Robotique

Introduction aux notions fondamentales

Mathieu GROSSARD

Interactive Robotics Laboratory
CEA LIST - DIGITEO Labs
mathieu.grossard@cea.fr

Contenu du cours

Module de robotique

- Volume horaire de 21h (6 séances de 3h30) ;
- Séances de cours et Travaux Dirigés (utilisation du logiciel MATLAB®).

Compétences à acquérir

- Maîtriser les notions fondamentales de la robotique (espace articulaire, espace cartésien, volume atteignable, configurations singulières, etc) ;
- Maîtriser le formalisme courant de représentation des chaînes poly-articulées et l'utilisation des matrices de transformations homogènes ;
- Maîtriser la méthodologie permettant de calculer les modèles géométriques, cinématiques et dynamiques de robots sériels ;
- Maîtriser la méthodologie d'identification du modèle dynamique de robots sériels ;
- Maîtriser les algorithmes classiques de génération de trajectoires ;
- Maîtriser les stratégies usuelles de commande de robots en position et en effort.

Organisation du cours

Programme des séances

Séance 1 Introduction à la robotique. Terminologie, définitions et éléments constitutifs des robots. Rappels sur les coordonnées et transformations homogènes. Convention de *Denavit-Hartenberg*. Modèle Géométrique Direct des robots sériels.

Séance 2 Modèle Cinématique Direct des robots sériels (illustrations sur quelques cas exemple). Analyse de l'espace de travail des robots et mise en évidence des phénomènes de singularités. Ellipsoïdes en vitesse et effort. Modèles Géométrique et Cinématique Inverses des robots sériels (illustrations sur quelques cas). Cas des robots réguliers et redondants. Calcul des efforts statiques.

Séance 3 TD - Modèles Géométrique et Cinématique de robots manipulateurs.

Séance 4 Modèles Dynamique Direct et Inverse de robots rigides (formalisme de *Lagrange*). Techniques d'identification du Modèle Dynamique de robots. Quelques extrapolations au cas des robots à articulations flexibles.

Séance 5 Architecture de contrôleur. Génération de mouvements dans les espaces articulaire et cartésien. Aperçu des techniques de commande en position dans l'espace articulaire et opérationnel. Aperçu des techniques de commande en effort.

Séance 6 TD - Modèle dynamique et commande de robots manipulateurs.

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

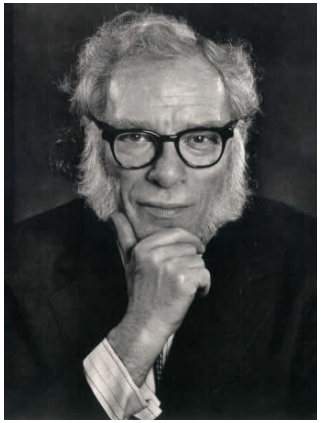
Définitions générales

Définition de Robot (AFNOR)

Manipulateur commandé en position, reprogrammable, polyvalent, *à plusieurs degrés de liberté*, capable de manipuler des matériaux, des pièces, des outils et des dispositifs spécialisés, *au cours de mouvements variables et programmés* pour l'exécution d'une variété de tâches. [...] *Son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement et aux circonstances*. [...]

Lois de la robotique édictées par *Isaac Asimov* [2]

- "Un robot ne peut porter atteinte à un être humain ni, restant passif, laisser cet être humain exposé au danger"
- "Un robot doit obéir aux ordres donnés par les êtres humains, sauf si de tels ordres sont en contradiction avec la Première Loi"
- "Un robot doit protéger son existence dans la mesure où cette protection n'entre pas en contradiction avec la Première ou la Deuxième Loi"



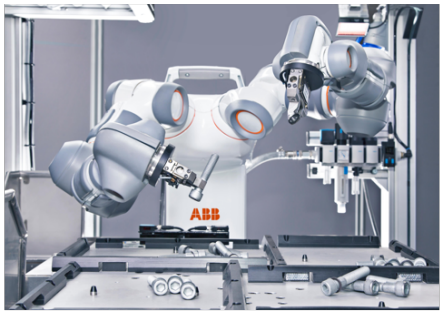
Quelques exemples de robots

[Curiosity rover, NASA's Jet Propulsion Laboratory]

[Robot compagnon NAO, SoftBank Robotics]

[Robot hand, Shadow Company]

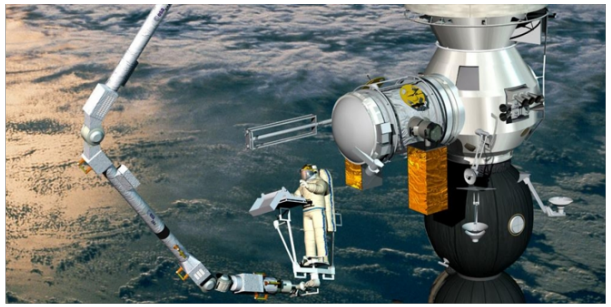
[Robot compagnon Justin, DLR]



[Robot YuMi, ABB Robotics]

[Robot KUKA dans une fonderie]

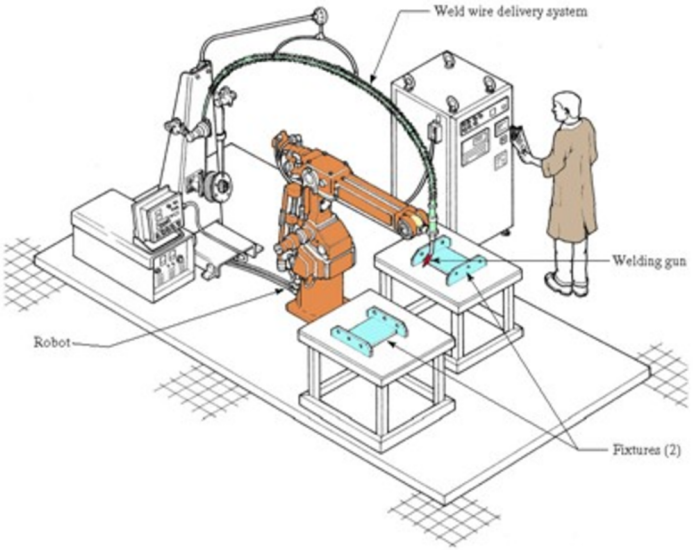
[Quadrupède BigDog, Boston Dynamics]


[European Robotic Arm de l'ISS, Airbus Defence and Space]

[Robots parallèles Adept Quattro, Adept]

Composants d'une cellule robotisée

- Mécanisme ayant une structure motorisée permettant d'agir sur l'environnement ;
- Perception permettant au robot de mesurer son état interne (capteurs *proprioceptifs*) et de recueillir des informations sur l'environnement (capteurs *extéroceptifs*) ;
- Commande permettant d'engendrer les actions du robot à partir de la fonction de perception et des ordres de l'utilisateur ;
- Interface homme-machine à travers laquelle l'utilisateur programme les tâches que le robot doit exécuter ;
- Poste de travail et dispositifs périrobotiques constituant l'environnement dans lequel évolue le robot.



[Exemple d'une cellule robotisée de soudage à l'arc, Kuka]

Composants d'une cellule robotisée

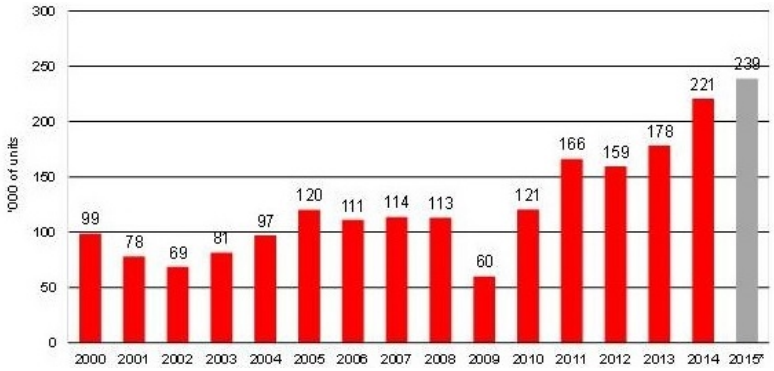
- Système mécatronique
- Baie électronique (variateurs, étages de puissance, contrôleur, . . .)
- Interface Homme-Machine (IHM)

Quelques chiffres et noms

Principaux constructeurs de robots industriels

- ABB
- Kuka
- Staübli
- FANUC
- Comau

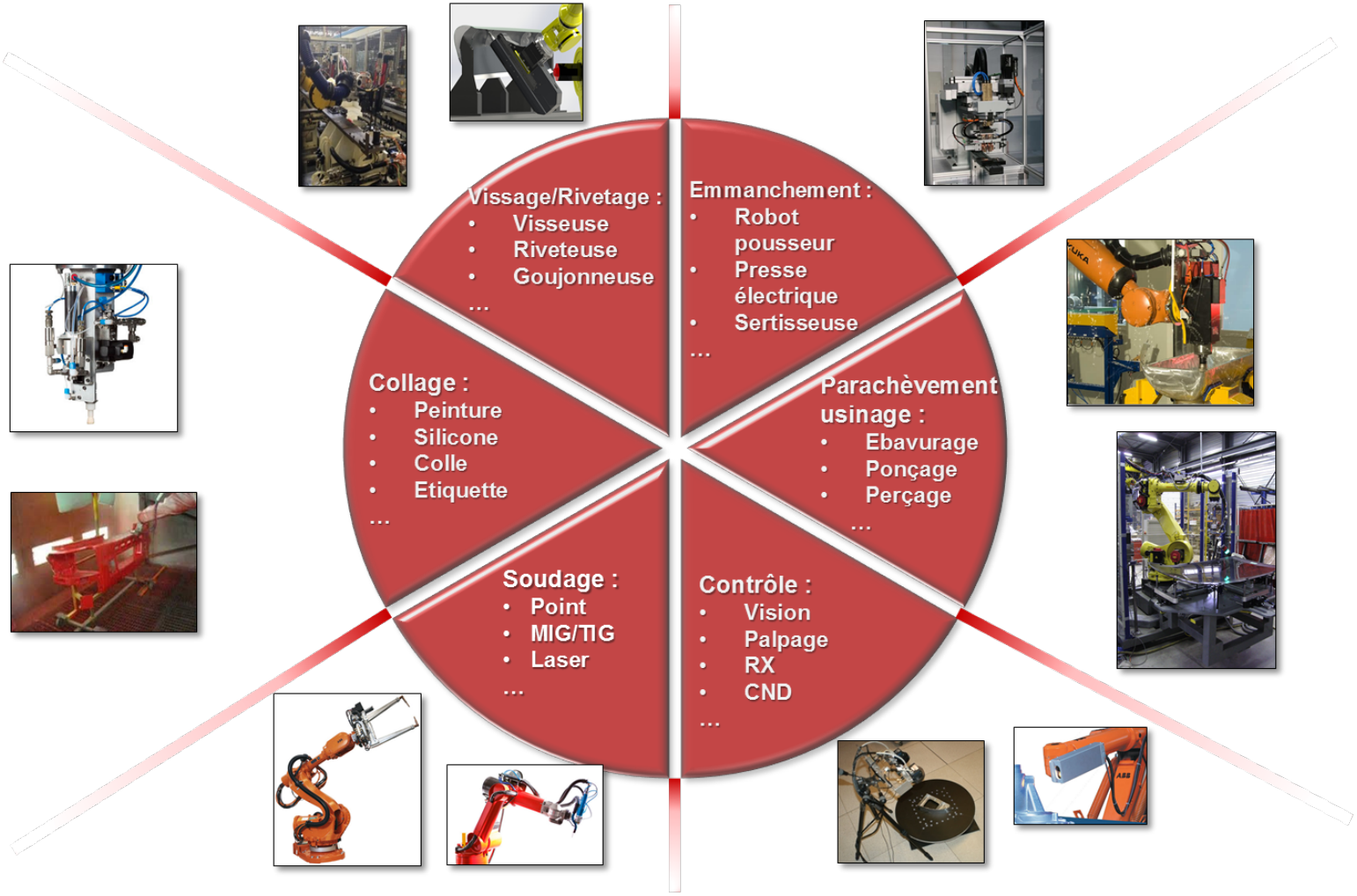
Fourniture annuelle de robots industriels à l'échelle mondiale



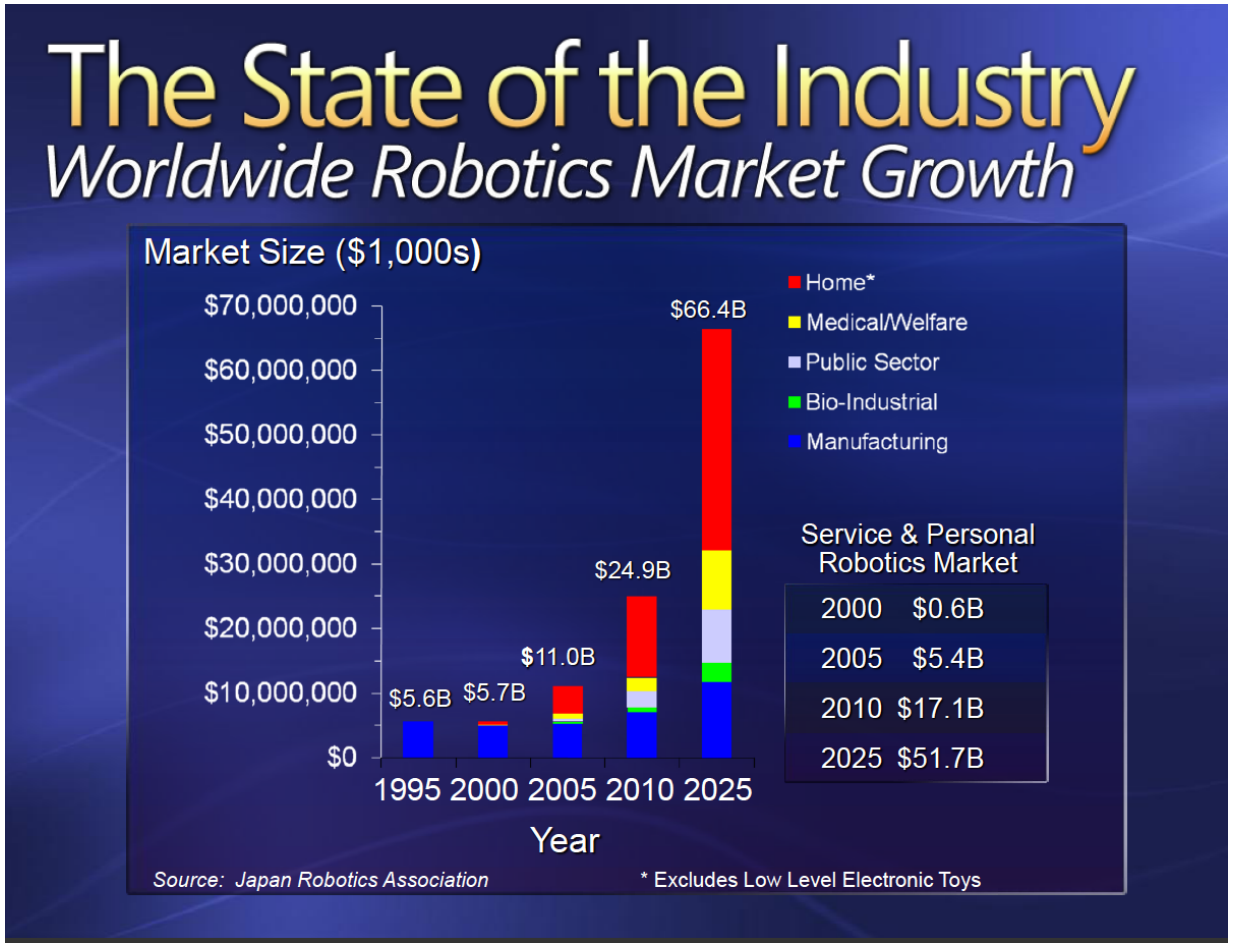
Source IFR : International Federation of Robotics

Applications de la robotique en milieu industriel

Quelques cas d'utilisation des robots dans l'industrie manufacturière

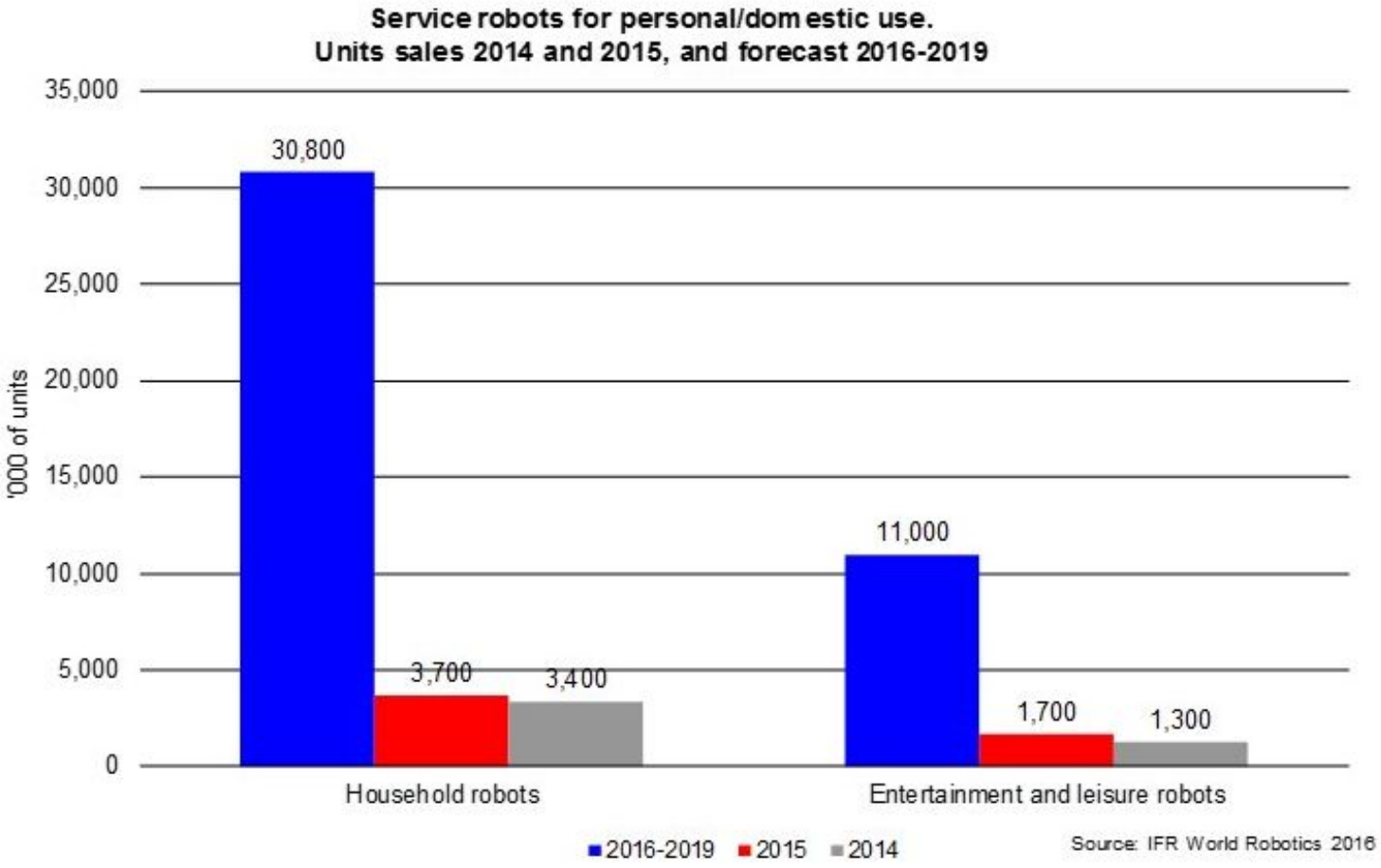


Marché prévisionnel de la robotique industrielle



Prix d'un robot articulé à 6 ddls de l'ordre de plusieurs dizaines de k€

Marché prévisionnel de la robotique de service

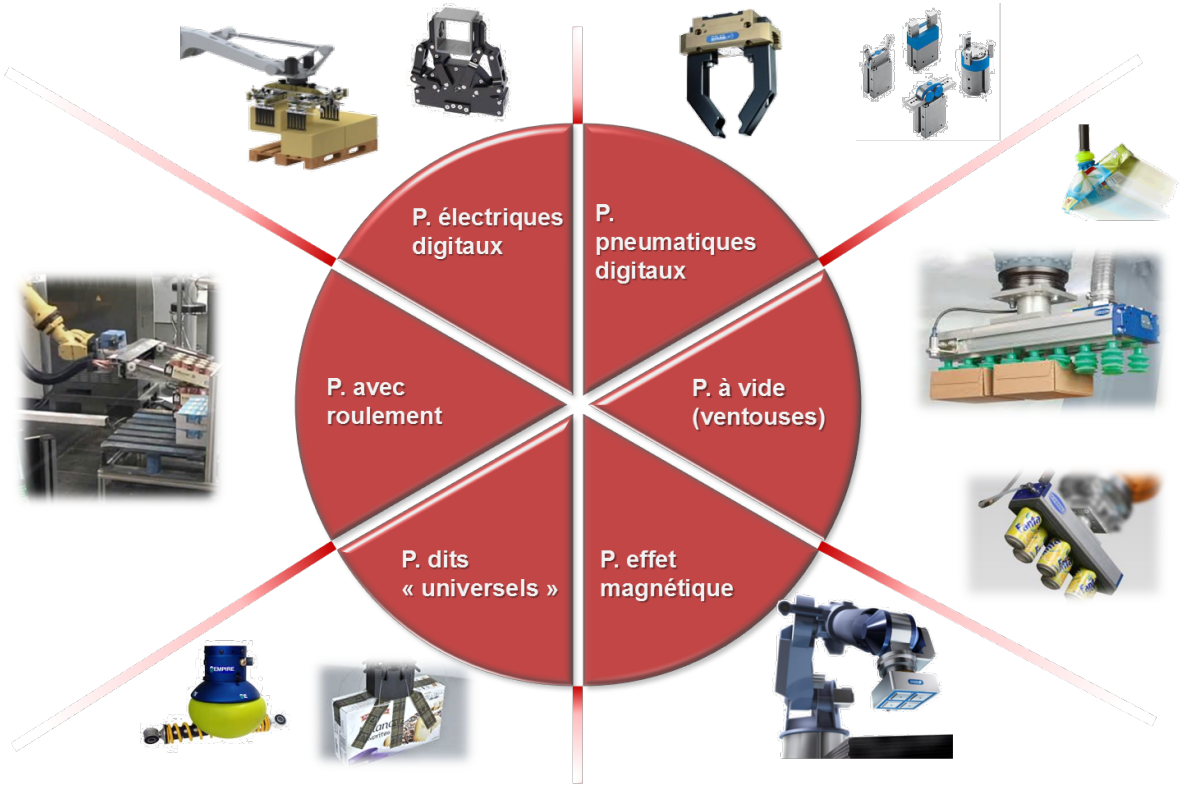


Source *IFR : International Federation of Robotics*

Constituants d'un robot

Organe terminal de robots : dispositif destiné à manipuler des objets (dispositifs de serrage, dispositifs magnétiques, à dépression, . . .) ou à les transformer (outils, torche de soudage, pistolet de peinture, . . .).

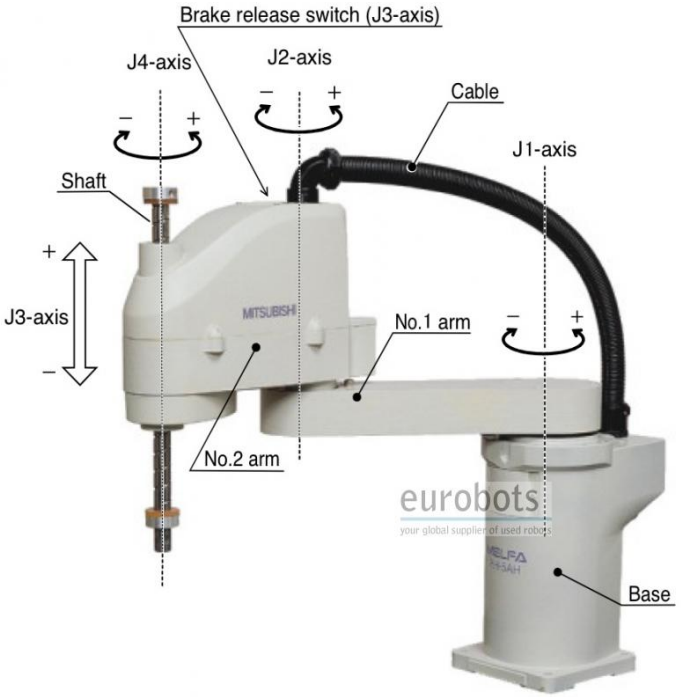
- Exemple de quelques principes physiques pour la préhension de pièces



Constituants d'un robot

Structure mécanique articulée dont le but est d'amener l'organe terminal dans une situation (position et orientation) donnée, selon des caractéristiques de vitesse et d'accélération données.

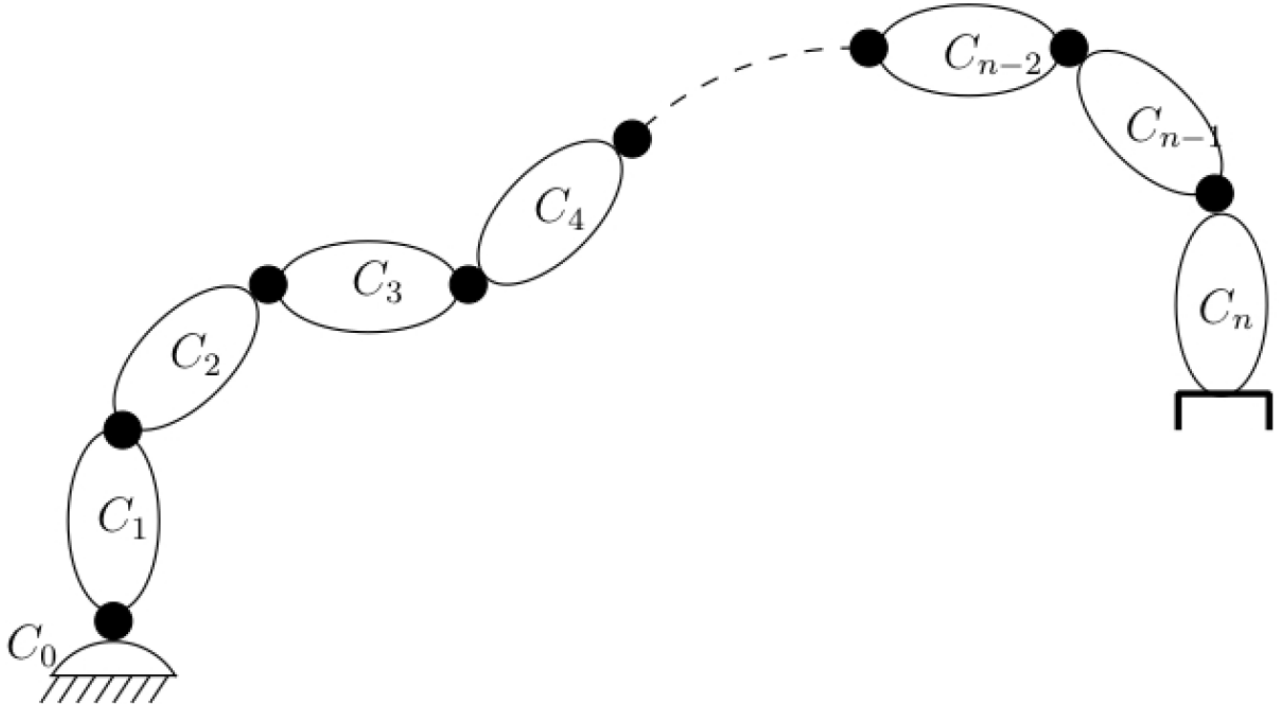
- Architecture décrite par une chaîne cinématique de corps généralement rigides, ou supposés comme tels, assemblés par des liaisons appelées articulations.



Typologie des chaînes cinématiques de robots [11]

Chaîne ouverte simple (*simple open-tree structure*) :

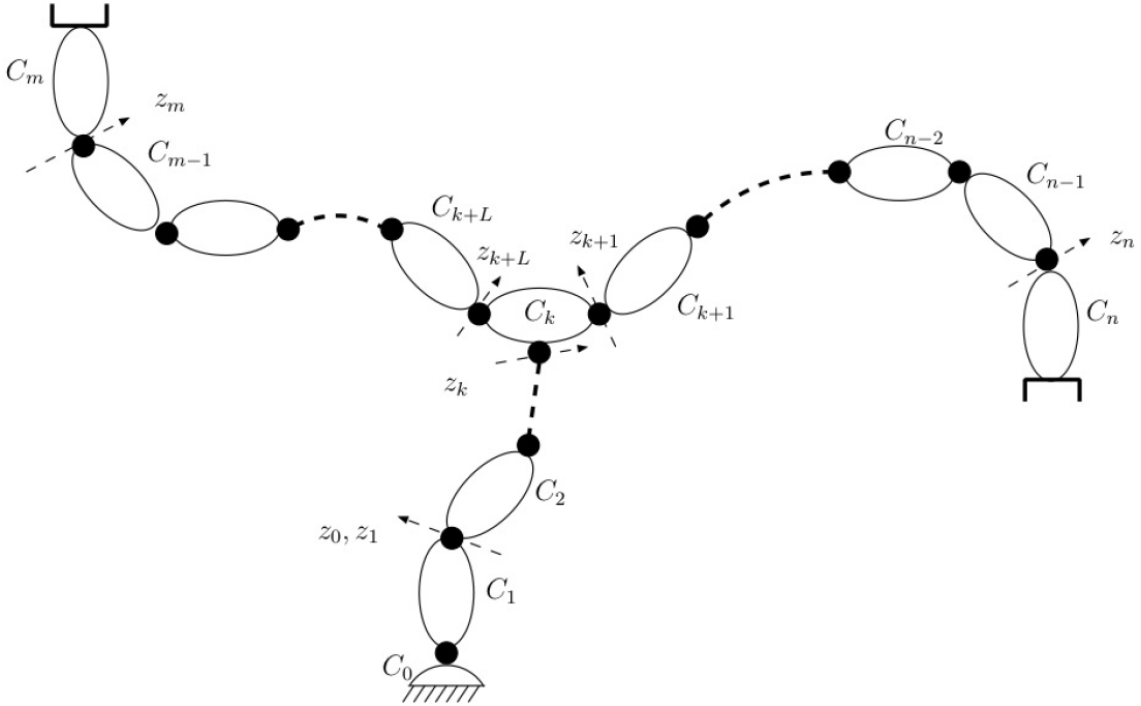
- Chaque corps compte au plus deux liaisons ;
- Structure purement séquentielle ;
- Architecture la plus rencontrée du robot manipulateur.



Typologie des chaînes cinématiques de robots [11]

Chaîne ouverte arborescente (*Multiple open-tree structure*) :

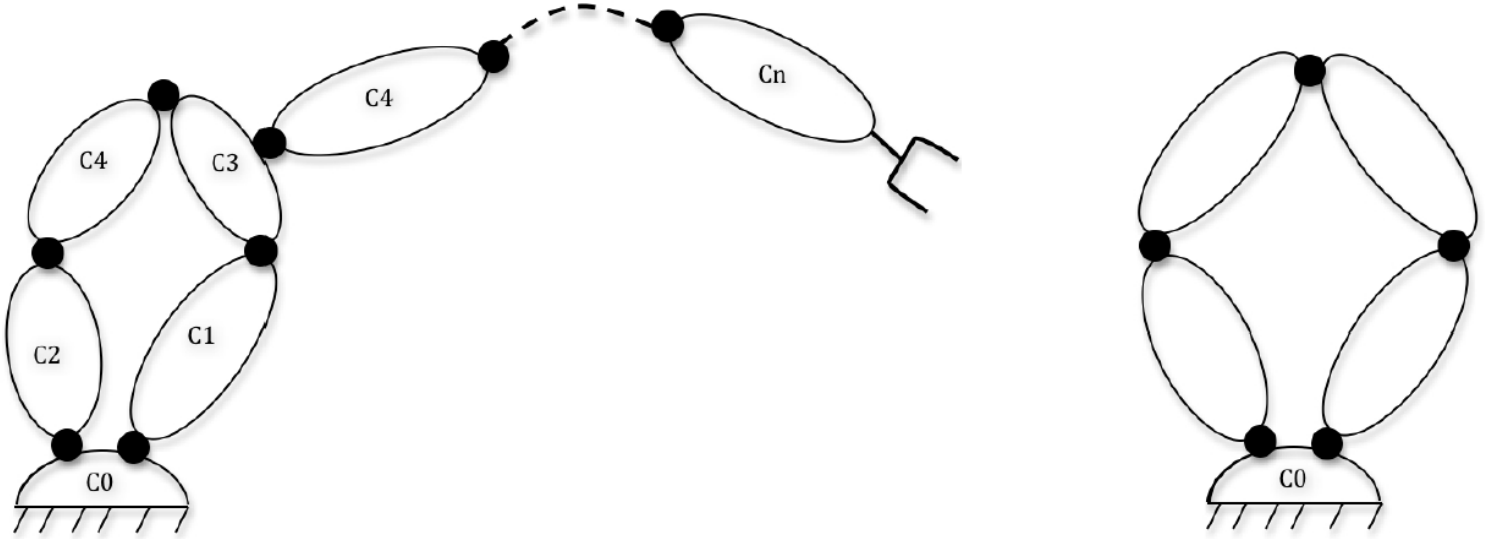
- Certains corps sont connectés à plus de deux autres corps ;
- Plus possibilité de numéroter les corps de manière séquentielle ;
- Possibilité d'avoir plusieurs effecteurs (comme le corps humain).



Typologie des chaînes cinématiques de robots [11]

Chaîne fermée contenant une (ou des) boucle(s) cinématique(s) :

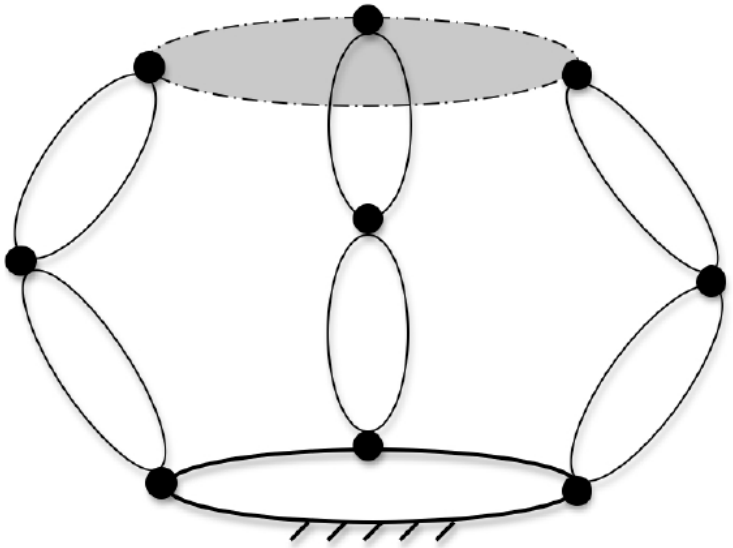
- Classe des chaînes cinématiques composées ou complexes dont au moins l'un des corps a plus de deux liaisons ;
- Classe des chaînes fermées simples telles que tous les corps ont au plus deux liaisons.



Typologie des chaînes cinématiques de robots [11]

Robots parallèles dans lesquels l'organe terminal est relié à la base par plusieurs chaînes parallèles :

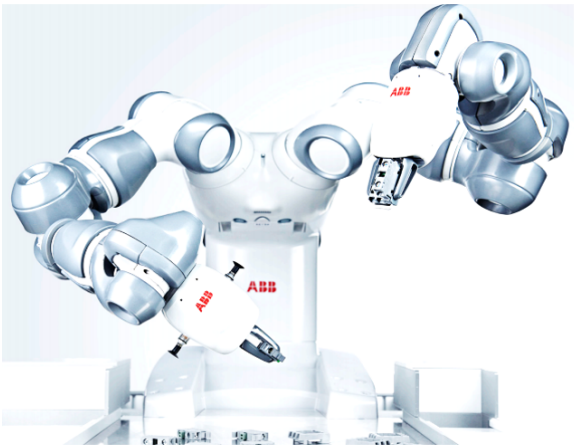
- Plus grande rigidité et plus grande précision ;
- Réalisation d'assemblage à des cadences élevées ;
- Grande capacité de charge en comparaison des autres robots.



Typologie des chaînes cinématiques de robots [11]

Exemples de robots de la société *ABB*^{TM} ayant des chaînes cinématiques différentes :

- Robot *IRB 2600* (structure ouverte simple) ;
- Robot *YuMi* (structure arborescente bi-manuelle) ;
- Robot *IRB 4400* (structure fermée complexe) ;
- Robot *FlexPicker* (structure parallèle).



Notions d'articulation

Définition

Une articulation lie deux corps successifs en limitant le nombre de degré de liberté de l'un par rapport à l'autre.
Soit m le nombre de degré de liberté résultant, encore appelé *mobilité de l'articulation*.
La mobilité d'une articulation est telle que :

$$0 \leq m \leq 6.$$

Lorsque $m = 1$ (fréquemment le cas en robotique), l'articulation est dite *simple*, soit *rotoïde*, soit *prismatique* :

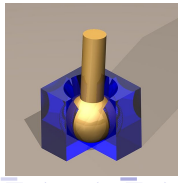
- Rotoïde Il s'agit d'une articulation de type pivot, notée R, réduisant le mouvement entre deux corps à une rotation autour d'un axe qui leur est commun. La situation relative entre les deux corps est donnée par l'angle autour de cet axe.
- Prismatique Il s'agit d'une articulation de type glissière, notée P, réduisant le mouvement entre deux corps à une translation le long d'un axe commun. La situation relative entre les deux corps est mesurée par la distance le long de cet axe.

Représentation symbolique des articulations

- Articulation rotoïde
  - Degré de mobilité de 1 (une seule rotation), nombre de contraintes de 5 (3 translations, 2 rotations)
  - Valeur articulaire désignant un *angle [rad]*

- Liaison prismatique
  - Degré de mobilité de 1 (une seule translation), nombre de contraintes de 5 (2 translations, 3 rotations)
  - Valeur articulaire désignant une *longueur [m]*

- Articulation complexe ($m \geq 2$)
  - Vue comme une composition d'articulations *prismatique* ou *rotoïde* ;
  - Exemple d'une rotule obtenue avec trois articulations *rotoïdes* dont les axes sont concourants



Notion d'espace articulaire

Définition

L'espace articulaire d'un robot est celui dans lequel est représentée la situation de tous ses corps. La solution la plus directe consiste à utiliser les *variables* ou *coordonnées articulaires* :

$$q = [q_1, \ldots, q_N]^T$$

- L'espace des variables articulaires, noté $\mathbb{R}^q$, est parfois appelé espace des configurations.
- La dimension N de $\mathbb{R}^q$ est égale au nombre de variables articulaires indépendantes.
- Dans une structure ouverte (simple ou arborescente), les variables articulaires sont généralement indépendantes.
- Les structures fermées imposent des relations entre ces variables articulaires.

Indice de mobilité d'une chaîne cinématique

Critère de *Chebychev-Grübler-Kutzbach*

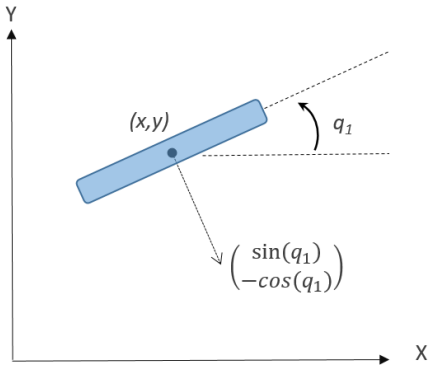
Soit une chaîne cinématique constituée de n_c corps solides en mouvement connectés par j articulations (notons f_i et c_i les degrés de liberté et de contrainte d'une articulation $i \in 1, \ldots, j$ tels que $f_i + c_i = 6$).
Le degré de mobilité de la chaîne cinématique (prenant en compte le couplage des corps de la chaîne cinématique au travers des contraintes mécaniques) vaut :

$$N_{\text{mob}} = 6n_c - \sum_{i=1}^{j} c_i = 6(n_c - j) + \sum_{i=1}^{j} f_i$$

- Indice de mobilité : nombre nécessaire de coordonnées indépendantes requises pour décrire complètement la configuration de tous les liens du mécanisme par rapport à n'importe quel corps du système ;
- Indice de mobilité obtenu en comptabilisant le nombre de paramètres définissant les positions d'un ensemble de corps rigides, réduit du nombre de contraintes imposées par les articulations reliant ces corps ;
- Pas de prise en compte du corps fixe dans le comptage de n_c.

Indice de mobilité d'une chaîne cinématique

- Mobilité d'un système holonome égale à la dimension de l'espace des configurations :
  - Robot holonome : pas de restriction sur le déplacement (tout chemin dans l'espace des configurations $\mathbb{R}^q$ est autorisé) ;
  - Indice de mobilité d'un manipulateur à chaîne ouverte simple égal à son nombre d'articulations : $N_{\text{mob}} = j$.
  - Exemple du bras manipulateur
- Mobilité réduite d'un système non-holonome du fait des contraintes cinématiques :
  - Robots non-holonomes : robots soumis à des contraintes cinématiques (mouvements autorisés inclus dans l'espace articulaire $\mathbb{R}^q$ et respectant les contraintes cinématiques) ;
  - Image des capacités de mouvement instantanés du système ;
  - Exemple de robots avec contraintes de roulement sans glissement (robots mobiles à roues, manipulation par des mains robotisées, etc.).



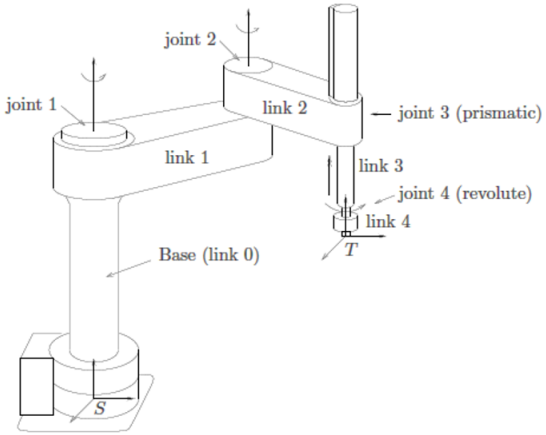
Voiture vue comme un robot non-holonome

Contrainte cinématique correspondant à un roulement sans glissement (vitesse du robot tangente à l'axe du robot) :
$\dot{x} sin\,(q_1) - \dot{y} cos\,(q_1) = 0.$

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

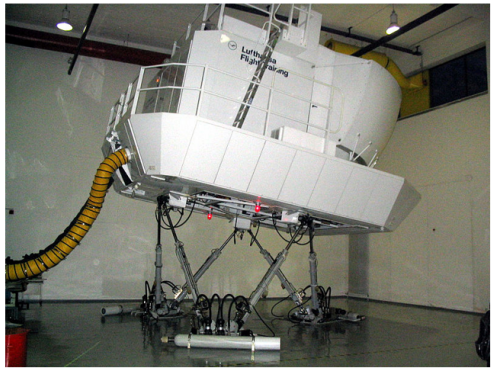
Exemple n°1 : structure ouverte simple

Robot SCARA 4 axes (Adept)

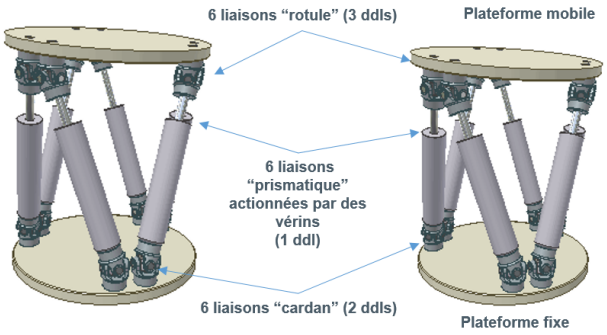


Exemple n°1

Exemple n°2 : structure fermée complexe



Plateforme de *Stewart* utilisée comme simulateur de vol par la compagnie aérienne *Luftansa*

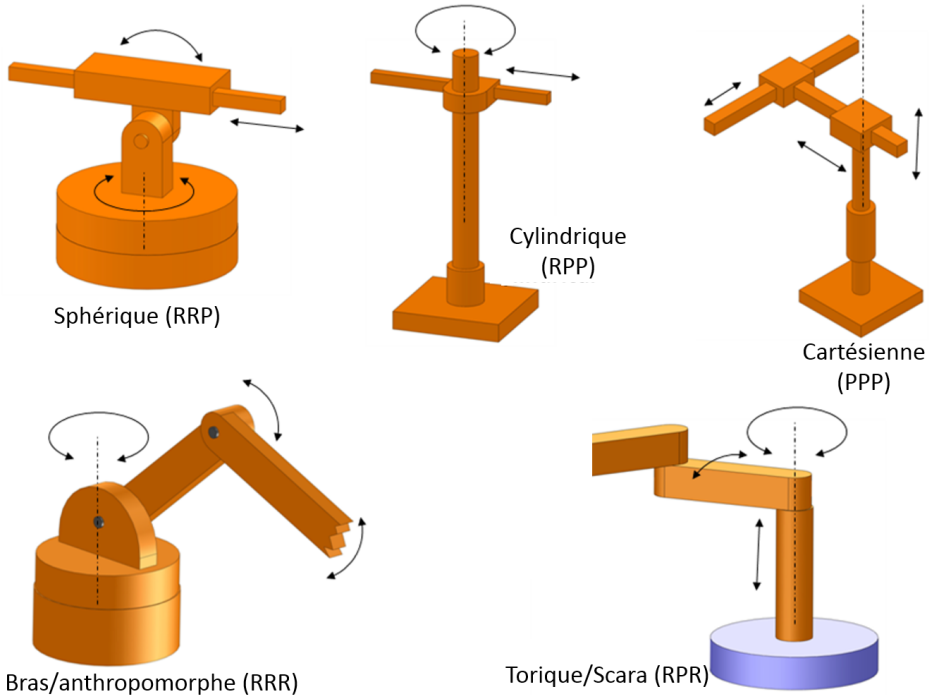


Exemple n°2

Structure articulaire des robots-manipulateurs

Morphologie des robots-manipulateurs de type structure ouverte simple :

- Porteur (*arm*) : trois premiers ddls du manipulateur ;
  - 12 architectures réellement différentes et non-redondantes (par exemple, élimination des cas de 3 liaisons prismatiques d'axes parallèles et 3 liaisons rotoïdes d'axes parallèles) ;
  - Combinaisons les plus usuelles d'articulations pour un robot manipulateur à 3 degrés de libertés (5 configurations courantes)



Morphologie des robots-manipulateurs de type structure ouverte simple

- Poignet (*wrist*) : ddls résiduels du manipulateur, caractérisé par des dimensions plus petites et une masse plus faible
  - Structure RRR avec trois axes concourants, formant ainsi une rotule, généralement utilisée comme un poignet ;
  - Robot obtenu en associant à un poignet (type rotule) un porteur à trois degrés de liberté : structure à six degrés de liberté la plus courante.
  - Permet d'assurer un découplage entre position et orientation : position du point d'intersection des axes des trois dernières articulations (centre du poignet) ne dépendant que de la configuration des corps 1, 2 et 3.

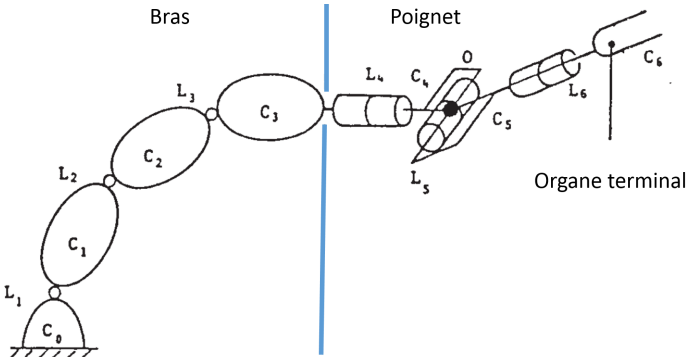


FIGURE: Structure générale d'un robot à poignet rotule

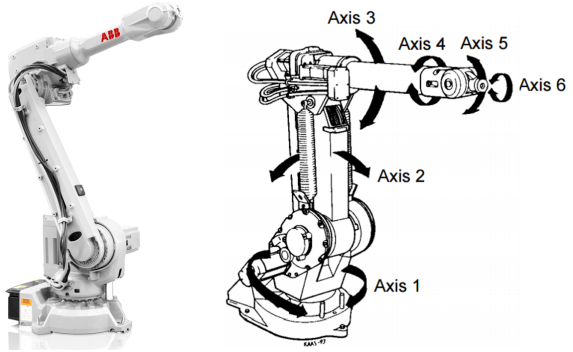


FIGURE: Exemple du robot ABB IRB

Espace opérationel

Définition

L'espace opérationnel d'un robot est celui dans lequel est représentée la situation de l'organe terminal (on considère autant d'espaces opérationnels qu'il y a d'organes terminaux), et est noté $\mathbb{R}^X$.

- Paramétrage de la position de l'organe terminal par les coordonnées cartésiennes dans $\mathbb{R}^3$.
- Paramétrage de l'orientation de l'organe terminal par $\mathbb{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{3\times 3}$, groupe muni de l'opération de multiplication des matrices de rotation de $\mathbb{R}^{3\times 3}$.
- Paramétrage complet de l'outil au travers de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{SO}(3)$.
- Dimension M de $\mathbb{R}^X$ égal au nombre de degré de liberté maximum que peut avoir l'organe terminal, et est égal au nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire la situation de l'organe terminal dans l'espace.
- Les coordonnées opérationnelles définies par :

$$X = [x_1, \ldots, x_M]^T$$

- Dans l'espace tridimensionnel, $M = 6$ (3 pour placer un point du corps en un point quelconque de l'espace et 3 pour orienter ce corps de façon quelconque).
- De manière générale, $M \leq 6$ et $M \leq N$.

Redondance

Définition

Un robot est redondant lorsque le nombre de ddl de l'organe terminal est inférieur au nombre de ddl de l'espace articulaire (nombre d'articulations motorisées) :

$$M < N$$

Combinaisons d'articulations dans les chaînes ouvertes simples impliquant une structure redondante :

- Plus de six articulations ;
- Plus de trois articulations rotoïdes d'axes concourants ;
- Plus de trois articulations rotoïdes d'axes parallèles ;
- Plus de trois articulations prismatiques ;
- Deux axes d'articulations prismatiques parallèles ;
- Deux axes d'articulations rotoïdes confondus.

Redondance

Problématique de cinématique inverse pour la réalisation de la tâche opérationnelle :

- Recherche de $q(t) \in \mathbb{R}^N$ tel que $X(t) = f(q(t)) \in \mathbb{R}^M$ (à tout instant t)
- Infinité de configurations articulaires impliquant la même configuration de l'organe terminal
- Déplacements internes dans l'espace articulaire non-observables dans l'espace opérationnel
  - Choix des $(N - M)$ déplacements articulaires issus de procédés d'optimisation
  - Reconfiguration du bras dans l'espace articulaire sans affecter la tâche opérationnelle

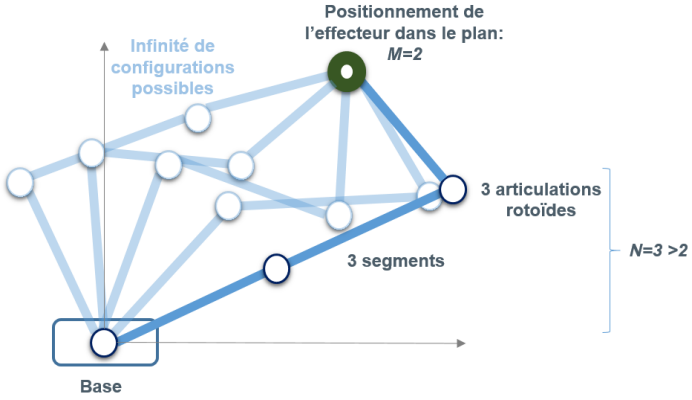


FIGURE: Exemple de robot planaire 3R redondant pour le positionnement de l'organe effecteur.

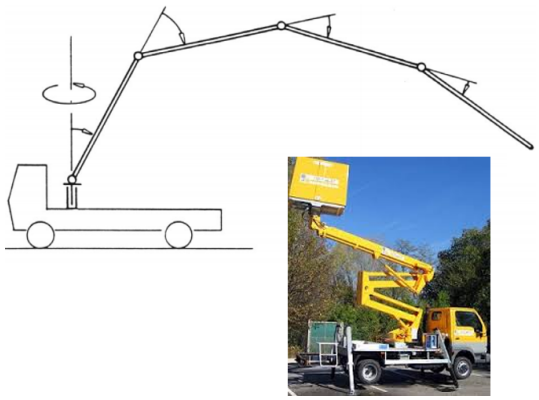


FIGURE: Camion nacelle ou élévateur

Redondance

Intérêts des degrés de liberté supplémentaires :

- évitement d'obstacles ;
- augmentation du volume du domaine accessible ;
- optimisation des mouvements du manipulateur vis-à-vis d'une fonction coût ;
- évitement des configurations singulières.

Inconvénients des degrés de liberté supplémentaires :

- Complexité accrue de la conception : mécanique (nombreux corps et transmissions), instrumentation (plus d'actionneurs et capteurs), coût, ...
- Algorithmes complexifiés pour le calcul de la cinématique inverse et de la commande de mouvements.

HRP-2 robot humanoïde japonais Caractéristiques techniques	
Taille	154 cm
Largeur	62 cm
poids	58 kg
Vitesse de déplacement	0 - 2 km/h
Degrés de liberté	30
Alimentation	Batterie NiMH 48V 18Ah
Design	National Institute of Advanced Industrial Science and Technology, AIST

FIGURE: HRP-2 robot humanoïde japonais, AIST

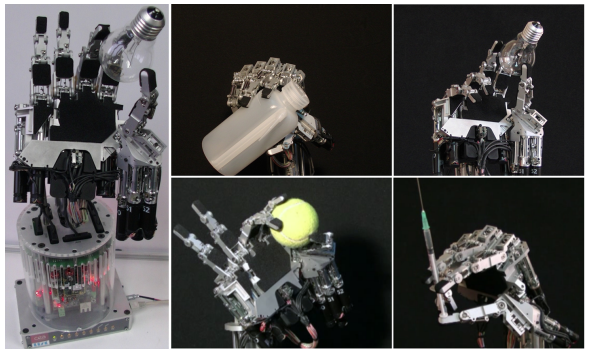


FIGURE: Manipulateur dextre CEA [18]

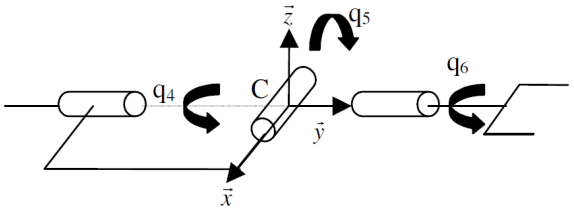
Singularité

Définition

Pour tous les robots, qu'ils soient redondants ou non, il se peut que dans certaines configurations, dites *singulières*, le nombre de degrés de l'organe terminal soit inférieur à la dimension de l'espace opérationnel dans lequel il opère habituellement : le robot est alors *localement redondant*.

Par exemple, ce cas se présente lorsque :

- deux axes d'articulations prismatiques se retrouvent parallèles ;
- deux axes d'articulations rotoïdes se retrouvent confondues.



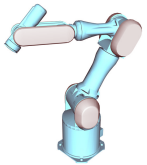
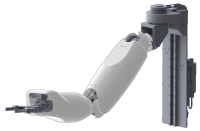
Perte d'une mobilité dans cette configuration de poignet :

- Indice de mobilité de la chaîne cinématique : $N_{\text{mob}} = 3$;
- Nombre de degrés de l'organe terminal : 2.

Remarque :

- Méthode analytique permettant de déterminer le nombre de degrés de liberté de l'espace opérationnel d'un mécanisme, ainsi que les configurations singulières, donnée dans la suite du cours.

Quelques cas de robots dits *légers* (collaboratif) redondants à 7 ddls [7]

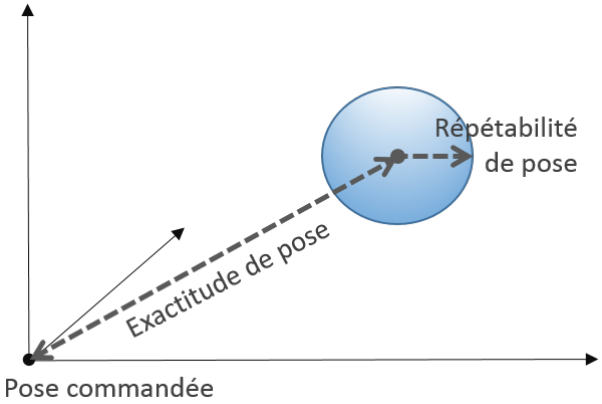
Robot	Spécifications*	Technologie d'actionnement et instrumentation
KUKA-DLR LWR	$m_r = 16$ kg $m_c = 7$ kg $l^p = 0,936$ m	• réducteurs Harmonic drive® • jauges de contraintes intégrées, capteurs de position moteurs et articulaires
Barrett WAM	$m_r^{\text{bras}=5,8}$ kg $m_r^{\text{total}=27}$ kg $m_c = 3$ kg $l^p = 1$ m	• transmissions à câbles sans engrenages • capteurs de position moteurs (et articulaires)
 Mitsubishi PA10-7CE	$m_r = 38$ kg $m_c = 10$ kg $l^a = 0,93$ m	• servo-moteurs AC, réducteurs Harmonic drive® • capteurs de position moteurs
 Bras ASSIST (CEA-LIST)	$m_r = 9,3$ kg $m_c = 3$ kg $l^a = 0,8$ m	• transmissions à câbles, motoréducteurs • capteurs de position moteurs

(*) : m_r masse du robot ; m_c charge utile ; l dimension caractéristique (distance maximale entre articulations l^a ou portée l^p)

Caractéristiques utiles en robotique

Spécification des caractéristiques par la norme ISO 9946 :

- Charge utile charge maximale transportable par le robot ;
- Espace de travail ensemble des situations de l'espace que l'organe terminal du robot peut atteindre (défini par ses limites, imposées essentiellement par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et par la longueur des segments du manipulateur) ;
- Vitesses et accélérations maximales conditionnant les temps de cycle ;
- répétabilité dispersion des situations atteintes lorsqu'on commande successivement la même situation (rayon maximum de la sphère centrée au barycentre du nuages des points atteints et contenant tous les points) ;
- Résolution plus petite modification de la configuration du robot à la fois observable et contrôlable par le système de commande ;
- Exactitude de pose écart entre une pose (une situation) commandée et la moyenne des poses atteintes.



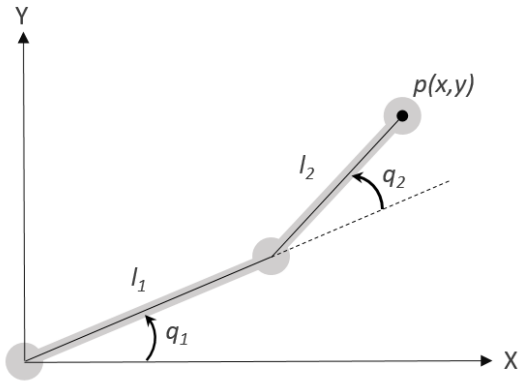
Pour une tâche donnée, d'autres caractéristiques peuvent être prises en compte :

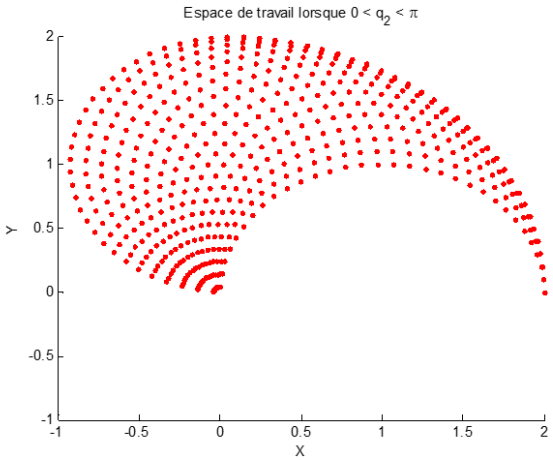
- *techniques* (énergie, commande, . . .) ;
- *commerciales* (coût, maintenance, . . .).

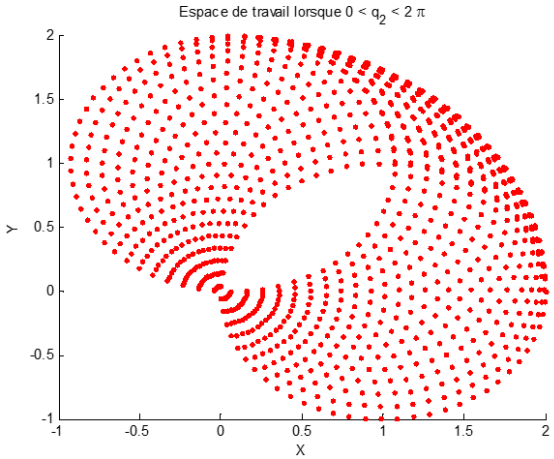
Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

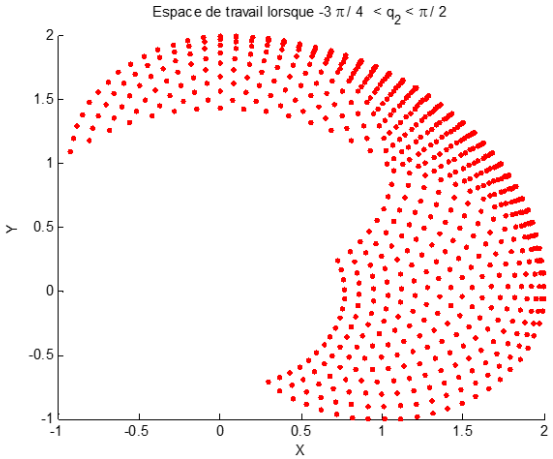
Exemple n°3 : mécanisme planaire à deux corps

- Élongation maximale $L = l_1 + l_2$
- Limites articulaires : $q_{1_{\min}} \leq q_1 \leq q_{1_{\max}}$ et $q_{2_{\min}} \leq q_2 \leq q_{2_{\max}}$
- Recherche de l'espace de travail couvert selon le domaine de variation de q_2







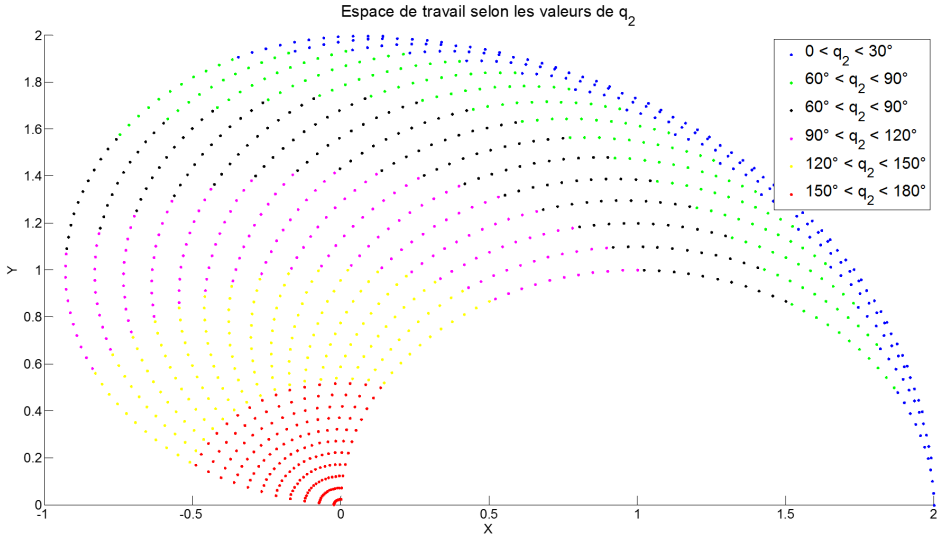


Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Exemple n°3 : mécanisme planaire à deux corps

- Calcul de l'aire du domaine de travail parcouru par $p(x, y)$
- Recherche du ratio optimal des longueurs $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$
- Recherche de l'angle articulaire q_2 optimal pour le taux de variation de l'espace de travail

Exemple n°3



$q_{2_{min}} \leq q_2 \leq q_{2_{max}}$	Aire
$0^\circ < q_2 < 30^\circ$	0,21
$30^\circ < q_2 < 60^\circ$	0,58
$60^\circ < q_2 < 90^\circ$	0,79
$90^\circ < q_2 < 120^\circ$	0,79
$120^\circ < q_2 < 150^\circ$	0,58
$150^\circ < q_2 < 180^\circ$	0,21

Exemple de données techniques fournies par un constructeur de robot

Data sheet (cas du robot *IRB 120* de la société ABB®)

Spécifications			
Versions	**Rayon d'action**	**Capacité de charge**	**Capacité de charge sur le bras**
IRB 120-3/0.6	580 mm	3 kg (4kg)*	0,3 kg

Caractéristiques	
Signaux intégrés	10 signaux au poignet
Air comprimé intégré	4 arrivées sur le poignet (5 bars)
Répétabilité de positionnement	0,01 mm
Montage du robot	Tout angle
Niveau de protection	IP30
Baies de commande	IRC5 Compacte / IRC5 version standard ou version intégrable

Mouvements		
Mouvements axes	**Zone de travail**	**Vitesse maximum**
Axe 1 Rotation	+165° à -165°	250 °/s
Axe 2 Bras	+110° à -110°	250 °/s
Axe 3 Bras	+70° à - 90°	250 °/s
Axe 4 Poignet	+160° à -160°	320 °/s
Axe 5 Inclinaison	+120° à -120°	320 °/s
Axe 6 Rotation	+400° à -400°	420 °/s

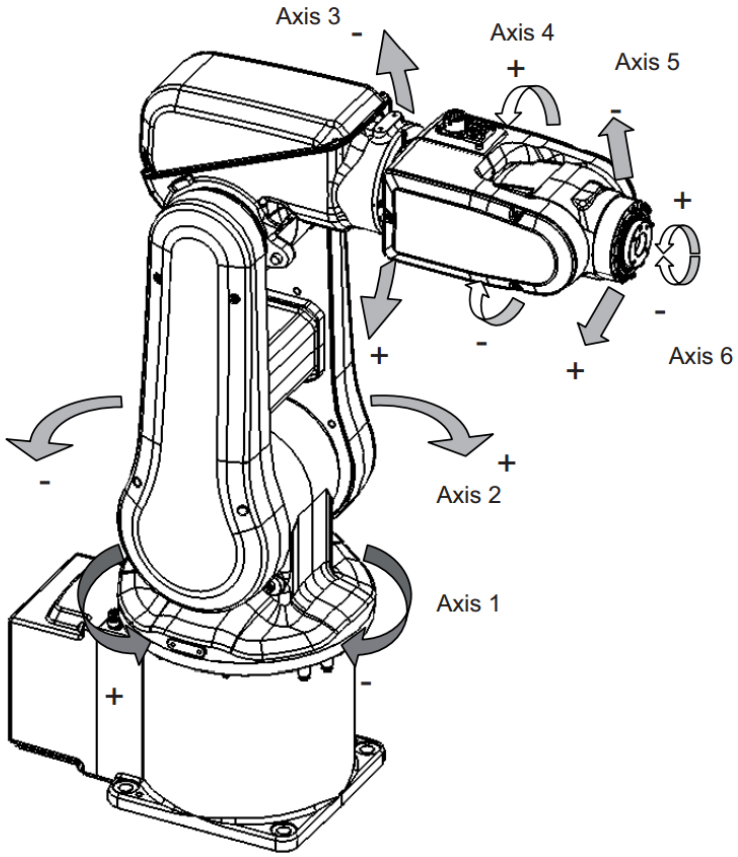
Performances	
Cycle de picking 1 kg	
25 x 300 x 25 mm	0,58 s
Vitesse maxi. CDO	6,2 m/s
Accélération maxi. CDO	28 m/s²
Durée d'accélération 0-1 m/s	0,07 s

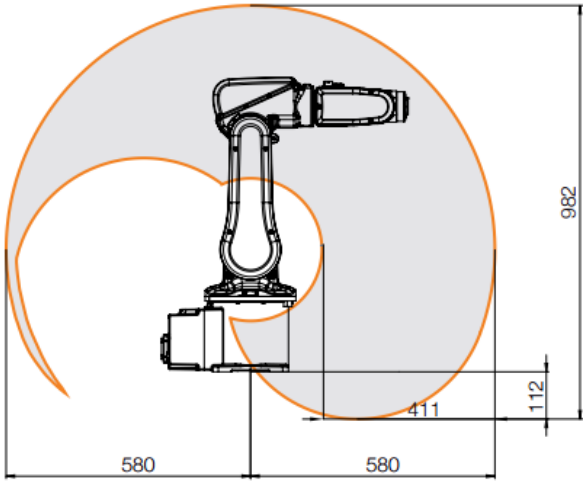
Raccordements électriques	
Tension d'alimentation	200-600 V, 50/60 Hz
Puissance nominale	
Transformateur	3,0 kVA
Consommation	0,25 kW

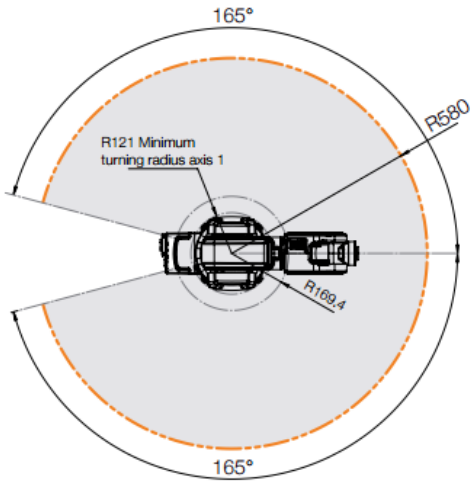
Dimensions et poids	
Dimensions embase robot	180 x 180 mm
Hauteur robot	700 mm
Masse	25 kg

Exemple de données techniques fournies par un constructeur de robot

Espace de travail (cas du robot *IRB 120* de la société ABB®)

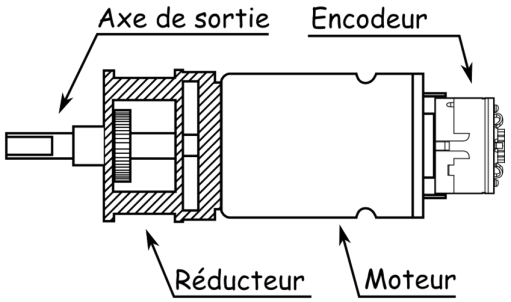


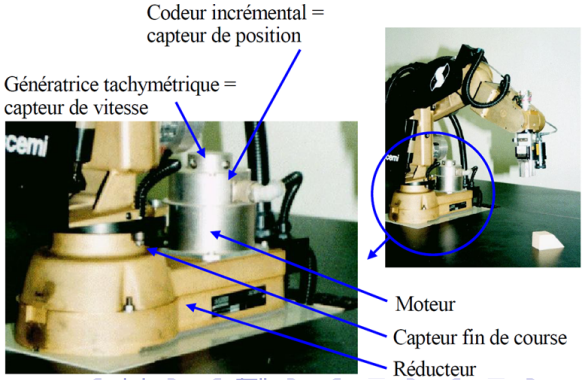




Instrumentation en robotique et périrobotique

- Actionneurs
  - Electriques (Moteur à courant continu, brushless,. . .) ;
  - Autres (pneumatique, hydraulique,. . .).
- Capteurs
  - Proprioceptifs (codeurs incrémentaux ou tachymètres articulaires) ;
  - Extéroceptifs (force, vision, . . .).
- Unité de contrôle
  - Variateurs (amplificateurs de puissance, asservissement de couple – potentiellement vitesse et position –, sécurités bas-niveau) ;
  - Contrôleur (asservissement haut-niveau avec contraintes temps-réel, plannification de tâches, intelligence artificielle) ;
  - IHM (console, joystick, . . .).





Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Utilité des repères en robotique

A chaque corps du robot et à tout élément du poste de travail est associé un ou plusieurs repères Cartésiens pour définir sa position et son orientation.

- Notion de transformation de repères fondamentale en robotique pour :
  - exprimer les situations des différents corps du robot les uns par rapport aux autres ;
  - spécifier les situations que doit prendre le repère associé à l'organe terminal du robot pour réaliser une tâche donnée ainsi que les vitesses correspondantes ;
  - décrire et contrôler les efforts mis en jeu lorsque le robot interagit avec son environnement ;
  - intégrer à la commande les informations sensorielles issues de capteurs ayant chacun son système de référence propre.
- Configuration du robot :
  - définie par la position relative des référentiels associés à chacun des corps rigides ;
  - dépendante de la géométrie des liens et des variables d'articulations uniquement.

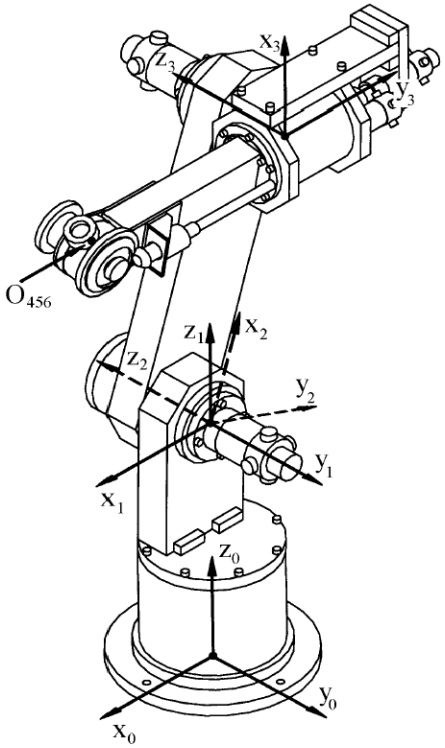


FIGURE: Référentiels associés aux trois premiers liens d'un robot à 6 ddl.

Transformation de corps rigide

Définition

Une application $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ transformant les coordonnées des points du solide de leur position initiale vers leur position finale est une transformation de corps rigide si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Préservation des longueurs : $\|g(a) - g(b)\| = \|a - b\|$ pour tout point $a, b \in \mathbb{R}^3$
2. Préservation du produit vectoriel : $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$ pour tout vecteur $v, w \in \mathbb{R}^3$ (où $g_*(v) = g(a) - g(b)$ si v est le vecteur liant a à b)

- Une transformation de corps rigide est le résultat d'un mouvement amenant un solide d'une situation initiale à une situation finale, qui conserve les distances et les orientations.
  - Hypothèse de corps rigide : pour toute paire de particules $a, b \in \mathbb{R}^3$, $\|a(t) - b(t)\| = \|a(0) - b(0)\| = C^{ste}$ quelque soit le mouvement du corps et les forces agissant sur celui-ci.
  - Un repère orthonormé direct reste orthonormé direct par application d'une transformation rigide.

Configuration d'un corps après l'action d'une transformation rigide

- Si un repère orthonormé direct $\mathscr{R}_s$ de base $\mathscr{B}_s = (x_s, y_s, z_s)$ est attaché au solide en un point du corps O_s, la configuration du corps après l'action d'une transformation rigide g est donnée par le repère $\mathscr{R}_d = (O_d, x_d, y_d, z_d)$ formé des vecteurs $g_*(x_s), g_*(y_s), g_*(z_s)$ attaché au point $g(O_s)$.
- Le suivi du mouvement d'un corps rigide est assuré par le suivi d'une particule appartenant au corps et de la rotation du corps autour de ce point.

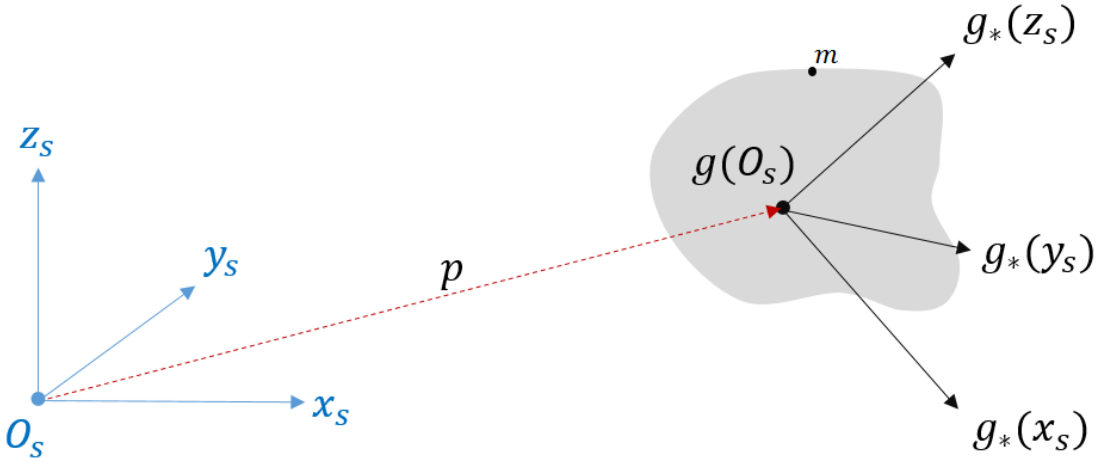


FIGURE: Configurations initiale et finale d'un solide suite à une transformation rigide.

Groupe des rotations

Mouvement de rotation dans $\mathbb{R}^3$

On note $SO(3)$ le groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, i.e. l'ensemble des automorphismes orthogonaux de $\mathbb{R}^3$ de déterminant 1 muni de l'opération de multiplication matricielle. Il définit le groupe des rotations dans $\mathbb{R}^3$:

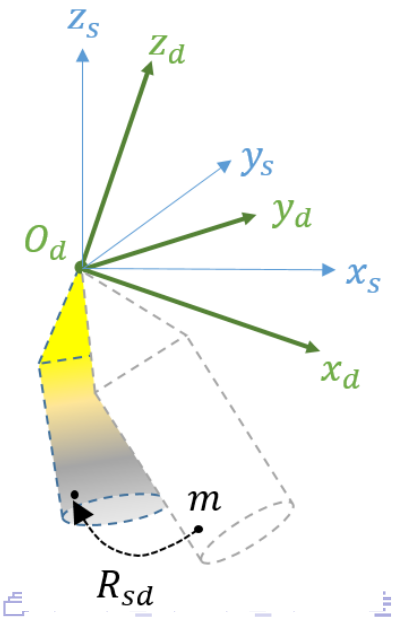
$$SO(3) = \left\{ R \in \mathbb{R}^{3\times 3} : RR^t = R^t R = Id, det(R) = +1 \right\}.$$

Quelques propriétés héritées de $SO(3)$

- La configuration angulaire d'un corps en mouvement libre dans l'espace peut être définie par une unique matrice de rotation $R \in SO(3)$. Sa trajectoire en rotation sur l'intervalle $[0; T]$ est une courbe $R(t) \in SO(3)$ pour $t \in [0; T]$.
- $R_{sd} \in SO(3)$ est la matrice de rotation décrivant la rotation finie permettant de passer du repère $\mathscr{R}_s$ au repère $\mathscr{R}_d$:

$$R_{sd} = \begin{bmatrix} x_d \cdot x_s & y_d \cdot x_s & z_d \cdot x_s \\ x_d \cdot y_s & y_d \cdot y_s & z_d \cdot y_s \\ x_d \cdot z_s & y_d \cdot z_s & z_d \cdot z_s \end{bmatrix}$$

  Les éléments de R_{sd} sont les cosinus directeurs qui représentent les coordonnées des trois vecteurs de la base $\mathscr{B}_d$ exprimées dans $\mathscr{B}_s$.
- Transformation des coordonnées par changement d'un repère : les coordonnées d'un point m sont transformées par la rotation selon : $m_s = R_{sd} m_d$



Quelques propriétés liées aux matrices de rotation

Nombre de paramètres indépendants

Soit l'opérateur de rotation

$$R = [r_1 r_2 r_3] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Expression d'une rotation arbitraire à l'aide de 3 paramètres indépendants :

- Relations d'orthogonalité entre colonnes (propriétés d'orthogonalité de R) imposant 6 contraintes entre les éléments de R :

$$r_i^t r_j = \delta_{ij}$$

  (produit scalaire $r_i^t r_j$ nul pour $i \neq j$ et $r_i^t r_i = 1$)
- Seuls 3 paramètres indépendants pour paramètrer R :

$$R = R(\alpha, \beta, \gamma)$$

Différents paramétrages possibles pour cette transformation (angles d'*Euler*, angles de roulis/tangage/lacet, quaternions, etc.).

