

Appello - 2 Febbraio 2015

Nome e Cognome:

Matricola:

**Importante:** Usare solo i fogli forniti dal docente. Scrivere in modo **leggibile**. Risposte non giustificate saranno valutate **0**. Per ogni algoritmo proposto vanno **provate** correttezza e complessità.

---

Esercizio 1 - 10 punti

Si supponga di aver provato che un certo problema  $A$  è  $\mathcal{NP}$ -completo mediante una riduzione polinomiale che mappa istanze di taglia  $n$  di SAT in istanze di taglia  $n^3$  per il problema  $A$ .

Supponiamo poi di esser venuti a conoscenza che il Professor Iknowitall ha dimostrato, per una qualche costante  $c > 1$ , un bound  $\Omega(c^n)$  alla complessità di tempo di ogni algoritmo per SAT. Cosa possiamo ora concludere circa la complessità del problema  $A$ ?

(a)  $A \in \mathcal{P}$ ? (b)  $A \notin \mathcal{P}$ ? (c) Possiamo fornire un upper bound o un lower bound alla complessità di un qualsiasi algoritmo per  $A$ ?

---

## Esercizio 2 - 20 punti

Si dimostri che se  $P = NP$  allora per ogni problema  $A \in \mathcal{NP}$  esiste un algoritmo  $A$  che data un'istanza  $x$  non solo riesce a dire in tempo polinomiale se  $x$  è un'istanza *yes* o *no* ma, nel caso si tratti di un'istanza *yes* allora l'algoritmo riesce in tempo polinomiale a fornire una qualche prova del fatto che  $x$  è *yes* per  $A$ . Tale prova può essere verificata in tempo polinomiale.

---

## Esercizio 3 - 20 punti

Definiamo il seguente problema

HALFCLIQUE

**Input:** Un grafo non diretto  $G = (V, E)$

**Output:** *yes* se e solo se esiste un insieme di vertici  $V' \subseteq V$  tale che:  
 $|V'| \geq |V|/2$  e per ogni  $x, y \in V'$  vale  $(x, y) \in E$ .

Si provi che HALFCLIQUE è  $NP$ -completo.

---

## Esercizio 4 - 20 punti

- (i) Si forniscano le definizioni delle classi di complessità randomizzata  $\mathcal{ZPP}$ ,  $\mathcal{RP}$ ,  $\text{co-}\mathcal{RP}$  e  $\mathcal{BPP}$ .
  - (ii) Si dimostri che  $\mathcal{ZPP} = \mathcal{RP} \cap \text{co-}\mathcal{RP}$ .
  - (iii) Si dimostri che vale la seguente implicazione:  $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{BPP} \Rightarrow \mathcal{NP} = \mathcal{RP}$ .
-