ALGORITMI - Complessità **Anno Accademico 2014-15**

Appello - 2 Febbraio 2015

Nome e Cognome: Matricola:

Importante: Usare solo i fogli forniti dal docente. Scrivere in modo **leggibile**. Risposte non giustificate saranno valutate **0**. Per ogni algoritmo proposto vanno **provate** correttezza e complessità.
Si chiede di risolvere tutti gli esercizi

Esercizio 1 - 10 punti

Siano $\mathbb{A}, \mathbb{B}$, e $\mathbb{C}$ tre problemi decisionali sullo stesso insieme di istanze e tali che per ognuno di essi esistono sia istanze *yes* che istanze *no*. Sia $\mathbb{D} = \mathbb{B} \cap \overline{\mathbb{C}}$ cioè il problema decisionale le cui istanze *yes* sono quelle e solo quelle che risultano essere *yes* sia per $\mathbb{B}$ che per $\overline{\mathbb{C}}$.

Si provi che se valgono le seguenti condizioni

1. $\mathbb{A} \leq_P \mathbb{D}$
2. $\mathbb{B} \in \mathcal{NP}$
3. $\mathbb{C} \in \mathcal{P}$

allora è anche vero che $\overline{\mathbb{A}} \in$ co-$\mathcal{NP}$

Esercizio 2 - 20 punti

Si consideri il seguente puzzle. Viene data una scacchiera di dimensione $a \times b$ (a righe ed b colonne). Ogni casella contiene una pedina rossa, oppure una pedina nera, oppure è vuota. Va effettuata esattamente una mossa per riga: Una mossa su una riga consiste nell'eliminare o tutte le pedine rosse o tutte le pedine nere da quella riga. Il puzzle è riuscito se dopo le a mosse ogni colonna contiene ancora almeno una pedina. In tal caso diremo che il puzzle è terminato con successo.

Non è difficile osservare che non tutte le disposizioni iniziali permettono di terminare con successo.

Definiamo allora il seguente problema decisionale

> PUZZLE
> **Input**: Una scacchiera $a \times b$ con alcune pedine rosse e nere distribuite su di essa
> **Output**: *yes* se e solo se è possibile terminare con successo.

1. Si dimostri che PUZZLE $\in \mathcal{NP}$.
2. Si dimostri che PUZZLE è $\mathcal{NP}$-hard (una possibile riduzione usa 3-SAT).

Esercizio 3 - 20 punti

Definiamo il seguente problema su un grafo diretto

TARGET
Input: Un grafo diretto $G = (V, E)$ ed un vertice $t \in V$
Output: *yes* se e solo se per ogni vertice $u \in V$ esiste un cammino diretto da u a t

Si provi che TARGET è NL-hard.

Esercizio 4 - 20 punti

Il problema di ottimizzazione MIN-GRAPHCOLOURING è definito come segue

MIN-GRAPHCOLOURING (MIN-GC)
Input: Un grafo G
Output: Una colorazione propria dei vertici di G che usa il minimo numero di colori

Usando la tecnica del gap si dimostri che sotto l'ipotesi $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ non può esistere un algoritmo polinomiale per MIN-GC che garantisce un'approssimazione 4/3.