Quelques propriétés liées aux matrices de rotation

Règle de composition des rotations :

- Soient deux rotations successives du repère $\mathscr{R}_{s_0} = (O_{s_0}, x_{s_0}, y_{s_0}, z_{s_0})$:
  - R_1 caractérise la transformation de $\mathscr{R}_{s_0}$ vers $\mathscr{R}_{s_1} = (O_{s_1}, x_{s_1}, y_{s_1}, z_{s_1})$:
  $$x = R_1 x_1$$
  - R_2 caractérise la transformation de $\mathscr{R}_{s_1}$ vers $\mathscr{R}_{s_2} = (O_{s_2}, x_{s_2}, y_{s_2}, z_{s_2})$:
  $$x_1 = R_2 x_2$$
- Transformation R caractérisant la transformation de $\mathscr{R}_{s_0}$ vers $\mathscr{R}_{s_2}$ est donnée par :
$$x = R_1 x_1 = R_1 (R_2 x_2) = (R_1 R_2) x_2$$
- Règle de composition des rotations :
$$x = R x_2 \qquad \text{où} \qquad R = R_1 R_2$$

Cas particulier de rotations consécutives autour d'un même axe

$$R_{u,q_1} R_{u,q_2} = R_{u,(q_1+q_2)}$$

Transformation inverse

- $R_{u,q}^{-1} = R_{u,q}^{t}$ (héritée de la structure de groupe de $SO(3)$)
- $R_{u,q}^{-1} = R_{u,-q} = R_{-u,q}$

Quelques propriétés liées aux matrices de rotation

Caractère non-commutatif des rotations

$$R_{u,q_1} R_{v,q_2} \neq R_{v,q_2} R_{u,q_1}$$

Exemple

- Soit un corps soumis à deux rotations de $+\frac{\pi}{2}$, telles que :

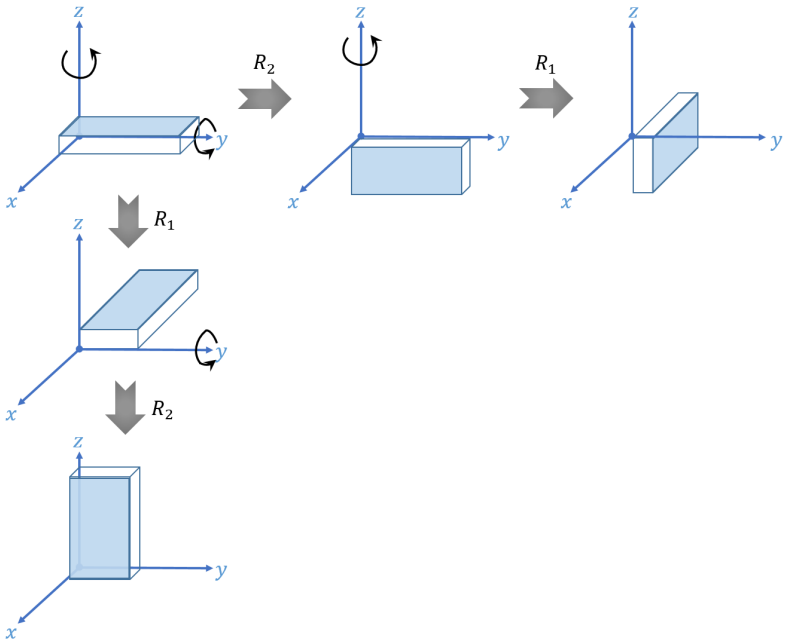
$$R_1 = R_{z,\frac{\pi}{2}}$$

$$R_2 = R_{y,\frac{\pi}{2}}$$

- Le produit matriciel étant non-commutatif :

$$R_1 R_2 \neq R_2 R_1$$

inverser l'ordre des rotations conduit à une géométrie finale différente

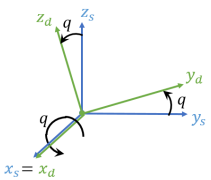


Matrice de rotation : cas particulier simple

Opérateur de rotation plane autour des axes principaux

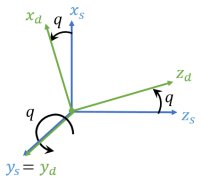
- Rotation d'un angle q autour de l'axe x_s :

$$R_{x,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,(q) & -sin\,(q) \\ 0 & sin\,(q) & cos\,(q) \end{bmatrix}$$



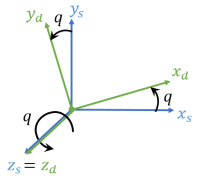
- Rotation d'un angle q autour de l'axe y_s :

$$R_{y,q} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & 0 & sin\,(q) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\,(q) & 0 & cos\,(q) \end{bmatrix}$$



- Rotation d'un angle q autour de l'axe z_s :

$$R_{z,q} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & -sin\,(q) & 0 \\ sin\,(q) & cos\,(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Matrice de rotation : cas général

Si le vecteur unitaire n qui porte l'axe de rotation est quelconque par rapport à la base orthonormée directe $\mathscr{B}_s$, qui sert à exprimer les composantes, le raisonnement est moins direct.

Formule de *Rodrigues*

Cette formule décrit n'importe quelle rotation finie comme une rotation q unique autour d'un axe arbitraire porté par le vecteur unitaire n. L'expression vectorielle de l'image v d'un vecteur u quelconque par la rotation $R_{n,q}$ est unique et vaut :

$$v = cos(q)u + (1 - cos(q))\,(u \cdot n)\,n + sin(q)\,(n \times u)$$

On peut présenter le même résultat sous la forme matricielle équivalente suivante :

$$R_{n,q} = cos(q)I_{3\times 3} + (1 - cos(q))\,nn^t + sin(q)\widehat{n}$$

où $\widehat{n}$ désigne la matrice antisymétrique du préproduit vectoriel définie par $n \times u = \widehat{n}u$ où :

$$\widehat{n} = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix}$$

En développant l'expression de $R_{n,q}$:

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} n_x^2\,(1 - cos(q)) + cos(q) & n_x n_y\,(1 - cos(q)) - n_z sin(q) & n_x n_z\,(1 - cos(q)) + n_y sin(q) \\ n_x n_y\,(1 - cos(q)) + n_z sin(q) & n_y^2\,(1 - cos(q)) + cos(q) & n_y n_z\,(1 - cos(q)) - n_x sin(q) \\ n_x n_z\,(1 - cos(q)) - n_y sin(q) & n_y n_z\,(1 - cos(q)) + n_x sin(q) & n_z^2\,(1 - cos(q)) + cos(q) \end{bmatrix}$$

Démonstration

Paramétrisation par les angles d'*Euler*

Système de 3 angles indépendants pour caractériser R

- Transformation de (O, x, y, z) vers (O, X, Y, Z) exprimée comme une suite de 3 rotations élémentaires (chaque nouvelle rotation effectuée par rapport à un repère ayant tourné) :
  - rotation d'angle α autour de z :

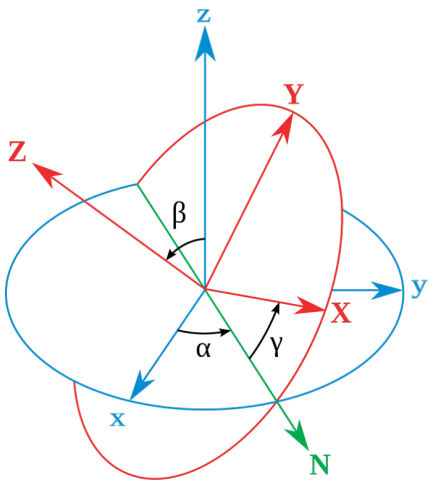
$$R_{z,\alpha} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - rotation d'angle β autour de N :

$$R_{N,\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta) & -sin(\beta) \\ 0 & sin(\beta) & cos(\beta) \end{bmatrix}$$

  - rotation d'angle γ autour de Z :

$$R_{Z,\gamma} = \begin{bmatrix} cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- α (angle de précession), β (nutation) et γ (rotation propre)
- Transformation de repère résultant :

$$R = R_{z,\alpha} R_{N,\beta} R_{Z,\gamma}$$

Paramétrisation par les angles d'*Euler*

- Expression explicite de l'opérateur rotation (en notation contractée [1])

$$R = \begin{bmatrix} C\alpha C\gamma - S\alpha C\beta S\gamma & -C\alpha S\gamma - S\alpha C\beta C\gamma & S\alpha S\beta \\ S\alpha C\gamma + C\alpha C\beta S\gamma & -S\alpha S\gamma + C\alpha C\beta C\gamma & -C\alpha S\beta \\ S\beta S\gamma & S\beta C\gamma & C\beta \end{bmatrix}$$

- Inversion cinématique :
  - Relations d'inversion dans le cas général :
    1. Relation sur l'angle de rotation propre :

$$\gamma = arctg\left(\frac{S\gamma}{C\gamma}\right) = arctg\left(\frac{r_{31}}{r_{32}}\right) = atan2\left(r_{31}, r_{32}\right)$$

    2. Relation sur l'angle de nutation :

$$\beta = atan2\left(r_{31}S\gamma + r_{32}C\gamma, r_{33}\right)$$

    3. Relation sur l'angle de precession :

$$\alpha = atan2\left(r_{21}C\gamma - r_{22}S\gamma, r_{11}C\gamma - r_{12}S\gamma\right)$$

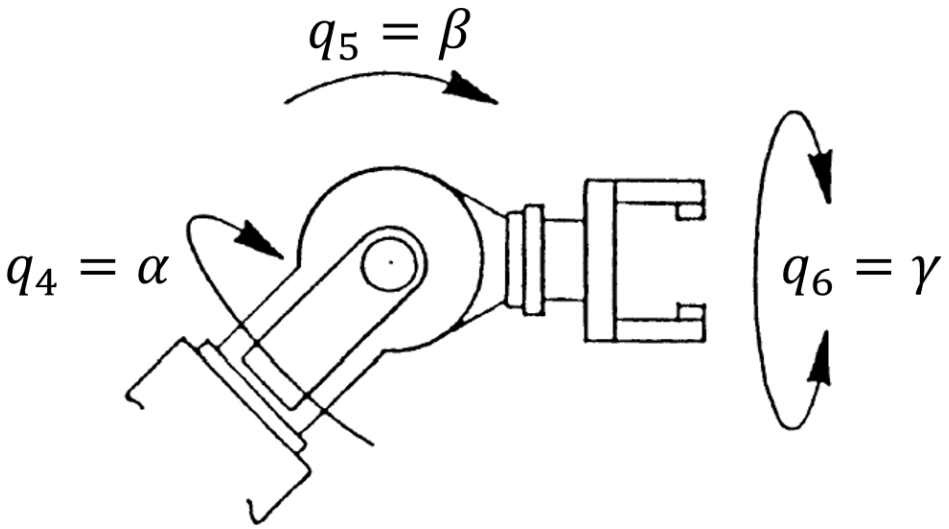
  - Existence de configurations singulières pour $\beta = k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$:
    - cas physique où les axes z et Z sont confondus
    - plus de distinctions possibles entre les angles α et γ, par exemple si $\beta = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{N})$:

$$R = R_{z,\alpha+\gamma} = \begin{bmatrix} C\alpha\gamma & -S\alpha\gamma & 0 \\ S\alpha\gamma & C\alpha\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. En robotique, on utilise souvent les notations C et S pour désigner $cos(\cdot)$ et $sin(\cdot)$

Paramétrisation par les angles d'*Euler*

- Utilité des angles d'*Euler* pour la configuration du poignet : correspondance avec les variables articulaires de la structure



- Garantie de l'unicité de représentation de l'orientation en imposant :

$$\begin{cases} -\pi \leq \alpha < \pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq \beta < \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leq \gamma < \pi \end{cases}$$

Fonction $atan2(u, v)$

Fonction logicielle retournant la valeur de l'arc tangente de $\frac{u}{v}$ et utilisant les signes de u et v pour déterminer le quadrant de la solution

- Garantie de l'unicité en retournant une valeur dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$:

$$-\pi < atan2\,(u, v) \leq \pi$$

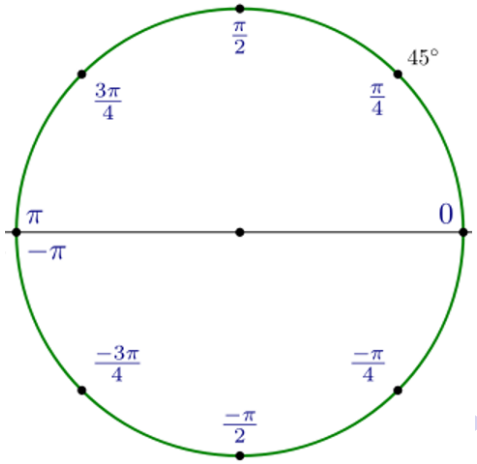
- Définition :

$$atan2\,(u, v) = \begin{cases} tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) & si \quad v > 0 \\ tan^{-1}\left(\frac{u}{v}\right) + \pi sign\,(u) & si \quad v < 0 \\ \frac{\pi}{2} sign\,(u) & si \quad v = 0 \end{cases}$$

- Fonction $atan2(u, v)$ disponible en FORTRAN ou MATLAB® par exemple

Angle en *rad* entre la partie positive de l'axe x d'un plan et le point de coordonnées (v, u) dans ce plan :

$$atan2\,(1, 0) = \frac{\pi}{2}$$
$$atan2\,(0, -1) = \pi$$
$$atan2\,(-1, -1) = -\frac{3\pi}{4}$$
$$atan2\,(0, 1) = 0$$



Axe et angle de rotation équivalents à une rotation donnée

Inversion cinématique

Soit la matrice de rotation $R \in SO(3)$ suivante :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

L'identification des termes n et q $(0 \leq q \leq \pi)$ tels que $R = R_{n,q}$ est donnée par :

$$q = atan2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(r_{32}-r_{23})^2+(r_{13}-r_{31})^2+(r_{21}-r_{12})^2}, \frac{1}{2}(r_{11}+r_{22}+r_{33}-1)\right)$$

et

$$n = \begin{bmatrix} \frac{r_{32}-r_{23}}{2Sq} & \frac{r_{13}-r_{31}}{2Sq} & \frac{r_{21}-r_{12}}{2Sq} \end{bmatrix}^t \quad \text{si } Sq \neq 0$$

Démonstration

Exemple : Supposons que le repère $\mathscr{R}_n$ lié à l'organe terminal d'un robot soit dans une situation, par rapport au repère de référence, définie par la transformation $R_{x,-45^\circ}$. Trouver l'axe n et l'angle q de rotation permettant d'amener le repère $\mathscr{R}_n$ dans la situation désirée suivante : $R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$.

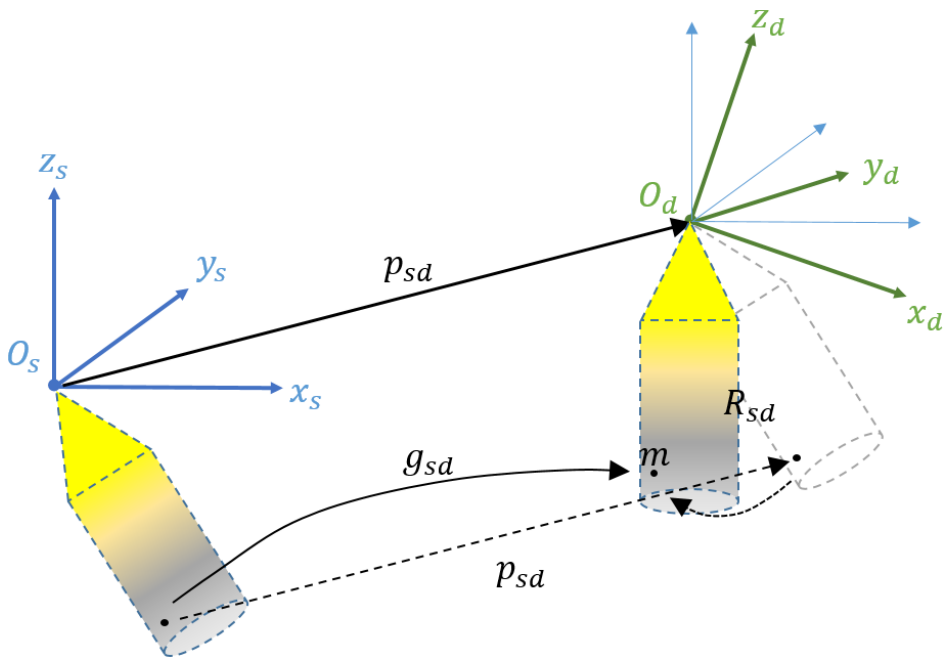
Exemple

Configuration d'un corps après l'action d'une transformation rigide [19]

Configuration d'un corps rigide dans $\mathbb{R}^3$

Soient $p_{sd} \in \mathbb{R}^3$ le vecteur position liant l'origine du repère $\mathscr{R}_s$ à l'origine du repère $\mathscr{R}_d$ ($p_{sd} = O_s O_d$) et $R_{sd} \in SO(3)$ l'orientation du repère $\mathscr{R}_d$ relativement à $\mathscr{R}_s$.
Une configuration du système consiste en la paire (p_{sd}, R_{sd}), et l'ensemble des configurations spatiales du système est paramétré par le *groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien* $SE(3)$:

$$SE(3) = \{(p, R) : p \in \mathbb{R}^3, R \in SO(3)\} = \mathbb{R}^3 \times SO(3).$$



Transformation des coordonnées par changement d'un repère

Un élément $(p, R) \in SE(3)$ sert aussi bien à spécifier la configuration d'un corps rigide dans l'espace qu'à rendre compte du changement de coordonnées d'un point d'un repère à un autre.

- Soient m_s et $m_d \in \mathbb{R}^3$ les coordonnées d'un point m relativement aux repères $\mathscr{R}_s$ et $\mathscr{R}_d$ respectivement. Étant donné m_d, la transformation de coordonnées donnent :

$$m_s = p_{sd} + R_{sd} m_d$$

où

  - $R_{sd} \in SO(3)$ est la matrice de rotation décrivant la rotation finie permettant de passer du repère $\mathscr{R}_s$ au repère $\mathscr{R}_d$:

$$R_{sd} = \begin{bmatrix} x_d \cdot x_s & y_d \cdot x_s & z_d \cdot x_s \\ x_d \cdot y_s & y_d \cdot y_s & z_d \cdot y_s \\ x_d \cdot z_s & y_d \cdot z_s & z_d \cdot z_s \end{bmatrix}$$

    Les éléments de R_{sd} sont les cosinus directeurs qui représentent les coordonnées des trois vecteurs de la base $\mathscr{B}_d$ exprimées dans $\mathscr{B}_s$.
  - $p_{sd} \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur de translation selon :

$$p_{sd} = \begin{bmatrix} O_s O_d \cdot x_s \\ O_s O_d \cdot y_s \\ O_s O_d \cdot z_s \end{bmatrix}$$

- Par abus de notation, on note $g(m)$ l'action d'une transformation rigide sur un point :

$$\boxed{g(m) = p + Rm},$$

telle que $m_s = g_{sd}(m_d)$.

Notion de transformation homogène [21]

Dans le cas le plus général, la transformation $m_s = g_{sd}(m_d)$ est une transformation affine. Pour représenter la transformation rigide sous une forme linéaire, on introduit les coordonnées homogènes dans $\mathbb{R}^4$ du point m et du vecteur v (vu comme une différence de deux points).

- Soit m un point de coordonnées cartésiennes m_x, m_y, m_z. On représente les coordonnées homogènes du point m par le vecteur :

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} m \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Ainsi, l'origine a pour représentation $\overline{O} = [0, 0, 0, 1]^t$.

- Soit v_x, v_y, v_z les coordonnées cartésiennes du vecteur v, en coordonnées homogènes on écrit :

$$\overline{v} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarques : la présence du 0 ou 1 (respectivement à la 4ième composante des vecteurs ou points) permet de distinguer les vecteurs des points, et respecte bien certaines règles de syntaxe :

1. Les sommes et différences de vecteurs restent des vecteurs ;
2. La somme d'un vecteur et d'un point est un point ;
3. La différence entre deux points est un vecteur ;
4. La somme de deux points n'a pas de sens !

Matrice de transformation homogène

Définition

La matrice $\overline{g}_{sd}$ de taille 4×4 est appelée *représentation homogène* de la transformation $g = (r, R) \in SE(3)$:

$$\overline{g}_{sd} = \begin{bmatrix} R_{sd} & p_{sd} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

où

- R_{sd} est la matrice de rotation de taille 3×3 de passage du repère $\mathscr{R}_s = (O_s x_s y_s z_s)$ par rapport à $\mathscr{R}_d = (O_d x_d y_d z_d)$;
- p_{sd} est le vecteur de translation de O_s à O_d.

Intérêts des transformations en coordonnées homogènes :

- Unification des translations et rotations de corps rigides en une multiplication matricielle unique ;
  - Transformation de coordonnées dans l'espace : une addition vectorielle et une multiplication matricielle

$$m_s = p_{sd} + R_{sd} m_d$$

  - Transformation en coordonnées homogènes : une seule multiplication matricielle

$$\overline{m}_s = \overline{g}_{sd} \overline{m}_d \qquad \text{soit} \qquad \begin{bmatrix} m_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sd} & p_{sd} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_d \\ 1 \end{bmatrix}$$

où $\overline{g}_{sd}$ est la matrice de transformation homogène associée à (p, R).

Propriétés de $SE(3)$

Éléments de $SE(3)$ en tant que représentation de mouvements rigides

Tout élément $g \in SE(3)$ est une transformation de corps rigide :

1. Préservation de la distance entre les points : $\|g(a) - g(b)\| = \|a - b\|$ pour tout point $a, b \in \mathbb{R}^3$
2. Préservation de l'orientation entre les vecteurs : $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$ pour tout vecteur $v, w \in \mathbb{R}^3$

Démonstration

Propriétés de $SE(3)$

Éléments de $SE(3)$ en tant que représentation de mouvements rigides

Tout élément $g \in SE(3)$ est une transformation de corps rigide :

1. Préservation de la distance entre les points : $\|g(a) - g(b)\| = \|a - b\|$ pour tout point $a, b \in \mathbb{R}^3$
2. Préservation de l'orientation entre les vecteurs : $g_*(v \times w) = g_*(v) \times g_*(w)$ pour tout vecteur $v, w \in \mathbb{R}^3$

Démonstration

Propriétés héritées de la structure algébrique de groupe pour $SE(3)$

- Règle de composition : soient $g_{bc} \in SE(3)$ (configuration de $\mathscr{R}_c$ par rapport à $\mathscr{R}_b$) et $g_{ab} \in SE(3)$ (configuration de $\mathscr{R}_b$ par rapport à $\mathscr{R}_a$). La configuration de $\mathscr{R}_c$ par rapport à $\mathscr{R}_a$ vaut :

$$\overline{g}_{ac} = \overline{g}_{ab}\overline{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

- Inverse de la transformation : $\overline{g}^{-1} = \left(-R^t p, R^t\right)$

$$\overline{g}_{ab}^{-1} = \overline{g}_{ba} = \begin{bmatrix} R_{ab}^t & -R_{ab}^t p_{ab} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \in SE(3)$$

Démonstration

Matrice de transformation de repères

Matrice de passage de $\mathscr{R}_i$ à $\mathscr{R}_j$:
Soit une transformation quelconque, de translation et/ou rotation, au repère $\mathscr{R}_i$, l'amenant sur le repère $\mathscr{R}_j$. Cette transformation est alors définie par la matrice de transformation homogène $\overline{g}_{ij}$ de dimension 4×4, définie par :

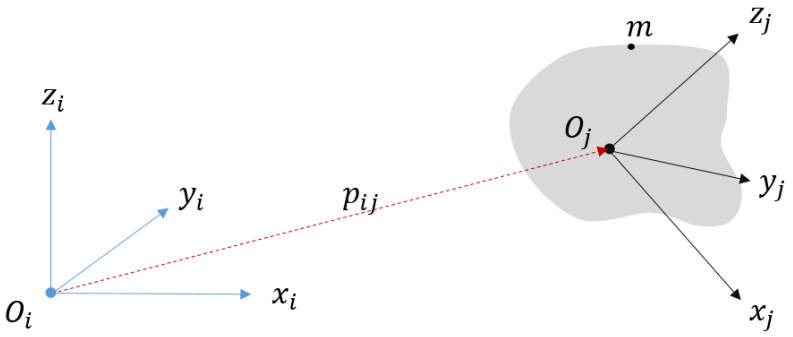
$$\overline{g}_{ij} = \left[\overline{x}_{ij}\overline{y}_{ij}\overline{z}_{ij}\overline{p}_{ij}\right] = \begin{bmatrix} R_{ij} & p_{ij} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_x & y_x & z_x & p_x \\ x_y & y_y & z_y & p_y \\ x_z & y_z & z_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où

- $\overline{x}_{ij}, \overline{y}_{ij}, \overline{z}_{ij} \in \mathbb{R}^3$ désigne respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes x_j, y_j, z_j du repère $\mathscr{R}_j$ exprimés dans le repère $\mathscr{R}_i$,
- $\overline{p}_{ij}$ désigne le point d'origine du repère $\mathscr{R}_j$ exprimée dans le repère $\mathscr{R}_i$.

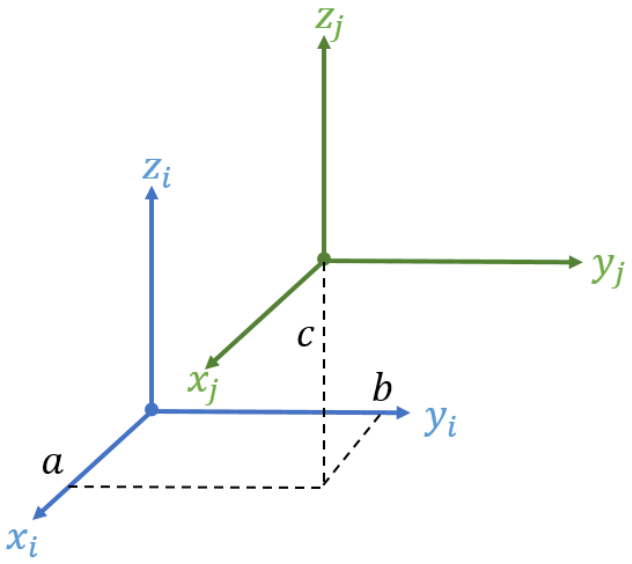
Remarques :

- On dit aussi que la matrice homogène $\overline{g}_{ij}$ définit le repère $\mathscr{R}_j$ dans le repère $\mathscr{R}_i$.
- Une paramétrisation d'une transformation spatiale $g_{ij} \in SE(3)$ fait intervenir 6 paramètres indépendants (3 pour R_{ij} et 3 pour p_{ij}) et seulement 3 pour une transformation planaire.
- Dans certains ouvrages [11, 21], la matrice homogène $\overline{g}_{ij}$ est désignée par T_{ij}, voire ${}^{i}T_{j}$.



Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

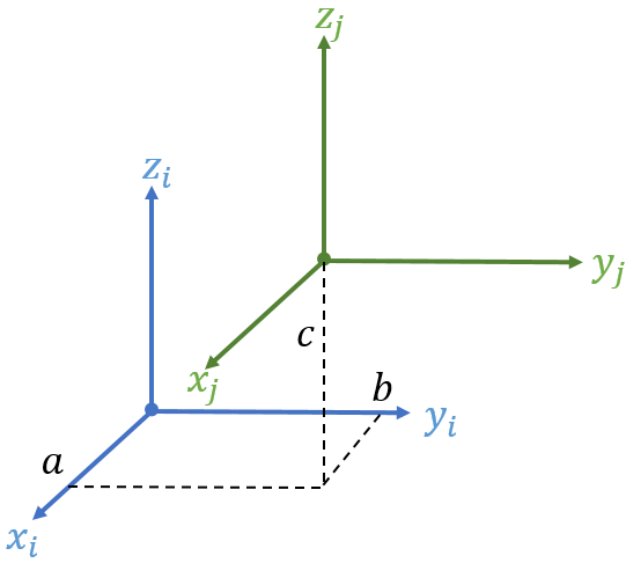
Translation pure



▸ $\overline{g}_{ij} = Trans\,(a, b, c)$: exemple

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

Translation pure



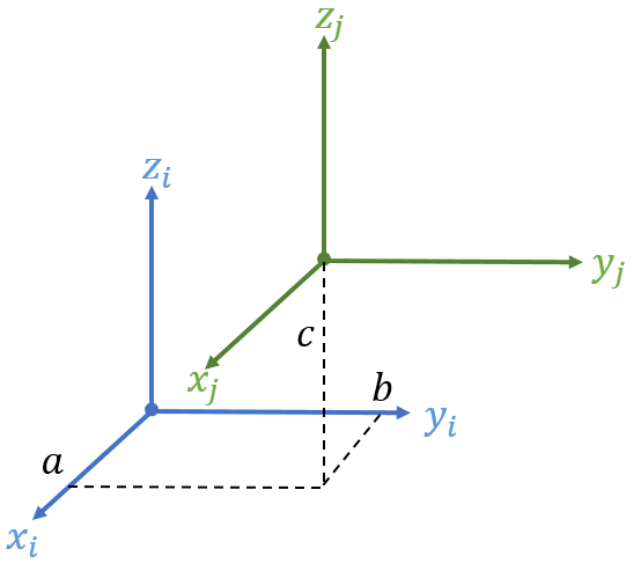
▸ $\overline{g}_{ij} = Trans\,(a, b, c)$: exemple

Propriétés :

1. Décomposition de $Trans\,(a, b, c)$:
   $Trans\,(a, b, c) = Trans\,(x, a)\ Trans\,(y, b)\ Trans\,(z, c)$,
   l'ordre des multiplications étant quelconque ;
2. $Trans^{-1}\,(u, d) = Trans\,(-u, d) = Trans\,(u, -d)$
   avec $Trans\,(u, d)$ la translation d'une valeur d le long de l'axe porté par u.

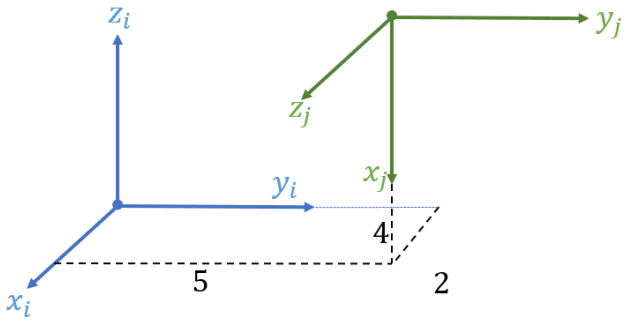
Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

Translation pure



▸ $\overline{g}_{ij} = Trans\,(a, b, c)$: exemple

Combinaison rotation/translation



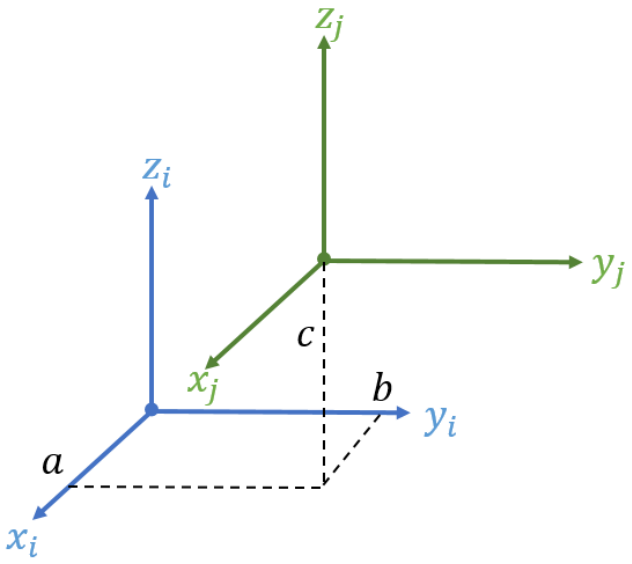
▸ $\overline{g}_{ij}$ et $\overline{g}_{ji}$: exemple

Propriétés :

1. Décomposition de $Trans\,(a, b, c)$:
   $Trans\,(a, b, c) = Trans\,(x, a)\ Trans\,(y, b)\ Trans\,(z, c)$,
   l'ordre des multiplications étant quelconque ;
2. $Trans^{-1}\,(u, d) = Trans\,(-u, d) = Trans\,(u, -d)$
   avec $Trans\,(u, d)$ la translation d'une valeur d le long de l'axe porté par u.

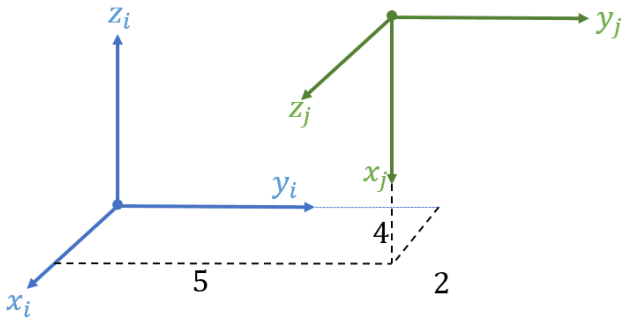
Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

Translation pure



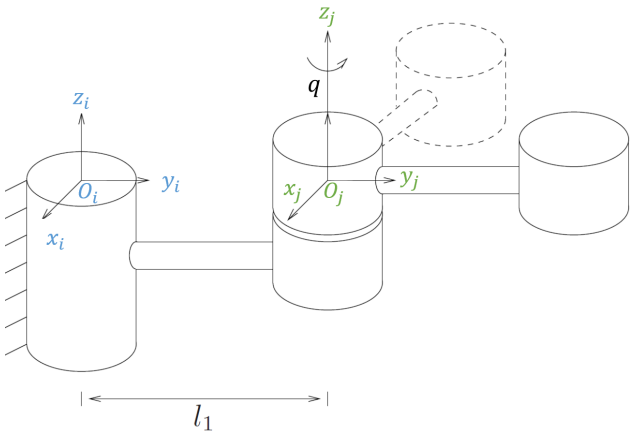
▸ $\overline{g}_{ij} = Trans\,(a, b, c)$: exemple

Combinaison rotation/translation



▸ $\overline{g}_{ij}$ et $\overline{g}_{ji}$: exemple

Rotation autour d'un axe fixe excentré



▸ $\overline{g}_{ij}$ et $\overline{g}_{ji}$: exemple

Propriétés :

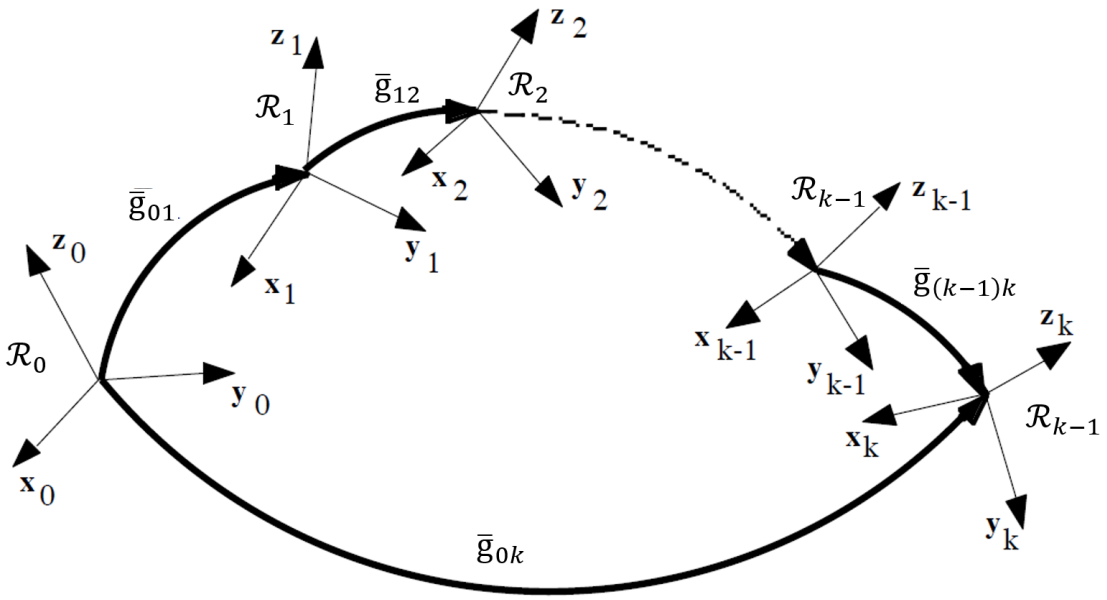
1. Décomposition de $Trans\,(a, b, c)$:
   $Trans\,(a, b, c) = Trans\,(x, a)\ Trans\,(y, b)\ Trans\,(z, c)$,
   l'ordre des multiplications étant quelconque ;
2. $Trans^{-1}\,(u, d) = Trans\,(-u, d) = Trans\,(u, -d)$
   avec $Trans\,(u, d)$ la translation d'une valeur d le long de l'axe porté par u.

Propriétés des matrices de transformations homogènes

Transformations successives

Si un repère $\mathscr{R}_0$ subit k transformations consécutives et si la $i^{ème}$ transformation $(i = 1, \ldots, k)$ est définie par rapport au repère courant $\mathscr{R}_{i-1}$, alors la transformation $\overline{g}_{0k}$ peut être déduite de la composition des multiplications à droite de ces transformations :

$$\overline{g}_{0k}(q_1, q_2, \ldots, q_k) = \overline{g}_{01}(q_1)\,\overline{g}_{12}(q_2)\ldots\overline{g}_{(k-1)k}(q_k)$$



Propriétés des transformations homogènes

Produit non-commutatif

Le produit de deux matrices de transformation n'est pas commutatif

$$\overline{g}_1\overline{g}_2 \neq \overline{g}_2\overline{g}_1$$

Transformation consécutive autour du même axe

Le vecteur n étant inchangé par la rotation $R_{n,q}$, on peut multiplier la translation à gauche ou à droite indifféremment :

$$R_{n,q}\,Trans\,(n,d) = Trans\,(n,d)\,R_{n,q}$$

Décomposition de la matrice de transformation

Une matrice de transformation peut se décomposer en deux matrices de transformation, l'une représentant une translation pure, l'autre une rotation pure :

$$\overline{g} = \begin{bmatrix} R & p \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3\times 3} & p \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & 0_{3\times 1} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Modèles de transformation en robotique

Utilité de certains modèles mathématiques pour la conception et la commande de robots :

- Modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot) :
  - Modèles géométriques direct et inverse
    Expression de la situation de l'organe terminal X en fonction de la configuration q du mécanisme et inversement ;
  - Modèles cinématiques direct et inverse
    Expression de la vitesse de l'organe terminal $\dot{X}$ en fonction des vitesses articulaires $\dot{q}$ et inversement ;
- Modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot à partir des efforts exercés par les actionneurs Γ et les positions q, vitesses $\dot{q}$ et accélérations $\ddot{q}$ des articulations.

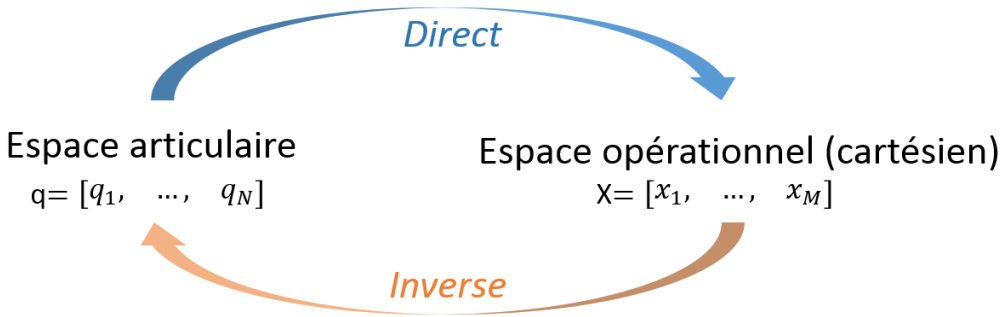
Modèles de transformation en robotique

Utilité de certains modèles mathématiques pour la conception et la commande de robots :

- Modèles de transformation entre l'espace opérationnel (dans lequel est définie la situation de l'organe terminal) et l'espace articulaire (dans lequel est définie la configuration du robot) :
  - Modèles géométriques direct et inverse
    Expression de la situation de l'organe terminal X en fonction de la configuration q du mécanisme et inversement ;
  - Modèles cinématiques direct et inverse
    Expression de la vitesse de l'organe terminal $\dot{X}$ en fonction des vitesses articulaires $\dot{q}$ et inversement ;
- Modèles dynamiques définissant les équations du mouvement du robot à partir des efforts exercés par les actionneurs Γ et les positions q, vitesses $\dot{q}$ et accélérations $\ddot{q}$ des articulations.

Remarque :
Dans le cadre de ce cours d'introduction à la robotique, seul le cas des structures ouvertes simples sera étudié. Par exemple, dans [11] et [19], les cas des structures arborescentes et fermées sont abordés.

Formulation des modèles géométriques



- Cas de la description cinématique directe du manipulateur $X = f(q)$:
  - Expression de la position et l'orientation de l'organe effecteur X en fonction des variables d'articulations q du robot ;
  - Méthodologie :
    1. assignation de repères $\mathscr{R}_i$ à chaque corps $\mathscr{C}_i$ du robot ;
    2. description de leur position relative à l'aide d'un paramétrage (convention suivie dans ce cours : *Denavit-Hartenberg* Modifiée - DHM -, dite de *Khalil-Kleinfinger* [12]) ;
    3. utilisation des matrices de transformations homogènes pour décrire la transformation de passage $\overline{g}_{(i-1)i}$ entre deux corps adjacents $\mathscr{C}_{i-1}$ et $\mathscr{C}_i$;
    4. cinématique directe de la chaîne cinématique complète de $\mathscr{C}_0$ à $\mathscr{C}_n$ obtenue par récurrence.
- Cas de la description cinématique inverse du manipulateur $q = f^{-1}(X)$:
  - Coordonnées articulaires q permettant d'amener l'outil dans une position et orientation déterminées X ;
  - Nature et nombre d'équations soulevant le problème de l'*existence* et de la *multiplicité* de la solution.

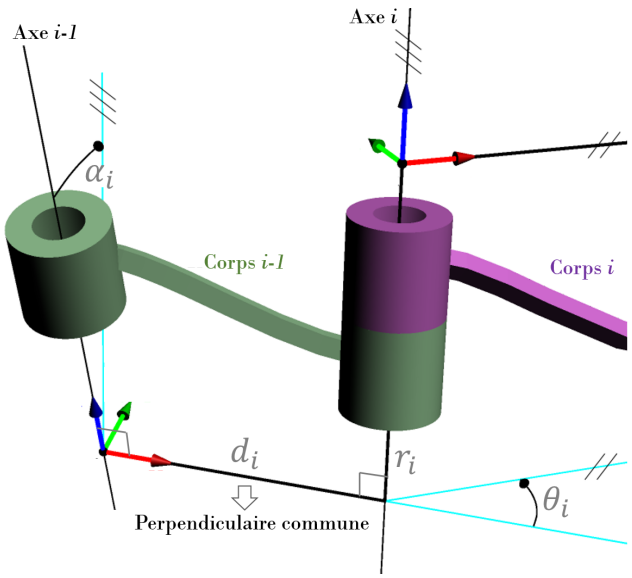
Convention de *Khalil-Kleinfinger*

Corps rigide caractérisé par la position relative de ses axes $i-1$ et i :

- distance d_i (longueur de la perpendiculaire commune aux deux axes) ;
- angle de vrillage α_i (angle de rotation autour de la perpendiculaire commune permettant de rendre les axes parallèles) ;

Position relative de deux corps successifs définie à l'aide de deux paramètres :

- angle θ_i (angle de rotation dont il faut tourner autour de l'axe i pour amener la perpendiculaire commune du corps $i-1$ parallèle à celle du corps i) ;
- distance r_i dont il faut ensuite la translater le long de l'axe i pour l'amener en coïncidence.



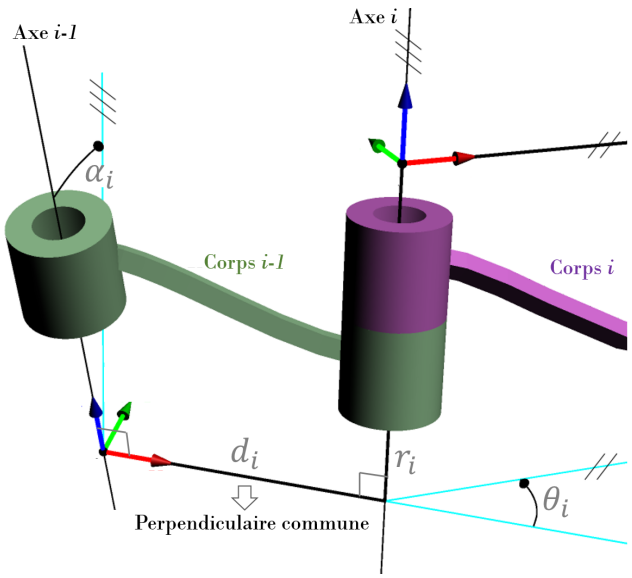
Convention de *Khalil-Kleinfinger*

Corps rigide caractérisé par la position relative de ses axes $i-1$ et i :

- distance d_i (longueur de la perpendiculaire commune aux deux axes) ;
- angle de vrillage α_i (angle de rotation autour de la perpendiculaire commune permettant de rendre les axes parallèles) ;

Position relative de deux corps successifs définie à l'aide de deux paramètres :

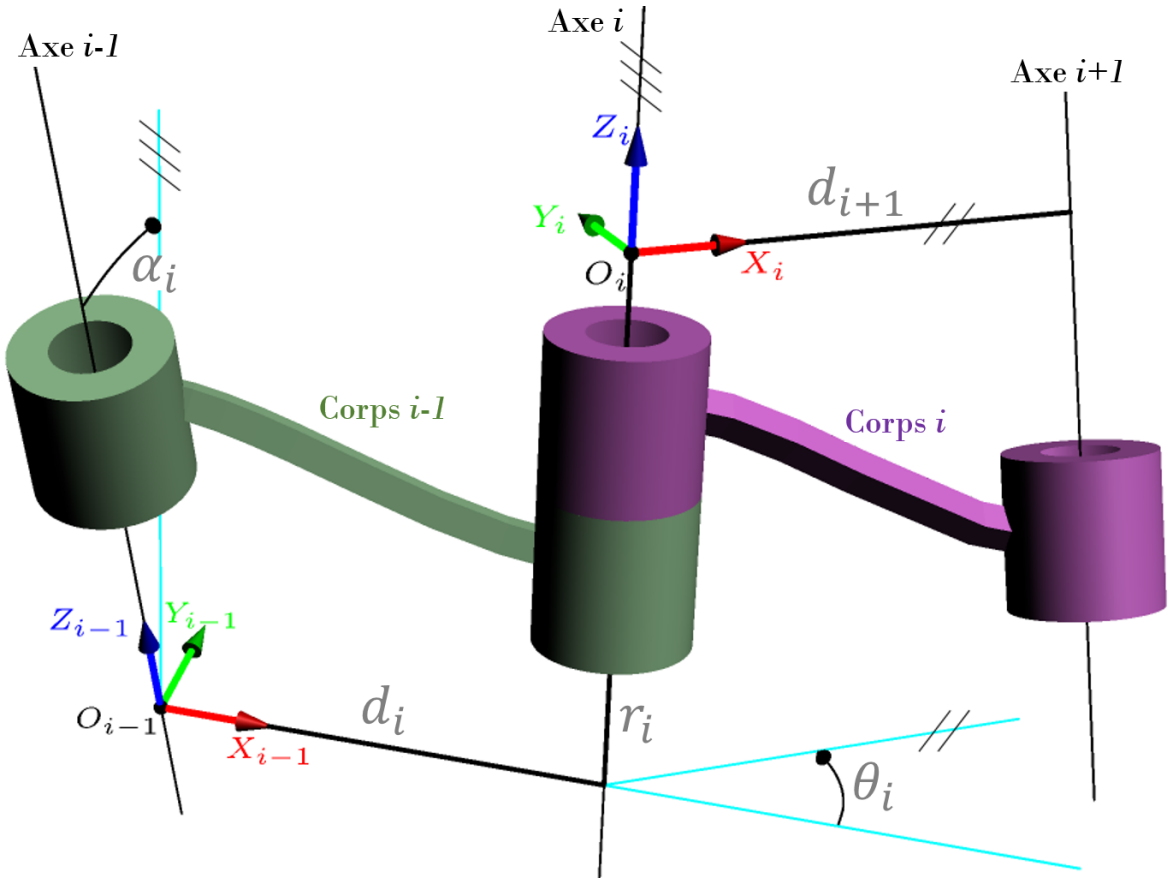
- angle θ_i (angle de rotation dont il faut tourner autour de l'axe i pour amener la perpendiculaire commune du corps $i-1$ parallèle à celle du corps i) ;
- distance r_i dont il faut ensuite la translater le long de l'axe i pour l'amener en coïncidence.



Remarques :

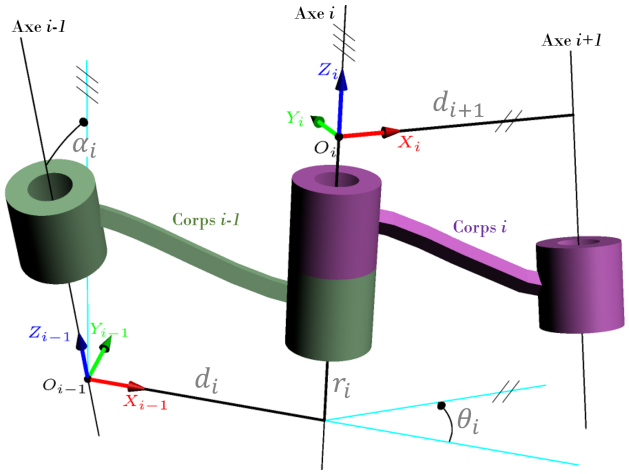
1. θ_i ou r_i : variables d'articulation
   - $q_i = \theta_i$ pour une articulation pivot ;
   - $q_i = r_i$ pour une articulation glissière.
2. $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i)$: 4 paramètres de *Khalil-Kleinfinger* constituant une caractérisation géométrique minimale d'un corps avec le corps suivant.

Convention de *Khalil-Kleinfinger*



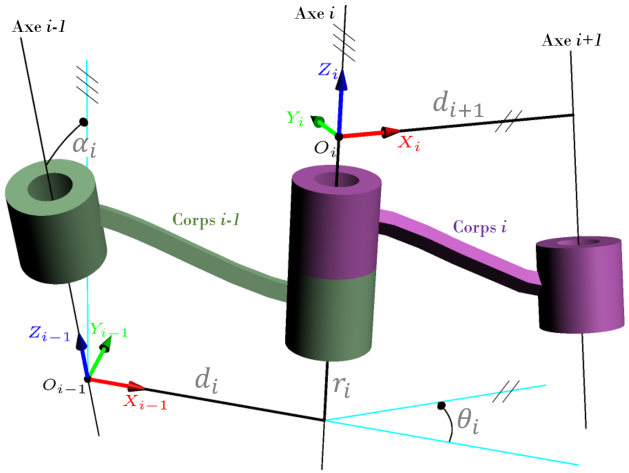
Méthodologie pour le calcul du MGD

1. Assignation du repère orthonormé $\mathscr{R}_i$ à chaque corps $\mathscr{C}_i$:
   - l'axe Z_i est porté par l'axe de la liaison reliant le corps $\mathscr{C}_{i-1}$ au corps $\mathscr{C}_i$;
   - l'axe X_i est porté par la normale commune à Z_i et Z_{i+1} (soit $X_i = Z_i \wedge Z_{i+1}$) ;
   - l'axe Y_i est choisi de manière à former un trièdre direct avec l'axe Z_i et X_i (soit $Y_i = Z_i \wedge X_i$).



Méthodologie pour le calcul du MGD

1. Assignation du repère orthonormé $\mathscr{R}_i$ à chaque corps $\mathscr{C}_i$:
   - l'axe Z_i est porté par l'axe de la liaison reliant le corps $\mathscr{C}_{i-1}$ au corps $\mathscr{C}_i$;
   - l'axe X_i est porté par la normale commune à Z_i et Z_{i+1} (soit $X_i = Z_i \wedge Z_{i+1}$) ;
   - l'axe Y_i est choisi de manière à former un trièdre direct avec l'axe Z_i et X_i (soit $Y_i = Z_i \wedge X_i$).



2. Transformation entre les corps successifs $\mathscr{C}_{i-1}$ et $\mathscr{C}_i$ décrite par les quatre paramètres suivants :
   - α_i : angle autour de l'axe X_{i-1} entre les axes Z_{i-1} et Z_i ;
   - d_i (ou a_i) : distance le long de l'axe X_{i-1} entre les axes Z_{i-1} et Z_i ;
   - r_i : distance le long de l'axe Z_i entre les axes X_{i-1} et X_i ;
   - θ_i : angle autour de l'axe Z_i entre les axes X_{i-1} et X_i.

Méthodologie pour le calcul du MGD

3. Transformation de passage entre deux corps adjacents :
   - Matrice de passage définissant le repère $\mathscr{R}_i$ dans le repère $\mathscr{R}_{i-1}$

$$\begin{aligned}
\overline{g}_{(i-1)i} &= R_{x,\alpha_i}\, Trans\,(x, d_i)\, R_{z,\theta_i}\, Trans\,(z, r_i) \\
&= \begin{bmatrix} cos\,(\theta_i) & -sin\,(\theta_i) & 0 & d_i \\ cos\,(\alpha_i)\, sin\,(\theta_i) & cos\,(\alpha_i)\, cos\,(\theta_i) & -sin\,(\alpha_i) & -r_i sin\,(\alpha_i) \\ sin\,(\alpha_i)\, sin\,(\theta_i) & sin\,(\alpha_i)\, cos\,(\theta_i) & cos\,(\alpha_i) & r_i cos\,(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{(i-1)i} & p_{(i-1)i} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Méthodologie pour le calcul du MGD

3. Transformation de passage entre deux corps adjacents :
   - Matrice de passage définissant le repère $\mathscr{R}_i$ dans le repère $\mathscr{R}_{i-1}$

$$\begin{aligned}\overline{g}_{(i-1)i} &= R_{x,\alpha_i}\, Trans\,(x, d_i)\, R_{z,\theta_i}\, Trans\,(z, r_i)\\ &= \begin{bmatrix} cos\,(\theta_i) & -sin\,(\theta_i) & 0 & d_i \\ cos\,(\alpha_i)\, sin\,(\theta_i) & cos\,(\alpha_i)\, cos\,(\theta_i) & -sin\,(\alpha_i) & -r_i sin\,(\alpha_i) \\ sin\,(\alpha_i)\, sin\,(\theta_i) & sin\,(\alpha_i)\, cos\,(\theta_i) & cos\,(\alpha_i) & r_i cos\,(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} R_{(i-1)i} & p_{(i-1)i} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

   - Matrice de passage inverse définissant le repère $\mathscr{R}_{i-1}$ dans le repère $\mathscr{R}_i$

$$\begin{aligned}\overline{g}^{-1}_{(i-1)i} &= \overline{g}_{i(i-1)}\\ &= Trans\,(z, -r_i)\, R_{z,-\theta_i}\, Trans\,(x, -d_i)\, R_{x,-\alpha_i}\\ &= \begin{bmatrix} R^t_{(i-1)i} & -R^t_{(i-1)i} p_{(i-1)i} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} & & & -d_i cos\,(\theta_i) \\ & R^t_{(i-1)i} & & d_i sin\,(\theta_i) \\ & & & -r_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Méthodologie pour le calcul du MGD

4. MGD de la chaîne cinématique complète :
   Représentation du MGD par la matrice de passage $\overline{g}_{0n}$ dans le cas d'une chaîne ouverte simple

$$X = f(q) \qquad \text{où} \qquad f = \overline{g}_{0N}$$

- Calcul de $\overline{g}_{0n}$ obtenu par récurrence

$$\overline{g}_{0N}(q) = \overline{g}_{01}(q_1) \ldots \overline{g}_{(i-1)i}(q_i) \ldots \overline{g}_{(N-1)N}(q_N)$$

- $q = [q_1 \ldots q_N]^t$ étant le vecteur des variables articulaires ;
- $X = [x_1 \ldots x_M]^t$ étant le vecteur des coordonnées opérationnelles.
  Plusieurs possibilités existent pour la définition du vecteur X : par exemple, paramétrisation par les angles d'*Euler* calculés à partir des cosinus directeurs de R_{0n} : $X = [p^x p^y p^z \alpha\beta\gamma]$ (cas des robots ABB^{TM}).

Recommandations sur le choix des repères :

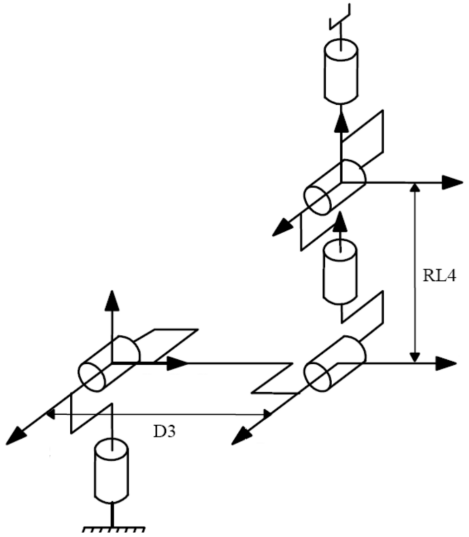
- $\mathscr{R}_0$ confondu avec $\mathscr{R}_1$ quand $q_1 = 0$ (annulation des paramètres α_1, d_1)
- X_N (libre car Z_{N+1} n'existe pas) choisi colinéaire à X_{N-1} quand $q_N = 0$
- X_i choisi de telle sorte que $r_i = 0$ ou $r_{i+1} = 0$ quand Z_i parallèle à Z_{i+1}

MGD de bras manipulateurs sériels

Exemple : cas du robot RX130L de *Staübli*^{TM}

- Assignation des repères
- Paramétrage selon la convention de *Khalil-Kleinfinger*
- Calculs de $\overline{g}_{(i-1)i}$ pour $i = 1, \ldots, 4$.

i	α_i	d_i	θ_i	r_i
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?
3	?	?	?	?
4	?	?	?	?
5	?	?	?	?
6	?	?	?	?



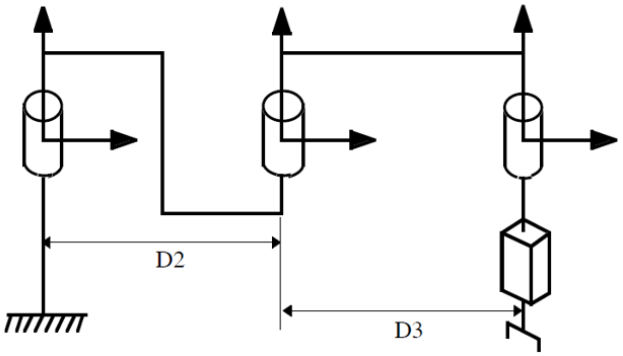
Exemple

MGD de bras manipulateurs sériels

Exemple : cas du robot SCARA IRB 910SC de *ABB*^{TM}

- Assignation des repères
- Paramétrage selon la convention de *Khalil-Kleinfinger*

i	α_i	d_i	θ_i	r_i
1	?	?	?	?
2	?	?	?	?
3	?	?	?	?
4	?	?	?	?



Exemple

Définition

Torseur cinématique

Le champ de vitesse d'un solide indéformable $\mathscr{C}_j$, auquel est attaché un repère $\mathscr{R}_j$, en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}_i$ est complètement défini par un torseur cinématique, décrit en un point particulier P de $\mathscr{C}_j$:

$$ {}^{i}\mathscr{V}_{i,j}(P) = \begin{bmatrix} {}^{i}V_{i,j}(P) \\ {}^{i}\omega_{i,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6. $$

On appelle éléments de réduction du torseur cinématique en P :

- ${}^{i}V_{i,j}(P) \in \mathbb{R}^3$: moment résultant en P, représentant la vitesse instantanée du point P dans le mouvement de $\mathscr{C}_j$ par rapport à $\mathscr{R}_i$ exprimée dans le repère $\mathscr{R}_i$, selon :

$$ {}^{i}V_{i,j}(P) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_iP}_{\mathscr{R}_i} $$

- ${}^{i}\omega_{i,j} \in \mathbb{R}^3$: résultante du torseur représentant la vitesse de rotation instantanée du solide $\mathscr{C}_j$ par rapport au repère $\mathscr{R}_i$ exprimée dans le repère $\mathscr{R}_i$.

Propriétés

- **Formule de transport des vitesses**
  Formule de *Varignon* permettant de calculer la vitesse d'un autre point M de $\mathscr{C}_j$:

$$^{i}V_{i,j}(M) = {}^{i}V_{i,j}(P) + {}^{i}\omega_{i,j} \times \overrightarrow{PM}_{\mathscr{R}_i} \Rightarrow {}^{i}\mathscr{V}_{i,j}(M) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{3\times3} & -\widehat{{}^{i}\overrightarrow{PM}} \\ \mathbb{O}_{3\times3} & \mathbb{I}_{3\times3} \end{bmatrix} {}^{i}\mathscr{V}_{i,j}(P)$$

- **Composition des vitesses**
  Soit $\mathscr{C}_i$, $\mathscr{C}_j$ et $\mathscr{C}_k$ trois solides et P un point

$$^{i}\mathscr{V}_{i,j}(P) = {}^{i}\mathscr{V}_{i,k}(P) + {}^{i}\mathscr{V}_{k,j}(P)$$

  - Vitesse absolue égale à la somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement :

$$^{i}V_{i,j}(P) = {}^{i}V_{i,k}(P) + {}^{i}V_{k,j}(P)$$

    - Vitesse relative $^{i}V_{i,k}(P)$: vitesse de P dans le mouvement de $\mathscr{C}_k$ par rapport à $\mathscr{C}_i$ exprimée dans le repère $\mathscr{R}_i$;
    - Vitesse d'entraînement $^{i}V_{k,j}(P)$: vitesse de P dans le mouvement de $\mathscr{C}_j$ (c'est-à-dire supposé fixe dans le repère $\mathscr{R}_j$) par rapport à $\mathscr{C}_k$ exprimée dans le repère $\mathscr{R}_i$.
  - Loi de composition de vitesse des rotations instantanées :

$$^{i}\omega_{i,j} = {}^{i}\omega_{i,k} + {}^{i}\omega_{k,j}$$

Vitesse de rotation instantanée

Soit le repère $\mathscr{R}_i$, solidaire d'un corps, dont la rotation par rapport au repère fixe $\mathscr{R}_0$ est paramétrée par la matrice de rotation $R_{0i} \in SO(3)$.

- Les coordonnées d'un point matériel ${}^i p$ dans le repère $\mathscr{R}_i$ appartenant au corps s'exprime en fonction des coordonnées du même point ${}^0 p$ exprimées dans le repère $\mathscr{R}_0$ selon :

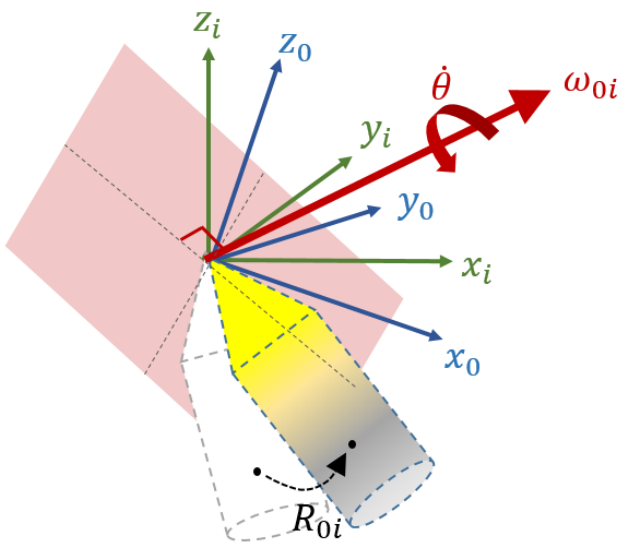
$$ {}^0 p(t) = R_{0i}(t)\, {}^i p $$

(notons que les coordonnées ${}^i p$ sont fixes dans le repère $\mathscr{R}_i$).

- La vitesse du point dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut :

$$ {}^0 V = {}^0 \dot{p}(t) = \frac{d}{dt}\left({}^0 p(t)\right) = \dot{R}_{0i}(t)\, {}^i p. $$

et le vecteur vitesse du point se déplaçant dans le plan est un vecteur contenu dans ce plan.



Vitesse de rotation instantanée

Soit le repère $\mathscr{R}_i$, solidaire d'un corps, dont la rotation par rapport au repère fixe $\mathscr{R}_0$ est paramétrée par la matrice de rotation $R_{0i} \in SO(3)$.

- La vitesse angulaire de $\mathscr{R}_i$ relativement à $\mathscr{R}_0$ est la dérivée par rapport au temps, de la position angulaire du corps ;
- Elle est décrite au travers du vecteur vitesse angulaire $\omega_{0i} \in \mathbb{R}^3$, qui définit à la fois l'axe autour duquel tourne l'objet et sa vitesse de rotation :
  - normal au plan de rotation ;
  - orienté de sorte que le mouvement se fasse dans le sens positif (habituellement donné par la règle de la main droite) ;
  - de norme valant $\|\omega_{0i}\|$;

$$\dot{p}(t) = \omega \times p(t) = \widehat{\omega} p(t)$$

  où la notation $\widehat{\omega}$ désigne la matrice antisymétrique du préproduit vectoriel.
- Relations entre matrice de rotation et vitesse angulaire :
  1. Vecteur vitesse angulaire exprimé dans $\mathscr{R}_0$:

$$\dot{R}_{0i} = {}^0\widehat{\omega}_{0i} R_{0i} \Rightarrow {}^0\widehat{\omega}_{0i} = \dot{R}_{0i} R_{i0}$$

  2. Vecteur vitesse angulaire exprimé dans $\mathscr{R}_i$:

$$\dot{R}_{0i} = R_{0i}\, {}^i\widehat{\omega}_{0i} \Rightarrow {}^i\widehat{\omega}_{0i} = R_{i0} \dot{R}_{0i}$$

Démonstration

Exemple

Calculs de ${}^0\widehat{\omega}_{0d}(t)$ et ${}^d\widehat{\omega}_{0d}(t)$ pour $R_{\theta(t),z}$ donné.

Introduction

Définition

Le modèle cinématique direct (MCD) d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles $\dot{X}$ en fonction des vitesses articulaires $\dot{q}$:

$$\dot{X} = J(q)\,\dot{q}$$

où $J(q)$ désigne la matrice jacobienne de la fonction f de dimension $M \times N$, égale à $\frac{\partial X}{\partial q}$.

- Alternativement, on définit le modèle différentiel direct qui donne l'accroissement infinitésimal dx de la situation en fonction d'un accroissement dq de la configuration :

$$dX = J(q)\,dq$$

- Intérêts de la matrice jacobienne du robot :
  - utilité pour l'analyse des singularités et dimension de l'espace opérationnel accessible du robot ;
  - utilité pour le calcul numérique de solutions au Modèle Géométrique Inverse - MGI ;
  - utilité pour établir en statique la relation liant les efforts exercés sur l'organe terminal aux forces et couples des actionneurs.
- Plusieurs méthodes pour l'obtention de la matrice J :
  1. par dérivation du MGD ;
  2. par composition des vitesses.

1- Matrice Jacobienne par dérivation du MGD

- Matrice des dérivées partielles du premier ordre de la fonction vectorielle f (modèle géométrique f exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$) :

$$ {}^0J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial q_N} \end{bmatrix} $$

  (f_i dérivables car formés de fonctions affines et trigonométriques)
- Variation de J dans le temps en fonction de la configuration q

1- Matrice Jacobienne par dérivation du MGD

- Matrice des dérivées partielles du premier ordre de la fonction vectorielle f (modèle géométrique f exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$) :

$$ {}^0J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial q_N} \end{bmatrix} $$

  (f_i dérivables car formés de fonctions affines et trigonométriques)
- Variation de J dans le temps en fonction de la configuration q
- Expression de la jacobienne analytique généralement calculée en utilisant une représentation explicite de l'orientation comme les angles d'*Euler* (cas d'un robot 6 axes) :

$$ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial q_6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix} $$

1- Matrice Jacobienne par dérivation du MGD

- Matrice des dérivées partielles du premier ordre de la fonction vectorielle f (modèle géométrique f exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$) :

$$ {}^0J(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_M}{\partial q_N} \end{bmatrix} $$

  (f_i dérivables car formés de fonctions affines et trigonométriques)
- Variation de J dans le temps en fonction de la configuration q
- Expression de la jacobienne analytique généralement calculée en utilisant une représentation explicite de l'orientation comme les angles d'*Euler* (cas d'un robot 6 axes) :

$$ \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_6} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial q_6} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{pmatrix} $$

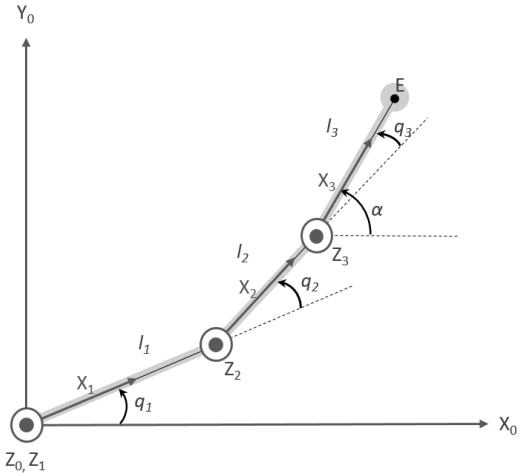
- Caractéristiques de cette approche :
  - Aisée dans le cas de robot à 2 ou 3 ddls ;
  - Coûteuse en temps de calcul.

1- Matrice Jacobienne par dérivation du MGD

Exemples :

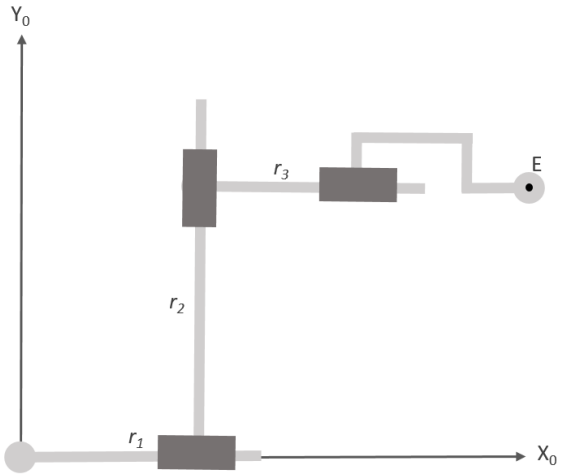
- Calcul de la matrice de transformation homogène de l'outil dans $\mathscr{R}_0$
- Calcul de ${}^0J$ par dérivation du MGD

Cas du robot RRR plan



Exemple

Cas du robot PPP plan



Exemple

1- Matrice Jacobienne par dérivation du MGD

Étapes du calcul de ${}^{0}J(q)$

$$ {}^{0}\mathscr{V}_{0,N}(0_n) = \begin{bmatrix} {}^{0}V_{0,N}(O_N) \\ {}^{0}\omega_{0,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{0}J_v(q) \\ {}^{0}J_\omega(q) \end{bmatrix} \dot{q} = {}^{0}J(q)\,\dot{q} $$

où ${}^{0}V_{0,N}(O_N)$ est la vitesse de l'origine du repère lié à l'organe du terminal exprimée dans le repère de base et ${}^{0}\omega_{0,N}$ les coordonnées du vecteur vitesse de rotation de l'organe terminal dans le repère de base.

- Partie vitesse en translation :
  1. Calcul de la matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0N}$ (issue du MGD) ;
  2. Extraction du vecteur $p_{0N}(q)$ à partir de la dernière colonne de $\overline{g}_{0N}$;
  3. Dérivation de $p_{0N}(q)$ fournissant la première sous-matrice de ${}^{0}J(q)$

$$ {}^{0}V_{0,N}(O_N) = \frac{d}{dt}p_{0N}(q) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{O_0O_N} = {}^{0}J_v(q)\,\dot{q} $$

- Partie vitesse en rotation :
  1. Extraction de la matrice $R_{0N}(q)$ de $\overline{g}_{0N}$;
  2. Calcul de ${}^{0}\widehat{\omega}_{0,N}$ selon : ${}^{0}\widehat{\omega}_{0,N} = \frac{dR_{0N}}{dt}R_{N0} = \left(\frac{\partial R_{0N}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial R_{0N}}{\partial q_N}\dot{q}_N\right)R_{N0}$
  3. Identification terme à terme de ${}^{0}\omega_{0,N} \in \mathbb{R}^3$ à partir de la matrice du préproduit matriciel ${}^{0}\widehat{\omega}_{0N}$ pour calculer la deuxième sous-matrice de ${}^{0}J(q)$:

$$ {}^{0}\omega_{0,N} = {}^{0}J_\omega(q)\,\dot{q} $$

2- Matrice Jacobienne par composition des vitesses

Effet de la $i^{ième}$ articulation sur le repère terminal

- Expression de la vitesse opérationnelle ${}^{i}\mathscr{V}_{i,N}(O_N) = \begin{bmatrix} {}^{i}V_{i,N}(O_N) \\ {}^{i}\omega_{i,N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ du repère terminal $\mathscr{R}_N$ induite par la $i^{ième}$ articulation de la chaîne poly-articulée :
  - ${}^{i}V_{i,N}(O_N)$: vitesse de l'origine O_N par rapport à $\mathscr{R}_i$, tel que ${}^{i}V_{i,N}(O_N) = \frac{dp_{iN}}{dt}$ avec $p_{iN} = O_iO_N$, élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{iN}$;
  - ${}^{i}\omega_{i,N}$: vecteur rotation du repère $\mathscr{R}_N$ par rapport à $\mathscr{R}_i$.
- Type d'articulation :
  - Cas d'une articulation prismatique ($q_i = r_i$)

$$ {}^{i}\mathscr{V}_{i,N}(O_N) = \begin{bmatrix} {}^{i}V_{i,N}(O_N) \\ {}^{i}\omega_{i,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_i \\ 0_{3\times 1} \end{bmatrix} \dot{q}_i $$

  - Cas d'une articulation rotoïde ($q_i = \theta_i$)

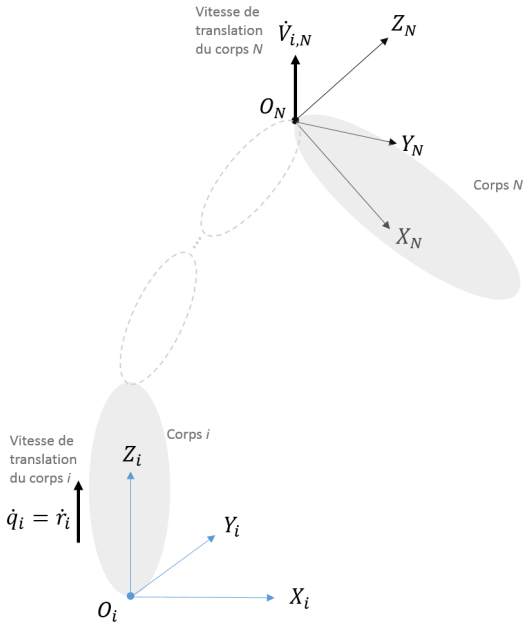
$$ {}^{i}\mathscr{V}_{i,N}(O_N) = \begin{bmatrix} {}^{i}V_{i,N}(O_N) \\ {}^{i}\omega_{i,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_i \times p_{iN} \\ Z_i \end{bmatrix} \dot{q}_i $$

- Remarques :
  - Selon la convention de *Khalil-Kleinfinger*, l'articulation est portée par le vecteur $Z_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$.
  - Toute la structure du robot entre l'articulation i et l'extrémité N est supposée constituer un corps rigide.

2- Matrice Jacobienne par composition des vitesses

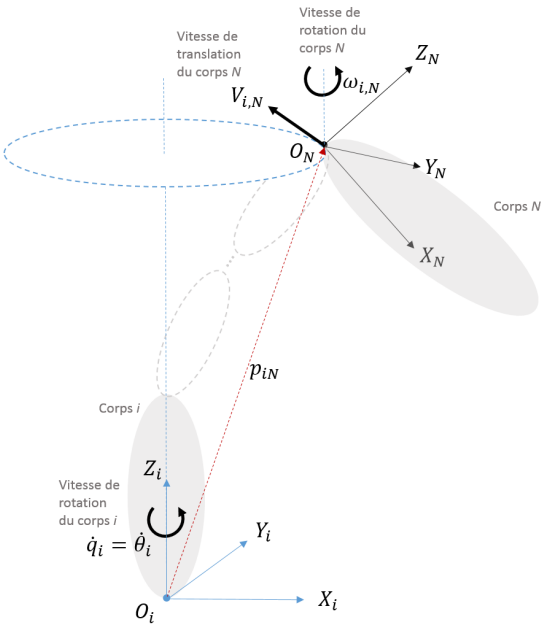
Effet de la $i^{ième}$ articulation sur le repère terminal

Cas d'une articulation prismatique



$$\begin{bmatrix} {}^{i}V_{i,N}(O_N) \\ {}^{i}\omega_{i,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_i \\ 0_{3\times 1} \end{bmatrix}}_{={}^{i}J_i(q)} \dot{q}_i$$

Cas d'une articulation rotoïde



$$\begin{bmatrix} {}^{i}V_{i,N}(O_N) \\ {}^{i}\omega_{i,N} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_i \times p_{iN} \\ Z_i \end{bmatrix}}_{={}^{i}J_i(q)} \dot{q}_i$$

2- Matrice Jacobienne par composition des vitesses

Effet de la $i^{ième}$ articulation sur le repère terminal

- Projection de la vitesse opérationnelle dans le repère de base $\mathscr{R}_0$
  - ${}^0V_{i,N}$ vitesse de l'origine O_N par rapport à $\mathscr{R}_i$ exprimée dans $\mathscr{R}_0$:

$$ {}^0V_{i,N}(O_N) = R_{0i}\,{}^iV_{i,N}(O_N) $$

  - ${}^0\omega_{i,N}$ vecteur rotation du repère $\mathscr{R}_N$ par rapport à $\mathscr{R}_i$ exprimée dans $\mathscr{R}_0$:

$$ {}^0\omega_{i,N}(O_N) = R_{0i}\,{}^i\omega_{i,N}(O_N) $$

soit

$$ {}^0\mathscr{V}_{i,N}(O_N) = \begin{bmatrix} {}^0V_{i,N}(O_N) \\ {}^0\omega_{i,N} \end{bmatrix} = {}^0J_i(q)\,\dot{q}_i $$

où

$$ {}^0J_i(q) = \begin{bmatrix} R_{0i} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & R_{0i} \end{bmatrix} {}^iJ_i(q) $$

Remarques sur la dépendance de ${}^0J_i$:

- au référentiel dans lequel les vitesses sont projetées (possibilité de projeter la vitesse opérationnelle dans un autre repère selon les besoins) ;
- à la configuration q du manipulateur.

