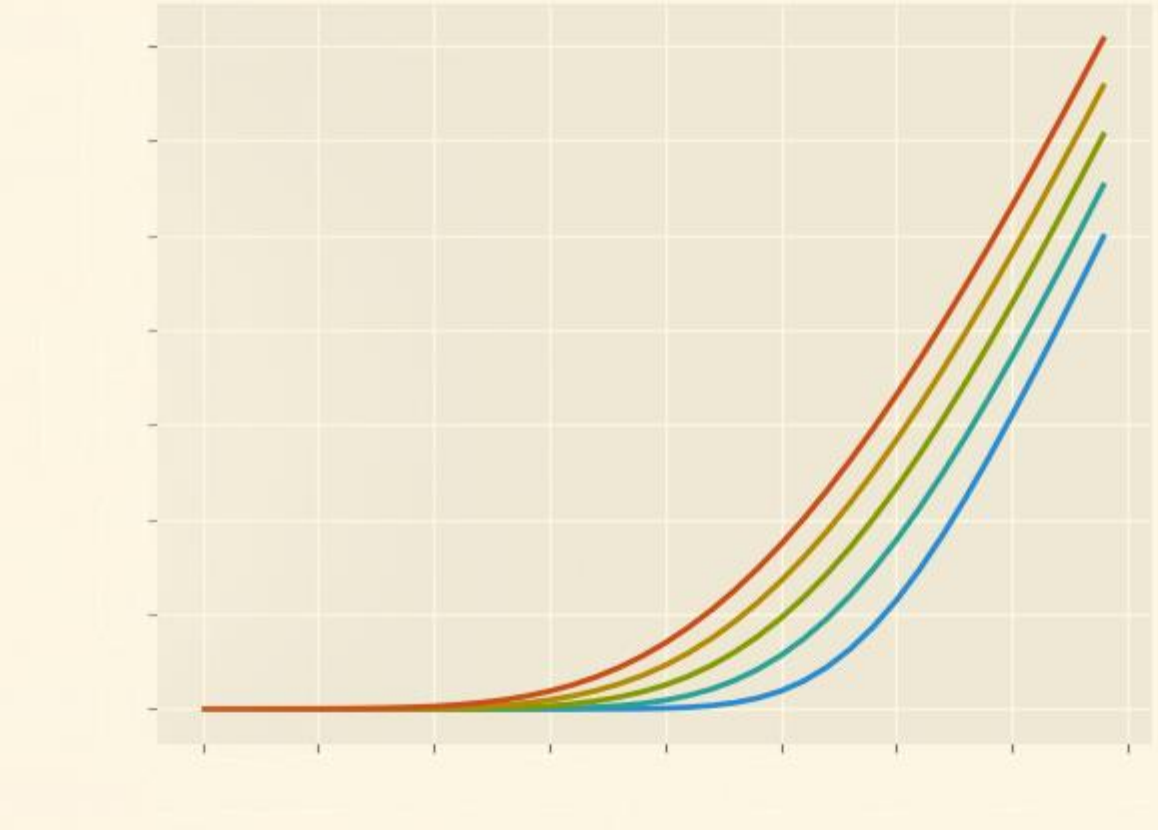
Equazione di Black-Scholes

Soluzione Numerica



Davide Gianatti

Equazione di Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Modello di Samuelson

$$dS = rSdt + \sigma SdW$$

Obiettivo

Trovare il prezzo giusto di un'opzione call europea

Equazione di Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Modello di Samuelson

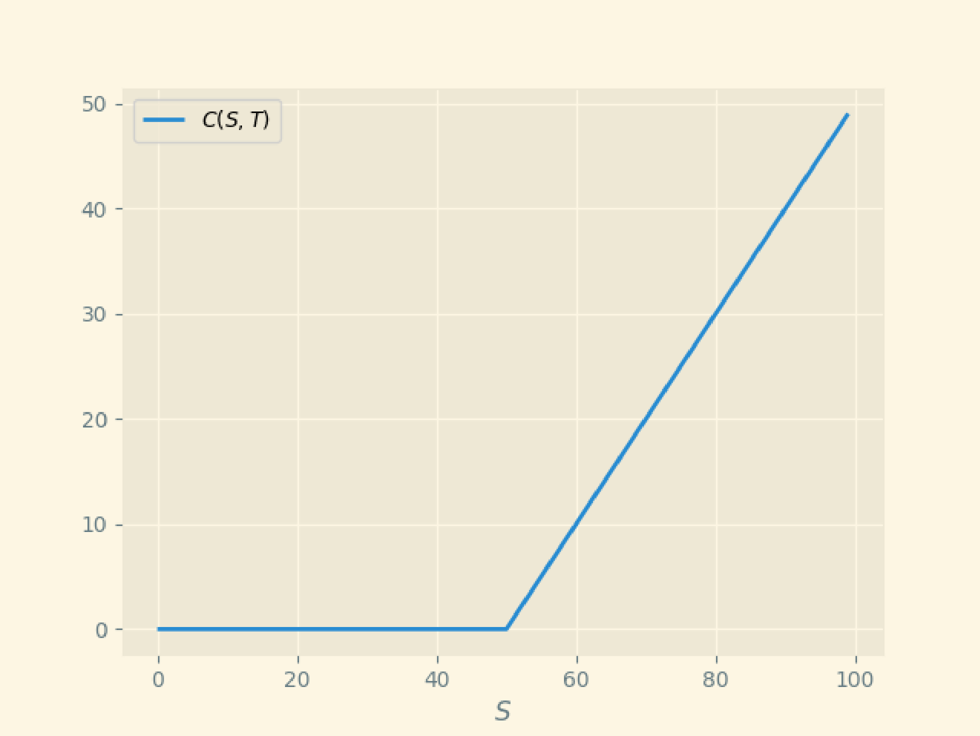
$$dS = rSdt + \sigma SdW$$

$$K = 50, \quad T = 1, \quad \sigma = 0.2, \quad r = 0.1$$

Condizioni al Contorno

Il valore dell'opzione può essere calcolato alla maturità grazie alla sua definizione

$$C(S,T) = \max(S-K,0)$$



Sui bordi del dominio dei ritorni si impone

$$C(0,t) = 0, \quad C(S_{\max},t) = S_{\max} - K, \quad S_{\max} \to \infty$$

Differenze Finite

Lo spazio tempo-ritorni è discretizzato in una griglia di punti

$$(n\Delta t,\, j\Delta S) \in [0,\, N_t\Delta t] \times [0,\, N_S\Delta S]$$

Le derivate sono approssimate come segue

$$\frac{\partial C}{\partial t}(n\Delta t,\, j\Delta S) = \frac{C_j^n - C_j^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

$$\frac{\partial C}{\partial S}(n\Delta t,\, j\Delta S) = \frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2\Delta S} + O(\Delta S^2)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(n\Delta t,\, j\Delta S) = \frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{\Delta S^2} + O(\Delta S^2)$$

Differenze Finite

$$\frac{C_j^n - C_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta S^2 j^2 \frac{C_{j+1}^n - 2C_j^n + C_{j-1}^n}{\Delta S^2} + r\Delta S j \frac{C_{j+1}^n - C_{j-1}^n}{2\Delta S} - rC_j^n = 0$$

Tramite la derivata backward possiamo stimare il valore dell'opzione al tempo t = 0 partendo dalla maturità

$$\begin{aligned} C_j^{n-1} = {} & \frac{\Delta t}{2}(rj + \sigma^2 j^2) C_{j+1}^n + \\ & + (1 - \Delta t r - \Delta t \sigma^2 j^2) C_j^n + \\ & + \frac{\Delta t}{2}(\sigma^2 j^2 - rj) C_{j-1}^n \end{aligned}$$

Analisi di Von Neumann

Si assume che l'errore possa essere scritto come

$$\epsilon_j^n = \sum_k E_k(t) e^{ikj\Delta S}$$

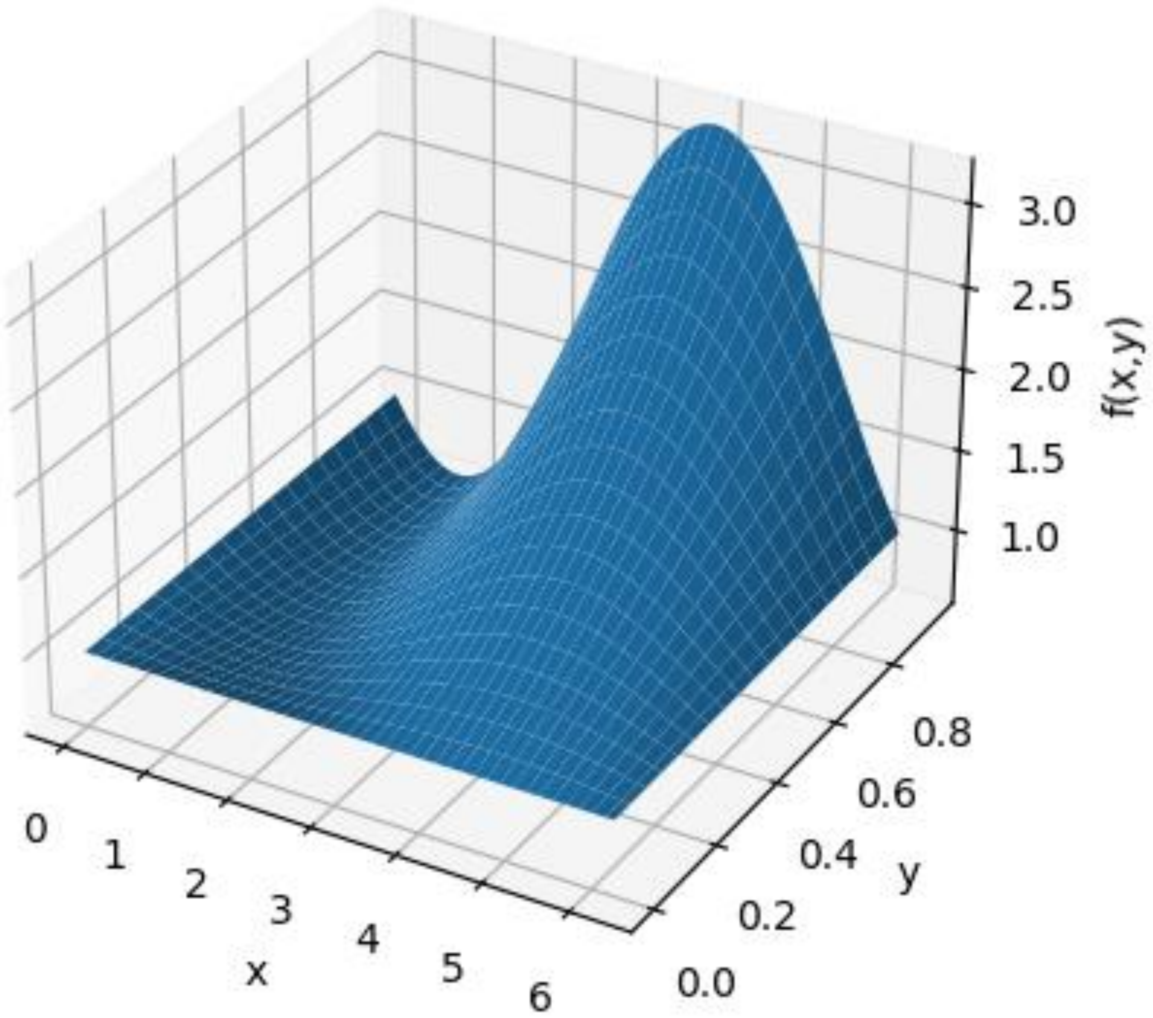
La stabilità è garantita se

$$G = \left| \frac{E_k(t-\Delta t)}{E_k(t)} \right| \leq 1 \quad \forall k$$

$$\frac{\epsilon_j^n - \epsilon_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta S^2 j^2 \frac{\epsilon_{j+1}^n - 2\epsilon_j^n + \epsilon_{j-1}^n}{\Delta S^2} + r\Delta S j \frac{\epsilon_{j+1}^n - \epsilon_{j-1}^n}{2\Delta S} - r\epsilon_j^n = 0$$

