

I sistemi Fuzzy

1. Introduzione

I sistemi Fuzzy sono degli agenti che si basano sulla logica fuzzy. La logica fuzzy si basa sui cosiddetti **insiemi fuzzy**, cioè insiemi sfumati che si contrappongono agli insiemi più comuni, detti crisp. Gli insiemi crisp sono degli insiemi a cui un elemento può appartenervi o no, ad esempio una persona può essere legalmente cittadina italiana o no. Nel linguaggio di tutti i giorni però è più comune utilizzare espressioni linguistiche poco chiare e non quantitative, ad esempio “Luca è alto”. Cosa significa ciò? Nel linguaggio quotidiano non ha una definizione chiara ma è comune esprimersi in questo modo perché di solito non siamo interessati al valore esatto della quantità (es. altezza) ma ad una descrizione qualitativa. “Essere alto” non è un insieme crisp perché non vi è associata una soglia numerica universalmente riconosciuta oltre la quale si è alti, ma è un insieme fuzzy. A questi insiemi si associa una **funzione di appartenenza** (μ) che ha come dominio l’universo del discorso della variabile di base (U), cioè ad esempio tutti i valori di altezza che una persona può assumere (ad esempio $[0, 220]$ centimetri), e come codominio un valore reale compreso fra 0 e 1, che rappresenta il grado di appartenenza del valore numerico che assume la variabile di base “altezza” all’insieme “Alto”.

$$\mu_{ALTO}: U \rightarrow [0,1]$$

La definizione della funzione di appartenenza è una fase chiave della progettazione di un sistema fuzzy, i passi fondamentali sono i seguenti:

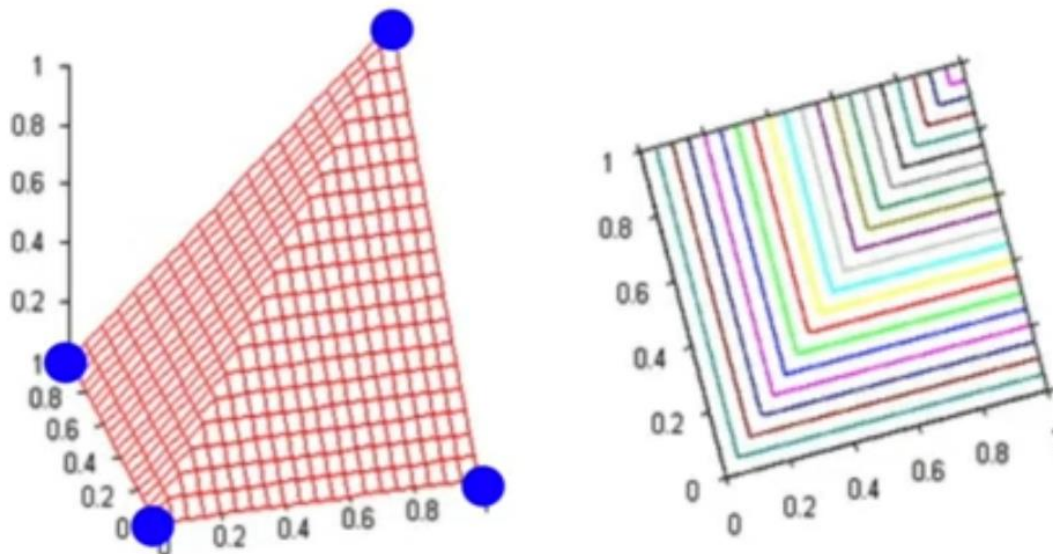
- Definizione della variabile di base
- Definizione dell’universo del discorso, e poiché la funzione deve coprire tutti i valori della variabile di base, questo è anche il dominio della funzione
- Definizione delle etichette, cioè degli insiemi fuzzy; di solito linguisticamente riusciamo a distinguere fino a 7 valori diversi
- Definizione dei punti caratteristici, ad esempio gli estremi (una media universitaria di 30 è eccellente)
- E infine definiamo la *forma* della funzione; questa a scelta o sulla base dell’esperienza di un esperto del dominio del problema oppure si può fare un campionamento, chiedendo ad esempio a 100 persone di etichettare una lista di altezze, e poi cercare di fare una regressione da questi punti ottenendo una curva
- Un’ulteriore considerazione che si può fare è che un controllore fuzzy è dimostrato essere più *robusto* se la somma delle funzioni di appartenenza si uguale a 1 per ogni ingresso

Si può decidere di interpretare il valore assunto dalla funzione di appartenenza come valore di **verità** del predicato “altezza is alta”, ciò significa che la funzione che associa la funzione di appartenenza con il valore di verità del predicato è lineare; in generale non è detto che la funzione sia di questa forma.