2- Matrice Jacobienne par composition des vitesses

Méthodologie pour le calcul pratique de ${}^{0}J(q)$

Par composition des différents torseurs cinématiques ${}^{0}\mathscr{V}_{i,N}(O_N)$ pour $i = 1, \ldots, N$, la matrice jacobienne liant les vitesses opérationnelles $\dot{X}$ exprimée dans le repère de base $\mathscr{R}_0$ aux vitesses articulaires $\dot{q}$ du robot vaut :

$$ {}^{0}J(q) = \left[\begin{array}{ccccc} {}^{0}J_1(q) & \ldots & {}^{0}J_i(q) & \ldots & {}^{0}J_N(q) \end{array} \right] $$

où ${}^{0}J_i(q)$ définit la vitesse opérationnelle du repère terminal due à l'action de la $i^{ème}$ articulation exprimée dans le repère de base $\mathscr{R}_0$, selon le type d'articulation :

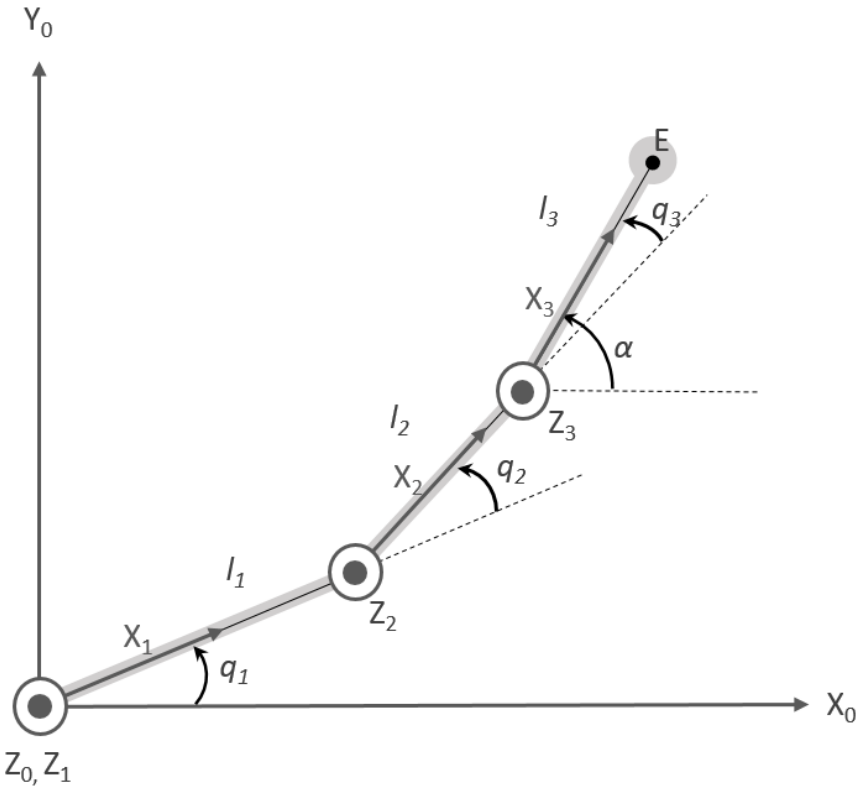
$$ {}^{0}J_i(q) = \begin{cases} \left[\begin{array}{c} R_{0i} Z_i \\ 0_{3\times 1} \end{array} \right] & \text{si l'articulation } i \text{ est prismatique} \\ \left[\begin{array}{c} R_{0i}(Z_i \times p_{iN}) \\ R_{0i} Z_i \end{array} \right] & \text{si l'articulation } i \text{ est rotoïde} \end{cases} $$

avec :

- R_{0i} : matrice de rotation du repère $\mathscr{R}_i$ par rapport à $\mathscr{R}_0$;
- Z_i : vecteur unitaire de l'articulation i exprimé dans le repère $\mathscr{R}_i$;
- p_{iN} : vecteur de translation du repère $\mathscr{R}_i$ à $\mathscr{R}_N$.

2- Matrice Jacobienne par composition des vitesses

Exemple : retour sur le cas du robot plan à 3 axes
Calcul de la matrice jacobienne de base ${}^{0}J$



Exemple

Dimension de l'espace opérationnel d'un robot en chaîne ouverte simple

Redondance

Pour une configuration articulaire q donnée, le rang r de la matrice jacobienne J correspond au nombre de degré de liberté du repère associé à l'organe terminal, i.e. à la dimension de l'espace opérationnel accessible *dans cette configuration*.

Le rang maximal r_{max} que prend la matrice jacobienne dans toutes les configurations possibles est le nombre de liberté M de l'espace opérationnel d'un robot.

- Si $M = N$ (N étant le nombre de degré de liberté du robot, égal au nombre d'articulations motorisées dans le cas d'un robot sériel), le robot est non-redondant.
- Si $M < N$ le robot est redondant d'ordre $N - M$.

Exemple : retour sur le cas du robot PPP plan
Analyse du rang et du noyau de la matrice jacobienne de base ${}^0J$

Exemple

Dimension de l'espace opérationnel d'un robot en chaîne ouverte simple

Singularité

Les singularités sont solutions de :

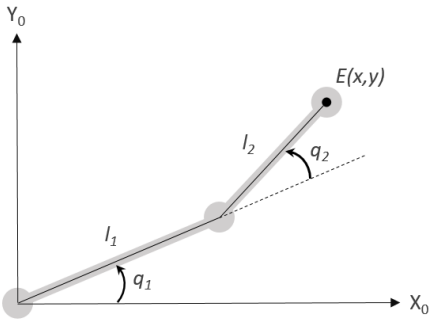
$$\begin{cases} det\,(J) = 0 & \text{dans le cas non-redondant } (J \text{ matrice carrée}), \\ det\,\left(JJ^t\right) = 0 & \text{dans le cas redondant } (J \text{ matrice non-carrée}) \end{cases}$$

où $det\,(\bullet)$ désigne le déterminant de la matrice $\bullet$.

- Pour certaines configurations articulaires, il se peut que le rang r soit inférieur à M (que le robot soit redondant ou non). On dit que le robot possède une singularité ou une redondance locale d'ordre $M - r$.
  - cette perte de rang traduit l'impossibilité d'engendrer une vitesse le long ou autour de certaines directions ;
  - à proximité d'une singularité, de faibles vitesses dans l'espace opérationnel peuvent entraîner d'importantes (infinies) vitesses dans l'espace articulaire.
- Types de singularités :
  1. Singularités de frontières correspondant aux points à la limite de l'espace atteignable, i.e. robot en configuration "bras tendu" ou "bras replié" (possibilité d'éviter facilement ces configurations en n'amenant pas le bras en limite de l'espace atteignable)
  2. Singularités internes apparaissant à l'intérieur du domaine atteignable et généralement causé par un alignement de deux ou plusieurs axes (problème plus sérieux car configurations singulières pouvant être atteinte dans l'espace de travail pour une trajectoire plannifiée dans l'espace opérationnel)

Dimension de l'espace opérationnel d'un robot en chaîne ouverte simple

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR (retour sur l'exemple 3)

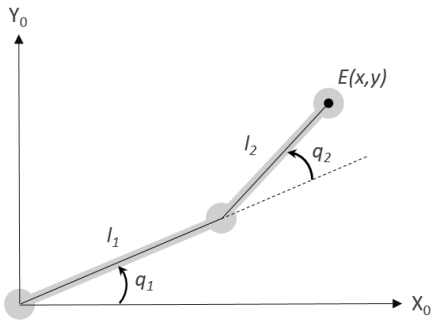


- Représentation de l'espace de travail du robot plan sans butées (en supposant $L_1 > L_2$)
- Représentation des branches de singularités du robot plan sans butées

Exemple

Dimension de l'espace opérationnel d'un robot en chaîne ouverte simple

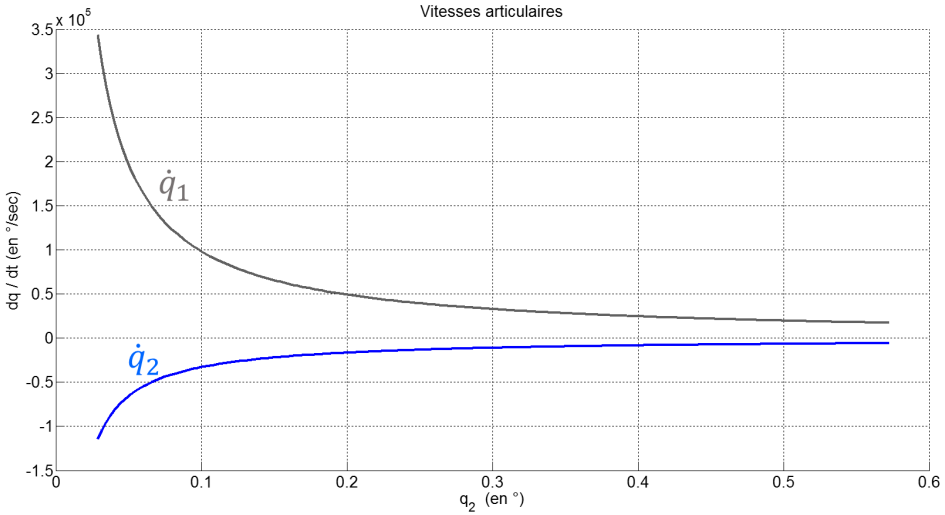
Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR (retour sur l'exemple 3)



- Représentation de l'espace de travail du robot plan sans butées (en supposant $L_1 > L_2$)
- Représentation des branches de singularités du robot plan sans butées

Exemple

- Influence de la proximité de la configuration singulière sur la vitesse articulaire



Évolution de la vitesse articulaire $\dot{q} = {}^0J^{-1}(q)\,\dot{X}_d$ permettant d'atteindre la vitesse opérationnelle $\dot{X}_d = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^t$ autour de la configuration articulaire $q_1 = 0$ et $0,03^\circ < q_2 < 0,55^\circ$

Transmission des vitesses entre espaces articulaire et opérationnel

Rappel sur la décomposition en valeurs singulières (fonction *SVD* sous *Matlab*^{TM})
Soit J de dimension $m \times n$ et de rang r pour une configuration donnée. Il existe des matrices orthogonales $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$, telles que

$$J = U \Sigma V^t$$

La matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ prend la forme suivante :

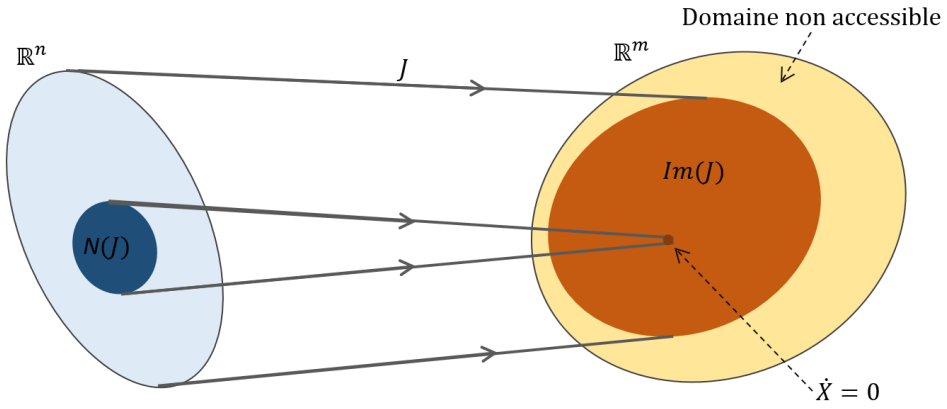
$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$$

$S \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est la matrice diagonale formée par les valeurs singulières non-nulles σ_i de J, rangées de manière décroissante : $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r$.

- Les valeurs singulières de J sont égales aux racines carrées des valeurs propres λ_i du produit $J^t J$: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i \left(J^t J\right)}$;
- La matrice V est constituée des vecteurs propres de $J^t J$;
- La matrice U est constituée des vecteurs propres de JJ^t ;
- Puisque $\sigma_i = 0$ pour $i > r$, le modèle cinématique devient : $\dot{X} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i U_i V_i^t \dot{q}$.

Transmission des vitesses entre espaces articulaire et opérationnel

Noyau et espace image de J



- Base pour l'ensemble des $\dot{q} \in \mathbb{R}^{\dot{q}}$ engendrant un mouvement de l'organe terminal : $(V_1, \ldots, V_r)$;
- Base du noyau de J dont l'image dans $\mathbb{R}^{\dot{X}}$ est le vecteur nul : $(V_{r+1}, \ldots, V_n)$;
- Base de l'espace image engendré par J (vitesse de l'organe terminal pouvant être engendrée) : $(U_1, \ldots, U_r)$;
- Base pour l'ensemble des $\dot{X} \in \mathbb{R}^{\dot{X}}$ ne pouvant pas être engendrés par le robot (complément de l'espace image) : $(U_{r+1}, \ldots, U_m)$.

Transmission des vitesses entre espaces articulaire et opérationnel

Qualité de la transmission de la vitesse

En supposant les vitesses articulaires de norme définie par $\dot{q}^t\dot{q} \leq 1$ (hyper-sphère unité), les vitesses résultantes dans l'espace opérationnel sont caractérisées par la forme quadratique (représentant une ellipsoïde dans $\mathbb{R}^{\dot{X}}$)[28] :

$$\dot{X}^t \left(JJ^t\right)^{-1} \dot{X} \leq 1$$

L'ellipsoïde possède une forme et une orientation définies à partir de JJ^t :

- les axes principaux de l'ellipsoïde sont données par les directions $U_1, \ldots, U_m$ (vecteurs propres de JJ^t) ;
- les longueurs des demi-axes respectifs de l'ellipsoïde sont données par les valeurs singulières $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_m$ (racines carrées des valeurs propres de JJ^t) ;
- le volume de l'ellipsoïde, mesure de sa capacité à engendrer une vitesse (manipulabilité en vitesse), vaut : $\mathscr{W} = \sqrt{det\left(J\left(q\right)J^t\left(q\right)\right)}$ (ou $\left|det\left(J\left(q\right)\right)\right|$ dans le cas non-redondant), soit $\mathscr{W} = \prod_{i=1}^{r} \sigma_i \geq 0$.

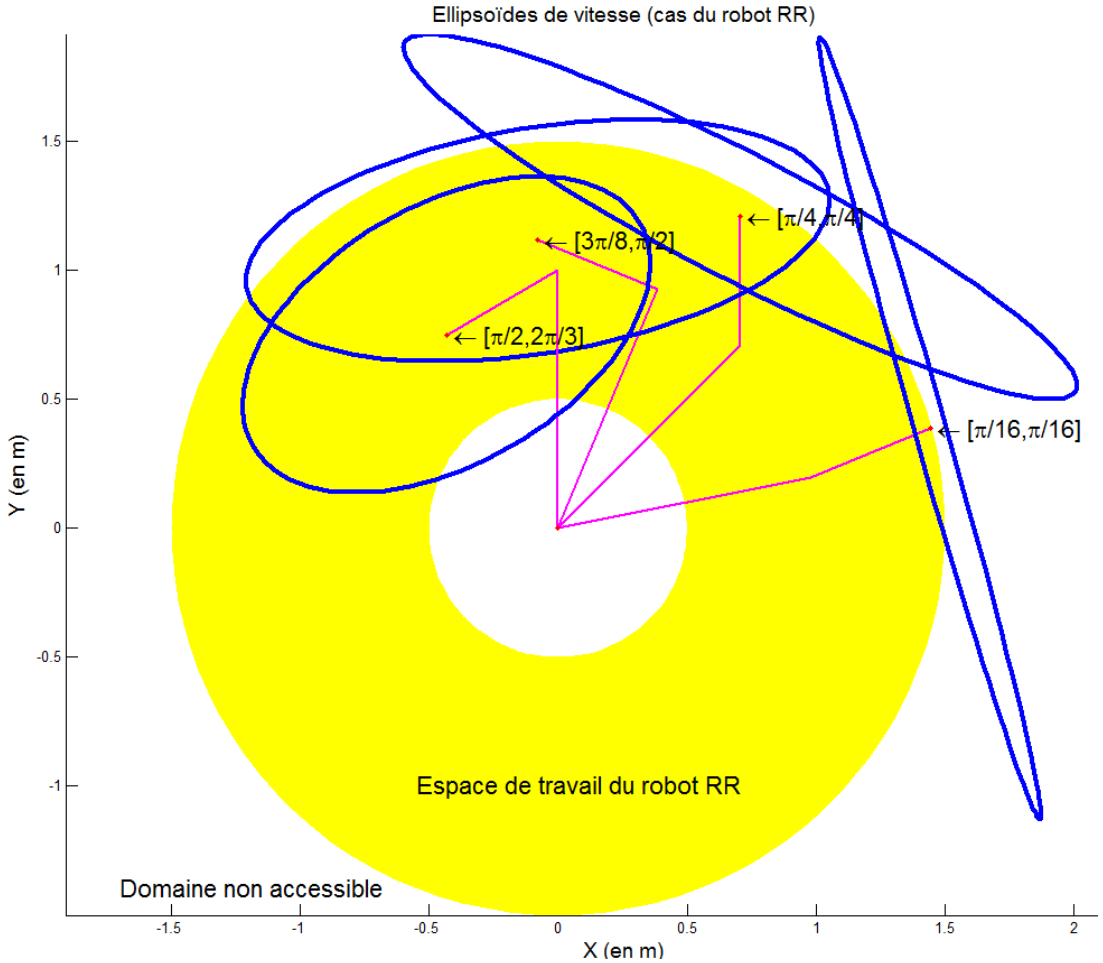
A partir de la décomposition SVD de J, il s'ensuit que :

$$J = U\Sigma V^t \Rightarrow JJ^t = U\Sigma^2 U^t \Rightarrow \left(JJ^t\right)^{-1} = U\Sigma^{-2}U^t$$

Transmission des vitesses entre espaces articulaire et opérationnel

Qualité de la transmission de la vitesse

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR (retour sur l'exemple 14)



Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

Efforts d'interaction

Les efforts d'interaction entre le robot et son environnement, peuvent être calculés directement en utilisant la matrice jacobienne cinématique. Les forces et/ou couples articulaires Γ_e résultant de l'application du torseur ${}^0\mathscr{F}_e$ des efforts appliqués à l'extrémité de la chaîne poly-articulée vaut

$$\Gamma_e = {}^0_P J(q)^t \, {}^0\mathscr{F}_e$$

où ${}^0\mathscr{F}_e$ désigne le torseur des efforts appliqués par l'organe terminal du robot sur l'environnement exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$:

$${}^0\mathscr{F}_e = [f_x, f_y, f_z, m_x, m_y, m_z]^t$$

et ${}^0_P J$ la matrice jacobienne cinématique du corps $\mathscr{C}_n$ au point d'application P de la force extérieure.

Démonstration

- ${}^0\mathscr{F}_e$ est un vecteur de taille $m \times 1$ ($m = 6$ généralement) composé des forces f et couples m appliqués au manipulateur
- Γ_e est un vecteur de taille $n \times 1$ composé des forces et/ou couples appliqués aux n articulations.

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

Qualité de la transmission des efforts [26]
On peut définir de façon analogue à la manipulabilité en vitesse une qualité de transmission ou manipulabilité en effort par une norme du vecteur des couples aux actionneurs $\Gamma^t\Gamma \leq 1$. L'ellipsoïde en effort a pour équation :

$$\mathscr{F}^t \left(JJ^t\right) \mathscr{F} \leq 1.$$

- Caractéristiques de l'ellipsoïde :
  - Directions identiques des ellipsoïdes de vitesse et d'effort : $U_1, \ldots, U_m$ (vecteurs propres de JJ^t) ;
  - Longueurs des demi-axes en proportion inverse des valeurs singulières σ_i de J
    Direction dans laquelle les performances en vitesse sont les meilleures sont aussi celles dans laquelle les performances en effort sont les moins bonnes et inversement.
- Notons que les configurations singulières pour l'application des vitesses sont identiques à celles relatives aux applications des efforts (car $Rang\,(J) = Rang\,(J^t)$).

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

Dualité effort/vitesse

- Pour une configuration donnée, évaluation de l'efficacité de la transformation entre les vitesses articulaires et de l'organe terminal :

$$^0J : \text{ relation entre } \dot{q} \text{ et } \begin{bmatrix} V^t & \omega^t \end{bmatrix}^t.$$

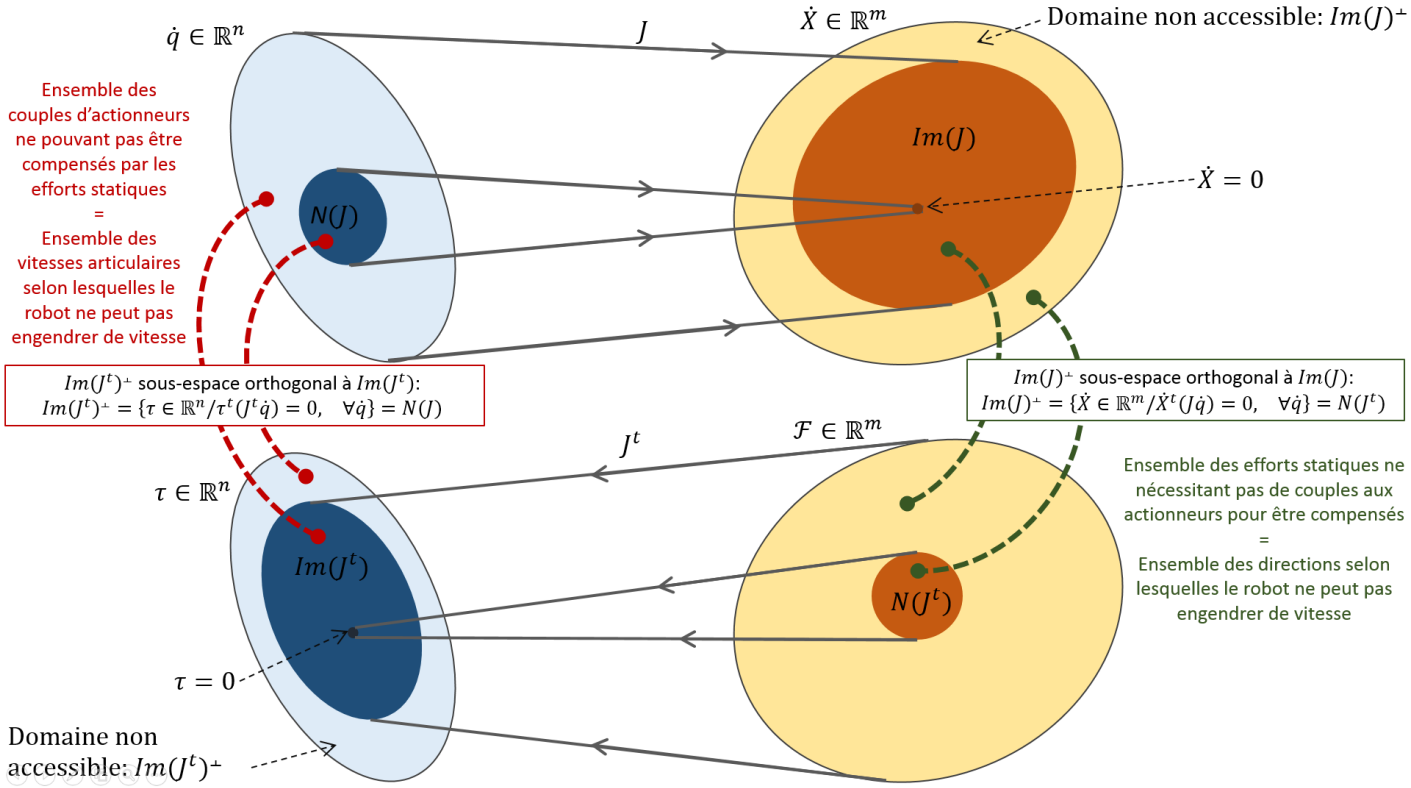
  - "Facilité" avec laquelle l'organe terminal peut être déplacé dans les différentes directions de l'espace opérationnel ;
  - ou, de manière équivalente, "éloignement" du robot des configurations singulières.
- Pour une configuration donnée, évaluation de l'efficacité de la transformation entre les couples articulaires et les forces terminales :

$$^0J^t : \text{ relation entre } \begin{bmatrix} f^t & m^t \end{bmatrix}^t \text{ et } \Gamma_e.$$

  - "Facilité" avec laquelle l'organe terminal peut appliquer des efforts (ou équilibrer des efforts appliqués) dans les différentes directions de l'espace opérationnel ;
  - dans les configurations singulières, il existe des directions dans l'espace opérationnel pour lesquelles les efforts extérieurs sont équilibrés par le robot sans le recours aux couples articulaires.

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

Dualité effort/vitesse [26]



$Im\left(J^t\right) + N(J) = \mathbb{R}^n$

- $Im\left(J^t\right) = \left\{\tau \in \mathbb{R}^n / \quad \exists \mathscr{F}_e \in \mathbb{R}^m, J^t \mathscr{F}_e = \tau\right\}$
- $N(J) = \{\dot{q} \in \mathbb{R}^n / \quad J\dot{q} = 0\}$

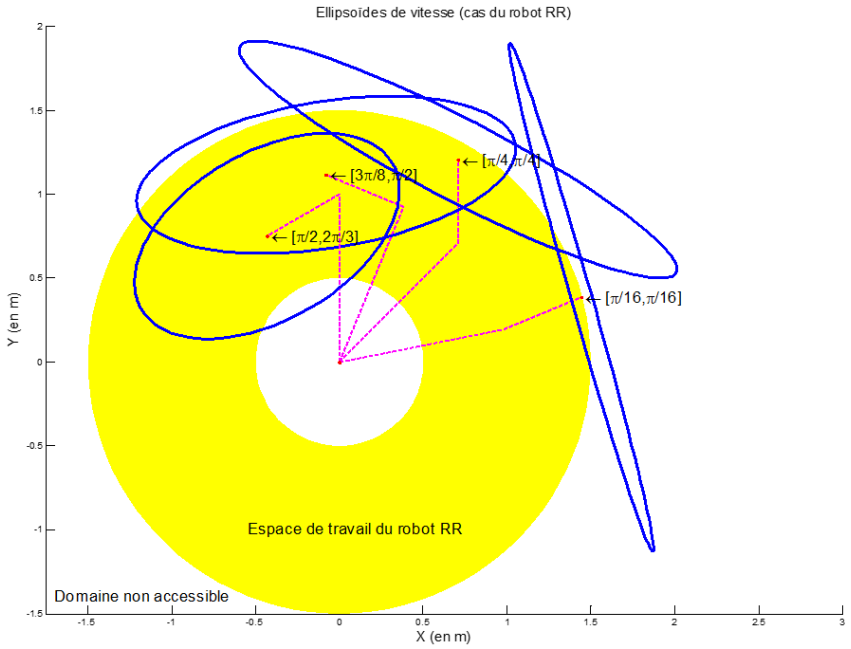
$Im(J) + N\left(J^t\right) = \mathbb{R}^m$

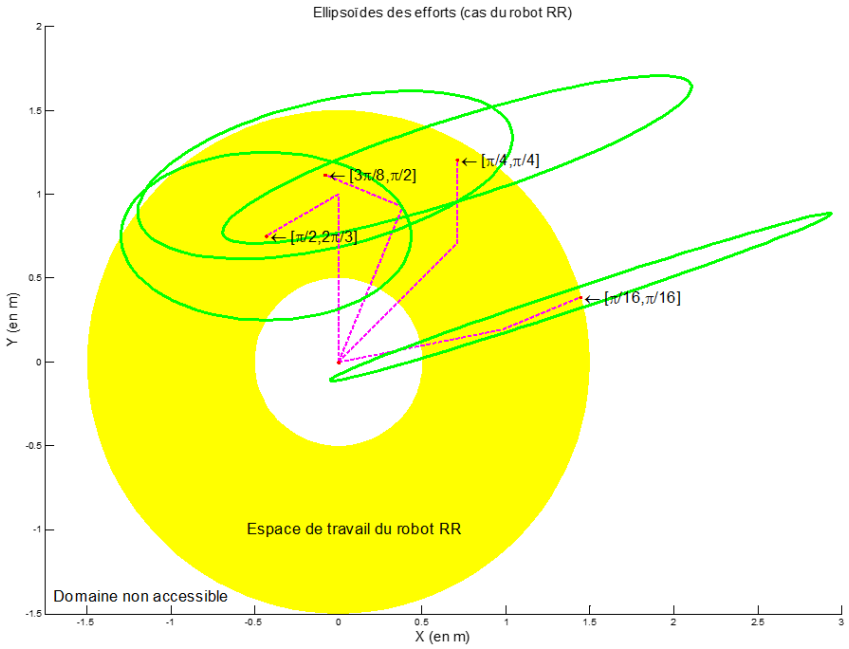
- $Im(J) = \left\{\dot{X} \in \mathbb{R}^m / \quad \exists \dot{q} \in \mathbb{R}^n, J\dot{q} = \dot{X}\right\}$
- $N\left(J^t\right) = \left\{\mathscr{F}_e \in \mathbb{R}^m / \quad J^t \mathscr{F}_e = 0\right\}$

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

Dualité effort/vitesse

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR (retour sur l'exemple 14)





Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Modèle Géométrique Inverse (MGI)

Description cinématique inverse du manipulateur $q = f^{-1}(X)$:

- Coordonnées articulaires q permettant d'amener l'outil dans une position et orientation déterminées X ;
- Transformateur de coordonnées pour la commande du robot à partir des coordonnées opérationnelles souhaitées vers les consignes articulaires correspondantes.

Problème ardu : une approche générale pour la solution de ce problème n'existe pas !

Modèle Géométrique Inverse (MGI)

Description cinématique inverse du manipulateur $q = f^{-1}(X)$:

- Coordonnées articulaires q permettant d'amener l'outil dans une position et orientation déterminées X ;
- Transformateur de coordonnées pour la commande du robot à partir des coordonnées opérationnelles souhaitées vers les consignes articulaires correspondantes.

Problème ardu : une approche générale pour la solution de ce problème n'existe pas !

- Nature et nombre d'équations soulevant le problème de l'*existence* et de la *multiplicité* de la solution, dans le cas général :
  - Aucune solution (ex. spécification d'une position X hors de l'espace atteignable) ;
  - Un ensemble fini de solutions ;
  - Solutions en nombre infini.

Modèle Géométrique Inverse (MGI)

Description cinématique inverse du manipulateur $q = f^{-1}(X)$:

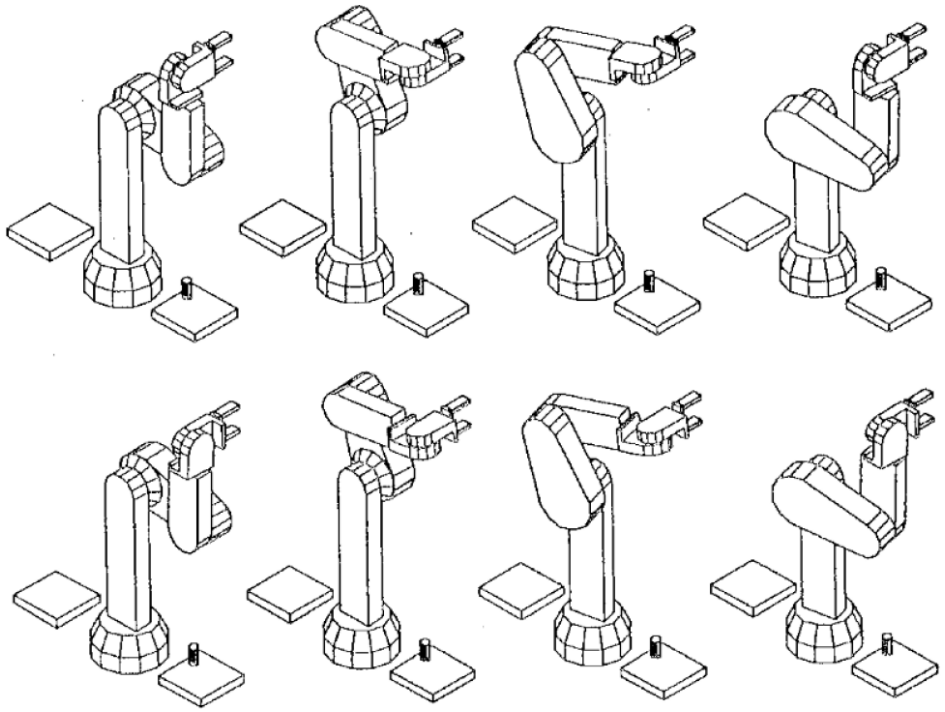
- Coordonnées articulaires q permettant d'amener l'outil dans une position et orientation déterminées X ;
- Transformateur de coordonnées pour la commande du robot à partir des coordonnées opérationnelles souhaitées vers les consignes articulaires correspondantes.

Problème ardu : une approche générale pour la solution de ce problème n'existe pas !

- Nature et nombre d'équations soulevant le problème de l'*existence* et de la *multiplicité* de la solution, dans le cas général :
  - Aucune solution (ex. spécification d'une position X hors de l'espace atteignable) ;
  - Un ensemble fini de solutions ;
  - Solutions en nombre infini.
- Deux classes principales d'approches pour la résolution du MGI :
  1. méthodes explicites (valables aux cas des robots découplables, par ex. robots à 6 ddls à poignet sphérique [23], ou au cas par cas [21])
  2. méthodes numériques lorsque aucune forme explicite n'existe (exploitant le modèle différentiel inverse principalement).

Solutions admissibles dans le cas $n = m$

Ensemble de solutions admissibles au problème du MGI : illustrations sur le cas d'un robot 6R (cas où $m = n = 6$)



- 4 solutions hors des configurations singulières (pour le seul positionnement du centre du poignet) ;
- 8 solutions en considérant la pose complète de l'organe effecteur (poignet sphérique : 2 solutions alternatives pour les 3 dernières articulations).

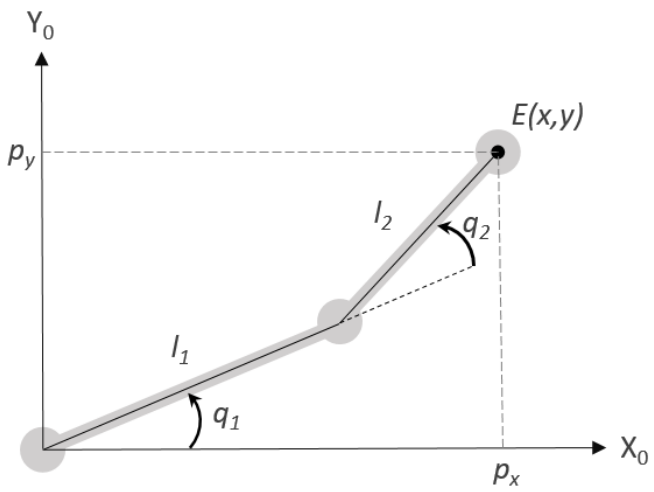
Solutions admissibles dans le cas $n = m$

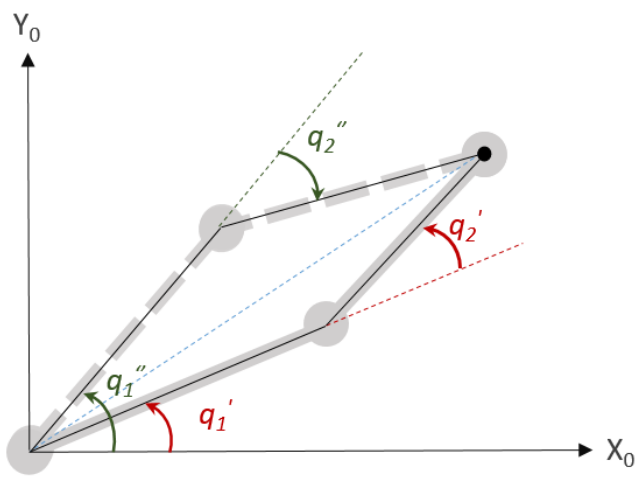
Solution explicite : exemple du robot 2R (cas où $m = n = 2$)

Modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} p_x = l_1 cos\left(q_1\right) + l_2 cos\left(q_1 + q_2\right) \\ p_y = l_1 sin\left(q_1\right) + l_2 sin\left(q_1 + q_2\right) \end{cases}$$

Dans le cas régulier, le problème du MGI admet deux couples de solutions : $\left(q_1^{'}, q_2^{'}\right)$ et $\left(q_1^{''}, q_2^{''}\right)$.





Exemple

Algorithmes de calcul numérique du MGI

Méthode de *Newton-Raphson* (pour $m = n$)

- Utilité lorsqu'une solution analytique au problème $X_d = f(q)$ n'existe pas ou est complexe à obtenir
- En considérant le développement de *Taylor* au premier ordre de la fonction f exprimant le MGD,

$$X_d = f(q_k) + \underbrace{\frac{\partial f(q_k)}{\partial q}}_{J(q_k)} (q - q_k) + o\left((q - q_k)^2\right)$$

on propose l'itération des variables articulaires au pas suivant :

$$q_{k+1} = q_k + J^{-1}(q_k)\left[X_d - f(q_k)\right]$$

- convergence si q^0 (conditions initiales) *assez* proche de la solution q^* : $X_d = f(q^*)$;
- taux de convergence quadratique à proximité de la solution ;
- problèmes *près* des singularités de la matrice jacobienne $J(q)$ et dans le cas redondant ($m < n$).

Algorithmes de calcul numérique du MGI

Méthode du gradient

- En considérant la minimisation de la fonction objectif,

$$H(q) = \frac{1}{2}\|X_d - f(q)\|^2 = \frac{1}{2}(X_d - f(q))^t (X_d - f(q))$$

l'itération des variables articulaires au pas suivant se fait dans la direction opposée au gradient, de manière à faire décroître la fonction H :

$$q_{k+1} = q_k - \alpha \nabla H(q_k) = q_k + \alpha J^t(q_k)[X_d - f(q_k)]$$

  - plus simple sur le plan computationnel (transposée de la matrice jacobienne, et non son inverse) ;
  - utilité directe pour le cas des robots redondants pour la tâche ;
  - recherche du facteur d'amplification du pas α pour garantir une décroissance de la fonction d'erreur H à chaque itération (technique de recherche linéaire) ;
  - taux de convergence linéaire ;

Algorithmes de calcul numérique du MGI

Méthode du gradient

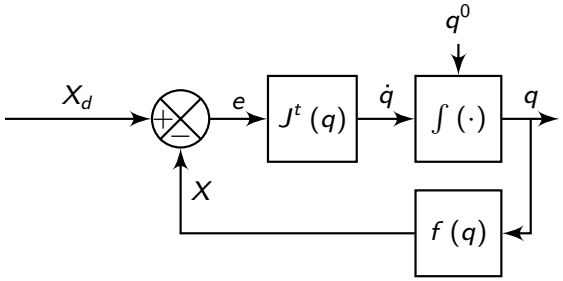
- En considérant la minimisation de la fonction objectif,

$$H(q) = \frac{1}{2}\left\|X_d - f(q)\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(X_d - f(q)\right)^t\left(X_d - f(q)\right)$$

l'itération des variables articulaires au pas suivant se fait dans la direction opposée au gradient, de manière à faire décroître la fonction H :

$$q_{k+1} = q_k - \alpha\nabla H(q_k) = q_k + \alpha J^t\left(q_k\right)\left[X_d - f(q_k)\right]$$

- plus simple sur le plan computationnel (transposée de la matrice jacobienne, et non son inverse) ;
- utilité directe pour le cas des robots redondants pour la tâche ;
- recherche du facteur d'amplification du pas α pour garantir une décroissance de la fonction d'erreur H à chaque itération (technique de recherche linéaire) ;
- taux de convergence linéaire ;
- algorithme revisité en tant que schéma de rétroaction ($\alpha = 1$).

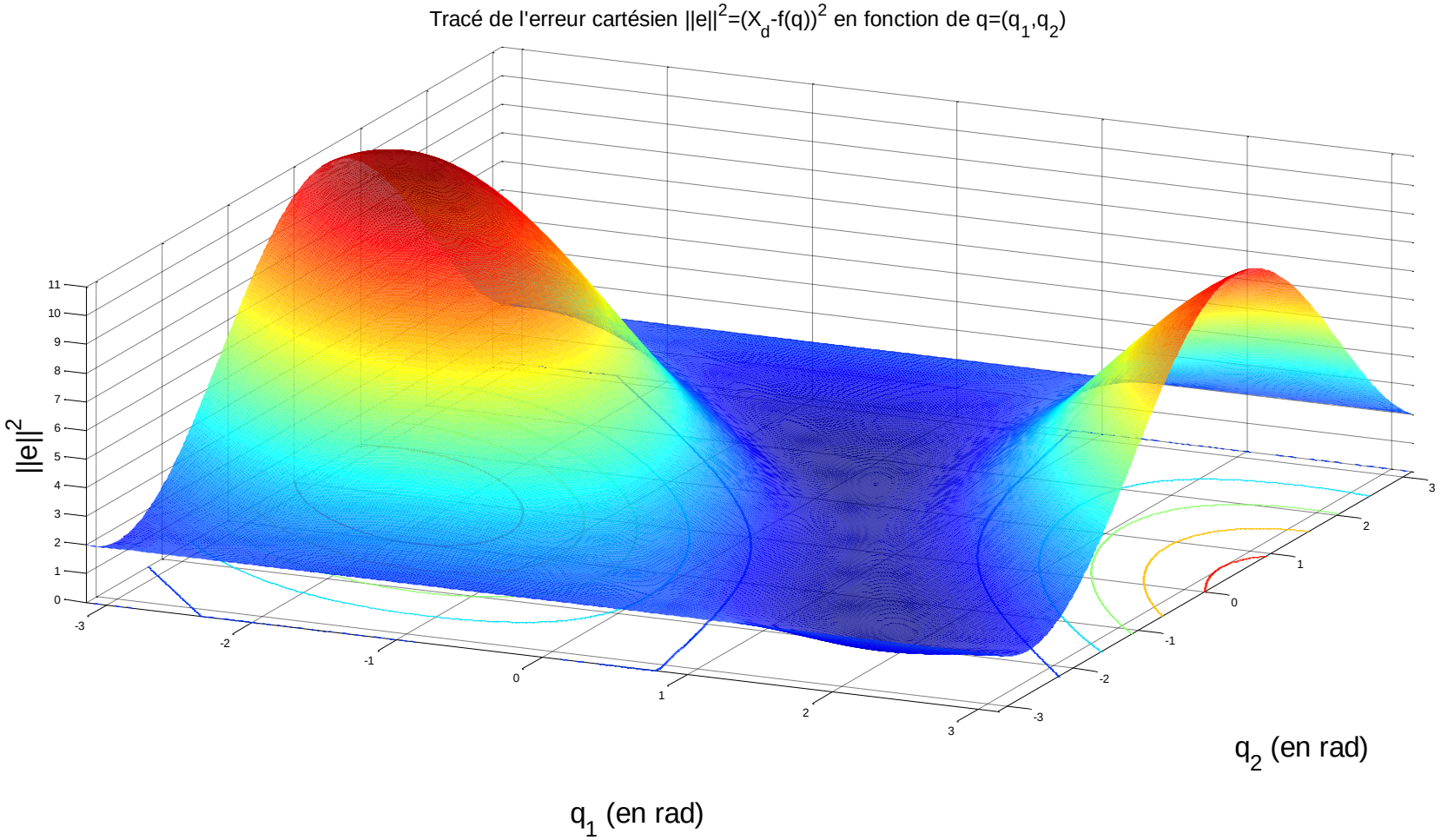


Démonstration de la stabilité asymptotique de l'algorithme

Démonstration

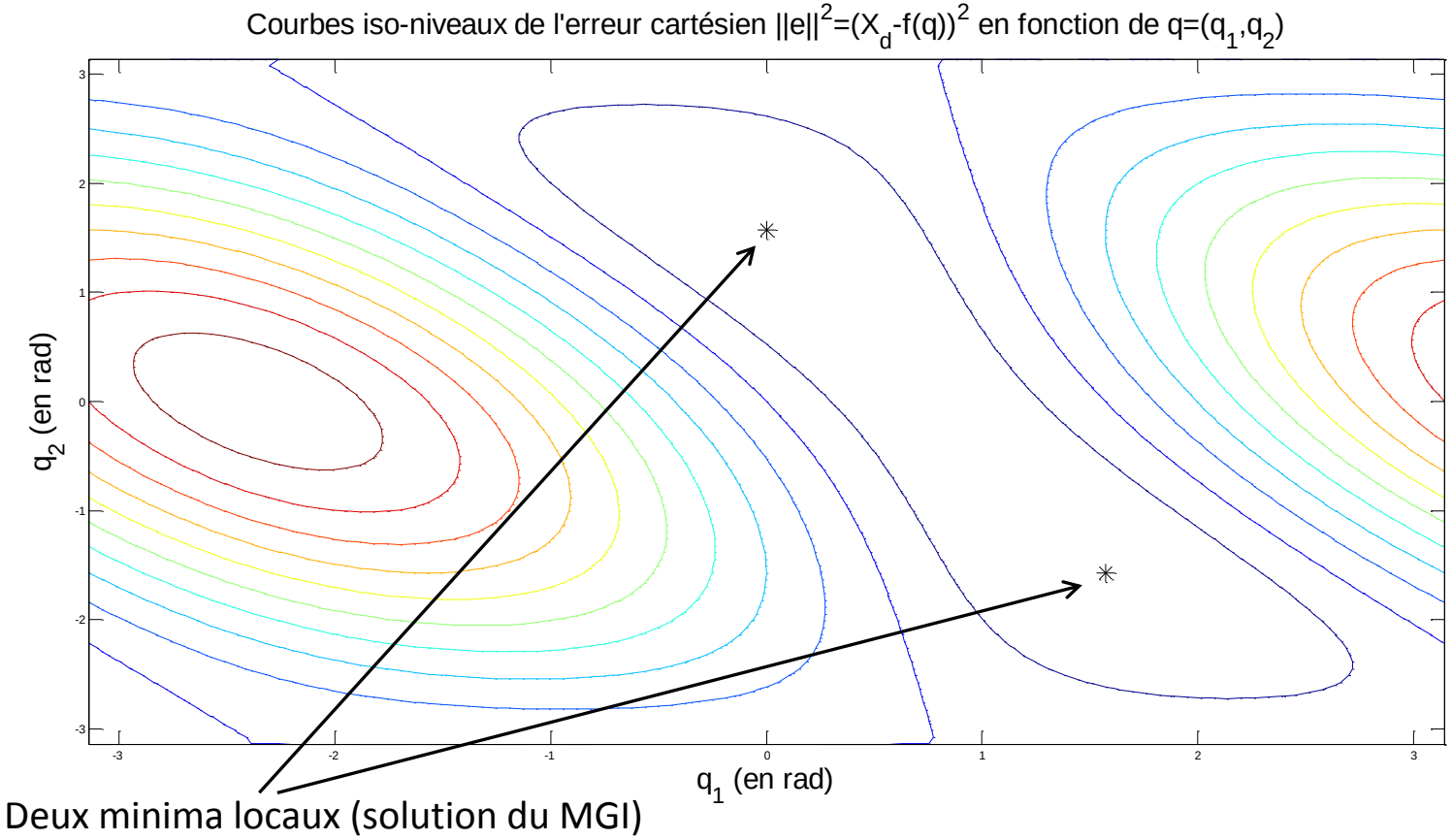
Algorithmes de calcul numérique du MGI

Cas d'étude du robot 2R en considérant $X_d = (1, 1)$ et $l_1 = l_2 = 1$.



Algorithmes de calcul numérique du MGI

Cas d'étude du robot 2R en considérant $X_d = (1, 1)$ et $l_1 = l_2 = 1$.



Couple de solutions issues de la formulation explicite : $\left(q_1^{'}, q_2^{'}\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ et $\left(q_1^{''}, q_2^{''}\right) = \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

Algorithmes de calcul numérique du MGI

- Procédure d'optimisation itérative

$k \leftarrow 0$
while $\left\| J^t\left(q_k\right) \right\| > \epsilon$ **do**
  $k \leftarrow k + 1$
  ▷ *Cas de la méthode du Gradient*
  $q_k \leftarrow q_{k-1} + \alpha J^t\left(q_{k-1}\right)\left[X_d - f(q_{k-1})\right]$
  ▷ *Cas de la méthode de Newton-Raphson*
  $q_k \leftarrow q_{k-1} + J^{-1}\left(q_{k-1}\right)\left[X_d - f(q_{k-1})\right]$
end while
$q^* \leftarrow q_{k+1}$
return (q^*)

Algorithmes de calcul numérique du MGI

- Procédure d'optimisation itérative

$k \leftarrow 0$
while $\left\| J^t\left(q_k\right) \right\| > \epsilon$ **do**
  $k \leftarrow k + 1$
  ▷ *Cas de la méthode du Gradient*
  $q_k \leftarrow q_{k-1} + \alpha J^t\left(q_{k-1}\right)\left[X_d - f(q_{k-1})\right]$
  ▷ *Cas de la méthode de Newton-Raphson*
  $q_k \leftarrow q_{k-1} + J^{-1}\left(q_{k-1}\right)\left[X_d - f(q_{k-1})\right]$
end while
$q^* \leftarrow q_{k+1}$
return (q^*)

- Difficultés liées à ces méthodes
  - Manque de convergence lorsque l'erreur $e = X_d - f(q_{k-1})$ appartient au noyau de J^t ou dans le cas de configurations singulières ;
  - Initialisations multiples avec q_0 différents pour éviter les minima locaux ;
  - Recherche d'un pas adaptatif pour choisir le meilleur α à chaque itération ;
  - Considération des butées articulaires seulement à l'issue de l'algorithme.

Algorithmes de calcul numérique du MGI

- Procédure d'optimisation itérative

$k \leftarrow 0$
while $\left\| J^t(q_k) \right\| > \epsilon$ **do**
  $k \leftarrow k+1$
  ▷ *Cas de la méthode du Gradient*
  $q_k \leftarrow q_{k-1} + \alpha J^t(q_{k-1}) \left[X_d - f(q_{k-1}) \right]$
  ▷ *Cas de la méthode de Newton-Raphson*
  $q_k \leftarrow q_{k-1} + J^{-1}(q_{k-1}) \left[X_d - f(q_{k-1}) \right]$
end while
$q^* \leftarrow q_{k+1}$
return (q^*)

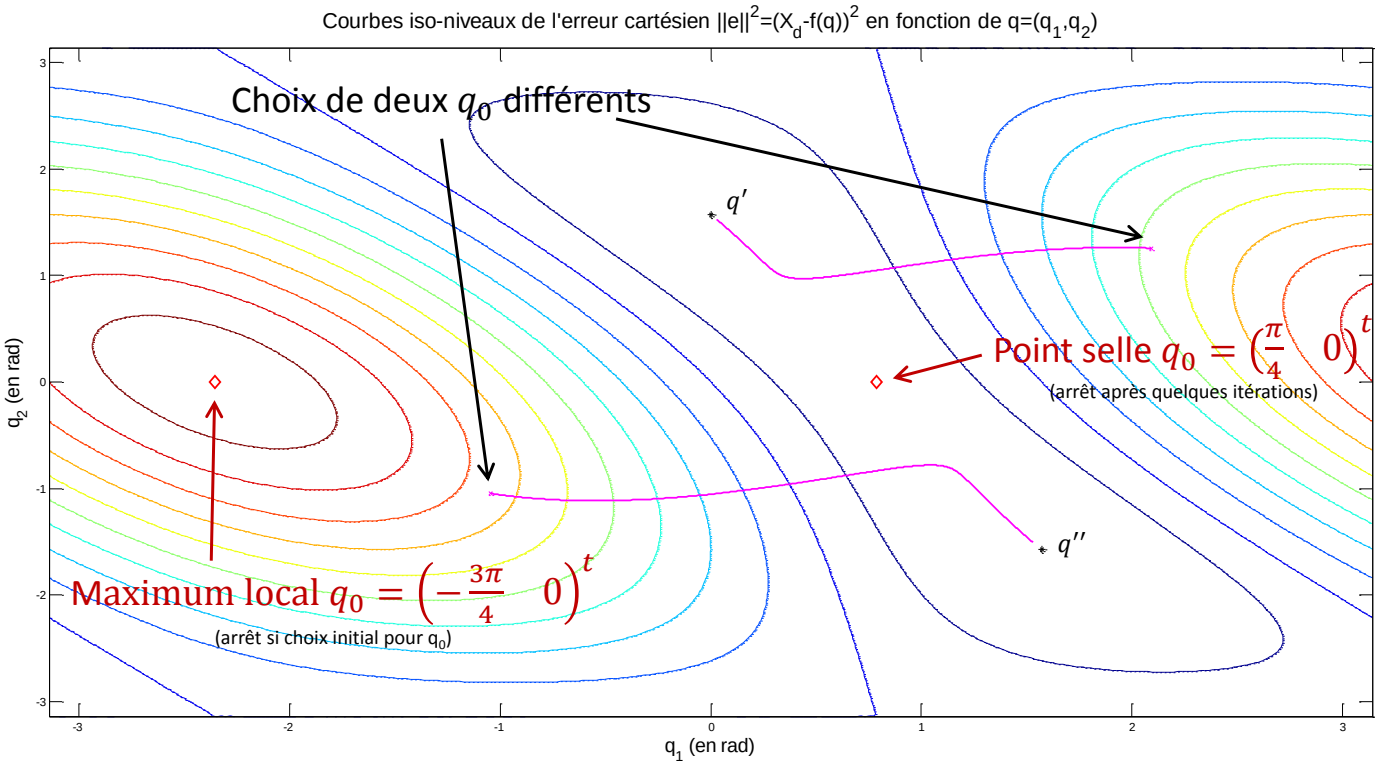
- Difficultés liées à ces méthodes
  - Manque de convergence lorsque l'erreur $e = X_d - f(q_{k-1})$ appartient au noyau de J^t ou dans le cas de configurations singulières ;
  - Initialisations multiples avec q_0 différents pour éviter les minima locaux ;
  - Recherche d'un pas adaptatif pour choisir le meilleur α à chaque itération ;
  - Considération des butées articulaires seulement à l'issue de l'algorithme.

- Remarques
  - Possibilités de combiner la méthode du Gradient pour les premières itérations (sûre mais avec taux de convergence lent) et la méthode de *Newton-Raphson* ensuite (taux de convergence quadratique) ;
  - Autres critères d'arrêt envisageables ;
    - erreur cartésienne $\|X_d - f(q_k)\| < \epsilon_x$
    - erreur articulaire $\left\| q_k - q_{k-1} \right\| < \epsilon_q$
  - Dans le cas d'une résolution en-ligne :
    - exécution de l'algorithme itératif à chaque échantillon $t_0, \ldots, t_{k-1}, t_k = t_{k-1} + T_e, \ldots, t_f$;
    - choix "raisonnable" de q_{0_k} à t_k étant la solution du problème précédent à t_{k-1} ;
    - précaution lors du passage des singularités ;
  - Méthodes basées sur l'inverse de la matrice jacobienne aussi utilisées pour la commande cinématique le long d'une trajectoire continue $X_d(t)$.

Algorithmes de calcul numérique du MGI

Cas d'étude du robot 2R en considérant $X_d = (1, 1)$ et $l_1 = l_2 = 1$.

- Analyse de la convergence de l'algorithme



- Cas de non-convergence lorsque la matrice jacobienne $J(q)$ est singulière en q et que l'erreur e appartient au noyau de $J^t(q)$.

Exemple

Inversion du modèle cinématique

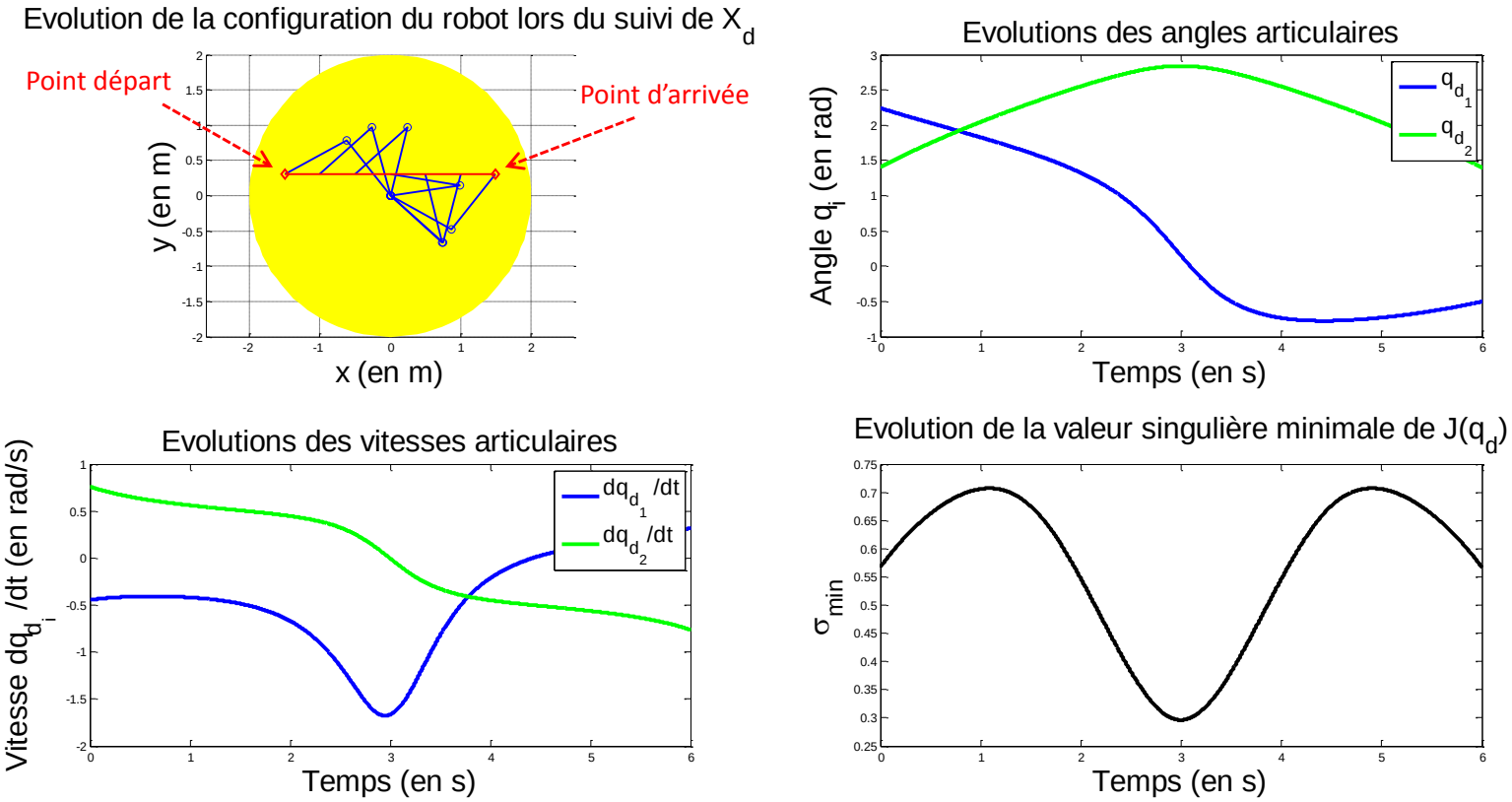
Utilité du modèle cinématique inverse

1. Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}$ permettant de réaliser la vitesse $\dot{X}$ selon $\dot{X} = J(q)\dot{q}$: recherche de technique d'inversion de $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dans le cas général.
2. Modèle cinématique différentiel inverse pour la commande incrémentale de la trajectoire de l'organe terminal au cours du temps par une loi horaire dans l'espace opérationnel $X_d(t)$:
   - Poursuite de la trajectoire $X_d(t)$ par l'organe terminal du robot consistant à fournir à sa commande numérique une succession de valeurs X_{d_k} (indice k correspondant à l'instant d'échantillonnage $t_k = kT_e$) ;
   - Transformateur de coordonnées nécessaire pour fournir aux asservissements des axes la série de valeurs de consignes q_{d_k} correspondant aux X_{d_k} ;
     - exécution de l'algorithme itératif précédent à chaque échantillon $t_0, \ldots, t_k, \ldots, t_f$: $q \leftarrow q + J^{-1}(q)\left(X_{d_k} - f(q)\right)$ (en général, 1 ou 2 itérations suffisent) ;
     - choix "raisonnable" de q_{0_k} à t_k étant la solution $q_{d_{k-1}}$ du problème précédent à t_{k-1} ;
   - Problèmes éventuels justifiant la recherche de techniques d'inversion plus robustes :
     - franchissement d'une configuration singulière (cas où $J(q)$ non-inversible) ;
     - faisabilité de la réalisation des vitesses et accélérations articulaires demandées ;
     - robots redondants ou sous-déterminés (cas où $J(q)$ non-carrée)

Inversion du modèle cinématique dans le cas régulier ($M = N$)

Cas d'étude du robot 2R.

- Analyse du comportement de $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X}_d$ dans le cas régulier



Suivi de trajectoire rectiligne $X_d(t)$ à vitesse constante $v = 0.5$ m/s pendant $T = 6$s.

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

- Robots pourvus de plus d'articulations que nécessaire pour atteindre une configuration arbitraire dans l'espace de travail
- Infinité de solutions au problème de cinématique inverse, parmi lesquelles on peut choisir celle qui est *la plus proche possible* d'une configuration particulière ou privilégiée $\dot{q}_0$
- Usage de cette redondance pour :
  - déterminer un mouvement hors singularité permettant d'éviter le cas précédent ;
  - éviter des obstacles ou accroître la dextérité.
- Cinématique inverse en tant que problème d'optimisation quadratique convexe avec contrainte d'égalité :

$$\min_{\dot{q}} \frac{1}{2} (\dot{q} - \dot{q}_0)^t W (\dot{q} - \dot{q}_0),$$
$$\text{s.c.} \quad J(q)\,\dot{q} = \dot{X}_d$$

  - Matrice définie positive $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de pondération de la norme $\|\dot{q} - \dot{q}_0\|_W$ pour :
    - donner *plus ou moins de poids* à la position ou à l'orientation ;
    - optimiser l'énergie cinétique développée dans le mouvement : $\frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\,\dot{q}$, etc.
  - Notons que dans ce problème les contraintes cinématiques sont totalement satisfaites, ce qui signifie que la position souhaitée dans l'espace de travail est rigoureusement atteinte (sous réserve que $\dot{X}_d \in Im(J)$).

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Solution de l'optimisation quadratique

La solution générale au problème de cinématique inverse dans le cas redondant s'écrit :

$$\dot{q}^* = J_W^\sharp \dot{X}_d + \left(I_n - J_W^\sharp J\right) \dot{q}_0$$

- Solution particulière du problème $J_W^\sharp \dot{X}_d$, celle de norme pondérée minimale (pour $\dot{q}_0 = 0$), où :

$$J_W^\sharp = W^{-1} J^t \left(J W^{-1} J^t\right)^{-1}$$

- Ensemble des solutions homogènes ($J\dot{q} = 0$) pouvant être déterminées en utilisant la projection orthogonale de $\dot{q}_0$ sur le noyau de J donnée par $\left(I_n - J_W^\sharp J\right)$

Démonstration

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Cas particulier où $W = I_n$:

- Solution générale du problème de norme non-pondérée :

$$\dot{q}^* = \underbrace{J^\sharp \dot{X}_d}_{\substack{\text{Solution particulière} \\ \text{(ici la pseudo-inverse)}}} + \underbrace{\left(I_n - J^\sharp J\right) \dot{q}_0}_{\substack{\text{Projection orthogonale} \\ \text{de } \dot{q}_0 \text{ sur } N(J)}}$$

- Matrice pseudo-inverse à droite définie par $J^\sharp = J^t \left(JJ^t\right)^{-1}$:
  - Inverse de *Moore-Penrose* $\dot{q}^* = J^\sharp \dot{X}_d$ (fonction *pinv()* de *Matlab*^{TM}) définie comme l'unique solution de

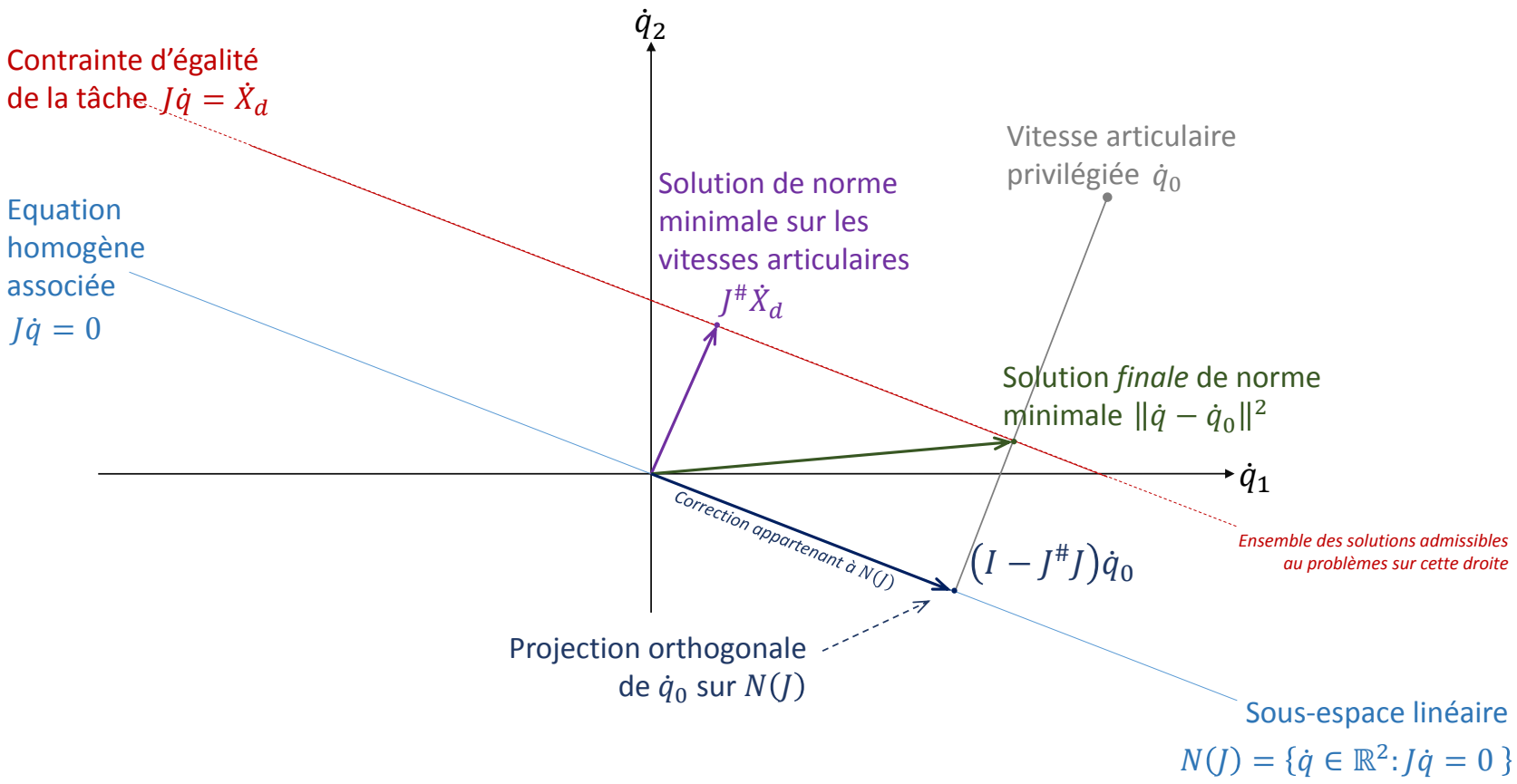
$$\min_{\dot{q}} \frac{1}{2} \|\dot{q}\|^2$$

    pour $\dot{X}_d$ désiré (si $Rg\,(J) = M$, i.e. rang ligne plein).
  - $J^\sharp$ dite *pseudo-inverse* de J dans la mesure où il ne s'agit pas d'une véritable inverse (en effet, $JJ^\sharp = I_m$ - *pseudo-inverse à droite* - mais $J^\sharp J \neq I_n$) ;
- Propriétés du projecteur $N_J = \left(I_n - J^\sharp J\right)$:
  1. Symétrie : $\left(I_n - J^\sharp J\right)^t = \left(I_n - J^\sharp J\right)$;
  2. Idempotence : $\left(I_n - J^\sharp J\right)^2 = \left(I_n - J^\sharp J\right)$;
  3. Orthogonalité entre $J^\sharp \dot{X}_d$ et $\left(I_n - J^\sharp J\right) \dot{q}_0$.
  4. Invariance par pseudo-inversion : $\left(I_n - J^\sharp J\right)^\sharp = \left(I_n - J^\sharp J\right)$.

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Illustration dans l'espace des vitesses articulaires pour le cas $n = 2$ et $m = 1$ en une configuration donnée $\overline{q} = (\overline{q}_1, \overline{q}_2)$:

$$J(\overline{q})\,\dot{q} = \dot{X}_d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \dot{X}_d$$



Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Tâche secondaire dans l'espace articulaire

- Terme $\left(I_n - J^\sharp J\right)\dot{q}_0$ appartenant au noyau de J :
  - Pas d'influence sur la valeur de $\dot{X}_d$;
  - Description physique de certains mouvements internes du robot ;
  - Utilisation permettant de satisfaire des contraintes d'optimisation supplémentaires en projetant une tâche secondaire sur le noyau de la matrice jacobienne.
- Recherche des configurations privilégiées par la technique du *gradient projeté*
  - Choix d'une fonction objectif H différentiable, scalaire et définie positive :

$$\dot{q}_0 = -\alpha \nabla_q H(q) = -\alpha \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

    où le terme $\alpha > 0$ représente le compromis entre les objectifs de minimisation de $\frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2$ et de $H(q)$.
  - Diminution de la valeur prise par $H(q)$ à chaque itération lors de l'exécution de la tâche $\dot{X}_d(t)$.

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Quelques cas usuels pour le choix de $H(q)$:

- Éloignement des butées ($q_i \in [q_{min}, q_{max}]$) [6] :

$$H_{but.}(q) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{q_i - \overline{q}_i}{q_{max} - q_{min}} \right)^2 \quad où \quad \overline{q}_i = \frac{q_{max} - q_{min}}{2}$$

- Augmentation de la manipulabilité (en lien avec les ellipsoïdes de vitesse) :

$$H_{man.}(q) = \sqrt{\det\left(J(q)\, J^t(q)\right)}$$

(maximisation de la distance aux singularités)

- Évitement ou recherche de configurations articulaires particulières au travers d'un champ de forces dérivant de fonctions potentielles attractives ou répulsives [13]
- Évitement d'obstacles en maximisant la distance minimale cartésienne du robot aux obstacles :

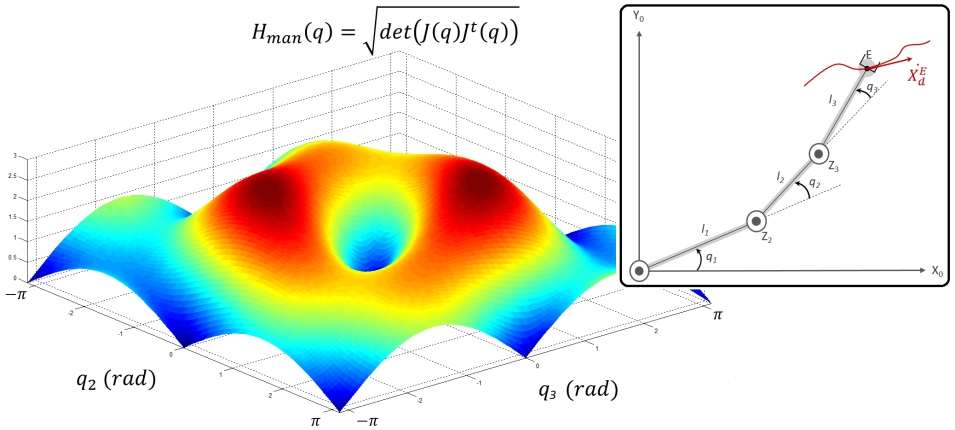
$$H_{obs.}(q) = \min_{\substack{\text{a : robot} \\ \text{b : obstacles}}} \|a(q) - b\|_2$$

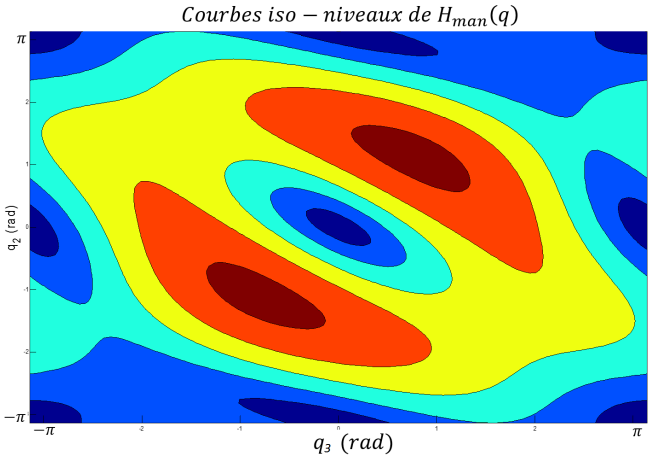
(difficultés éventuelles liées à non-différentiabilité - problème max-min)

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Etude de la manipulabilité : positionnement de l'effecteur E avec le robot planaire RRR (corps choisis de longueurs unitaires)

$$H_{man.}(q) = \sqrt{\det\left(J(q)\,J^t(q)\right)}$$





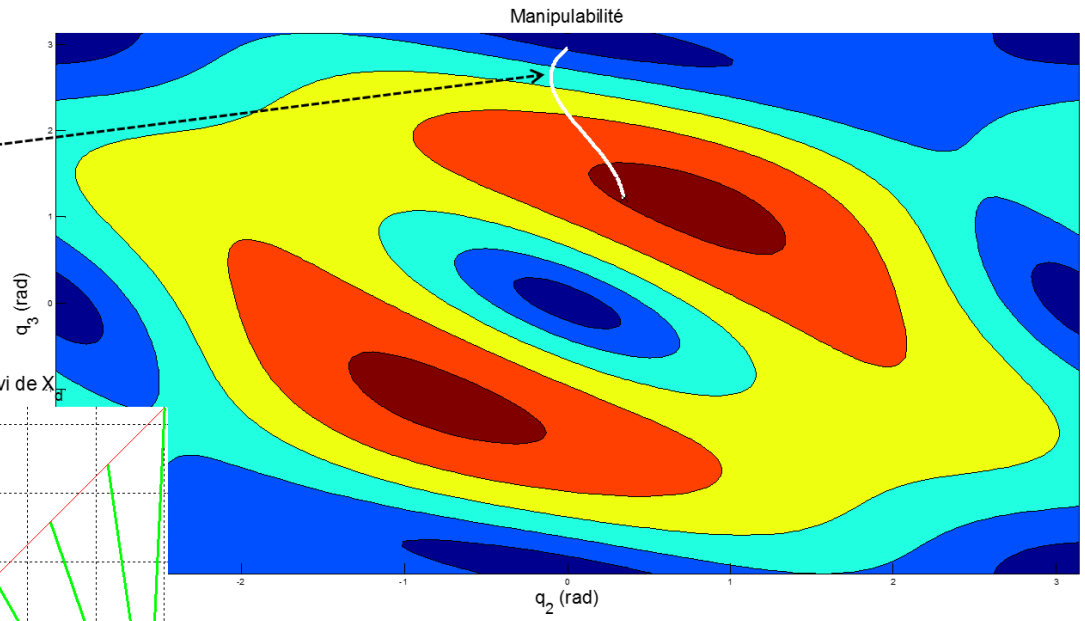
- Redondance d'ordre 1 ($M = 2$ et $N = 3$) ;
- Fonction potentielle indépendante de q_1 ;
- Minima de H_{man} pour q_2 et q_3 appartenant à $\{-\pi; 0; \pi\}$.

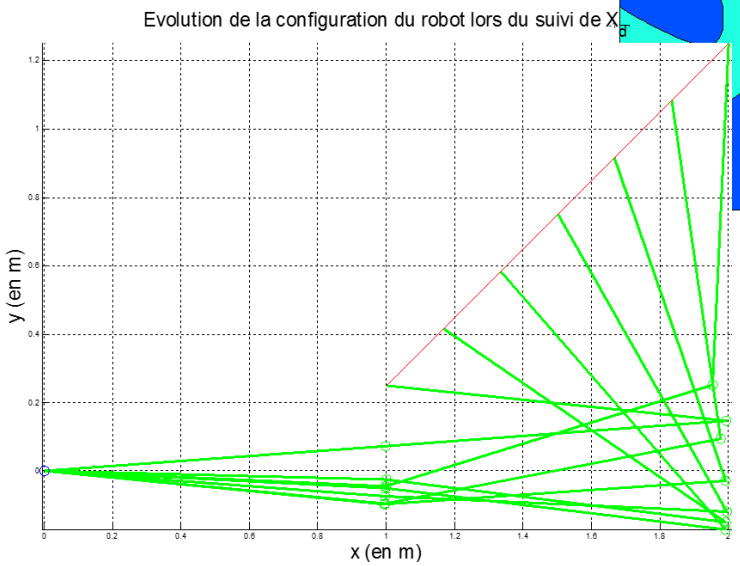
Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

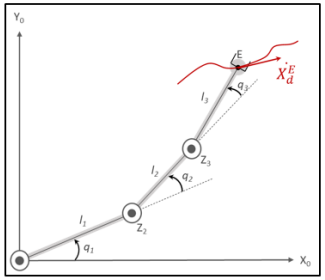
Etude de la manipulabilité : positionnement de l'effecteur E avec le robot planaire RRR (corps choisis de longueurs unitaires)

Chemin suivi dans l'espace des configurations pour maximiser la manipulabilité

Direction du gradient $\nabla H_{man.}(q)$







Robot plan RRR avec suivi de vitesse cartésienne imposée

$${}^{0}\dot{X}_d^E = [1 \quad 1]^t$$

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

Prise en compte de priorités par projection dans l'espace des noyaux successifs des différentes tâches :

- Description des tâches à effectuer simultanément selon l'ordre d'importance :
  - Tâche prioritaire $\dot{X}_{d_1}$ associée à $J_1(q)$:

$$\dot{X}_{d_1} = J_1(q)\dot{q}$$

  - Tâche secondaire $\dot{X}_{d_2}$ associée à $J_2(q)$:

$$\dot{X}_{d_2} = J_2(q)\dot{q}$$

- Formulation générale de la solution :

$$\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + \left(J_2 N_{J_1}\right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1}\right)$$

où nous utilisons la notation contractée N_{J_1} pour désigner le projecteur dans l'espace du noyau de J_1 : $N_{J_1} = \left(I - J_1^\sharp J_1\right)$.

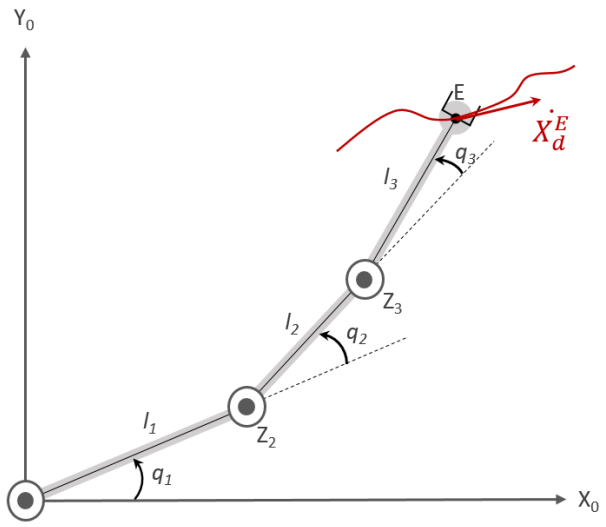
Démonstration

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

Cas du robot planaire RRR avec spécification de la vitesse de translation de l'organe effecteur ($M = 2$) :

Retour sur l'exemple 10



(longueurs des corps unitaires)

1. Étant donnée une vitesse désirée de l'organe effecteur ${}^0\dot{X}_d^E(t) = (1,1)^t$, recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_1^*(t)$ (évaluation numérique réalisée lorsque le robot est en configuration $\overline{q} = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)^t$). ;
2. Recherche de $\dot{q}_2^*(t)$ respectant l'objectif précédent en ajoutant $\dot{q}_1$ et $\dot{q}_2$ nuls (évaluation en $\overline{q}$).