Analisi di Von Neumann

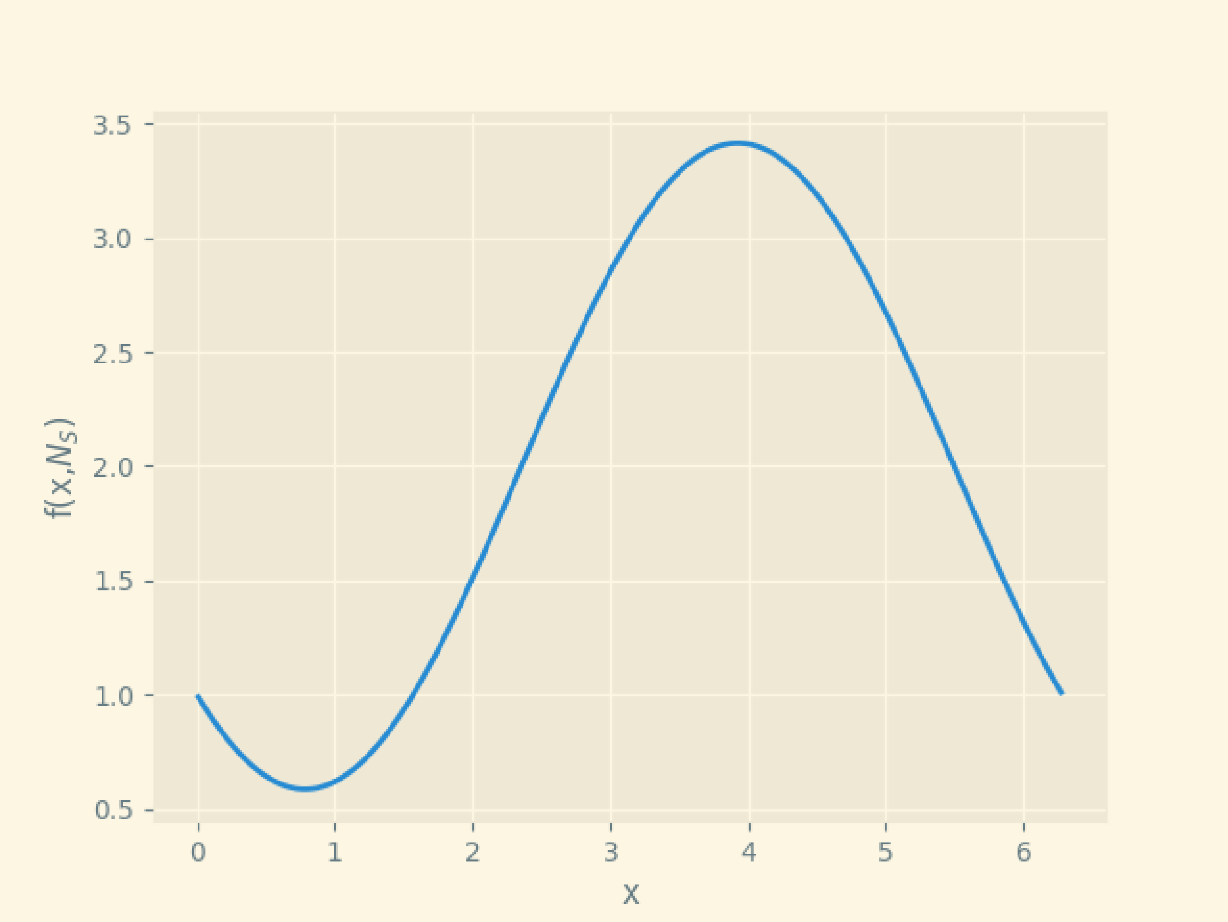
$$f(x, y) = 1 - y\sin(x) + [1 - \cos(x)]y^2$$



Analisi di Von Neumann

$$f(x, N_S) = a\left[1 - N_S \sin(x)\right] + cN_S^2\left[1 - \cos(x)\right]$$

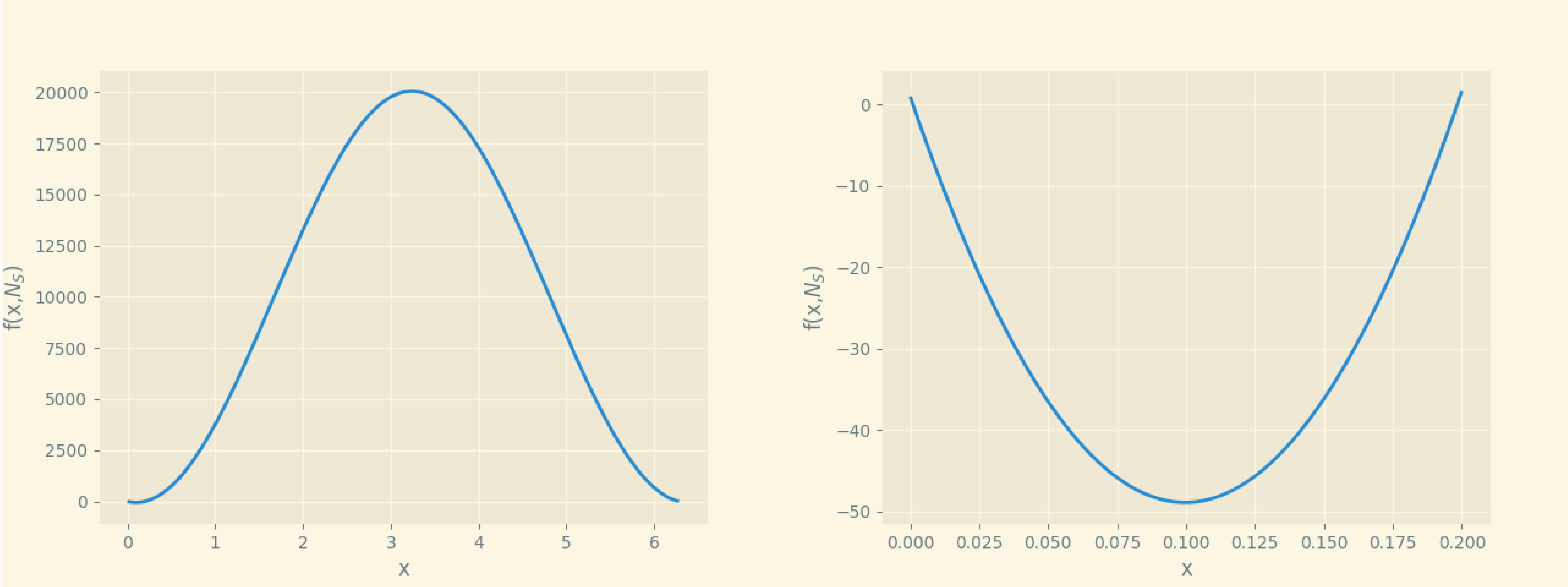
$$N_S = 1 \quad a = 1 \quad c = 1$$



Analisi di Von Neumann

$$f(x, N_S) = a\left[1 - N_S \sin(x)\right] + cN_S^2\left[1 - \cos(x)\right]$$

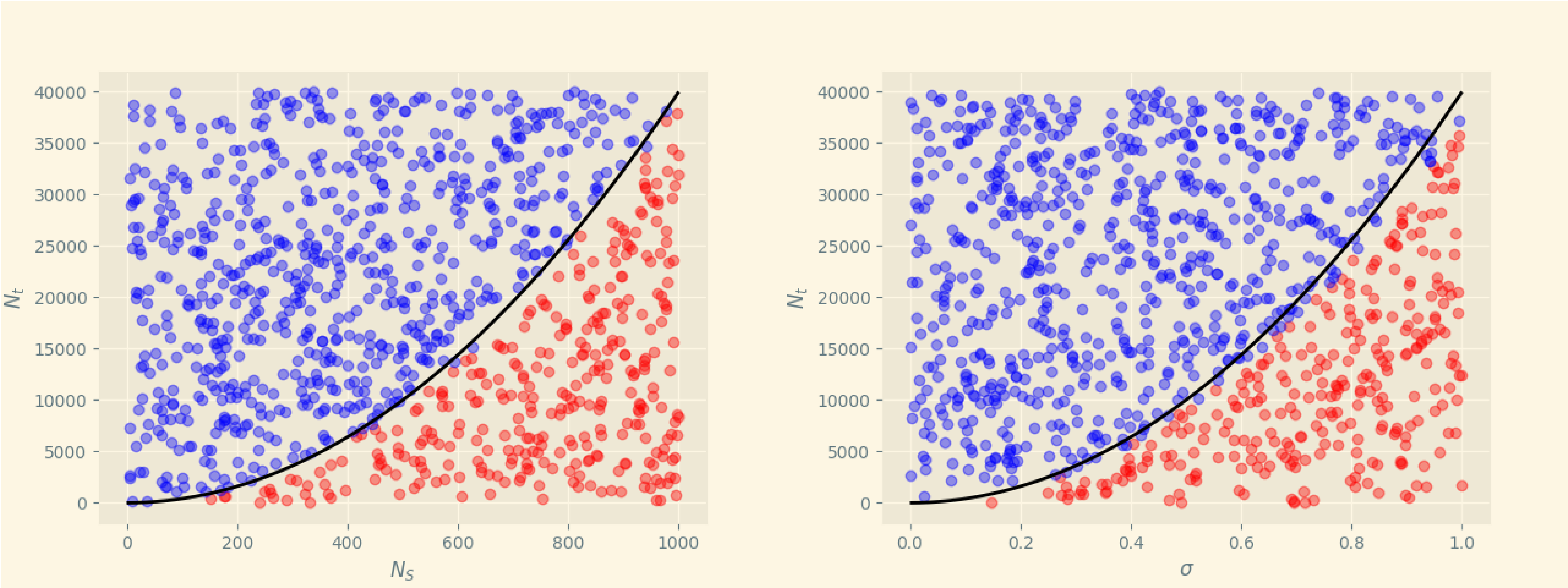
$$N_S = 1000 \qquad a = 1 \qquad c = 0.01$$



Analisi di Von Neumann

La griglia tempo-ritorni deve soddisfare
le seguenti condizioni di stabilità

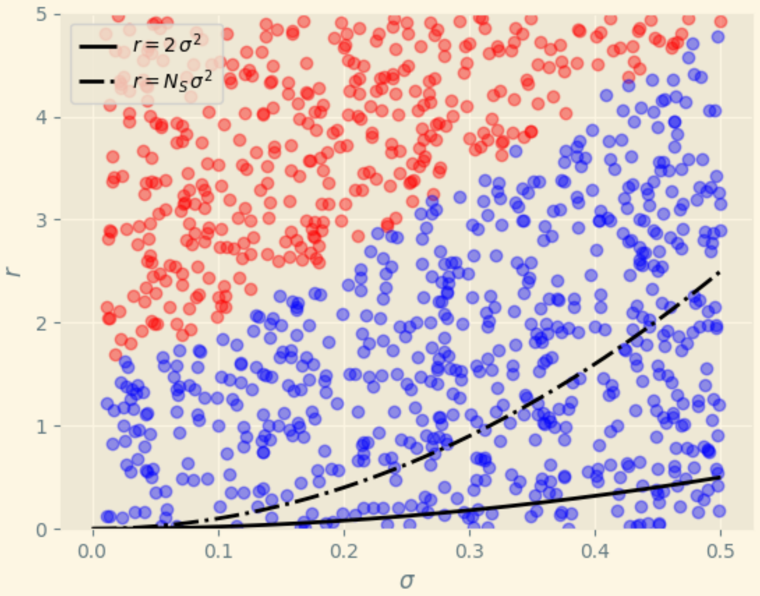
$$N_S \gg \frac{r}{\sigma^2} \qquad N_t \geq \frac{N_S^2 \sigma^2}{T}$$