Si noti la differenza tra il concetto di *probabilità* e *fuzzy*: se ad esempio dichiaro “domani a 12 ci saranno più di 10 °C” questo è un predicato la cui probabilità di realizzazione non è esattamente nota ma domani alle 12 potrò dire con certezza se mi sbagliavo oppure no; d’altro canto se mi trovo a Londra e dichiaro “domani alle 12 pioverà” e qui si sottolinea il significato sfumato della pioggia, se domani a mezzogiorno ci sarà la famosa pioggerellina londinese allora non sarà chiaro se avevo ragione oppure no, ma avrò *parzialmente ragione e parzialmente torto*.

Su di questi insiemi fuzzy si può costruire la **logica fuzzy** che è un’estensione della logica booleana, in cui i valori di verità dei predicati è compreso fra 0 e 1. Pertanto ci sono proprietà che valgono nella logica

booleana ma non nella logica fuzzy. Ad esempio il valore di verità del predicato $(A \text{ and not } A)$ nella logica booleana vale sempre 0 mentre nella logica fuzzy può avere un valore diverso, in base alla T-norma che si decide di scegliere. Come anticipato la logica fuzzy combina i valori di verità dei predicati con una T-norma (e di conseguenza la T-conorma duale). Un esempio è l'operatore binario AND associato alla T-norma $\min(-, -)$ e la T-conorma corrispondente per l'operatore OR cioè la funzione $\max(-, -)$. Da notare come la funzione \min (o qualsiasi altra T-norma scelta) sia un'estensione della tabella di verità dell'AND nella logica booleana, quindi il grafico della funzione nell'asse xyz incrocia i punti $(0,0) \rightarrow 0$, $(0,1) \rightarrow 0$, $(1,0) \rightarrow 0$, $(1,1) \rightarrow 1$. Un ulteriore operatore unario applicabile ad un predicato fuzzy è il complemento che ad esempio può essere il complemento ad uno del valore di verità del predicato non negato. La scelta della T-norma è una fase di progettazione importante poiché diverse T-norme danno *rilevanza* in modo diverso ai predicati, ad esempio nella funzione $\min(\dots)$ il grado di appartenenza minore è l'unico rilevante, mentre la funzione prodotto, un altro esempio di T-norma, dà rilevanza in modo equo tra tutti i gradi di appartenenza.

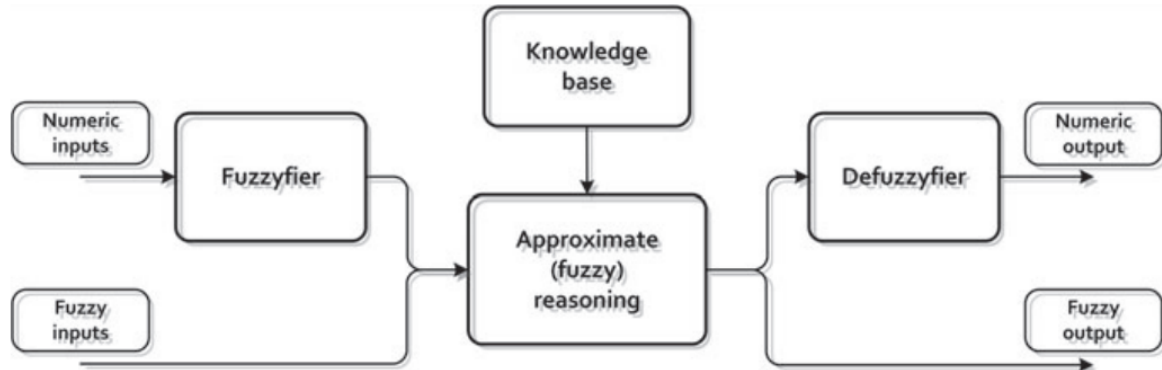


Con la logica fuzzy si possono costruire delle **regole fuzzy**, del tipo $X \text{ is } L$ dove X è una variabile linguistica a cui si associa la variabile numerica di base, mentre L è un'etichetta cioè un insieme fuzzy; le regole fuzzy hanno come antecedenti dei predicati fuzzy di solito congiunti con l'operatore AND. I conseguenti possono essere di due tipi dando origine a due tipi di regole:

- **Mambami**, dove i conseguenti descrivono linguisticamente l'uscita. Ad esempio: $\text{if (altezza is alta) AND (tecnica is scarsa) then (ruolo_calcio is difensivo) AND (goal_fatti is basso)}$;
- **Sugeno**, i cui antecedenti rappresentano le condizioni di applicabilità del modello e il conseguente è il valore che assume il modello (funzione lineare, non lineare, rete neurale ...) Ad esempio: $\text{if (stagione is afosa) then annaffiatura = temperatura * 2 + umidità}$; $\text{if (stagione is fresca) then annaffiatura = temperatura + umidità}$;

2. Metodologia

I **sistemi fuzzy** operano con la logica fuzzy e sono costituiti da blocchi funzionali disposti come nel seguente diagramma:



I componenti sono:

- **Fuzzyificatore:** prende in input un valore numerico (crisp) e restituisce in output valori fuzzy
- **Base delle regole:** contiene la base delle regole definite in fase di progettazione
- **Sistema di inferenza:** associa alle variabili linguistiche presenti nelle regole, i valori numerici ricevuti in input; restituisce in uscita dei valori fuzzy
- **Defuzzyficatore:** riceve in input valori fuzzy e restituisce un valore numerico (crisp)

Ora vediamo i componenti nel dettaglio:

- Fuzzyficatore

Questo componente è progettato per associare il valore numerico che assume la variabile di base, con una lista dei valori fuzzy che rappresentano l'immagine delle funzioni di appartenenza calcolate per il valore numerico dato. Si hanno tante funzioni di appartenenza quante etichette sono state definite (cioè quanti insiemi fuzzy sono stati definiti).

- Base della conoscenza (Base delle regole e database)

La base delle regole contiene delle regole fuzzy che di solito sono definite sulla base dell'esperienza dell'esperto del dominio del problema. Una base delle regole ben definita dev'essere: completa, cioè per ogni input numerico deve attivarsi almeno una regola, e consistente, cioè non ci devono essere regole con lo stesso antecedente ma diverso conseguente. Questa base delle regole viene definita: da un esperto (white box), estraendole da punti di input e output (black box) oppure misto.

- Sistema di inferenza

Associa ad ogni predicato fuzzy presente nelle regole un grado di matching che poi viene congiunto in AND (OR o NOT) tramite la funzione matematica scelta come T-norma. Ne esistono di due tipi: FATI, che

prima aggrega le regole e poi calcola il valore di verità risultante, oppure FITA che prima calcola il valore di verità delle regole e poi aggrega i risultati. Queste sono le fasi con cui agisce ad esempio un sistema fuzzy FITA:

- Unificazione dell'input: viene associata la variabile numerica al una lista di valori fuzzy (la dimensione della lista corrisponde al numero di insiemi legati a quella variabile linguistica)
- Combinazione dei gradi di matching nell'antecedente: si combinano usando la T-norma (o T-conorma) scelta
- Eventuale combinazione con il peso della regola, anche questa fatta usando una T-norma a scelta
- Aggregazione delle uscite delle diverse regole, quindi se ci sono regole con diverso antecedente ma stesso conseguente, si aggregano usando una T-conorma
- Eventuale defuzzyficazione dell'uscita, usando una funzione a scelta

- Defuzzyficatore

Applica una funzione matematica scelta al risultato dell'inferenza. La più tipica è la funzione centroide che calcola il baricentro della superficie risultante come nel grafico, questa operazione può essere costosa in termini computazionali, perciò talvolta si utilizzano funzioni di approssimazione numerica.

I sistemi fuzzy sono utili nella risoluzione di problemi il cui modello matematico non è completamente disponibile oppure complicato al punto tale che non è economicamente conveniente il suo uso. Esempi sono sistemi di controllo (Fuzzy Logic Controller), supporto decisionale e riconoscimento di immagini.

