Árboles

> **Definición**: Un árbol T es un grafo no dirigido, conexo y acíclico.

Propiedades

> **Teorema 9.1:** Un grafo T es un árbol si y solo si entre todo par de vértices u, v existe un único camino que los conecta.

Demostración:
$\Rightarrow$
Por la definición de árbol, T es conexo, por que existe al menos un camino. Demostremos que es único.
Supongamos que entre u, v existen dos caminos P, Q distintos. Entonces hay un vértice x y un vértice y tales que:

$$P = u \rightarrow^* x \rightarrow (p_i) \rightarrow y \rightarrow^* v$$
$$Q = u \rightarrow^* x \rightarrow (q_i) \rightarrow y \rightarrow^* v$$

Donde, $u \rightarrow *x$ es idéntico en ambos caminos, y y es el primer vértices después x que aparece en ambos caminos.
Por tanto, hay dos caminos simples disjuntos de x a y, lo que implica un ciclo, contradiciendo la definición de árbol.
$\Leftarrow$ Trivial ■

> **Teorema 9.2:** Si T es un árbol de orden n entonces tiene exactamente $n - 1$ aristas.

Idea de demostración: Inducción en n, teniendo en cuenta en que toda arista en un árbol es puente. ■

> **Teorema 9.3:** Las siguientes proposiciones son equivalentes:
>
> - T es un árbol
> - T es conexo y tiene $n - 1$ aristas.
> - T es acíclico y tiene $n - 1$ aristas.

Idea de demostración:

- $(i) \Rightarrow (ii)$ Trivial.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$ Demostrar el lema si G es conexo, $|E| \geq n - 1$.
- $(iii) \Rightarrow (i)$ Ver que cada componente conexa de T es un árbol, luego tiene $n_i - 1$ aristas. Despejar la cantidad de componentes conexas. ■

> **Teorema 9.4**: Todo árbol no trivial ($n >= 2$) contiene al menos dos hojas.

Idea de demostración: Sumar los grados asumiendo que $n - 1$ vértices tienen grado ≥ 2. ■

Árboles abarcadores

Un árbol abarcador es un subgrafo abarcador que es un árbol.

> **Teorema 9.5:** Todo grafo conexo tiene un árbol abarcador.

Idea de demostración: El subgrafo abarcador conexo de menor tamaño tiene que ser un árbol. ■

Definamos la *distancia* de u a v, como la longitud del camino más corto de u a v.

$$\delta(u, v) = min_{p: u \rightarrow v}\{|p|\}$$

Decimos que un subgrafo abarcador H de un grafo G conserva las distancias desde cierto vértice v si $\delta_H(v,u) = \delta_G(v,u)$.

> **Teorema 9.6:** En todo grafo conexo, para todo vértice v, existe un árbol abarcador que conserva las distancias desde v.

Demostración: Lo haremos por construcción.
Definamos los conjuntos $D_i = \{u \in V \,|,\ d_G(v,u) = i\}$ para todo $i \in [1,k]$ donde k es la máxima distancia en G.
Definamos $D_0 = \{v\}$. Evidentemente $\{D_i\}$ es una partición de los vértices de G, pues G es conexo, así que todo vértice pertenece a uno y solo uno de los conjuntos D_i.
Para cada vértice u en cada conjunto $D_i, i > 0$ existe al menos una arista e que lo conecta con un vértice en D_{i-1} pues por definición, existe un camino $p = v \to^* w \to u$ de longitud i entre v y u, por lo que existe un camino $p = v \to^* w$ entre v y w de longitud $i-1$ (que puede ser 0 y por eso definimos D_0. Si hay más de una arista, sea e_u la primera arista que cumple esta condición para el vértice u.
Sea T el subgrafo abarcador donde $E(T) = \{e_u\}$ es el conjunto de todas las aristas por cada vértice $u \in D_i, i > 0$. Evidentemente $|E(T)| = n-1$ pues existe una arista por cada vértice $u \in V - \{v\}$. Además, T es conexo (¿por qué?). Luego, T es un árbol.
Además, T conserva la distancia por inducción en i. ■

Emparejamiento

Un conjunto de aristas $e_{(i)} = \{u_i, v_i\}$ y xy en un grafo G se dicen *mutuamente independientes* si $\bigcap_i \{u_i, v_i\} = \emptyset$, o sea si no comparten vértices.

> **Definición**: En un grafo G, un subcojunto $M \subseteq E$ de *aristas mutuamente independientes* es un **emparejamiento**.

Un emparejamiento es *maximal* si no se puede adicionar ninguna arista a M que sea independiente con todas las además. Un emparejamiento es *máximo* si tiene la mayor cardinalidad entre todos los emparejamientos posibles.

Emparejamientos máximos

Dado un emparejamiento M, todos los vértices en los que incide cualquier arista $e \in M$ se denominan *vértices M-emparejados*. El resto son vértices no M-emparejados.