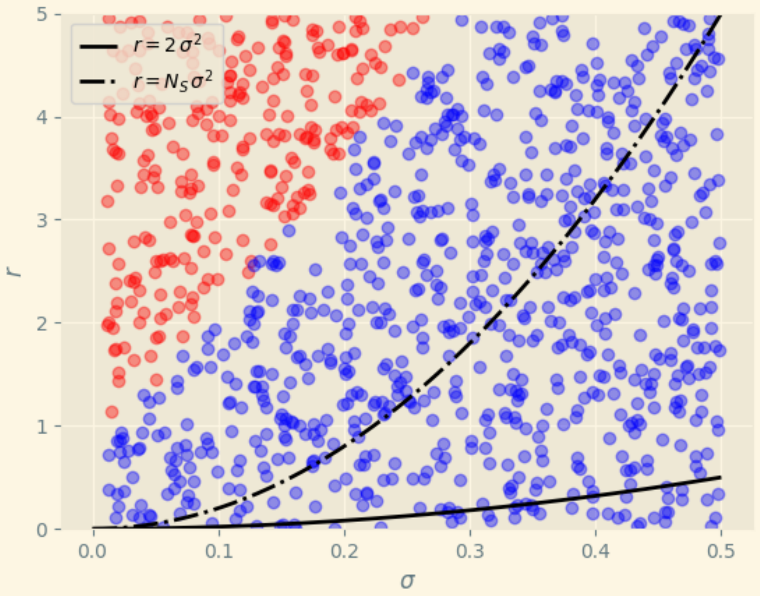
Analisi di Von Neumann

$$r \ll N_S \sigma^2 \qquad r \leq 2\sigma^2$$

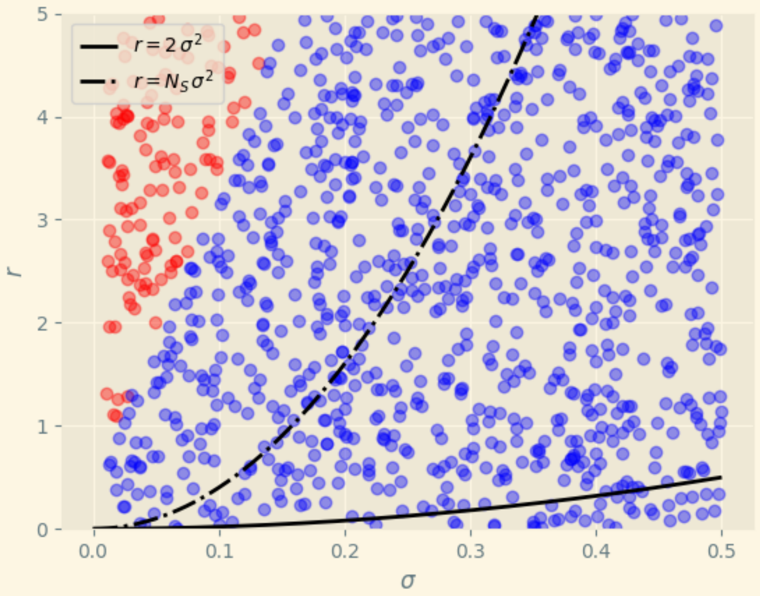
$N_S = 10$



$N_S = 20$



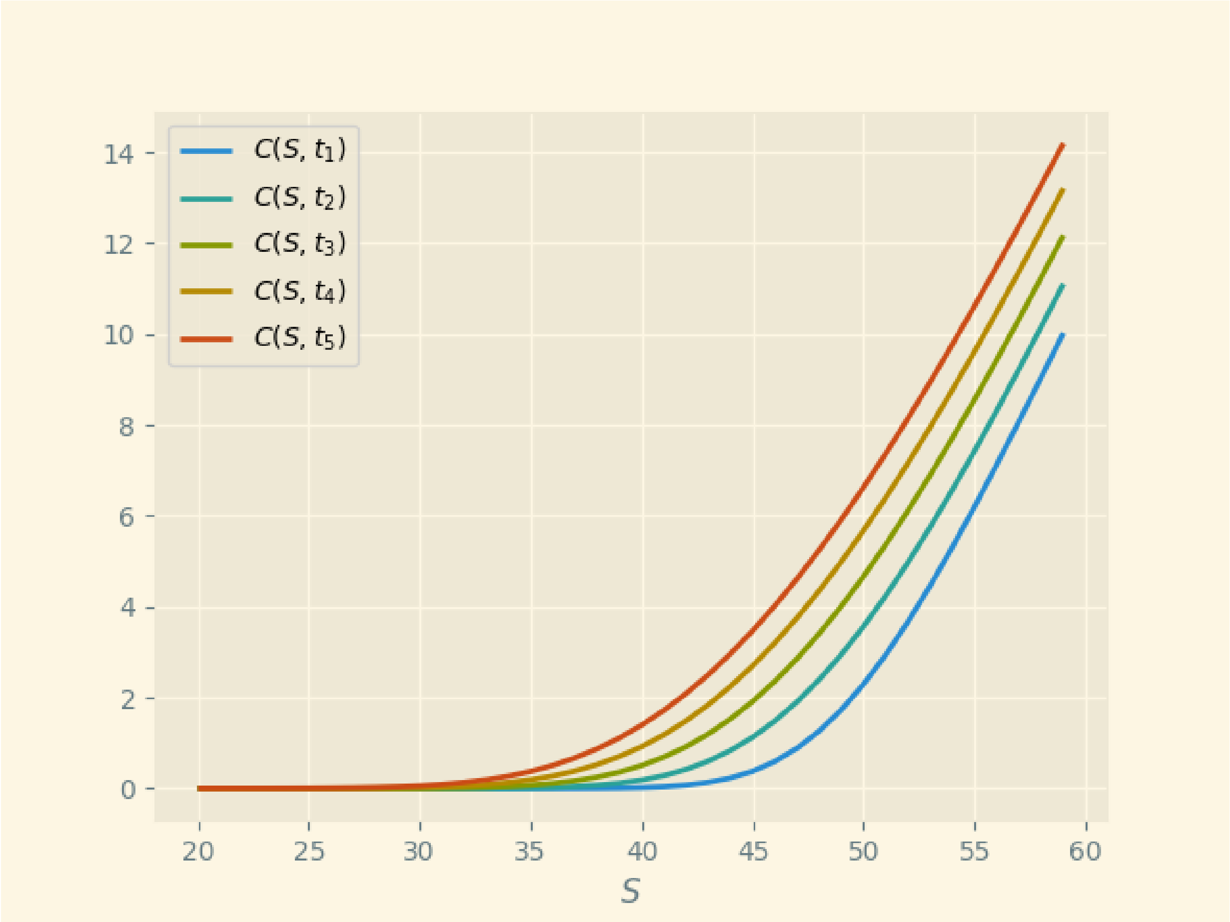
$N_S = 40$



Soluzione PDE

$$K = 50, \quad T = 1, \quad \sigma = 0.2, \quad r = 0.1, \quad S_{max} = 4K$$

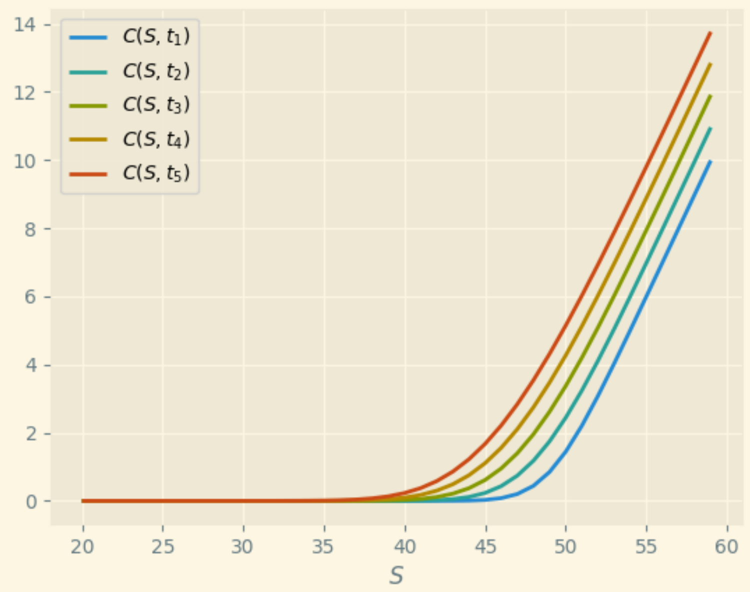
$$N_S = 200, \quad N_t = 1600$$



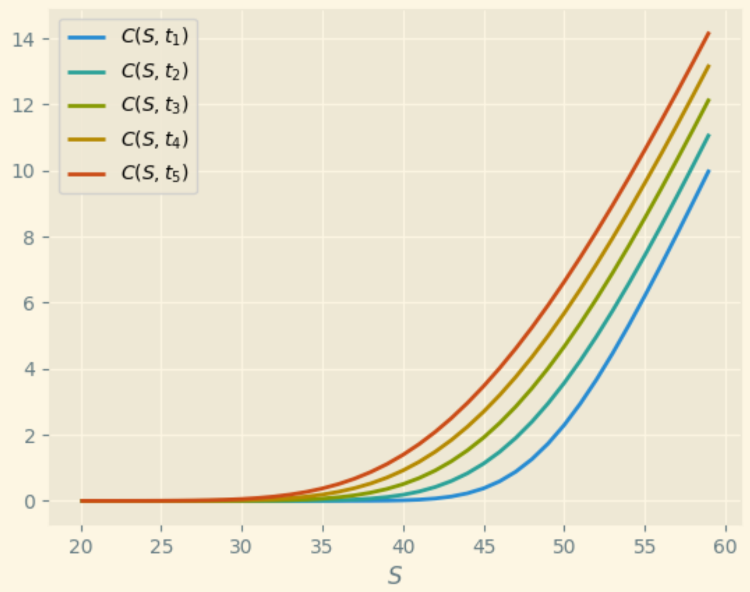
Soluzione PDE

Volatilità maggiori implicano un
aumento nel prezzo della call europea

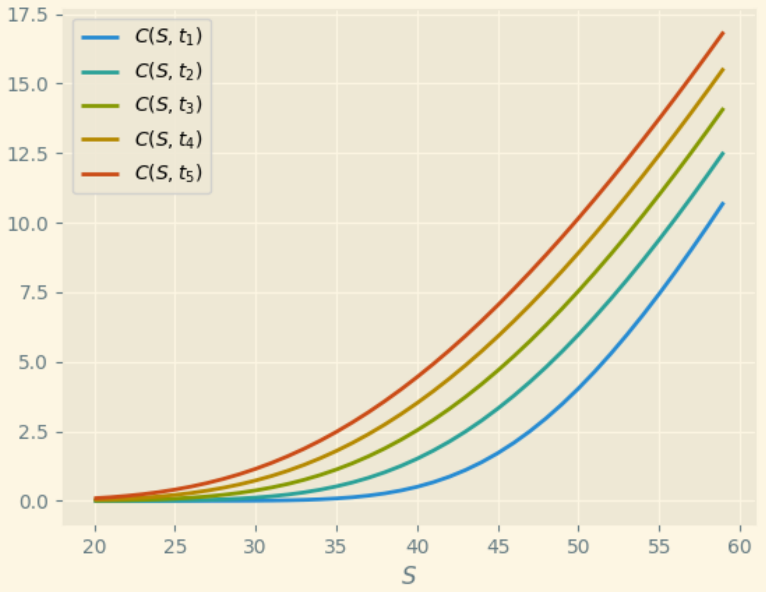
$\sigma = 0.1$



$\sigma = 0.2$



$\sigma = 0.4$



Analisi Errori

L'equazione di Black-Scholes è risolvibile analiticamente per le opzioni call Europee