3. Applicazione

L'esempio applicativo che voglio portare riguarda un programma a cui ho recentemente partecipato: ATHENS. Il programma è organizzato da un network di università europee nelle numerose sedi, due volte l'anno a Novembre e a Marzo. L'obiettivo è promuovere la mobilità internazionale e far conoscere l'università ospitante allo studente. Il processo di applicazione prevedere il solo caricamento dei voti universitari, questo è l'unico discriminante per la selezione di uno studente piuttosto che un altro in una determinata sede. Dalla mia esperienza però, non sempre il successo accademico implica la buona riuscita nel programma: infatti sebbene alcuni corsi sono composti da lezioni frontali con un esame finale, altri invece sono progetti di gruppo, con poco o nessun aiuto da parte dell'insegnante e con una presentazione finale. A mio parere alcune attività rilevanti per l'ammissione al programma sono le attività extracurricolari progettuali come ad esempio gli hackathon. L'abilità accademica è in generale il parametro più rilevante ma le attività extra curriculari dovrebbe influenzare il punteggio finale assegnato allo studente. Si vuole perciò progettare un sistema fuzzy che valuti le richieste di ammissione degli studenti.

Progettazione: la progettazione si articola in diverse fasi, elencate qui sotto e eseguite in seguito.

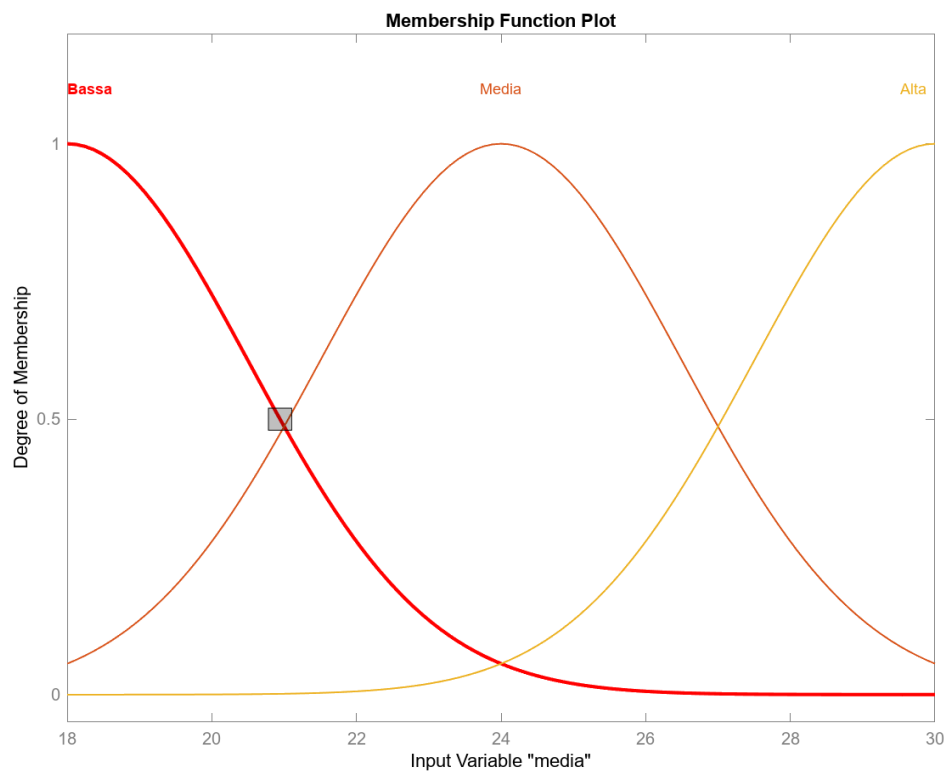
- Definizione del problema
- Parametrizzazione del sistema
- Definizione delle regole
- Realizzazione
- Verifica