Dado un emparejamiento M, un camino que alterna entre aristas de M y M^C se llama camino *M-alternante*. Si los vértices de ambos extremos son no M-emparejados, entonces se llama un **camino M-incremento**.

> **Teorema 9.7 (Berge):** Un emparejamiento M es máximo si y solo si no existe ningún camino M-incremento.

Demostración:
$\Leftarrow$ Si existe un camino M-incremento, se puede construir un emparejamiento de cardinalidad $|M|+1$.
$\Rightarrow$ Supongamos que M no es máximo, demostremos que existe un camino M-incremento.
Sea M^* un emparejamiento máximo, entonces $|M^*| > |M|$. Sea H el subgrafo abarcador definido por $E(H) = M^* \,\Delta\, M = M^* - M \cup M - M^*$, o sea, las aristas que están en M^* o en M pero no en ambos.
Cada vértice en H tiene grado $d_H(v) \leq 2$. Notemos que en este grafo están todas las componentes conexas son caminos o ciclos. Además, en cada camino o ciclo, las aristas en $E(H)$ alternan entre M y M^* (¿ por qué?).
Luego, como todo ciclo tiene longitud par, y en $E(H)$ hay más aristas de M^* que de M, tiene que existir una componente conexa P que es un camino que empieza y termina con aristas de $M^* - M$.
Sean u y v los vértices extremos respectivos de dicho camino. Notemos que u y v no pueden ser M-emparejados. Supongamos que u es M-emparejado, entonces hay una arista $e \in M, e \notin E(H)$ incidente en u, pero $e \notin M^*$ porque ya hay una arista incidente en u en M^*, por tanto $e \in M - M^*$ lo que contradice que $e \notin E(H)$. Por el mismo motivo v no es M-emparejado tampoco. Así que P es un camino M-incremento. ■

Emparejamiento en Grafos Bipartitos

> **Definición:** Sea $G = (X \cup Y, E)$ un grafo bipartito con $|X| \leq |Y|$, se dice que X está (parcialmente) emparejado a Y por M, si existe un emparejamiento M que cubra todos los vértices de X. Si cubre todos los vértices de Y, diremos que M es un emparejamiento perfecto.

De ahora en adelante usaremos la notación $N(X)$ para referirnos a la unión de las vecindades de todo vértice $x \in X$.

$$N(X) = \bigcup_{x \in X} N(x)$$

> **Teorema 9.8 (Hall):** En un grafo bipartito $G = (X \cup Y, E)$ existe un emparejamiento de X a Y si y solo si $|N(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq X$ no vacío.

Demostración:
$\Rightarrow$
Sea M el emparejamiento, sea $S \subseteq X$ un subconjunto cualquiera, por definición todo vértice $x \in S$ está M-emparejado. Sea $M(S)$ el conjunto de vértices $y \in Y$ correspondientemente emparejados a S. Por definición de emparejamiento, $|M(S)| = |S|$. Además, para todo vértice $y \in M(S) \Rightarrow y \in N(S)$ dado que está emparejado. Entonces $M(S) \subseteq N(S)$, luego $|N(S)| \geq |M(S)| = |S|$.
$\Leftarrow$
Supongamos que $|N(S)| \geq |S|$ pero X no puede ser emparejado completamente. Sea M el emparejamiento máximo, entonces $\exists v \in V$ tal que v no está M-emparejado.
Sea Z el conjunto de vértices en G que son alcanzables desde v por caminos M-alternantes. Como M es un emparejamiento máximo, el único vértice no emparejado en Z es v (¿por qué?).
Definamos $S = Z \cap X$ y $T = Z \cap Y$. Notemos que, por construcción, todos los vértices en S deben estar M-emparejados con algún vértice de T, excepto v. Por lo tanto, $|T| = |S| - 1$, y $T \subseteq N(S)$.
Supongamos que hay un vértice $w \in N(S)$ tal que $w \notin T$. Esto significa que w no está unido a v por un camino M-alternante, pero entonces tendríamos un camino M-incremento, lo cuál es imposible porque M es un emparejamiento máximo. Por tanto, $N(S) \subseteq T$, por lor que $N(S) = S$, y entonces $|N(S)| = |S| - 1 < |S|$, lo que contradice la hipótesis inicial. ■

Finalmente, vamos a demostrar un corolario interesante del teorema de Hall.

> **Teorema 9.9 (Teorema de los matrimonios):** Todo grafo bipartito regular de grado $r \geq 1$ tiene un emparejamiento perfecto.

Demostración:
Si G es bipartito y regular con $r \geq 1$, entonces $r|X|$ = $r|Y|$ y por tanto $|X| = |Y|$.
Sea $S \subseteq X$ un subconjunto no vacío cualquiera de X. Sea E_1 las aristas incidentes en S y E_2 las aristas incidentes en $N(S)$. Por definición de $N(S)$ tenemos que $E_1 \subseteq E_2$.
Entonces, si $|E_1| = r|S|$ y $|E_2| = r|N(S)|$ tenemos que $r|N(S)| \geq r|S|$ por lo que $|N(S)| \geq |S|$. ■