Conference 5 - Combinatoria

February 26, 2024

Definición. *Sea N_n el conjunto $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, se dice que A tiene n elementos o que $|A| = n$ si existe $f : N_n \to A$ biyectiva. Si A es no vacío o tiene n elementos se dices que es un conjunto finito*

Definición. *Dos conjuntos A y B se dice coordinables y se denota A B si existe $f : A \to B$ biyectiva*

Nota
Si A es un conjunto no vacío y tiene cardinalidad n entonces A es coordinable con N_n

Teorema. *Si A es coordinable con B entonces $|A| = |B|$*

Demostración
Si $|A| = n$
como A finito entonces existe $f : N_n \to A$ biyectiva
y como es A es coordinable con B existe $g : A \to B$ biyectiva
luego si se tiene la compuesta $g \circ f : N_n \to B$ esta es biyectiva pues f y g son biyectvas por lo que B es coordinable con N_n y tiene cardinalidad n con lo que $|B| = n$
Ejemplo
En un torneo con ganador único donde comienzan n jugadores ¿cuántos partidos se realizan si se descalifica al que pierde un parido?
Se tiene A como el conjunto de los juegos que se efectúan
y se tiene B como el conjunto de los jugadores descalificados
Se tiene $f : A \to B$ donde $< x, y >\in f$ si y pierde en el partido x
Es fácil ver que f es biyectiva y, por tanto, A es coordinable con b:
f es inyectiva porque para dos partidos diferentes son descalificados judadores diferentes
f es sobrectiva porque todos los jugados son descalificados producto de un partido
Como son n jugadores y hay un solo ganador entonces hay $n-1$ jugadores descalificados
Luego $|B| = n - 1$ y por tanto como $|A| = |B|$ entonces$|A| = n - 1$

Teorema. *Sean A y B conjuntos finitos, si $A \cap B = \varnothing$ entonces*
$|A \cup B| = |A| + |B|$

Principio de Inclusión - Exclusión. *Permite calcular la cardinalidad de la unión de varios conjuntos*
$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} |\cap A_i|_{i\in I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},|I|=k}$

Ejemplo

De 200 estudiantes 50 toman el curso de matemáticas discretas, 140 el curso de economía y 24 ambos. Como ambos cursos programaron exámenes para el día siguiente, sólo los estudiantes que no esten en ninguno de estos curso podrán ir a la fiesta de la noche. Se quiere ver cuántos estudiantes iran a la fiesta.

Si A_1 es el conjunto que estudia discreta y A_2 el de los que estudian economía entonces $|A_1 \cup A_2| = 50 + 140 - 24 = 166$ por lo que irán a la fiesta $200 - 166 = 34$

Principio de la Suma. *Si un suceso A puede ocurrir de n maneras y un suceso B puede ocurrir de m maneras y A y B no pueden ocurrir simultáneamente, entonces el suceso $A \vee B$ sucede de $n+m$ maneras diferentes.*

Principio del Producto. *Si un primer objeto puede escogerse entre n posibles, y después un segundo objeto puede escogerse entre m posibles, entonces simultáneamente ambos objetos pueden escogerse de nm maneras distintas.*

Ejemplo

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto potencia de $|A|$?
  Cómo hay $|A|$ elementos entonces cada uno de estos puede aparecer o no en cada subconjunto de A, que son los elementos de 2^A, luego la cantidad de subconjuntos sería $2 * 2 * ... * 2$ donde se múltiplican $|A|$ veces, por tanto $|2^A| = 2^{|A|}$

- ¿Cuántos números de 7 dígitos hay que comienzan con 428 y terminan en 3 o 6?
  Se tiene $428D_4D_3D_2D_1$ y para D_4, D_3 y D_2 hay 10 posibilidades (10 dígitos) mientras que para D_1 solo hay 2 posibilidades, luego hay $10 * 10 * 10 * 2 = 2000$ números posibles

- ¿Cuántos divisores tiene n?
  $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots pe_{k k}$ luego tiene $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_k + 1)$ divisores y si fueran divisores propios serían $(e_1 + 1)(e_2 + 1) \ldots (e_k + 1) - 2$

Definición. *Una* ***permutación*** *de n objetos es una ordenación de estos en fila. Se denota por $P(n)$ o por P_n*

Teorema. *Si se tienen n objetos diferentes entonces $P_n = n!$*

Ejemplo Si se va a formar un comité que involucra presidente, tesorero y secretario, habiendo 3 candidatos a, b, c ; cuando se elige por sorteo los cargos sucesivamente, hay $3! = 6$ posibilidades u ordenaciones: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Definición. *Una* k***-permutación*** *(conocido como variaciones) de un conjunto* S *es una secuencia de* k *elementos distintos de* S*. Se denota* $P(n,k)$*, o por* V_k^n

Teorema. $V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$

Ejemplo Si se va a formar un comité que involucra presidente, tesorero y secretario, habiendo 10 candidatos; cuando se elige por sorteo los cargos sucesivamente, hay $\frac{10!}{(10-3)! = \frac{10!}{7!}} = 10 * 9 * 8 = 720$ posibilidades u ordenaciones

Definición. *Sean* n *objetos, una combinación de* n *en* k *es un subconjunto de* k *objetos tomados de los* n*. Se denota por* $C(n,k)$ *o* C_k^n *o* $\binom{n}{k}$

Teorema. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Ejemplo

¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de $m \times n$?

Son $n+1$ líneas verticales y $m+1$ líneas horizontales

Entonces hay que escojer dos líneas verticales y dos líneas horizontales por cada posible rectángulo. En estos casos no importa el orden, por tanto son combinaciones de 2.

Entonces sería $\binom{n+1}{2}\binom{m+1}{2}$