Exemple

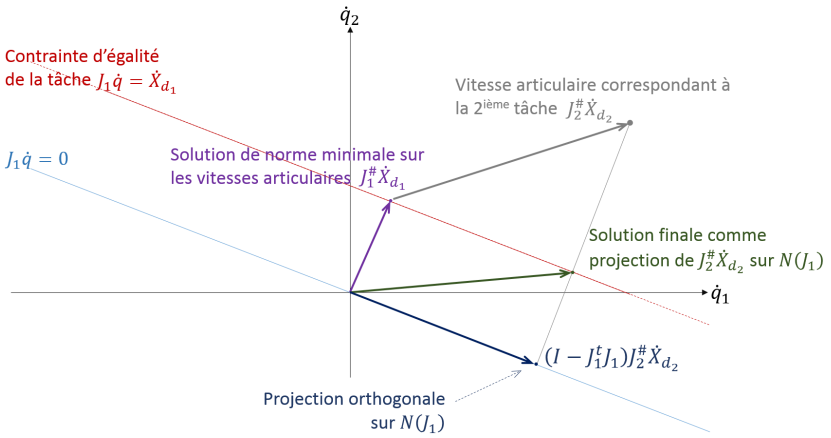
Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

Formulation alternative :

- Détermination de la solution pour la tâche secondaire puis projection sur le noyau de J_1 :

$$\dot{q}^* = \underbrace{J_1^\sharp \dot{X}_{d_1}}_{\text{Tâche primaire}} + N_{J_1} \underbrace{\left(J_2^\sharp \dot{X}_{d_2}\right)}_{\text{Tâche secondaire}}$$



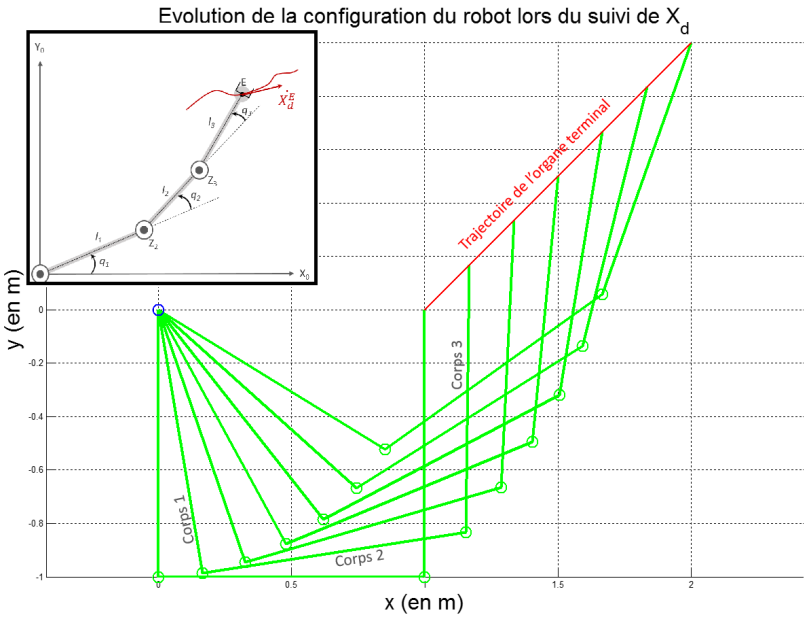
- Pour des systèmes hautement redondants, possibilité de mise en cascade de plusieurs tâches selon

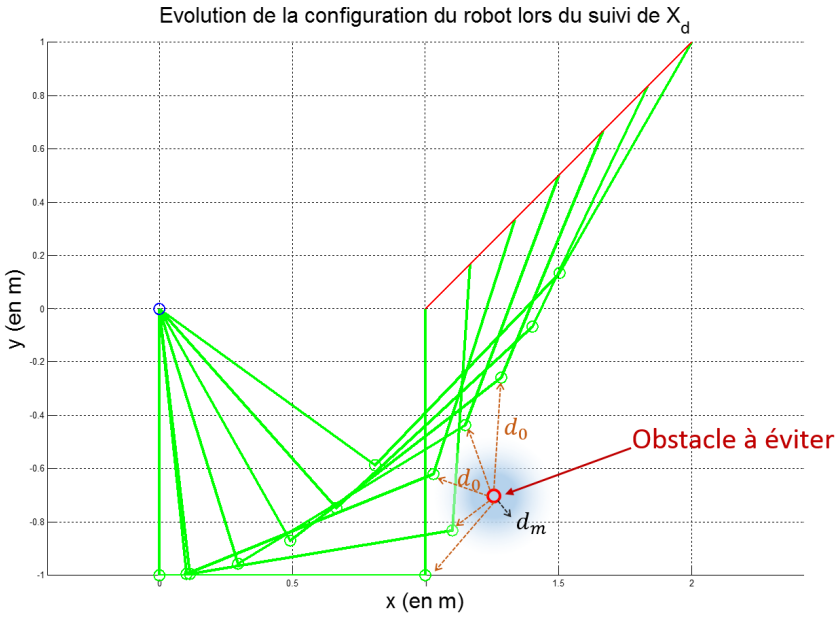
$$\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1}\left(J_2^\sharp \dot{X}_{d_2} + \left(N_{J_1} \cap N_{J_2}\right)\left(J_3^\sharp \dot{X}_{d_3} + \ldots\right)\right)$$

le vecteur $J_3^\sharp \dot{X}_{d_3}$ étant ici projeté sur l'intersection des noyaux de J_1 et de J_2 pour ne perturber aucune des deux tâches.

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Etude de l'évitement d'obstacle : poursuite de trajectoire de l'organe terminal à vitesse de translation imposée $\dot{X}_d^E(t) = (1,1)^t$ avec un robot planaire RRR





Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant ($M < N$)

Etude de l'évitement d'obstacle : poursuite de trajectoire de l'organe terminal à vitesse de translation imposée $\dot{X}_d^E(t) = (1,1)^t$ avec un robot planaire RRR

- Recherche de $\dot{q}_2$ pour l'évitement d'un obstacle ponctuel, en tant que solution de

$$\min_{\dot{q}_2} \left\| \dot{X}_2(t) - J_2 \dot{q}_2 \right\|_2$$

où

- $\dot{X}_2(t)$ suit la loi de répulsion suivante :

$$\dot{X}_2(t) = \alpha(t)\, v_0 n_0(t)$$

avec :

- le coefficient de répulsion α défini selon :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \left(\frac{d_m}{\|d_0\|}\right)^2 - 1 & \text{si} \quad \|d_0\| < d_m \\ 0 & \text{si} \quad \|d_0\| \geq d_m \end{cases}$$

- v_0 une vitesse nominale choisie arbitrairement ;
- d_0 désigne la distance entre le point d'obstacle et l'extrémité du 2ième segment selon le vecteur unitaire n_0 ;
- d_m la distance correspondant au rayon d'influence ;

- J_2 la matrice jacobienne associée à l'extrémité du 2ième segment.

- Configuration articulaire finale du type :

$$\dot{q}^* = J^\sharp \dot{X}_d^E(t) + \left(I_n - J^\sharp J\right) J_2^\sharp \dot{X}_2$$

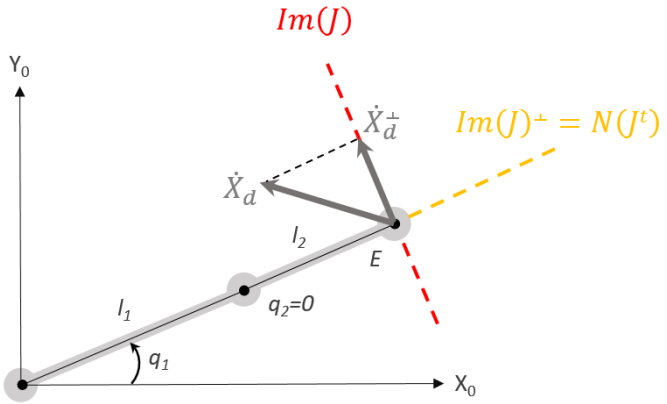
Inversion du modèle cinématique dans le cas singulier ($M = N$)

Méthode de la pseudo-inverse :

- Configuration singulière q limitant la capacité à générer des mouvements arbitraires, et formalisée par une perte de rang de $J(q)$:

$$Rg(J) = r < M$$

- Plusieurs cas possibles dans une configuration singulière :
  1. Si $\dot{X}_d \in Im(J)$ exclusivement, alors la contrainte $J(q)\dot{q} = \dot{X}_d$ est satisfaite (la vitesse est réalisable bien que l'inverse J^{-1} ne soit pas définie) ;
  2. Sinon, la contrainte $J(q)\dot{q} = \dot{X}_d$ n'est pas satisfaite : $J\dot{q}^* = \dot{X}_d^{\perp}$ où $\dot{X}_d^{\perp}$ est la projection orthogonale de $\dot{X}_d$ sur $Im(J)$ (espace des vitesses réalisables), de sorte que l'erreur $\left\| J(q)\dot{q}^* - \dot{X}_d \right\|$ soit minimum.
     - Notons, que dans le cas particulier où $\dot{X}_d \in Im(J)^{\perp}$ exclusivement (i.e. $\dot{X}_d \in N(J^t)$), alors la solution par la méthode de la pseudo-inverse fournit $\dot{q} = 0$ (vitesse non-réalisable, puisque $\dot{X}_d^{\perp} = 0$).



$$\dot{q} = J^{\#}\dot{X}_d$$

vecteur vitesse articulaire de norme minimale générant $\dot{X}_d^{\perp}$

Inversion du modèle cinématique dans le cas singulier ($M = N$)

Méthode de la pseudo-inverse :

- Problème de minimisation des normes euclidiennes de la vitesse articulaire et de l'erreur cartésienne :

$$\min_{\dot{q} \in \mathscr{S}} \frac{1}{2} \|\dot{q}\|, \quad avec \quad \mathscr{S} = \left\{ \dot{q} \in \mathbb{R}^n : \left\| J(q)\,\dot{q} - \dot{X}_d \right\| \text{ est minimum} \right\}.$$

  dont la solution est définie par la pseudo-inverse, notée $J^\sharp$, de J :

$$\dot{q}^* = J^\sharp \dot{X}_d.$$

- Solution du problème de cinématique inverse à l'aide de la *pseudo-inverse* :
  - Solution *exacte et unique hors des configurations singulières* (car $J^\sharp = J^{-1}$ dans ce cas), mais solution pas acceptable au voisinage des positions singulières (utilisation du modèle cinématique inverse avec un mauvais conditionnement de J pouvant entraîner des vitesses articulaires importantes, incompatibles avec les caractéristiques des actionneurs) ;
  - Solution approchée *sur une configuration singulière* permettant quand même de calculer la vitesse articulaire de norme minimale $\dot{q}$, parmi celles qui minimisent la norme $\left\| J(q)\,\dot{q} - \dot{X}_d \right\|$ (priorité donnée au suivi de trajectoire).
  - Passage discontinu d'une solution à l'autre :

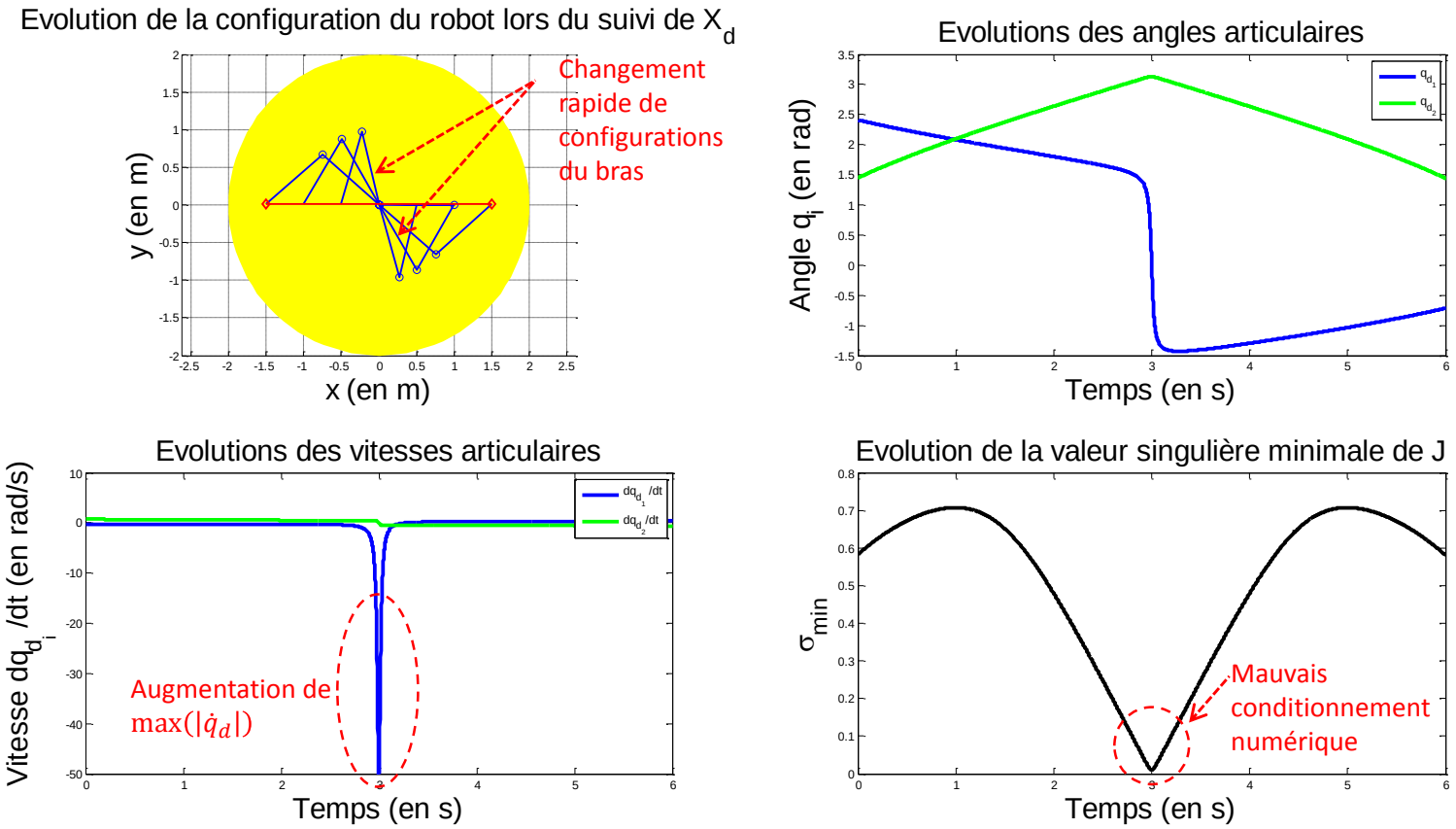
$$\dot{q}^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\sigma_i} V_i U_i^t \dot{X}_d$$

    en s'approchant d'une singularité $\sigma_{min} \to 0$ ($\|\dot{q}\|$ élevée), puis $\sigma_{min} = 0$ (somme s'arrêtant à $m-1$) entraînant une discontinuité lors du franchissement de la singularité.

Inversion du modèle cinématique dans le cas singulier ($M = N$)

Cas d'étude du robot 2R.

- Analyse du comportement de $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X}_d$ dans le cas proche de la singularité



- Nouvelle trajectoire de consigne $X_d(t)$ proche du cas singulier ($\min_{t_k} \{\sigma_{min}(J(q_d)\} \approx 0$) ;
- Augmentation de $max\,|\dot{q}_i|$ au voisinage des configurations sngulières.

Inversion du modèle cinématique dans le cas singulier ($M = N$)

Inversion par la méthode des moindres carrés amortis

Afin de diminuer les vitesses articulaires excessives à proximité des singularités, on peut envisager de tolérer une *erreur sur le suivi de trajectoire*, en remplaçant le problème d'inversion $\dot{x}_d = J(q_d)\,\dot{q}$ par le problème de minimisation suivant [27] :

$$\min_{\dot{q}} \left\{ \frac{1}{2} \left\| J(q)\,\dot{q} - \dot{X}_d \right\|^2 + \frac{\lambda^2}{2} \|\dot{q}\|^2 \right\}, \quad \lambda \geq 0.$$

- Cinématique inverse vue comme un problème d'optimisation :
  - 1^{ier} terme de la fonction objectif représentatif de la norme de l'erreur de trajectoire ;
  - 2ième terme de la fonction objectif représentatif de la norme de la vitesse articulaire ;
- Rôle du coefficient λ :
  - coefficient de pondération portant le nom de *facteur d'amortissement* ;
  - choix de $\lambda = 0$ en configuration éloignée des singularités, puis $\lambda > 0$ lorsque $\sigma_{min}(J(q))$ proche de 0) ;
  - lorsque $\lambda > 0$, diminution (*amortissement*) de l'amplitude de la vitesse articulaire $max\,|\dot{q}_i|$ obtenue au prix d'une erreur de trajectoire en vitesse $\epsilon_{\dot{X}} = \lambda^2 \left(\lambda^2 I_m + JJ^t\right)^{-1}$
- Solution du problème étant celle qui minimise la norme de l'erreur de trajectoire par rapport à toute autre solution $\dot{q}$ de norme inférieure ou égale.

Inversion du modèle cinématique dans le cas singulier ($M = N$)

Inversion par la méthode des moindres carrés amortis

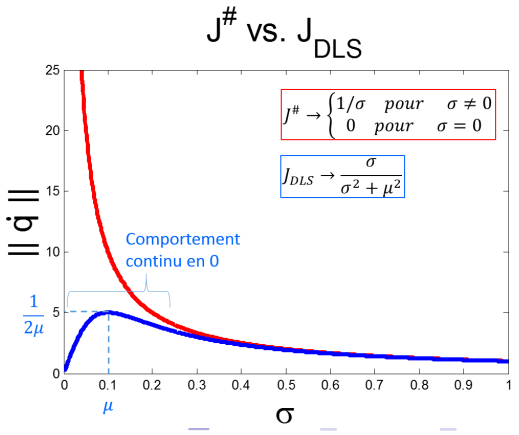
- Solution au problème d'inversion par la méthode des moindres carrés amortis :

$$\dot{q}^* = \left(\lambda^2 I_n + J^t J\right)^{-1} J^t \dot{X}_d = \underbrace{J^t \left(\lambda^2 I_m + J J^t\right)^{-1}}_{J_{DLS}(q)} \dot{X}_d$$

- Recours possible à la matrice jacobienne J_{DLS} aussi bien pour le cas $m = n$ que pour le cas redondant $m < n$ (dans ce cas, on préférera l'expression $J^t \left(\lambda^2 I_m + J J^t\right)^{-1}$ pour le calcul de J_{DLS}).
- Ré-écriture de J_{DLS} à partir de sa décomposition en valeurs singulières

$$\dot{q}^* = \sum_{i=1}^{m} \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda^2} V_i U_i^t \dot{X}_d$$

- facteur d'amortissement limitant l'amplitude maximale au détriment de la précision lorsque $\sigma_i << \lambda$;
- facteur d'amortissement peu influençant lorsque $\sigma_i >> \lambda$.

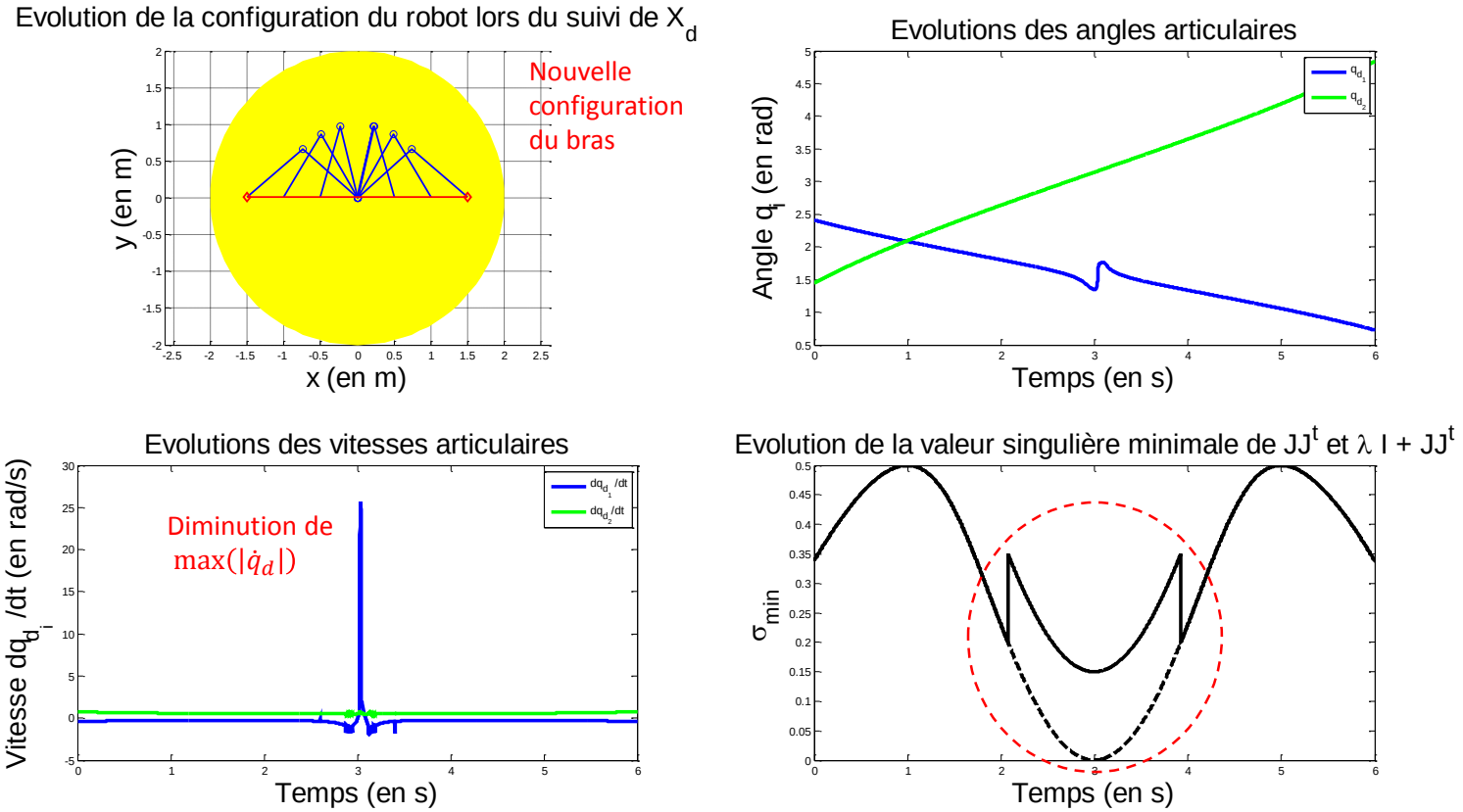


Démonstration

Inversion du modèle cinématique dans le cas singulier ($M = N$)

Cas d'étude du robot 2R.

- Analyse du comportement de $\dot{q} = J_{DLS}(q)\dot{X}_d$ dans le cas proche de la singularité.

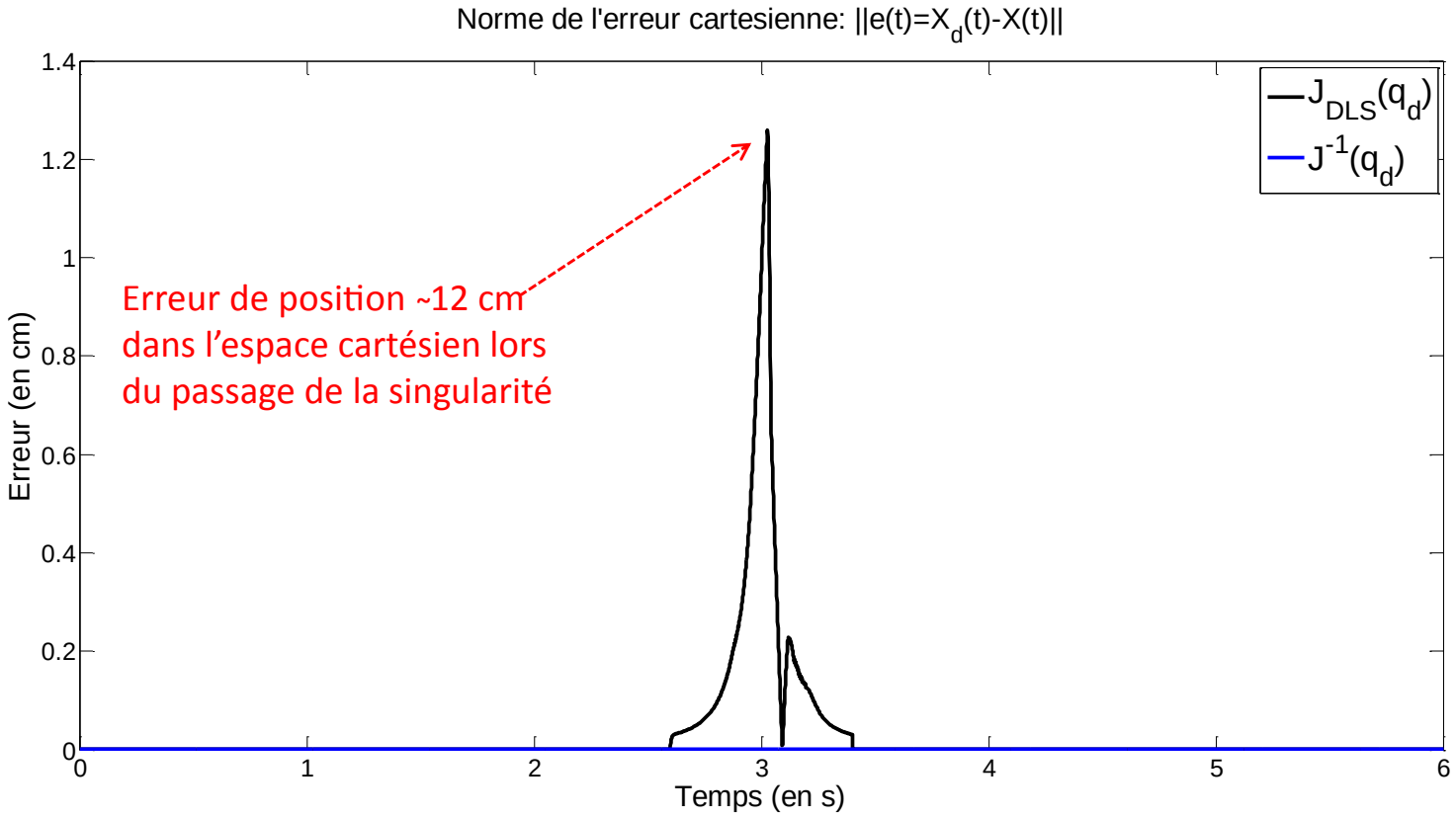


- Physiquement, reconfiguration à grande dynamique du bras évitée !
- Recours au calcul de la pseudo-inverse amortie lorsque $\sigma_{min}(J)$ proche de 0 ;
- Amortissement des vitesses $\dot{q}_i$.

Inversion du modèle cinématique dans le cas singulier ($M = N$)

Cas d'étude du robot 2R.

- Analyse du comportement de $\dot{q} = J_{DLS}(q)\dot{X}_d$ et $\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{X}_d$ sur l'erreur cartésienne dans le cas proche de la singularité.



Inversion du modèle cinématique dans le cas sur-déterminé ($M > N$)

Système contraint : pas de solution exacte au problème cinématique inverse (système dit *incompatible*)

- Situation correspondant en pratique au cas la vitesse désirée ne peut être exactement obtenue ;
- Recherche d'une solution approchée qui minimise la norme euclidienne de l'erreur cartésienne :

$$\frac{1}{2}\left\|J(q)\,\dot{q} * -\dot{X}_d\right\| = \min_{\dot{q}} \frac{1}{2}\left\|J(q)\,\dot{q} - \dot{X}_d\right\|$$

où, si $Rg(J) = N$ (rang plein en colonne), la solution, dite *aux moindres carrés*, vaut $\dot{q}^* = J^\sharp(q)\,\dot{x}_d$ avec

$$J^\sharp(q) = \left(J^t J\right)^{-1} J^t$$

- Propriété d'inversion à gauche : $J(q)^\sharp\, J = I_n$ (mais $JJ(q)^\sharp \neq I_m$) ;

Inversion du modèle cinématique

Récapitualtif sur la matrice pseudo-inverse de *Moore-Penrose* :

1. Si $Rg\,(J) = r = M < N$ (rang ligne plein), alors $J^\sharp = J^t\left(JJ^t\right)^{-1}$ (pseudo-inverse à droite - cas redondant) ;
2. Si $Rg\,(J) = r = M = N$, alors $J^\sharp = J^{-1}$ (cas régulier) ;
3. Si $Rg\,(J) = r = N < M$ (rang colonne plein), alors $J^\sharp = \left(J^tJ\right)^{-1}J^t$ (pseudo-inverse à gauche - cas sur-déterminé).

Propriétés de la matrice pseudo-inverse valables indifféremment des conditions sur le rang de J :

- $JJ^\sharp J = J$, $J^\sharp JJ^\sharp = J^\sharp$, $\left(JJ^\sharp\right)^t = JJ^\sharp$ et $\left(J^\sharp J\right)^t = J^\sharp J$ (matrices hermitiennes) ;
- Algorithmiquement, la pseudo-inverse existe toujours et s'obtient à partir de la décomposition en valeurs singulières de $J = U\Sigma V^t$:

$$J^\sharp = V\Sigma^+U^t \Rightarrow \dot{q} = \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\sigma_i}V_iU_i^t\dot{X}_d$$

où $\Sigma^\sharp$, pseudo-inverse de la matrice diagonale Σ, est une matrice diagonale dont les éléments non nuls sont obtenus en inversant les éléments non nuls (de la diagonale) de Σ :

$$\Sigma^+ = \left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{\sigma_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & \\ & & & 0 \\ \hline & 0_{(N-M)\times(N)} & & \end{array}\right]$$

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Introduction

- Étude des relations dynamiques décrivant le mouvement d'une structure articulée constituée de corps rigides $\mathscr{C}_i$ connectés entre eux ;
- Considérations de deux points de vue complémentaires :
  1. Modèle dynamique *direct*
     Expression des accélérations articulaires à partir des efforts, vitesses et positions articulaires supposées connues
     $$\ddot{q} = n\left(\Gamma, \dot{q}, q\right)$$
     puis, par intégrations successives,
     $$\dot{q} = \int \ddot{q} dt \quad \text{et} \quad q = \int \dot{q} dt$$
     - Utilité pour la simulation du comportement du robot ;
     - Calcul à partir des équations de *Newton-Euler* ou par inversion du modèle dynamique *inverse*.
  2. Modèle dynamique *inverse*
     Expression des efforts articulaires à partir des accélérations, vitesses et positions articulaires supposées connues
     $$\Gamma = h\left(\ddot{q}, \dot{q}, q\right)$$
     - Utilité pour le dimensionnement des actionneurs et la synthèse de lois de commande ;
     - Calcul à partir des équations de *Newton-Euler* ou de *Lagrange*.

Mécanique lagrangienne appliquée aux manipulateurs

- Remplacement des quantités *vectorielles* par des grandeurs *scalaires* :
  - énergie cinétique E_c dans le cas de n corps rigides $\mathscr{C}_i$ connectés entre eux :

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} E_{c_i}$$

  - énergie potentielle E_p dans le cas de n corps rigides $\mathscr{C}_i$ connectés entre eux :

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} E_{p_i}$$

  - travail des forces mécaniques extérieures appliquées au système.
- Système envisagé *globalement* plutôt que de considérer *séparément* chaque composant du mécanisme (offrant l'avantage d'éliminer automatiquement les forces d'interaction associées aux contraintes cinématiques).

Mécanique lagrangienne appliquée aux manipulateurs

- Équations de *Lagrange* d'un manipulateur à N degrés de liberté décrit par n coordonnées généralisées q_i :

$$\psi_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, n$$

où $\mathscr{L}$ définit le *lagrangien* du système :

$$\mathscr{L} = E_c - E_p$$

- Rappelons que ψ_i désigne les forces généralisées non-conservatives (externes ou dissipatives) à l'origine d'un travail mécanique sur q_i.
En robotique, on considère :
  - τ_i : $i^{ième}$ couple articulaire issu du travail mécanique fourni par les actionneurs ;
  - $\left[J(q)^t F_c\right]_i$: terme issu des forces externes de contact avec l'environnement ;
  - $-\tau_{f_i}(\dot{q}_i)$: couple de frottement articulaire

Finalement,

$$\psi_i = \tau_i + \left[J(q)^t F_c\right]_i - \tau_{f_i}(\dot{q}_i)$$

Propriétés inertiels du corps rigide $\mathscr{C}_i$

Corps rigide $\mathscr{C}_i$ de volume $\mathscr{V}_i$ dont le centre de masse G_i est choisi comme origine du repère lié au corps $\mathscr{R}_{G_i} = (G_i, x_i, y_i, z_i)$.

Propriétés de masse du corps :

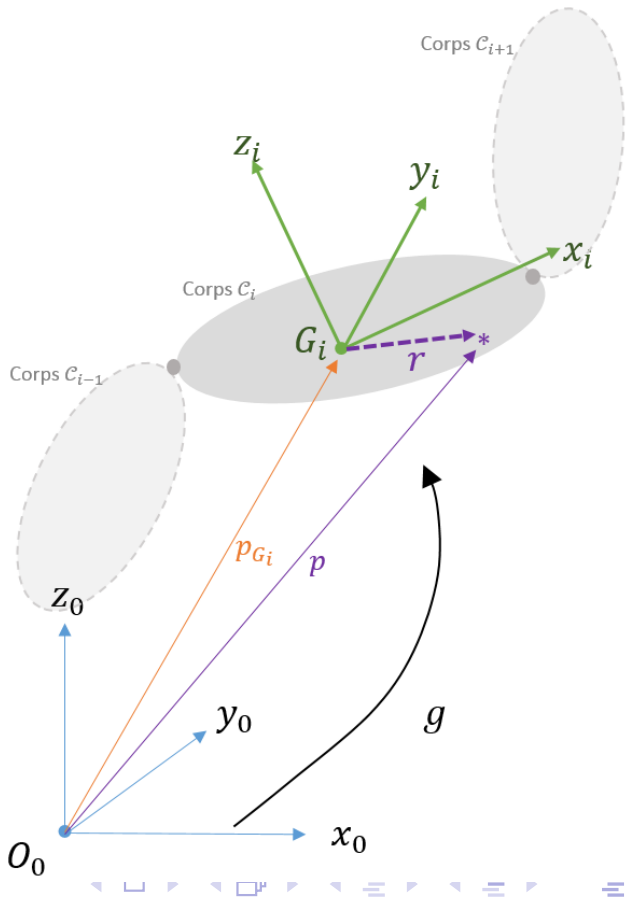
- $r \in \mathbb{R}^3$ définissant les coordonnées d'un point matériel p appartenant à $\mathscr{V}_i$ relativement à $\mathscr{R}_{G_i}$ $(r = p - p_{G_i})$;
- Masse définie par :

$$m_i = \int_{\mathscr{V}_i} \rho(x, y, z)\, d\mathscr{V}_i$$

où le corps est supposé constitué d'un matériau homogène $(\rho(x, y, z) = \rho)$;

- Centre de masse du corps $\mathscr{C}_i$ défini par la moyenne pondérée :

$$p_{G_i} = \frac{1}{m_i} \int_{\mathscr{V}_i} \rho(x, y, z)\, p(x, y, z)\, d\mathscr{V}_i.$$



Propriétés inertiels du corps rigide $\mathscr{C}_i$

Corps rigide $\mathscr{C}_i$ de volume $\mathscr{V}_i$ dont le centre de masse G_i est choisi comme origine du repère lié au corps $\mathscr{R}_{G_i} = (G_i, x_i, y_i, z_i)$.

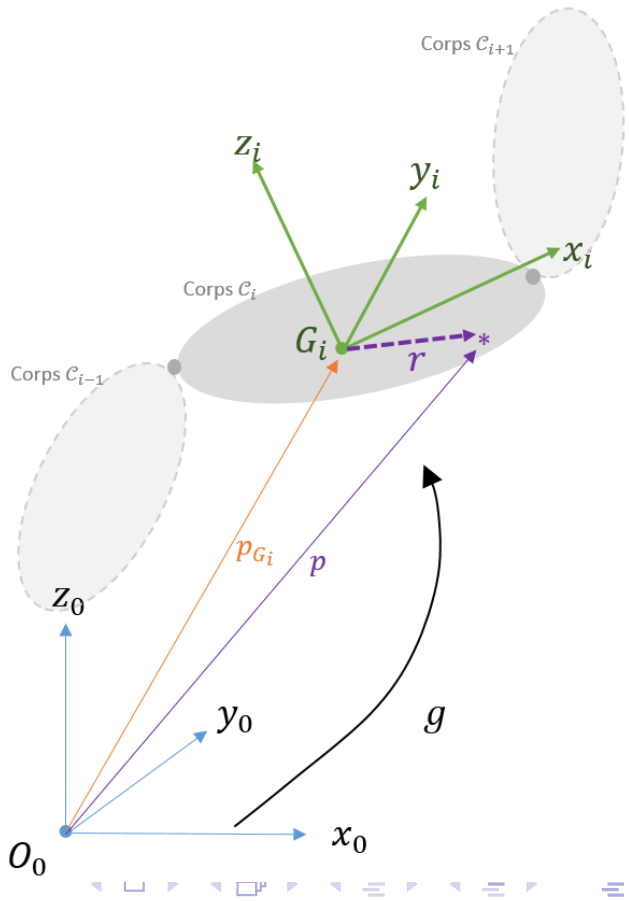
Cinétique de points matériels :

- Transformation du corps $\mathscr{C}_i$ relativement au repère inertiel $\mathscr{R}_0$ donnée par $g = \left(p_{G_i}, R\right) \in SE\,(3)$;
- Vitesse d'un point matériel générique appartenant à $\mathscr{C}_i$ relativement au repère inertiel :

$$\dot{p} = \dot{p}_{G_i} + \dot{R}r$$

- Énergie cinétique du corps évaluée en intégrant l'énergie cinétique des points matériels sur le volume :

$$E_{c_i} = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho\,(x, y, z)\left\|\dot{p}_{G_i} + \dot{R}r\right\|^2 d\mathscr{V}_i.$$

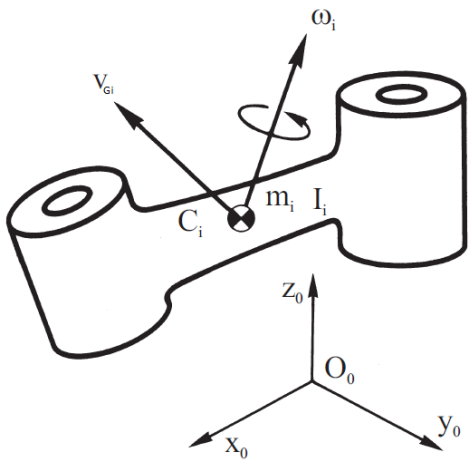


Énergie cinétique du corps rigide $\mathscr{C}_i$

Théorème de *Konig*

L'énergie cinétique du corps rigide $\mathscr{C}_i$ de centre de masse G_i et de masse m_i en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$ se calcule par

$$E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i V_{G_i}^t V_{G_i} + \frac{1}{2} \omega_i^t I_i \omega_i$$



Démonstration

Énergie cinétique du corps rigide $\mathscr{C}_i$

Énergie cinétique $E_{c_i} = \frac{1}{2} m_i V_{G_i}^t V_{G_i} + \frac{1}{2} \omega_i^t I_i \omega_i$ vue comme la somme :

- de l'*énergie cinétique de translation* du corps en supposant toute la masse concentrée au centre de masse G_i (équivalence à un point matériel) ;
- de l'*énergie cinétique de rotation* du corps, où $I_i \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ est la matrice symétrique, appelée *tenseur d'inertie* de l'objet, qui est constante dans le référentiel $\mathscr{R}_{G_i}$ lié au centre de masse du corps $\mathscr{C}_i$:

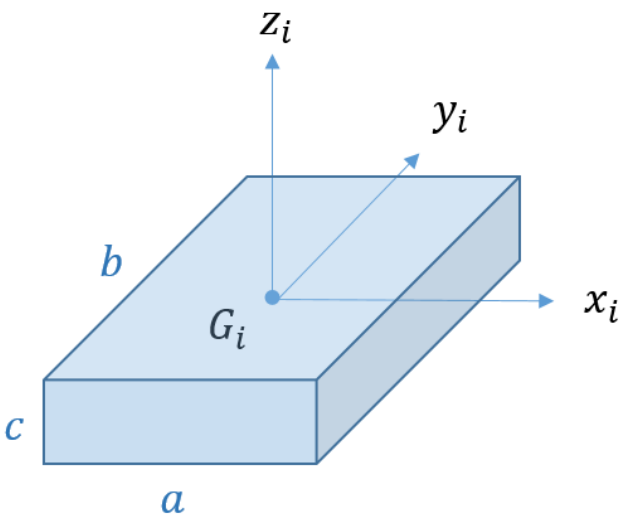
$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \int_{\mathscr{V}_i} \rho \widehat{r}^2 d\mathscr{V}_i$$

Remarque :
Chacun des deux termes de l'énergie cinétique E_{c_i} est invariant par rapport au choix du référentiel utilisé pour exprimer les vitesses (mais ω_i et I_i doivent être exprimés dans le même repère de référence, préférentiellement $\mathscr{R}_{G_i}$).

Énergie cinétique du corps rigide $\mathscr{C}_i$

Tenseur d'inertie : Calcul du tenseur d'inertie évalué au centre de masse :

$$I_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\mathscr{V}_i} \left(y^2+z^2\right) dm_i & -\int_{\mathscr{V}_i} xydm_i & -\int_{\mathscr{V}_i} xzdm_i \\ & \int_{\mathscr{V}_i} \left(x^2+z^2\right) dm_i & -\int_{\mathscr{V}_i} yzdm_i \\ (sym.) & & \int_{\mathscr{V}_i} \left(x^2+y^2\right) dm_i \end{bmatrix}$$



Démonstration

Énergie cinétique du corps rigide $\mathscr{C}_i$

Tenseur d'inertie :

Théorème de *Huygens* généralisé

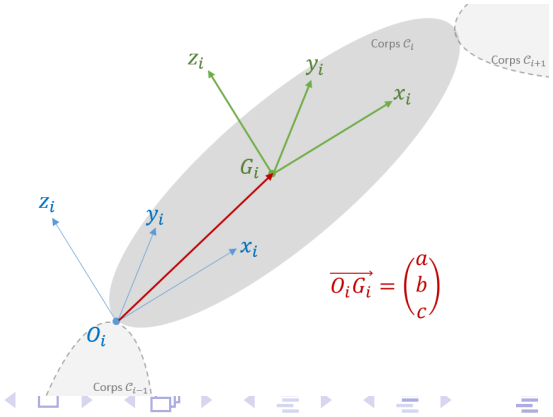
Pour le corps $\mathscr{C}_i$ de masse m_i, le tenseur d'inertie défini à l'origine O_i du repère $\mathscr{R}_i = (O_i, x_i, y_i, z_i)$ s'exprime en fonction du tenseur d'inertie évalué en son centre de masse G_i dans le repère $\mathscr{R}_{G_i} = (G_i, x_i, y_i, z_i)$ selon la *formule de transport* suivante :

$$I_{O_i} = I_{G_i} + m_i \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ (\text{sym.}) & a^2 + c^2 & -bc \\ (\text{sym.}) & (\text{sym.}) & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} XX_i & XY_i & XZ_i \\ (\text{sym.}) & YY_i & YZ_i \\ (\text{sym.}) & (\text{sym.}) & ZZ_i \end{bmatrix}$$

$$I_{O_i} = \begin{bmatrix} I_{xx_i} & I_{xy_i} & I_{xz_i} \\ (\text{sym.}) & I_{yy_i} & I_{yz_i} \\ (\text{sym.}) & (\text{sym.}) & I_{zz_i} \end{bmatrix} + m_i \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & -ab & -ac \\ (\text{sym.}) & a^2 + c^2 & -bc \\ (\text{sym.}) & (\text{sym.}) & a^2 + b^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} XX_i & XY_i & XZ_i \\ (\text{sym.}) & YY_i & YZ_i \\ (\text{sym.}) & (\text{sym.}) & ZZ_i \end{bmatrix}$$

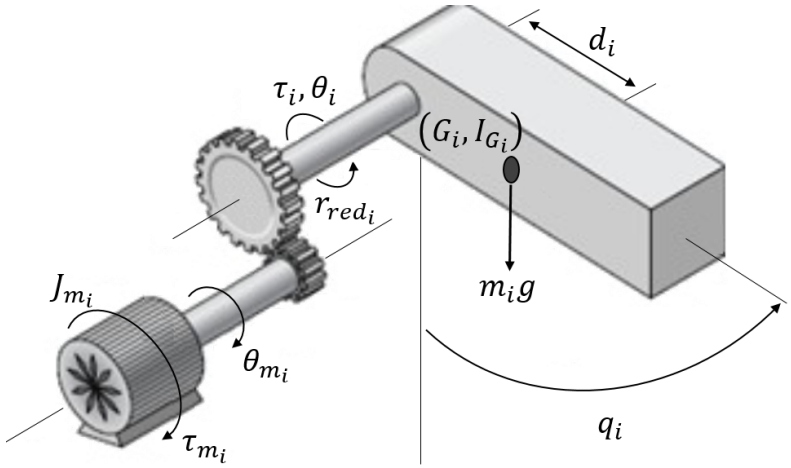


Énergie cinétique des actionneurs

Transmission mécanique actionneur $\rightarrow$ charge associée au corps rigide $\mathscr{C}_i$

- Couple fourni par le moteur τ_{m_i} ;
- Couple articulaire τ_i, équivalent au couple moteur après étage de réduction : $\tau_i = r_{red_i}\tau_{m_i}$;
- Position angulaire moteur θ_{m_i} ;
- Position angulaire moteur après étage de réduction θ_i
  - $\theta_i = \frac{1}{r_{red_i}}\theta_{m_i}$
  - θ_i égal à l'angle articulaire dans le cas d'une transmission mécanique rigide, i.e. $\theta_i = q_i$;

Étude d'un axe robotique en rotation :



- Prise en compte du moment d'inertie J_{m_i} du rotor des actionneurs

$$I_{m_i} = r_{red_i}^2 J_{m_i}$$

avec I_{m_i} l'inertie ramenée côté charge.

- Énergie cinétique de rotation du rotor moteur :

$$E_{c_{m_i}} = \frac{1}{2} I_{m_i} \dot{\theta}_i^2$$

Exemple calcul de l'énergie cinétique de l'axe robotique.

Énergie cinétique du corps rigide $\mathscr{C}_i$

Dépendance de E_{c_i} à q et $\dot{q}$

- Calcul de V_{G_i} à partir de la matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_i du corps $\mathscr{C}_i$ en fonction des vitesses articulaires $\dot{q}$:

$$V_{G_i} = J_{v_{G_i}}(q)\,\dot{q}$$

où la matrice jacobienne $J_{v_{G_i}}$ est de la forme :

$$J_{v_{G_i}} = \begin{bmatrix} J^1_{v_{G_i}}(q) & \dots & J^i_{v_{G_i}}(q) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- Calcul de ω_i à partir de la matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation du corps $\mathscr{C}$ en fonction des vitesses articulaires $\dot{q}$:

$$\omega_i = J_{\omega_i}(q)\,\dot{q}$$

où la matrice jacobienne J_{ω_i} est de la forme :

$$J_{\omega_i} = \begin{bmatrix} J^1_{\omega_i}(q) & \dots & J^i_{\omega_i}(q) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Ce jacobien doit être exprimé dans le même repère que la matrice correspondant au tenseur d'inertie :

  - Tenseur d'inertie I_i constant s'il est exprimé dans le repère $\mathscr{R}_{G_i}$;
  - Sinon, ${}^0I_i = R_{0i}\,{}^iI_i R_{0i}^t$ dans le repère inertiel $\mathscr{R}_0$ par exemple (repère généralement utilisé pour exprimer les matrices jacobiennes).

Remarque : La démarche d'obtention des matrices $J_{v_{G_i}}$ et J_{ω_i} est identique à celle vue précédemment, sauf qu'elles expriment les vitesses du centre de masse du corps $\mathscr{C}$ et non plus les vitesses de l'origine du repère terminal du robot.

Recours utile à la formule de *Varignon* : $V(G_i) = V(O_i) + \omega_i \times \overrightarrow{O_iG_i}$.

Énergie cinétique d'une chaîne poly-articulée

- Énergie cinétique d'une chaîne polyarticulée constituée de N corps $\mathscr{C}_i$:

$$E_c(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{N} E_{c_i}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^t \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\left(m_i {}^0J_{v_{G_i}}^t(q)\,{}^0J_{v_{G_i}}(q) + {}^0J_{\omega_i}^t(q)\,{}^0I_i\,{}^0J_{\omega_i}(q)\right)}_{A(q)}\dot{q}$$

- Matrice d'inertie du manipulateur $A(q) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

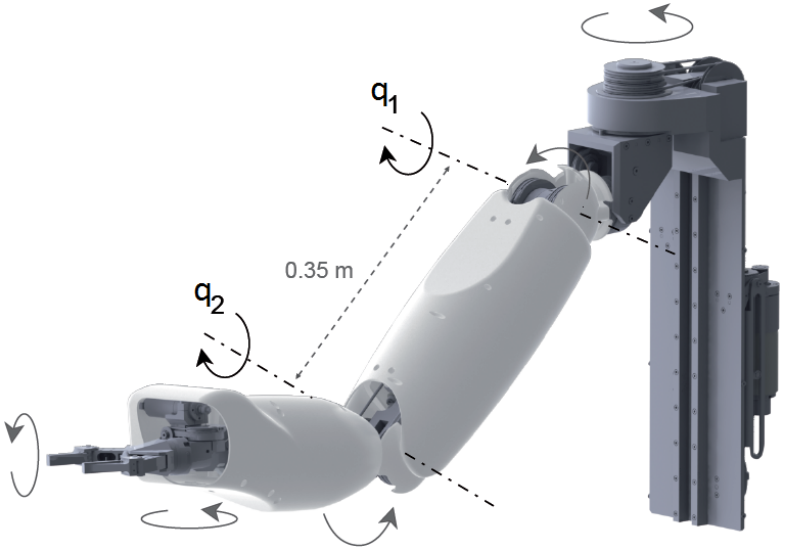
$$A(q) = \left(a_{ij}(q)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

  - Matrice dépendante de la configuration q du bras robotique ;
  - Matrice symétrique ;
  - Matrice définie positive (donc toujours inversible quelle que soit la configuration articulaire) ;
- Prise en compte de l'influence des actionneurs
  - Hypothèses :
    1. Transmissions mécaniques infiniment rigides (pas de phénomènes flexibles) ;
    2. Centre de masse du rotor situé sur son axe de rotation ;
    3. Effets gyroscopiques du rotor négligés (seul le moment d'inertie de la rotation propre est considéré) ;
    4. Absence de couplages dans les transmissions mécaniques (actionneur τ_{m_i} entraînant seulement q_i).
  - Ajout des contributions des actionneurs ramenées côté corps sur la diagonale de $A(q)$ (augmentation du terme $a_{ii}(q)$ avec $r_{red_i}^2 J_{m_i}$).

Énergie cinétique d'une chaîne poly-articulée

Cas d'étude du robot plan 2 axes soumis à l'influence de la gravité

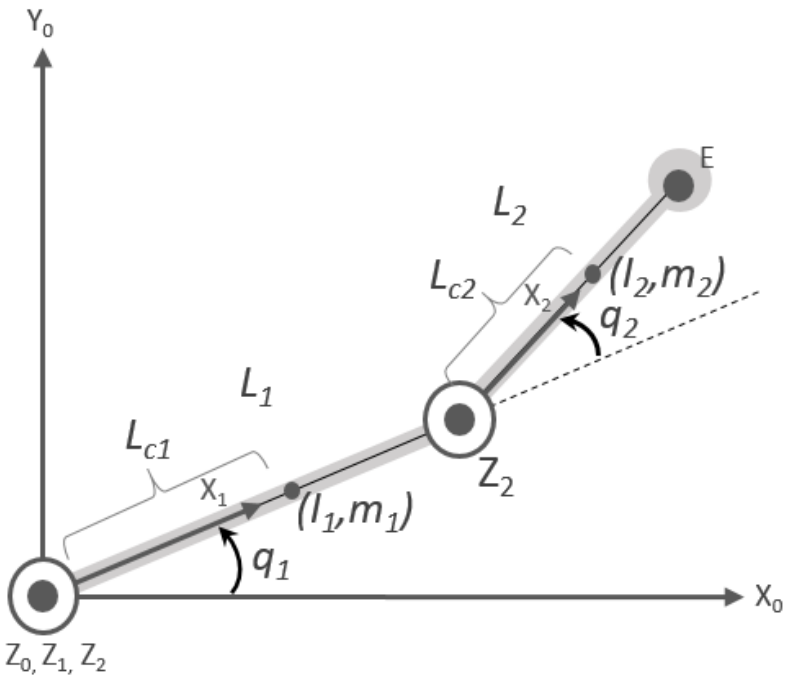
- Robot léger CEA [16] :
  - Bras anthropomorphe (architecture cinématique à 7 ddls) ;
  - Masse du bras robotique de 15 kg pour une charge utile de 3 kg ;
  - Actionnement par moteurs à courant continu.



Énergie cinétique d'une chaîne poly-articulée

Cas d'étude du robot plan 2 axes soumis à l'influence de la gravité

- Restriction du robot au mouvement sagittal :
  - Segments principaux de "bras" et "avant-bras"
  - Mécanisme à 2 ddl : q_1 (épaule) et q_2 (coude)
  - Mouvement restreint au plan vertical soumis à l'influence de la gravité



- Tenseur d'inertie I_i du corps i en son centre de masse ;
- Masse m_i du segment i ;
- Longueur du segment i paramétrée par L_i ;
- Position du centre de masse L_{c_i} le long du segment i ;
- Rapport de réduction r_{red_i} de l'articulation i ;
- Moment d'inertie J_{m_i} du moteur de l'articulation i.

Exemple calcul de l'énergie cinétique du robot 2 axes.

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Expression de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle de pesanteur du corps rigide $\mathscr{C}_i$ de centre de masse G_i et de masse m_i en mouvement par rapport à un référentiel galiléen $\mathscr{R}_0$ s'exprime selon :

$$E_{p_i}(q) = -\int_{\mathscr{V}_i} g^t p dm_i = -g^t \int_{\mathscr{V}_i} \rho p d\mathscr{V}_i = -m_i g^t {}^0p_{G_i}(q)$$

où g est le vecteur de gravité dans $\mathscr{R}_0$ et ${}^0p_{G_i}$ est le vecteur de position du centre de masse G_i dans $\mathscr{R}_0$, obtenu par les transformations homogènes selon :

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{G_i} \\ 1 \end{bmatrix} = \overline{g}_{01}(q_1) \dots \overline{g}_{(i-1)i}(q_i) \begin{bmatrix} {}^ip_{G_i} \\ 1 \end{bmatrix}$$

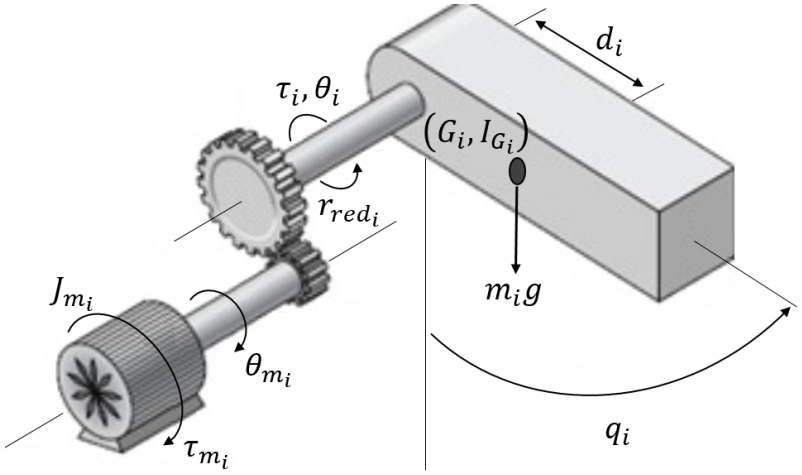
L'énergie potentielle de pesanteur d'un manipulateur constitué de N corps rigides s'obtient en sommant la contribution des énergies potentielles de chaque corps :

$$E_p(q) = \sum_{i=1}^{N} E_{p_i}(q) = -g^t \left(\sum_{i=1}^{N} m_i {}^0p_{G_i}(q) \right) \qquad \text{avec} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}.$$

Cela revient à supposer toute la masse de $\mathscr{C}_i$ concentrée au centre de masse (équivalence à un point matériel) et à calculer la composante de G_i selon la direction opposée au vecteur de gravité g dans le repère galiléen.

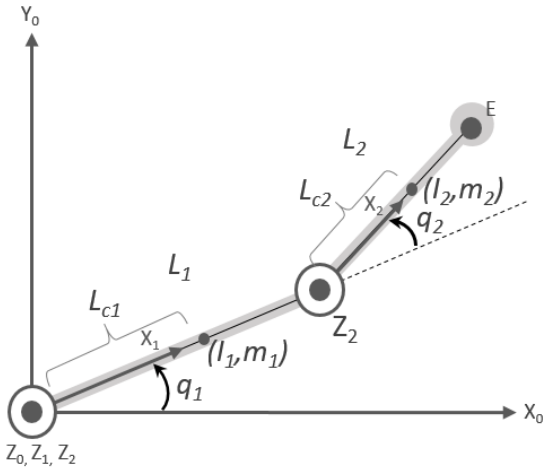
Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Étude d'un axe robotique en rotation



Exemple calcul de l'énergie potentielle de $\mathscr{C}_i$.

Cas d'étude du robot plan 2 axes



Exemple calcul de l'énergie potentielle du robot

Dynamique du mouvement d'un manipulateur série

Forme développée du modèle dynamique *inverse*

Formulation analytique déduite des équations de *Lagrange* :

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\,\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} c_{ijk}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \psi_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

- a_{kj} terme de la matrice d'inertie $A(q)$ défini par :

$$\frac{\partial E_c(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j a_{kj}(q)\,\dot{q}_j$$

- c_{ijk} symbole de *Christoffel*, tel que :

$$c_{ijk}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)$$

- g_k terme gravitationnel défini par $g_k(q) = \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k}$ selon :

$$G(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) & \ldots & g_N(q) \end{bmatrix}^t = \frac{\partial E_p(q)}{\partial q} = -\sum_{i=1}^{N} m_i J_{v_{G_i}}^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

Démonstration

Dynamique du mouvement d'un manipulateur série

Éléments a_{kj}, c_{ijk} et g_k :

- dépendance à la position articulaire uniquement ;
- calcul relativement simple une fois la configuration du manipulateur connue.

Significations physiques :

- Termes d'accélération
  - a_{kk} : *moment d'inertie* autour du k-ième axe articulaire, pour une configuration donnée et en considérant toutes les autres articulations bloquées en position ($a_{kk}(q) > 0$) ;
  - a_{kj} : *couplage inertiel*, prenant en compte les effets de l'accélération de l'articulation j sur l'articulation k ;
- Termes de vitesse quadratique
  - Les termes regroupés en $c_{iik}\dot{q}_i^2$ correspondent aux *termes centrifuges* induits sur l'articulation k par la vitesse de l'articulation j (notons que $c_{kkk} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{kk}}{\partial q_k} = 0$) ;
  - Les termes regroupés en $c_{ijk}\dot{q}_j q_i$ représentent les *termes de Coriolis* induits sur l'articulation k par la vitesse des articulations i et j ;
  - Propriétés de symétrie des symboles de *Christoffel* : $c_{ijk} = c_{jik}$.
- Termes dépendant de la configuration
  - g_k représente les couples générés sur l'articulation k par la force de gravité agissant sur le manipulateur dans la configuration courante.

Dynamique du mouvement d'un manipulateur série

Forme matricielle du modèle dynamique *inverse*

Formulation analytique déduite des équations de *Lagrange* :

$$A(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) + \Gamma_f(\dot{q}) = \Gamma + J(q)^t\,F_c$$

- $A(q) \in \mathbb{R}^{N\times N}$ matrice d'inertie, symétrique et définie positive ;
- $C(q,\dot{q})\,\dot{q} \in \mathbb{R}^N$ vecteur des forces de *Coriolis* et centrifuge, où les éléments de la matrice $C(q,\dot{q})$ sont calculés selon :

$$[C(q,\dot{q})]_{k,j} = \sum_{i=1}^{N} c_{ijk}(q)\,\dot{q}_i;$$

- $G(q) \in \mathbb{R}^N$ vecteur des couples articulaires de gravité :

$$G(q) = \begin{bmatrix} g_1(q) & \dots & g_N(q) \end{bmatrix}^t;$$

- $\Gamma_f(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \tau_{f_1} & \dots & \tau_{f_n} \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}^N$ vecteur des couples de frottement ;
- $\Gamma = \begin{bmatrix} \tau_1 & \dots & \tau_n \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}^N$ vecteur des couples actionneurs.

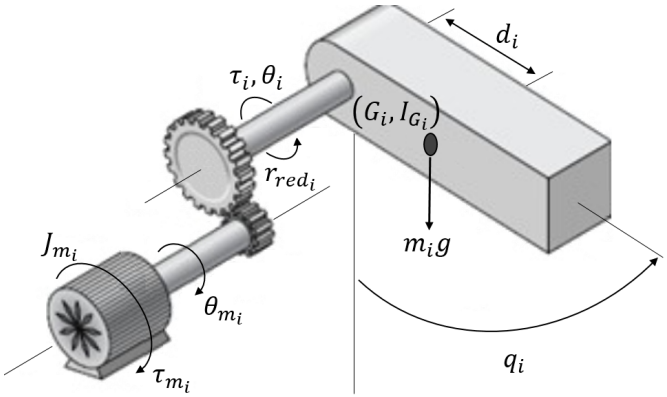
- Généralement, on note $H(q,\dot{q})$ la quantité $C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) + \Gamma_f(\dot{q})$.

Dynamique du mouvement d'un manipulateur série

Équation du mouvement dynamique

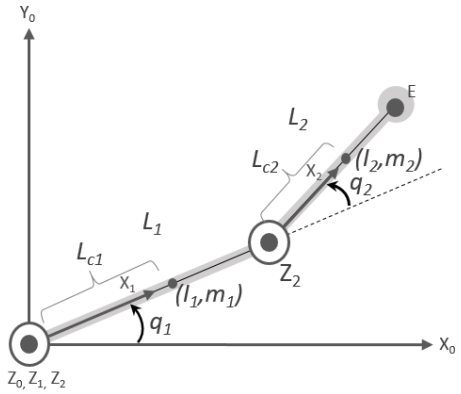
Formulation analytique déduite des équations de *Lagrange* :

Étude d'un axe robotique en rotation



Exemple dynamique de $\mathscr{C}_i$.

Cas d'étude du robot plan 2 axes



Exemple dynamique du robot RR.

Propriétés du modèle dynamique

Propriétés de la matrice $A(q)$ [9]

1. $A(q) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ symétrique, définie positive et dépendante de la configuration articulaire q du manipulateur ;
2. $A(q)$ est bornée inférieurement et supérieurement :
$$\mu_1 \mathbb{I} \preceq A(q) \preceq \mu_2 \mathbb{I}$$
i.e.
$$x^t (A(q) - \mu_1 \mathbb{I}) x \geq 0 \quad et \quad x^t (\mu_2 \mathbb{I} - A(q)) x \geq 0;$$
3. Ainsi, $A^{-1}(q)$ est définie positive et bornée :
$$\frac{1}{\mu_2} \mathbb{I} \preceq A^{-1}(q) \preceq \frac{1}{\mu_1} \mathbb{I};$$
4. Dans le cas d'articulations rotoïdes, μ_1 et μ_2 sont constantes (pas de dépendance à la configuration articulaire q, puisque les composantes de $A(q)$ sont fonctions de $cos(q)$ et $sin(q)$) ;
5. Dans le cas d'articulations prismatiques, μ_1 et μ_2 sont fonctions linéaires de q ;
6. Puisque $A(q)$ est bornée,
$$\alpha_1 \leq \|A(q)\|_X \leq \alpha_2$$
pour certaines normes ($X = 1, 2, p, \infty$).

Propriétés du modèle dynamique

Propriétés du vecteur $c(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\,\dot{q}$ [9]

1. Pour un manipulateur donné, la matrice $C(q,\dot{q})$ n'est pas unique, mais le vecteur $c(q,\dot{q})$ est unique ;
2. $C(q,\dot{q})\,\dot{q}$ est une fonction quadratique des vitesses articulaires $\dot{q}$;
3. La k-ième composante générique du vecteur $c(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q})\,\dot{q}$ prend la forme :
$$C(q,\dot{q}_a)\,\dot{q}_b = \dot{q}_a^t S_k(q)\,\dot{q}_b$$
où $S_k(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_k}{\partial q} + \left(\frac{\partial a_k}{\partial q}\right)^t - \frac{\partial A(q)}{\partial q_k}\right)$ est une matrice symétrique de taille $N \times N$ pour laquelle a_k est la k-ième colonne de $A(q)$;
4. Il résulte que :
$$\|C(q,\dot{q})\,\dot{q}\| \leq \beta\,\|\dot{q}\|^2 ;$$
5. β est constant dans le cas d'articulations rotoïdes, et linéairement dépendant de q dans le cas d'articulations prismatiques ;
6. La matrice définie par
$$\dot{A}(q) - 2C(q,\dot{q})$$
où $C(q,\dot{q})$ est calculée à partir des symboles de *Christoffel*, est anti-symétrique. Il en résulte que :
$$x^t\left(\dot{A}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)x = 0.$$

Démonstration

Propriétés du modèle dynamique

Propriétés du vecteur $G(q)$ [9]

1. Le terme des couples articulaires induits par la gravité $G(q)$ est borné :

$$\|G(q)\| \leq g_b;$$

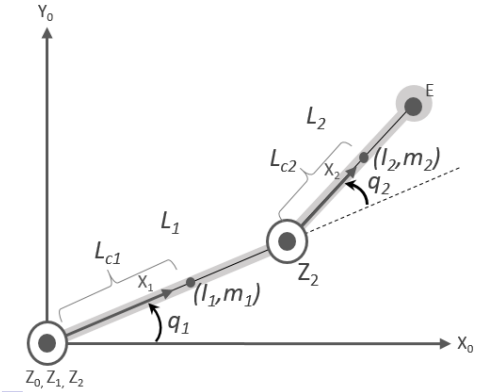
2. g_b est constant dans le cas d'articulations rotoïdes, et linéairement dépendant de q dans le cas d'articulations prismatiques ;
3. Dans le cas d'articulations rotoïdes, la fonction vectorielle $G(q)$ est *Lipschitzienne* :

$$\forall q_b, q_a \in \mathbb{R}^n, \|G(q_b) - G(q_a)\| \leq k_g \|q_b - q_a\|;$$

Étude du robot RR plan $\left(-\frac{\pi}{2} \leq q_1, q_2 \leq \frac{\pi}{2}\right)$:

- Recherche des bornes α_1 et α_2 de la matrice d'inertie $A(q)$ pour la norme 1 ;
- Recherche de la borne β du vecteur $c(q, \dot{q})$ pour la norme 1 ;
- Vérifier que $\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q})$ est bien anti-symétrique ;
- Recherche de la borne g_b de $G(q)$ pour la norme 1.

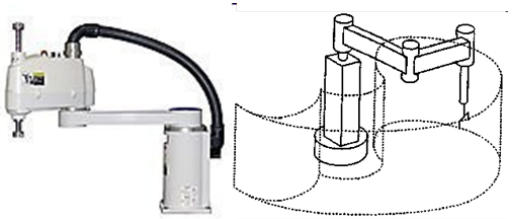
Exemple



Analyse des effets du couple de gravité

- Equilibrage statique des masses en jeu ;
- Mécanisme de compensation mécanique ;
- Absence de termes gravitationnels :
  - robot planaire à mouvement horizontal ($E_p = C^{ste}$) ;
  - applications spatiales.

(a) Structure de compensation



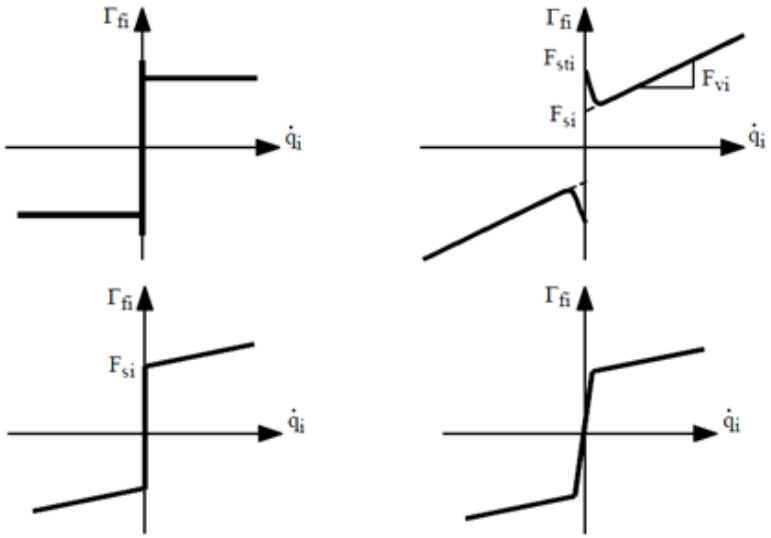
(b) Robot SCARA

(c) Long robot articulé

Phénomènes de frottement

Phénomènes dissipatifs dus au frottement Γ_f au niveau des articulations, des transmissions et/ou des moteurs

- Complexité de représentation [10] : visqueux, sec, *Coulomb*, *Stribeck*...



- Représentation usuelle du frottement de *Coulomb* en robotique :
  - Considération de la i-ième articulation :

$$\tau_{f_i}(\dot{q}_i) = sign(\dot{q}_i) F_{s_i} + diag(\dot{q}_i) F_{v_i}$$

  - Couple des frottements articulaires :

$$\Gamma_f(\dot{q}) = diag(sign(\dot{q})) F_s + diag(\dot{q}) F_v$$

où $\Gamma_f = \left[\tau_{f_1} \ldots \tau_{f_N}\right]^t$.

Modèle dynamique direct

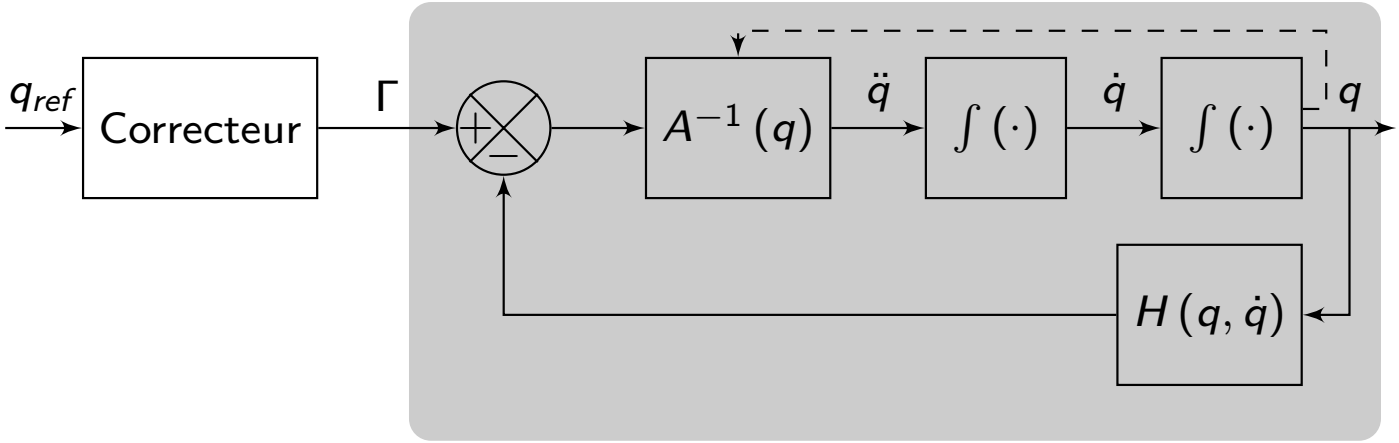
Expression des accélérations articulaires à partir des efforts, vitesses et positions articulaires supposées connues

$$\ddot{q} = n\left(\Gamma, \dot{q}, q\right)$$

puis, par intégrations successives, $\dot{q} = \int \ddot{q} dt$ et $q = \int \dot{q} dt$.

- Utilité pour la simulation du comportement du robot ;
- Calcul à partir des équations de *Newton-Euler* ou par inversion du modèle dynamique *inverse* :

$$\ddot{q} = A\left(q\right)^{-1}\left(\Gamma - C\left(q, \dot{q}\right)\dot{q} - G\left(q\right) - \Gamma_f\right) = A\left(q\right)^{-1}\left(\Gamma - H\left(q, \dot{q}\right)\right)$$

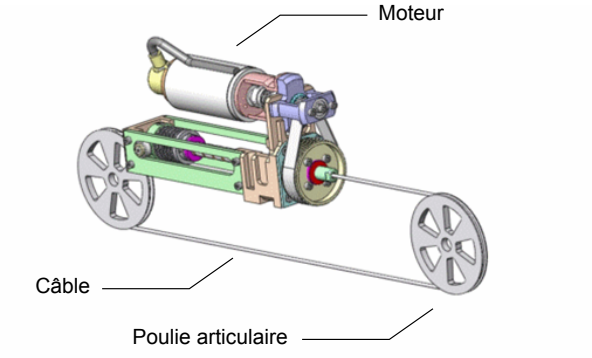


Simulateur du robot

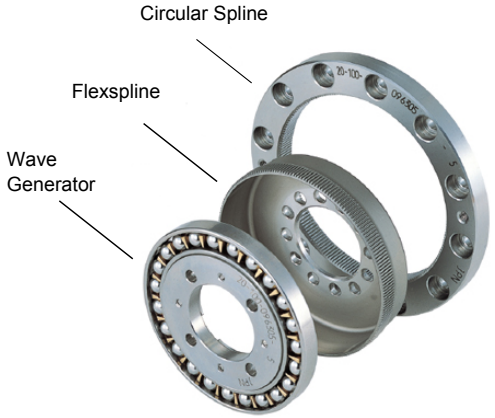
Élasticité articulaire

Origines des souplesses articulaires :

- Robotique industrielle : transmissions à câbles, réducteurs non infiniment rigides, port de charges lourdes, arbres moteurs longs, . . .



(d) Actionneur avec transmission à câbles (CEA)



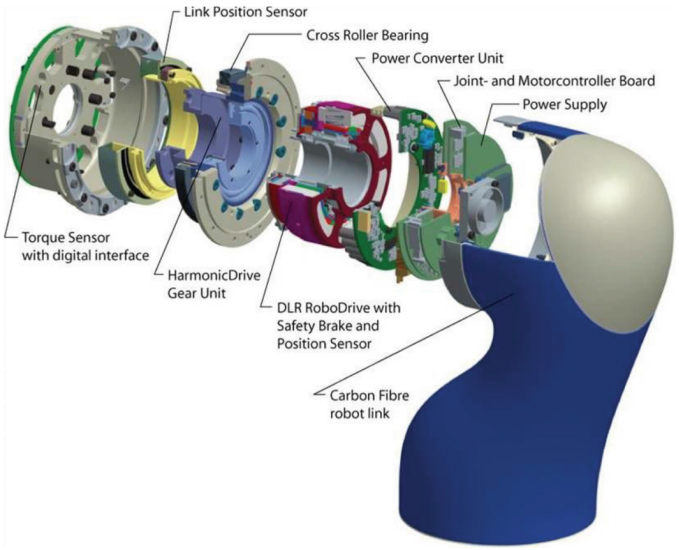
(e) Réducteur Harmonic Drive ®

- Robotique dédiée à la coopération homme-robot : *compliance* dans la transmission introduite pour la sûreté (actionneurs déportés au moyen de câbles et poulies, conception de corps légers et rigides, actionnement à couplage élastique,. . .)

Flexibilités entre les entrées d'actionnement (θ) et les sorties à contrôler (q) supposées concentrées au niveau articulaire sous les hypothèses de petites déformations

Exemple de robots à articulations flexibles

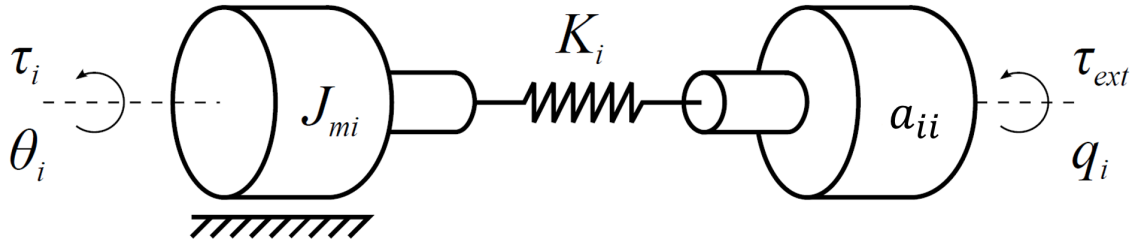
(f) Robot léger CEA à technologie à câbles



(g) Robot LWR III DLR à réducteur Harmonic Drive ®

Prise en compte de la flexibilité articulaire

Représentation schématique d'une articulation flexible



Modification de la description énergétique du système rigide :

- Ajout de l'énergie potentielle élastique E_{p_e} à l'énergie potentielle de gravité E_{p_g} selon $E_p = E_{p_g} + E_{p_e}$:

$$E_{p_e} = \sum_{i=1}^{N} E_{p_{e_i}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} k_i \left(q_i - \theta_i\right)^2 = \frac{1}{2} \left(q - \theta\right)^t K \left(q - \theta\right)$$

  avec K matrice diagonale définie positive d'élément k_i définissant les raideurs articulaires.

- Ajout de l'énergie cinétique des moteurs E_{c_m} en la dissociant de celle des corps rigides E_{c_c} selon $E_c = E_{c_c} + E_{c_m}$:

$$E_{c_m} = \sum_{i=1}^{N} E_{c_{m_i}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} I_{m_i} \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} \dot{\theta}^t I_m \dot{\theta}$$

  avec I_m matrice diagonale définie positive des inerties des actionneurs ramenées côté charge.

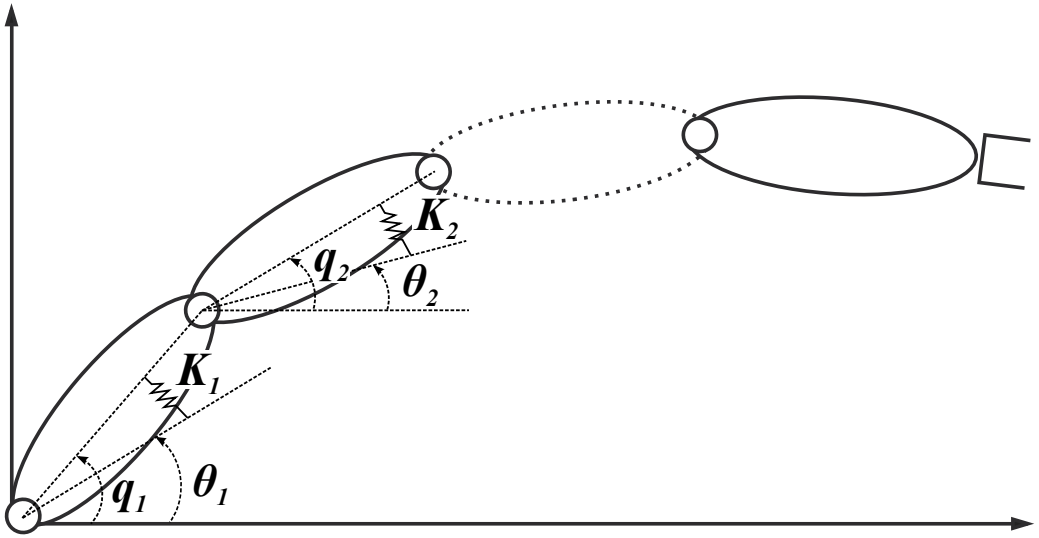
Prise en compte de la flexibilité articulaire

Modèle dynamique inverse de robots à articulations élastiques

- $2n$ coordonnées généralisées
  - q vecteur des n angles articulaires
  - θ vecteur des n angles moteur ramenés au niveau articulaire selon $\theta = R_{red}^{-1}\theta_m$ où

$$R_{red} = diag\left(r_{red_1}, \ldots, r_{red_N}\right)$$

définit la matrice des rapports de réduction ($\Gamma_m R_{red}^t = \Gamma$).