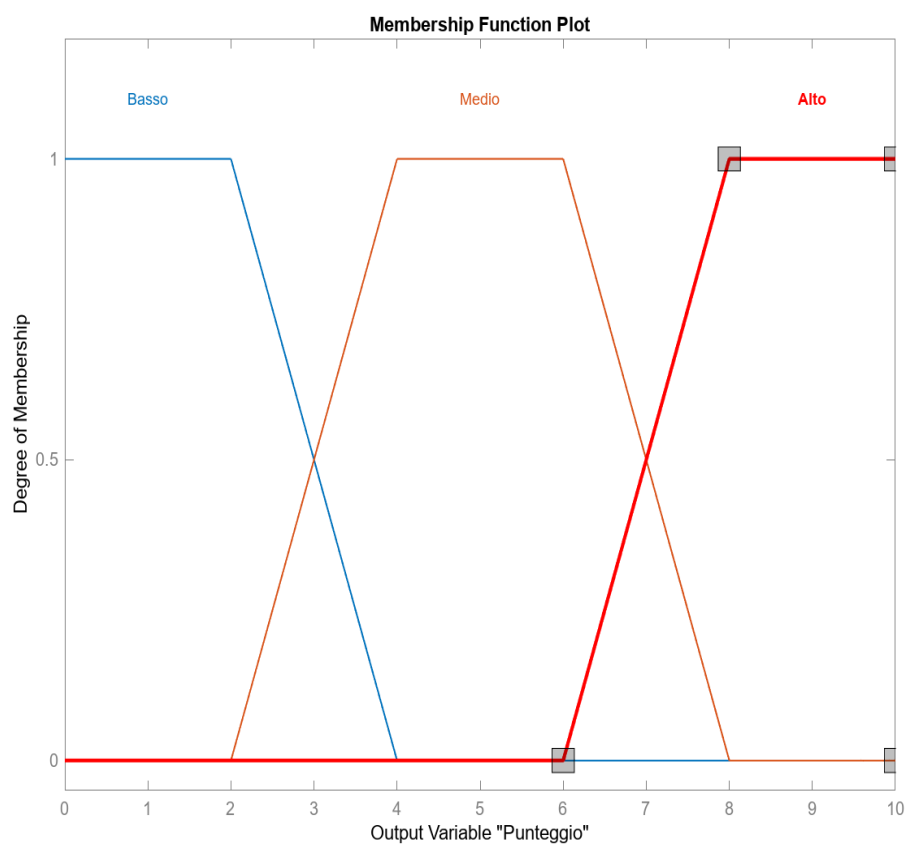
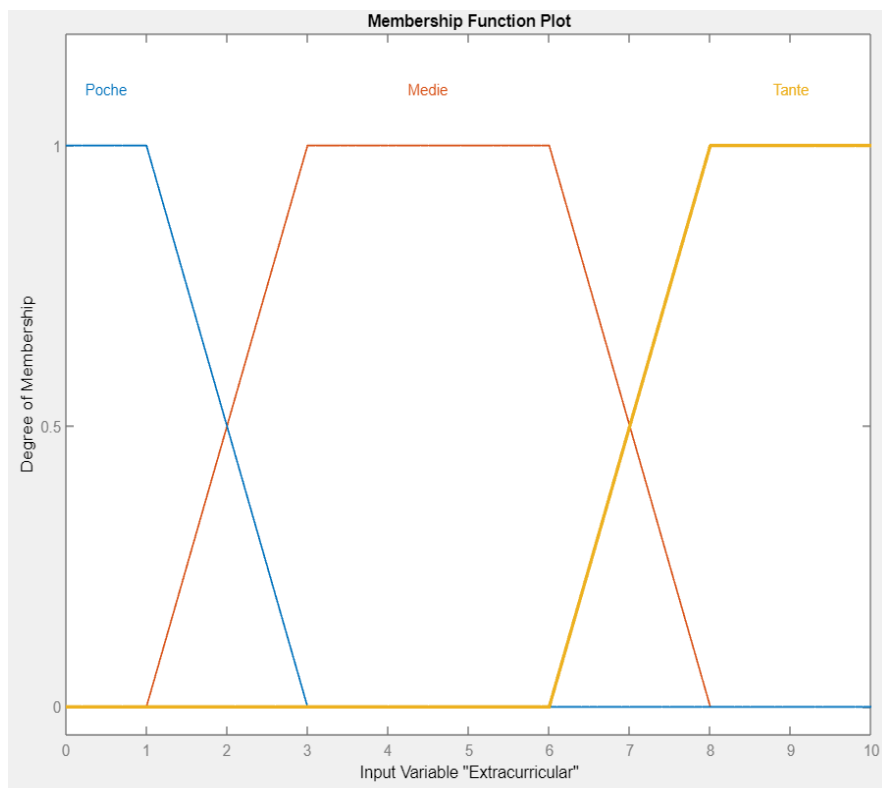
Definizione del problema:

- Selezione delle variabili di ingresso crisp: le due variabili che considero sono la media universitaria e il numero di attività extracurricolari rilevanti
- Selezione delle variabili di uscita crisp: punteggio compreso tra 0 e 10 sulla base del quale vengono classificati gli studenti
- Selezione degli obiettivi del modello: l'obiettivo è selezionare gli studenti più meritevoli