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

La cumulativa della gaussiana non è nota analiticamente

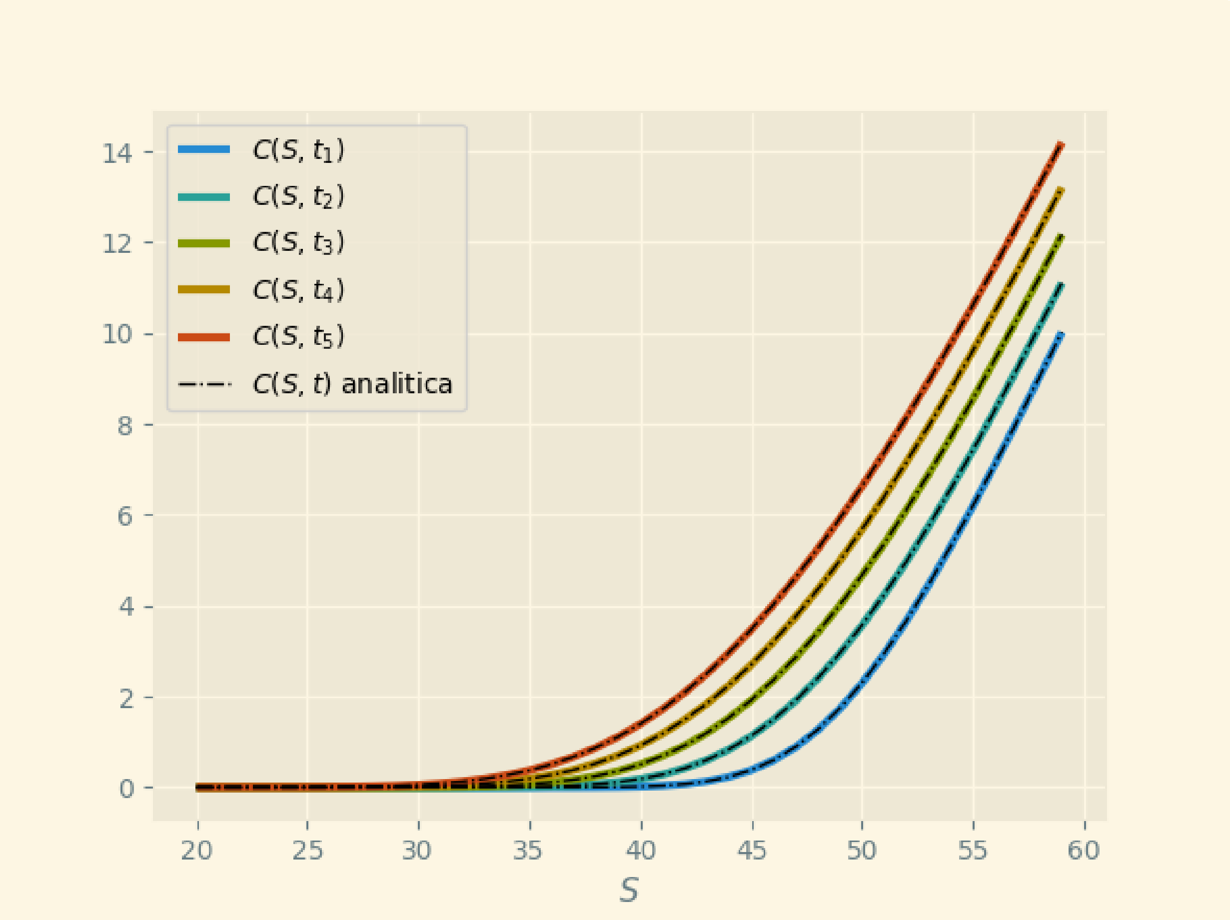
$$\Downarrow$$

Approssimazione con il metodo di quadratura di Simpson

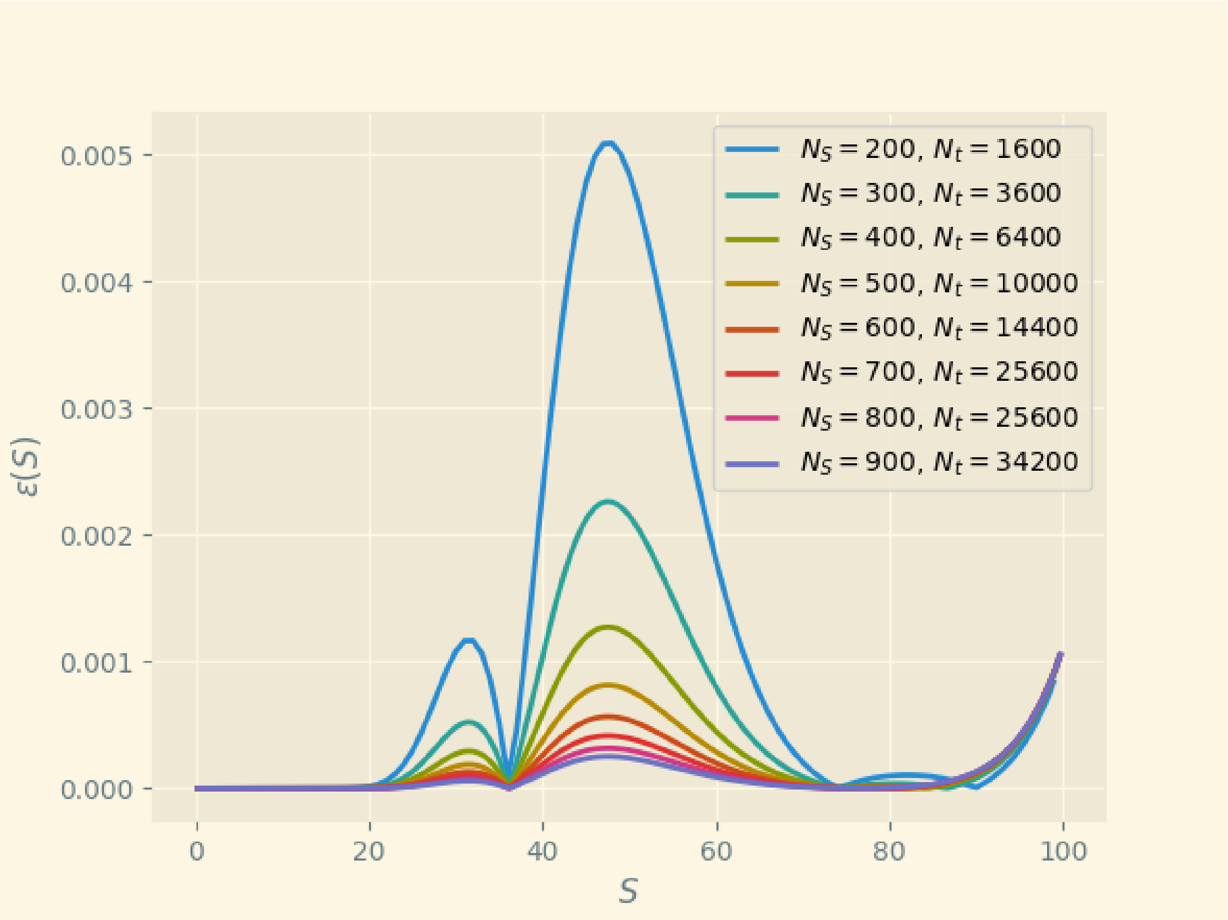
L'integrale è stato calcolato con un'accuratezza simile alla massima raggiungibile

Analisi Errori

Confronto tra la soluzione numerica e analitica



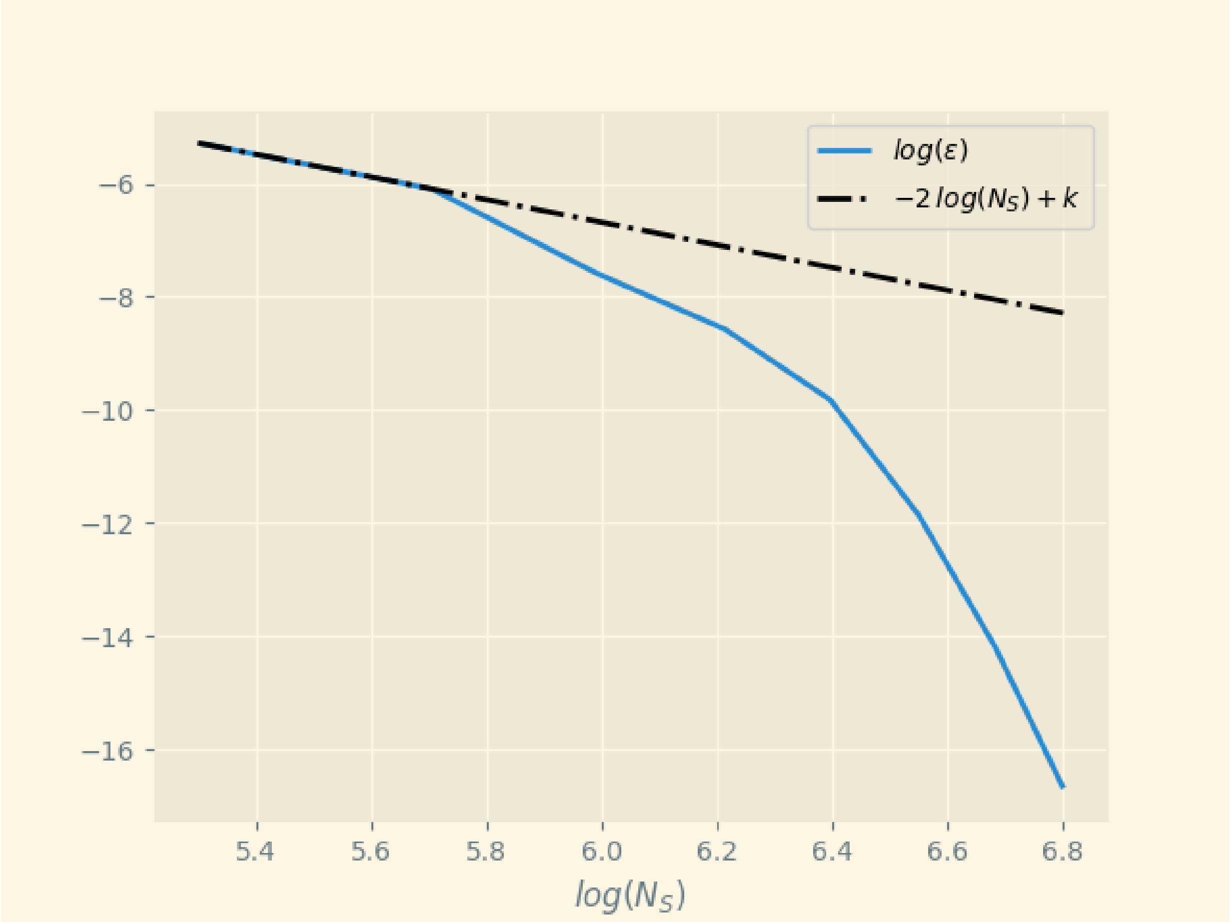
Errore commesso numericamente in funzione della griglia tempo-ritorni