Prise en compte de la flexibilité articulaire

Modèle dynamique inverse de robots à articulations élastiques

- Calcul à partir des équations à partir du *lagrangien* :

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= E_c - E_p \\ &= (E_{c_c} + E_{c_m}) - (E_{p_g} + E_{p_e}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{\theta}^t I_m \dot{\theta}\right) - \left(g^t \left(\sum_{i=1}^{N} -m_i{}^0 p_{G_i}(q)\right) + \frac{1}{2}(q-\theta)^t K(q-\theta)\right)\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + \Gamma_{f_c} + K(q-\theta) &= 0 \\ I_m\ddot{\theta} + \Gamma_{f_m} - K(q-\theta) &= \Gamma \end{aligned}$$

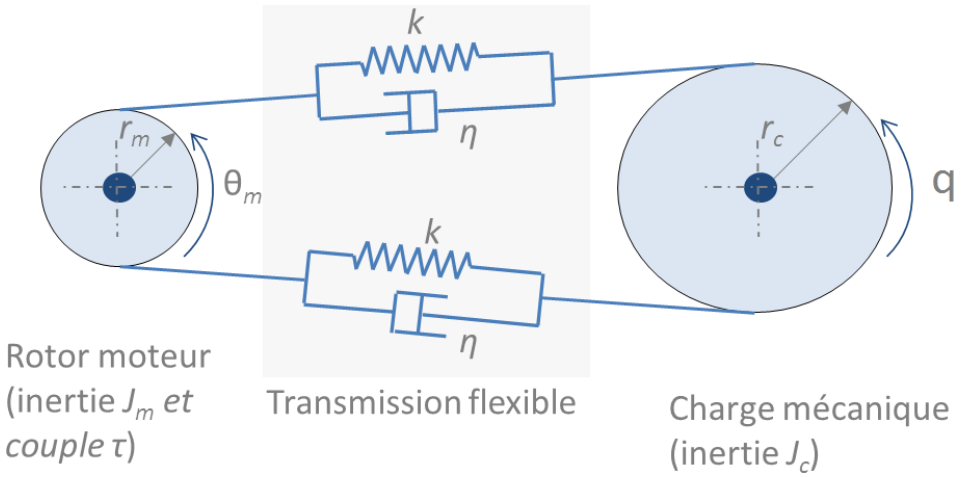
  - $2n$ équations différentielles du 2nd ordre couplées au travers du couple élastique $K(q-\theta)$;
  - n premières équations traduisant la dynamique articulaire et les n suivantes la dynamique moteur ;
- Dissociation des effets de frottement (Γ_{f_m} niveau moteur et Γ_{f_c} niveau charge).

Effets dynamiques d'un couplage élastique actionneur-charge

Exemple-1

Dynamique d'un axe mettant en jeu [7] :

- les inerties du moteur et de la charge ;
- le comportement visco-élastique des éléments de transmission (câble).



- Doublet d'équations différentielles :

$$J_m\ddot{\theta}_m + 2\eta r_m\left(r_m\dot{\theta}_m - r_c\dot{q}\right) + 2r_m k\left(r_m\theta_m - r_c q\right) = \tau$$

$$J_c\ddot{q} + 2\eta r_c\left(r_c\dot{q} - r_m\dot{\theta}_m\right) + 2r_c k\left(r_c q - r_m\theta_m\right) = 0$$

avec $\theta = \frac{r_m}{r_c}\theta_m = r_{red}^{-1}\theta_m$ l'angle moteur ramené au niveau de la charge.

Effets dynamiques d'un couplage élastique actionneur-charge

Exemple-1

Fonction de transfert de la charge en boucle ouverte :

$$\frac{Q(s)}{\Gamma(s)} = \frac{K_c(Ts+1)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1\right)}$$

avec

- $Q(s)$ et $\Gamma(s)$ les transformées de *Laplace* des variables temporelles $q(t)$ et $\tau(t)$
- les paramètres de pulsation naturelle ω_n, d'amortissement modal ζ, de gain K_c et de constante de temps T selon

$$K_c = \frac{\frac{r_m}{r_c}}{J_m + \left(\frac{r_m}{r_c}\right)^2 J_c}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{2k\left(J_m r_c^2 + J_c r_m^2\right)}{J_c J_m}}, \quad \zeta = \frac{\eta}{\sqrt{\frac{2kJ_cJ_m}{J_m r_c^2 + J_c r_m^2}}}, \quad T = \frac{\eta}{k}$$

Remarques :

1. Transmission flexible : atténuation de la bande passante du système et retard de phase entre le couple moteur et l'angle articulaire ;
2. Limitations induites par la non-colocalisation de l'actionneur et de l'élément commandé.

Effets dynamiques d'un couplage élastique actionneur-charge

Exemple-1

Fonction de transfert du moteur en boucle ouverte :

$$\frac{\Theta_m(s)}{\Gamma(s)} = \frac{K_m\left(\frac{1}{\omega_{n_a}^2}s^2 + \frac{2\zeta_a}{\omega_{n_a}}s + 1\right)}{s^2\left(\frac{1}{\omega_n^2}s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1\right)}$$

avec l'occurrence d'un phénomène d'antirésonance, caractérisée par sa pulsation naturelle ω_{n_a} et son amortissement modal ζ_a

$$K_m = \frac{1}{J_m + \left(\frac{r_m}{r_c}\right)^2 J_c}, \quad \omega_{n_a} = r_c\sqrt{\frac{2k}{J_c}}, \quad \zeta_a = \frac{r_c\eta}{\sqrt{2kJ_c}}$$

Remarques :

1. Flexibilité dynamique vue par le moteur comme une charge dont le comportement dépend de la fréquence
   - Comportement basse fréquence équivalent au cas de la transmission rigide

$$\left(J_m + \left(\frac{r_m}{r_c}\right)^2 J_c\right)\ddot{\theta}_m(t) = \tau(t)$$

   - Comportement haute fréquence équivalent à un découplage complet de la charge vue par le moteur

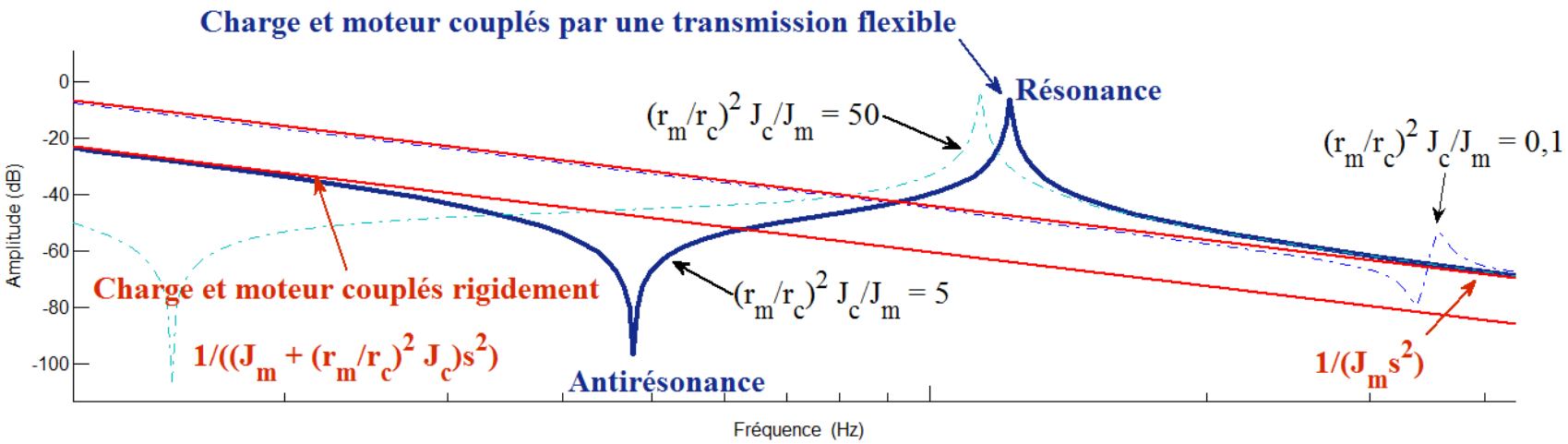
$$J_m\ddot{\theta}_m(t) = \tau(t)$$

2. Réponse fréquentielle du moteur avec un phénomène d'alternance antirésonance et résonance, caractéristique des systèmes colocalisés avec $\omega_{n_a} < \omega_n$ [24]

Effets dynamiques d'un couplage élastique actionneur-charge

Exemple-1

Allure de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert $\frac{\Theta_m(s)}{\Gamma(s)}$



Critère de dimensionnement $\boxed{\left(\frac{r_m}{r_c}\right)^2 \frac{J_c}{J_m} = \left(\frac{1}{r_{red}}\right)^2 \frac{J_c}{J_m}}$

- Faibles valeurs du ratio recherchées (minimisation des variations de l'inertie apparente de la charge en fonction de la fréquence) : comportements basses et hautes fréquences convergeant vers le comportement fréquentiel limite $\frac{1}{J_m s^2}$
- Phénomènes de résonance atténués et rejetés vers le spectre fréquentiel des hautes fréquences
- Configurations avec actionnement délocalisé : réduction de la charge inertielle J_c

Effets dynamiques d'un couplage élastique actionneur-charge

Exemple-2

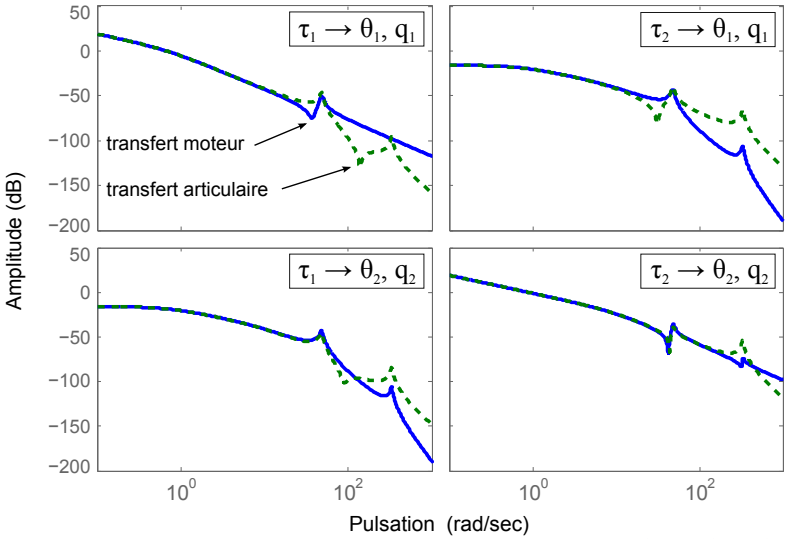
Robot RR plan simplifié [15]

- Approximation à validité locale :
  - Couples *Coriolis* et centrifuges négligés ;
  - Matrice d'inertie supposée constante ;

$$A\ddot{q} + F_v\dot{q} + K(q-\theta) = 0$$

$$J_m\ddot{\theta} + F_{v_m}\dot{\theta} - K(q-\theta) = \tau$$

- Réponses fréquentielles du modèle simplifié :
  - Influence due au couplage inertiel des termes extra-diagonaux non nuls de A ;
  - Alternance anti-résonance/résonance pour la réponse fréquentielle τ/θ ;
  - Couplage des modes résonants dus à la flexibilité de chacun des axes.



Modèle dynamique inverse dans l'espace cartésien

Dynamique de l'organe terminal [14]

Soient $\ddot{X} \in \mathbb{R}^6$ l'accélération de l'organe terminal $\ddot{X} = \left[\dot{V}, \dot{\omega}\right]$ et $F \in \mathbb{R}^6$ la force cartésienne induite par les couples articulaires au niveau de l'organe terminale $\Gamma = J(q) F$. Dans le cas non-singulier, la dynamique de l'organe terminal est régie par :

$$\Lambda(q) \ddot{X} + \mu(q, \dot{q}) + p(q) = F$$

avec :

- $\Lambda(q)$ l'inertie vue depuis l'organe terminal :

$$\Lambda(q) = \left(J(q) A^{-1}(q) J^t(q)\right)^{-1}$$

- $\mu(q, \dot{q})$ les effets de *Coriolis*/centrifuge dans l'espace cartésien :

$$\mu(q, \dot{q}) = \Lambda(q) J(q) A^{-1}(q) C(q, \dot{q}) \dot{q} - \Lambda \dot{J}(q) \dot{q}$$

- $p(q)$ les effets de gravité dans l'espace cartésien :

$$p(q) = \Lambda(q) J(q) A^{-1}(q) G(q)$$

Démonstration

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Intérêts de l'étape d'identification expérimentale

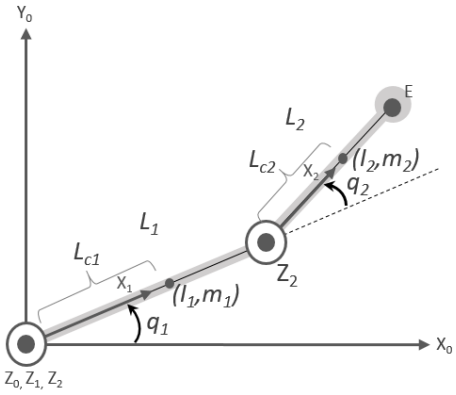
Nécessité d'une connaissance des valeurs numériques des paramètres dynamiques du robot

- Simulation du modèle dynamique ;
- Lois de commande basées sur modèle.

Présence dans le modèle dynamique d'un jeu de paramètres dynamiques minimaux

- Modèle dynamique complètement paramétré par ces termes ;
- Combinaison de termes caractéristiques de chaque corps et actionneur.

Retour sur le cas d'étude du robot RR



Paramètres dynamiques minimaux :

- 5 paramètres inconnus liés aux corps : $I_{zz_1} + m_2 L_1^2 + J_{m_1}$, I_{zz_2}, MZ_2, $MZ_1 + m_2 L_1$ et J_{m_2} ($MZ_1 = m_1 L_{c_1}$ et $MZ_2 = m_2 L_{c_2}$ sont les premiers moments d'inertie des corps 1 et 2 autour de z_0) ;
- 4 termes supplémentaires liés aux effets de frottements articulaires : F_{s_1}, F_{v_1}, F_{s_2} et F_{v_2}.

Au total, 9 paramètres dynamiques minimaux suffisants pour le paramétrage du modèle dynamique du robot.

Intérêts de l'étape d'identification expérimentale

Jeu de paramètres dynamiques minimaux

- Importance d'un nombre minimal de paramètres pour l'identification expérimentale et la simplicité du modèle dynamique embarquée dans les stratégies de commande adaptative ;
- Combinaison de termes liés aux effets...
  - inertiels de chaque corps définis à partir de son tenseur d'inertie exprimé dans son repère $\mathscr{R}_i$ grâce à la *formule de transport de Huygens* ;
  - massique au travers de sa masse m_i ;
  - au premier moment d'inertie du corps $\mathscr{C}_i$ autour de l'origine du repère $\mathscr{R}_i = (O_i, x_i, y_i, z_i)$ défini par :

$$^{i}mS_i = [MX_i, MY_i, MZ_i]^t$$

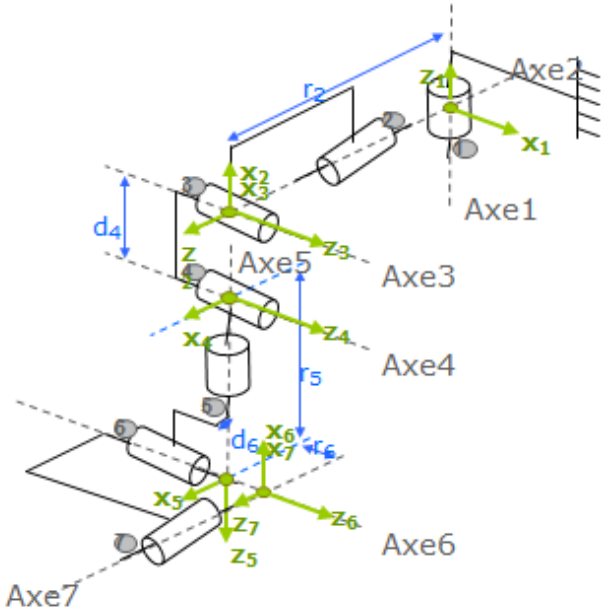
    où S_i est le vecteur ayant pour origine O_i et pour extrémité le centre de masse du corps $\mathscr{C}_i$, égal à O_iG_i ;
  - inertiels de chaque actionneur J_{m_i} ;
  - de frottements F_{v_i} et F_{s_i}.
- Ensemble des inconnus à déterminer pour le corps $\mathscr{C}_i$ de la chaîne poly-articulée :

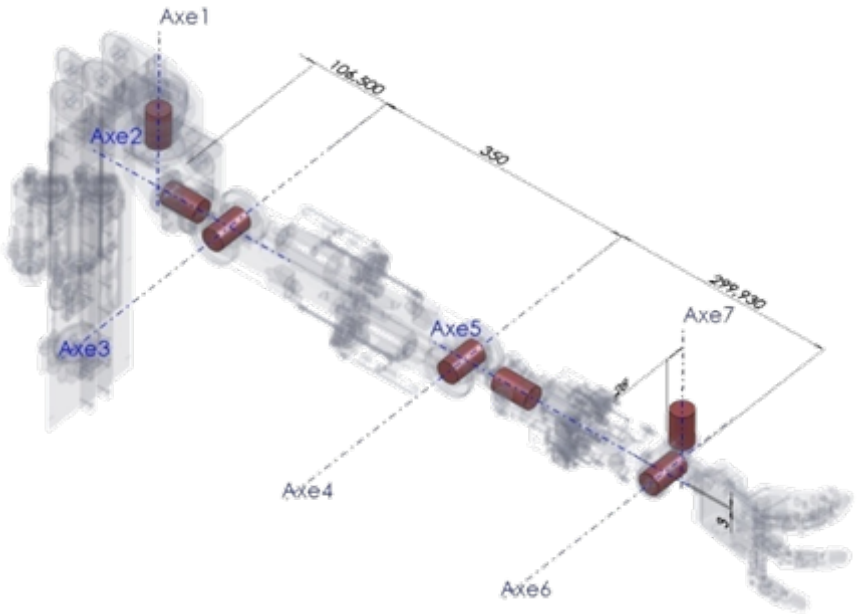
$$\underbrace{\underbrace{XX_i \quad YY_i \quad ZZ_i}_{\text{Moments d'inertie}} \quad \underbrace{XY_i \quad XZ_i \quad YZ_i}_{\text{Produits d'inertie}} \quad \underbrace{MX_i \quad MY_i \quad MZ_i}_{\text{Premiers moments d'inertie}}}_{}$$

$$\underbrace{M_i}_{\text{Masse}} \qquad \underbrace{J_{m_i}}_{\text{Inertie actionneur}} \qquad \underbrace{F_{v_i} \quad F_{s_i}}_{\text{Frottement } \textit{Coulomb}}$$

Méthodes d'estimation des paramètres inertiels

- Essais expérimentaux sur chacun des corps pris isolément
  - Masse m_i : simple pesée ;
  - Position des centres de gravité L_{c_i} : points d'équilibre ;
  - Moments principaux d'inertie XX_i, YY_i et ZZ_i : méthode du pendule ;
  - Produits d'inertie : difficile !
- Fonctionnalités de certains logiciels CAO ;
- Identification par des techniques issues du champ de l'Automatique (réponses fréquentielles, temporelles, . . .).





Propriétés de linéarité du modèle par rapport aux paramètres

Réécriture du modèle dynamique de robot à corps rigides

Existence d'une régression linéaire par rapport à un jeu de paramètres

$$A(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) + \Gamma_f(q,\dot{q}) = \boxed{W(q,\dot{q},\ddot{q})\,\chi = \Gamma}$$

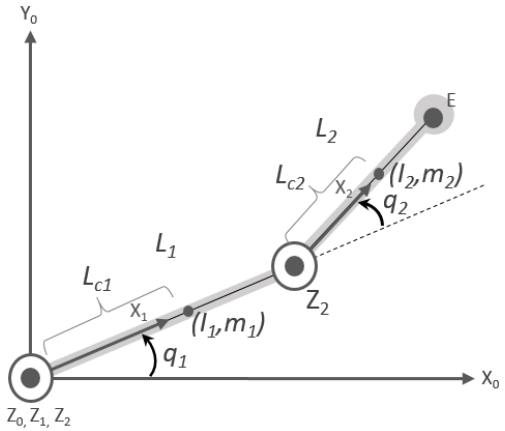
avec

- $W(q,\dot{q},\ddot{q})$ matrice de régression de dimension $n \times p$;
- χ vecteur de dimension $p \times 1$ des p paramètres dynamiques du modèle.

Cas d'étude du robot RR plan

Mettre en forme la formulation linéaire du modèle dynamique par rapport à un jeu de paramètres dynamiques χ à déterminer :

$$W(q,\dot{q},\ddot{q})\,\chi = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$



Exercice

Exploitation de la structure linéaire du modèle par rapport aux paramètres

Méthodologie d'identification

1. Utilisation du modèle de connaissance linéaire vis-à-vis du jeu de paramètres minimaux inconnus

$$W(q, \dot{q}, \ddot{q})\,\chi = \Gamma$$

2. Choix d'une trajectoire du mouvement excitante par rapport aux paramètres χ_i
3. Exécution de la trajectoire sur le robot commandé en position
4. Enregistrement des données de position q et de couple Γ à chaque instant d'échantillonnage de la trajectoire
5. Construction d'un système linéaire surdéterminé par échantillonnage du modèle à différents instants au cours du mouvement

$$\tilde{W}(q, \dot{q}, \ddot{q})\,\chi + \rho = \tilde{\Gamma}$$

avec

- $\tilde{W}(q, \dot{q}, \ddot{q})$ matrice de régression de dimension $c \times p$ avec $c >> p$
- χ vecteur de dimension $p \times 1$ des p paramètres dynamiques inconnus du modèle
- ρ vecteur de dimension $c \times 1$ des résidus ou des erreurs

6. Estimation des paramètres par des techniques de régression linéaire

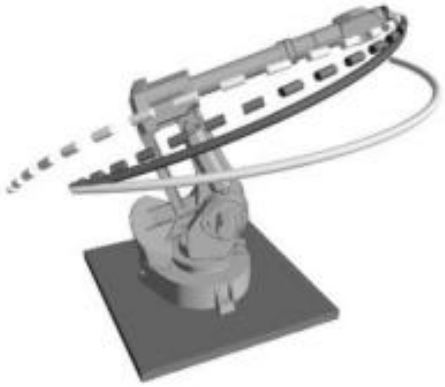
Exploitation de la structure linéaire du modèle par rapport aux paramètres

Choix d'une trajectoire du mouvement excitante par rapport aux paramètres

- Exploration de tout l'espace de travail du robot
- Sensibilisation à toutes les composantes du modèle dynamique du robot
- Nombre d'échantillons suffisament important pour garantir la condition de rang plein par les colonnes

$$rang\left(\tilde{W}\left(q,\dot{q},\ddot{q}\right)\right)=p$$

- Recherche de mouvements optimaux aboutissant à un conditionnement proche de l'unité de $\tilde{W}$
- Possibilité d'identification des paramètres par sous-ensemble avec des mouvements simples ne sollicitant que certaines articulations, les autres étant bloquées (mouvements séquentiels)



Exploitation de la structure linéaire du modèle par rapport aux paramètres

- Construction d'un système linéaire surdéterminé
  - Concaténation en lignes des données expérimentales

$$c = n \times n_c \updownarrow \begin{bmatrix} W\left(q\left(t_1\right), \dot{q}\left(t_1\right), \ddot{q}\left(t_1\right)\right) \\ \vdots \\ W\left(q\left(t_k\right), \dot{q}\left(t_k\right), \ddot{q}\left(t_k\right)\right) \\ \vdots \\ W\left(q\left(t_{n_c}\right), \dot{q}\left(t_{n_c}\right), \ddot{q}\left(t_{n_c}\right)\right) \end{bmatrix} \chi = \begin{bmatrix} \tau\left(t_1\right) \\ \vdots \\ \tau\left(t_k\right) \\ \vdots \\ \tau\left(t_{n_c}\right) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tilde{W}\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right) \chi = \tilde{\Gamma}$$

- Estimation des paramètres par des techniques de régression linéaire
  - Formulation du problème d'optimisation :

$$\hat{\chi} = \mathrm{Min}_{\chi} \left\| \rho \right\|_2$$

  - Solution au sens des moindres carrés :

$$\hat{\chi} = \left(\tilde{W}^t \tilde{W}\right)^{-1} \tilde{W}^t \tilde{\Gamma} = \tilde{W}^+ \tilde{\Gamma}$$

avec $\tilde{W}$ matrice de rang plein. $\tilde{W}^+$ désigne la matrice pseudo-inverse de $\tilde{W}$.

Démonstration

Exploitation de la structure linéaire du modèle par rapport aux paramètres

Matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation

Sous l'hypothèse que le vecteur des résidus ρ est aléatoire, centré, de composantes indépendantes et d'écart type σ_ρ, sa matrice de variance-covariance vaut

$$C_\rho = E\left[\rho\rho^t\right] = \sigma_\rho^2 \mathbb{I}$$

La matrice de variance-covariance de l'erreur d'estimation vaut alors

$$C_{\hat{\chi}} = E\left[(\chi - \hat{\chi})(\chi - \hat{\chi})^t\right] = \sigma_\rho^2 \left(\tilde{W}^t \tilde{W}\right)^{-1}$$

Démonstration

Ecart-type relatif des paramètres identifiés

L'écart type relatif du $j^{ième}$ paramètre identifié vaut

$$\sigma_{\hat{\chi}_j\%} = 100\frac{\sigma_{\hat{\chi}_j}}{|\hat{\chi}_j|} \quad \text{où} \quad \sigma_{\hat{\chi}_j}^2 = C_{\hat{\chi}}(j,j)$$

Considérations pratiques

Calcul de la matrice de régression $\tilde{W}$

- Evaluation de la mesure articulaire $q(t_k)$ à partir des mesures codeurs
- Evaluation de la vitesse articulaire $\dot{q}(t_k)$
  - soit par mesure tachymétrique
  - soit par estimation : filtrage passe-bas (à cause du bruit de quantification) et dérivation numérique par différence centrale

$$\dot{q}(t_k) = \frac{q(t_{k+1}) - q(t_{k-1})}{2T_e}$$

- Evaluation de l'accélération articulaire $\ddot{q}(t_k)$ par estimation à partir de la vitesse

Calcul du vecteur des couples $\tilde{\Gamma}$

- soit grâce à l'utilisation de couplemètres
- soit par estimation à partir des mesures/consignes de courants moteurs

Validation de l'identification

- Choix du ratio Nbre d'équations/Nbre de paramètres > 500
- Ecart-type sur chaque paramètre $< 10\%$
- Vérification : matrice d'inertie bien définie positive
- Essais croisés

Etude expérimentale du robot 2 axes

TABLE: Paramètres dynamiques identifiés du modèle rigide 2 axes [17].

Paramètres	Valeur CAO	Valeur estimée	Ecart-type (%)
ZZR_1	1,5321	1,0259	0,3393
MXR_1	1,7347	1,9755	0,0553
$F_{s_{1+}}$	-	1,9570	0,4962
$F_{s_{1-}}$	-	7,4936	0,1295
ZZ_2	0,0884	0,0728	0,9379
MY_2	0,4372	0,3861	0,1092
J_{m2}	0,1228	0,0932	0,7831
$F_{s_{2+}}$	-	1,7525	0,1843
$F_{s_{2-}}$	-	1,2280	0,2643

Etude expérimentale du robot 2 axes

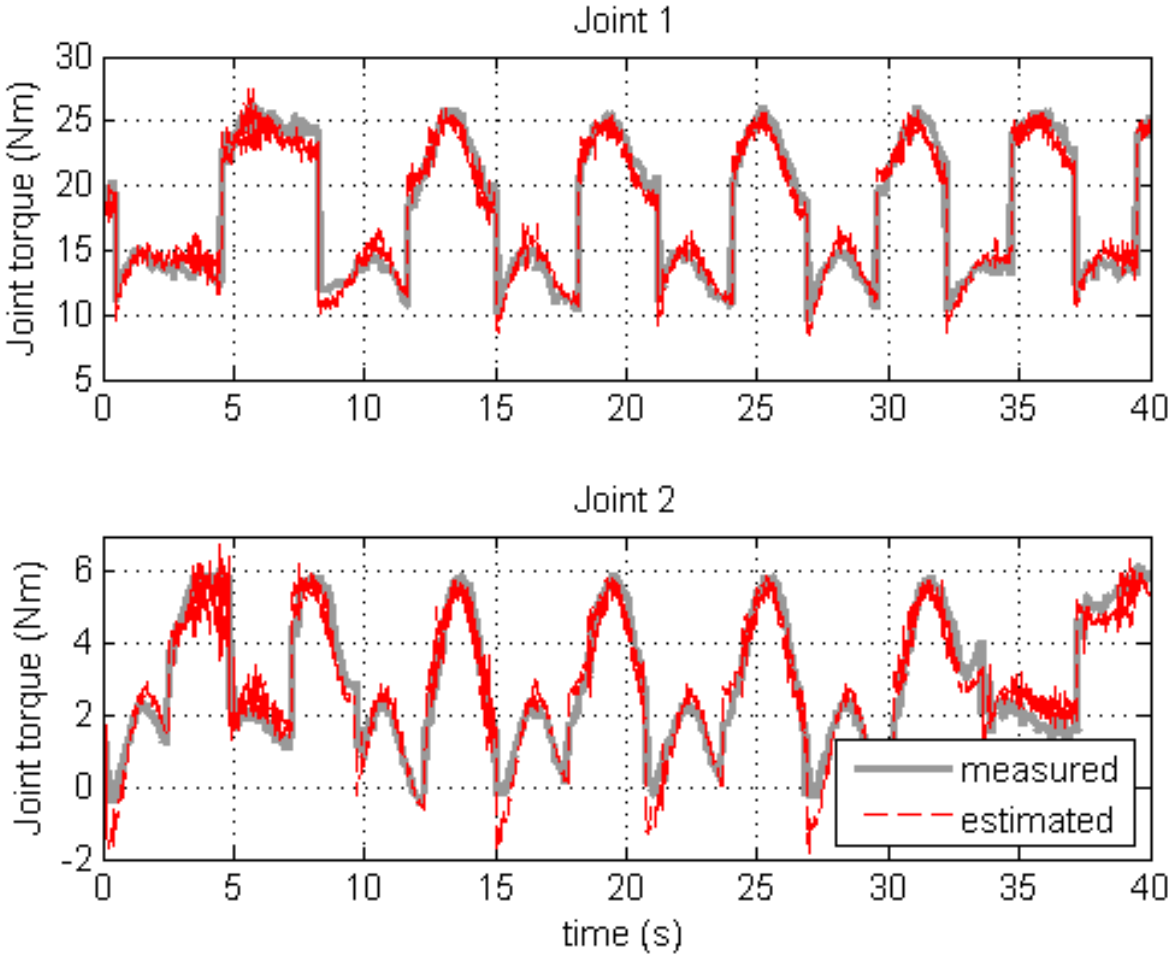


FIGURE: Validation du modèle dynamique inverse - couples articulaires expérimentaux et simulés pour une trajectoire sinusoïdale [17].

Etude expérimentale du robot 2 axes

Trajectoires excitantes pour l'identification des frottements

- Robot commandé en vitesse
- Mouvement axe par axe à vitesse constante
- Elimination de l'effet de gravité par le jeu de la configuration

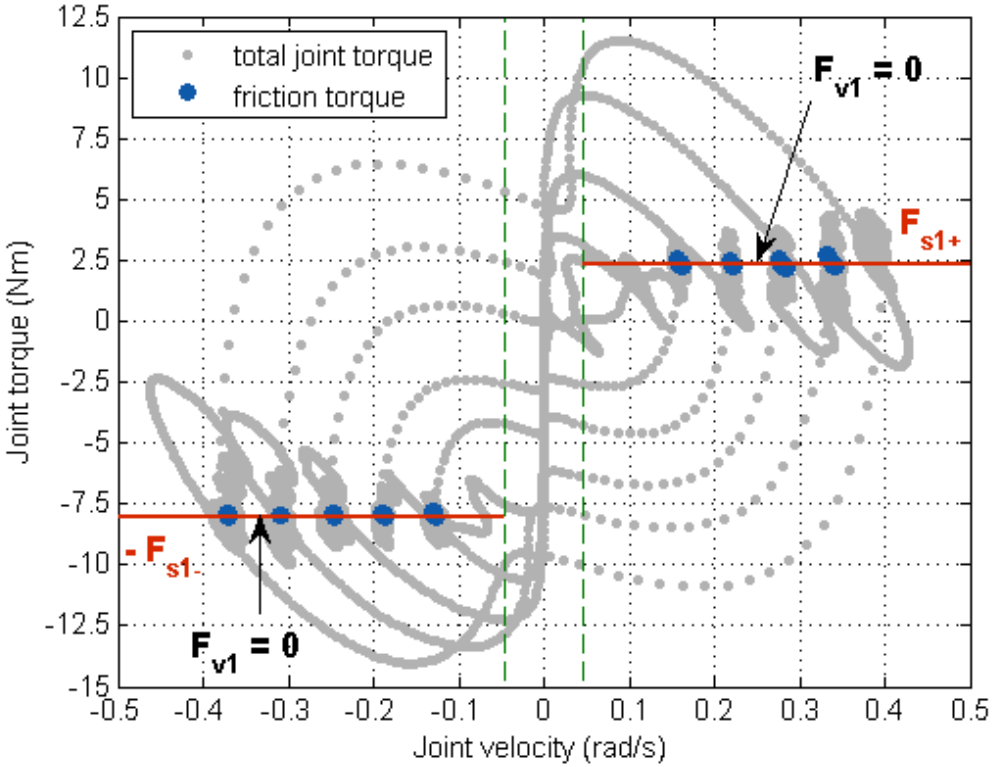


FIGURE: Couple de frottement - données expérimentales pour l'axe 1 (références en échelon de vitesse d'amplitude variable). L'axe 2 est caractérisé par des courbes similaires.

Phénomènes de frottement : cas du robot Mitsubishi PA-10 [3]

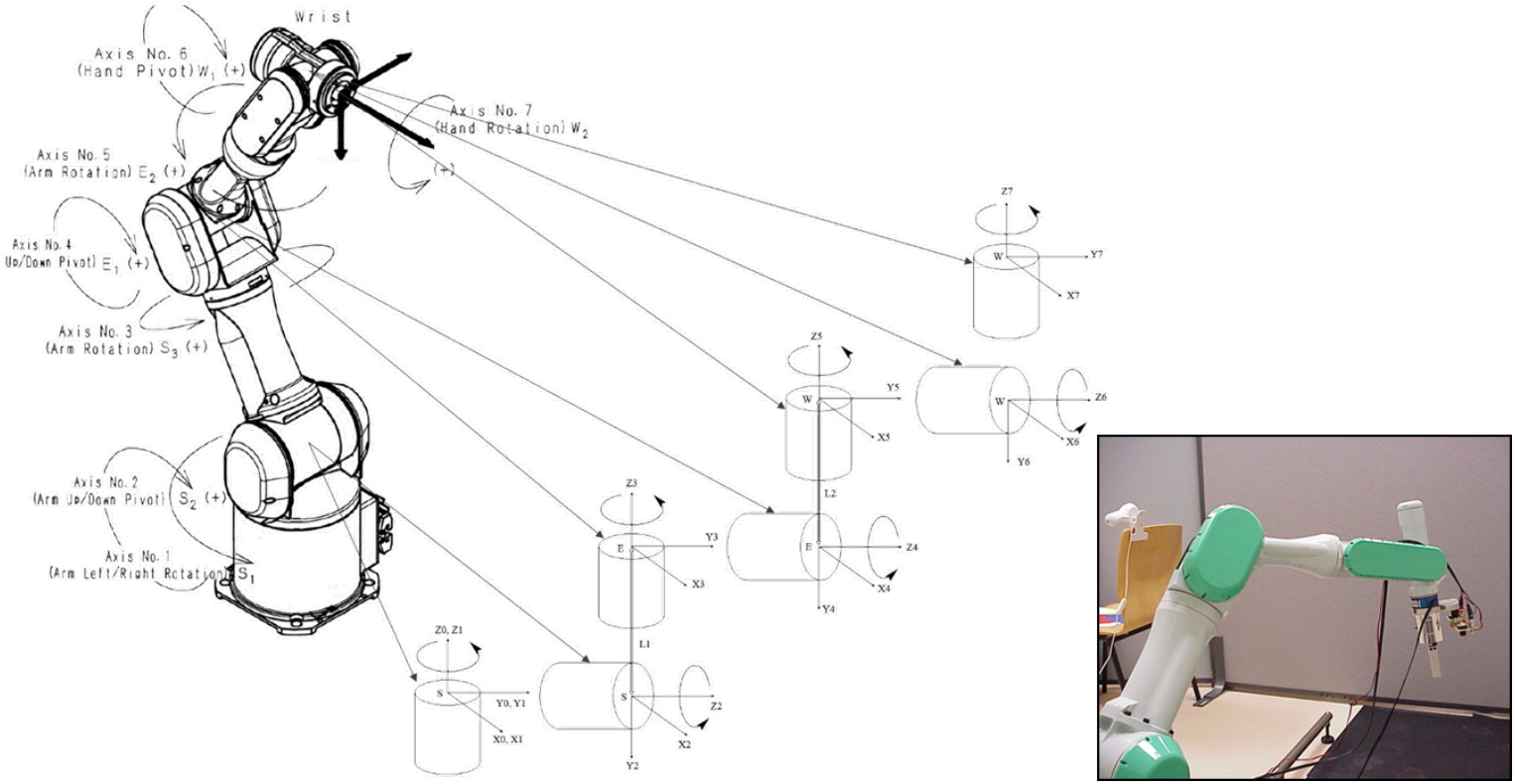
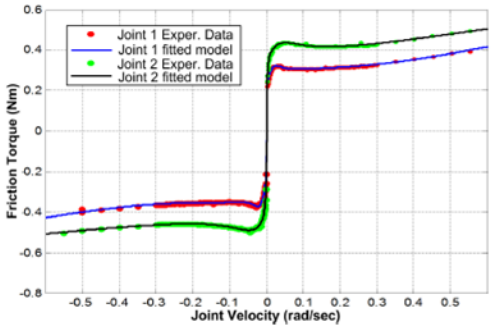
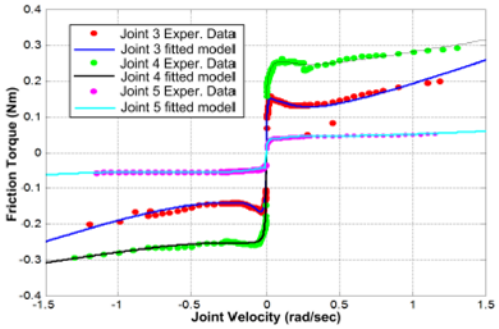


FIGURE: Robot Mitsubishi PA-10 à 7 ddls motorisés (2 ddls pour l'épaule, 2 ddls pour le coude et 3 ddls pour le poignet). Regroupement de 21 paramètres inertiels finaux identifiables

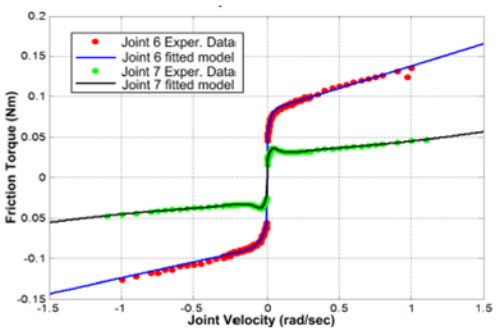
Phénomènes de frottement : cas du robot Mitsubishi PA-10 [3]



Joints 1, 2: Friction experimental data and fitted curve.



Joints 3, 4, 5: Friction experimental data and fitted curve.



Joint 6, 7: Friction experimental data and fitted curve.

FIGURE: Couple de frottement - données expérimentales axe par axe

Recherche d'un modèle de *Stribeck* augmenté

$$\Gamma_f(\dot{q}) = f_1\dot{q} + f_2 sign(\dot{q}) - f_3 sign(\dot{q})\, e^{-\frac{|\dot{q}|}{f_4}} - f_5 sign(\dot{q})\, e^{-\frac{1}{f_6|\dot{q}|}}$$

- Traitement des dissymétries
- Paramètres f_i calculés par la méthode des moindres carrés non-linéaires

Extension au cas de robots à articulations flexibles

Linéarité du modèle dynamique [7]

Dans le cas flexible, le modèle dynamique du robot

$$A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + \Gamma_{f_c} + K(q-\theta) = 0$$
$$J_m\ddot{\theta} + \Gamma_{f_m} - K(q-\theta) = \Gamma$$

peut également s'écrire sous une forme linéaire vis-à-vis des paramètres, faisant intervenir cette fois-ci les variables moteurs θ et articulaires q. Le modèle dynamique se réécrit de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma \end{pmatrix}}_{\Gamma_{flex.}} = \underbrace{\begin{pmatrix} W_{rig.}(q,\dot{q},\ddot{q}) & W_{q-\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -W_{q-\theta} & W_{\ddot{\theta}} & W_{\dot{\theta}} & W_{sign(\dot{\theta})} \end{pmatrix}}_{W_{flex.}(q,\dot{q},\ddot{q},\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta})} \underbrace{\begin{pmatrix} \chi_{rig.} \\ \chi_K \\ \chi_{J_m} \\ \chi_{F_{v_m}} \\ \chi_{F_{s_m}} \end{pmatrix}}_{\chi_{flex.}}$$

en notant $A(q)\ddot{q} + H(q,\dot{q}) = W_{rig.}(q,\dot{q},\ddot{q})\chi_{rig.}$ la régression linéaire correspondant au modèle rigide mais en se limitant à la contribution articulaire.

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Hiérarchisation de la commande

Complexité de l'information

Niveau TACHE

Objectif de la tâche (comme spécifié par l'utilisateur) : analyse et décomposition en actions (sur la base des modèles de connaissances du robot et de l'environnement du système)

Niveau ACTION

Commandes symboliques converties en des séquences de configurations intermédiaires

Niveau PRIMITIVE

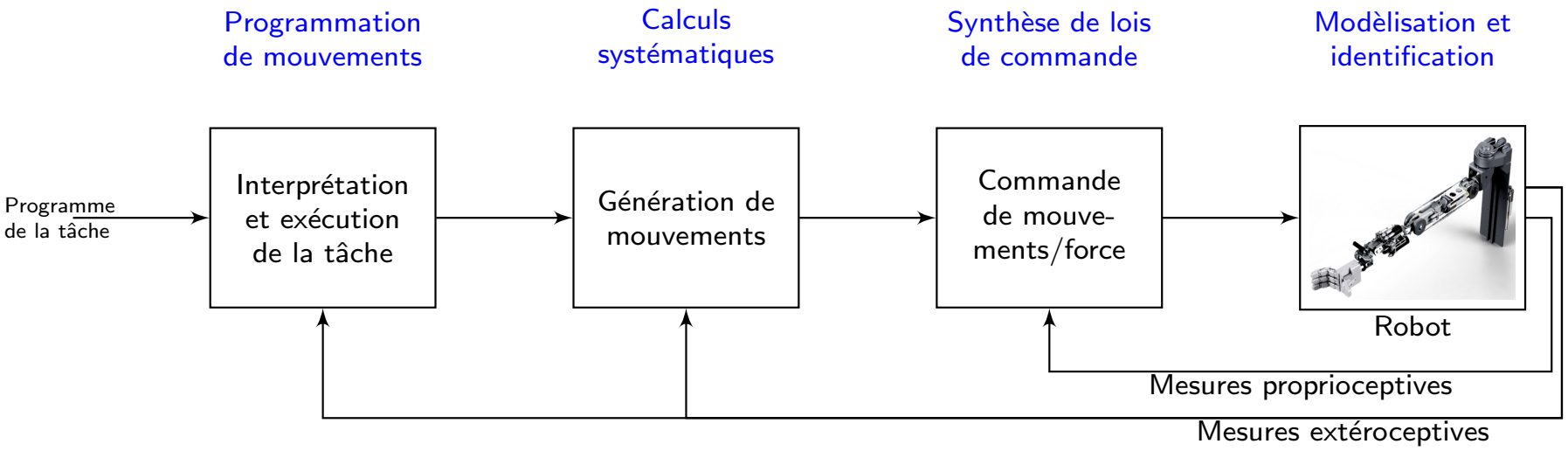
Choix d'une stratégie de contrôle et références en génération de trajectoires pour les asservissements

Niveau COMMANDE BAS-NIVEAU

Mise en œuvre des algorithmes de contrôle, calcul en temps réel des commandes bas-niveau des couples actionneurs/capteurs

Contraintes temporelles

Approche pour le pilotage des mouvements

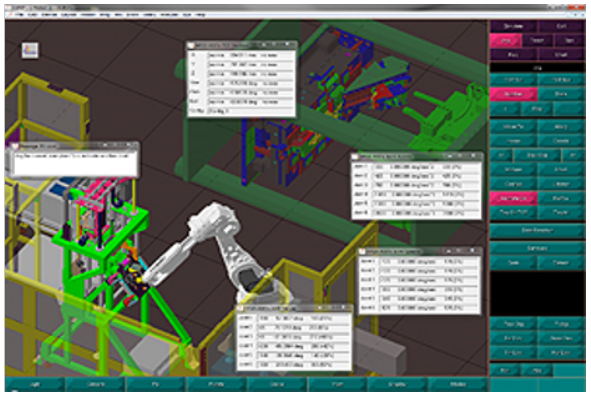


- Programmation de la tâche :
  - description à l'aide d'un programme constitué d'une séquence d'instructions élementaires ;
- Génération de mouvements :
  - calcul des consignes en position, vitesse ou accélération des axes du robot permettant de réaliser les trajectoires définissant la tâche ;
- Lois de commandes robotiques :
  - commande des axes ayant pour objectif d'asservir la position articulaire $q(t)$ sur la trajectoire $q_d(t)$ précedemment calculée.

Méthodes de programmation de mouvements de la tâche

Programmation des mouvements d'un robot industriel à travers 2 grandes méthodes :

- Apprentissage
  - création des trajectoires en faisant mémoriser au robot des points correspondants à des coordonnées cartésiennes et qui détermineront sa position.
  - spécification directement sur le robot en utilisant le boîtier de contrôle.
- Programmation hors-ligne
  - programmation de la tâche par un opérateur via un logiciel de programmation hors-ligne (sur ordinateur dédié) en important un modèle CAO grâce auquel il pourra générer les mouvements.
  - visualisation du résultat de la programmation grâce à un simulateur intégré qui est une représentation virtuelle de l'environnement de travail du robot.

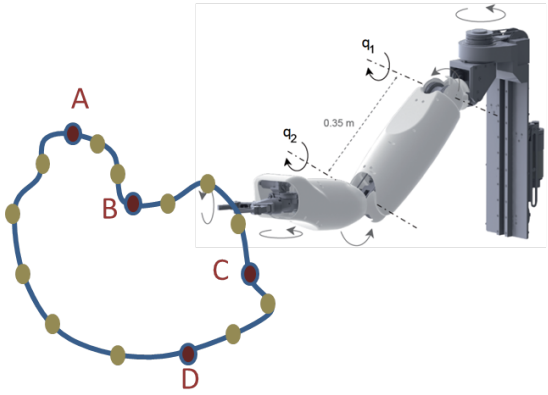


Fondements de la génération de trajectoires

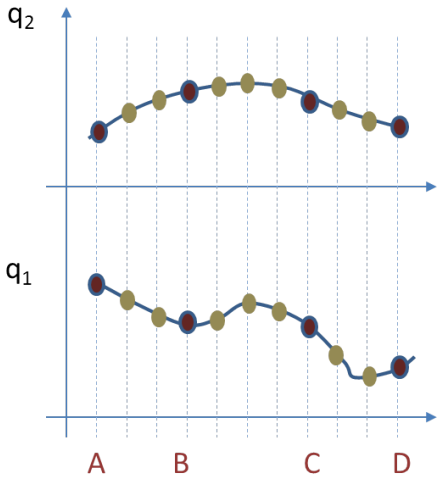
Fonction de calcul des trajectoires désirées (soit dans l'espace articulaire, soit dans l'espace cartésien) décrivant les équations du mouvement à suivre à partir de contraintes spatiales et temporelles liées à la tâche :

- Description de la suite de positions successives à adopter par le robot ;
- Principaux mouvements considérés dans la suite :
  - mouvement de type *point-à-point* : passage d'une configuration à une autre, sans se préoccuper de la trajectoire, si ce n'est pour aller le plus vite possible et en évitant les obstacles (prise-dépose, soudure par point, etc.) ;
  - mouvement *interpolé* : maîtrise de la trajectoire avec une loi horaire donnée (suivi de contour, dépôt de joint/colle, soudure en continu, etc.).

Espace cartésien



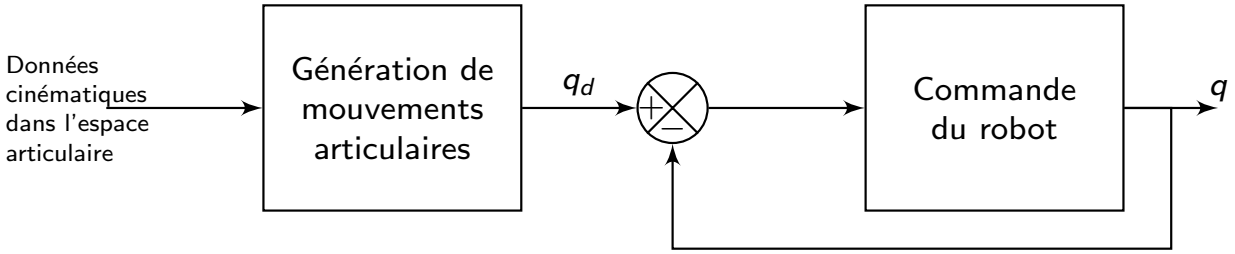
Espace articulaire



Fondements de la génération de trajectoires

Génération de trajectoires dans l'espace articulaire : approprié pour la réalisation de déplacements rapides dans un espace dégagé

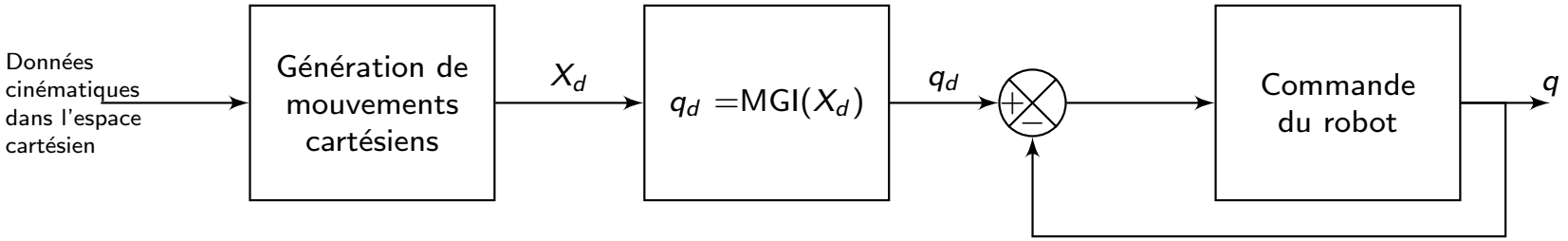
+ Nécessité de moins de calculs en ligne (pas d'appels au modèle géométrique ou cinématique inverse)
+ Mouvement non affecté par le passage sur les configurations singulières
+ Contraintes de vitesses et accélérations maximales directement interprétables
– Incertitude sur la trajectoire de l'outil dans l'espace cartésien



Fondements de la génération de trajectoires

Génération de trajectoires dans l'espace cartésien : approprié pour la réalisation de déplacements précis dans l'espace opérationel

+ Contrôle précis de la trajectoire de l'outil dans l'espace cartésien
– Nécessité de la transformation en coordonnées articulaires de chaque point de la trajectoire
– Prise en compte de contraintes liées au passage par les configurations singulières et au reconfiguration du robot



Fondements de la génération de trajectoires

Notations :

- q_i vecteur des coordonnées articulaires correspondant à la configuration initiale ;
- q_f vecteur des coordonnées articulaires correspondant à la configuration finale ;
- X_i vecteur des coordonnées cartésiennes correspondant à la configuration initiale ;
- X_f vecteur des coordonnées cartésiennes correspondant à la configuration finale ;
- k_v vecteur des vitesses articulaires maximales (k_{v_j} est donné par les caractéristiques des actionneurs) ;
- k_a vecteur des accélérations articulaires maximales (k_{a_j} pouvant être calculée à partir du rapport des couples moteurs maximaux τ_j et des inerties maximales vues par les articulations - bornes sup. des termes a_{ii} -).

Généralités

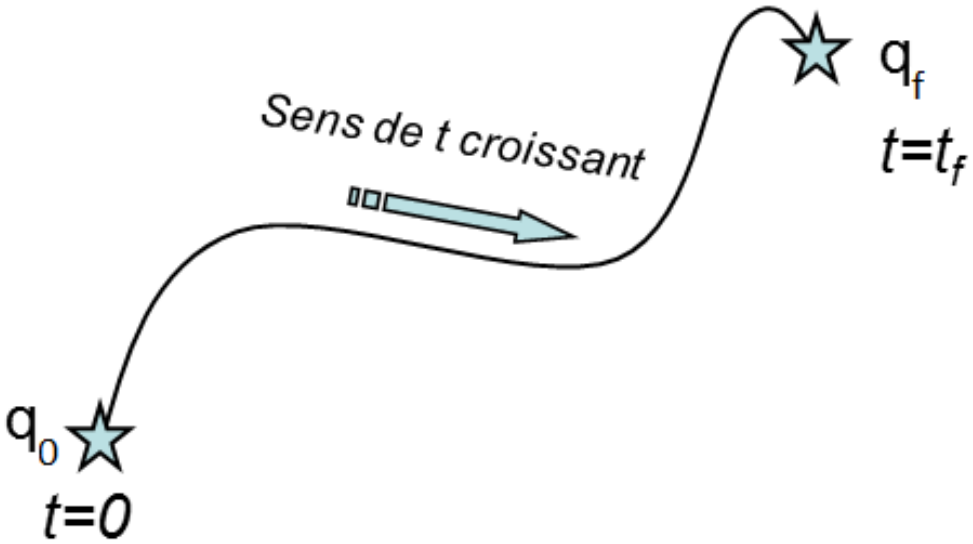
Formulation générale du problème

Il s'agit de paramétrer le mouvement entre les configurations q_i et q_f en fonction du temps t pour $0 \leq t \leq t_f$ selon

$$q(t) = q_0 + r(t)D$$

où $D = q_f - q_0$.

- Valeurs limites de la fonction d'interpolation $r(t)$ ($r(0) = 0$ et $r(t_f) = 1$) ;
- Vitesses articulaires données par $\dot{q}(t) = \dot{r}(t)D$.



Principales méthodes de génération de trajectoire articulaire *point-à-point*

Différents cas rencontrés pour la génération de trajectoire articulaire *point-à-point* en temps minimal :

- Etude de l'interpolation polynomiale de 3ième degré :
  - Prise en compte des vitesses initiale $\dot{q}_0$ et finale $\dot{q}_f$ désirées.
- Etude de l'interpolation polynomiale de 5ième degré :
  - Continuité en position, vitesse et accélération :
  - Mouvement de classe $\mathscr{C}^2$.
- Etude de lois trapézoïdales en vitesse (loi dite *bang-bang*) :
  - Mouvement continu en vitesse ;
  - Garantie d'un temps minimum en saturant la vitesse et l'accélération simultanément.

Principales méthodes de génération de trajectoire articulaire *point-à-point*

Différents cas rencontrés pour la génération de trajectoire articulaire *point-à-point* en temps minimal :

- Etude de l'interpolation polynomiale de 3ième degré :
  - Prise en compte des vitesses initiale $\dot{q}_0$ et finale $\dot{q}_f$ désirées.
- Etude de l'interpolation polynomiale de 5ième degré :
  - Continuité en position, vitesse et accélération :
  - Mouvement de classe $\mathscr{C}^2$.
- Etude de lois trapézoïdales en vitesse (loi dite *bang-bang*) :
  - Mouvement continu en vitesse ;
  - Garantie d'un temps minimum en saturant la vitesse et l'accélération simultanément.

Exemple : calcul de la loi polynomiale de degré 3 :
Déterminer la loi horaire polynomiale de 3ième degré avec prise en compte des contraintes initiale ($\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$) et terminale ($\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f$) en vitesse.

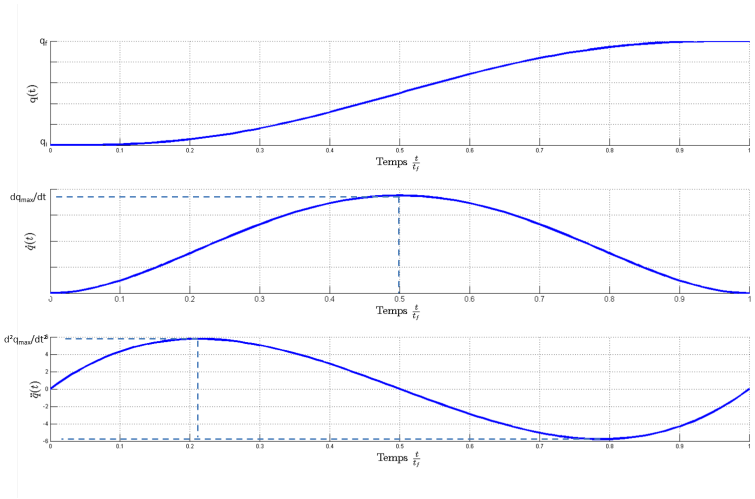
Exemple

Principales méthodes de génération de trajectoire articulaire *point-à-point*

Étude de l'interpolation polynomiale de 5ème degré [10]

- Conditions aux limites
  - $q(0) = q_0$ et $q(t_f) = q_f$
  - $\dot{q}(0) = 0$ et $\dot{q}(t_f) = 0$
  - $\ddot{q}(0) = 0$ et $\ddot{q}(t_f) = 0$
- Forme de la loi horaire :

$$r(t) = 10\left(\frac{t}{t_f}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{t_f}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{t_f}\right)^5$$



- Vitesse et accélération maximales :

$$\begin{cases} \dot{q}_{max} = \frac{15}{8}\left(\frac{q_f - q_0}{t_f}\right) \\ \ddot{q}_{max} = \frac{10}{\sqrt{3}}\left(\frac{q_f - q_0}{t_f^2}\right) \end{cases}$$

- Temps final minimum pour la *j-(ème)* articulation en saturant vitesse et accélération

$$t_{f_j} = \max\left[\frac{15\,|D_j|}{8k_{v_j}}, \sqrt{\frac{10\,|D_j|}{\sqrt{3}k_{a_j}}}\right]$$

- Temps global final minimum t_f avec coordination de toutes les articulations

$$t_f = \max\left(t_{f_1}, \ldots, t_{f_n}\right)$$

Principales méthodes de génération de trajectoire articulaire *point-à-point*

Loi bang-bang avec palier de vitesse [10]

- Trajectoire continue en vitesse assurant un temps minimal :
  1. saturation en accélération pour $0 \leq t \leq T_i$ jusqu'à atteindre la vitesse maximale ;
  2. saturation en vitesse pour $T_i \leq t \leq t_{f_i} - T_i$;
  3. saturation en décélération pour $t_{f_i} - T_i \leq t \leq t_{f_i}$.
- Condition d'existence d'un palier en vitesse égal à la vitesse maximale :

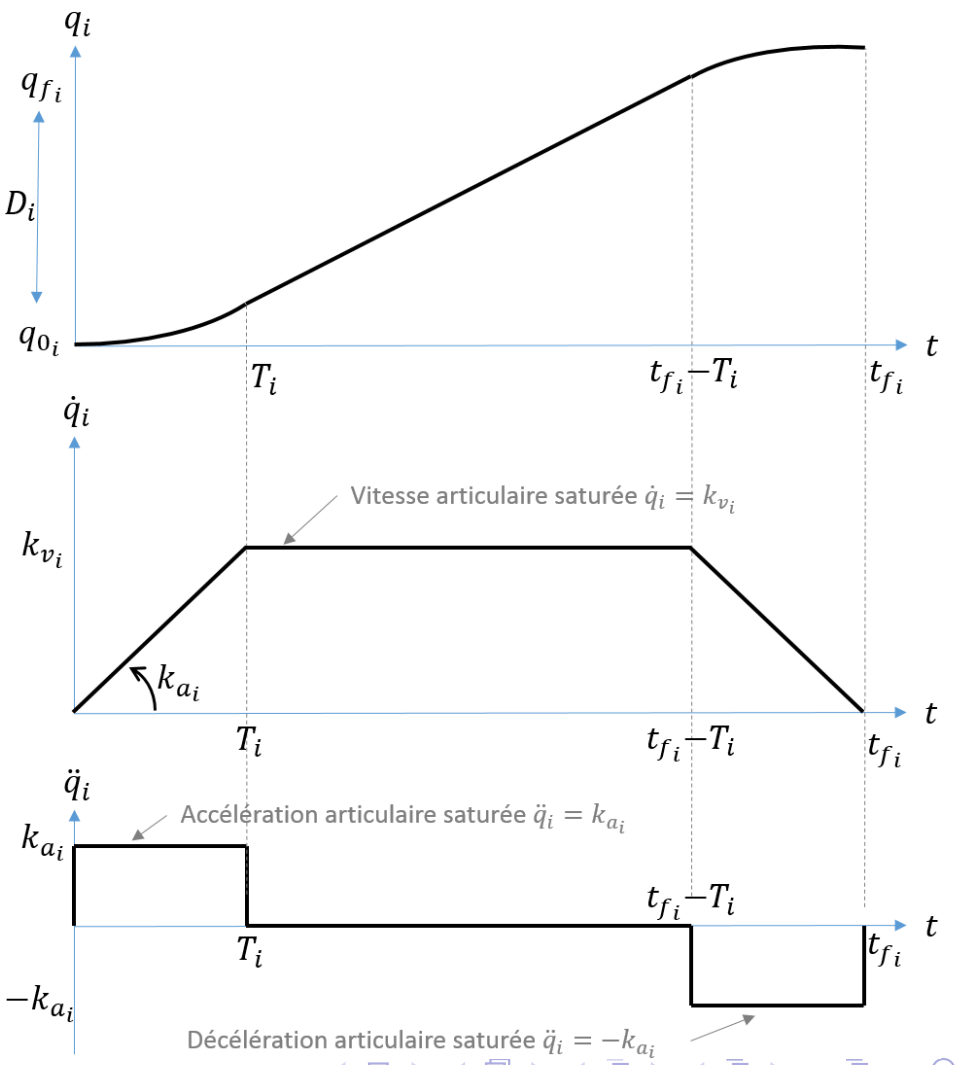
$$|D_i| > \frac{k_{v_i}^2}{k_{a_i}}$$

Démonstration

- Temps de parcours :

$$t_{f_i} = \frac{|D_i|}{k_{v_i}} + T_i = \frac{|D_i|}{k_{v_i}} + \frac{k_{v_i}}{k_{a_i}}$$

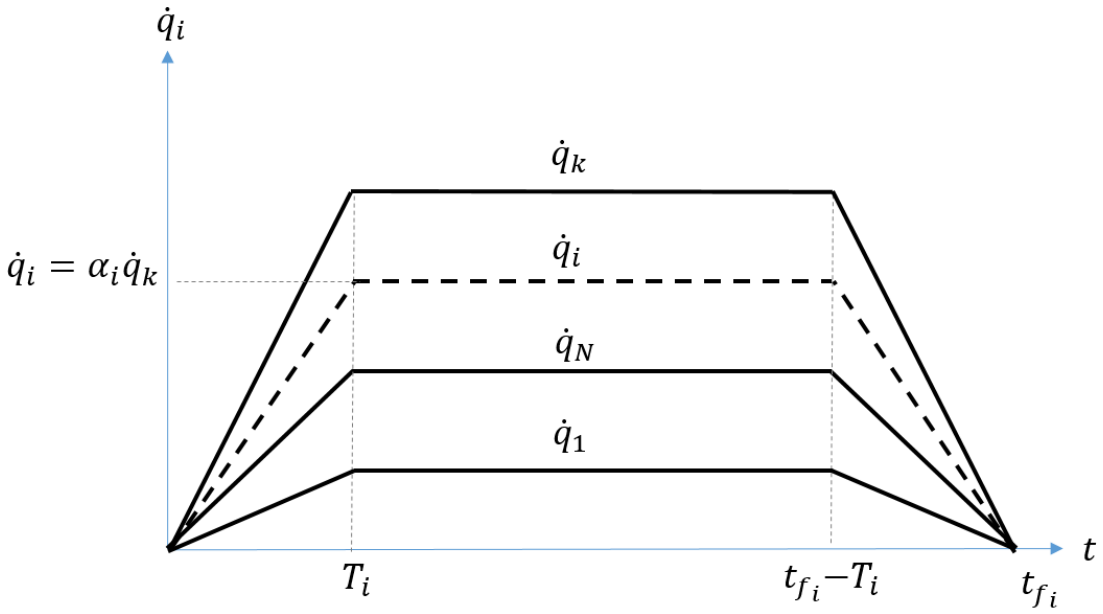
Démonstration



Principales méthodes de génération de trajectoire articulaire *point-à-point*

Loi bang-bang avec palier de vitesse [20]

- Synchronisation des axes :
  - Réglage de l'ensemble des axes sur l'axe le plus lent (i.e. ralentissement des axes les plus rapides pour qu'ils terminent leur mouvement en même temps que le plus lent) ;
  - Sollicitation moindre des actionneurs sans dégrader le temps de déplacement de l'effecteur d'un point au suivant ;
  - Synchronisation des phases d'accélération et décélération par une loi homothétique ;



Généralités

Formulation générale du problème

Soient les matrices homogènes décrivant respectivement :

- la situation initiale désirée de l'effecteur :

$$ {}^{0}\overline{g}_{0E} = \begin{bmatrix} {}^{0}R_{0E} & {}^{0}p_{0E} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} $$

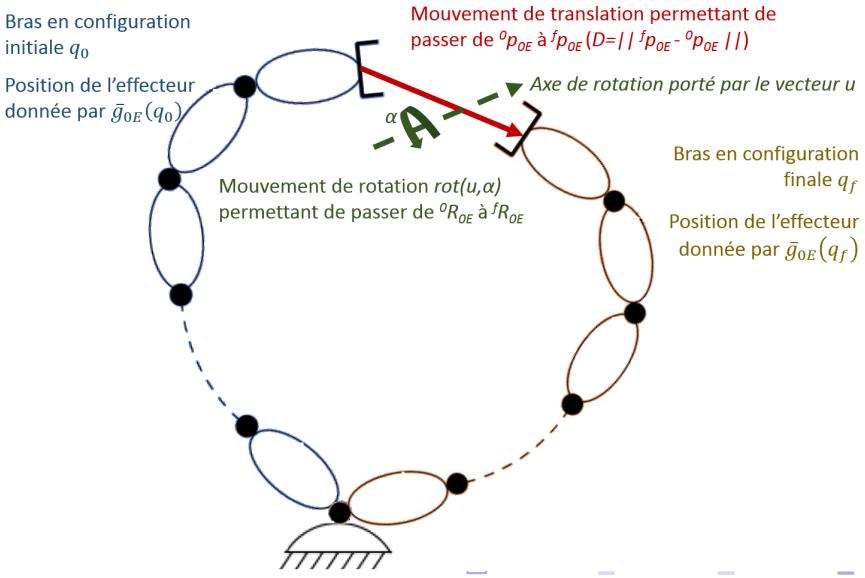
- la situation finale désirée de l'effecteur :

$$ {}^{f}\overline{g}_{0E} = \begin{bmatrix} {}^{f}R_{0E} & {}^{f}p_{0E} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} $$

Recherche d'une trajectoire rectiligne du point outil en décomposant le mouvement selon :

- un mouvement de translation en ligne droite entre les origines de ${}^{0}\overline{g}_{0E}$ et ${}^{f}\overline{g}_{0E}$;
- un mouvement de rotation α autour d'un axe u de l'organe terminal permettant d'aligner ${}^{0}R_{0E}$ et ${}^{f}R_{0E}$.

Terminaison synchrone des deux mouvements.



Calcul de l'interpolation

Évolution de la situation désirée (1/2)

- Mouvement de translation :
  - distance à parcourir telle que :

$$D = \left\| {}^{f}p_{0E} - {}^{0}p_{0E} \right\| = \sqrt{({}^{f}p_x - {}^{0}p_x)^2 + ({}^{f}p_y - {}^{0}p_y)^2 + ({}^{f}p_z - {}^{0}p_z)^2}$$

- Mouvement de rotation :
  - Calcul des paramètres de rotation (u et α) en tant que solutions de :

$${}^{0}R_{0E} R_{(u,\alpha)} = {}^{f}R_{0E}$$

où $R_{(u,\alpha)}$ est la matrice 3×3 de rotation correspondant à une rotation d'un angle α autour d'un vecteur u (exprimé dans le repère terminal) :

$$R_{(u,\alpha)} = {}^{0}R_{0E}^{t}\, {}^{f}R_{0E} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

pour laquelle le théorème d'inversion cinématique (vu au chapitre 2) permet de déduire u et α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) selon :

$$\alpha = atan2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}, \frac{1}{2}(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1)\right)$$

et

$$u = \begin{bmatrix} \frac{r_{32} - r_{23}}{2S\alpha} & \frac{r_{13} - r_{31}}{2S\alpha} & \frac{r_{21} - r_{12}}{2S\alpha} \end{bmatrix}^t \quad \text{si } S\alpha \neq 0$$

Calcul de l'interpolation

Évolution de la situation désirée (2/2)

- Loi horaire

$$\overline{g}_{0E}(t) = \begin{bmatrix} R(t) & p(t) \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

avec

- Évolution du mouvement de translation :

$$p(t) = {}^{0}p_{0E} + r(t)\left({}^{f}p_{0E} - {}^{0}p_{0E}\right) = {}^{0}p_{0E} + \frac{s(t)}{D}\left({}^{f}p_{0E} - {}^{0}p_{0E}\right)$$

- Évolution du mouvement de rotation :

$$R(t) = {}^{0}R_{0E}R_{(u,r(t)\alpha)}$$

où $r(t)$ est la fonction d'interpolation et $s(t)$ est la distance parcourue à l'instant t.

- Remarques
  - Expression de la rotation autour d'un axe fixe par rapport au repère de base $\mathscr{R}_0$: calcul de la rotation $R_{(u,\alpha)}$ comme solution de $R_{(u,\alpha)}{}^{0}R_{0E} = {}^{f}R_{0E}$;
  - Méthodes d'interpolation présentées dans le cas de la génération de trajectoire dans l'espace articulaire pouvant être mises en œuvre pour engendrer le mouvement synchronisé pour les deux variables D et α en temps ;
  - Nécessité de s'assurer à l'aide du modèle cinématique, que la trajectoire est réalisable par le robot du point de vue des vitesses et des accélérations articulaires ;
  - Utilisation du MGI pouvant poser plusieurs problèmes (déjà abordés au cours du chapitre *cinématique inverse*) :
    - nécessité de s'assurer que la position opérationnelle désirée est atteignable pour que le MGI admette au moins une solution ;
    - franchissement éventuel d'une configuration singulière (perte de degrés de liberté).

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

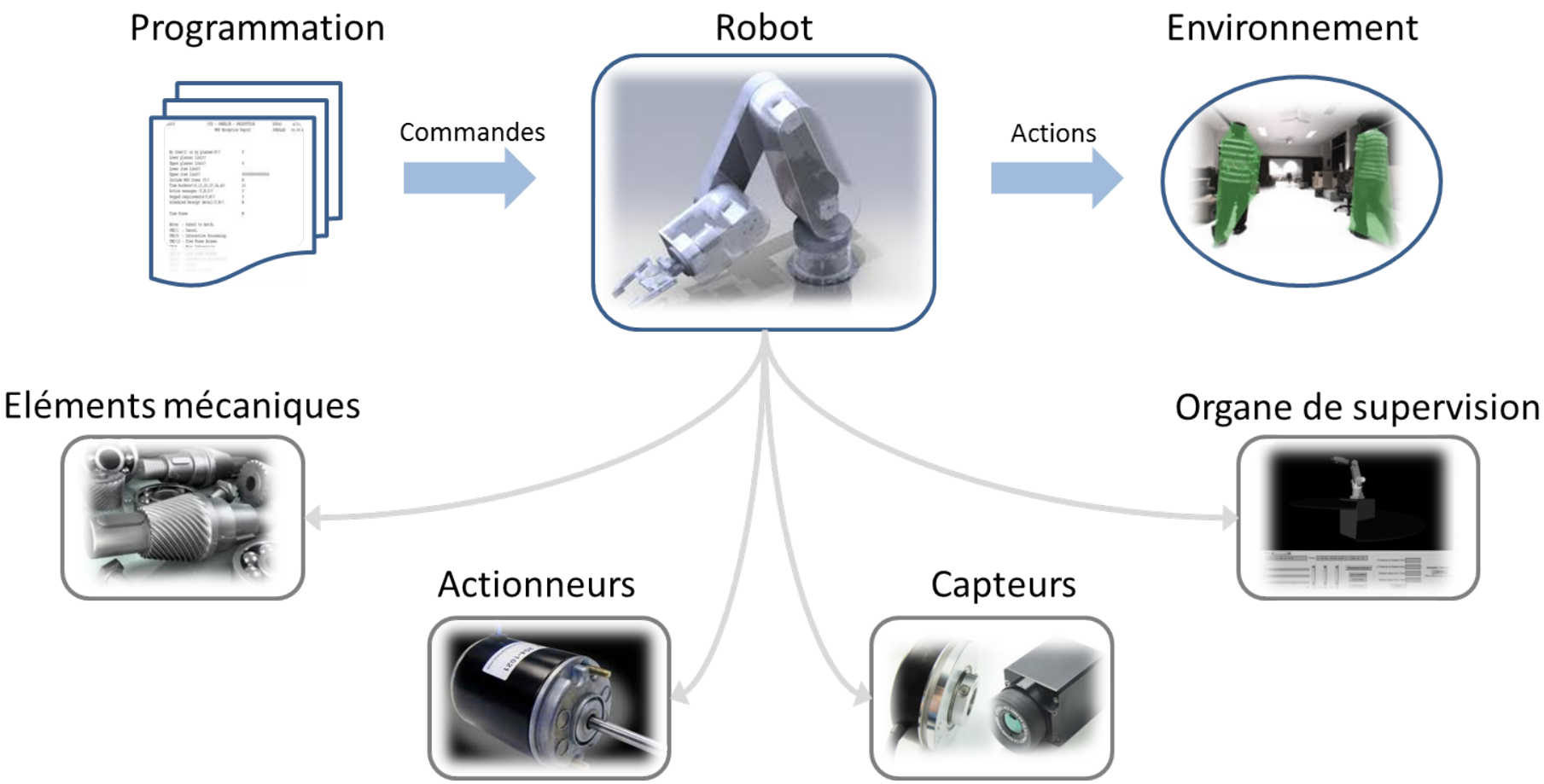
Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Constituants utiles à la commande



Structure fonctionnelle

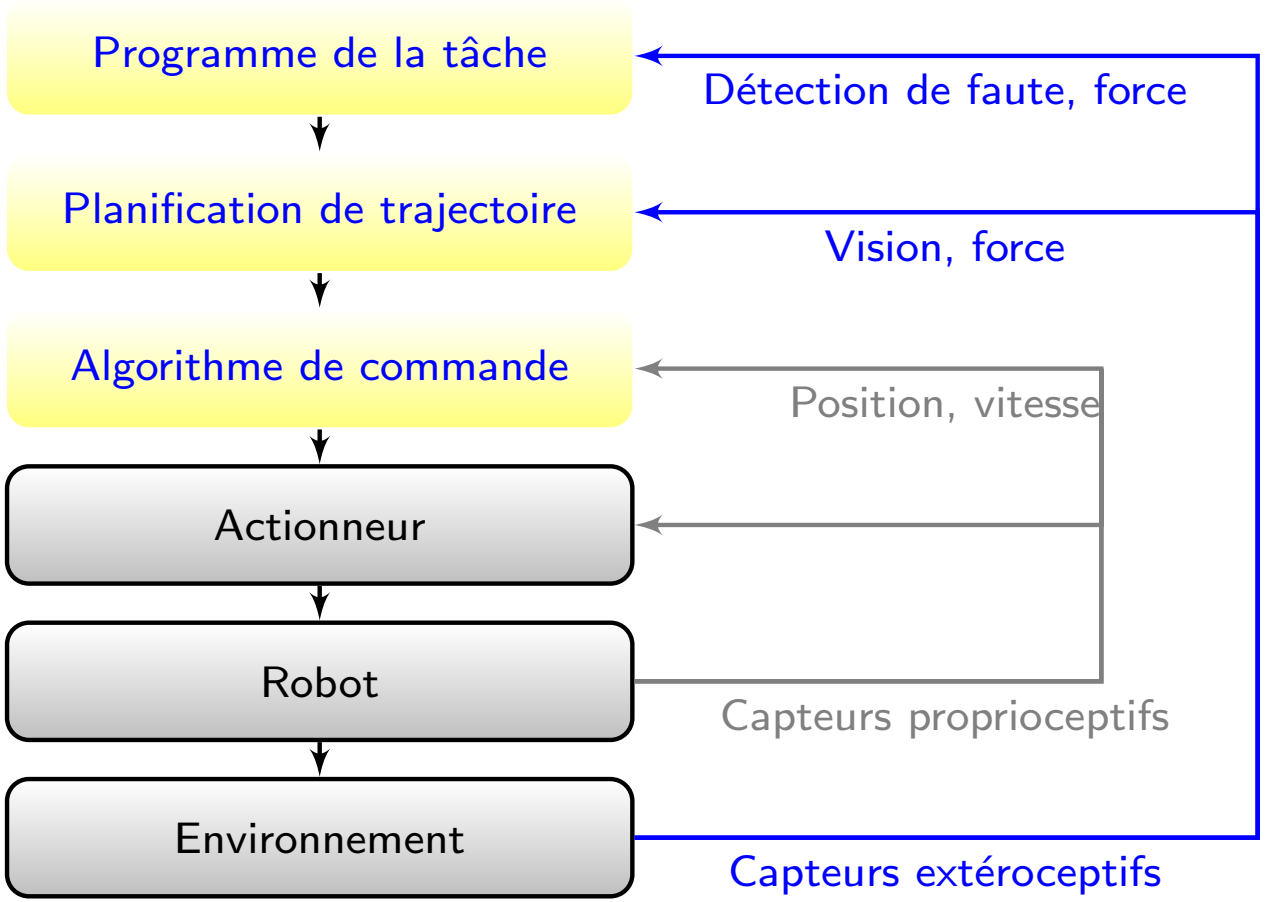
Modélisation de la tâche

Géométrie et cinématique, transformation de coordonnées

Méthodes avancées de commande

Modélisation électromécanique dynamique

Modélisation de la scène



Performances attendues par la commande

Évaluation des performances

- Qualité d'exécution dans les conditions nominales
  - vitesse de réalisation de la tâche
  - précision et répétabilité (en régimes statique et dynamique)
  - besoin en énergie

  $\Rightarrow$ Intérêt logiciel de la modélisation
- Robustesse en conditions perturbées
  - adaptation aux changements d'environnement
  - répétabilité malgré les perturbations, changements de paramètres, incertitudes et erreurs de modélisation

  $\Rightarrow$ Utilisation de boucles de rétroaction et de mesures capteurs

Pré-requis des stratégies de commande

- Commande en boucle fermée (insensibilité aux perturbations et petites variations de paramètres)
- Commande robuste (tolérance à une relativement grande plage d'incertitudes)
- Commande adaptative (amélioration en ligne des performances, adaptation aux variations paramétriques)
- Commande intelligente (apprentissage autonome basé sur l'expérience)

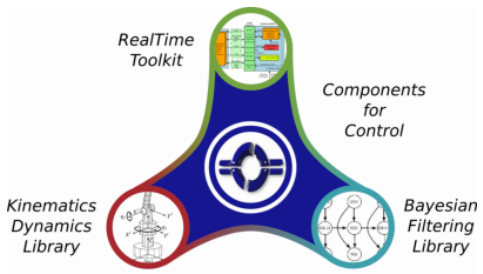
Aspects pratiques liés au contrôleur de robots

Tâches synchrones liées à la commande bas-niveau

- Fonctionnement sous un système temps-réel
  - VxWorks (Wind River)
  - RT Linux, Xenomaï, Linux RTAI, ...
- Garantie d'une période d'échantillonnage T_e constante (de l'ordre de quelques ms)
- Fonctionnalités
  - Echantillonnage des mesures
  - Gestion des sécurités bas-niveau
  - Calcul des commandes issues des asservissements articulaires

Supervision logicielle

- Fonctionnement asynchrone par rapport au contrôleur bas-niveau
- Fonctionnalités
  - Visualisation de l'état du robot
  - Ordre de commutation du mode de fonctionnement du robot (marche/arrêt, generation de trajectoires,...)
  - Programmation des tâches du robot à l'aide d'un macro-langage



Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Définitions

Soit le système autonome décrit par l'équation $\dot{x} = f(x)$. Sans perte de généralités, le point d'équilibre x_e, tel que si $x(t_0) = x_e$ alors $x(t) = x_e$ pour $t \geq t_0$, est dit :

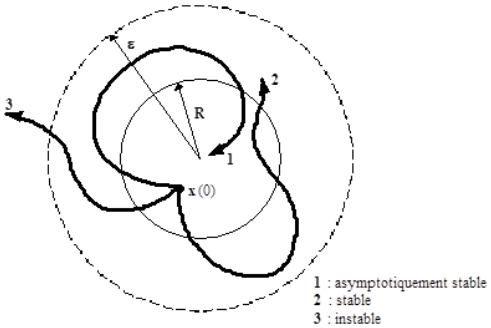
- stable si $\forall t \geq t_0$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists R > 0 \quad \text{tel que} \quad \|x(t_0) - x_e\| < R \quad \Rightarrow \quad \|x(t) - x_e\| < \epsilon$$

- asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad \|x(t_0) - x_e\| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = x_e$$

- globalement asymptotiquement stable s'il est asymptotiquement stable pour n'importe quelle valeur initiale $x(t_0)$.