Parametrizzazione

- Selezione delle funzioni di appartenenza: come descritto nell'introduzione definiamo le funzioni di appartenenza in queste fasi:
 - Definizione della variabile di base
 - Definizione dell'universo del discorso: media [18, 30], extracurricolari [0,10]
 - Definizione delle etichette: media (Bassa, Media, Alta), extracurricolari (Poche, Medie, Tante), punteggio (Basso, Medio, Alto)
 - Definizione dei punti caratteristici, ad esempio gli estremi: una media universitaria di 30 è alta, di 18 è bassa; 0 attività extracurricolari sono poche, 10 sono tante; un punteggio di 0 è basso, uno di 10 è alto
 - E infine definiamo la *forma* della funzione: le forme scelte sono riportate nelle seguenti figure.
 - Le forme sono state scelte in modo tale che per ogni input la somma sia circa uguale a 1, in modo da avere un sistema robusto





- Definizione delle T-nome: sono state scelte come segue

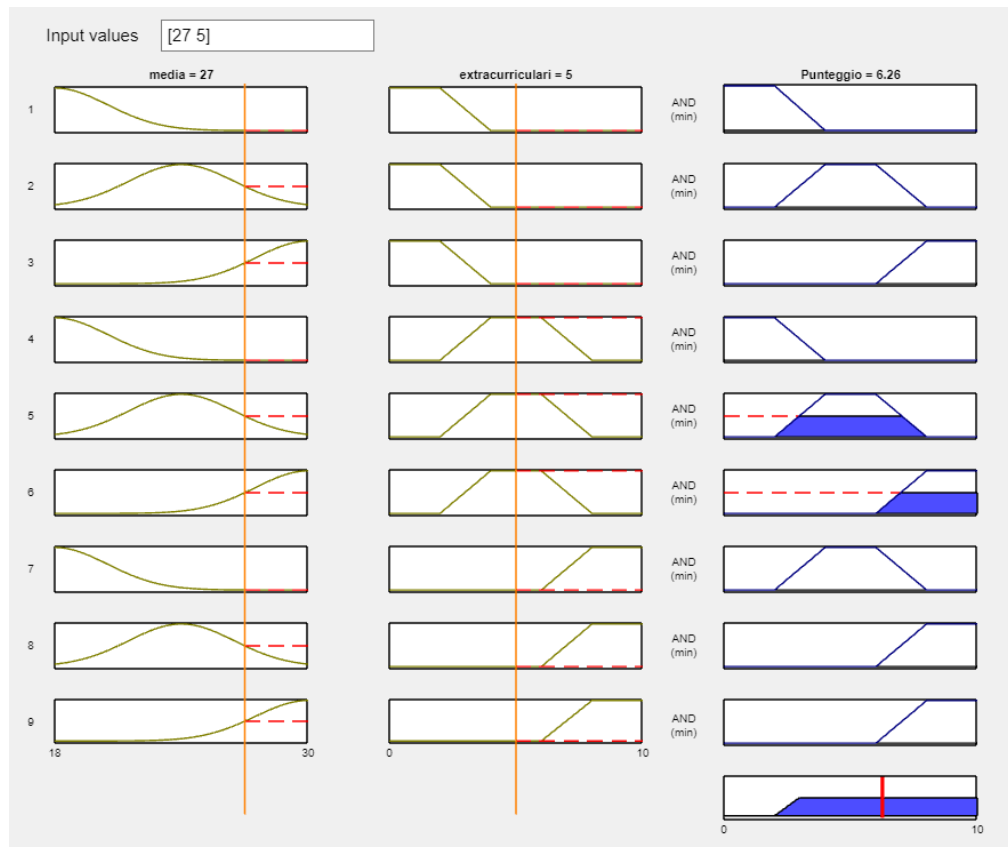
And method	<input type="text" value="min"/>	▼
Or method	<input type="text" value="max"/>	▼
Implication method	<input type="text" value="min"/>	▼
Aggregation method	<input type="text" value="max"/>	▼
Defuzzification method	<input type="text" value="centroid"/>	▼

- Definizione delle regole: le regole sono state scelte sulla base dell'esperienza, sono di tipo Mamdani. Ecco la tabella riassuntiva:

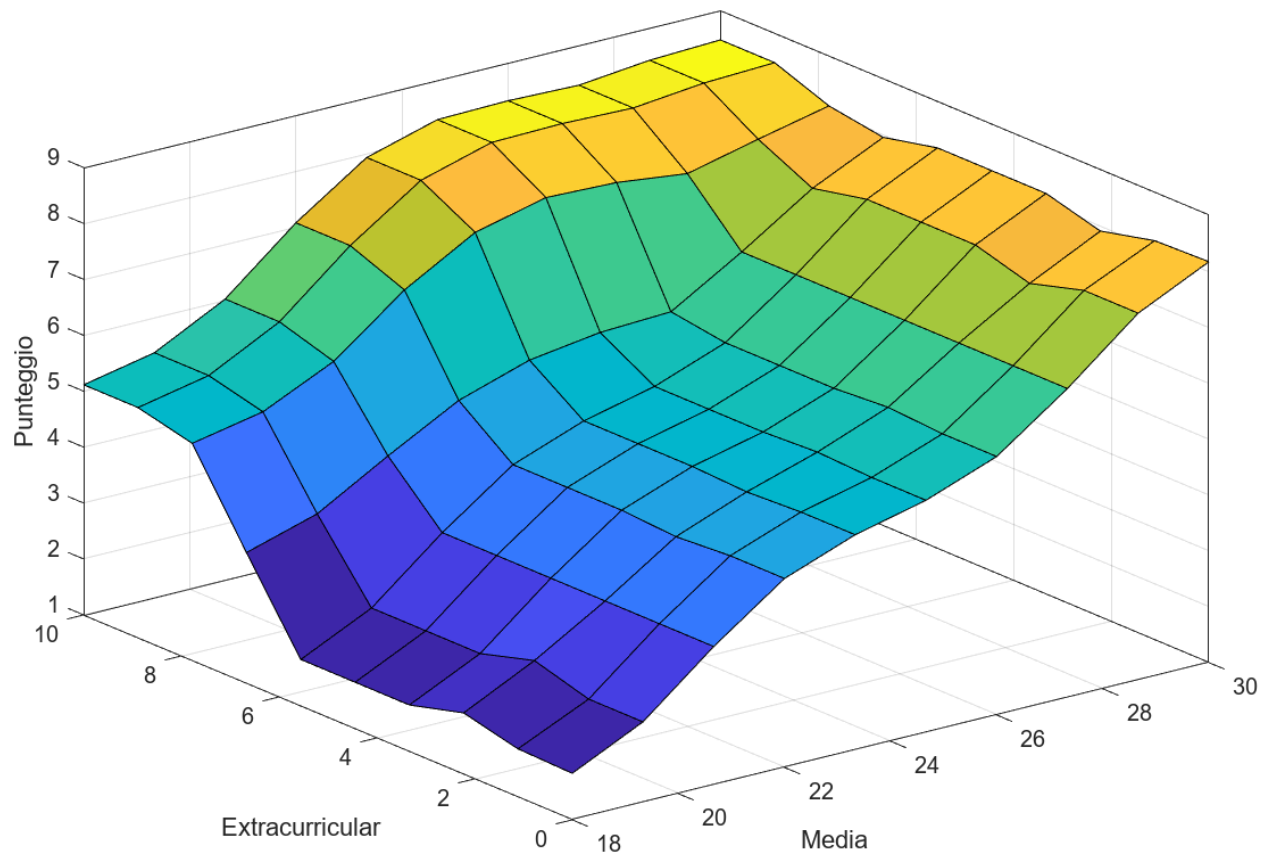
	Rule	Weight	Name
1	If media is Bassa and extracurriculari is Poche then Punteggio is Basso	1	rule1
2	If media is Media and extracurriculari is Poche then Punteggio is Medio	1	rule2
3	If media is Alta and extracurriculari is Poche then Punteggio is Alto	1	rule3
4	If media is Bassa and extracurriculari is Medie then Punteggio is Basso	1	rule4
5	If media is Media and extracurriculari is Medie then Punteggio is Medio	1	rule5
6	If media is Alta and extracurriculari is Medie then Punteggio is Alto	1	rule6
7	If media is Bassa and extracurriculari is Tante then Punteggio is Medio	1	rule7
8	If media is Media and extracurriculari is Tante then Punteggio is Alto	1	rule8
9	If media is Alta and extracurriculari is Tante then Punteggio is Alto	1	rule9

Queste regole rispettano i criteri indicati in precedenza.