Analisi Errori

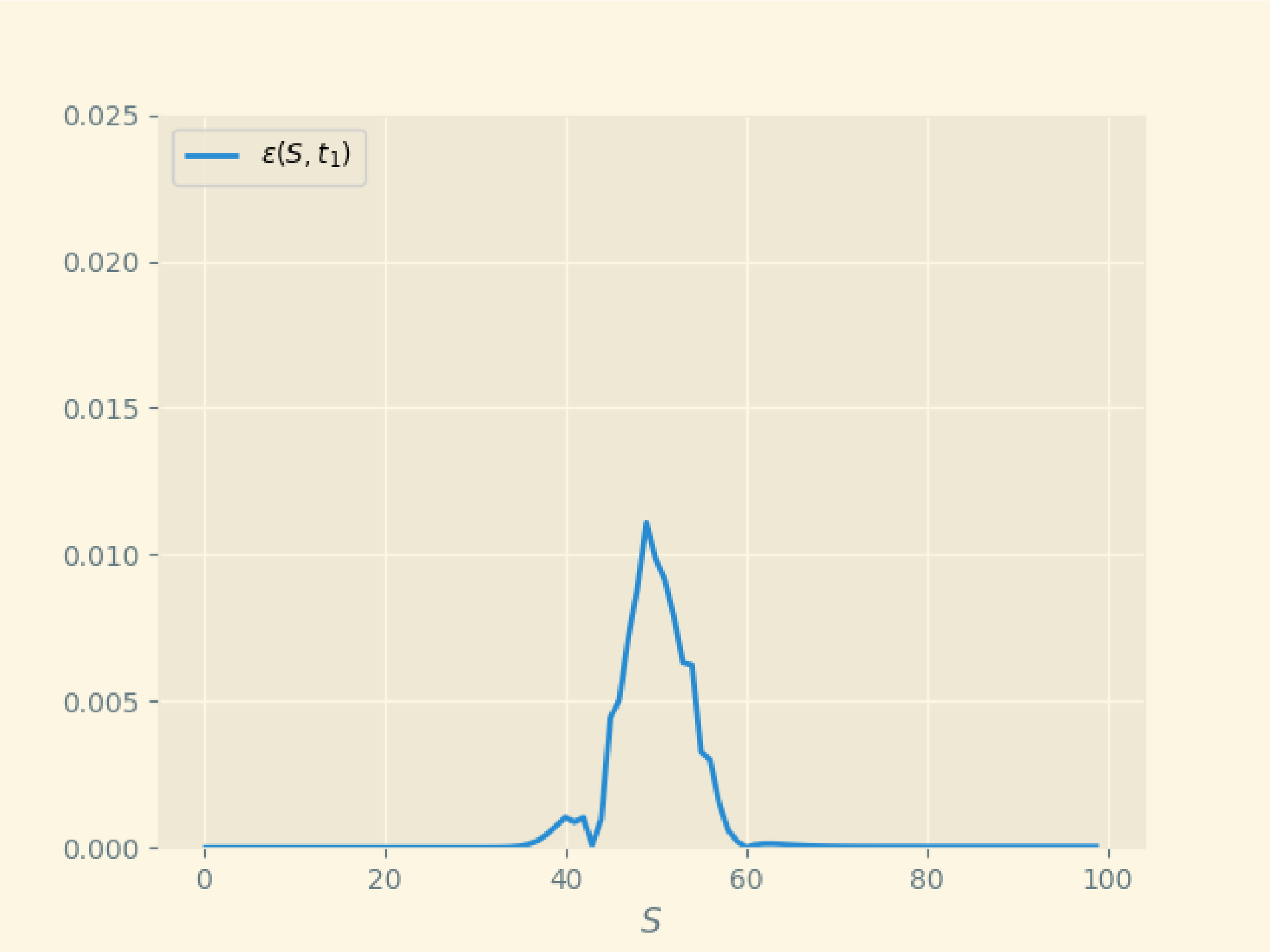
$$\epsilon = O(\Delta t + \Delta S^2)$$

Massimo dell'errore in funzione della griglia tempo-ritorni



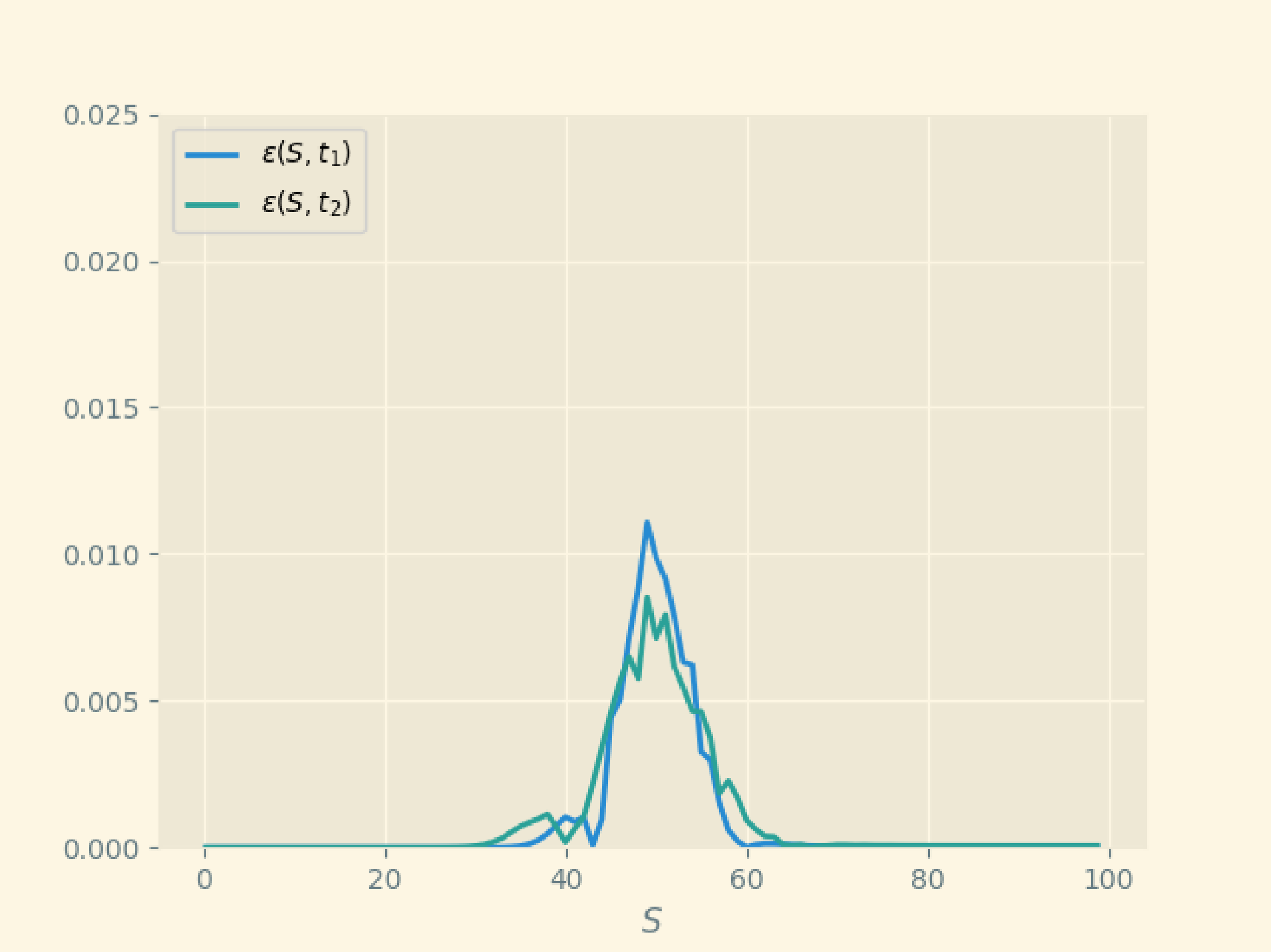
Analisi Errori

Evoluzione temporale dell'errore



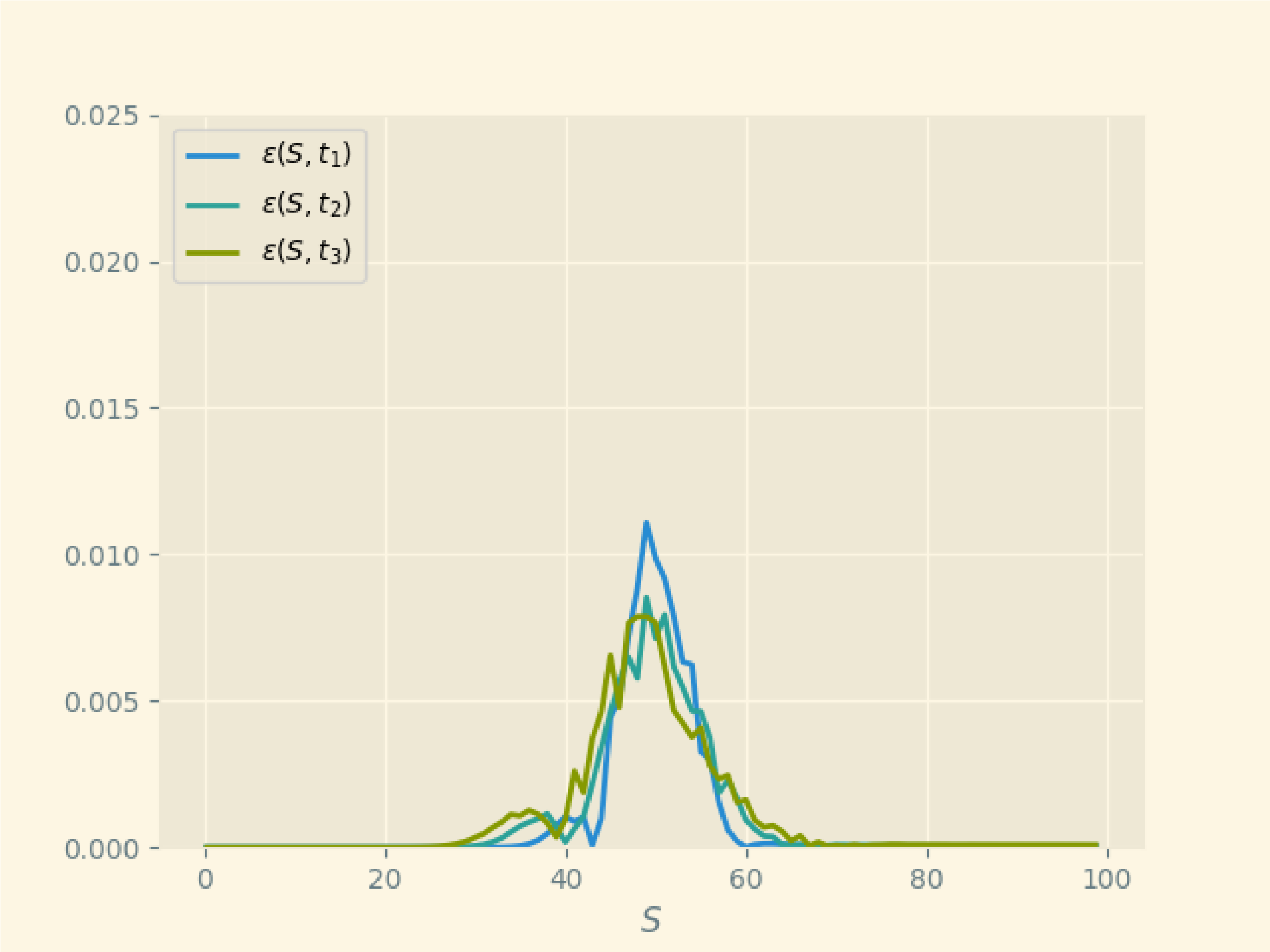
Analisi Errori

Evoluzione temporale dell'errore



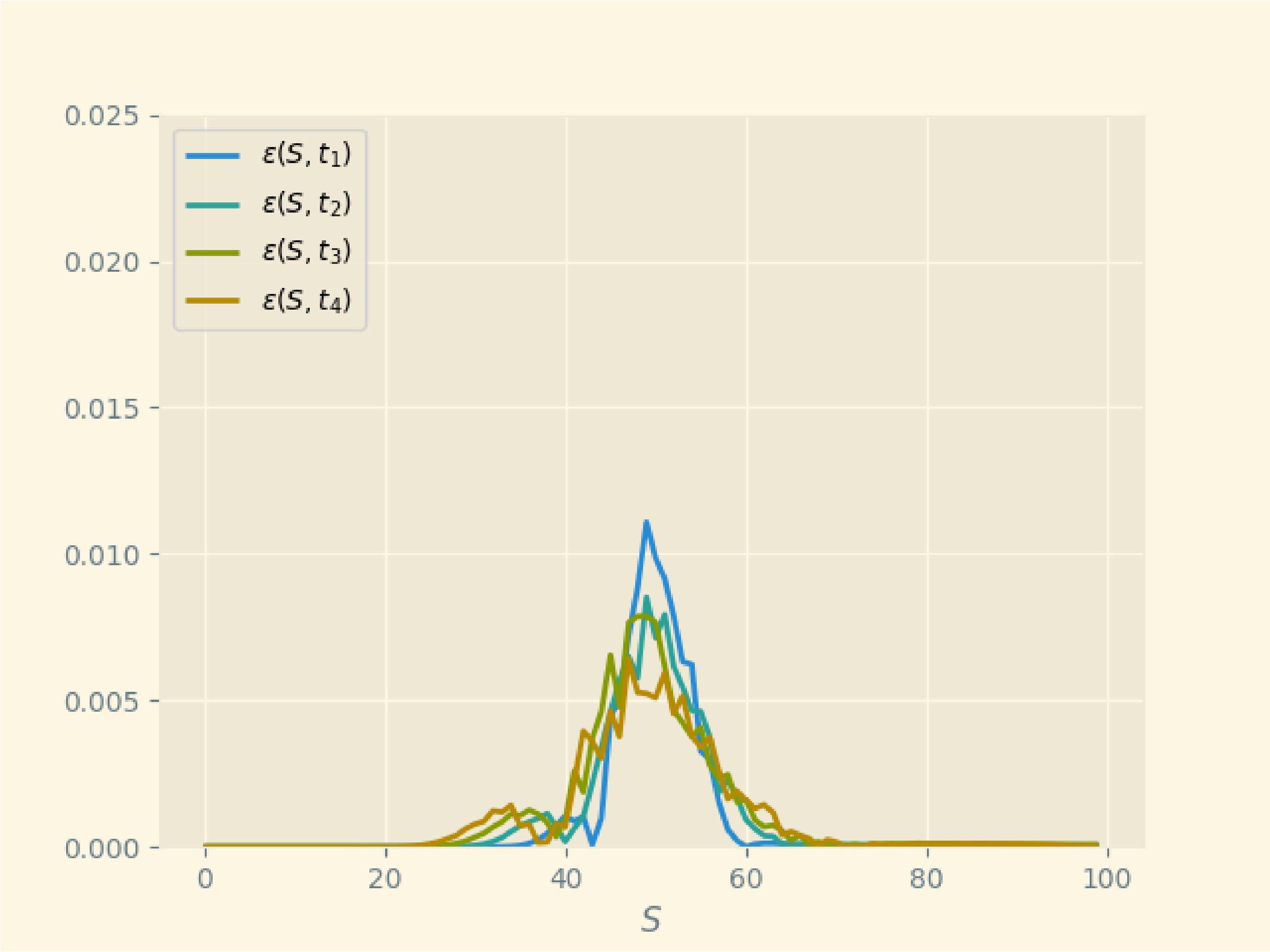
Analisi Errori

Evoluzione temporale dell'errore



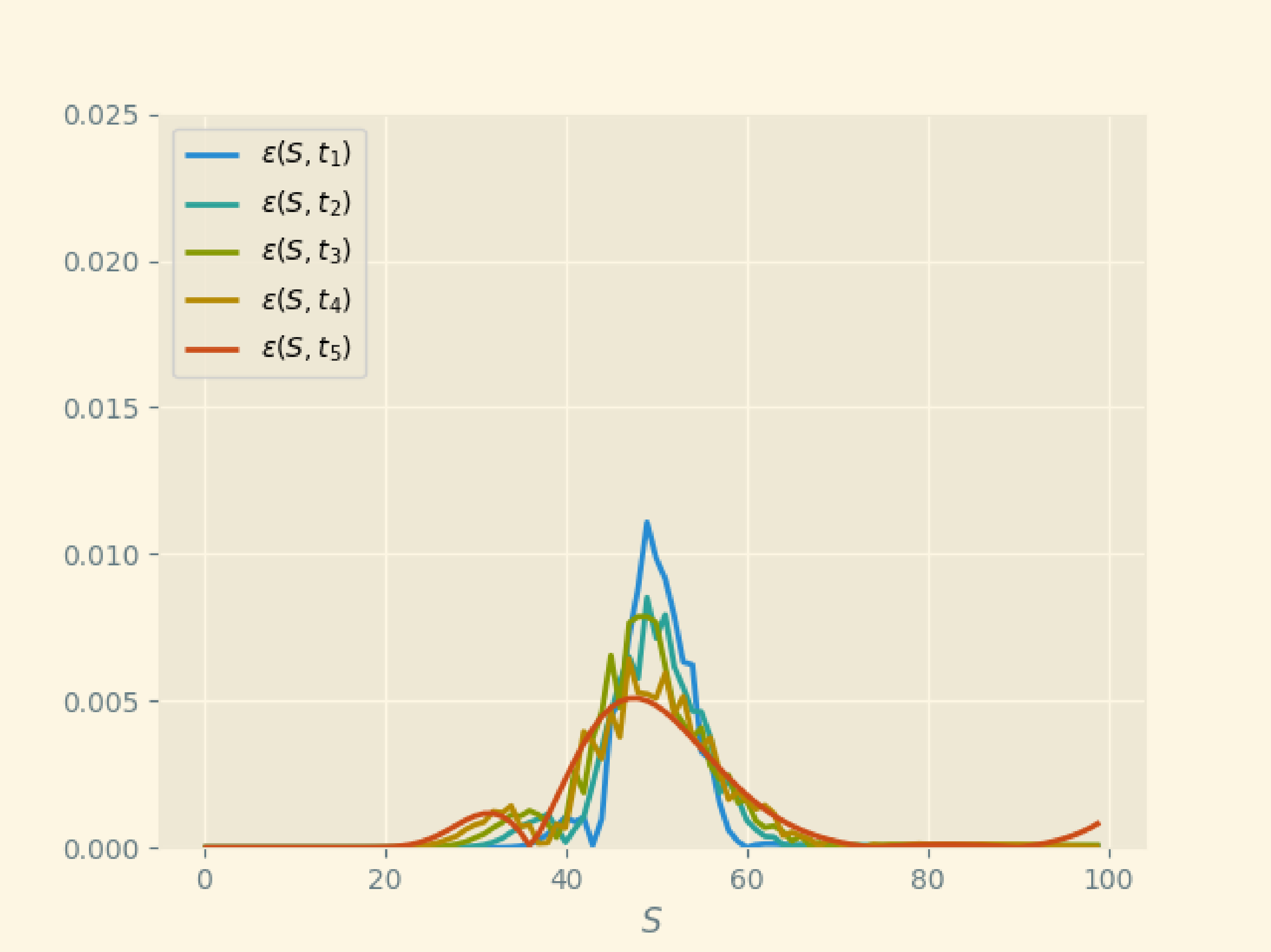
Analisi Errori

Evoluzione temporale dell'errore



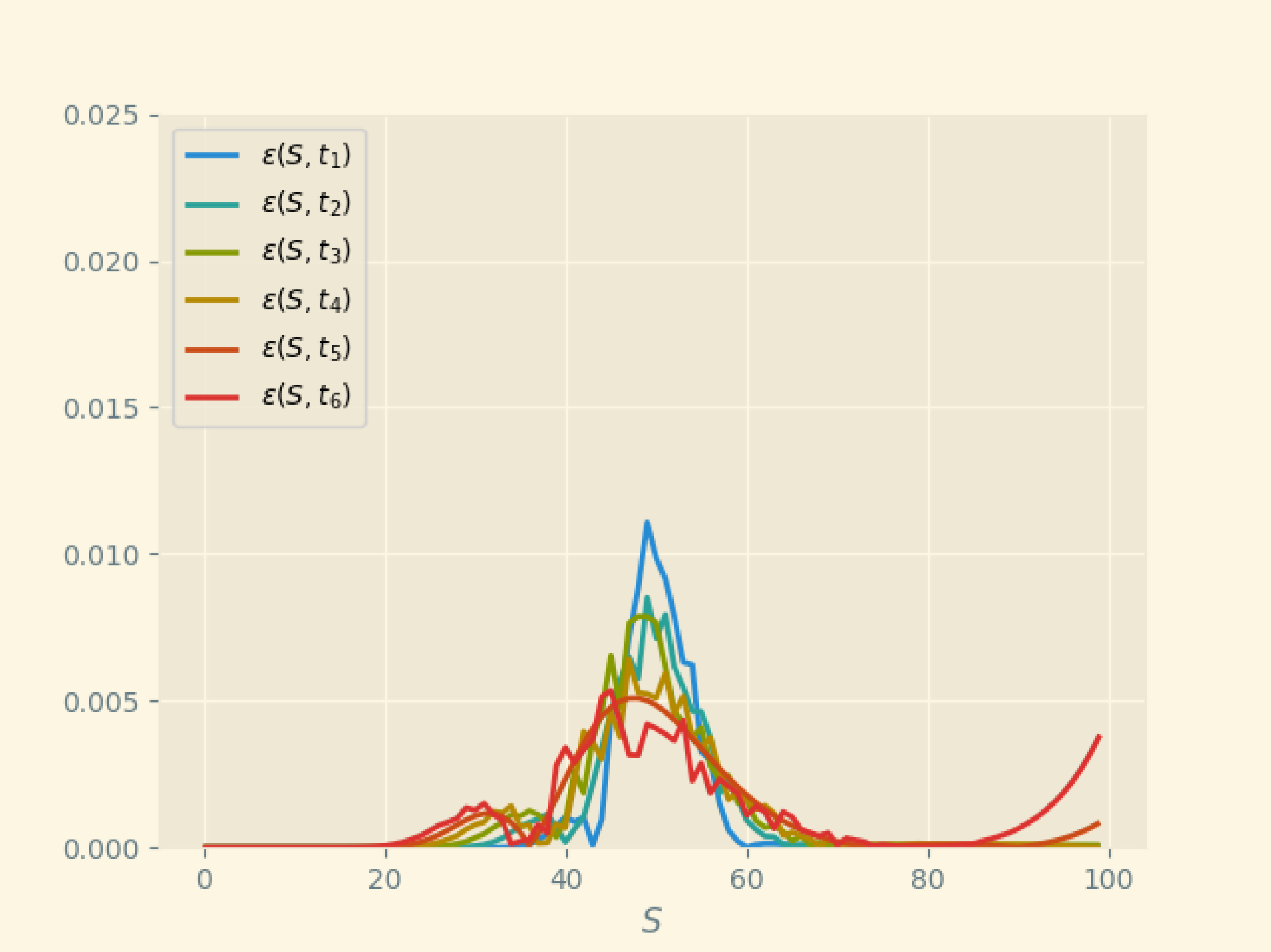
Analisi Errori

Evoluzione temporale dell'errore