Pour une représentation d'état $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, les points d'équilibre x_e sont solutions de l'équation algébrique :

$$0 = f(x(t), 0)$$

Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Fonction candidate de *Lyapunov* La fonction réelle $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie positive (DP) si $V(x) > 0$ sauf en 0 où $V(0) = 0$.

- Si $V(x) \geq 0$ alors la fonction est semi définie positive (SDP)
- Typiquement, les formes de V peuvent être choisies quadratiques ($\frac{1}{2}x^t P x$ où $P \succ 0$)
- La fonction de *Lyapunov* peut être comprise comme une fonction d'énergie généralisée

Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Fonction candidate de *Lyapunov* La fonction réelle $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est définie positive (DP) si $V(x) > 0$ sauf en 0 où $V(0) = 0$.

- Si $V(x) \geq 0$ alors la fonction est semi définie positive (SDP)
- Typiquement, les formes de V peuvent être choisies quadratiques ($\frac{1}{2}x^t P x$ où $P \succ 0$)
- La fonction de *Lyapunov* peut être comprise comme une fonction d'énergie généralisée

Condition suffisante de stabilité/instabilité au sens de *Lyapunov*

- Stabilité
  - S'il existe V candidate telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ (i.e. $\dot{V}(x)$ SDN) le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x)$, alors 0 est un état d'équilibre stable.
  - S'il existe V candidate telle que $\dot{V}(x) < 0$ (i.e. $\dot{V}(x)$ DN) le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x)$, alors 0 est un état d'équilibre asymptotiquement stable.
- Instabilité
  - S'il existe V candidate telle que $\dot{V}(x) > 0$ le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x)$, alors 0 est un état d'équilibre instable.

Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Remarques sur la méthode

- Procédure de base basée sur la génération d'une fonction scalaire de *type énergie* pour le système dynamique et d'en examiner la dérivée temporelle. On peut ainsi conclure quant à la stabilité sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles non-linéaires ;
- Problème de cette méthode : trouver une fonction de *Lyapunov* pour le système en l'absence de guide. Dans le cas non linéaire, absence de méthode systématiques pour choisir une fonction de *Lyapunov* convenable, d'où l'utilisation de l'expérience, de l'intuition et de considérations physiques.

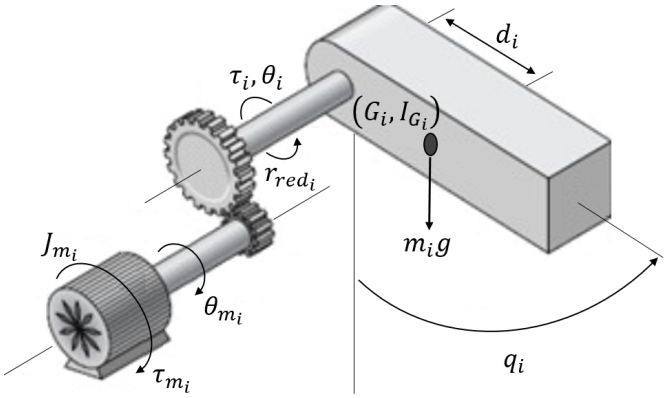
Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Remarques sur la méthode

- Procédure de base basée sur la génération d'une fonction scalaire de *type énergie* pour le système dynamique et d'en examiner la dérivée temporelle. On peut ainsi conclure quant à la stabilité sans avoir recours à la solution explicite des équations différentielles non-linéaires ;
- Problème de cette méthode : trouver une fonction de *Lyapunov* pour le système en l'absence de guide. Dans le cas non linéaire, absence de méthode systématiques pour choisir une fonction de *Lyapunov* convenable, d'où l'utilisation de l'expérience, de l'intuition et de considérations physiques.

Exemple applicatif

Retour sur l'étude d'un axe robotique en rotation



- Variation angulaire considérée $q_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
- Recherche des états d'équilibre du système autonome ;
- Étude de la stabilité des points d'équilibre du système autonome.

Exercice

Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Stabilité dans le cas de système Linéaire Temporellement Invariant

Étant donné le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax$$

on considère une fonction candidate de *Lyapunov* quadratique, $V(x) = x^t P x$, alors

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x} = x^t A^t P x + x^t P A x = x^t \left(A^t P + PA\right) x = -x^t Q x$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système $\dot{x} = Ax$ soit asymptotiquement stable est que $\forall Q = Q^t \succ 0$, la matrice P, unique solution de l'équation de *Lyapunov* qui suit, soit définie positive :

$$A^t P + PA + Q = 0$$

Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Stabilité dans le cas de système Linéaire Temporellement Invariant

Étant donné le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax$$

on considère une fonction candidate de *Lyapunov* quadratique, $V(x) = x^t P x$, alors

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x} = x^t A^t P x + x^t P A x = x^t \left(A^t P + PA\right) x = -x^t Q x$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système $\dot{x} = Ax$ soit asymptotiquement stable est que $\forall Q = Q^t \succ 0$, la matrice P, unique solution de l'équation de *Lyapunov* qui suit, soit définie positive :

$$A^t P + PA + Q = 0$$

En automatique linéaire, on montre que :

- le système est asymptotiquement (et même exponentiellement) stable ssi toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative (appartenance au demi-plan complexe gauche) ;
- le système est instable s'il existe au moins une valeur propres de A à partie réelle positive.

Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Stabilité dans le cas de système Linéaire Temporellement Invariant

Étant donné le système linéaire suivant :

$$\dot{x} = Ax$$

on considère une fonction candidate de *Lyapunov* quadratique, $V(x) = x^t P x$, alors

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t P x + x^t P \dot{x} = x^t A^t P x + x^t P A x = x^t \left(A^t P + PA\right) x = -x^t Q x$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système $\dot{x} = Ax$ soit asymptotiquement stable est que $\forall Q = Q^t \succ 0$, la matrice P, unique solution de l'équation de *Lyapunov* qui suit, soit définie positive :

$$A^t P + PA + Q = 0$$

En automatique linéaire, on montre que :

- le système est asymptotiquement (et même exponentiellement) stable ssi toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative (appartenance au demi-plan complexe gauche) ;
- le système est instable s'il existe au moins une valeur propres de A à partie réelle positive.

On peut exploiter ce résultat localement dans le cas non-linéaire ($\dot{x} = f(x)$), en considérant $A = \frac{\partial f}{\partial x}$ évaluée au point d'équilibre (l'origine ici).

Rappels sur la stabilité des systèmes dynamiques

Lorsque $\dot{V}(x)$ est SDN, il est encore possible de montrer la stabilité asymptotique en utilisant le théorème de *LaSalle*.

Théorème de *LaSalle* et principe d'invariance

S'il existe V candidate telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ le long des trajectoires de $\dot{x} = f(x)$, alors les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant $M \subseteq S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0 \right\}$.

- L'ensemble M est invariant pour un système dynamique lorsque une trajectoire démarrant de M reste pour tout temps dans M

$$x(t_0) \in M \quad \Rightarrow \quad x(t) \in M, \quad \forall t \geq t_0$$

- D'après le théorème de *LaSalle*, chaque solution démarrant de S converge vers M quand $t \to +\infty$
- Ainsi, si $M \equiv \{0\}$, alors 0 est un état d'équilibre asymptotiquement stable

Stabilisation d'un bras manipulateur sous l'action de la commande articulaire

Objectif de régulation

L'objectif de stabilisation asymptotique du robot régi par l'équation dynamique

$$\Gamma = A(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q)$$

est réalisé par la régulation de l'état du système $x = [q, \dot{q}]^t$ vers son état d'équilibre défini par $x_e = [q_e = q_d, \dot{q}_e = 0]$ où q_d est la position désirée du robot.

- Représentation d'état non-linéaire :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ -A^{-1}(q)\left(C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q)\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A^{-1}(q) \end{pmatrix} \Gamma$$

  Notons que $A^{-1}(q)$ est bien définie.

- Etat d'équilibre du robot (sous la commande Γ_e) :

$$\begin{cases} \dot{q}_e = 0 \\ -A^{-1}(q_e)\left(C(q_e,\dot{q}_e)\,\dot{q}_e + G(q_e)\right) + A^{-1}(q_e)\,\Gamma_e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_e = 0 \\ \Gamma_e = G(q_d) \end{cases}$$

  A l'équilibre, les vitesses articulaires sont nulles et les couples articulaires de commande équilibrent les couples gravitationels.

Commande articulaire PD décentralisée

Loi de commande P.D. articulaire

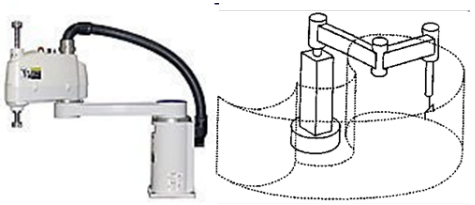
Soit la loi de commande linéaire de type Proportionnelle Dérivée (P.D.) suivante

$$\Gamma = u = K_p\left(q_d - q\right) - K_d\dot{q}$$

réalisée au niveau articulaire axe par axe, pour laquelle $K_p \succ 0$ et $K_d \succ 0$ sont définies positives et diagonales ($K_p = diag\left(k_{p_i}\right)$ et $K_d = diag\left(k_{d_i}\right)$).
En l'absence de termes liés à la gravité (i.e. $G\left(q\right) = 0$), l'état du robot $\left[q_d, 0\right]^t$ sous la loi de commande P.D. précédente est globalement asympotiquement stable.

Démonstration de la stabilité de la commande

1. Proposer une fonction de *Lyapunov* V définie positive ;
2. Calculer $\dot{V}$ et conclure sur la stabilité en utilisant l'équation de la dynamique du système bouclé et le fait que $\left(\dot{A} - 2C\right)$ est antisymétrique ;
3. En exploitant le théorème de *LaSalle*, conclure sur la convergence asymptotique du système

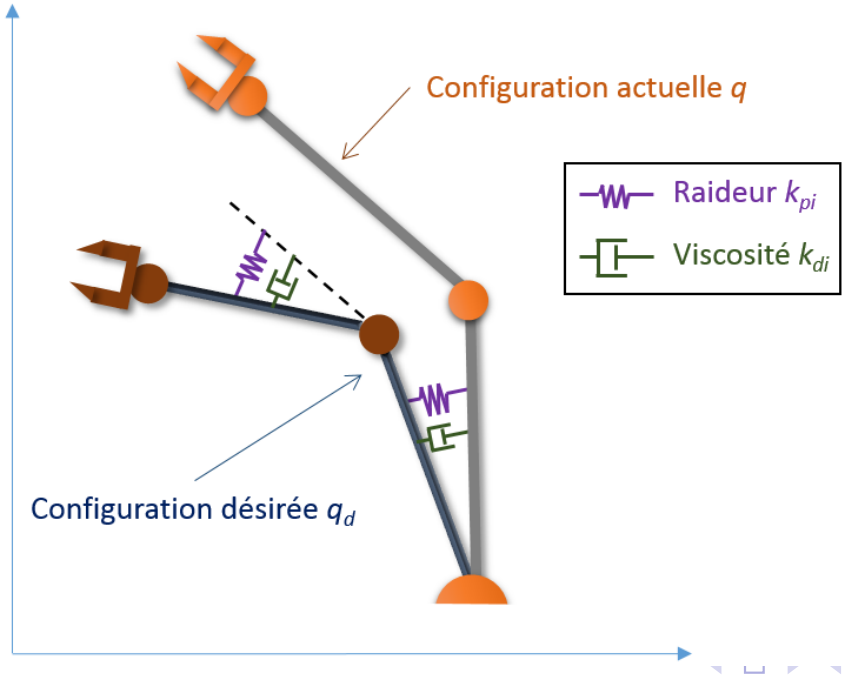


Démonstration

Commande articulaire P.D. décentralisée

Interprétation physique

Les gains *Proportionnel* et *Dérivée* de la loi de commande $\Gamma = u = K_p\left(q_d - q\right) - K_d\dot{q}$ réalisée au niveau articulaire, pour laquelle $K_p \succ 0$ et $K_d \succ 0$ sont définies positives et diagonales ($K_p = diag\left(k_{p_i}\right)$ et $K_d = diag\left(k_{d_i}\right)$), peuvent être vus comme des raideurs et viscosité programmables de manière logicielle.
Quelquefois, on parle plutôt de ressorts et amortisseurs virtuels.



Commande articulaire P.D. décentralisée

Implantation pratique au sein du contrôleur de l'action dérivée lorsque seule la position moteur (ou articulaire) est mesurée (au moyen de codeurs par exemple)

Loi de commande en temps continu

$$u(t) = K_p e(t) + K_d \dot{e}(t) \qquad e = q_d - q,\ \dot{e} = -\dot{q}$$

Représentation dans le domaine de *Laplace*

$$u(s) = (K_p + K_d s)\, e(s)$$

Fonction de transfert non-propre

$$u(s) = \left(K_p + K_d \frac{s}{1+\tau s}\right) e(s)$$

Action dérivée limité aux pulsations $\omega \leq 1/\tau$

Transformation en Z à la période d'échantillonnage T_e

$$u(z) = \left(K_p + K_d \frac{1-z^{-1}}{T_e}\right) e(z)$$

$$u(z) = \left(K_p + K_d \frac{\frac{1-z^{-1}}{T_e}}{1+\tau \frac{1-z^{-1}}{T_e}}\right) e(z)$$

Implantation en temps discret

$$u_k = K_p e_k + K_d \frac{e_k - e_{k-1}}{T_e}$$

$$u_k = K_p e_k + \frac{\tau}{\tau + T_e} u_{k-1} + \frac{K_d}{\tau + T_e}(e_k - e_{k-1})$$

Deux réalisations possibles

Commande articulaire P.D. décentralisée avec prise en compte de la gravité

- En présence de robots soumis à l'influence de la gravité, modification de la loi de commande :

$$u = \Gamma = K_p\left(q_d - q\right) - K_d\dot{q} + \hat{G}\left(q\right)$$

  avec $K_p \succ 0$ et $K_d \succ 0$ et une compensation non-linéaire du couple de gravité, rendant l'état d'équilibre $(q_d, 0)$ asymptotiquement stable (même démonstration que précédemment).
- Dans le cas où la compensation de gravité n'est pas réalisée (ou incomplètement réalisée, i.e. $\hat{G}\left(q\right) \neq G\left(q\right)$) :
  - système convergeant vers un état d'équilibre $[q^* \neq q_d, 0]$;
  - erreur statique $\epsilon_q = q^* - q_d$ de position due à l'influence de perturbations articulaires non-rejetées par la loi de commande ;
  - Lors d'un asservissement P.D. en position du robot, connaissance très précise des termes de gravité requise pour assurer une grande précision statique de positionnement du système.
- En théorie des systèmes linéaires, action intégrale I dans la loi de commande généralement nécessaire pour éliminer ces erreurs de régime permanent lors d'une réponse indicielle.

Commande articulaire P.D. décentralisée avec terme intégral [10]

Discussions et procédure sur le rôle du terme intégral

1. Désactivation de la composante intégrale lorsque l'erreur en position est très grande, le terme proportionnel étant suffisant (évitement des saturations actionneurs)

$$u_1(t) = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + \hat{G}(q)$$

2. Activation de l'action intégrale lorsque l'erreur statique est due à la force de gravité et de frottements autour de la position finale

$$u_2(t) = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + K_i\int_{t_0}^{t}(q_d - q)\,d\lambda$$

Avantages de la méthodologie de PID décentralisé en mode articulaire

- Facilité d'implantation
- Faible coût de calculs

Inconvénients de cette méthodologie

- Dépassements de consigne (réponse temporelle du robot variant selon sa configuration)
- Mauvaise précision de suivi dans les mouvements rapides

Commande articulaire P.I.D. décentralisée en mode articulaire

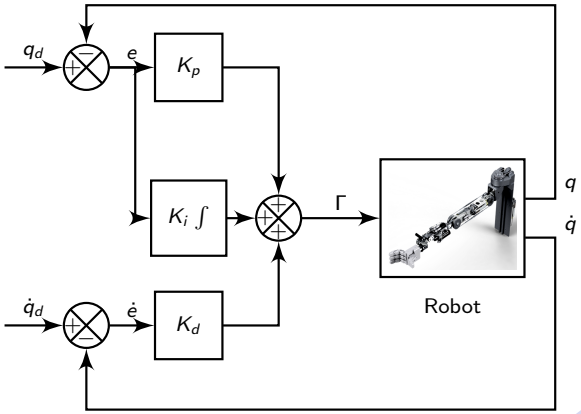
Loi de commande robotique P.I.D. en mode articulaire

La loi de commande linéaire suivante de type *Proportionnelle Intégrale Dérivée* appliquée au robot

$$\Gamma(t) = u(t) = \underbrace{K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q})}_{u_1(t)} + \underbrace{K_i \int_{t_0}^{t} (q_d - q)\, d\lambda}_{u_2(t)}$$

avec $K_p \succ 0$, $K_d \succ 0$ et $K_i \succ 0$, permet d'assurer l'annulation des erreurs statiques dues à une compensation incomplète (ou non-prise en compte) des phénomènes de gravité ou frottement.

Généralement, le terme $\dot{q}_d$ n'est pas prise en compte dans les objectifs de régulation.



Commande articulaire P.I.D. décentralisée en mode articulaire

Méthodologie (simpliste) de synthèse des gains du correcteur P.I.D. (1/2)

- Hypothèses considérées quant au mécanisme robotique pour la synthèse PID
  - Robot considéré comme un système linéaire (au moins localement) alors qu'il est modélisé comme un système dynamique non-linéaire et couplé
  - Asservissements indépendants des couplages articulaires (contrôleur SISO)
  - Correcteur P.I.D. à gains constants
- Modèle simplificateur de l'articulation i : système linéaire du second ordre à coefficients constants

$$\tau_i = a_{ii}\ddot{q}_i + f_{v_i}\dot{q}_i + \gamma_i$$

  où a_{ii} désigne la valeur maximale de l'élément de la matrice d'inertie A et γ_i le couple perturbateur dû au couplage et autres phénomènes négligés dans l'approximation
- Fonction de transfert du système en boucle fermée (à perturbation nulle $\gamma_i = 0$)

$$\frac{q_i(s)}{q_{d_i}(s)} = \frac{k_{d_i}s^2 + k_{p_i}s + k_{i_i}}{a_{ii}s^3 + \left(k_{d_i} + f_{v_i}\right)s^2 + k_{p_i}s + k_{i_i}}$$

Démonstration

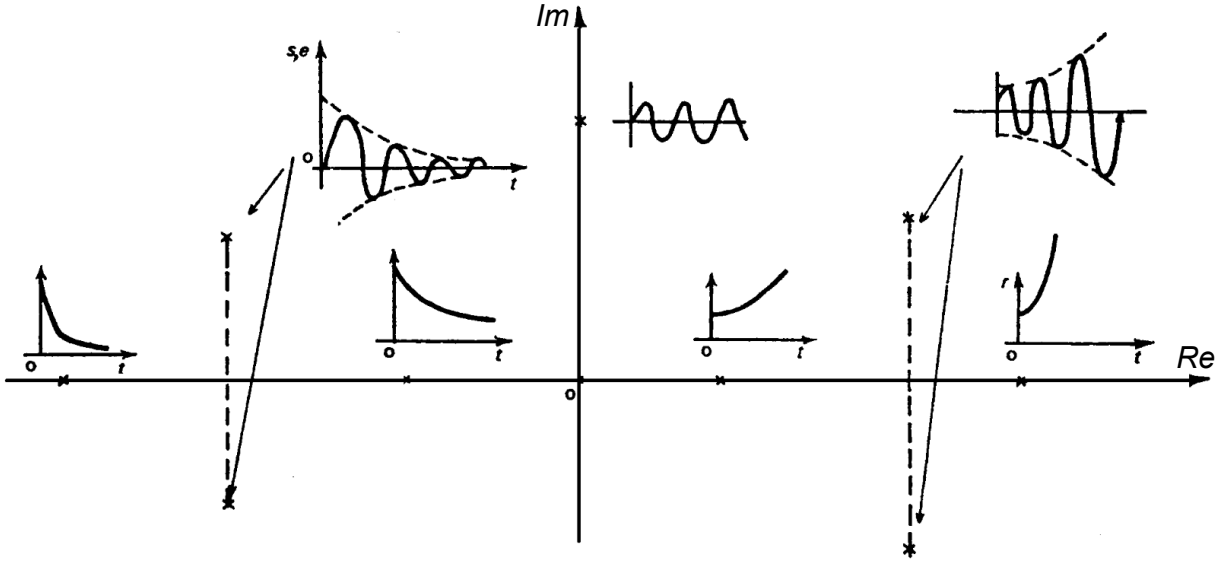
Commande articulaire P.I.D. décentralisée en mode articulaire [10]

Méthodologie (simpliste) de synthèse des gains du correcteur P.I.D. (2/2)

- Recherche des pôles du système en boucle fermée
  - Polynôme caractéristique : $\Delta(s) = a_{ii}s^3 + \left(k_{d_i} + f_{v_i}\right)s^2 + k_{p_i}s + k_{i_i}$
  - Réglage des gains PID :
    - Solution courante en robotique : réponse rapide sans oscillations
    - Choix des gains de manière à obtenir un pôle triple réel négatif $\Delta^*(s) = a_{ii}(s+\omega_i)^3$:

$$\begin{cases} k_{p_i} = 3a_{ii}\omega_i^2 \\ k_{d_i} = 3a_{ii}\omega_i - f_{v_i} \\ k_{i_i} = a_{ii}\omega_i^3 \end{cases}$$

  - Compromis sur le choix de ω_i (dynamique rapide vs. stabilité) : pulsation inférieure à la pulsation de résonance (modes vibratoires mécaniques, valeur utilisée : $\omega_i = \omega_{r_i}/2$)



Régulation P.I.D. en mode cartésien

Avantages de l'approche de commande dans l'espace cartésien

- Maîtrise plus aisée des performances réellement atteintes dans l'espace cartésien par la loi de commande (dépassements de consigne et oscillations notamment), puisque la réponse temporelle du robot varie selon sa configuration articulaire ;
- Amélioration de la précision de suivi dans les mouvements rapides cartésien.

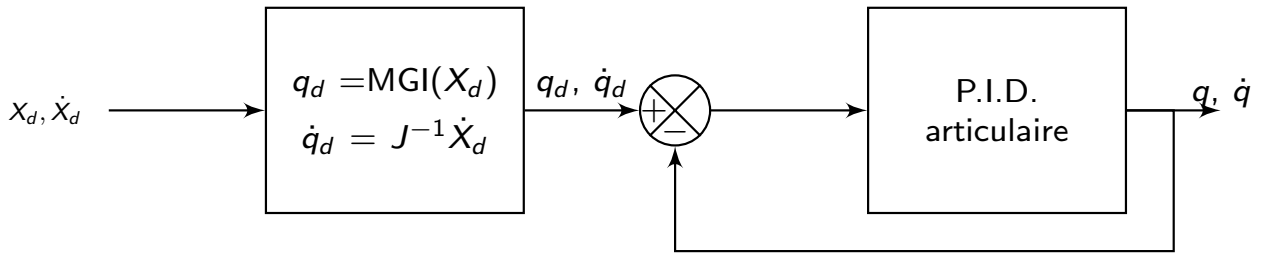
Régulation P.I.D. en mode cartésien

Avantages de l'approche de commande dans l'espace cartésien

- Maîtrise plus aisée des performances réellement atteintes dans l'espace cartésien par la loi de commande (dépassements de consigne et oscillations notamment), puisque la réponse temporelle du robot varie selon sa configuration articulaire ;
- Amélioration de la précision de suivi dans les mouvements rapides cartésien.

1^{ière} pratique : transposition du problème de commande articulaire

- Loi de commande linéaire précédente de type *Proportionnelle Intégrale Dérivée* mise en œuvre dans l'espace articulaire ;
- Génération des consignes q_d et $\dot{q}_d$ issues de la transformation du mouvement de consigne défini dans l'espace opérationnel X_d et $\dot{X}_d$ dans l'espace articulaire ;
- Malgré tout, erreur encore exprimée dans l'espace articulaire.



Régulation P.I.D. en mode cartésien

2ième pratique : formulation du problème de commande dans l'espace cartésien (1/2)

Spécification directe dans l'espace cartésien

La loi de commande linéaire suivante de type Proportionnelle Intégrale Dérivée appliquée au robot

$$\Gamma(t) = u(t) = J(q)^t \left[K_p (X_d - X) + K_d \left(\dot{X}_d - \dot{X} \right) + K_i \int_{t_0}^{t} (X_d - X)\, d\lambda \right]$$

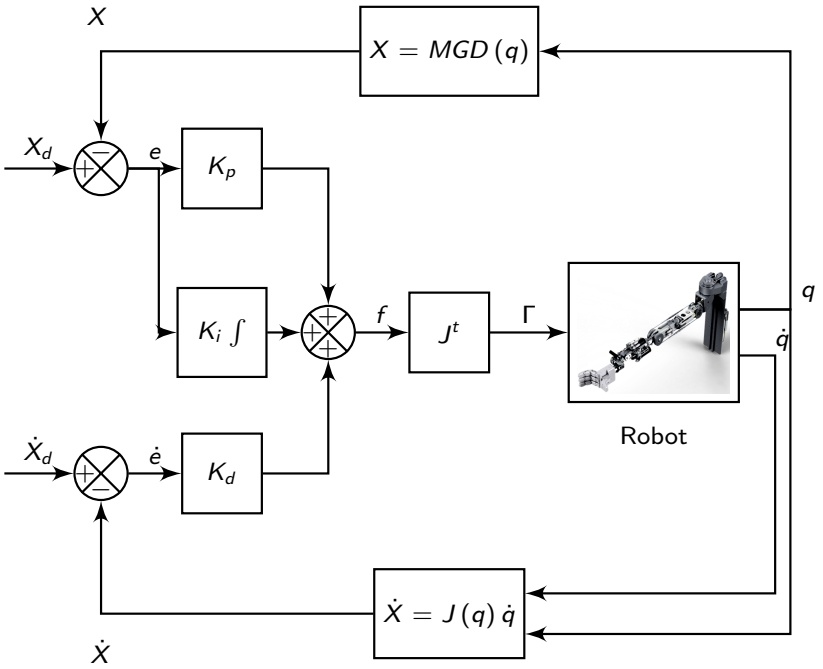
permet d'assurer une régulation de l'organe terminal directement dans l'espace cartésien (ou opérationel).

- Similitude structurelle avec la commande P.I.D. en mode articulaire (remplacement de q par X dans l'équation de la commande articulaire) ;
- Transformation de l'erreur obtenue dans l'espace opérationnel à l'espace articulaire par la multiplication par J^t.

Régulation P.I.D. en mode cartésien

2ième pratique : formulation du problème de commande dans l'espace cartésien (2/2)

- Schéma-bloc de la loi de commande



- Aspects pratiques pour les estimations de la position et de la vitesse cartésienne :
  - Estimation de X à partir du modèle géométrique direct (MGD) ;
  - Estimation de $\dot{X}$:
    - Procédure numérique de dérivation de la position articulaire q (dans le cas d'absence de mesures tachymètriques)
    - Utilisation du modèle cinématique direct pour estimer $\dot{X}$

Régulation P.I.D. en mode cartésien

Stabilité d'une variante de la commande P.D. en mode cartésien

La loi de commande de type *Proportionnelle Dérivée* suivante

$$\Gamma(t) = J(q)^t \left[K_p (X_d - X)\right] - K_d \dot{q} + \widehat{G}(q),$$

avec $K_p \succ 0$ et $K_d \succ 0$, converge asympotiquement vers l'ensemble

$$S = \{\dot{q} = 0, q / K_p (X_d - MGD(q)) \in N_{J^t}\}$$

Démonstration

- Corollaire : pour un état initial donné $[q(t_0), \dot{q}(t_0)]$, dans le cas où le robot ne rencontre pas de configurations singulières (i.e. configurations pour lesquelles $\rho(J^t) = r < M \leq N$) durant sa trajectoire, alors la régulation converge asymptotiquement vers l'unique (dans le cas non-redondant $M = N$) ou vers un des nombreux (dans le cas redondant $M < N$) états, tel que :

$$q \in \mathbb{R}^n / MGD(q) = X_d \quad et \quad \dot{q} = 0.$$

Rappelons que $\rho\left(J^t\right) = \rho(J)$.

Régulation P.I.D. en mode cartésien

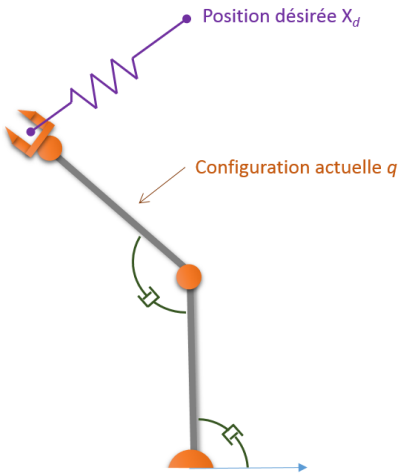
Interprétations physiques

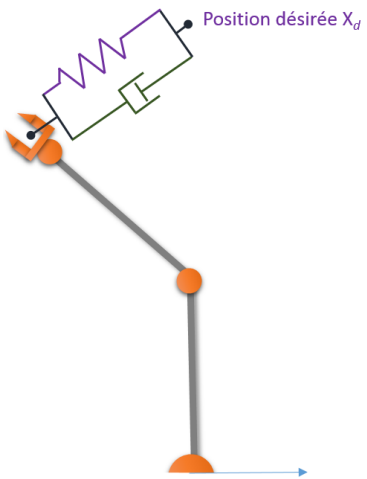
1- Régulation P.D. en cartésien avec compensation gravité

$$\Gamma(t) = J(q)^t \left[K_p (X_d - X)\right] - K_d \dot{q} + \widehat{G}(q).$$

2- Variante possible pour la régulation avec compensation gravité

$$\Gamma(t) = J(q)^t \left[K_p (X_d - X) - K_d \dot{X}\right] + \widehat{G}(q).$$





Transformation des forces/couples *élastiques* (ou *visco-élastiques* dans le second cas) agissant sur l'organe effecteur par J^t en couple de commande au niveau articulaire.

Linéarisation par bouclage

Classe de solutions applicables pour le problème de suivi d'une trajectoire continue de classe C^2 et dérivable au moins deux fois

$$q_d(t),\ \dot{q}_d(t) \text{ et } \ddot{q}_d(t)$$

- Contexte favorable pour l'utilisation de cette approche :
  - nécessité d'une grande précision dynamique malgré des évolutions du robot selon des dynamiques parfois importantes définies par la trajectoire ;
  - mise en défaut des approches précédentes de commande par rétroaction seule avec correcteur temporellement invariant sur un système dynamique multivariable, non-linéaire et non-stationnaire.

Approche de commande par découplage (ou *computed torque*)

- Découplage et linéarisation des équations du modèle : transformation par retour de sortie dynamique du problème de commande d'un système non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire
- Réponse uniforme quelle que soit la configuration du robot ;
- Nécessite le calcul en ligne du modèle dynamique du robot.

$\Rightarrow$ Stratégie de commande reposant sur la théorie de la platitude.

Notions de platitude

Définition [29]

Un système défini par l'équation $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ où $x(t)$ est l'état et $u(t)$ est la commande est dit *plat* s'il existe un vecteur $z(t)$ tel que :

$$z(t) = h\left(x(t), u(t), u^{(1)}(t), \ldots, u^{(r)}(t)\right)$$

et deux fonctions $\phi(.)$ et $\psi(.)$ telles que

$$x(t) = \phi\left(z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(p)}(t)\right)$$
$$u(t) = \psi\left(z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m)}(t)\right)$$

où f, h, ψ, ϕ sont des fonctions régulières et r, p, m sont trois entiers.

- z s'appelle la sortie *plate* du système ;
- Tout le comportement dynamique du système est alors décrit à partir du comportement de sa sortie plate ;
- Il n'y a pas d'unicité des sorties plates, le paramétrage n'est donc pas unique.

Notions de platitude

Propriété de platitude des robots rigides

Le modèle dynamique du robot rigide

$$\Gamma = A(q)\,\ddot{q} + \underbrace{C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) + \Gamma_f(q,\dot{q})}_{H(q,\dot{q})}$$

réecrit sous forme d'une représentation d'état non-linéaire ($x_1 = q$, $x_2 = \dot{x}_1$ et $u = \Gamma$)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = A(x_1)^{-1}\left(u - H(x_1, x_2)\right) \end{cases}$$

admet comme sortie plate le vecteur $z = x_1$.

En effet, l'état et la commande du système s'exprime entièrement à partir de z selon :

- $x_2 = \dot{z}$ (première condition vérifiée)
- $u = A(z)\,\ddot{z} + H(z,\dot{z})$ (deuxième condition vérifiée)

Notons que $A(x_1)^{-1}$ est bien définie.

Notions de platitude

Une commande en boucle fermée est nécessaire pour le problème de poursuite de la trajectoire désirée et la relation

$$u(t) = \psi\left(z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m)}(t)\right)$$

est celle qui va nous permettre de construire l'algorithme de commande.

Commande par platitude [29]

La commande par platitude est définit par :

$$u(t) = \psi\left(z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t), v(t)\right)$$

où $v(t)$ est la nouvelle entrée de commande. Lorsque $\frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial z^{(m)}}$ est localement inversible, cela conduit au système découplé :

$$z^{(m)}(t) = v(t)$$

Le problème de commande initial est alors ramené à celui d'un système linéaire, invariant, découplé et formé par des chaînes d'intégrateurs purs d'ordre m à partir de z.

Application de la notion de platitude au cas des robots rigides

- Expression de la loi de commande
  en appliquant le principe précédent de commande par platitude au cas de robot rigide, l'expression de la loi de commande s'écrit :

$$u = \hat{A}(q)\, v + \hat{H}(q, \dot{q})$$

  en remplacant $z^{(2)}(t)$ par $v(t)$. On note $\hat{A}$ et $\hat{H}$ les estimées du modèle dynamique du robot.

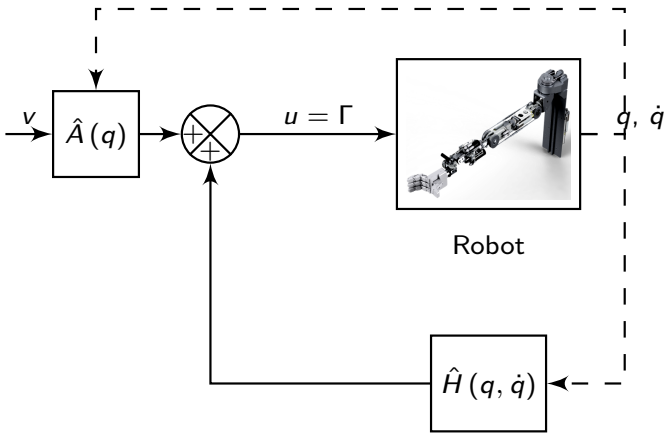
- Expression du système après l'action du retour linéarisant
  dans le cas idéal où le modèle est parfaitement connu et identifié ($\hat{A} = A$ et $\hat{H} = H$), le système en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} A(q)\,\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = u \Leftrightarrow & A(q)\,\ddot{q} + H(q, \dot{q}) = \hat{A}(q)\, v + \hat{H}(q, \dot{q}) \\ \Leftrightarrow & \ddot{q} = \left(A^{-1}(q)\,\hat{A}(q)\right) v \\ \Leftrightarrow & \ddot{q} = v \end{aligned}$$

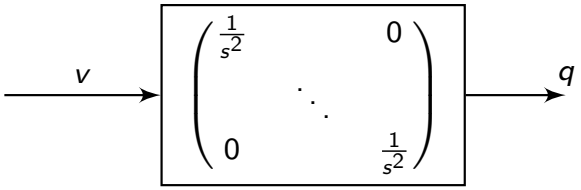
  On note que $\frac{\partial \psi(\cdot)}{\partial z^{(m)}} = A(q)$ est bien inversible.

Application de la notion de platitude au cas des robots rigides

- Sous l'action de la commande par platitude $u = \hat{A}(q)\, v + \hat{H}(q, \dot{q})$, le robot rigide est ramené au cas d'un système linéaire découplé constitué de double intégrateurs purs dont l'entrée de commande est le vecteur v.
  - Algorithme de découplage linéarisant



  - Schéma bloc équivalent



Robot découplé et linéarisé

Correcteur stabilisant

Stabilisation [29]

Après l'étape de découplage et linéarisation, un bouclage supplémentaire de stabilisation est nécessaire. La commande :

$$v(t) = z_d^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} K_j \left(z_d^{(j)}(t) - z^{(j)}(t) \right)$$

où K_j est une matrice diagonale définie positive, conduit à :

$$u(t) = \psi \left(z(t), z^{(1)}(t), \ldots, z^{(m-1)}(t), z_d^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} K_j \left(z_d^{(j)}(t) - z^{(j)}(t) \right) \right)$$

et permet d'assurer une poursuite de trajectoire asymptotique

$$\lim_{t \to +\infty} \left(z_d(t) - z(t) \right) = 0$$

- Dans le cas du robot rigide, la loi de commande stabilisante devient
$$v(t) = \ddot{q}_d(t) + K_d \left(\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t) \right) + K_p \left(q_d(t) - q(t) \right)$$
- Il s'agit d'un correcteur Proportionnel Dérivée avec anticipation sur l'accélération.

Correcteur stabilisant

- Dynamique de l'erreur en boucle fermée
  dans le cas d'un robot rigide découplé et linéarisé, un correcteur Proportionnel Dérivée avec anticipation sur l'accélération

$$v(t) = \ddot{q}_d(t) + K_d(\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)) + K_p(q_d(t) - q(t))$$

résulte en une dynamique boucle fermée dans l'espace articulaire du type :

$$\begin{aligned}
& v(t) = \ddot{q}_d(t) + K_d(\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)) + K_p(q_d(t) - q(t)) \\
\Leftrightarrow & \ddot{q}(t) = \ddot{q}_d(t) + K_d(\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)) + K_p(q_d(t) - q(t)) \\
\Leftrightarrow & (\ddot{q}_d(t) - \ddot{q}(t)) + K_d(\dot{q}_d(t) - \dot{q}(t)) + K_p(q_d(t) - q(t)) = 0 \\
\Leftrightarrow & \ddot{e}(t) + K_d\dot{e}(t) + K_p e(t) = 0
\end{aligned}$$

où $e = q_d - q$ est l'erreur de position articulaire.

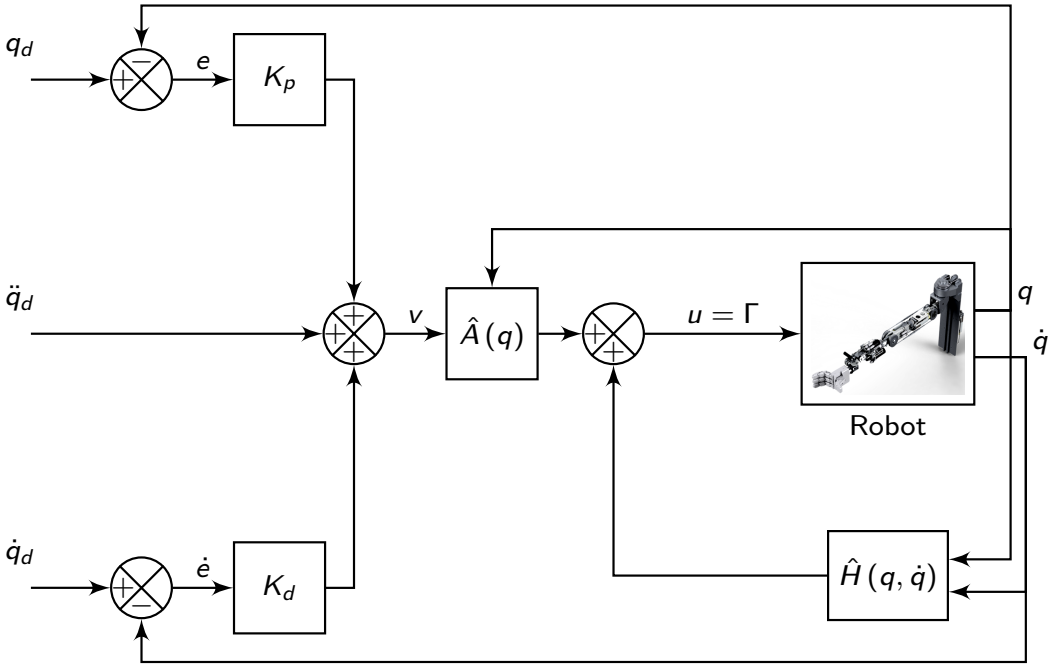
- Remarques
  - La dynamique de l'erreur est globalement exponentiellement stable ;
  - Le choix des gains K_{p_j} et K_{d_j} est réalisé selon la dynamique désirée d'amortissement ξ_j et de pulsation ω_{n_j}

$$\begin{cases} K_{p_j} = \omega_{n_j}^2 \\ K_{p_j} = 2\xi_j\omega_{n_j} \end{cases}$$

Correcteur stabilisant

Résumé de la démarche générale de commande par *Computed Torque*

1. Linéarisation/découplage du modèle (par compensation des couples *Coriolis*, centrifuges, gravité et frottements) ;
2. Rétroaction liée à la stabilité (correction de position et vitesse à gains variables représentés respectivement par $\hat{A}(q)\,K_p$ et $\hat{A}(q)\,K_d$) ;
3. Anticipation de la consigne en accélération (couples d'inertie via $\hat{A}(q)\,\ddot{q}_d$).

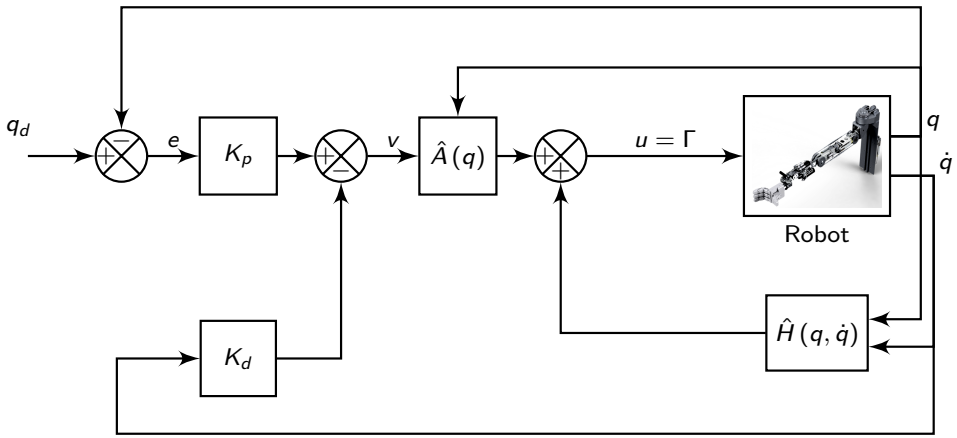


Correcteur stabilisant

Variante de l'approche en ne considérant que la spécification de la position finale

- Simplification de la loi de commande générale :

$$\begin{aligned} & u(t) = \hat{A}(q)\left[K_p(q_d - q) + K_d(\dot{q}_d - \dot{q}) + \ddot{q}_d\right] + \hat{C}(q,\dot{q}) + \hat{G}(q) \\ \Rightarrow \quad & u(t) = \hat{A}(q)\left[K_p(q_d - q) - K_d\dot{q}\right] + \hat{C}(q,\dot{q}) + \hat{G}(q) \end{aligned}$$



- Autre variante du schéma de commande :
  - compensation de la gravité seule dans la contribution des termes non-linéaires $H(q,\dot{q})$:

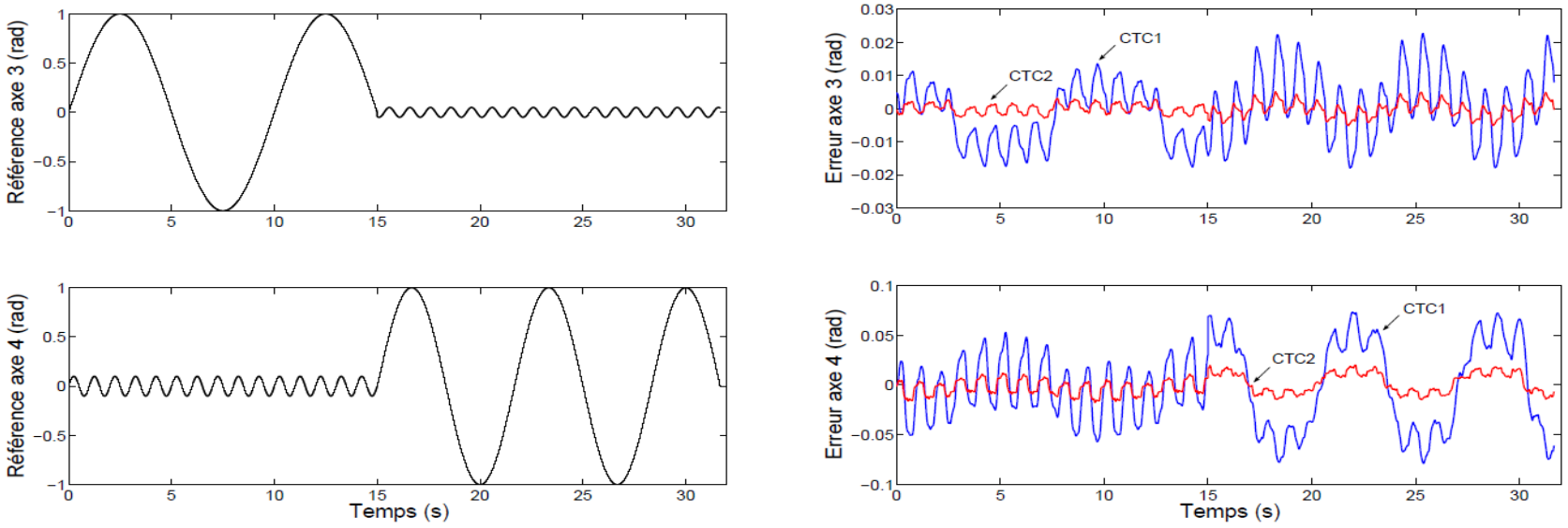
$$u(t) = K_p(q_d - q) - K_d\dot{q} + \hat{G}(q)$$

  - analogie avec le contrôleur P.D. articulaire avec compensation de gravité vu précédemment.

Étude expérimentale - cas de la spécification de la position finale seule

Correcteurs PD monovariables sur le robot ASSIST découplé et linéarisé (version 2 axes) [15]

- Réglage CTC1 avec bande-passante du contrôleur inférieure à la première fréquence de résonance
- Réglage CTC2 avec bande-passante du contrôleur supérieure à la première fréquence de résonance



(a) Références moteur. *(b) Erreurs moteurs.*

Influence des erreurs de modèle dans la commande par *Computed Torque*

- Incertitudes introduites par le découplage linéarisant
  - Découplage imparfait dû aux erreurs de modélisation ou d'identification ;
  - Équation de la boucle fermée

$$\hat{A}(q)\left(\ddot{q}_d + K_d\dot{e} + K_p e\right) + \hat{H}(q,\dot{q}) = A(q)\,\ddot{q} + H(q,\dot{q})$$

  - Équation de la dynamique de l'erreur

$$\ddot{e} + K_d\dot{e} + K_p e = \hat{A}^{-1}(q)\left[\left(A(q) - \hat{A}(q)\right)\ddot{q} + H(q,\dot{q}) - \hat{H}(q,\dot{q})\right]$$

    Excitation de l'erreur par les incertitudes !
- Variante appropriée à la commande par *Computed Torque* :
  - calcul du découplage en fonction des variables du mouvement désiré :

$$u = \hat{A}(q_d)\,v + \hat{H}(q_d,\dot{q}_d)$$

    avantage lié au calcul du découplage non contaminé par les bruits de mesure ;
  - approches de commande robuste [16].

Notions de platitude pour les robots à articulations flexibles

Sortie plate pour les robots à articulations flexibles [7]

Le modèle réduit de robots à articulations flexibles

$$A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + \Gamma_{f_c} + K(q-\theta) = 0$$
$$J_m\ddot{\theta} + \Gamma_{f_m} - K(q-\theta) = \Gamma$$

est linéarisable par retour de sortie et la variable articulaire $z = q$ est une sortie plate.

- En isolant θ dans la 1ère équation et en dérivant deux fois, il vient :

$$\ddot{\theta} = \ddot{q} + K^{-1}\left[A(q)q^{(4)} + 2\dot{A}(q,\dot{q})q^{(3)} + \ddot{A}(q,\dot{q},\ddot{q})\ddot{q} + \ddot{H}(q,\dot{q},\ddot{q},q^{(3)})\right]$$

  En additionnant les deux équations du modèle, et en remplaçant $\ddot{\theta}$ par son expression en fonction de q et ses dérivées, on obtient une expression du couple moteur en fonction de q et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 4 :

$$\Gamma = J_m\ddot{\theta} + A(q)\ddot{q} + H(q,\dot{q}) \;\Rightarrow\; u = \psi(q,\dot{q},\ddot{q},q^{(3)},q^{(4)})$$

- En choisissant l'état $x = [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [q\ \dot{q}\ \ddot{q}\ q^{(3)}]^T$ et $y = x_1 = q$, une représentation d'état du système est : $\dot{x_1} = x_2$, $\dot{x_2} = x_3$, $\dot{x_3} = x_4$ et $\dot{x_4} = f_4(x) + g_4(x)\Gamma$ avec

$$\begin{aligned} f_4(x) = &- A(x_1)^{-1}KJ^{-1}\left[A(x_1)x_3 + H(x_1,x_2)\right] - A(x_1)^{-1}\left[K + \ddot{A}(x_1,x_2,x_3)\right]x_3 \\ &- 2A(x_1)^{-1}\dot{A}(x_1,x_2)x_4 - A(x_1)^{-1}\ddot{H}(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ g_4(x) = &A(x_1)^{-1}KJ^{-1} \end{aligned}$$

Notions de platitude pour les robots à articulations flexibles

Commande linéarisante

Lors de la commande de mouvements, la référence articulaire q doit être au moins quatre fois dérivable afin de garantir l'existence d'un couple nominal continu. Dans ce cas, la commande linéarisante par retour de sortie pour ce système est :

$$\Gamma = g_4(x)^{-1}(v - f_4(x))$$

où v est la nouvelle loi de commande pour le système linéarisé et découplé qui se compose de n quadruples intégrateurs indépendants :

$$q^{(4)} = v$$

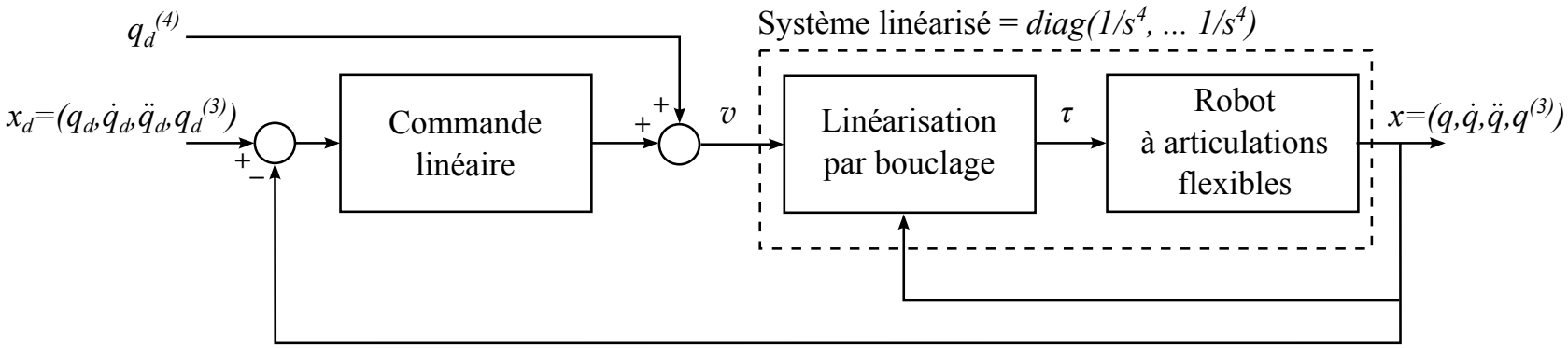


FIGURE: Commande linéarisante par bouclage pour le suivi de trajectoire [7].

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Différentes stratégies de commande pour l'interaction

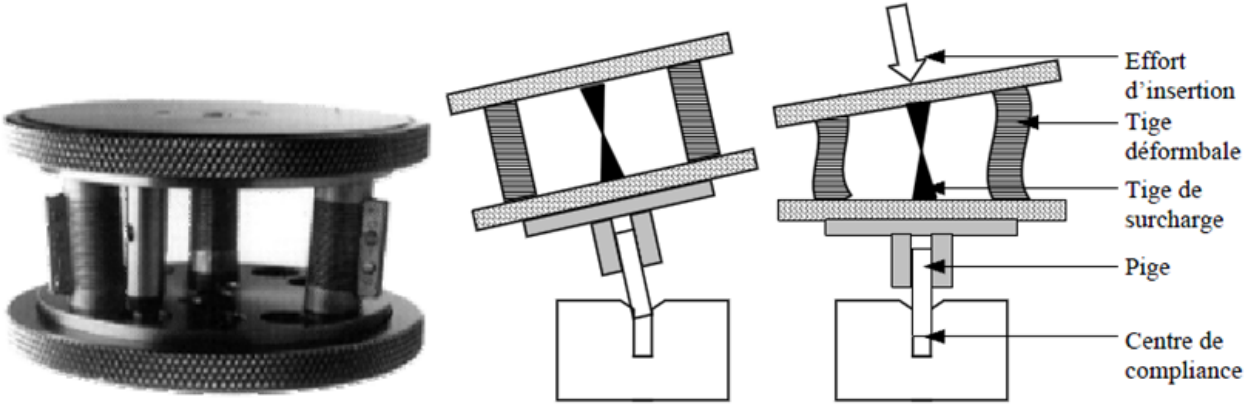
Objectif de réalisation d'une tâche impliquant un contact contrôlé de l'interaction entre l'organe effecteur du robot et l'environnement.

- Limitations des robots commandés seulement en position :
  - nécessité d'une modélisation précise du robot ;
  - nécessité d'une connaissance exacte de la raideur de l'environnement dans toutes ses directions.
- Aperçu des principales stratégies de commande en effort :
  1. commande en force indirecte ou *implicite* : stratégie de commande via une boucle d'asservissement en position (absence d'une sur-boucle explicite en force, i.e. consigne en position)
     - commande en compliance ;
     - commande en impédance (avec ou sans mesure de force dans les boucles internes).
  2. commande en force directe ou *explicite* : stratégie de commande avec une sur-boucle explicite en effort (consigne en force)
     - commande hybride parallèle force/position ;
     - commande hybride externe.

Commande en compliance

Stratégie de compliance passive [1] :

- Utilisation d'une structure mécanique déformable ;
- Corrections des erreurs de positionnement du robot (variation géométrique des structures) ;
- Inconvénients de l'adaptation de l'outil à la tâche :
  - raideur fixée ;
  - centre de compliance figée.



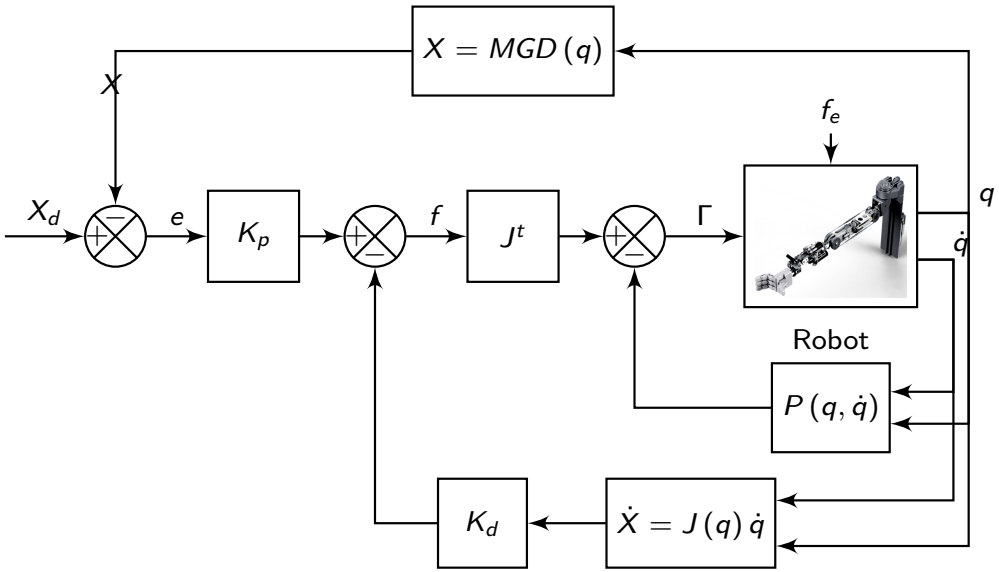
Commande en compliance

Stratégie de compliance active

- Manipulateur commandé en position soumis à un effort perturbateur f_e qui induit une erreur de position $\Delta X = X_d - X$
  - Modèle dynamique du manipulateur : $A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) + \Gamma_f(q,\dot{q}) + J^t f_e = \Gamma$
- Régulation P.D. en mode cartésien de loi de commande

$$\Gamma = J^t\left[K_p(X_d - X) - K_d\dot{X}\right] + \underbrace{P(q,\dot{q})}_{\text{Compensation}}$$

- A l'équilibre, la raideur apparente du manipulateur vaut K_p en cartésien et $J^t K_p J$ en articulaire.



Commande en impédance

Comportement dynamique imposé lors de l'interaction robot/environnement [8] :

- Spécifications des performances désirées au travers une impédance dynamique du type *masse-ressort-amortisseur* :

$$f_e(s) = Z(s)X(s) \qquad \text{où} \qquad Z(s) = Ms^2 + Bs + K$$

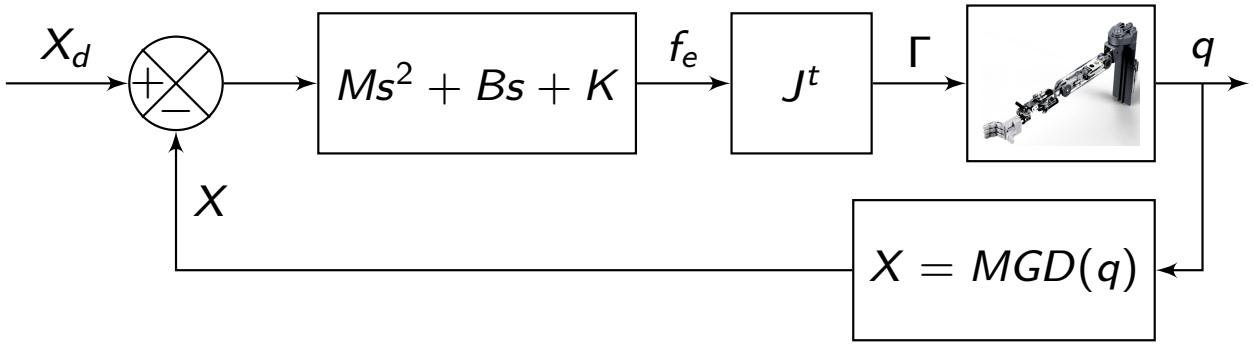
  - M : matrice d'inertie cible
  - B : matrice d'amortissement cible
  - K : matrice de raideur cible

- Stratégie convenable pour des forces de contact relativement faibles et une régulation pas nécessairement très précise
- Compromis à réaliser dans le choix des matrices M, B et K entre les forces de contact et la précision de positionnement :
  - $M \nearrow$ et $K \searrow$ dans les directions Cartésiennes du contact : faible force de contact
  - $M \searrow$ et $K \nearrow$ dans les directions Cartésiennes sans contact : bonne précision de positionnement
  - Réglage de B utilisé pour modeler les comportements transitoires

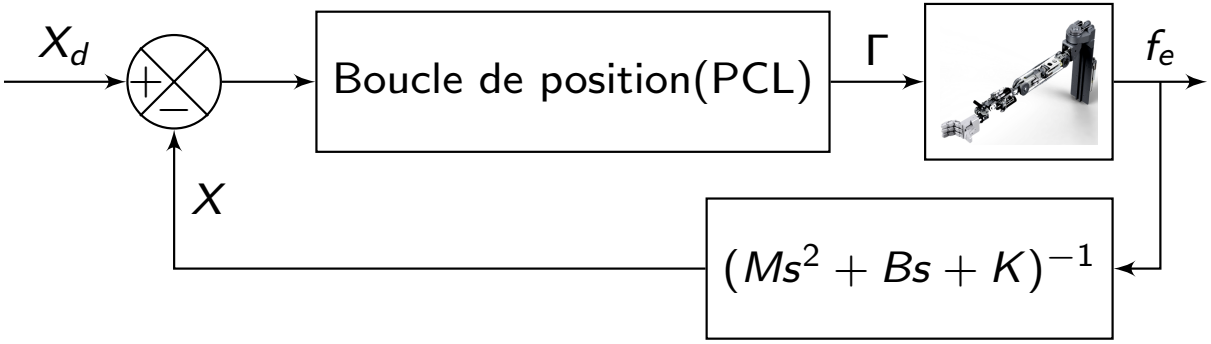
Commande en impédance

Types d'architecture possibles pour l'implémentation pratique selon l'instrumentation

1. Schéma sans exploitation d'un retour d'effort explicite



2. Schéma basé sur un retour d'effort explicite



Capteurs d'effort utilisés en robotique

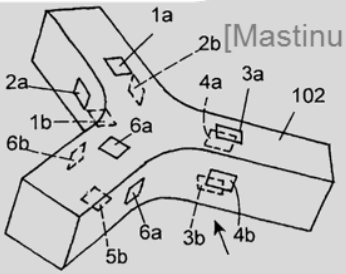
Instrumentation pour la mesure d'effort au contact robot/environnement [4]

1D

Columns
Tubes
Helical cell
Cantilever beams

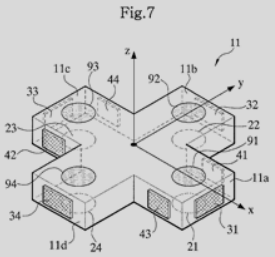
6D

Stewart platform

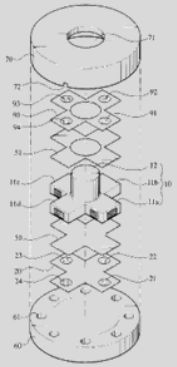


[Mastinu 2010]

Three spoke wheel



[Kim 2012]



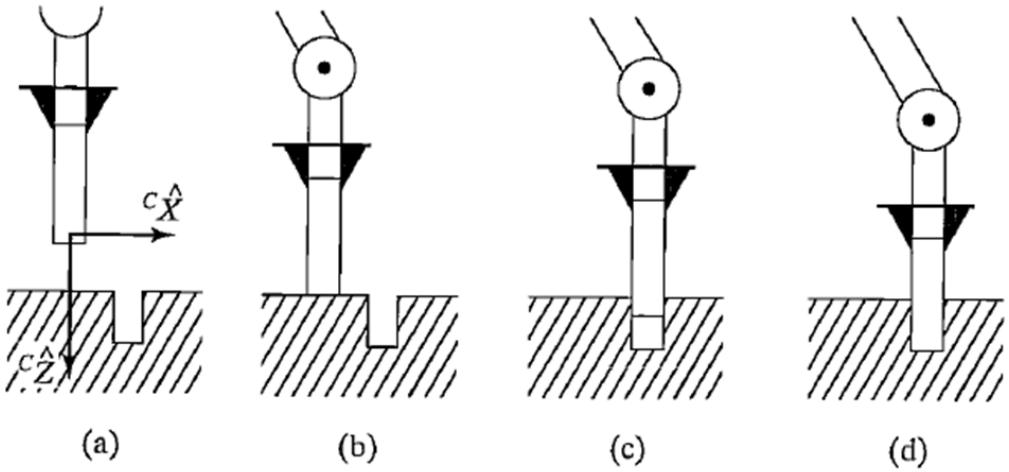
[Kim 2012]

Four spoke wheel

Commande hybride parallèle

Situation de commande où le mouvement du robot est contraint partiellement par un ou plusieurs contacts (1/2) [25]

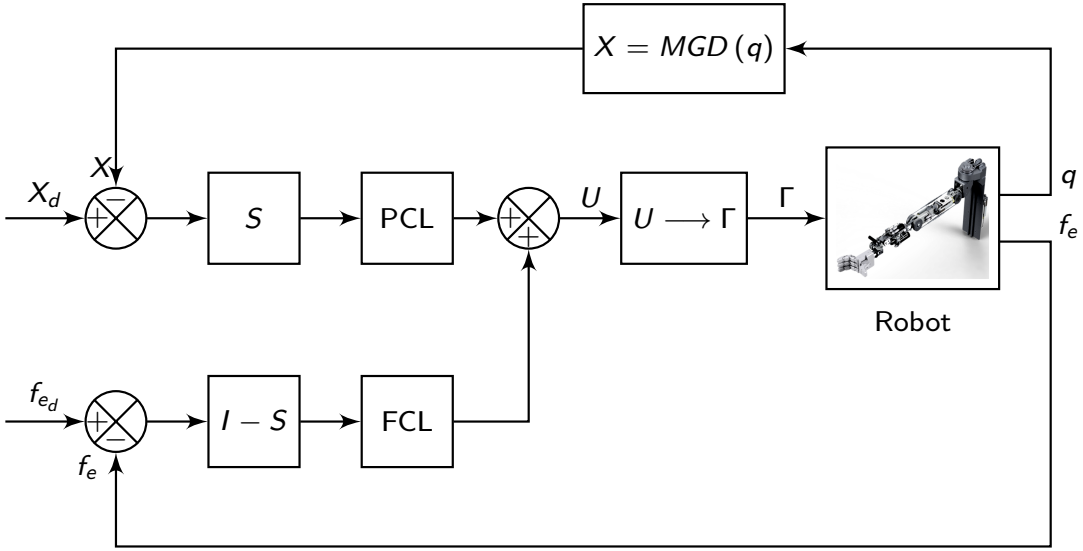
- Dualité force/position pour la description de la tâche robotique :
  - Commande en position selon les directions dans lesquelles une contrainte naturelle de force existe ;
  - Commande en force selon les directions dans lesquelles une contrainte naturelle de position existe.
- Commande hybride : architecture d'implémentation mixant des modes de commande de position ou force selon des degrés de liberté orthogonaux ;
- Exemple d'une tâche d'insertion de rivets impliquant une commande hybride force/position ;



Commande hybride parallèle

Situation de commande où le mouvement du robot est contraint partiellement par un ou plusieurs contacts (2/2) [25]

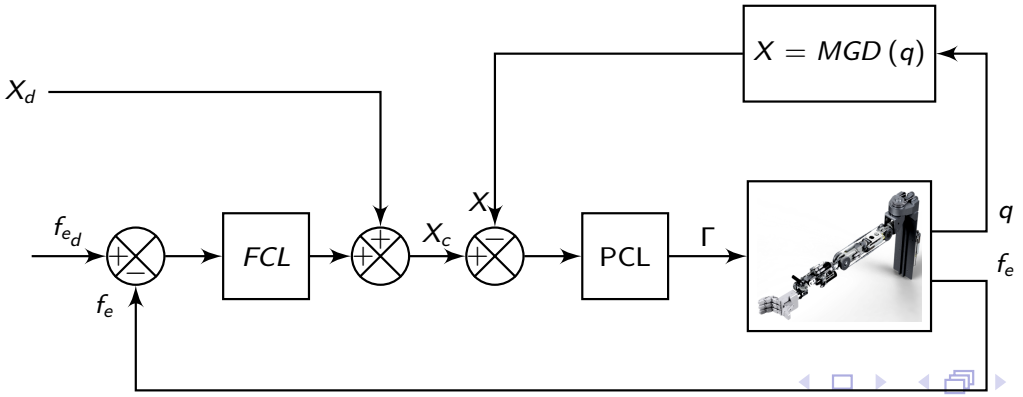
- Informations d'effort et de position utilisées simultanément ;
- Matrices diagonales de sélection S et $S - I$ constituées de 1 ou 0 :
  - commutation entre le mode de commande en position et en force selon chaque degré de liberté :
    - $S = diag(s_1, \ldots, s_6)$;
    - $s_i = 1$ direction commandée en effort, 0 autrement.
- Orthogonalité des directions commandées en effort et en position dans le repère de compliance.



Commande hybride externe

Principe de deux boucles imbriquées de commande [5] [22]

- Boucle externe de commande en force :
  - entrée de la boucle en force : force de consigne f_{e_d} ;
  - sortie de la boucle en force égale à l'entrée de la boucle en position.
- Boucle interne de position toujours active :
  - moins de problème de stabilité lors des commutations de modes (position/force)
  - dans le cas d'une perturbation appliquée sur la chaîne cinématique du robot (avant le capteur d'effort) :
    - perturbation non-détectée par le capteur d'effort ;
    - perturbation compensée par la boucle de position.
  - Dans le cas d'une force appliquée après le capteur d'effort (i.e. contact avec l'environnement) : mouvement du robot selon la direction de force appliquée pour la compenser.
- Supériorité hiérarchique de la boucle de force
  - En mode force active, rejet de la position de consigne X_d vue comme une perturbation par l'intégrateur de la boucle de force.



Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Références du cours I

[1] D. Ardayfio.
Fundamentals of Robotics.
Mechanical Engineering. Taylor & Francis, 1987.

[2] I. Asimov.
I, Robot.
1950.

[3] N.A. Bompos, P.K. Artemiadis, A.S. Oikonomopoulos, and K.J. Kyriakopoulos.
Modeling, full identification and control of the mitsubishi pa-10 robot arm.
In *Advanced intelligent mechatronics, 2007 IEEE/ASME international conference on*, pages 1–6, 2007.

[4] Arnaud Hubert Davinson Castano-Cano, Mathieu Grossard.
Next force sensing technology for robots : multi-axis resonant sensors.
volume 9859, pages 9859 – 9859 – 9, 2016.

[5] J. De Schutter and H. van Brussel.
Compliant robot motion ii. a control approach based on external control loops.
Int. J. Rob. Res., 7(4) :18–33, 1988.

[6] A. Fournier.
Generation de mouvements en robotique : application des inverses généralisées et des pseudo-inverses.
PhD thesis. USTL, Montpellier, 1980.

[7] M. Grossard, Regnier S., and N. Chaillet.
Flexible Robotics : Applications to Multiscale Manipulations.
Wiley, 2013.

[8] N. Hogan.
Impedance control : An approach to manipulation : Part i—theory, part ii : Implementation, part iii : Applications.
Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 107 :1–24, 1985.

[9] Rafael Kelly.
Control of robot manipulators in joint space.
Advanced textbooks in control and signal processing. Springer, London, 2005.

Références du cours II

[10] W. Khalil.
Polycopié de cours de l'Ecole Centrale de Nantes.
2005.

[11] W. Khalil and E. Dombre.
Modélisation, identification et commande des robots.
Collection robotique. Hermes Science Publications, 1999.

[12] W. Khalil and J. Kleinfinger.
A new geometric notation for open and closed-loop robots.
In *Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1174–1179, Apr 1986.

[13] O. Khatib.
Real-time obstacle avoidance for manipulators and mobile robots.
In *Proceedings. 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 2, pages 500–505, Mar 1985.

[14] O. Khatib.
A unified approach for motion and force control of robot manipulators : The operational space formulation.
IEEE Journal on Robotics and Automation, 3(1) :43–53, February 1987.

[15] M. Makarov.
Contribution à la modélisation et la commande robuste de robots manipulateurs à articulations flexibles - Applications à la robotique interactive.
Thèse de Doctorat de l'Ecole Supélec, 2013.

[16] M. Makarov, M. Grossard, P. Rodríguez-Ayerbe, and D. Dumur.
Modeling and preview h infinity control design for motion control of elastic-joint robots with uncertainties.
IEEE Transactions on Industrial Electronics, 63(10) :6429–6438, Oct 2016.

[17] M. Makarov, M. Grossard, P. Rodriguez-Ayerbe, and D. Dumur.
Generalized predictive control of an anthropomorphic robot arm for trajectory tracking.
In *Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 2011 IEEE/ASME International Conference on*, pages 948–953, 2011.

Références du cours III

[18] J. Martin and M. Grossard.
Design of a fully modular and backdrivable dexterous hand.
The International Journal of Robotics Research, 33(5) :783–798, 2014.

[19] Richard M. Murray, S. Shankar Sastry, and Li Zexiang.
A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation.
CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, USA, 1st edition, 1994.

[20] Chaillet N. and Laurent G.
Robotique industrielle, polycopié de cours de l'UBFC et ENSMM.
2005.

[21] R.P. Paul.
Robot Manipulators : Mathematics, Programming, and Control : the Computer Control of Robot Manipulators.
Artificial Intelligence Series. MIT Press, 1981.

[22] V. Perdereau and M. Drouin.
A new scheme for hybrid force-position control.
Robotica, 11 :453–464, 1993.

[23] Lee Donald Pieper.
The kinematics of manipulators under computer control.
09 2017.

[24] A. Preumont.
Vibration control of active structures : an introduction, 2nd edition.
Kluwer academic publishers, 2002.

[25] M.H. Raibert and J.J. Craig.
Hybrid position/force control of manipulators.
Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 103(2) :126–133, 1981.

[26] Jean-Jacques E. Slotine and H. Asada.
Robot Analysis and Control.
John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1st edition, 1992.

Références du cours IV

[27] C. W. Wampler.
Manipulator inverse kinematic solutions based on vector formulations and damped least-squares methods.
IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 16(1) :93–101, Jan 1986.

[28] Tsuneo Yoshikawa.
Manipulability of robotic mechanisms.
The International Journal of Robotics Research, 4(2) :3–9, 1985.

[29] I. Zambettakis and F. Rotella.
Commande des systèmes par platitude.
Dossier Techniques de l'Ingénieur [S 7450], 2007.

Introduction

Rappels sur les transformations

Cinématique directe

Cinématique inverse

Modèle dynamique

Identification

Génération de trajectoires

Commande de mouvements

Commande en effort

Références bibliographiques

Solutions des exercices

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = 4$

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = 4$
- Nombre d'articulations : $j = \underbrace{3}_{\text{Liaisons "pivot"}} + \underbrace{1}_{\text{Liaisons "prismatique"}} = 4$

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = 4$
- Nombre d'articulations : $j = \underbrace{3}_{\text{Liaisons "pivot"}} + \underbrace{1}_{\text{Liaisons "prismatique"}} = 4$
- Degrés de liberté des articulations : $\sum_{i=1}^{j} f_i = 4 \times 1 = 4$

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = 4$
- Nombre d'articulations : $j = \underbrace{3}_{\text{Liaisons "pivot"}} + \underbrace{1}_{\text{Liaisons "prismatique"}} = 4$
- Degrés de liberté des articulations : $\sum_{i=1}^{j} f_i = 4 \times 1 = 4$

Au total, $N_{\text{mob}} = 6 \times (4 - 4) + 4 = 4$ variables indépendantes pour décrire et contrôler la chaîne cinématique.

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = 4$
- Nombre d'articulations : $j = \underbrace{3}_{\text{Liaisons "pivot"}} + \underbrace{1}_{\text{Liaisons "prismatique"}} = 4$
- Degrés de liberté des articulations : $\sum_{i=1}^{j} f_i = 4 \times 1 = 4$

Au total, $N_{\text{mob}} = 6 \times (4 - 4) + 4 = 4$ variables indépendantes pour décrire et contrôler la chaîne cinématique.
En pratique, dans une structure ouverte simple $n_c = j$, le nombre d'articulations (supposés *simple*, i.e. $m = 1$) constitue le nombre de degré de liberté de la chaîne cinématique : $N_{\text{mob}} = \sum_{i=1}^{j} f_i$.

Cours

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(1)}_{\text{Plateforme mobile}} = 13$

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(1)}_{\text{Plateforme mobile}} = 13$
- Nombre d'articulations :
  $j = \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "rotule"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "prismatique"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "cardan"}} = 18$

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(1)}_{\text{Plateforme mobile}} = 13$
- Nombre d'articulations :
  $j = \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "rotule"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "prismatique"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "cardan"}} = 18$
- Degrés de liberté des articulations :
  $\sum_{i=1}^{j} f_i = \underbrace{(6 \times 3)}_{\text{6 liaisons "rotule"}} + \underbrace{(6 \times 1)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 liaisons "cardan"}} = 36$

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(1)}_{\text{Plateforme mobile}} = 13$
- Nombre d'articulations :
  $j = \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "rotule"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "prismatique"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "cardan"}} = 18$
- Degrés de liberté des articulations :
  $\sum_{i=1}^{j} f_i = \underbrace{(6 \times 3)}_{\text{6 liaisons "rotule"}} + \underbrace{(6 \times 1)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 liaisons "cardan"}} = 36$

Au total, $N_{\text{mob}} = 6 \times (13 - 18) + 36 = 6$ variables indépendantes pour décrire et contrôler la chaîne cinématique.

Degrés de liberté/mobilité d'une chaîne cinématique

- Nombre de corps : $n_c = \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(1)}_{\text{Plateforme mobile}} = 13$
- Nombre d'articulations :
  $j = \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "rotule"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "prismatique"}} + \underbrace{(6)}_{\text{Liaisons "cardan"}} = 18$
- Degrés de liberté des articulations :
  $\sum_{i=1}^{j} f_i = \underbrace{(6 \times 3)}_{\text{6 liaisons "rotule"}} + \underbrace{(6 \times 1)}_{\text{6 vérins}} + \underbrace{(6 \times 2)}_{\text{6 liaisons "cardan"}} = 36$

Au total, $N_{\text{mob}} = 6 \times (13 - 18) + 36 = 6$ variables indépendantes pour décrire et contrôler la chaîne cinématique.
En pratique, il s'agit des élongations pilotées des 6 vérins.

Cours

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

- Evaluation de l'aire balayée :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

- Evaluation de l'aire balayée :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy$$

  - Changement de variables :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy = \iint |det\,(J)|\, dq_1 dq_2$$

où $J\,(q_1, q_2)$ est la matrice Jacobienne des changements de coordonnées.