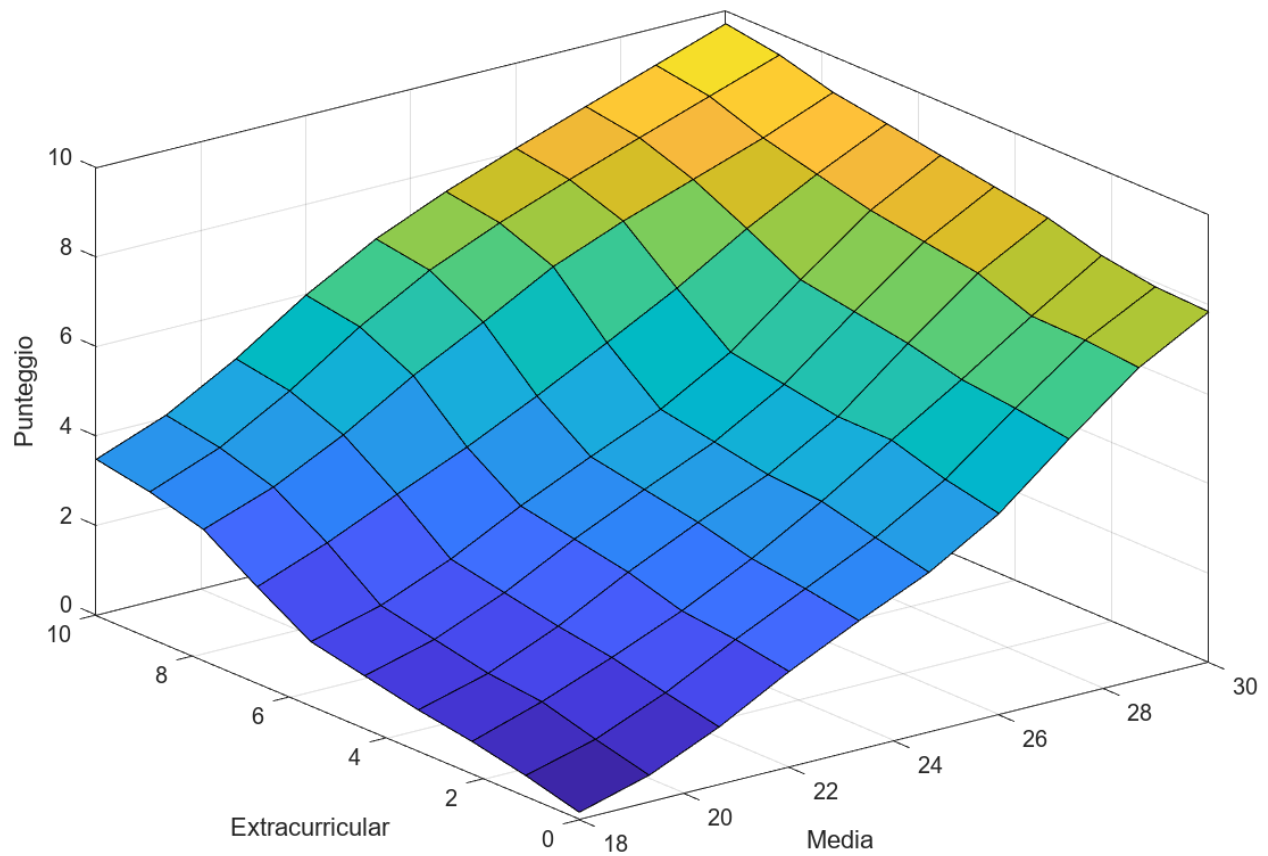
- Realizzazione: per la realizzazione si è usato il pacchetto fuzzyLogicDesigner di Matlab. [Qui](#) si può accedere al file del sistema fuzzy
- Verifica: per la verifica si è utilizzato Matlab, in particolare gli strumenti: Rule Inference e Control Surface.



Qui vediamo ad esempio la coppia di valori [27 5] che, attraverso il processo di inferenza, portano ad un punteggio di 6.26



Questa è la superficie di controllo del sistema fuzzy, che risulta come previsto: con una media alta a prescindere dalle attività extracurricolari si ha un punteggio alto, ma facendo anche attività extracurricolari si raggiunge un punteggio alto, con un grado di appartenenza maggiore.



Questa invece è una seconda implementazione del sistema utilizzando regole di tipo Sugeno, i modelli sono funzioni lineari delle variabili di base e danno una rilevanza sempre maggiore alle attività extracurricolari man mano che il grado di appartenenza all'insieme "punteggio Alto" cresce.