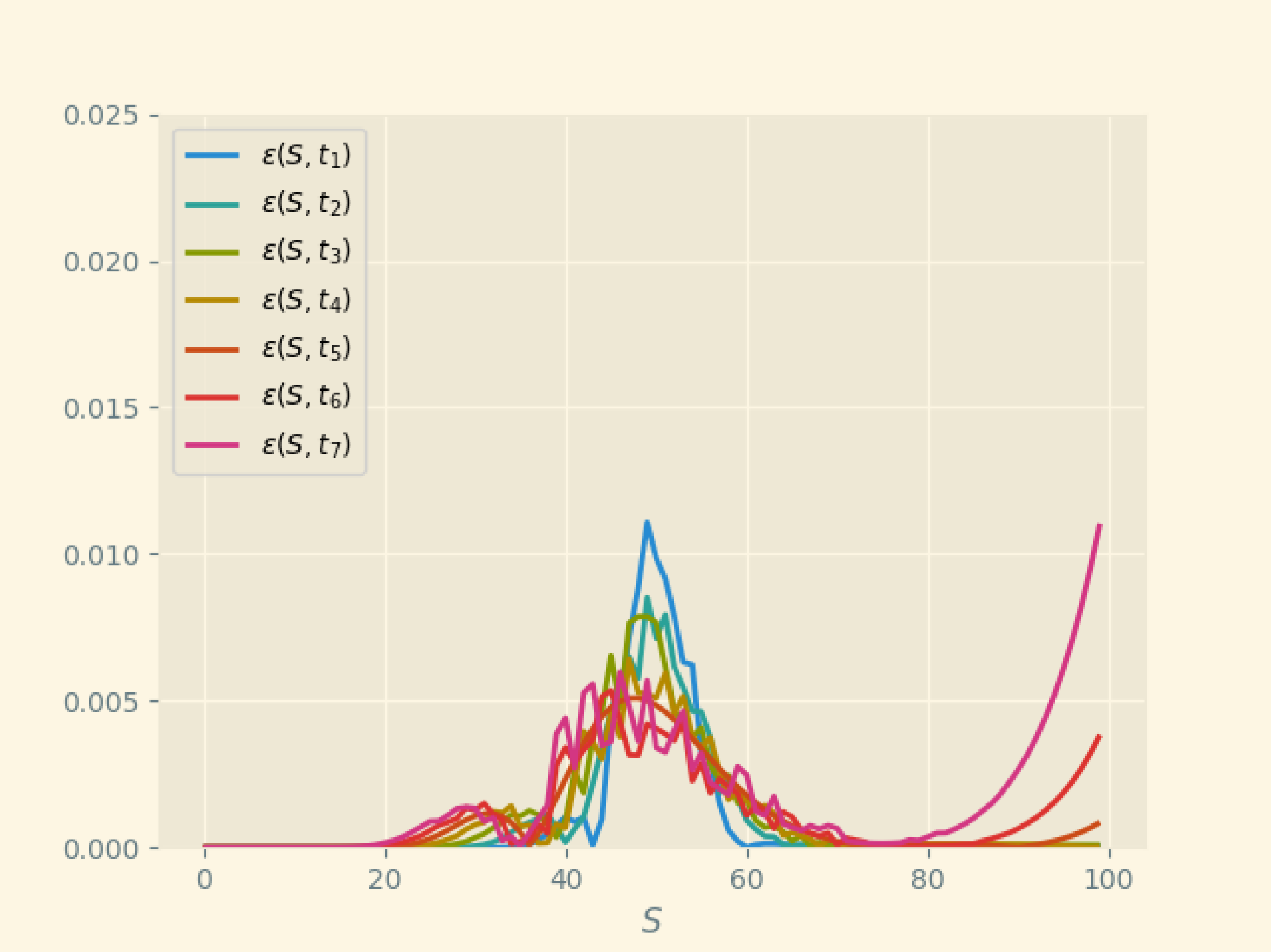
Analisi Errori

Evoluzione temporale dell'errore



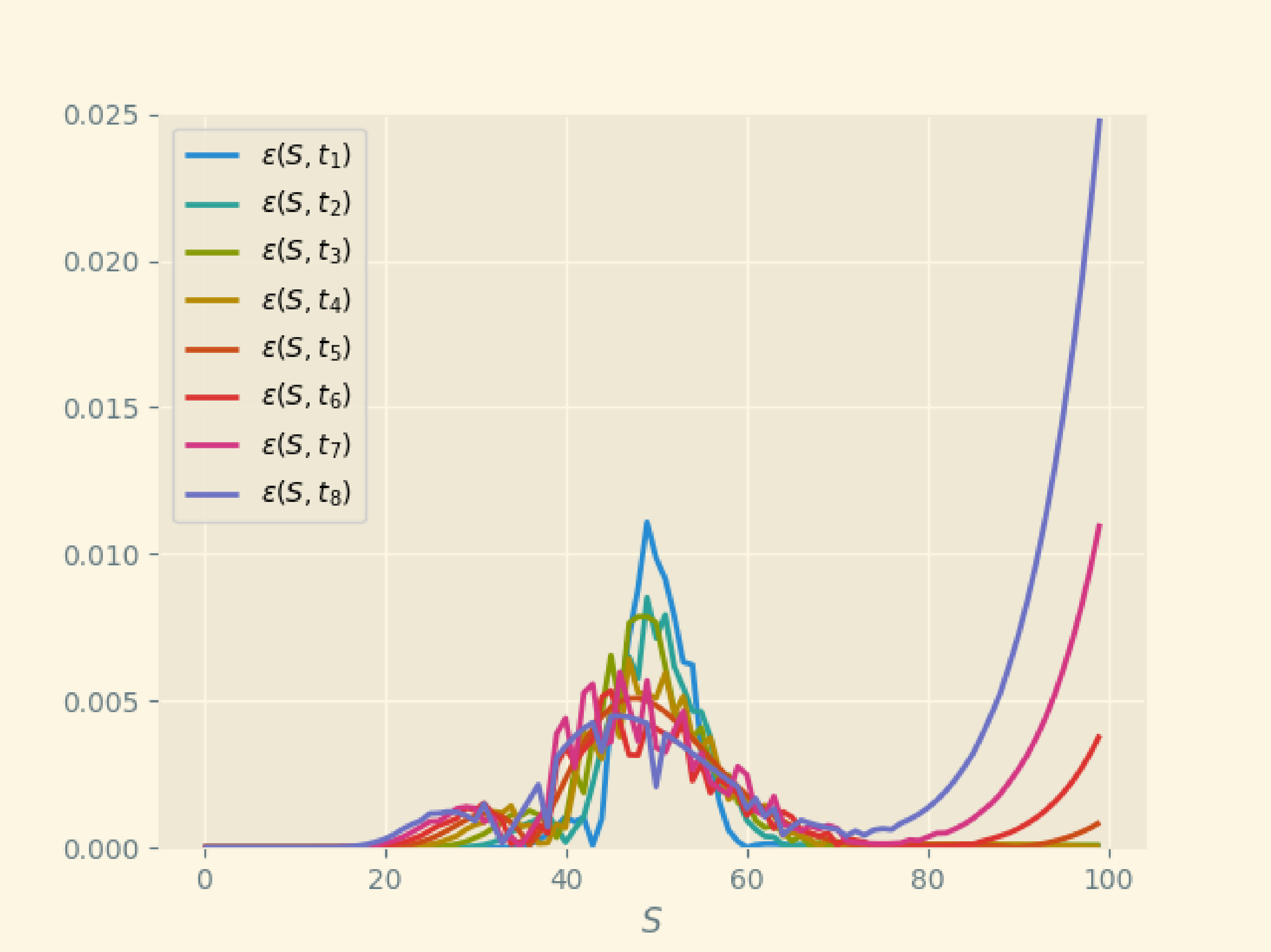
Analisi Errori

Evoluzione temporale dell'errore



Analisi Errori

Evoluzione temporale dell’errore



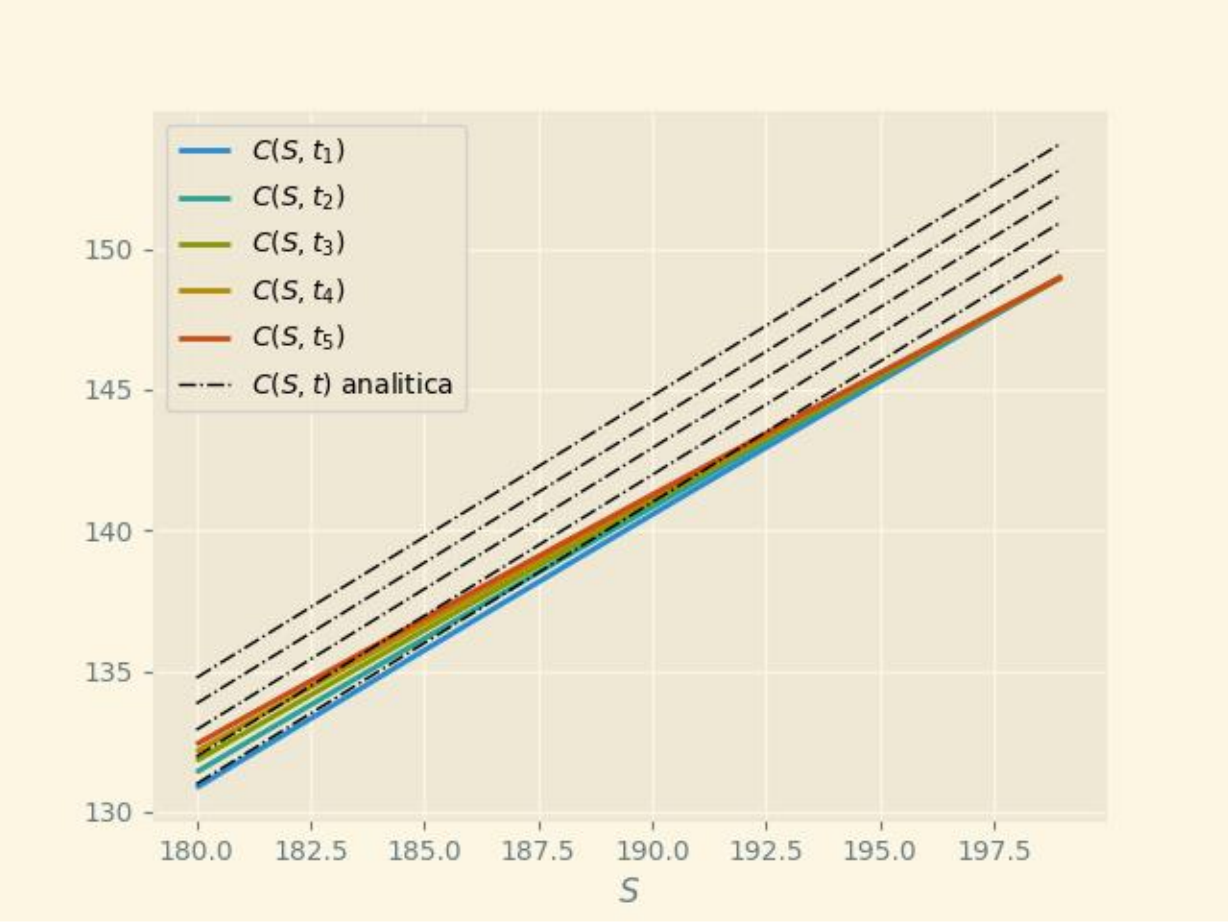
Condizioni al Contorno

L'estremo destro del dominio dei ritorni è problematico

Allontanare il bordo

$\Downarrow$

Perdita in risoluzione oppure costi computazionali elevati



Condizioni al Contorno

Soluzione proposta

Interpolare il valore al contorno con il penultimo valore dell’opzione e con un punto aggiuntivo posto lontano dal bordo