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

- Evaluation de l'aire balayée :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy$$

  - Changement de variables :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy = \iint |det\,(J)|\, dq_1 dq_2$$

    où $J\,(q_1, q_2)$ est la matrice Jacobienne des changements de coordonnées.
  - Modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x = l_1 cos\,(q_1) + l_2 cos\,(q_1 + q_2) \\ y = l_1 sin\,(q_1) + l_2 sin\,(q_1 + q_2) \end{cases}$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

- Evaluation de l'aire balayée :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy$$

  - Changement de variables :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy = \iint |det\,(J)|\, dq_1 dq_2$$

  où $J\,(q_1, q_2)$ est la matrice Jacobienne des changements de coordonnées.
  - Modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x = l_1 cos\,(q_1) + l_2 cos\,(q_1 + q_2) \\ y = l_1 sin\,(q_1) + l_2 sin\,(q_1 + q_2) \end{cases}$$

  - Calcul de la matrice Jacobienne :

$$J\,(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 sin\,(q_1) - l_2 sin\,(q_1 + q_2) & -l_2 sin\,(q_1 + q_2) \\ l_1 cos\,(q_1) + l_2 cos\,(q_1 + q_2) & l_2 cos\,(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

- Evaluation de l'aire balayée :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy$$

  - Changement de variables :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy = \iint |det\,(J)|\, dq_1 dq_2$$

  où $J\,(q_1, q_2)$ est la matrice Jacobienne des changements de coordonnées.
  - Modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x = l_1 cos\,(q_1) + l_2 cos\,(q_1 + q_2) \\ y = l_1 sin\,(q_1) + l_2 sin\,(q_1 + q_2) \end{cases}$$

  - Calcul de la matrice Jacobienne :

$$J\,(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 sin\,(q_1) - l_2 sin\,(q_1 + q_2) & -l_2 sin\,(q_1 + q_2) \\ l_1 cos\,(q_1) + l_2 cos\,(q_1 + q_2) & l_2 cos\,(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

  - Calcul du déterminant de la matrice Jacobienne :

$$det\,(J) = l_1 l_2 sin\,(q_2)$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

- Evaluation de l'aire balayée :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy$$

  - Changement de variables :

$$\mathscr{A} = \iint dxdy = \iint |det\,(J)|\, dq_1 dq_2$$

  où $J\,(q_1, q_2)$ est la matrice Jacobienne des changements de coordonnées.
  - Modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x = l_1 cos\,(q_1) + l_2 cos\,(q_1 + q_2) \\ y = l_1 sin\,(q_1) + l_2 sin\,(q_1 + q_2) \end{cases}$$

  - Calcul de la matrice Jacobienne :

$$J\,(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 sin\,(q_1) - l_2 sin\,(q_1 + q_2) & -l_2 sin\,(q_1 + q_2) \\ l_1 cos\,(q_1) + l_2 cos\,(q_1 + q_2) & l_2 cos\,(q_1 + q_2) \end{bmatrix}$$

  - Calcul du déterminant de la matrice Jacobienne :

$$det\,(J) = l_1 l_2 sin\,(q_2)$$

  - Expression de l'aire balayée :

$$\mathscr{A} = l_1 l_2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\,(q_2)|\, dq_2$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Optimisation du ratio des longueurs des deux corps

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Optimisation du ratio des longueurs des deux corps

- L'élongation maximale $L = l_1 + l_2$ étant spécifiée, le ratio des longueurs $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ maximisera le domaine

$$\mathscr{A} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Optimisation du ratio des longueurs des deux corps

- L'élongation maximale $L = l_1 + l_2$ étant spécifiée, le ratio des longueurs $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ maximisera le domaine

$$\mathscr{A} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2$$

ssi

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \lambda^2} < 0$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Optimisation du ratio des longueurs des deux corps

- L'élongation maximale $L = l_1 + l_2$ étant spécifiée, le ratio des longueurs $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ maximisera le domaine

$$\mathscr{A} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2$$

ssi

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \lambda^2} < 0$$

- Or il apparaît que :

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \lambda} = \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^3} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2 = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 1$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \lambda^2} = \frac{2\left(\lambda - 2\right)}{(1+\lambda)^4} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2 < 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 1$$

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Optimisation du ratio des longueurs des deux corps

- L'élongation maximale $L = l_1 + l_2$ étant spécifiée, le ratio des longueurs $\lambda = \frac{l_1}{l_2}$ maximisera le domaine

$$\mathscr{A} = \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2$$

ssi

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \lambda} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \lambda^2} < 0$$

- Or il apparaît que :

$$\frac{\partial \mathscr{A}}{\partial \lambda} = \frac{1-\lambda}{(1+\lambda)^3} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2 = 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 1$$

et

$$\frac{\partial^2 \mathscr{A}}{\partial \lambda^2} = \frac{2\left(\lambda - 2\right)}{(1+\lambda)^4} L^2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) \int_{q_{2_{\min}}}^{q_{2_{\max}}} |sin\left(q_2\right)| dq_2 < 0 \qquad \text{pour} \qquad \lambda = 1$$

- Donc, l'espace de travail est maximal lorsque les deux corps ont des longueurs identiques.

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Recherche de l'angle articulaire q_2 optimal pour le taux de variation de l'espace de travail :

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Recherche de l'angle articulaire q_2 optimal pour le taux de variation de l'espace de travail :
L'intégrande $l_1 l_2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) |sin\left(q_2\right)|$ représente le taux de variation de l'espace de travail par rapport à q_2.

- Il est nul pour les valeurs si $q_2 = 0$;
- Il atteint son maximum lorsque $q_2 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Cas d'étude de l'espace de travail d'un robot planaire RR

Recherche de l'angle articulaire q_2 optimal pour le taux de variation de l'espace de travail :
L'intégrande $l_1 l_2 \left(q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}}\right) |sin\left(q_2\right)|$ représente le taux de variation de l'espace de travail par rapport à q_2.

- Il est nul pour les valeurs si $q_2 = 0$;
- Il atteint son maximum lorsque $q_2 = \pm\frac{\pi}{2}$.

Conclusion :

- Cela signifie qu'une variation angulaire de q_2 centrée autour de $\pm\frac{\pi}{2}$ autorise un balayage maximal de l'espace de travail.
- C'est confirmé par le tableau donné dans le cours pour le cas particulier où $q_{1_{\max}} - q_{1_{\min}} = 90^\circ$ et $l_2 = l_1 = 1$.
- Il est intéressant d'observer que le cas du bras humain remplit ces conditions.

Cours

Mouvement de rotation dans $\mathbb{R}^3$

Propriétés des matrices de rotation héritées de la structure de groupe de $SO(3)$:

- Si R_1, $R_2 \in SO(3)$, alors $R_1 R_2$ est aussi une matrice de rotation, puisque :
  - $R_1 R_2 (R_1 R_2)^t = R_1 R_2 R_2^t R_1^t = R_1 R_1^t = Id$;
  - $det(R_1 R_2) = det(R_1)\, det(R_2) = +1$.
- La matrice identité est l'élément neutre.
- L'inverse de $R \in SO(3)$ est $R^t \in SO(3)$.
- L'associativité de l'opération du groupe découle de l'associativité des multiplications matricielles : $(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3)$.

Cours

Matrice de rotation : cas général

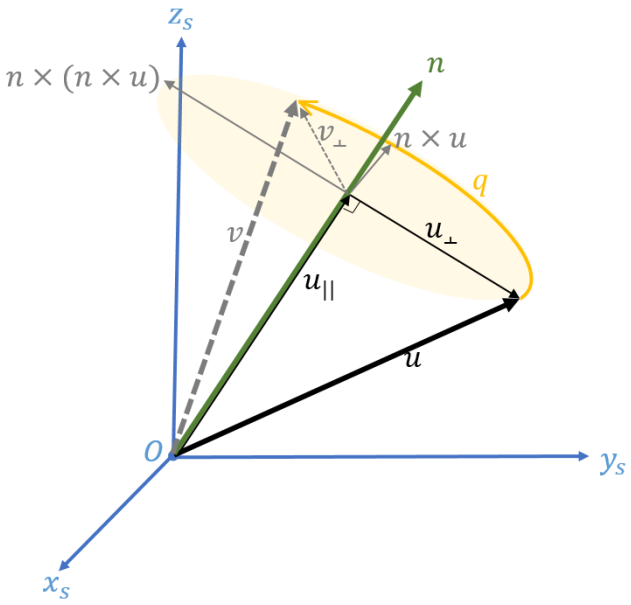
Soit $n = [n_x, n_y, n_z]^t$ le vecteur unitaire portant la rotation d'angle q.

- Le vecteur u peut se décomposer selon ses composantes parallèle et perpendiculaire à n : $u = u_{||} + u_{\perp}$
  où la composante parallèle est la projection orthogonale de u sur n :

$$u_{||} = (u \cdot n)\, n$$

et la composante perpendiculaire à n est :

$$u_{\perp} = u - u_{||} = u - (u \cdot n)\, n = -n \times (n \times u)$$



Matrice de rotation : cas général

- La composante parallèle $u_{||}$ est invariante par la rotation

$$v_{||} = u_{||}$$

et seule la composante perpendiculaire $u_\perp$ change de direction (mais d'amplitude constante), selon :

$$\begin{aligned} |v_\perp| &= |u_\perp| \\ v_\perp &= cos(q)u_\perp + sin(q)n \times u \end{aligned}$$

Notons que $n \times u_\perp = n \times \left(u - u_{||}\right) = n \times u$.

- Au final,

$$\begin{aligned} v &= v_{||} + v_\perp \\ &= u_{||} + cos(q)u_\perp + sin(q)n \times u \\ &= u_{||} + cos(q)\left(u - u_{||}\right) + sin(q)n \times u \\ &= cos(q)u + (1 - cos(q))\, u_{||} + sin(q)n \times u \\ &= cos(q)u + (1 - cos(q))\,(u \cdot n)\, n + sin(q)n \times u \end{aligned}$$

Matrice de rotation : cas général

- En substituant le produit vectoriel $n \times u$ par la matrice du préproduit matriciel $\widehat{n}u$ dans la formule de *Rodrigues* :

$$\begin{aligned} v &= cos(q)u + (1 - cos(q))\,(u \cdot n)\,n + sin(q)n \times u \\ &= cos(q)u + (1 - cos(q))\,(u + n \times (n \times u)) + sin(q)n \times u \\ &= cos(q)u + (1 - cos(q))\left(I_{3\times 3} + \widehat{n}^2\right)u + sin(q)\widehat{n}u \\ &= \underbrace{\left[cos(q) + (1 - cos(q))\left(I_{3\times 3} + \widehat{n}^2\right) + sin(q)\widehat{n}\right]}_{=R_{n,q}} u \end{aligned}$$

- Notons que :

$$\begin{aligned} I_{3\times 3} + \widehat{n}^2 &= \begin{bmatrix} 1 - n_z^2 - n_y^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & 1 - n_x^2 - n_z^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & 1 - n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} n_x^2 & n_x n_y & n_x n_z \\ n_y n_x & n_y^2 & n_y n_z \\ n_z n_x & n_z n_y & n_z^2 \end{bmatrix} \qquad \text{car le vecteur } n \text{ est unitaire} \\ &= nn^t \end{aligned}$$

- On retrouve la forme matricielle de la formule de *Rodrigues* :

$$R_{n,q} = cos(q)I_{3\times 3} + (1 - cos(q))\,nn^t + sin(q)\widehat{n}$$

Inversion cinématique : démonstration (1/2)

- Le vecteur rotation n lui-même n'est pas affecté par la rotation, ni en orientation, ni en longueur. Il s'en suit que :

$$Rn = n$$

Cette relation exprime que le vecteur rotation n est vecteur propre de R, avec une valeur propre égale à $\lambda_1 = 1$.

Inversion cinématique : démonstration (1/2)

- Le vecteur rotation n lui-même n'est pas affecté par la rotation, ni en orientation, ni en longueur. Il s'en suit que :

$$Rn = n$$

  Cette relation exprime que le vecteur rotation n est vecteur propre de R, avec une valeur propre égale à $\lambda_1 = 1$.
- La matrice R étant d'ordre 3, elle possède deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3. En se basant sur l'invariance du déterminant, celui-ci est égale au produit de ses valeurs propres :

$$det\,(R) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1 \qquad (\text{car } R \in SO\,(3))$$

Inversion cinématique : démonstration (1/2)

- Le vecteur rotation n lui-même n'est pas affecté par la rotation, ni en orientation, ni en longueur. Il s'en suit que :

$$Rn = n$$

  Cette relation exprime que le vecteur rotation n est vecteur propre de R, avec une valeur propre égale à $\lambda_1 = 1$.
- La matrice R étant d'ordre 3, elle possède deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3. En se basant sur l'invariance du déterminant, celui-ci est égale au produit de ses valeurs propres :

$$det\,(R) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1 \qquad (\text{car } R \in SO\,(3))$$

  Puisque $\lambda_1 = 1$, les deux autres valeurs propres doivent être complexes conjuguées et d'amplitude unitaire ; elles sont par conséquent de la forme $\lambda_2 = e^{i\phi}$ et $\lambda_3 = e^{-i\phi}$.

Inversion cinématique : démonstration (1/2)

- Le vecteur rotation n lui-même n'est pas affecté par la rotation, ni en orientation, ni en longueur. Il s'en suit que :

$$Rn = n$$

  Cette relation exprime que le vecteur rotation n est vecteur propre de R, avec une valeur propre égale à $\lambda_1 = 1$.
- La matrice R étant d'ordre 3, elle possède deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3. En se basant sur l'invariance du déterminant, celui-ci est égale au produit de ses valeurs propres :

$$det\,(R) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = +1 \qquad (\text{car } R \in SO\,(3))$$

  Puisque $\lambda_1 = 1$, les deux autres valeurs propres doivent être complexes conjuguées et d'amplitude unitaire ; elles sont par conséquent de la forme $\lambda_2 = e^{i\phi}$ et $\lambda_3 = e^{-i\phi}$.
- Comme d'une part la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres, il vient :

$$Tr\,(R) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2C\phi$$

Inversion cinématique : démonstration (1/2)

- Le vecteur rotation n lui-même n'est pas affecté par la rotation, ni en orientation, ni en longueur. Il s'en suit que :

$$Rn = n$$

  Cette relation exprime que le vecteur rotation n est vecteur propre de R, avec une valeur propre égale à $\lambda_1 = 1$.
- La matrice R étant d'ordre 3, elle possède deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3. En se basant sur l'invariance du déterminant, celui-ci est égale au produit de ses valeurs propres :

$$det\,(R) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = +1 \qquad (\text{car } R \in SO\,(3))$$

  Puisque $\lambda_1 = 1$, les deux autres valeurs propres doivent être complexes conjuguées et d'amplitude unitaire ; elles sont par conséquent de la forme $\lambda_2 = e^{i\phi}$ et $\lambda_3 = e^{-i\phi}$.
- Comme d'une part la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres, il vient :

$$Tr\,(R) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2C\phi$$

  D'autre part, la valeur de l'angle ϕ qui apparaît dans λ_2 et λ_3 peut ainsi être aisément déterminée en observant au départ de la formule de *Rodrigues* que la trace de R vaut :

$$Tr\,(R) = 1 + 2Cq \qquad (\text{car } n \text{ est unitaire})$$

Inversion cinématique : démonstration (2/2)

- Il suit que l'angle ϕ définissant les valeurs propres λ_2 et λ_3 est précisément l'angle de rotation q. En résumé, les valeurs propres de R sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = e^{iq}, \quad \lambda_3 = e^{-iq}.$$

où q est l'angle de rotation autour d'une direction qui est solution de $Rn = n$.

Inversion cinématique : démonstration (2/2)

- Il suit que l'angle ϕ définissant les valeurs propres λ_2 et λ_3 est précisément l'angle de rotation q. En résumé, les valeurs propres de R sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = e^{iq}, \quad \lambda_3 = e^{-iq}.$$

  où q est l'angle de rotation autour d'une direction qui est solution de $Rn = n$.
- En pratique, des relations explicites se déduisent par comparaison des composantes de R avec la forme de *Rodrigues* :
  - Calcul de la trace :

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2Cq$$

Inversion cinématique : démonstration (2/2)

- Il suit que l'angle ϕ définissant les valeurs propres λ_2 et λ_3 est précisément l'angle de rotation q. En résumé, les valeurs propres de R sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = e^{iq}, \quad \lambda_3 = e^{-iq}.$$

  où q est l'angle de rotation autour d'une direction qui est solution de $Rn = n$.
- En pratique, des relations explicites se déduisent par comparaison des composantes de R avec la forme de *Rodrigues* :
  - Calcul de la trace :

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2Cq$$

  - Calcul des termes extradiagonaux :

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2n_x Sq \\ r_{13} - r_{31} &= 2n_y Sq \\ r_{21} - r_{12} &= 2n_z Sq \end{aligned}$$

Inversion cinématique : démonstration (2/2)

- Il suit que l'angle ϕ définissant les valeurs propres λ_2 et λ_3 est précisément l'angle de rotation q. En résumé, les valeurs propres de R sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = e^{iq}, \quad \lambda_3 = e^{-iq}.$$

  où q est l'angle de rotation autour d'une direction qui est solution de $Rn = n$.
- En pratique, des relations explicites se déduisent par comparaison des composantes de R avec la forme de *Rodrigues* :
  - Calcul de la trace :

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2Cq$$

  - Calcul des termes extradiagonaux :

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2n_x Sq \\ r_{13} - r_{31} &= 2n_y Sq \\ r_{21} - r_{12} &= 2n_z Sq \end{aligned}$$

- Puisque n est unitaire, l'angle q est obtenu grâce aux équations précédentes (dans le cas $q \neq 0$) :

$$\begin{aligned} q &= atan2\left(Sq, Cq\right) \\ &= atan2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}, \frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Inversion cinématique : démonstration (2/2)

- Il suit que l'angle ϕ définissant les valeurs propres λ_2 et λ_3 est précisément l'angle de rotation q. En résumé, les valeurs propres de R sont

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = e^{iq}, \quad \lambda_3 = e^{-iq}.$$

  où q est l'angle de rotation autour d'une direction qui est solution de $Rn = n$.
- En pratique, des relations explicites se déduisent par comparaison des composantes de R avec la forme de *Rodrigues* :
  - Calcul de la trace :

$$r_{11} + r_{22} + r_{33} = 1 + 2Cq$$

  - Calcul des termes extradiagonaux :

$$\begin{aligned} r_{32} - r_{23} &= 2n_x Sq \\ r_{13} - r_{31} &= 2n_y Sq \\ r_{21} - r_{12} &= 2n_z Sq \end{aligned}$$

- Puisque n est unitaire, l'angle q est obtenu grâce aux équations précédentes (dans le cas $q \neq 0$) :

$$\begin{aligned} q &= atan2\left(Sq, Cq\right) \\ &= atan2\left(\frac{1}{2}\sqrt{(r_{32} - r_{23})^2 + (r_{13} - r_{31})^2 + (r_{21} - r_{12})^2}, \frac{1}{2}\left(r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

  et le vecteur n vaut :

$$n = \begin{bmatrix} \frac{r_{32} - r_{23}}{2Sq} & \frac{r_{13} - r_{31}}{2Sq} & \frac{r_{21} - r_{12}}{2Sq} \end{bmatrix}^t \quad \text{si } Sq \neq 0$$

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

En développant,

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

En développant,

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Recherche de l'angle à partir de la formule du cours :

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

En développant,

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Recherche de l'angle à partir de la formule du cours :

$$q = atan2\left(Sq, Cq\right) = atan2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

En développant,

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Recherche de l'angle à partir de la formule du cours :

$$q = atan2\left(Sq, Cq\right) = atan2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Nous aurions aussi pu chercher les valeurs propres de $R_{n,q}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

En développant,

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Recherche de l'angle à partir de la formule du cours :

$$q = atan2\left(Sq, Cq\right) = atan2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Nous aurions aussi pu chercher les valeurs propres de $R_{n,q}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

- Recherche du vecteur de rotation à partir de la formule du cours :

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

En développant,

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Recherche de l'angle à partir de la formule du cours :

$$q = atan2\left(Sq, Cq\right) = atan2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Nous aurions aussi pu chercher les valeurs propres de $R_{n,q}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

- Recherche du vecteur de rotation à partir de la formule du cours :

$$n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^t$$

Inversion cinématique : exemple

- On écrit que : $R_{x,-45^\circ} R_{n,q} = R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$, soit :

$$R_{n,q} = R_{x,45^\circ} R_{y,45^\circ} R_{z,90^\circ}$$

En développant,

$$R_{n,q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Recherche de l'angle à partir de la formule du cours :

$$q = atan2\left(Sq, Cq\right) = atan2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) = 120^\circ$$

Nous aurions aussi pu chercher les valeurs propres de $R_{n,q}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

- Recherche du vecteur de rotation à partir de la formule du cours :

$$n = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^t$$

Nous aurions aussi pu directement chercher le vecteur propre associé à la valeur propre 1 (i.e. $Rn = n$) pour déterminer le vecteur invariant n par $R_{n,q}$.

Propriétés de SE (3)

1. Préservation de la distance entre les points :
   $\forall a, b \in \mathbb{R}^3,\ \|g(a) - g(b)\| = \|R(a-b)\| = \left[(a-b)^t R^t R (a-b)\right]^{\frac{1}{2}} = \|a-b\|.$

Propriétés de SE (3)

1. Préservation de la distance entre les points :
   $\forall a, b \in \mathbb{R}^3$, $\|g(a) - g(b)\| = \|R(a-b)\| = \left[(a-b)^t R^t R (a-b)\right]^{\frac{1}{2}} = \|a-b\|$.
2. Préservation de l'orientation entre les vecteurs :
   Notons que seule l'action de la rotation issue d'une transformation rigide $g = (p, R)$ appliquée à un vecteur $v = s - r$ affecte les coordonnées du vecteur :

   $$g_*(v) = g(s) - g(r) = R(s-r) = Rv$$

   Il vient que : $\forall v, w \in \mathbb{R}^3$,
   $g_*(v \times w) = R(v \times w) = (Rv) \times (Rw) = g_*(v) \times g_*(w)$, car R préserve l'orthogonalité, l'orientation et les longueurs.

Cours

Propriétés de $SE(3)$

$SE(3)$ forme un groupe :

Propriétés de $SE(3)$

$SE(3)$ forme un groupe :

1. Composition de deux éléments de $SE(3)$:

$$\overline{g}_{ac} = \overline{g}_{ab}\overline{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Comme $SO(3)$ forme un groupe, $R_{ab}R_{bc}$ est bien une rotation du repère $\mathscr{R}_c$ par rapport à $\mathscr{R}_a$.
Par ailleurs, on a bien $R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \in \mathbb{R}^3$.
Au final, $\overline{g}_{ac} \in SE(3)$.

Propriétés de $SE(3)$

$SE(3)$ forme un groupe :

1. Composition de deux éléments de $SE(3)$:

$$\overline{g}_{ac} = \overline{g}_{ab}\overline{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

   Comme $SO(3)$ forme un groupe, $R_{ab}R_{bc}$ est bien une rotation du repère $\mathscr{R}_c$ par rapport à $\mathscr{R}_a$.
   Par ailleurs, on a bien $R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \in \mathbb{R}^3$.
   Au final, $\overline{g}_{ac} \in SE(3)$.

2. La matrice identité de taille 4×4 appartient bien à $SE(3)$.

Propriétés de $SE(3)$

$SE(3)$ forme un groupe :

1. Composition de deux éléments de $SE(3)$:

$$\overline{g}_{ac} = \overline{g}_{ab}\overline{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

   Comme $SO(3)$ forme un groupe, $R_{ab}R_{bc}$ est bien une rotation du repère $\mathscr{R}_c$ par rapport à $\mathscr{R}_a$.
   Par ailleurs, on a bien $R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \in \mathbb{R}^3$.
   Au final, $\overline{g}_{ac} \in SE(3)$.
2. La matrice identité de taille 4×4 appartient bien à $SE(3)$.
3. Si $\overline{g} \in SE(3)$, alors $\overline{g}^{-1}$ est déterminé directement par inversion matricielle : $\overline{g}^{-1} = (-R^t p, R^t) \in SE(3)$.

Propriétés de $SE(3)$

$SE(3)$ forme un groupe :

1. Composition de deux éléments de $SE(3)$:

$$\overline{g}_{ac} = \overline{g}_{ab}\overline{g}_{bc} = \begin{bmatrix} R_{ab}R_{bc} & R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

   Comme $SO(3)$ forme un groupe, $R_{ab}R_{bc}$ est bien une rotation du repère $\mathscr{R}_c$ par rapport à $\mathscr{R}_a$.
   Par ailleurs, on a bien $R_{ab}p_{bc} + p_{ab} \in \mathbb{R}^3$.
   Au final, $\overline{g}_{ac} \in SE(3)$.
2. La matrice identité de taille 4×4 appartient bien à $SE(3)$.
3. Si $\overline{g} \in SE(3)$, alors $\overline{g}^{-1}$ est déterminé directement par inversion matricielle : $\overline{g}^{-1} = (-R^t p, R^t) \in SE(3)$.
4. La règle de composition pour les transformations de corps rigides est associative (du fait de l'associativité du produit matriciel).

Cours

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

Soit $Trans\,(a, b, c)$ cette transformation, où a, b et c désignent les composantes de la translation le long des axes x_i, y_i, et z_i respectivement :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

Soit $Trans\,(a, b, c)$ cette transformation, où a, b et c désignent les composantes de la translation le long des axes x_i, y_i, et z_i respectivement :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

L'orientation étant conservée dans cette transformation (i.e. rotation d'un angle nul), $Trans\,(a, b, c)$ a pour expression :

$$\overline{g}_{ij} = Trans\,(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cours

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   - Rotation du repère :

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   - Rotation du repère :

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   - Au final,

$$\overline{g}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

   - Rotation du repère :

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   - Au final,

$$\overline{g}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calcul de $\overline{g}_{ji}$ par inversion de $\overline{g}_{ij}$:

$$\overline{g}_{ji} = \overline{g}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{ij}^t & -R_{ij}^t p_{ij} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   - Rotation du repère :

$$R_{ij} = R_{z_j,q} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & -sin\,(q) & 0 \\ sin\,(q) & cos\,(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   - Rotation du repère :

$$R_{ij} = R_{z_j,q} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & -sin\,(q) & 0 \\ sin\,(q) & cos\,(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   - Au final,

$$\overline{g}_{ij} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & -sin\,(q) & 0 & 0 \\ sin\,(q) & cos\,(q) & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformation de repères : quelques calculs de $\overline{g}_{ij}$

1. Calcul de $\overline{g}_{ij}$:
   - Translation du repère :

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   - Rotation du repère :

$$R_{ij} = R_{z_j,q} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & -sin\,(q) & 0 \\ sin\,(q) & cos\,(q) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   - Au final,

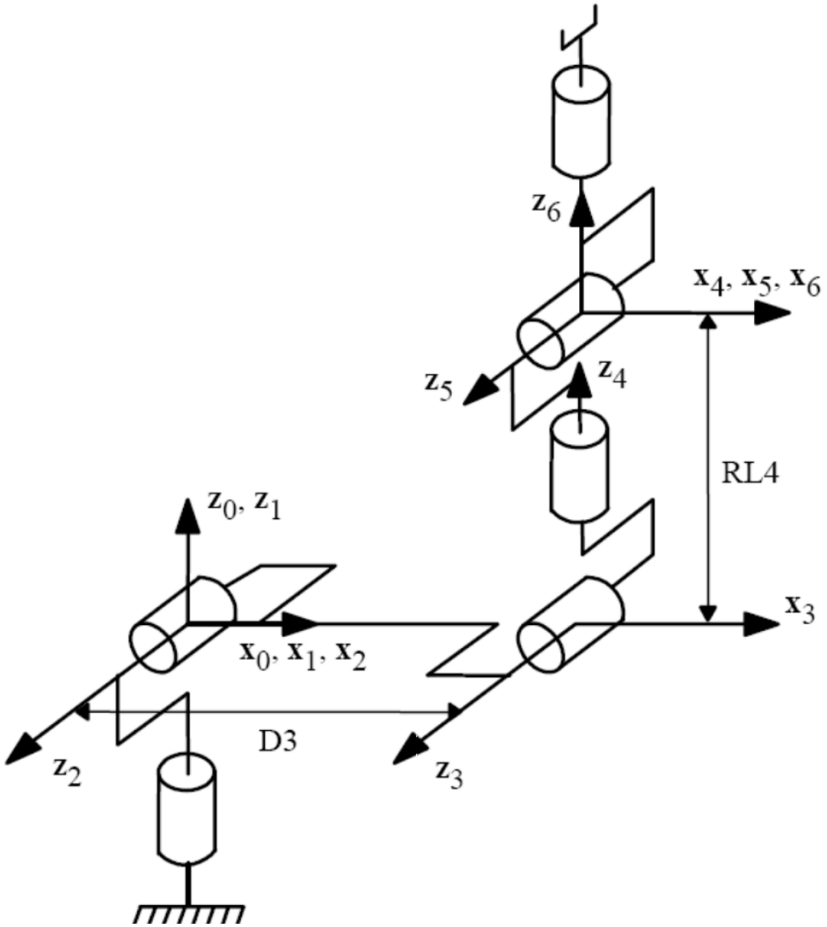
$$\overline{g}_{ij} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & -sin\,(q) & 0 & 0 \\ sin\,(q) & cos\,(q) & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Calcul de $\overline{g}_{ji}$ par inversion de $\overline{g}_{ij}$:

$$\overline{g}_{ji} = \overline{g}_{ij}^{-1} = \begin{bmatrix} R_{ij}^t & -R_{ij}^t p_{ij} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,(q) & sin\,(q) & 0 & -l_1 sin\,(q) \\ -sin\,(q) & cos\,(q) & 0 & -l_1 cos\,(q) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD du robot Staübli RX130L

- Assignation des repères



MGD du robot Staübli RX130L

- Tableau des paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i)$

i	α_i	d_i	θ_i	r_i
1	0	0	θ_1	0
2	$\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	$D_3 = 0,625m$	θ_3	0
4	-$\pi/2$	0	θ_4	RL4=0,925m
5	$\pi/2$	0	θ_5	0
6	-$\pi/2$	0	θ_6	0

Cours

MGD du robot Staübli RX130L

- Tableau des paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i)$

i	α_i	d_i	θ_i	r_i
1	0	0	θ_1	0
2	$\pi/2$	0	θ_2	0
3	0	$D_3 = 0,625m$	θ_3	0
4	-$\pi/2$	0	θ_4	RL4=0,925m
5	$\pi/2$	0	θ_5	0
6	-$\pi/2$	0	θ_6	0

Cours

- Calcul des matrices de transformation unitaire $\overline{g}_{(i-1)i}$ à partir de l'expression théorique générale du cours :

$$\overline{g}_{(i-1)i} = R_{x,\alpha_i}\, Trans\,(x, d_i)\, R_{z,\theta_i}\, Trans\,(z, r_i)$$

$$= \begin{bmatrix} cos\,(\theta_i) & -sin\,(\theta_i) & 0 & d_i \\ cos\,(\alpha_i)\, sin\,(\theta_i) & cos\,(\alpha_i)\, cos\,(\theta_i) & -sin\,(\alpha_i) & -r_i sin\,(\alpha_i) \\ sin\,(\alpha_i)\, sin\,(\theta_i) & sin\,(\alpha_i)\, cos\,(\theta_i) & cos\,(\alpha_i) & r_i cos\,(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD du robot Staübli RX130L

- Matrice de transformation $\overline{g}_{01}$

$$\overline{g}_{01} = R_{z,\theta_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD du robot Staübli RX130L

- Matrice de transformation $\overline{g}_{01}$

$$\overline{g}_{01} = R_{z,\theta_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transformation $\overline{g}_{12}$

$$\overline{g}_{12} = R_{x,\pi/2} R_{z,\theta_2} = \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD du robot Staübli RX130L

- Matrice de transformation $\overline{g}_{01}$

$$\overline{g}_{01} = R_{z,\theta_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transformation $\overline{g}_{12}$

$$\overline{g}_{12} = R_{x,\pi/2} R_{z,\theta_2} = \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transformation $\overline{g}_{23}$

$$\overline{g}_{23} = Trans\,(x, D_3)\, R_{z,\theta_3} = \begin{bmatrix} cos\,(q_3) & -sin\,(q_3) & 0 & D_3 \\ sin\,(q_3) & cos\,(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MGD du robot Staübli RX130L

- Matrice de transformation $\overline{g}_{01}$

$$\overline{g}_{01} = R_{z,\theta_1} = \begin{bmatrix} cos\left(q_1\right) & -sin\left(q_1\right) & 0 & 0 \\ sin\left(q_1\right) & cos\left(q_1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transformation $\overline{g}_{12}$

$$\overline{g}_{12} = R_{x,\pi/2} R_{z,\theta_2} = \begin{bmatrix} cos\left(q_2\right) & -sin\left(q_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ sin\left(q_2\right) & cos\left(q_2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transformation $\overline{g}_{23}$

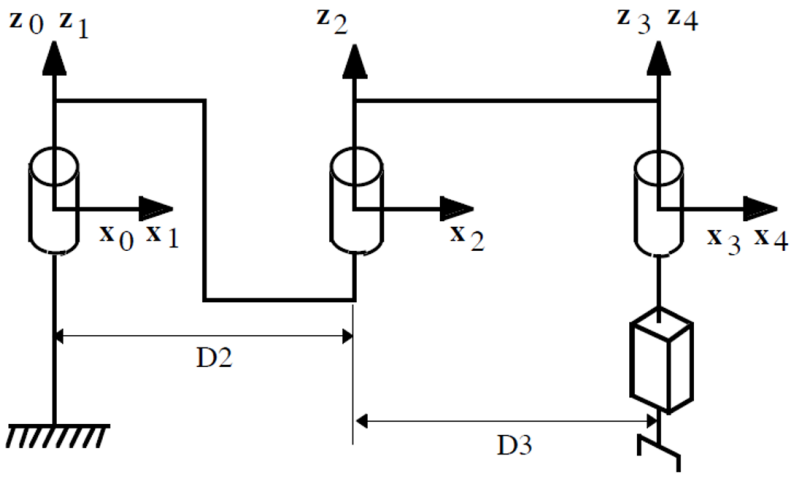
$$\overline{g}_{23} = Trans\left(x, D_3\right) R_{z,\theta_3} = \begin{bmatrix} cos\left(q_3\right) & -sin\left(q_3\right) & 0 & D_3 \\ sin\left(q_3\right) & cos\left(q_3\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice de transformation $\overline{g}_{34}$

$$\overline{g}_{34} = R_{x,-\pi/2} R_{z,\theta_4} Trans\left(z, RL_4\right) = \begin{bmatrix} cos\left(q_4\right) & -sin\left(q_4\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & RL_4 \\ -sin\left(q_4\right) & -cos\left(q_4\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

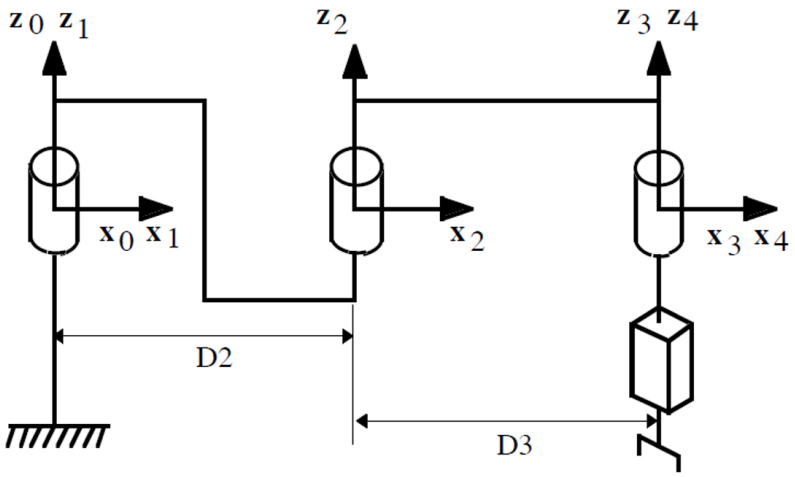
MGD du robot SCARA

- Assignation des repères



MGD du robot SCARA

- Assignation des repères



- Tableau des paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i)$

i	α_i	d_i	θ_i	r_i
1	0	0	θ_1	0
2	0	D_2	θ_2	0
3	0	D_3	θ_3	0
4	0	0	0	r_4

Propriétés sur la vitesse de rotation

1. En combinant les relations ${}^0\dot{p}(t) = \dot{R}_{0i}(t)\,{}^ip$ et ${}^0\dot{p}(t) = {}^0\widehat{\omega}_{0i}{}^0p(t)$, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{R}_{0i}(t)\,{}^ip &= {}^0\widehat{\omega}_{0i}{}^0p(t)\\ &= {}^0\widehat{\omega}_{0i}R_{0i}(t)\,{}^ip\end{aligned}$$

   Puisque le point matériel ${}^ip$ est choisi arbitrairement, l'égalité doit être vraie pour tout point ${}^ip$, d'où la relation cherchée :

$$\dot{R}_{0i}(t) = {}^0\widehat{\omega}_{0i}R_{0i}(t)$$

2. Sachant que ${}^0\omega_{0i} = R_{0i}{}^i\omega_{0i}$ d'une part et que $\widehat{R\omega} = R\widehat{\omega}R^t$ d'autre part, il vient que ${}^0\dot{p}(t) = R_{0i}{}^i\widehat{\omega}_{0i}R_{0i}^t{}^0p(t)$.
   Puis, en procédant comme précédemment, on montre que :

$$\dot{R}_{0i}(t) = R_{0i}(t)\,{}^i\widehat{\omega}_{0i}$$

Cours

Propriété sur la vitesse de rotation

Rotation élémentaire autour de l'axe z :

$$R_{z,\theta(t)} = \begin{bmatrix} cos\left(\theta(t)\right) & -sin\left(\theta(t)\right) & 0 \\ sin\left(\theta(t)\right) & cos\left(\theta(t)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque θ est une fonction du temps,

$$\begin{aligned} {}^0\widehat{\omega}\left(t\right) &= \dot{R}R^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta}(t)sin\left(\theta(t)\right) & -\dot{\theta}(t)cos\left(\theta(t)\right) & 0 \\ \dot{\theta}(t)cos\left(\theta(t)\right) & -\dot{\theta}(t)sin\left(\theta(t)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\left(\theta(t)\right) & sin\left(\theta(t)\right) & 0 \\ -sin\left(\theta(t)\right) & cos\left(\theta(t)\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}(t) & 0 \\ \dot{\theta}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, par identification terme à terme avec la matrice antisymétrique du préproduit vectoriel :

$$\widehat{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

il vient que

$${}^0\omega\left(t\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

est le vecteur de vitesse de rotation autour de l'axe z exprimé dans le repère de base.

Puisque les deux repères $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_i$ ont le même axe z, on vérifierait que ${}^0\omega = {}^i\omega$.

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

$$\overline{g}_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

$$\overline{g}_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{12}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_1, q_2, 0)$)

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

$$\overline{g}_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{12}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_1, q_2, 0)$)

$$\overline{g}_{12} = Trans(x_1, l_1)R_{z_2,q_2} = \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 & l_1 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

$$\overline{g}_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{12}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_1, q_2, 0)$)

$$\overline{g}_{12} = Trans(x_1, l_1)R_{z_2,q_2} = \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 & l_1 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{23}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_2, q_3, 0)$)

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

$$\overline{g}_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{12}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_1, q_2, 0)$)

$$\overline{g}_{12} = Trans(x_1, l_1)R_{z_2,q_2} = \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 & l_1 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{23}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_2, q_3, 0)$)

$$\overline{g}_{23} = Trans(x_2, l_2)R_{z_3,q_3} = \begin{bmatrix} cos\,(q_3) & -sin\,(q_3) & 0 & l_2 \\ sin\,(q_3) & cos\,(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

$$\overline{g}_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{12}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_1, q_2, 0)$)

$$\overline{g}_{12} = Trans(x_1, l_1)R_{z_2,q_2} = \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 & l_1 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{23}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_2, q_3, 0)$)

$$\overline{g}_{23} = Trans(x_2, l_2)R_{z_3,q_3} = \begin{bmatrix} cos\,(q_3) & -sin\,(q_3) & 0 & l_2 \\ sin\,(q_3) & cos\,(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{3E}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_3, 0, 0)$)

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\overline{g}_{0E} = \overline{g}_{03}\overline{g}_{3E} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, 0, q_1, 0)$)

$$\overline{g}_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{12}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_1, q_2, 0)$)

$$\overline{g}_{12} = Trans(x_1, l_1)R_{z_2,q_2} = \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 & l_1 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{23}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_2, q_3, 0)$)

$$\overline{g}_{23} = Trans(x_2, l_2)R_{z_3,q_3} = \begin{bmatrix} cos\,(q_3) & -sin\,(q_3) & 0 & l_2 \\ sin\,(q_3) & cos\,(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{3E}$ (paramètres $(\alpha_i, d_i, \theta_i, r_i) = (0, l_3, 0, 0)$)

$$\overline{g}_{3E} = Trans(x_3, l_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{0E} &= \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}\\ &= \dots\\ &= \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1C1 + l_2C12 + l_3C123\\ S123 & C123 & 0 & l_1S12 + l_2S12 + l_3S123\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{0E} &= \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E} \\ &= \dots \\ &= \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1 C1 + l_2 C12 + l_3 C123 \\ S123 & C123 & 0 & l_1 S12 + l_2 S12 + l_3 S123 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Modèle géométrique $X = f(q)$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{0E} &= \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E} \\ &= \dots \\ &= \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1C1 + l_2C12 + l_3C123 \\ S123 & C123 & 0 & l_1S12 + l_2S12 + l_3S123 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Modèle géométrique $X = f(q)$
  - Identification de la forme de $\overline{g}_{0E}$

$$\overline{g}_{0E} = \begin{bmatrix} & & & p_x \\ & R_{(q_1+q_2+q_3),z_0} & & p_y \\ & & & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{0E} &= \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}\\ &= \dots\\ &= \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1C1 + l_2C12 + l_3C123\\ S123 & C123 & 0 & l_1S12 + l_2S12 + l_3S123\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Modèle géométrique $X = f(q)$
  - Identification de la forme de $\overline{g}_{0E}$

$$\overline{g}_{0E} = \begin{bmatrix} & & & p_x\\ & R_{(q_1+q_2+q_3),z_0} & & p_y\\ & & & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - Choix des coordonnées opérationnelles X

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{0E} &= \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}\\ &= \dots\\ &= \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1C1 + l_2C12 + l_3C123\\ S123 & C123 & 0 & l_1S12 + l_2S12 + l_3S123\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Modèle géométrique $X = f(q)$
  - Identification de la forme de $\overline{g}_{0E}$

$$\overline{g}_{0E} = \begin{bmatrix} & & & p_x\\ & R_{(q_1+q_2+q_3),z_0} & & p_y\\ & & & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - Choix des coordonnées opérationnelles X
    - Coordonnées (p_x, p_y) du point E dans $\mathscr{R}_0$ (on note bien que $p_z = 0$, i.e. mouvement plan du robot)
    - Angle α du dernier segment avec l'axe x_0 (aussi égal au 1er angle d'*Euler*, R_{α,z_0}, i.e. mouvement plan)

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Matrice de transformation homogène $\overline{g}_{0E}$:

$$\begin{aligned}\overline{g}_{0E} &= \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}\\ &= \dots\\ &= \begin{bmatrix} C123 & -S123 & 0 & l_1C1 + l_2C12 + l_3C123\\ S123 & C123 & 0 & l_1S12 + l_2S12 + l_3S123\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

- Modèle géométrique $X = f(q)$
  - Identification de la forme de $\overline{g}_{0E}$

$$\overline{g}_{0E} = \begin{bmatrix} & & & p_x\\ & R_{(q_1+q_2+q_3),z_0} & & p_y\\ & & & p_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

  - Choix des coordonnées opérationnelles X
    - Coordonnées (p_x, p_y) du point E dans $\mathscr{R}_0$ (on note bien que $p_z = 0$, i.e. mouvement plan du robot)
    - Angle α du dernier segment avec l'axe x_0 (aussi égal au 1er angle d'*Euler*, R_{α,z_0}, i.e. mouvement plan)
  - Expression du MGD du robot

$$\begin{aligned}p_x &= l_1C1 + l_2C12 + l_3C123\\ p_y &= l_1S12 + l_2S12 + l_3S123\\ \alpha &= q_1 + q_2 + q_3\end{aligned}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J$ par dérivation du MGD $X = f(q)$ avec $X = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$:

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^0J$ par dérivation du MGD $X = f(q)$ avec $X = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^0J$ par dérivation du MGD $X = f(q)$ avec $X = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ \alpha \end{pmatrix}$ et $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

où

$${}^0J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 S1 - l_2 S12 - l_3 S123 & -l_2 S12 - l_3 S123 & -l_3 S123 \\ l_1 C1 + l_2 C12 + l_3 C123 & l_2 C12 + l_3 C123 & l_3 C123 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cours

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

Vitesse des coordonnées opérationnelle du point E, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{p}_x & \dot{p}_y \end{pmatrix}^t$, en fonction des vitesses articulaires $\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & \dot{r}_3 \end{pmatrix}^t$:

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

Vitesse des coordonnées opérationnelle du point E, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{p}_x & \dot{p}_y \end{pmatrix}^t$, en fonction des vitesses articulaires $\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & \dot{r}_3 \end{pmatrix}^t$:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

Matrice jacobienne du robot plan 3 axes

Vitesse des coordonnées opérationnelle du point E, $\dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{p}_x & \dot{p}_y \end{pmatrix}^t$, en fonction des vitesses articulaires $\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{r}_1 & \dot{r}_2 & \dot{r}_3 \end{pmatrix}^t$:

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

où

$${}^0J(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cours

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Expression de la matrice jacobienne de base du robot à 3 articulations :

$$^{0}J(q) = \begin{bmatrix} ^{0}J_1(q) & ^{0}J_2(q) & ^{0}J_3(q) \end{bmatrix}$$

exprimant la vitesse des coordonnées opérationnelle du point E en fonction des variables articulaires $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^t$.

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Expression de la matrice jacobienne de base du robot à 3 articulations :

$$ {}^0J(q) = \begin{bmatrix} {}^0J_1(q) & {}^0J_2(q) & {}^0J_3(q) \end{bmatrix} $$

exprimant la vitesse des coordonnées opérationnelle du point E en fonction des variables articulaires $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^t$.

Articulations de type rotoïde (robot de type $3R$ plan)

$$ {}^0J(q) = \begin{bmatrix} R_{01}(Z_1 \times p_{1E}) & R_{02}(Z_2 \times p_{2E}) & R_{03}(Z_3 \times p_{3E}) \\ R_{01}Z_1 & R_{02}Z_2 & R_{03}Z_3 \end{bmatrix} $$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Expression de la matrice jacobienne de base du robot à 3 articulations :

$$ {}^{0}J(q) = \begin{bmatrix} {}^{0}J_1(q) & {}^{0}J_2(q) & {}^{0}J_3(q) \end{bmatrix} $$

exprimant la vitesse des coordonnées opérationnelle du point E en fonction des variables articulaires $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^t$.

Articulations de type rotoïde (robot de type $3R$ plan)

$$ {}^{0}J(q) = \begin{bmatrix} R_{01}(Z_1 \times p_{1E}) & R_{02}(Z_2 \times p_{2E}) & R_{03}(Z_3 \times p_{3E}) \\ R_{01}Z_1 & R_{02}Z_2 & R_{03}Z_3 \end{bmatrix} $$

autour des axes locaux :

$$ Z_1 = Z_2 = Z_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{3E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{3E}$ (déjà calculée dans l'exemple 10)

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{3E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{3E}$ (déjà calculée dans l'exemple 10)

$$p_{3E} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{3E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{3E}$ (déjà calculée dans l'exemple 10)

$$p_{3E} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- p_{2E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{2E} = \overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{3E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{3E}$ (déjà calculée dans l'exemple 10)

$$p_{3E} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- p_{2E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{2E} = \overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$

$$\begin{aligned} p_{2E} =& R_{23}p_{3E} + p_{23} \quad \text{(formule du cours - slide 60)} \\ =& \begin{bmatrix} cos\,(q_3) & -sin\,(q_3) & 0 \\ sin\,(q_3) & cos\,(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (R_{23} \text{ et } p_{23} \text{ extraits de } \overline{g}_{23}) \\ =& \begin{bmatrix} l_2 + l_3 cos(q_3) \\ l_3 sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{3E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{3E}$ (déjà calculée dans l'exemple 10)

$$p_{3E} = \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- p_{2E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{2E} = \overline{g}_{23}\overline{g}_{3E}$

$$\begin{aligned} p_{2E} =& R_{23}p_{3E} + p_{23} \quad \text{(formule du cours - slide 60)} \\ =& \begin{bmatrix} cos\,(q_3) & -sin\,(q_3) & 0 \\ sin\,(q_3) & cos\,(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (R_{23} \text{ et } p_{23} \text{ extraits de } \overline{g}_{23}) \\ =& \begin{bmatrix} l_2 + l_3 cos(q_3) \\ l_3 sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{1E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{1E} = \overline{g}_{12}\overline{g}_{2E}$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{1E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{1E} = \overline{g}_{12}\overline{g}_{2E}$

$$
\begin{aligned}
p_{1E} =& R_{12}p_{2E} + p_{12} \quad \text{(formule du cours - slide 60)} \\
=& \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 + l_3 cos(q_3) \\ l_3 sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} l1 + l_2 cos(q_2) + l_3 cos(q_2 + q_3) \\ l_2 sin(q_2) + l_3 sin(q_2 + q_3) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de translation :

- p_{1E} : élément de translation de la transformation homogène $\overline{g}_{1E} = \overline{g}_{12}\overline{g}_{2E}$

$$
\begin{aligned}
p_{1E} =& R_{12}p_{2E} + p_{12} \quad \text{(formule du cours - slide 60)} \\
=& \begin{bmatrix} cos\,(q_2) & -sin\,(q_2) & 0 \\ sin\,(q_2) & cos\,(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 + l_3 cos(q_3) \\ l_3 sin(q_3) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} l1 + l_2 cos(q_2) + l_3 cos(q_2 + q_3) \\ l_2 sin(q_2) + l_3 sin(q_2 + q_3) \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de rotation :

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de rotation :

- R_{01} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (déjà calculée dans les exemples 9 et 10)

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de rotation :

- R_{01} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (déjà calculée dans les exemples 9 et 10)

$$R_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de rotation :

- R_{01} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (déjà calculée dans les exemples 9 et 10)

$$R_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- R_{02} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{02} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de rotation :

- R_{01} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (déjà calculée dans les exemples 9 et 10)

$$R_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- R_{02} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{02} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}$

$$\begin{aligned} R_{02} &= R_{01}R_{12} \\ &= R_{z_1,q_1}R_{z_1=z_2,q_2} \\ &= R_{z_1,q_1+q_2} \\ &= \begin{bmatrix} cos\,(q_1+q_2) & -sin\,(q_1+q_2) & 0 \\ sin\,(q_1+q_2) & cos\,(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de rotation :

- R_{01} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (déjà calculée dans les exemples 9 et 10)

$$R_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- R_{02} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{02} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}$

$$\begin{aligned} R_{02} =& R_{01}R_{12} \\ =& R_{z_1,q_1}R_{z_1=z_2,q_2} \\ =& R_{z_1,q_1+q_2} \\ =& \begin{bmatrix} cos\,(q_1+q_2) & -sin\,(q_1+q_2) & 0 \\ sin\,(q_1+q_2) & cos\,(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- R_{03} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{03} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

Calcul des éléments de rotation :

- R_{01} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{01}$ (déjà calculée dans les exemples 9 et 10)

$$R_{01} = R_{z_1,q_1} = \begin{bmatrix} cos\,(q_1) & -sin\,(q_1) & 0 \\ sin\,(q_1) & cos\,(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- R_{02} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{02} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}$

$$\begin{aligned} R_{02} &= R_{01}R_{12} \\ &= R_{z_1,q_1}R_{z_1=z_2,q_2} \\ &= R_{z_1,q_1+q_2} \\ &= \begin{bmatrix} cos\,(q_1+q_2) & -sin\,(q_1+q_2) & 0 \\ sin\,(q_1+q_2) & cos\,(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- R_{03} : élément de rotation de la transformation homogène $\overline{g}_{03} = \overline{g}_{01}\overline{g}_{12}\overline{g}_{23}$

$$\begin{aligned} R_{03} &= R_{01}R_{12}R_{23} \\ &= R_{z_1,q_1+q_2+q_3} \\ &= \begin{bmatrix} cos\,(q_1+q_2+q_3) & -sin\,(q_1+q_2+q_3) & 0 \\ sin\,(q_1+q_2+q_3) & cos\,(q_1+q_2+q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J_1$:

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J_1$:

$$
\begin{aligned}
{}^{0}J_1(q) &= \begin{bmatrix} R_{01}\left(Z_1 \times p_{1E}\right) \\ R_{01} Z_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{01}\begin{pmatrix} -l_2 sin(q_2) - l_3 sin(q_2+q_3) \\ l_1 + l_2 cos(q_2) + l_3 cos(q_2+q_3) \\ 0 \end{pmatrix} \\ R_{01}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -l_1 S1 - l_2 S12 - l_3 S123 \\ l_1 C1 + l_2 C12 + l_3 C123 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J_2$:

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J_2$:

$$
\begin{aligned}
{}^{0}J_2(q) &= \begin{bmatrix} R_{02}\left(Z_2 \times p_{2E}\right) \\ R_{02} Z_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{02}\begin{pmatrix} -l_3 sin(q_3) \\ l_2 + l_3 cos(q_3) \\ 0 \end{pmatrix} \\ R_{02}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -l_2 S12 - l_3 S123 \\ l_2 C12 + l_3 C123 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J_3$:

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J_3$:

$$
\begin{aligned}
{}^{0}J_3(q) &= \begin{bmatrix} R_{03}\left(Z_3 \times p_{3E}\right) \\ R_{03}Z_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} R_{03}\begin{pmatrix} 0 \\ l_3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ R_{03}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -l_3 S123 \\ l_3 C123 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^{0}J$:

Matrice jacobienne de base du robot plan 3 axes

- Calcul de ${}^0J$:

$$
\begin{aligned}
{}^0J(q) &= \begin{bmatrix} {}^0J_1(q) & {}^0J_2(q) & {}^0J_E(q) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -l_1S1 - l_2S12 - l_3S123 & -l_2S12 - l_3S123 & -l_3S123 \\ l_1C1 + l_2C12 + l_3C123 & l_2C12 + l_3C123 & l_3C123 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Cours

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du rang de ${}^0J$

- Rang de ${}^0J$: égal à la dimension du sous-espace des vitesses opérationnelles engendrées par le robot, image de l'espace des vitesses articulaires au travers sa matrice jacobienne ${}^0J$:

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du rang de ${}^0J$

- Rang de ${}^0J$: égal à la dimension du sous-espace des vitesses opérationnelles engendrées par le robot, image de l'espace des vitesses articulaires au travers sa matrice jacobienne ${}^0J$:

$$\begin{aligned} Rg\left({}^0J(q)\right) &= Rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 \qquad \forall q \\ &= r_{max} \\ &= M \\ &< 3 \qquad (= N = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)) \end{aligned}$$

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du rang de ${}^0J$

- Rang de ${}^0J$: égal à la dimension du sous-espace des vitesses opérationnelles engendrées par le robot, image de l'espace des vitesses articulaires au travers sa matrice jacobienne ${}^0J$:

$$\begin{aligned} Rg\left({}^0J(q)\right) &= Rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 \qquad \forall q \\ &= r_{max} \\ &= M \\ &< 3 \qquad (= N = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)) \end{aligned}$$

- Redondance d'ordre 1.

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du rang de ${}^0J$

- Rang de ${}^0J$: égal à la dimension du sous-espace des vitesses opérationnelles engendrées par le robot, image de l'espace des vitesses articulaires au travers sa matrice jacobienne ${}^0J$:

$$\begin{aligned} Rg\left({}^0J(q)\right) &= Rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 \qquad \forall q \\ &= r_{max} \\ &= M \\ &< 3 \qquad (= N = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)) \end{aligned}$$

- Redondance d'ordre 1.

Analyse du noyau de ${}^0J$

- Le théorème du rang lie la dimension de $\mathbb{R}^{\dot{q}}$, la dimension du noyau de ${}^0J$ et le rang de ${}^0J$

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du rang de ${}^0J$

- Rang de ${}^0J$: égal à la dimension du sous-espace des vitesses opérationnelles engendrées par le robot, image de l'espace des vitesses articulaires au travers sa matrice jacobienne ${}^0J$:

$$\begin{aligned} Rg\left({}^0J(q)\right) &= Rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 \qquad \forall q \\ &= r_{max} \\ &= M \\ &< 3 \qquad (= N = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)) \end{aligned}$$

- Redondance d'ordre 1.

Analyse du noyau de ${}^0J$

- Le théorème du rang lie la dimension de $\mathbb{R}^{\dot{q}}$, la dimension du noyau de ${}^0J$ et le rang de ${}^0J$

$$Rg\left({}^0J\right) + \dim\left(Ker\left({}^0J\right)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)$$

$$M + \dim\left(Ker\left({}^0J\right)\right) = N$$

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du rang de ${}^0J$

- Rang de ${}^0J$: égal à la dimension du sous-espace des vitesses opérationnelles engendrées par le robot, image de l'espace des vitesses articulaires au travers sa matrice jacobienne ${}^0J$:

$$\begin{aligned} Rg\left({}^0J(q)\right) &= Rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 \qquad \forall q \\ &= r_{max} \\ &= M \\ &< 3 \qquad (= N = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)) \end{aligned}$$

- Redondance d'ordre 1.

Analyse du noyau de ${}^0J$

- Le théorème du rang lie la dimension de $\mathbb{R}^{\dot{q}}$, la dimension du noyau de ${}^0J$ et le rang de ${}^0J$

$$Rg\left({}^0J\right) + \dim\left(Ker\left({}^0J\right)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)$$

$$M + \dim\left(Ker\left({}^0J\right)\right) = N$$

- Finalement, la dimension du noyau de ${}^0J$, égal à $N - M$, est un indicateur de l'ordre de la redondance.

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du rang de ${}^0J$

- Rang de ${}^0J$: égal à la dimension du sous-espace des vitesses opérationnelles engendrées par le robot, image de l'espace des vitesses articulaires au travers sa matrice jacobienne ${}^0J$:

$$\begin{aligned} Rg\left({}^0J(q)\right) &= Rg\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= 2 \qquad \forall q \\ &= r_{max} \\ &= M \\ &< 3 \qquad (= N = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)) \end{aligned}$$

- Redondance d'ordre 1.

Analyse du noyau de ${}^0J$

- Le théorème du rang lie la dimension de $\mathbb{R}^{\dot{q}}$, la dimension du noyau de ${}^0J$ et le rang de ${}^0J$

$$Rg\left({}^0J\right) + \dim\left(Ker\left({}^0J\right)\right) = \dim\left(\mathbb{R}^{\dot{q}}\right)$$

$$M + \dim\left(Ker\left({}^0J\right)\right) = N$$

- Finalement, la dimension du noyau de ${}^0J$, égal à $N - M$, est un indicateur de l'ordre de la redondance.
- Le sous-espace des vitesses articulaires correspondant au noyau de ${}^0J$ est vu comme l'ensemble des vitesses articulaires ne produisant aucune vitesse opérationnelle du robot.

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du noyau de ${}^0J$

- Les robots redondants (pour lesquels dim $\left(Ker\left({}^0J\right)\right) > 0$) ont ainsi une infinité de vitesses articulaires impliquant la même vitesse de l'organe terminal.

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du noyau de ${}^0J$

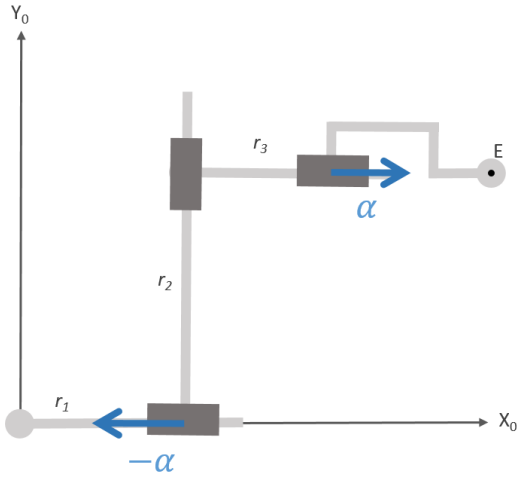
- Les robots redondants (pour lesquels dim $\left(Ker\left({}^0J\right)\right) > 0$) ont ainsi une infinité de vitesses articulaires impliquant la même vitesse de l'organe terminal.
  - Une base du noyau de ${}^0J$ est engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Analyse de la matrice jacobienne de base ${}^0J$ du robot PPP

Analyse du noyau de ${}^0J$

- Les robots redondants (pour lesquels dim $\left(Ker\left({}^0J\right)\right) > 0$) ont ainsi une infinité de vitesses articulaires impliquant la même vitesse de l'organe terminal.
  - Une base du noyau de ${}^0J$ est engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
  - Ensemble des vitesses articulaires produisant la même vitesse opérationnelle :

$$\dot{X}_d = {}^0J\left(\dot{q}_{Im} + \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$



Singularité du robot RR

- Rappel de l'expression de ${}^0J$:

$$ {}^0J\left(q_1, q_2\right) = \begin{bmatrix} -l_1 S1 - l_2 S12 & -l_2 S12 \\ l_1 C1 + l_2 C12 & l_2 C12 \end{bmatrix} $$

- Calcul du déterminant de ${}^0J$:

Singularité du robot RR

- Rappel de l'expression de ${}^0J$:

$$ {}^0J\left(q_1, q_2\right) = \begin{bmatrix} -l_1 S1 - l_2 S12 & -l_2 S12 \\ l_1 C1 + l_2 C12 & l_2 C12 \end{bmatrix} $$

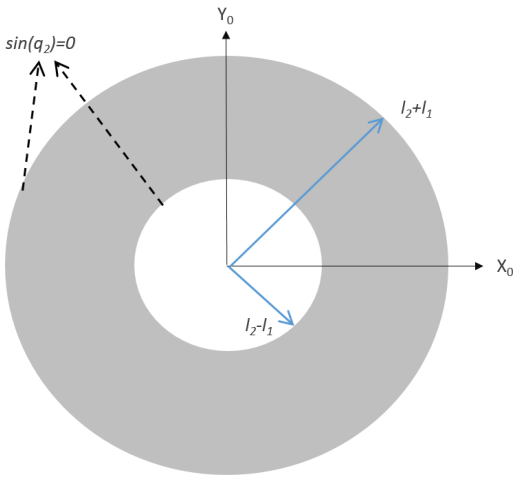
- Calcul du déterminant de ${}^0J$:

$$ \begin{aligned} det\left({}^0J\right) =& l_1 l_2 \left(cos\left(q_1\right) sin\left(q_1 + q_2\right) - sin\left(q_1\right) cos\left(q_1 + q_2\right)\right) \\ =& l_1 l_2 \left[cos\left(q_1\right)\left(sin\left(q_1\right) cos\left(q_2\right) + cos\left(q_1\right) sin\left(q_2\right)\right)\right. \\ & \left. \ldots - sin\left(q_1\right)\left(cos\left(q_1\right) cos\left(q_2\right) - sin\left(q_1\right) sin\left(q_2\right)\right)\right] \\ =& l_1 l_2 \left(cos^2\left(q_1\right) + sin^2\left(q_1\right)\right) sin\left(q_2\right) \\ =& l_1 l_2 sin\left(q_2\right) \end{aligned} $$

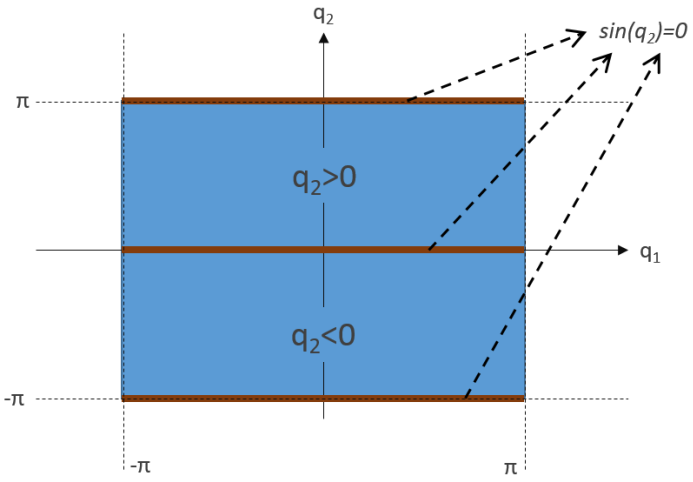
- Singularités en $q_2 = 0$ et $q_2 = \pm\pi$ (solutions de $det\left({}^0J\right) = 0$).

Singularité du robot RR

- Espace de travail du robot ($L_1 > L_2$)



- Branches de singularités du robot plan



Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.
Un déplacement virtuel produit par l'organe terminal s'exprime dans l'espace opérationnel par $\delta X = J\delta q$.

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.
Un déplacement virtuel produit par l'organe terminal s'exprime dans l'espace opérationnel par $\delta X = J\delta q$.
Dans l'espace opérationnel, le travail virtuel résultant de l'effort ${}^{0}\mathscr{F}_e$ s'exprime selon ${}^{0}\mathscr{F}_e^t \delta X$.

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.
Un déplacement virtuel produit par l'organe terminal s'exprime dans l'espace opérationnel par $\delta X = J\delta q$.
Dans l'espace opérationnel, le travail virtuel résultant de l'effort ${}^{0}\mathscr{F}_e$ s'exprime selon ${}^{0}\mathscr{F}_e^t \delta X$.
Pour produire ce travail, le système fournit le travail virtuel dû aux couples articulaires selon $\Gamma_e^t \delta q$.

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.
Un déplacement virtuel produit par l'organe terminal s'exprime dans l'espace opérationnel par $\delta X = J\delta q$.
Dans l'espace opérationnel, le travail virtuel résultant de l'effort ${}^{0}\mathscr{F}_e$ s'exprime selon ${}^{0}\mathscr{F}_e^t \delta X$.
Pour produire ce travail, le système fournit le travail virtuel dû aux couples articulaires selon $\Gamma_e^t \delta q$.
La variation du travail virtuel total produit par le système

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.
Un déplacement virtuel produit par l'organe terminal s'exprime dans l'espace opérationnel par $\delta X = J\delta q$.
Dans l'espace opérationnel, le travail virtuel résultant de l'effort ${}^0\mathscr{F}_e$ s'exprime selon ${}^0\mathscr{F}_e^t \delta X$.
Pour produire ce travail, le système fournit le travail virtuel dû aux couples articulaires selon $\Gamma_e^t \delta q$.
La variation du travail virtuel total produit par le système

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{W} &= {}^0\mathscr{F}_e^t \delta X - \Gamma_e^t \delta q \\ &= \left({}^0\mathscr{F}_e^t J - \Gamma_e^t\right)\delta q\end{aligned}$$

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.
Un déplacement virtuel produit par l'organe terminal s'exprime dans l'espace opérationnel par $\delta X = J\delta q$.
Dans l'espace opérationnel, le travail virtuel résultant de l'effort ${}^0\mathscr{F}_e$ s'exprime selon ${}^0\mathscr{F}_e^t \delta X$.
Pour produire ce travail, le système fournit le travail virtuel dû aux couples articulaires selon $\Gamma_e^t \delta q$.
La variation du travail virtuel total produit par le système

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{W} &= {}^0\mathscr{F}_e^t \delta X - \Gamma_e^t \delta q \\ &= \left({}^0\mathscr{F}_e^t J - \Gamma_e^t\right)\delta q\end{aligned}$$

doit être nulle à l'état d'équilibre

Transmission des efforts entre espaces articulaire et opérationnel

L'opérateur $\delta(.)$ représente le déplacement virtuel.
Un déplacement virtuel produit par l'organe terminal s'exprime dans l'espace opérationnel par $\delta X = J\delta q$.
Dans l'espace opérationnel, le travail virtuel résultant de l'effort ${}^0\mathscr{F}_e$ s'exprime selon ${}^0\mathscr{F}_e^t \delta X$.
Pour produire ce travail, le système fournit le travail virtuel dû aux couples articulaires selon $\Gamma_e^t \delta q$.
La variation du travail virtuel total produit par le système

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{W} &= {}^0\mathscr{F}_e^t \delta X - \Gamma_e^t \delta q \\ &= \left({}^0\mathscr{F}_e^t J - \Gamma_e^t\right)\delta q\end{aligned}$$

doit être nulle à l'état d'équilibre

$$\delta\mathscr{W} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\Gamma_e = J^t {}^0\mathscr{F}_e}$$

Cours

MGI du robot 2R

- Recherche de la variable articulaire q_1
  En élevant au carré et en sommant les deux équations issues du MGD :

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 - (l_1 + l_2)^2 &= 2 l_1 l_2 \left(cos\left(q_1\right) cos\left(q_1 + q_2\right) + sin\left(q_1\right) sin\left(q_1 + q_2\right) \right) \\ &= 2 l_1 l_2 cos\left(q_2\right) \end{aligned}$$

MGI du robot 2R

- Recherche de la variable articulaire q_1
  En élevant au carré et en sommant les deux équations issues du MGD :

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 - (l_1 + l_2)^2 &= 2 l_1 l_2 \left(cos\left(q_1\right) cos\left(q_1 + q_2\right) + sin\left(q_1\right) sin\left(q_1 + q_2\right) \right) \\ &= 2 l_1 l_2 cos\left(q_2\right) \end{aligned}$$

d'où on déduit que :

$$cos\left(q_2\right) = \frac{p_x^2 + p_y^2 - (l_1 + l_2)^2}{2 l_1 l_2}$$

(doit appartenir à $[-1, 1]$, sinon E est hors de l'espace de travail)

MGI du robot 2R

- Recherche de la variable articulaire q_1
  En élevant au carré et en sommant les deux équations issues du MGD :

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 - (l_1 + l_2)^2 &= 2 l_1 l_2 \left(cos\left(q_1\right) cos\left(q_1 + q_2\right) + sin\left(q_1\right) sin\left(q_1 + q_2\right) \right) \\ &= 2 l_1 l_2 cos\left(q_2\right) \end{aligned}$$

d'où on déduit que :

$$cos\left(q_2\right) = \frac{p_x^2 + p_y^2 - (l_1 + l_2)^2}{2 l_1 l_2}$$

(doit appartenir à $[-1, 1]$, sinon E est hors de l'espace de travail)

et

$$sin\left(q_2\right) = \pm\sqrt{1 - cos^2\left(q_2\right)}$$

(2 solutions selon le signe).

MGI du robot 2R

- Recherche de la variable articulaire q_1
  En élevant au carré et en sommant les deux équations issues du MGD :

$$\begin{aligned} p_x^2 + p_y^2 - (l_1 + l_2)^2 &= 2 l_1 l_2 \left(cos\left(q_1\right) cos\left(q_1 + q_2\right) + sin\left(q_1\right) sin\left(q_1 + q_2\right) \right) \\ &= 2 l_1 l_2 cos\left(q_2\right) \end{aligned}$$

d'où on déduit que :

$$cos\left(q_2\right) = \frac{p_x^2 + p_y^2 - (l_1 + l_2)^2}{2 l_1 l_2}$$

(doit appartenir à $[-1, 1]$, sinon E est hors de l'espace de travail)

et

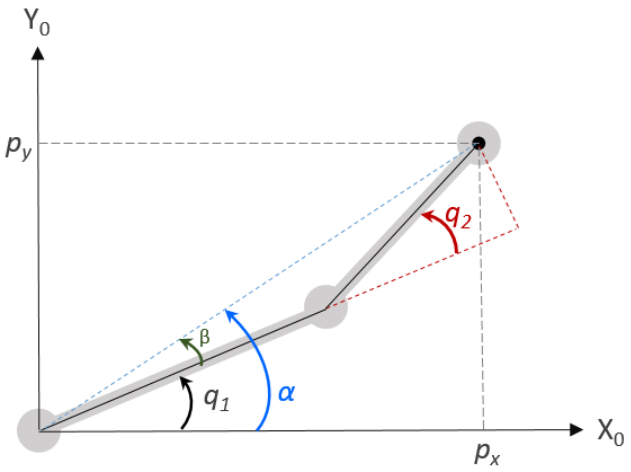
$$sin\left(q_2\right) = \pm\sqrt{1 - cos^2\left(q_2\right)}$$

(2 solutions selon le signe).

Finalement, $\boxed{q_2 = atan2\left(sin\left(q_2\right), cos\left(q_2\right)\right)}$ sous forme analytique.

MGI du robot 2R

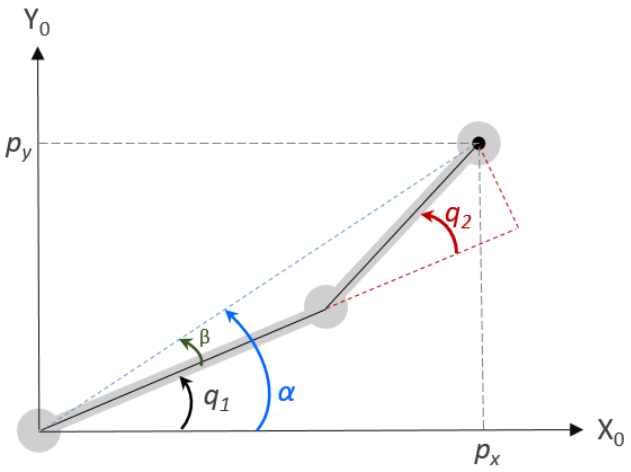
- Recherche de la variable articulaire q_1 :



Deux solutions sont à chercher pour q_1 (une pour chaque valeur de $sin\,(q_2)$).

MGI du robot 2R

- Recherche de la variable articulaire q_1 :

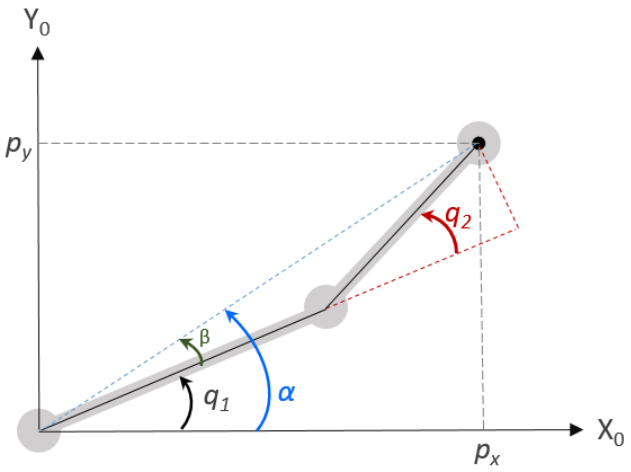


Deux solutions sont à chercher pour q_1 (une pour chaque valeur de $sin\,(q_2)$).
Par inspection géométrique :

$$\boxed{\mathrm{q}_1} = \alpha - \beta \boxed{= \mathrm{atan2}(p_y, p_x) - atan2\,(l_2 sin\,(q_2)\,, l_1 + l_2 cos\,(q_2))}$$

MGI du robot 2R

- Recherche de la variable articulaire q_1 :



Deux solutions sont à chercher pour q_1 (une pour chaque valeur de $sin\,(q_2)$).
Par inspection géométrique :

$$\boxed{q_1} = \alpha - \beta \boxed{= \text{atan2}(p_y, p_x) - atan2\,(l_2 sin\,(q_2)\,, l_1 + l_2 cos\,(q_2))}$$

Remarques :

- Note : la différence de $atan2$ doit être ré-exprimer dans $(-\pi, \pi]$;
- Deux configurations solutions : coude haut $\left(q_1^{''}, q_2^{''}\right)$ et coude bas $\left(q_1^{'}, q_2^{'}\right)$.

Cours

Stabilité de l'algorithme du gradient pour le calcul du MGI

- Soit e l'erreur d'asservissement, telle que $e = X_d - f(q)$.
  $e \to 0$ ssi le point d'équilibre de la bouclé fermée $e = 0$ est asymptotiquement stable.
- Choix de la fonction candidate de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2} e^t e \geq 0$.
- Dérivée par rapport au temps de la fonction de *Lyapunov* :

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= e^t \dot{e} \\
&= e^t \frac{d}{dt} \left(X_d - f(q) \right) \\
&= -e^t J \dot{q} \\
&= -e^t J J^t e \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\dot{V} = 0 \Leftrightarrow e \in N\left(J^t\right)$$

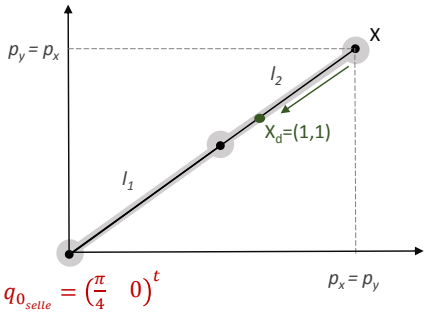
en particulier $e = 0$.

Cours

Algorithmes de calcul numérique du MGI dans le cas régulier

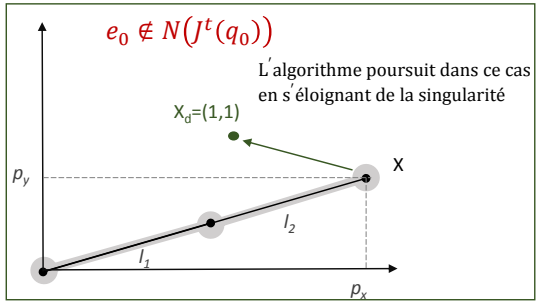
Cas d'étude : robot 2R en considérant $X_d = (1,1)$ et $l_1 = l_2 = 1$.

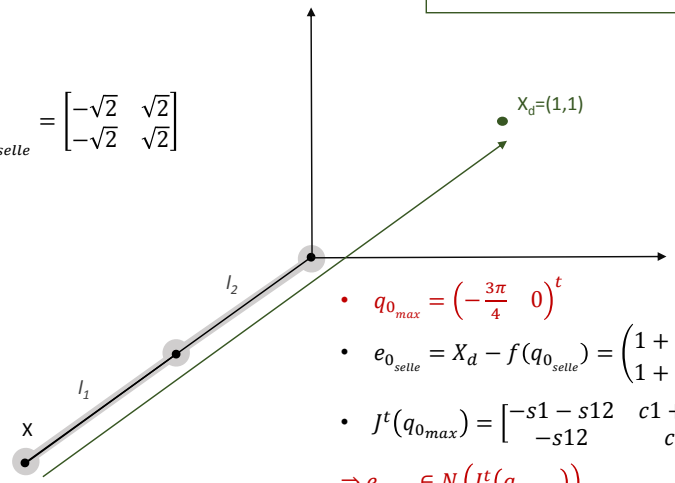
- Cas de non-convergence lorsque la matrice jacobienne $J(q)$ est singulière en q et que l'erreur e appartient au noyau de $J^t(q)$ (rappelons que $N(J^t) = Im(J)^{\perp}$: ensemble des vitesses non-réalisables).



