8 - Relaciones de Recurrencia

March 26, 2024

Definición. *Una relación de recurrencia para la suceción $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en una ecuación que relaciona el término n-ésimo con alguno(s) de sus predecesores*

Ejemplos

1. Progresión Artmética: $a_n = a_{n-1} + d$
2. Progresión Geométrica: $a_n = q * a_{n-1}$
3. Torres de Hanoi: $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $a_0 = 0$

Ejercicio

Se tienen n líneas que se pondrán en el plano. No hay rectas paralelas no hya un punto del plano donde se corten 3 o más líneas.

¿En cuántas regiones queda dividio el plano después de pintar todas las líneas?

$a_0 = 0$
$a_1 = 2$
$a_2 = 4$
$\ldots$
$a_n = a_{n-1} + n$

Cuando se pinta la primera línea se divide al plano en 2 regiones

Cuando se pinta la línea k-ésima, el plano está dividido en a_{n-1} regiones ya y la nueva línea corta a las $k-1$ rectas ya existentes (no hay dos rectas paralelas), por tanto por cada región que pasa la divide en dos nuevas regiones y pasa por $(k-1)+1$ regiones, por tanto

$a_k = a_{k-1} + k$

Ejercicio

¿Cómo repartir n objetos iguales en k categorías distintas?

Denotamos $a(n,k)$ como el número de formas de hacerlo

Suponga que las categorías son cajas, luego, si en la primera caja no se pone ningún objeto entonces se resuelve de $a(n,k-1)$, que es lo mismo de ver como repartir n objetos en $k-1$ cajas.

Ahora, si en la primera caja se pone al menos 1 elemento entonces se resuelve como $a(n-1,k)$.

Entonces $a(n,k) = a(n,k-1) + a(n-1,k)$ con $n \geq 0$, $k \geq 1$ donde $a(n,1) = 1$ y $a(0,k) = 1$

Ejercicio

Si un compañía tiene 2 oficinas, A y B, y su negocio es rentar carros para recorridos locales. Al final de cada mes la mitad de los carros de la oficina A terminan en B y un tercio de los carros de B terminan en A. Si se conocen los valores iniciales de carros que hay en A (c_A) y en B (c_B), al transcurrir n meses cuántos carros hay en A y en B respectivamente.

$A_n = \frac{A_{n-1}}{2} + \frac{B_{n-1}}{3}$

$B_n = \frac{2B_{n-1}}{3} + \frac{A_{n-1}}{2}$

dónde $A_1 = c_A$ y $B_1 = c_B$

Ejercicio - Problema de Josephus

Hay gente de pie en un círculo a la espera de ser ejecutada. La cuenta comienza en un punto y dirección específica del círculo. Después de que se haya salteado a un número determinado de personas, la siguiente persona es ejecutada. El procedimiento se repite con las personas restantes, a partir de la siguiente persona, que va en la misma dirección y omitiendo el mismo número de personas, hasta que solo una persona permanece y se libra.

Si hay n personas y se ejecutan alternadamente, cual sobrevive?

Tomemos a_n como la posición sobreviviente.

Si n es par, si el número inicial de la gente es par, entonces la persona en la posición x durante la segunda vuelta alrededor del círculo estaba originalmente en la posición $2x-1$ (para cualquier valor de x), Entonces, si $n = 2j$ la persona en a_j que ahora sobrevive, inicialmente estaba en la posición $2a_j - 1$. Luego se tiene como recurrencia que:

$a_{2n} = 2a_n - 1$

Si el número inicial de la gente es impar, entonces pensamos que la persona en la posición primera morirá al final de la primera vuelta alrededor del círculo. En este caso, la persona en la posición x estaba originalmente en la posición $2x + 1$. Esto da la recurrencia:

$a_{2n+1} = 2a_n + 1$

Y el caso base es $a_1 = 1$

Clasificación de las Relaciones de Recurrencia

De orden K

Ejemplo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-k}$

Con coeficientes constantes

Ejemplo: $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

Con coeficientes variables

Ejemplo: $a_n = (n-1)a_{n-1}$

Lineales
Ejemplo: $a_n = 2a_{n-1}$

No Lineales
Ejemplo: $a_n = a_{n-1}^2$

Homogéneas
Ejemplo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

No Homogéneas
Ejemplo: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + n$

Si se generaliza para:
$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n)$
si $f(n) = 0$ es homogénea
si $f(n) \neq 0$ es no homogénea

Definición. *Resolver una relación de recurrencia es expresarla en su forma cerrada, es decir, expresarla en una fórmula que solo necesite el valor de n para computarla.*

Teorema. *Sea f tal que $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ y sean $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ valores dados. Entonces existe una y solo una secuencia $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ que satisface que $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$ con $n \geq k$ y donde $a_1 = c_1,\ a_2 = c_2,\ \ldots,\ a_{k-1} = c_{k-1}$*

Teorema. *Sea $q \in \mathbb{R}$, $q > 0$, la suceción $\{q^n\}$ satisface la ecuación de recurrencia $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ si y solo si q es raíz de la ecuación $x^2 - c_1 x - c2 = 0$*

$x^2 - c_1 x - c2 = 0$ se conoce como polinomio o ecuación característica de $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$

Demostración
Como $\{q^n\}$ satisface $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ entonces $q^n = c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2}$ por tanto, $q^2 = c_1 q + c_2$, luego $q^2 - c_1 q - c_2 = 0$ entonces $p(x) = x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ tiene como raíz a q.

Por otra parte, si $p(x) = 0$ se tiene que $p(q) = q^2 - c_1 q - c_2 = 0$, por lo que $q^2 = c_1 q + c_2$, luego $q^n = c_1 q^{n-1} + c_2 q^{n-2}$ y, por tanto, $\{q^n\}$ satisface que $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$