$$C(S_{\max}, t) = \frac{C(\tilde{S}, t) - C(S_{\max} - \Delta S, t)}{\tilde{S} - S_{\max} + \Delta S}\Delta S + C(S_{\max} - \Delta S, t)$$

$$\tilde{S} = 10^6 \qquad C(\tilde{S}, t) = \tilde{S} - K$$

In questo modo il bordo è mobile e può seguire meglio la soluzione analitica

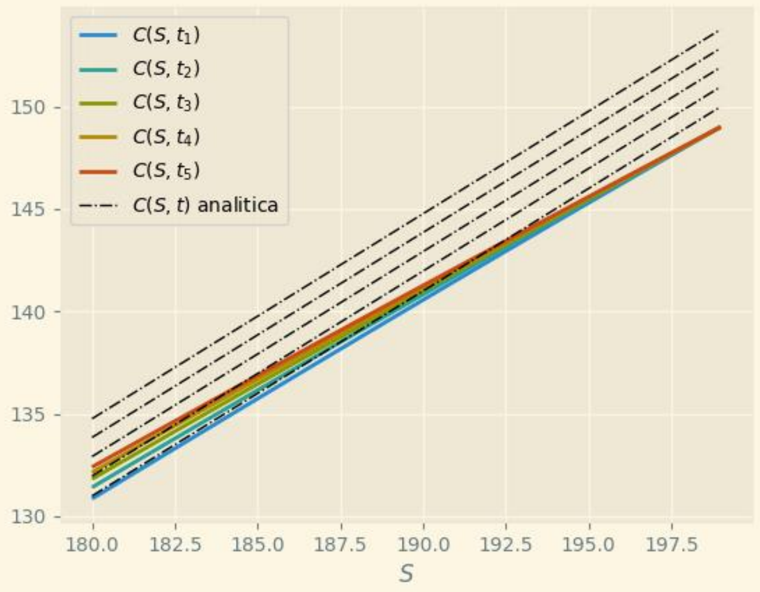
Per una migliore approssimazione della derivata seconda si è provata anche una interpolazione quadratica

Condizioni al Contorno

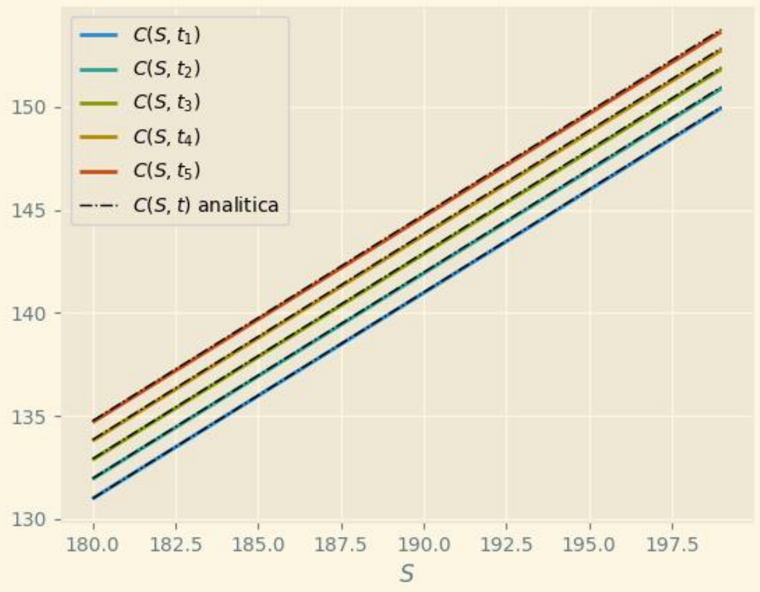
Soluzione proposta

Interpolare il valore al contorno con il penultimo valore dell’opzione e con un punto aggiuntivo posto lontano dal bordo

