MAT-55 - Álgebra Linear Computacional
Primeiro semestre de 2023
Prof(a): Tiara Martini dos Santos

Lista 2: Fatoração LU.

Exercícios teóricos:

1. Sobre o teorema de existência e unicidade da Fatoração LU, se uma submatriz principal dominante de ordem k for singular, podemos afirmar que a matriz A não possui Fatoração LU? Fundamente sua resposta teoricamente e com exemplos.

2. Seja $P = I - uu^\top$, $u = e_r - e_s$, a matriz que representa a permutação das linhas r e s de uma matriz.

   (a) Mostre que $P^{-1} = P$ e portanto, $P^2 = I$;

   (b) Mostre que $PL_kP = I - \tilde{l}_k e_k^\top = \tilde{L}_k$, em que $\tilde{l}_k$ é o vetor l_k com os multiplicadores m_{rk} e m_{sk}, $r, s > k$, permutados.

3. Descreva como o processo de eliminação Gaussiana com pivoteamento parcial pode ser usado para obter o determinante de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

4. Suponha que são dados $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c, d \in \mathbb{R}^n$ para calcular $z = c^\top A^{-1}d$. Na expressão de z a dificuldade está no cálculo de $s = A^{-1}d$. Analise os dois processos para obter s:

   (a) inverter a matriz A e calcular $A^{-1}d$;

   (b) resolver o sistema linear $As = d$.

   Qual das duas formas deve ser escolhida para que z seja obtido de modo mais econômico?

5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ estritamente diagonalmente dominante por colunas, isto é, $|a_{kk}| > \sum\limits_{j\neq k} |a_{jk}|$. Mostre que se a Fatoração LU com pivoteamento parcial é aplicada sobre a matriz A ao final do processo teremos $P = I$.

Exercícios numéricos:

6. Implemente um programa para resolver o sistema linear $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^n$, com opção para o usuário fornecer a matriz A, o vetor b e escolher o método utilizado, dentre as opçõe:

   (a) Algoritmo de Substituição Direta. Lembre-se de colocar um aviso de erro caso a matriz não seja triangular inferior. (Lista 1)

   (b) Algoritmo de Substituição Inversa. Lembre-se de colocar um aviso de erro caso a matriz não seja triangular superior. (Lista 1)

   (c) Eliminação Gaussiana. (Lista 1)

   (d) Fatoração LU sem pivoteamento, substituições direta e inversa. novo

   (e) Fatoração LU com pivoteamento parcial, substituições direta e inversa. novo

7. Usando os algoritmos do exercício anterior, resolva o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 25 \\ 50 \\ 150 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Sistemas como o acima aparecem na modelagem da equação do calor em uma placa plana, por exemplo.

8. Visualizando o padrão de esparsidade em julia: Dada uma matriz A podemos visualizar o padrão de esparsidade da matriz usando o comando `spy(A)` para isso é necessário instalar o pacote `UnicodePlots`:

```
] add UnicodePlots
using UnicodePlots
spy(A)
```

Podemos permutar as colunas de uma matriz A usando os comando `shuffle` para isso é necessário instalar o pacote `Randon`:

```
] add Random
using Random
C = A[:,shuffle(1:end)]
```

(a) Encontre a Fatoração LU da matriz A do exercício 7 e visualise sua esparsidade.

(b) Encontre a Fatoração LU da matriz permutada C e visualise sua esparsidade.

(c) Seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz de banda, com banda $2p+1$, isto é, $a_{ij} = 0$ para $|i-j| > p$. Suponha que A pode ser fatorada como $A = LU$. O que você pode dizer sobre o padrão de esparsidade dos fatores L e U de A?