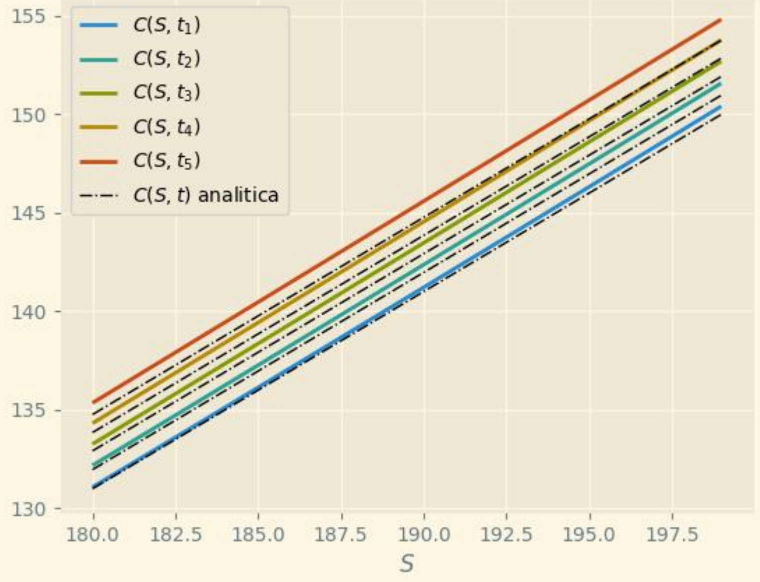
Nessuna interpolazione



Interpolazione lineare

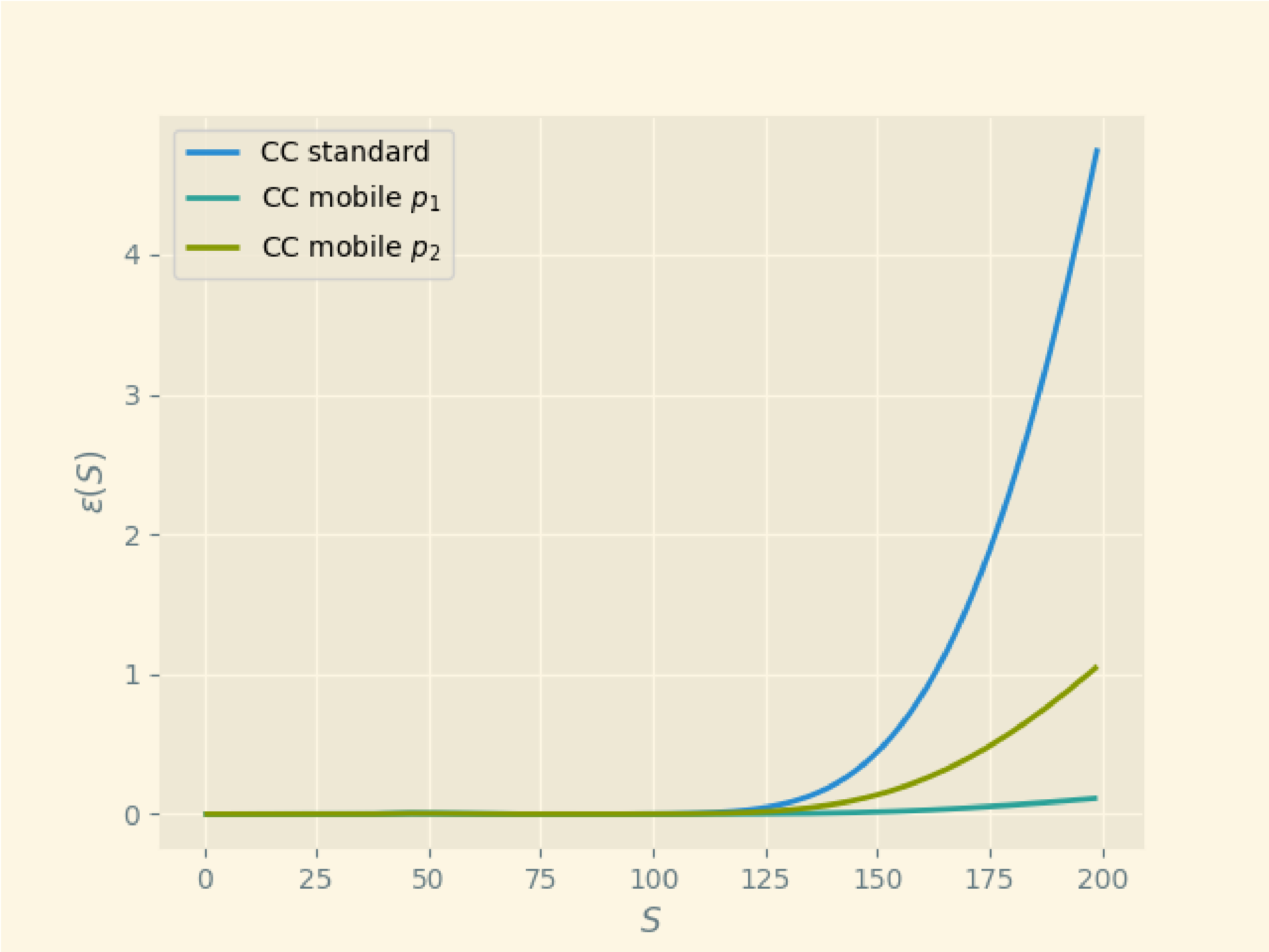


Interpolazione quadratica



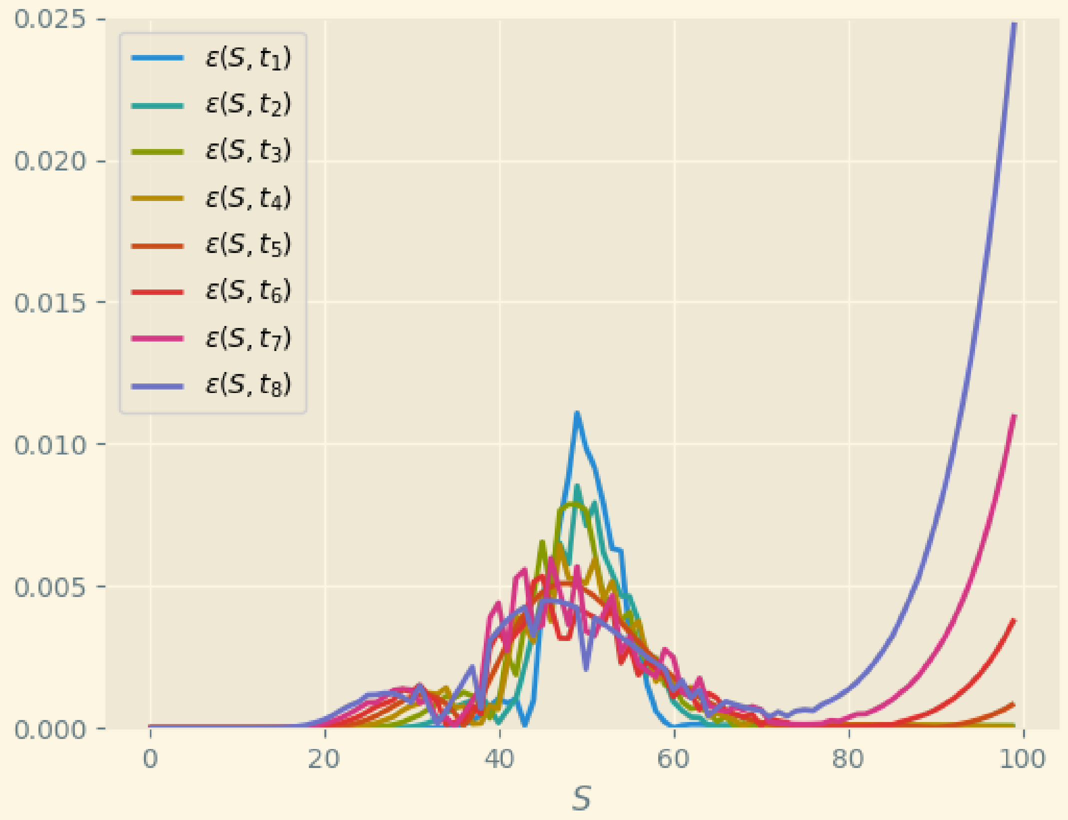
Condizioni al Contorno

Errori commessi utilizzando le varie condizioni al contorno

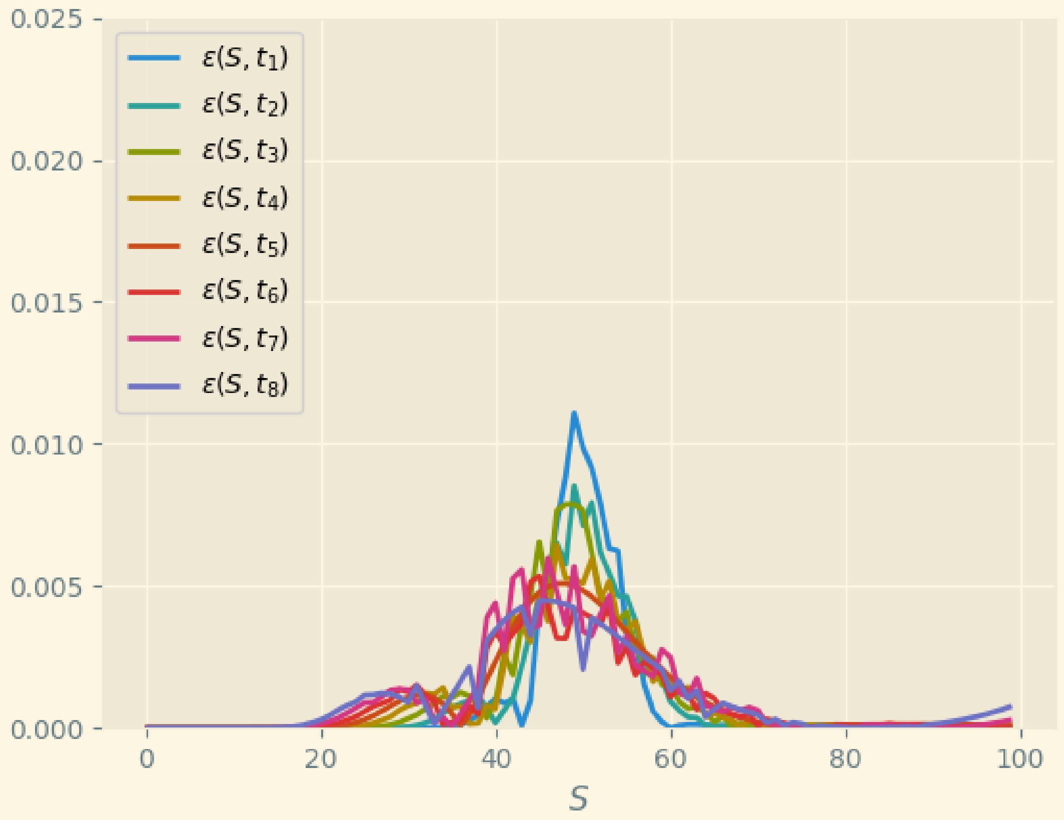


Condizioni al Contorno

Contorno fisso



Contorno mobile lineare



Conclusioni

E' stato ricavato l'insieme dei parametri del modello numerico tali per cui l'algoritmo risulta stabile

E' stata mostrata una soluzione efficace per il problema delle condizioni al contorno

L'algoritmo implementato si è dimostrato rapido e affidabile, in grado di approssimare con una buona precisione la soluzione dell'equazione di Black-Scholes

A Study on Numerical Solution of Black-Scholes Model - Anwar, Andallah

Numerical Approximation of Black-Scholes Equation - Dura, Mosneagu

Derivation of Black-Scholes Equation using Ito's Lemma - Washburn, Dik