- $q_{0_{selle}} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & 0 \end{pmatrix}^t$
- $e_{0_{selle}} = X_d - f(q_{0_{selle}}) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $J^t(q_{0_{selle}}) = \begin{bmatrix} -s1 - s12 & c1 + c12 \\ -s12 & c12 \end{bmatrix}_{q=q_{0_{selle}}} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow e_{0_{selle}} \in N\left(J^t(q_{0_{selle}})\right)$





- $q_{0_{max}} = \begin{pmatrix} -\frac{3\pi}{4} & 0 \end{pmatrix}^t$
- $e_{0_{selle}} = X_d - f(q_{0_{selle}}) = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $J^t(q_{0_{max}}) = \begin{bmatrix} -s1 - s12 & c1 + c12 \\ -s12 & c12 \end{bmatrix}_{q=q_{0_{max}}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow e_{0_{max}} \in N\left(J^t(q_{0_{max}})\right)$

Cours

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

Problème pouvant être ramené à un problème de minimisation sans contrainte en utilisant $\lambda \in \mathbb{R}^m$, dont les coordonnées λ_i sont les multiplicateurs de *Lagrange*.
Lagrangien $\mathscr{L}$ associé au problème d'optimisation :

$$\mathscr{L}(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2} (\dot{q} - \dot{q}_0)^t W (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^t \left(J(q) \dot{q} - \dot{X}_d \right)$$

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

Problème pouvant être ramené à un problème de minimisation sans contrainte en utilisant $\lambda \in \mathbb{R}^m$, dont les coordonnées λ_i sont les multiplicateurs de *Lagrange*.
Lagrangien $\mathscr{L}$ associé au problème d'optimisation :

$$\mathscr{L}(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^t W (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^t \left(J(q)\dot{q} - \dot{X}_d \right)$$

- Condition nécessaire
  Si $\dot{q}^*$ est une solution recherchée, alors il existe un vecteur λ^*, tel que la fonction $\mathscr{L}$ admet une différentielle nulle au point stationnaire $(\dot{q}^*, \lambda^*)$:

$$\nabla_{\dot{q},\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^*,\lambda^*)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\dot{q}}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = W(\dot{q}^* - \dot{q}_0) + J^t\lambda^* = 0 \\ \nabla_{\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = J\dot{q}^* - \dot{X}_d = 0 \end{cases}$$

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

Problème pouvant être ramené à un problème de minimisation sans contrainte en utilisant $\lambda \in \mathbb{R}^m$, dont les coordonnées λ_i sont les multiplicateurs de *Lagrange*.
Lagrangien $\mathscr{L}$ associé au problème d'optimisation :

$$\mathscr{L}(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^t W (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^t \left(J(q)\dot{q} - \dot{X}_d \right)$$

- Condition nécessaire
  Si $\dot{q}^*$ est une solution recherchée, alors il existe un vecteur λ^*, tel que la fonction $\mathscr{L}$ admet une différentielle nulle au point stationnaire $(\dot{q}^*, \lambda^*)$:

$$\nabla_{\dot{q},\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^*,\lambda^*)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\dot{q}}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = W(\dot{q}^* - \dot{q}_0) + J^t\lambda^* = 0 \\ \nabla_{\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = J\dot{q}^* - \dot{X}_d = 0 \end{cases}$$

  d'où on déduit, d'après la 1^{ière} équation, que $\dot{q}^* = \dot{q}_0 - W^{-1}J^t\lambda^*$.

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

Problème pouvant être ramené à un problème de minimisation sans contrainte en utilisant $\lambda \in \mathbb{R}^m$, dont les coordonnées λ_i sont les multiplicateurs de *Lagrange*.
Lagrangien $\mathscr{L}$ associé au problème d'optimisation :

$$\mathscr{L}(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^t W (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^t \left(J(q)\dot{q} - \dot{X}_d \right)$$

- Condition nécessaire
  Si $\dot{q}^*$ est une solution recherchée, alors il existe un vecteur λ^*, tel que la fonction $\mathscr{L}$ admet une différentielle nulle au point stationnaire $(\dot{q}^*, \lambda^*)$:

$$\nabla_{\dot{q},\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^*,\lambda^*)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\dot{q}}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = W(\dot{q}^* - \dot{q}_0) + J^t\lambda^* = 0 \\ \nabla_{\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = J\dot{q}^* - \dot{X}_d = 0 \end{cases}$$

  d'où on déduit, d'après la 1^{ière} équation, que $\dot{q}^* = \dot{q}_0 - W^{-1}J^t\lambda^*$.
  En combinant avec la 2ième équation, il vient que $J\dot{q}_0 - JW^{-1}J^t\lambda^* - \dot{X}_d = 0$, soit $\lambda^* = \left(JW^{-1}J^t\right)^{-1}\left(J\dot{q}_0 - \dot{X}_d\right)$, car la matrice $\left(JW^{-1}J^t\right) \in R^{m\times m}$ est bien inversible (si J de rang ligne plein).

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

Problème pouvant être ramené à un problème de minimisation sans contrainte en utilisant $\lambda \in \mathbb{R}^m$, dont les coordonnées λ_i sont les multiplicateurs de *Lagrange*.
Lagrangien $\mathscr{L}$ associé au problème d'optimisation :

$$\mathscr{L}(\dot{q}, \lambda) = \frac{1}{2}(\dot{q} - \dot{q}_0)^t W (\dot{q} - \dot{q}_0) + \lambda^t \left(J(q)\dot{q} - \dot{X}_d \right)$$

- Condition nécessaire
  Si $\dot{q}^*$ est une solution recherchée, alors il existe un vecteur λ^*, tel que la fonction $\mathscr{L}$ admet une différentielle nulle au point stationnaire $(\dot{q}^*, \lambda^*)$:

$$\nabla_{\dot{q},\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^*,\lambda^*)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\dot{q}}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = W(\dot{q}^* - \dot{q}_0) + J^t\lambda^* = 0 \\ \nabla_{\lambda}\mathscr{L}|_{(\dot{q}^{*t},\lambda^*)} = J\dot{q}^* - \dot{X}_d = 0 \end{cases}$$

  d'où on déduit, d'après la 1^{ière} équation, que $\dot{q}^* = \dot{q}_0 - W^{-1}J^t\lambda^*$.
  En combinant avec la 2ième équation, il vient que $J\dot{q}_0 - JW^{-1}J^t\lambda^* - \dot{X}_d = 0$, soit $\lambda^* = \left(JW^{-1}J^t\right)^{-1}\left(J\dot{q}_0 - \dot{X}_d\right)$, car la matrice $\left(JW^{-1}J^t\right) \in R^{m\times m}$ est bien inversible (si J de rang ligne plein).

$$\begin{aligned} \dot{q}^* &= \dot{q}_0 - W^{-1}J^t\left(JW^{-1}J^t\right)^{-1}\left(J\dot{q}_0 - \dot{X}_d\right) \\ &= \underbrace{W^{-1}J^t\left(JW^{-1}J^t\right)^{-1}}_{J_W^\sharp}\dot{X}_d + \left(I_n - \underbrace{W^{-1}J^t\left(JW^{-1}J^t\right)^{-1}}_{J_W^\sharp}J\right)\dot{q}_0 \end{aligned}$$

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

- Condition suffisante :
  Le point stationnaire $(\dot{q}^*, \lambda^*)$ est un extremum local (minimum local dans notre cas) si la matrice hessienne de $\mathscr{L}$ est définie positive :

$$\nabla^2_{\dot{q}\dot{q}} \mathscr{L}|_{(\dot{q}^*, \lambda^*)} \succ 0$$

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

- Condition suffisante :
  Le point stationnaire $(\dot{q}^*, \lambda^*)$ est un extremum local (minimum local dans notre cas) si la matrice hessienne de $\mathscr{L}$ est définie positive :

  $$\nabla^2_{\dot{q}\dot{q}} \mathscr{L}|_{(\dot{q}^*, \lambda^*)} \succ 0$$

  Cette condition est vérifiée puisque $\nabla^2_{\dot{q}\dot{q}} \mathscr{L}|_{(\dot{q}^*, \lambda^*)} = W$ avec W choisie définie positive par hypothèse.

Inversion du modèle cinématique dans le cas redondant

- Condition suffisante :
  Le point stationnaire $(\dot{q}^*, \lambda^*)$ est un extremum local (minimum local dans notre cas) si la matrice hessienne de $\mathscr{L}$ est définie positive :

  $$\nabla^2_{\dot{q}\dot{q}} \mathscr{L}|_{(\dot{q}^*, \lambda^*)} \succ 0$$

  Cette condition est vérifiée puisque $\nabla^2_{\dot{q}\dot{q}} \mathscr{L}|_{(\dot{q}^*, \lambda^*)} = W$ avec W choisie définie positive par hypothèse.

En fait, le point $(\dot{q}^*, \lambda^*)$ est même l'**unique** extremum **global** du problème d'optimisation, car la fonction objectif quadratique est strictement convexe (puisque W est définie positive).

Cours

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Configuration articulaire comme solution de la tâche 1 : $\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1}$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Configuration articulaire comme solution de la tâche 1 : $\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1}$
- Recherche de la configuration articulaire comme solution de la tâche 2 :

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Configuration articulaire comme solution de la tâche 1 : $\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1}$
- Recherche de la configuration articulaire comme solution de la tâche 2 :
  - En injectant la solution précédente (afin de respecter le 1^{ier} objectif) dans l'expression issue de la tâche 2 :

$$\dot{X}_{d_2} = J_2 \dot{q}^* = J_2 \left(J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1} \right)$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Configuration articulaire comme solution de la tâche 1 : $\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1}$
- Recherche de la configuration articulaire comme solution de la tâche 2 :
  - En injectant la solution précédente (afin de respecter le 1^{ier} objectif) dans l'expression issue de la tâche 2 :

$$\dot{X}_{d_2} = J_2 \dot{q}^* = J_2 \left(J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1} \right)$$

  - Le vecteur $\dot{q}_{0_1}$ est déduit comme solution de l'équation précédente (dans laquelle nous choisissons les *mouvements internes* nuls, i.e. $\dot{q}_{0_2}$) :

$$\dot{q}_{0_1} = \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Configuration articulaire comme solution de la tâche 1 : $\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1}$
- Recherche de la configuration articulaire comme solution de la tâche 2 :
  - En injectant la solution précédente (afin de respecter le 1^{ier} objectif) dans l'expression issue de la tâche 2 :

$$\dot{X}_{d_2} = J_2 \dot{q}^* = J_2 \left(J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1} \right)$$

  - Le vecteur $\dot{q}_{0_1}$ est déduit comme solution de l'équation précédente (dans laquelle nous choisissons les *mouvements internes* nuls, i.e. $\dot{q}_{0_2}$) :

$$\dot{q}_{0_1} = \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

  - En substituant l'expression trouvée de $\dot{q}_{0_1}$ dans celle de la tâche 1 :

$$\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Configuration articulaire comme solution de la tâche 1 : $\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1}$
- Recherche de la configuration articulaire comme solution de la tâche 2 :
  - En injectant la solution précédente (afin de respecter le 1^{ier} objectif) dans l'expression issue de la tâche 2 :

$$\dot{X}_{d_2} = J_2 \dot{q}^* = J_2 \left(J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1} \right)$$

  - Le vecteur $\dot{q}_{0_1}$ est déduit comme solution de l'équation précédente (dans laquelle nous choisissons les *mouvements internes* nuls, i.e. $\dot{q}_{0_2}$) :

$$\dot{q}_{0_1} = \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

  - En substituant l'expression trouvée de $\dot{q}_{0_1}$ dans celle de la tâche 1 :

$$\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

- Compte-tenu des propriétés de la pseudo-inverse :

$$N_{J_1} \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp = \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp,$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Configuration articulaire comme solution de la tâche 1 : $\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1}$
- Recherche de la configuration articulaire comme solution de la tâche 2 :
  - En injectant la solution précédente (afin de respecter le 1^{ier} objectif) dans l'expression issue de la tâche 2 :

$$\dot{X}_{d_2} = J_2 \dot{q}^* = J_2 \left(J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \dot{q}_{0_1} \right)$$

  - Le vecteur $\dot{q}_{0_1}$ est déduit comme solution de l'équation précédente (dans laquelle nous choisissons les *mouvements internes* nuls, i.e. $\dot{q}_{0_2}$) :

$$\dot{q}_{0_1} = \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

  - En substituant l'expression trouvée de $\dot{q}_{0_1}$ dans celle de la tâche 1 :

$$\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + N_{J_1} \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

- Compte-tenu des propriétés de la pseudo-inverse :

$$N_{J_1} \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp = \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp,$$

Finalement,

$$\dot{q}^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + \left(J_2 N_{J_1} \right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} \right)$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

1 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_1^*(t)$ respectant la 1^{ière} tâche :

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

1 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_1^*(t)$ respectant la 1^{ière} tâche :

- Retour sur l'expression de la matrice ${}^0J$ du robot RRR plan :

$$\begin{pmatrix} {}^0\dot{x}_d^E \\ {}^0\dot{y}_d^E \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

où

$${}^0J(q) = \begin{bmatrix} -l_1S1 - l_2S12 - l_3S123 & -l_2S12 - l_3S123 & -l_3S123 \\ l_1C1 + l_2C12 + l_3C123 & l_2C12 + l_3C123 & l_3C123 \end{bmatrix}$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

1 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_1^*(t)$ respectant la 1^{ière} tâche :

- Retour sur l'expression de la matrice ${}^0J$ du robot RRR plan :

$$\begin{pmatrix} {}^0\dot{x}_d^E \\ {}^0\dot{y}_d^E \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

où

$${}^0J(q) = \begin{bmatrix} -l_1S1 - l_2S12 - l_3S123 & -l_2S12 - l_3S123 & -l_3S123 \\ l_1C1 + l_2C12 + l_3C123 & l_2C12 + l_3C123 & l_3C123 \end{bmatrix}$$

Evaluation numérique à la configuration $q = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)^t$:

$${}^0J(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

1 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_1^*(t)$ respectant la 1^{ière} tâche :

- Retour sur l'expression de la matrice ${}^0J$ du robot RRR plan :

$$\begin{pmatrix} {}^0\dot{x}_d^E \\ {}^0\dot{y}_d^E \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

où

$${}^0J(q) = \begin{bmatrix} -l_1S1 - l_2S12 - l_3S123 & -l_2S12 - l_3S123 & -l_3S123 \\ l_1C1 + l_2C12 + l_3C123 & l_2C12 + l_3C123 & l_3C123 \end{bmatrix}$$

Evaluation numérique à la configuration $q = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)^t$:

$${}^0J(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Après calcul de la pseudo-inverse de *Moore-Penrose* :

$$\dot{q}_1^* = {}^0J^{\sharp}\,{}^0\dot{X}_d^E = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} & -2 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,44 \\ -0,14 \\ 1,30 \end{pmatrix}$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

1 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_1^*(t)$ respectant la 1^{ière} tâche :

- Retour sur l'expression de la matrice ${}^0J$ du robot RRR plan :

$$\begin{pmatrix} {}^0\dot{x}_d^E \\ {}^0\dot{y}_d^E \end{pmatrix} = {}^0J(q) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}$$

où

$${}^0J(q) = \begin{bmatrix} -l_1S1 - l_2S12 - l_3S123 & -l_2S12 - l_3S123 & -l_3S123 \\ l_1C1 + l_2C12 + l_3C123 & l_2C12 + l_3C123 & l_3C123 \end{bmatrix}$$

Evaluation numérique à la configuration $q = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)^t$:

$${}^0J(q) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ -2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

- Après calcul de la pseudo-inverse de *Moore-Penrose* :

$$\dot{q}_1^* = {}^0J^{\sharp}\,{}^0\dot{X}_d^E = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} & -2 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -1,44 \\ -0,14 \\ 1,30 \end{pmatrix}$$

- Vérification de l'erreur nulle en vitesse dans l'espace cartésien :

$$\begin{pmatrix} {}^0\dot{x}^E \\ {}^0\dot{y}^E \end{pmatrix} = {}^0J\dot{q}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = {}^0\dot{X}_d^E(t) \Leftrightarrow \left\| {}^0\dot{X}_d^E - {}^0J\dot{q}_1^* \right\| = 0$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

2 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_2^*(t)$ respectant la 1^{ière} puis la 2ième tâche :

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

2 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_2^*(t)$ respectant la 1^{ière} puis la 2ième tâche :

- Solution générale :

$$\dot{q}_2^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + \left(J_2 N_{J_1}\right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1}\right)$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

2 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_2^*(t)$ respectant la 1^{ière} puis la 2ième tâche :

- Solution générale :

$$\dot{q}_2^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + \left(J_2 N_{J_1}\right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1}\right)$$

- Tâche additionnelle :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{X}_{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

2 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_2^*(t)$ respectant la 1^{ière} puis la 2ième tâche :

- Solution générale :

$$\dot{q}_2^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + \left(J_2 N_{J_1}\right)^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1}\right)$$

- Tâche additionnelle :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{X}_{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Matrice du projecteur dans le noyau de J_1 :

$$N_1 = I_3 - J_1^\sharp J_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

2 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_2^*(t)$ respectant la 1^{ière} puis la 2ième tâche :

- Solution générale :

$$\dot{q}_2^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + (J_2 N_{J_1})^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1}\right)$$

- Tâche additionnelle :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{X}_{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Matrice du projecteur dans le noyau de J_1 :

$$N_1 = I_3 - J_1^\sharp J_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- A partir de N_1, dont le rang vaut 1, les vitesses articulaires valent :

$$\dot{q}_2^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,79 \\ -0,79 \\ 1,94 \end{pmatrix}$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

2 - Recherche de la vitesse articulaire $\dot{q}_2^*(t)$ respectant la 1^{ière} puis la 2ième tâche :

- Solution générale :

$$\dot{q}_2^* = J_1^\sharp \dot{X}_{d_1} + (J_2 N_{J_1})^\sharp \left(\dot{X}_{d_2} - J_2 J_1^\sharp \dot{X}_{d_1}\right)$$

- Tâche additionnelle :

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{X}_{d_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Matrice du projecteur dans le noyau de J_1 :

$$N_1 = I_3 - J_1^\sharp J_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- A partir de N_1, dont le rang vaut 1, les vitesses articulaires valent :

$$\dot{q}_2^* = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \\ \frac{5\sqrt{3}}{3} + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,79 \\ -0,79 \\ 1,94 \end{pmatrix}$$

- Analyse des erreurs en vitesse dans l'espace cartésien :

$$\left\| {}^0\dot{X}_d^E - {}^0J\dot{q}_2^* \right\| = 0,$$

$$\left\| \dot{X}_{d_2} - J_2 \dot{q}_2^* \right\| \approx 1,12$$

Tâche secondaire dans l'espace opérationnel

- Analyse des erreurs en vitesse dans l'espace cartésien :
  - Respect de la contrainte imposée par la tâche 2 (trajectoire cartésienne respectée) et minimisation de la norme des vitesses articulaires, car

$$\left\| \dot{X}_{d_2} - J_2 \dot{q}_2^* \right\| < \left\| \dot{X}_{d_2} - J_2 \dot{q}_1^* \right\| \approx 1,44$$

  - En fait, le noyau de J_1 de dimension 1 seulement, est utilisé de manière optimale pour tendre vers la réalisation conjointe des 2 objectifs (sans pouvoir les respecter complètement), sans changer les performances de suivi de trajectoire de l'effecteur.

Cours

Inversion par la méthode des moindres carrés amortis

Expression de J_{DLS}

- La minimisation de $H = \frac{1}{2}\left\|J(q)\,\dot{q} - \dot{X}_d\right\|^2 + \frac{\lambda^2}{2}\|\dot{q}\|^2$ est équivalente à la minimisation de

$$H = \frac{1}{2}\left\|\begin{bmatrix} J \\ \lambda I \end{bmatrix}\dot{q} - \begin{pmatrix} \dot{X}_d \\ 0 \end{pmatrix}\right\|^2$$

- Calcul de la dérivée première de H

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left\{\frac{1}{2}\dot{q}^t \underbrace{\begin{bmatrix} J \\ \lambda I \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} J \\ \lambda I \end{bmatrix}}_{\left[J^t J + \lambda^2 I\right]} \dot{q} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{X}_d \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \dot{X}_d \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} J \\ \lambda I \end{bmatrix}^t \begin{pmatrix} \dot{X}_d \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{X}_d \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{bmatrix} J \\ \lambda I \end{bmatrix}\dot{q}\right\}$$

Inversion par la méthode des moindres carrés amortis

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q} =& \frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\left[J^tJ+\lambda^2 I\right]^t+\left[J^tJ+\lambda^2 I\right]\right)\dots \\ & -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{X}_d\\ 0\end{pmatrix}^t\begin{bmatrix}J\\ \lambda I\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{X}_d\\ 0\end{pmatrix}^t\begin{bmatrix}J\\ \lambda I\end{bmatrix} \\ =& \dot{q}^t\left[J^tJ+\lambda^2 I\right]-\dot{X}_d^tJ\end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée partielle s'annule lorsque

$$\dot{q} = \left(J^tJ+\lambda^2 I\right)^{-1}J^t\dot{X}_d$$

et on montre facilement que

$$\left(\lambda^2 I+J^tJ\right)^{-1}J^t = J^t\left(\lambda^2 I+JJ^t\right)^{-1}$$

Formulaire de dérivation des fonctions linéaires

$$\frac{\partial a^tx}{\partial x} = \frac{\partial x^ta}{\partial x} = a^t$$

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} = \frac{\partial x^tA}{\partial x^t} = A$$

Dérivation de fonctions quadratiques

$$\frac{\partial x^tAx}{\partial x} = x^t\left(A^t+A\right)$$

On pourrait facilement vérifier que la matrice $\left(J^tJ+\lambda^2 I\right)$ est bien inversible, à partir de sa décomposition SVD notamment :

$$\sigma_i^{J_{DLS}} = \frac{1}{\sigma_i^2+\lambda^2}$$

Théorème de *Konig*

Énergie cinétique du corps évaluée en intégrant l'énergie cinétique des points matériels sur le volume :

$$
\begin{aligned}
E_{c_i} &= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{p}_{G_i} + \dot{R}r \right\|^2 d\mathscr{V}_i \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{p}_{G_i} \right\|^2 d\mathscr{V}_i}_{E^1_{c_i}} + \underbrace{\int_{\mathscr{V}_i} \rho \dot{p}^t_{G_i} \dot{R} r d\mathscr{V}_i}_{E^2_{c_i}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{R}r \right\|^2 d\mathscr{V}_i}_{E^3_{c_i}}
\end{aligned}
$$

Théorème de *Konig*

Énergie cinétique du corps évaluée en intégrant l'énergie cinétique des points matériels sur le volume :

$$
\begin{aligned}
E_{c_i} &= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{p}_{G_i} + \dot{R}r \right\|^2 d\mathscr{V}_i \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{p}_{G_i} \right\|^2 d\mathscr{V}_i}_{E^1_{c_i}} + \underbrace{\int_{\mathscr{V}_i} \rho \dot{p}^t_{G_i} \dot{R} r d\mathscr{V}_i}_{E^2_{c_i}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{R}r \right\|^2 d\mathscr{V}_i}_{E^3_{c_i}}
\end{aligned}
$$

- Le terme $E^1_{c_i}$ est l'*énergie cinétique de translation* et vaut :

$$
\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \left\| \dot{p}_{G_i} \right\|^2 dm_i = \frac{1}{2} m_i \dot{p}^t_{G_i} \dot{p}_{G_i} = \frac{1}{2} m_i {}^0V^t_{0,G_i} {}^0V_{0,G_i}
$$

Théorème de *Konig*

Énergie cinétique du corps évaluée en intégrant l'énergie cinétique des points matériels sur le volume :

$$\begin{aligned} E_{c_i} &= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{p}_{G_i} + \dot{R}r \right\|^2 d\mathscr{V}_i \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{p}_{G_i} \right\|^2 d\mathscr{V}_i}_{E^1_{c_i}} + \underbrace{\int_{\mathscr{V}_i} \rho \dot{p}^t_{G_i} \dot{R} r d\mathscr{V}_i}_{E^2_{c_i}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\| \dot{R}r \right\|^2 d\mathscr{V}_i}_{E^3_{c_i}} \end{aligned}$$

- Le terme $E^1_{c_i}$ est l'*énergie cinétique de translation* et vaut :

$$\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \left\| \dot{p}_{G_i} \right\|^2 dm_i = \frac{1}{2} m_i \dot{p}^t_{G_i} \dot{p}_{G_i} = \frac{1}{2} m_i {}^0V^t_{0,G_i} {}^0V_{0,G_i}$$

- Le terme $E^2_{c_i}$

$$\int_{\mathscr{V}_i} \rho \dot{p}^t_{G_i} \dot{R} r d\mathscr{V}_i = \left(\dot{p}^t_{G_i} \dot{R} \right) \int_{\mathscr{V}_i} \rho r d\mathscr{V}_i$$

est nul, car $\int_{\mathscr{V}_i} \rho r d\mathscr{V}_i = \int_{\mathscr{V}_i} \rho p d\mathscr{V}_i - \int_{\mathscr{V}_i} \rho p_{G_i} d\mathscr{V}_i = m_i p_{G_i} - m_i p_{G_i} = 0$ (à partir de la définition du centre de masse).

Théorème de *Konig*

- Le terme $E^3_{c_i}$ est l'*énergie cinétique de rotation* et vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\|\dot{R}r\right\|^2 d\mathscr{V}_i &= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left(\dot{R}r\right)^t \left(\dot{R}r\right) d\mathscr{V}_i \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left(R\widehat{\omega}r\right)^t \left(R\widehat{\omega}r\right) d\mathscr{V}_i \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left(\widehat{r}\omega\right)^t \left(R^t R\right) \left(\widehat{r}\omega\right) d\mathscr{V}_i \\
&= \frac{1}{2}\omega^t \left(\int_{\mathscr{V}_i} \rho \widehat{r}^t \widehat{r} d\mathscr{V}_i\right) \omega \\
&:= \frac{1}{2}\omega^t I_i \omega
\end{aligned}$$

où $\omega \in \mathbb{R}^3$ est la vitesse angulaire du corps $\mathscr{C}_i$.

Théorème de *Konig*

- Le terme $E^3_{c_i}$ est l'*énergie cinétique de rotation* et vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left\|\dot{R}r\right\|^2 d\mathscr{V}_i &= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left(\dot{R}r\right)^t \left(\dot{R}r\right) d\mathscr{V}_i \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left(R\widehat{\omega}r\right)^t \left(R\widehat{\omega}r\right) d\mathscr{V}_i \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathscr{V}_i} \rho \left(\widehat{r}\omega\right)^t \left(R^t R\right) \left(\widehat{r}\omega\right) d\mathscr{V}_i \\
&= \frac{1}{2}\omega^t \left(\int_{\mathscr{V}_i} \rho \widehat{r}^t \widehat{r} d\mathscr{V}_i\right) \omega \\
&:= \frac{1}{2}\omega^t I_i \omega
\end{aligned}$$

où $\omega \in \mathbb{R}^3$ est la vitesse angulaire du corps $\mathscr{C}_i$.
Notons que, conformément aux propriétés vues dans le chapitre "transformation", le changement de $\dot{R}$ par la quantité $R\widehat{\omega}$ ci-dessus implique que le vecteur vitesse angulaire du corps ω est exprimé dans le repère lié au corps (et non dans le repère inertiel de référence).

Tenseur d'inertie

Barre rectangulaire de matériau homogène (densité volumique $\rho = \frac{m_i}{abc}$) :

Tenseur d'inertie

Barre rectangulaire de matériau homogène (densité volumique $\rho = \frac{m_i}{abc}$) :

- $I_{xx} = \rho \int_{\mathscr{V}_i} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{12} \left(b^2 + c^2\right)$;

Tenseur d'inertie

Barre rectangulaire de matériau homogène (densité volumique $\rho = \frac{m_i}{abc}$) :

- $I_{xx} = \rho \int_{\mathscr{V}_i} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{12} \left(b^2 + c^2\right)$;
- $I_{xy} = -\rho \int_{\mathscr{V}_i} (xy)\, dxdydz = -\frac{m_i}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (xy)\, dxdydz = 0$;

Tenseur d'inertie

Barre rectangulaire de matériau homogène (densité volumique $\rho = \frac{m_i}{abc}$) :

- $I_{xx} = \rho \int_{\mathscr{V}_i} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{12} \left(b^2 + c^2\right)$;
- $I_{xy} = -\rho \int_{\mathscr{V}_i} (xy)\, dxdydz = -\frac{m_i}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (xy)\, dxdydz = 0$;
- Les autres composantes sont calculées de la même manière et on obtient :

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i}{12}\left(b^2 + c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{12}\left(a^2 + c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i}{12}\left(a^2 + b^2\right) \end{bmatrix}$$

Tenseur d'inertie

Barre rectangulaire de matériau homogène (densité volumique $\rho = \frac{m_i}{abc}$) :

- $I_{xx} = \rho \int_{\mathscr{V}_i} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(y^2 + z^2\right) dxdydz = \frac{m_i}{12} \left(b^2 + c^2\right)$;
- $I_{xy} = -\rho \int_{\mathscr{V}_i} (xy)\, dxdydz = -\frac{m_i}{abc} \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-a/2}^{a/2} (xy)\, dxdydz = 0$;
- Les autres composantes sont calculées de la même manière et on obtient :

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{m_i}{12}\left(b^2 + c^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{12}\left(a^2 + c^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_i}{12}\left(a^2 + b^2\right) \end{bmatrix}$$

Notons que les produits d'inerties sont nuls lorsque les axes principaux du corps coïncident avec les axes centraux d'inertie. Ainsi, la matrice correspondant au tenseur d'inertie est diagonale dans ce cas.

Cours

Étude d'un axe robotique en rotation

- Hypothèses :
  1. Centre de masse du rotor situé sur son axe de rotation ;
  2. Effets gyroscopiques du rotor négligés (seul le moment d'inertie de la rotation propre est considéré) ;

Étude d'un axe robotique en rotation

- Hypothèses :
  1. Centre de masse du rotor situé sur son axe de rotation ;
  2. Effets gyroscopiques du rotor négligés (seul le moment d'inertie de la rotation propre est considéré) ;
- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_i$ entraîné et de l'actionneur entraînant :

$$\begin{aligned} E_c &= E_{c_i} + E_{c_{m_i}} \\ &= \left(\frac{1}{2} m_i V_{G_i}^2 + \frac{1}{2} I_{G_i} \dot{q}_i^2\right) + \left(\frac{1}{2} r_{red_i}^2 J_{m_i} \dot{\theta}_i^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} m_i V_{G_i}^2 + \frac{1}{2} I_{G_i} \dot{q}_i^2\right) + \left(\frac{1}{2} r_{red_i}^2 J_{m_i} \dot{q}_i^2\right) \end{aligned}$$

où la vitesse du centre de masse V_{G_i} vaut $V_{G_i} = d_i \dot{q}$.

Étude d'un axe robotique en rotation

- Hypothèses :
  1. Centre de masse du rotor situé sur son axe de rotation ;
  2. Effets gyroscopiques du rotor négligés (seul le moment d'inertie de la rotation propre est considéré) ;
- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_i$ entraîné et de l'actionneur entraînant :

$$\begin{aligned} E_c &= E_{c_i} + E_{c_{m_i}} \\ &= \left(\frac{1}{2} m_i V_{G_i}^2 + \frac{1}{2} I_{G_i} \dot{q}_i^2\right) + \left(\frac{1}{2} r_{red_i}^2 J_{m_i} \dot{\theta}_i^2\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} m_i V_{G_i}^2 + \frac{1}{2} I_{G_i} \dot{q}_i^2\right) + \left(\frac{1}{2} r_{red_i}^2 J_{m_i} \dot{q}_i^2\right) \end{aligned}$$

où la vitesse du centre de masse V_{G_i} vaut $V_{G_i} = d_i \dot{q}$.
Ainsi,

$$E_c = \frac{1}{2} \underbrace{\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)}_{I_{eq_i}} \dot{q}_i^2.$$

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^t \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\left(m_i {}^0J_{v_{G_i}}^t(q)\,{}^0J_{v_{G_i}}(q) + {}^0J_{\omega_i}^t(q)\,{}^0I_i\,{}^0J_{\omega_i}(q)\right)}_{A(q)}\dot{q}$$

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^t \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\left(m_i {}^0J^t_{v_{G_i}}(q)\,{}^0J_{v_{G_i}}(q) + {}^0J^t_{\omega_i}(q)\,{}^0I_i\,{}^0J_{\omega_i}(q)\right)}_{A(q)}\dot{q}$$

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_1$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{1_{Tran.}} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}^t\,{}^0J^t_{v_{G_1}}(q)\,{}^0J_{v_{G_1}}(q)\,\dot{q}$

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^t \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\left(m_i {}^0J^t_{v_{G_i}}(q)\,{}^0J_{v_{G_i}}(q) + {}^0J^t_{\omega_i}(q)\,{}^0I_i\,{}^0J_{\omega_i}(q)\right)}_{A(q)}\dot{q}$$

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_1$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{1_{Tran.}} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}^t\,{}^0J^t_{v_{G_1}}(q)\,{}^0J_{v_{G_1}}(q)\,\dot{q}$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_1 :

$$^0V_{G_1} = {}^0J_{v_{G_1}}\dot{q}$$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

$$^0J_{v_{G_1}} = \begin{bmatrix} -L_{c_1}S1 & 0 \\ L_{c_1}C1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^t \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\left(m_i {}^0J^t_{v_{G_i}}(q)\,{}^0J_{v_{G_i}}(q) + {}^0J^t_{\omega_i}(q)\,{}^0I_i\,{}^0J_{\omega_i}(q)\right)}_{A(q)}\dot{q}$$

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_1$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{1_{Tran.}} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}^t\,{}^0J^t_{v_{G_1}}(q)\,{}^0J_{v_{G_1}}(q)\,\dot{q}$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_1 :

$$^0V_{G_1} = {}^0J_{v_{G_1}}\dot{q}$$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

$$^0J_{v_{G_1}} = \begin{bmatrix} -L_{c_1}S1 & 0 \\ L_{c_1}C1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Autre méthode (plus systématique) :
Le vecteur $^0V_{G_1}$ peut aussi se déduire de $^0V_{0_1}$ (vitesse du point origine du repère donné par la matrice jacobienne $^0J_1$) à partir de la formule de *Varignon*.

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^t \underbrace{\sum_{i=1}^{2}\left(m_i {}^0J_{v_{G_i}}^t(q)\,{}^0J_{v_{G_i}}(q) + {}^0J_{\omega_i}^t(q)\,{}^0I_i\,{}^0J_{\omega_i}(q)\right)}_{A(q)}\dot{q}$$

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_1$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{1_{Tran.}} = \frac{1}{2}m_1\dot{q}^t\,{}^0J_{v_{G_1}}^t(q)\,{}^0J_{v_{G_1}}(q)\,\dot{q}$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_1 :

      $${}^0V_{G_1} = {}^0J_{v_{G_1}}\dot{q}$$

      où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

      $${}^0J_{v_{G_1}} = \begin{bmatrix} -L_{c_1}S1 & 0 \\ L_{c_1}C1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

      Autre méthode (plus systématique) :
      Le vecteur ${}^0V_{G_1}$ peut aussi se déduire de ${}^0V_{0_1}$ (vitesse du point origine du repère donné par la matrice jacobienne ${}^0J_1$) à partir de la formule de *Varignon*.
    - $E_{1_{Tran.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^t\begin{bmatrix} m_1L_{c_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{q}$

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

- Énergie cinétique rotationnelle $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^0 J_{\omega_1}^t(q)\,{}^0I_1\,{}^0J_{\omega_1}(q)\,\dot{q}^t$

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

- Énergie cinétique rotationnelle $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^0 J_{\omega_1}^t(q)\,{}^0I_1\,{}^0J_{\omega_1}(q)\,\dot{q}^t$
  - Matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation instantanée de $\mathscr{C}_1$:

$$^0\omega_1 = {}^0J_{\omega_1}\dot{q}$$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

$$^0J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

- Énergie cinétique rotationnelle $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^0 J_{\omega_1}^t(q)\,{}^0I_1\,{}^0J_{\omega_1}(q)\,\dot{q}^t$
  - Matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation instantanée de $\mathscr{C}_1$:

$$^0\omega_1 = {}^0J_{\omega_1}\dot{q}$$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

$$^0J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Par ailleurs, le tenseur d'inertie de $\mathscr{C}_1$ exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut

$$^0I_1 = R_{01}I_1R_{01}^t$$

où R_{10} est déduite de la transformation homogène $\overline{g}_{10}$ déjà calculée dans les exemples précédents.

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

- Énergie cinétique rotationnelle $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^0 J^t_{\omega_1}(q)\,{}^0I_1\,{}^0J_{\omega_1}(q)\,\dot{q}^t$
  - Matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation instantanée de $\mathscr{C}_1$:

    $$^0\omega_1 = {}^0J_{\omega_1}\dot{q}$$

    où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

    $$^0J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Par ailleurs, le tenseur d'inertie de $\mathscr{C}_1$ exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut

    $$^0I_1 = R_{01}I_1R^t_{01}$$

    où R_{10} est déduite de la transformation homogène $\overline{g}_{10}$ déjà calculée dans les exemples précédents.
  - $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}$ avec I_{zz_1} le moment d'inertie de $\mathscr{C}_1$ en son centre de masse par rapport à l'axe z_0.

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

- Énergie cinétique rotationnelle $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^0 J^t_{\omega_1}(q)\,{}^0I_1\,{}^0J_{\omega_1}(q)\,\dot{q}^t$
  - Matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation instantanée de $\mathscr{C}_1$:

    $$^0\omega_1 = {}^0J_{\omega_1}\dot{q}$$

    où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

    $$^0J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Par ailleurs, le tenseur d'inertie de $\mathscr{C}_1$ exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut

    $$^0I_1 = R_{01}I_1R^t_{01}$$

    où R_{10} est déduite de la transformation homogène $\overline{g}_{10}$ déjà calculée dans les exemples précédents.
  - $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}$ avec I_{zz_1} le moment d'inertie de $\mathscr{C}_1$ en son centre de masse par rapport à l'axe z_0.
    Dans cet exemple, le vecteur vitesse de rotation ω_1 vaut $\dot{q}_1 z_0 = \dot{q}_1 z_1$ et donc le moment d'inertie I_{zz_1} est inchangé par la rotation R_{10}.

Étude du robot plan 2 axes

Énergie cinétique du robot :

- Énergie cinétique rotationnelle $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^0 J^t_{\omega_1}(q)\,{}^0I_1\,{}^0J_{\omega_1}(q)\,\dot{q}^t$
  - Matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation instantanée de $\mathscr{C}_1$:

    $$^0\omega_1 = {}^0J_{\omega_1}\dot{q}$$

    où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_1} dans le repère $\mathscr{R}_0$ est déduite aisément à partir de l'exemple n°12 selon :

    $$^0J_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Par ailleurs, le tenseur d'inertie de $\mathscr{C}_1$ exprimé dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut

    $$^0I_1 = R_{01}I_1R^t_{01}$$

    où R_{10} est déduite de la transformation homogène $\overline{g}_{10}$ déjà calculée dans les exemples précédents.
  - $E_{1_{Rot.}} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} I_{zz_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{q}$ avec I_{zz_1} le moment d'inertie de $\mathscr{C}_1$ en son centre de masse par rapport à l'axe z_0.
    Dans cet exemple, le vecteur vitesse de rotation ω_1 vaut $\dot{q}_1 z_0 = \dot{q}_1 z_1$ et donc le moment d'inertie I_{zz_1} est inchangé par la rotation R_{10}.
- Finalement l'énergie cinétique de $\mathscr{C}_1$ vaut :

$$E_{c_1} = \frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} m_1L^2_{c_1} + I_{zz_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{q}$$

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_2$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^0 J^t_{v_{G_2}}(q)\, {}^0J_{v_{G_2}}(q)\, \dot{q}^t$

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_2$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^0 J^t_{v_{G_2}}(q)\, {}^0J_{v_{G_2}}(q)\, \dot{q}^t$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_2 :

$$ {}^0V_{G_2} = {}^0J_{v_{G_2}}\, \dot{q} $$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_2} dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut :

$$ {}^0J_{v_{G_2}} = \begin{bmatrix} -L_1 S1 - L_{c_2} S12 & -L_{c_2} S12 \\ L_1 C1 + L_{c_2} C12 & L_{c_2} C12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_2$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^0 J^t_{v_{G_2}}(q)\, {}^0J_{v_{G_2}}(q)\, \dot{q}^t$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_2 :

$$ {}^0V_{G_2} = {}^0J_{v_{G_2}}\, \dot{q} $$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_2} dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut :

$$ {}^0J_{v_{G_2}} = \begin{bmatrix} -L_1 S1 - L_{c_2} S12 & -L_{c_2} S12 \\ L_1 C1 + L_{c_2} C12 & L_{c_2} C12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

- $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^t \begin{bmatrix} m_2 \left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) \\ m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 L_{c_2}^2 \end{bmatrix} \dot{q}$

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_2$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^0 J^t_{v_{G_2}}(q)\, {}^0J_{v_{G_2}}(q)\, \dot{q}^t$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_2 :

$$ {}^0V_{G_2} = {}^0J_{v_{G_2}}\, \dot{q} $$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_2} dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut :

$$ {}^0J_{v_{G_2}} = \begin{bmatrix} -L_1 S1 - L_{c_2} S12 & -L_{c_2} S12 \\ L_1 C1 + L_{c_2} C12 & L_{c_2} C12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

    - $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^t \begin{bmatrix} m_2 \left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) \\ m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 L_{c_2}^2 \end{bmatrix} \dot{q}$
  - Énergie cinétique rotationnelle $E_{2_{Rot.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^0 J^t_{\omega_2}(q)\, {}^0I_2\, {}^0J_{\omega_2}(q)\, \dot{q}^t$

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_2$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^0 J^t_{v_{G_2}}(q)\, {}^0J_{v_{G_2}}(q)\, \dot{q}^t$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_2 :

$$ {}^0V_{G_2} = {}^0J_{v_{G_2}} \dot{q} $$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_2} dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut :

$$ {}^0J_{v_{G_2}} = \begin{bmatrix} -L_1 S1 - L_{c_2} S12 & -L_{c_2} S12 \\ L_1 C1 + L_{c_2} C12 & L_{c_2} C12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

    - $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^t \begin{bmatrix} m_2 \left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) \\ m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 L_{c_2}^2 \end{bmatrix} \dot{q}$
  - Énergie cinétique rotationnelle $E_{2_{Rot.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^0 J^t_{\omega_2}(q)\, {}^0I_2\, {}^0J_{\omega_2}(q)\, \dot{q}^t$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation instantanée de $\mathscr{C}_2$:

$$ {}^0J_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} $$

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique du corps $\mathscr{C}_2$:
  - Énergie cinétique translationnelle $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} m_2 \dot{q}^0 J^t_{v_{G_2}}(q)\, {}^0J_{v_{G_2}}(q)\, \dot{q}^t$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse du centre de masse G_2 :

$$ {}^0V_{G_2} = {}^0J_{v_{G_2}} \dot{q} $$

où la matrice jacobienne exprimant la vitesse de translation du centre de masse V_{G_2} dans le repère $\mathscr{R}_0$ vaut :

$$ {}^0J_{v_{G_2}} = \begin{bmatrix} -L_1 S1 - L_{c_2} S12 & -L_{c_2} S12 \\ L_1 C1 + L_{c_2} C12 & L_{c_2} C12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

    - $E_{2_{Tran.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^t \begin{bmatrix} m_2 \left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) \\ m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\,(q_2)\right) & m_2 L_{c_2}^2 \end{bmatrix} \dot{q}$
  - Énergie cinétique rotationnelle $E_{2_{Rot.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^0 J^t_{\omega_2}(q)\, {}^0I_2\, {}^0J_{\omega_2}(q)\, \dot{q}^t$
    - Matrice jacobienne exprimant la vitesse de rotation instantanée de $\mathscr{C}_2$:

$$ {}^0J_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} $$

    - $E_{2_{Rot.}} = \frac{1}{2} \dot{q}^t \begin{bmatrix} I_{zz_2} & I_{zz_2} \\ I_{zz_2} & I_{zz_2} \end{bmatrix} \dot{q}$ avec I_{zz_2} le moment d'inertie de $\mathscr{C}_2$ en son centre de masse par rapport à l'axe z_0 (ici, le vecteur ω_2 vaut $\dot{q}_2 z_0 = \dot{q}_2 z_2$).

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique de la chaine polyarticulée :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} m_1 L_{c_1}^2 + m_2\left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} & m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} \\ m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} & m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2} \end{bmatrix} \dot{q}$$

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique de la chaine polyarticulée :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} m_1 L_{c_1}^2 + m_2\left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} & m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} \\ m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} & m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2} \end{bmatrix} \dot{q}$$

- Énergie cinétique totale du robot en ajoutant l'influence des inerties des actionneurs :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} r_{red_1}^2 J_{m_1} & 0 \\ 0 & r_{red_2}^2 J_{m_2} \end{bmatrix} \dot{q}$$

à l'énergie cinétique de la chaine polyarticulée.

Étude du robot plan 2 axes

- Énergie cinétique de la chaine polyarticulée :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} m_1 L_{c_1}^2 + m_2\left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} & m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} \\ m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} & m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2} \end{bmatrix} \dot{q}$$

- Énergie cinétique totale du robot en ajoutant l'influence des inerties des actionneurs :

$$\frac{1}{2}\dot{q}^t \begin{bmatrix} r_{red_1}^2 J_{m_1} & 0 \\ 0 & r_{red_2}^2 J_{m_2} \end{bmatrix} \dot{q}$$

à l'énergie cinétique de la chaine polyarticulée.
Finalement,

$$E_c = \frac{1}{2}\dot{q}^t A\left(q\right)\dot{q}$$

où la matrice d'inertie du robot vaut :

$A\left(q\right) =$

$$\begin{bmatrix} r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2\left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} & m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} \\ m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos\left(q_2\right)\right) + I_{zz_2} & r_{red_2}^2 J_{m_2} + m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2} \end{bmatrix}$$

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur d'un axe robotique en rotation :

$$E_{p_i}(q) = -m_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} {}^0p_{G_i}(q)$$

avec

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur d'un axe robotique en rotation :

$$E_{p_i}(q) = -m_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} {}^0p_{G_i}(q)$$

avec

- ${}^0p_{G_i}(q)$ la position du centre de masse de $\mathscr{C}_i$ par rapport à $\mathscr{R}_0$:

$${}^0p_{G_i}(q_i) = {}^0O_0G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ d_i(1 - cos(q_i)) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur d'un axe robotique en rotation :

$$E_{p_i}(q) = -m_i \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} {}^0p_{G_i}(q)$$

avec

- ${}^0p_{G_i}(q)$ la position du centre de masse de $\mathscr{C}_i$ par rapport à $\mathscr{R}_0$:

$${}^0p_{G_i}(q_i) = {}^0O_0G_i = \begin{bmatrix} 0 \\ d_i(1 - cos(q_i)) \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

- Expression finale de $E_{p_i}(q)$:

$$E_{p_i}(q) = m_i g d_i (1 - cos(q_i))$$

Cours

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur du robot planaire 2 axes :

$$E_p(q) = \sum_{i=1}^{2} E_{p_i}(q) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{2} m_i {}^0p_{G_i}(q) \right).$$

avec

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur du robot planaire 2 axes :

$$E_p(q) = \sum_{i=1}^{2} E_{p_i}(q) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{2} m_i {}^0p_{G_i}(q) \right).$$

avec

- ${}^0p_{G_i}(q)$ la position du centre de masse de $\mathscr{C}_i$ par rapport à $\mathscr{R}_0$, d'où :

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur du robot planaire 2 axes :

$$E_p(q) = \sum_{i=1}^{2} E_{p_i}(q) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{2} m_i {}^0p_{G_i}(q) \right).$$

avec

- ${}^0p_{G_i}(q)$ la position du centre de masse de $\mathscr{C}_i$ par rapport à $\mathscr{R}_0$, d'où :

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{G_1}(q) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0O_0G_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{g}_{01}} \begin{bmatrix} L_{c_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_1} = \begin{bmatrix} L_{c_1}C1 \\ L_{c_1}S1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur du robot planaire 2 axes :

$$E_p(q) = \sum_{i=1}^{2} E_{p_i}(q) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{2} m_i {}^0p_{G_i}(q) \right).$$

avec

- ${}^0p_{G_i}(q)$ la position du centre de masse de $\mathscr{C}_i$ par rapport à $\mathscr{R}_0$, d'où :

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{G_1}(q) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0O_0G_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{g}_{01}} \begin{bmatrix} L_{c_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_1} = \begin{bmatrix} L_{c_1}C1 \\ L_{c_1}S1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

et

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{G_2}(q) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0O_0G_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C12 & -S12 & 0 & L_1C1 \\ S12 & C12 & 0 & L_1S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{g}_{02}} \begin{bmatrix} L_{c_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_2} = \begin{bmatrix} L_{c_2}C12 + L_1C1 \\ L_{c_2}S12 + L_1S1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

Énergie potentielle d'une chaîne poly-articulée

Énergie potentielle de pesanteur du robot planaire 2 axes :

$$E_p(q) = \sum_{i=1}^{2} E_{p_i}(q) = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^{2} m_i {}^0p_{G_i}(q) \right).$$

avec

- ${}^0p_{G_i}(q)$ la position du centre de masse de $\mathscr{C}_i$ par rapport à $\mathscr{R}_0$, d'où :

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{G_1}(q) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0O_0G_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{g}_{01}} \begin{bmatrix} L_{c_1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_1} = \begin{bmatrix} L_{c_1}C1 \\ L_{c_1}S1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

et

$$\begin{bmatrix} {}^0p_{G_2}(q) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0O_0G_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C12 & -S12 & 0 & L_1C1 \\ S12 & C12 & 0 & L_1S1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{g}_{02}} \begin{bmatrix} L_{c_2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_2} = \begin{bmatrix} L_{c_2}C12 + L_1C1 \\ L_{c_2}S12 + L_1S1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathscr{R}_0}$$

- Expression finale de $E_p(q)$:

$$E_p(q) = m_1 g L_{c_1} sin(q_1) + m_2 g \left(L_1 sin(q_1) + L_{c_2} sin(q_1 + q_2) \right)$$

Dynamique du mouvement

Équation de *Lagrange* :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = \tau_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

Dynamique du mouvement

Équation de *Lagrange* :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = \tau_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

où le lagrangien du système $\mathscr{L}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= E_c\left(q, \dot{q}\right) - E_p\left(q\right) \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^t A\left(q\right)\dot{q} + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i^0 p_{G_i}\left(q\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(q\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i^0 p_{G_i}\left(q\right)\right)
\end{aligned}$$

Dynamique du mouvement

Équation de *Lagrange* :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = \tau_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

où le lagrangien du système $\mathscr{L}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= E_c\left(q, \dot{q}\right) - E_p\left(q\right) \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^t A\left(q\right)\dot{q} + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i^0 p_{G_i}\left(q\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\left(q\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i^0 p_{G_i}\left(q\right)\right)
\end{aligned}$$

Calcul des dérivées partielles de $\mathscr{L}$:

Dynamique du mouvement

Équation de *Lagrange* :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = \tau_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

où le lagrangien du système $\mathscr{L}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= E_c(q, \dot{q}) - E_p(q) \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i^0 p_{G_i}(q)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i^0 p_{G_i}(q)\right)
\end{aligned}$$

Calcul des dérivées partielles de $\mathscr{L}$:

- $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\dot{q}_j$, d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) &= \sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{da_{kj}(q)}{dt}\dot{q}_j \\
&= \sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j
\end{aligned}$$

Dynamique du mouvement

Équation de *Lagrange* :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = \tau_k \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n$$

où le lagrangien du système $\mathscr{L}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathscr{L} &= E_c(q, \dot{q}) - E_p(q) \\
&= \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i{}^0 p_{G_i}(q)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g^t\left(\sum_{i=1}^{N} m_i{}^0 p_{G_i}(q)\right)
\end{aligned}$$

Calcul des dérivées partielles de $\mathscr{L}$:

- $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\dot{q}_j$, d'où on déduit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) &= \sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{N}\frac{da_{kj}(q)}{dt}\dot{q}_j \\
&= \sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j
\end{aligned}$$

- $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial E_c - E_p}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial E_p}{\partial q_k}$.

Dynamique du mouvement

Les équations de *Lagrange* prennent la forme suivante, pour $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\,\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k} = \tau_k$$

Dynamique du mouvement

Les équations de *Lagrange* prennent la forme suivante, pour $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\,\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k} = \tau_k$$

En posant g_k le terme dérivant de l'énergie potentielle de gravité :

$$g_k(q) = \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k}$$

Dynamique du mouvement

Les équations de *Lagrange* prennent la forme suivante, pour $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\,\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k} = \tau_k$$

En posant g_k le terme dérivant de l'énergie potentielle de gravité :

$$g_k(q) = \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k}$$

et h_{kji} la quantité :

$$h_{kji}(q) = \frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}$$

Dynamique du mouvement

Les équations de *Lagrange* prennent la forme suivante, pour $k = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\,\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k} = \tau_k$$

En posant g_k le terme dérivant de l'énergie potentielle de gravité :

$$g_k(q) = \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_k}$$

et h_{kji} la quantité :

$$h_{kji}(q) = \frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}$$

il vient :

$$\sum_{j=1}^{N} a_{kj}(q)\,\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{kji}(q)\,\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \tau_k$$

Dynamique du mouvement

Le produit

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{kji}\left(q\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}\left(q\right)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

est un vecteur de taille $(N \times 1)$ dont les éléments sont des fonctions quadratiques des vitesses articulaires.

Dynamique du mouvement

Le produit

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{kji}\left(q\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}\left(q\right)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

est un vecteur de taille $(N \times 1)$ dont les éléments sont des fonctions quadratiques des vitesses articulaires.
En échangeant les indices (i, j) et en exploitant la symétrie, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}\left(q\right)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}\left(q\right)}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}\left(q\right)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j\end{aligned}$$

où $c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)$ sont les symboles de *Christoffel*.

Dynamique du mouvement

Le produit

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{kji}\left(q\right)\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}\left(q\right)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

est un vecteur de taille $(N \times 1)$ dont les éléments sont des fonctions quadratiques des vitesses articulaires.
En échangeant les indices (i, j) et en exploitant la symétrie, il vient :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial a_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}\left(q\right)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}\left(q\right)}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}\left(q\right)}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}\left(q\right)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j\end{aligned}$$

où $c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}(q)}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)$ sont les symboles de *Christoffel*.
Puisque la matrice $A\left(q\right)$ est symétrique, il vient, pour k donné : $c_{ijk} = c_{jik}$.

Cours

Dynamique du mouvement d'un axe en rotation

Fonction du lagrangien :

Dynamique du mouvement d'un axe en rotation

Fonction du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(q,\dot{q}) &= E_{c_i}(q,\dot{q}) - E_{p_i}(q)\\ &= \frac{1}{2}\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i^2 - m_i g d_i\left(1 - cos\left(q_i\right)\right)\end{aligned}$$

Dynamique du mouvement d'un axe en rotation

Fonction du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(q,\dot{q}) &= E_{c_i}(q,\dot{q}) - E_{p_i}(q)\\ &= \frac{1}{2}\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i^2 - m_i g d_i\left(1 - cos\left(q_i\right)\right)\end{aligned}$$

à partir duquel :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\ddot{q}_i,$$

Dynamique du mouvement d'un axe en rotation

Fonction du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(q,\dot{q}) &= E_{c_i}(q,\dot{q}) - E_{p_i}(q)\\ &= \frac{1}{2}\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i^2 - m_i g d_i\left(1 - cos\left(q_i\right)\right)\end{aligned}$$

à partir duquel :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\ddot{q}_i,$$

et

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = -m_i g d_i sin\left(q_i\right).$$

Dynamique du mouvement d'un axe en rotation

Fonction du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(q,\dot{q}) &= E_{c_i}(q,\dot{q}) - E_{p_i}(q)\\ &= \frac{1}{2}\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i^2 - m_i g d_i\left(1 - cos\left(q_i\right)\right)\end{aligned}$$

à partir duquel :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\ddot{q}_i,$$

et

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = -m_i g d_i sin\left(q_i\right).$$

Efforts généralisés prenant en compte le couple appliqué à l'articulation et les effets de frottement :

$$\psi_i = \tau_i - \tau_{f_i}.$$

Dynamique du mouvement d'un axe en rotation

Fonction du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(q,\dot{q}) &= E_{c_i}(q,\dot{q}) - E_{p_i}(q)\\ &= \frac{1}{2}\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i^2 - m_i g d_i\left(1 - cos\left(q_i\right)\right)\end{aligned}$$

à partir duquel :

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\dot{q}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}} = \left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\ddot{q}_i,$$

et

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q} = -m_i g d_i sin\left(q_i\right).$$

Efforts généralisés prenant en compte le couple appliqué à l'articulation et les effets de frottement :

$$\psi_i = \tau_i - \tau_{f_i}.$$

Équation différentielle du 2nd ordre pour décrire le mouvement :

$$\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)\ddot{q}_i + f_{\dot{q}_0}\dot{q}_i + m_i g d_i sin\left(q_i\right) = \tau_i,$$

en choisissant un frottement visqueux articulaire du type $\tau_{f_i} = f_{\dot{q}_0}\dot{q}_i$ où $f_{\dot{q}_0} > 0$.

Cours

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Fonction du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(q,\dot{q}) &= \sum_{i=1}^{2}\left(E_{c_i}(q,\dot{q}) - E_{p_i}(q)\right)\\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\,\dot{q} - \left(m_1 g L_{c_1} sin(q_1) + m_2 g\left(L_1 sin(q_1) + L_{c_2} sin(q_1+q_2)\right)\right)\end{aligned}$$

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Fonction du lagrangien :

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(q,\dot{q}) &= \sum_{i=1}^{2}\left(E_{c_i}(q,\dot{q}) - E_{p_i}(q)\right)\\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\,\dot{q} - \left(m_1 g L_{c_1} sin(q_1) + m_2 g\left(L_1 sin(q_1) + L_{c_2} sin(q_1+q_2)\right)\right)\end{aligned}$$

où la matrice d'inertie $A(q)$ déjà calculée vaut :

$$A(q) = \begin{bmatrix} a_{11}(q) & a_{12}(q) \\ (sym.) & a_{22}(q) \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}a_{11}(q) &= r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2\left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos(q_2)\right) + I_{zz_1} + I_{zz_2}\\ a_{12}(q) &= m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos(q_2)\right) + I_{zz_2}\\ a_{22}(q) &= r_{red_2}^2 J_{m_2} + m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2}\end{aligned}$$

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Calcul des symboles de *Christoffel* : $c_{ijk}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)$

$$c_{111}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial a_{11}}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{121}(q) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial q_1} + \frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} - \frac{\partial a_{12}}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} = -m_2 L_1 L_{c_2} sin(q_2) = h$$

$$c_{211}(q) = c_{121}(q) = h \text{ (par symétrie sur } c_{ijk})$$

$$c_{221}(q) = \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} = \frac{\partial a_{12}}{\partial q_2} = h$$

$$c_{112}(q) = \frac{\partial a_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2} = -h$$

$$c_{122}(q) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial q_1} = 0$$

$$c_{212}(q) = c_{122}(q) = 0 \text{ (par symétrie sur } c_{ijk})$$

$$c_{222}(q) = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{22}}{\partial q_2} = 0$$

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Matrice $C(q, \dot{q})$ donnée par :

$$[C(q, \dot{q})]_{k,j} = \sum_{i=1}^{N} c_{ijk}(q)\, \dot{q}_i$$

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Matrice $C(q, \dot{q})$ donnée par :

$$[C(q, \dot{q})]_{k,j} = \sum_{i=1}^{N} c_{ijk}(q)\, \dot{q}_i$$

soit

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Matrice $C(q, \dot{q})$ donnée par :

$$[C(q, \dot{q})]_{k,j} = \sum_{i=1}^{N} c_{ijk}(q)\, \dot{q}_i$$

soit

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur des forces dérivant du potentiel de gravité :

$$\begin{aligned} G(q) &= \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_1} \\ \frac{\partial E_p(q)}{\partial q_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (m_1 L_{c_1} + m_2 L_1)\, g cos(q_1) + m_2 L_{c_2} g cos(q_1 + q_2) \\ m_2 L_{c_2} g cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Forme développée de $A(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) = \Gamma$:

Dynamique du mouvement du robot plan 2 axes

Forme développée de $A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \Gamma$:

$$a_{11}(q)\ddot{q}_1 + a_{12}(q)\ddot{q}_2 + c_{121}(q)\dot{q}_1\dot{q}_2 + c_{211}(q)\dot{q}_2\dot{q}_1 + c_{221}(q)\dot{q}_2^2 + g_1(q) = \tau_1$$
$$a_{21}(q)\ddot{q}_1 + a_{22}(q)\ddot{q}_2 + c_{112}(q)\dot{q}_1^2 + g_2(q) = \tau_2$$

soit

$$\begin{aligned}
&\left(r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2\left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} cos(q_2)\right) + I_{zz_1} + I_{zz_2}\right)\ddot{q}_1 \\
&\qquad + \left(m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos(q_2)\right) + I_{zz_2}\right)\ddot{q}_2 \\
&\qquad - m_2 L_1 L_{c_2} sin(q_2)\dot{q}_1^2 - 2m_2 L_1 L_{c_2} sin(q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\
&\qquad + (m_1 L_{c_1} + m_2 L_1) g cos(q_1) + m_2 L_{c_2} g cos(q_1 + q_2) = \tau_1 \\
&\left(m_2\left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} cos(q_2)\right) + I_{zz_2}\right)\ddot{q}_1 + \left(r_{red_2}^2 J_{m_2} + m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2}\right)\ddot{q}_2 \\
&\qquad + m_2 L_1 L_{c_2} sin(q_2)\dot{q}_1^2 \\
&\qquad + m_2 L_{c_2} g cos(q_1 + q_2) = \tau_2
\end{aligned}$$

Cours

Propriétés de $C(q, \dot{q})\,\dot{q}$

Antisymétrie de $\left(\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q})\right)$ de terme générique (n_{kj}), où $C(q, \dot{q})$ définie à partir des symboles de *Christoffel*

Propriétés de $C(q,\dot{q})\,\dot{q}$

Antisymétrie de $\left(\dot{A}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)$ de terme générique (n_{kj}), où $C(q,\dot{q})$ définie à partir des symboles de *Christoffel*

$$\begin{aligned}
n_{kj} =& \dot{a}_{kj} - 2\,[C]_{kj} \\
=& \sum_i \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_i \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i \\
=& \sum_i \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)\right)\dot{q}_i \\
=& \sum_i \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i
\end{aligned}$$

Propriétés de $C(q,\dot{q})\,\dot{q}$

Antisymétrie de $\left(\dot{A}(q) - 2C(q,\dot{q})\right)$ de terme générique (n_{kj}), où $C(q,\dot{q})$ définie à partir des symboles de *Christoffel*

$$\begin{aligned}
n_{kj} =& \dot{a}_{kj} - 2\,[C]_{kj} \\
=& \sum_i \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i - \sum_i \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i \\
=& \sum_i \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k}\right)\right)\dot{q}_i \\
=& \sum_i \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
n_{jk} =& \dot{a}_{jk} - 2\,[C]_{jk} \\
=& \ldots \\
=& \sum_i \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_i \\
=& -\sum_i \left(\frac{\partial a_{ji}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i \\
=& -\sum_i \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i \qquad (A(q) \text{ sym., i.e. } a_{ji} = a_{ij} \text{ et } a_{ki} = a_{ik})
\end{aligned}$$

Propriétés de $C(q, \dot{q})\,\dot{q}$

Ainsi, $n_{kj} = -n_{jk}$ (antisymétrie prouvée), donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^t \left(\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q})\right) x = 0.$$

Propriétés de $C(q, \dot{q})\,\dot{q}$

Ainsi, $n_{kj} = -n_{jk}$ (antisymétrie prouvée), donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^t \left(\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q})\right) x = 0.$$

En outre, la propriété suivante :

$$q^t \left(\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q})\right) \dot{q} = 0.$$

reste valable, même si la matrice $C(q, \dot{q})$, non-unique, n'est pas définie à partir des symboles de *Christoffel* (la démonstration repose sur le fait qu'en l'absence d'action de commande sur le robot $\Gamma = 0$, la variation de l'énergie totale $\left(\dot{E}_c + \dot{E}_p\right)$ est nulle).

Cours

Propriétés du modèle dynamique

Rappel : définition de la norme $\|\bullet\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $c = (c_1, \ldots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\|c\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \quad \|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

Propriétés du modèle dynamique

Rappel : définition de la norme $\|\bullet\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $c = (c_1, \ldots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\|c\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \quad \|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

Bornes de la matrice d'inertie :

$$\begin{aligned}
\|A(q)\|_1 &= \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,1}(q)|, \sum_{i=1}^{n} |a_{i,2}(q)(q)| \right\} \\
&= \max \left\{ |a_{1,1}(q)| + |a_{2,1}(q)|, |a_{1,2}(q)| + |a_{2,2}(q)| \right\} \\
&= \max \left\{ \left| r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2 \left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2 L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} \right| + \left| m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_2} \right|, \right. \\
&\quad \left. \left| m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_2} \right| + \left| r_{red_2}^2 J_{m_2} + m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2} \right| \right\}
\end{aligned}$$

Propriétés du modèle dynamique

Rappel : définition de la norme $\|\bullet\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $c = (c_1, \ldots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\|c\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \quad \|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

Bornes de la matrice d'inertie :

$$\begin{aligned}
\|A(q)\|_1 &= \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,1}(q)|, \sum_{i=1}^{n} |a_{i,2}(q)(q)| \right\} \\
&= \max \left\{ |a_{1,1}(q)| + |a_{2,1}(q)|, |a_{1,2}(q)| + |a_{2,2}(q)| \right\} \\
&= \max \left\{ \left| r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2 \left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2 L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} \right| + \left| m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_2} \right|, \right. \\
&\quad \left. \left| m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_2} \right| + \left| r_{red_2}^2 J_{m_2} + m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2} \right| \right\}
\end{aligned}$$

En supposant q_1 et q_2 appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$,

$$\alpha_1 \leq \|A(q)\|_1 \leq \alpha_2$$

Propriétés du modèle dynamique

Rappel : définition de la norme $\|\bullet\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$.
Soit $c = (c_1, \ldots, c_n)^t \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

$$\|c\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |c_i| \quad \|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$$

Bornes de la matrice d'inertie :

$$\begin{aligned}
\|A(q)\|_1 &= \max \left\{ \sum_{i=1}^{n} |a_{i,1}(q)|, \sum_{i=1}^{n} |a_{i,2}(q)(q)| \right\} \\
&= \max \left\{ |a_{1,1}(q)| + |a_{2,1}(q)|, |a_{1,2}(q)| + |a_{2,2}(q)| \right\} \\
&= \max \left\{ \left| r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2 \left(L_1^2 + L_{c_2}^2 + 2L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_1} + I_{zz_2} \right| + \left| m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_2} \right|, \right. \\
&\quad \left. \left| m_2 \left(L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} C2 \right) + I_{zz_2} \right| + \left| r_{red_2}^2 J_{m_2} + m_2 L_{c_2}^2 + I_{zz_2} \right| \right\}
\end{aligned}$$

En supposant q_1 et q_2 appartenant à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$,

$$\alpha_1 \leq \|A(q)\|_1 \leq \alpha_2$$

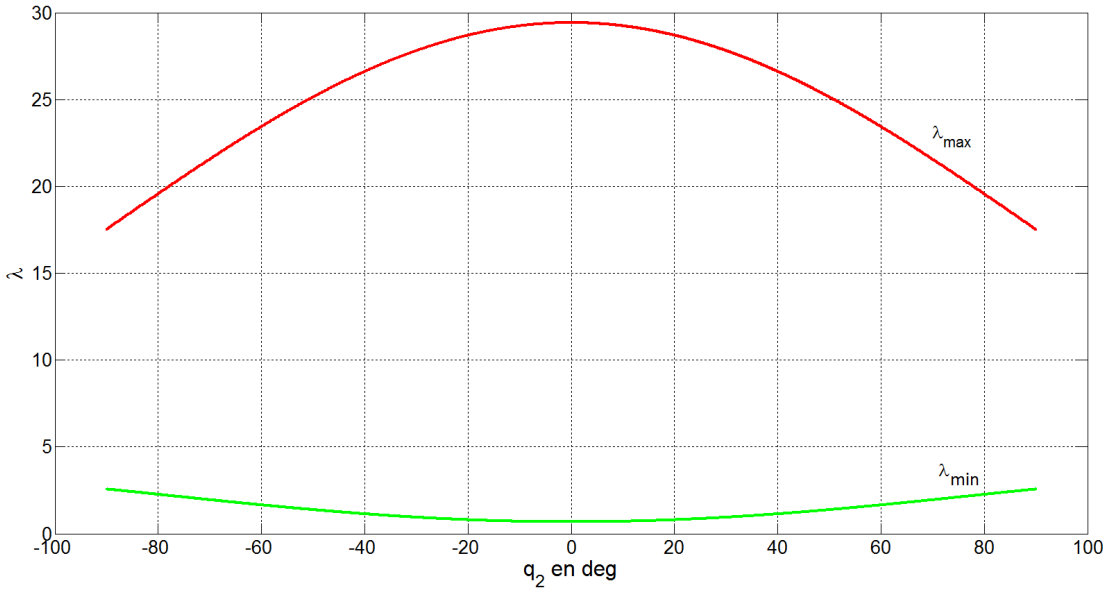
où

$$\alpha_1 = \max \left\{ r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2 \left(L_1^2 + 2L_{c_2}^2 \right) + I_{zz_1} + 2I_{zz_2}, 2m_2 L_{c_2}^2 + 2I_{zz_2} + r_{red_2}^2 J_{m_2} \right\}$$

$$\alpha_2 = \max \left\{ r_{red_1}^2 J_{m_1} + m_1 L_{c_1}^2 + m_2 \left(L_1^2 + 2L_{c_2}^2 + 3L_1 L_{c_2} \right) + I_{zz_1} + 2I_{zz_2}, m_2 \left(2L_{c_2}^2 + L_1 L_{c_2} \right) + 2I_{zz_2} + r_{red_2}^2 J_{m_2} \right\}$$

Propriétés du modèle dynamique

Bornes de la matrice d'inertie :
Les quantités scalaires μ_1 et μ_2 peuvent être définies comme les valeurs propres minimales et maximales $(\lambda_{min}, \lambda_{max})$ de $A(q)$, pour tout q.



$$\lambda_{min} = 0,68$$
$$\lambda_{max} = 29,42$$

Applications numériques :
$m_1 = m_2 = 10\text{kg}$, $L_1 = L_2 = 1\text{m}$, $L_{c_1} = L_{c_2} = 0.5\text{m}$, $I_{zz_1} = I_{zz_2} = 0.87\ kg.m^2$ et $J_{m_1} = J_{m_2} = 0\ kg.m^2$.

Propriétés du modèle dynamique

Borne du vecteur $c(q, \dot{q})$:

$$\begin{aligned}
\|c(q, \dot{q})\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |c_i(q, \dot{q})| \\
&= |c_1(q, \dot{q})| + |c_2(q, \dot{q})| \\
&= \left| h(q) \left(2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) \right| + \left| h(q) \dot{q}_1^2 \right|
\end{aligned}$$

où $h(q) = -m_2 L_1 L_{c_2} sin(q_2)$.

Propriétés du modèle dynamique

Borne du vecteur $c(q, \dot{q})$:

$$\begin{aligned}
\|c(q, \dot{q})\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |c_i(q, \dot{q})| \\
&= |c_1(q, \dot{q})| + |c_2(q, \dot{q})| \\
&= \left| h(q) \left(2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) \right| + \left| h(q) \dot{q}_1^2 \right|
\end{aligned}$$

où $h(q) = -m_2 L_1 L_{c_2} sin(q_2)$.

$$\|c(q, \dot{q})\|_1 \leq m_2 L_1 L_{c_2} \left| 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 \right| \leq m_2 L_1 L_{c_2} \underbrace{\left(|2\dot{q}_1 \dot{q}_2| + \left|\dot{q}_2^2\right| + \left|\dot{q}_1^2\right| \right)}_{(|\dot{q}_1| + |\dot{q}_2|)^2} = \beta \|\dot{q}\|_1^2$$

Propriétés du modèle dynamique

Borne du vecteur $c(q, \dot{q})$:

$$\begin{aligned}
\|c(q, \dot{q})\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |c_i(q, \dot{q})| \\
&= |c_1(q, \dot{q})| + |c_2(q, \dot{q})| \\
&= \left| h(q) \left(2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) \right| + \left| h(q) \dot{q}_1^2 \right|
\end{aligned}$$

où $h(q) = -m_2 L_1 L_{c_2} sin(q_2)$.

$$\|c(q, \dot{q})\|_1 \leq m_2 L_1 L_{c_2} \left| 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 \right| \leq m_2 L_1 L_{c_2} \underbrace{\left(|2\dot{q}_1 \dot{q}_2| + \left|\dot{q}_2^2\right| + \left|\dot{q}_1^2\right| \right)}_{(|\dot{q}_1| + |\dot{q}_2|)^2} = \beta \|\dot{q}\|_1^2$$

Antisymétrie de la matrice $\left(\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q})\right)$:

$$\begin{aligned}
\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q}) &= \begin{bmatrix} 2h\dot{q}_2 & h\dot{q}_2 \\ h\dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} h\dot{q}_2 & h(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ -h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -h\dot{q}_2 - 2h\dot{q}_1 \\ h\dot{q}_2 + 2h\dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Propriétés du modèle dynamique

Borne sur le vecteur de gravité $G(q)$:

$$\begin{aligned}
\|G(q)\|_1 &= \sum_{i=1}^{2} |g_i(q)| \\
&= \left|\left(m_1 L_{c_1} + m_2 L_1\right) g\cos(q_1) + m_2 L_{c_2} g\cos(q_1+q_2)\right| + \left|m_2 L_{c_2} g\cos(q_1+q_2)\right| \\
&\leq \underbrace{\left(m_1 L_{c_1} + m_2 L_1 + 2 m_2 L_{c_2}\right) g}_{g_b}
\end{aligned}$$

Cours

Dynamique de l'organe terminal

Relation entre la force cartésienne et les couples articulaires d'actionnement

$$\Gamma = J(q)^t F$$

Dynamique de l'organe terminal

Relation entre la force cartésienne et les couples articulaires d'actionnement

$$\Gamma = J(q)^t F$$

et les vitesses articulaires et cartésiennes :

$$\dot{X} = J(q)\,\dot{q}$$

Dynamique de l'organe terminal

Relation entre la force cartésienne et les couples articulaires d'actionnement

$$\Gamma = J(q)^t F$$

et les vitesses articulaires et cartésiennes :

$$\dot{X} = J(q)\,\dot{q}$$

Accélération de l'organe terminal $\ddot{X} \in \mathbb{R}^6$ obtenue par dérivation :

$$\ddot{X} = J(q)\,\ddot{q} + \dot{J}(q)\,\dot{q}$$

Dynamique de l'organe terminal

Relation entre la force cartésienne et les couples articulaires d'actionnement

$$\Gamma = J(q)^t F$$

et les vitesses articulaires et cartésiennes :

$$\dot{X} = J(q)\,\dot{q}$$

Accélération de l'organe terminal $\ddot{X} \in \mathbb{R}^6$ obtenue par dérivation :

$$\ddot{X} = J(q)\,\ddot{q} + \dot{J}(q)\,\dot{q}$$

Modèle dynamique directe exprimée dans l'espace articulaire :

$$\ddot{q} = A(q)^{-1}\left(\Gamma - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right) = A(q)^{-1}\left(J(q)^t F - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right)$$

Dynamique de l'organe terminal

Relation entre la force cartésienne et les couples articulaires d'actionnement

$$\Gamma = J(q)^t F$$

et les vitesses articulaires et cartésiennes :

$$\dot{X} = J(q)\,\dot{q}$$

Accélération de l'organe terminal $\ddot{X} \in \mathbb{R}^6$ obtenue par dérivation :

$$\ddot{X} = J(q)\,\ddot{q} + \dot{J}(q)\,\dot{q}$$

Modèle dynamique directe exprimée dans l'espace articulaire :

$$\ddot{q} = A(q)^{-1}\left(\Gamma - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right) = A(q)^{-1}\left(J(q)^t F - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right)$$

Par substitution de $\ddot{q}$ dans l'expression de $\ddot{X}$:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= J(q)\,A(q)^{-1}\left(J(q)^t F - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right) + \dot{J}(q)^t\,\dot{q} \\ &= \left(J(q)\,A(q)^{-1}\,J(q)^t\right)F - J(q)\,A(q)^{-1}\,C(q,\dot{q})\,\dot{q} - J(q)\,A(q)^{-1}\,G(q) + \dot{J}(q)\,\dot{q}\end{aligned}$$

Dynamique de l'organe terminal

Relation entre la force cartésienne et les couples articulaires d'actionnement

$$\Gamma = J(q)^t F$$

et les vitesses articulaires et cartésiennes :

$$\dot{X} = J(q)\,\dot{q}$$

Accélération de l'organe terminal $\ddot{X} \in \mathbb{R}^6$ obtenue par dérivation :

$$\ddot{X} = J(q)\,\ddot{q} + \dot{J}(q)\,\dot{q}$$

Modèle dynamique directe exprimée dans l'espace articulaire :

$$\ddot{q} = A(q)^{-1}\left(\Gamma - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right) = A(q)^{-1}\left(J(q)^t F - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right)$$

Par substitution de $\ddot{q}$ dans l'expression de $\ddot{X}$:

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= J(q)\,A(q)^{-1}\left(J(q)^t F - C(q,\dot{q})\,\dot{q} - G(q)\right) + \dot{J}(q)^t\,\dot{q}\\ &= \left(J(q)\,A(q)^{-1}\,J(q)^t\right)F - J(q)\,A(q)^{-1}\,C(q,\dot{q})\,\dot{q} - J(q)\,A(q)^{-1}\,G(q) + \dot{J}(q)\,\dot{q}\end{aligned}$$

Dans le cas où $J(q)$ est non-singulier et de rang ligne plein, on déduit que :

$$\Lambda(q)\,\ddot{X} + \underbrace{\Lambda(q)\,J(q)\,A(q)^{-1}\,C(q,\dot{q})\,\dot{q} - \Lambda(q)\,\dot{J}(q)\,\dot{q}}_{\mu(q,\dot{q})} + \underbrace{\Lambda(q)\,J(q)\,A(q)^{-1}\,G(q)}_{p(q)} = F$$

où on a posé $\Lambda(q) = \left(J(q)\,A(q)^{-1}\,J(q)^t\right)^{-1}$.

Cours

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Modèle dynamique inverse :

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Modèle dynamique inverse :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + ZZ_2 + 2L_1 MZ_2 cos\left(q_2\right) + m_2 L_1^2 & ZZ_2 + L_1 MZ_2 cos\left(q_2\right) \\ \text{(sym.)} & r_{red_2}^2 J_{m_2} + ZZ_2 \end{bmatrix}}_{A(q)} \ddot{q} + \ldots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 MZ_2 sin\left(q_2\right) \dot{q}_2 & -L_1 MZ_2 sin\left(q_2\right)\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \\ L_1 MZ_2 sin\left(q_2\right) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C(q,\dot{q})} \dot{q} + \ldots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(MZ_1 + m_2 L_1\right) gcos\left(q_1\right) + MZ_2 gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ MZ_2 gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix}}_{G(q)}$$

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Modèle dynamique inverse :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} = \underbrace{\begin{bmatrix} r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + ZZ_2 + 2L_1 MZ_2 cos\left(q_2\right) + m_2 L_1^2 & ZZ_2 + L_1 MZ_2 cos\left(q_2\right) \\ \text{(sym.)} & r_{red_2}^2 J_{m_2} + ZZ_2 \end{bmatrix}}_{A(q)} \ddot{q} + \ldots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 MZ_2 sin\left(q_2\right) \dot{q}_2 & -L_1 MZ_2 sin\left(q_2\right)\left(\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right) \\ L_1 MZ_2 sin\left(q_2\right) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix}}_{C(q,\dot{q})} \dot{q} + \ldots$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(MZ_1 + m_2 L_1\right) gcos\left(q_1\right) + MZ_2 gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ MZ_2 gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix}}_{G(q)}$$

où on a définit les moments d'inertie ZZ_1 et ZZ_2 selon le théorème d'*Huygens* :

- $ZZ_1 = I_{zz_1} + m_1 L_{c_1}^2$;
- $ZZ_2 = I_{zz_2} + m_2 L_{c_2}^2$.

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Factorisation à partir du jeu de paramètres : ZZ_1, ZZ_2, MZ_2, $m_2 L_1^2$, MZ_1, $m_2 L_1$, $r_{red_1}^2 J_{m_1}$ et $r_{red_2}^2 J_{m_2}$

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Factorisation à partir du jeu de paramètres : ZZ_1, ZZ_2, MZ_2, $m_2 L_1^2$, MZ_1, $m_2 L_1$, $r_{red_1}^2 J_{m_1}$ et $r_{red_2}^2 J_{m_2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + m_2 L_1^2\right) + \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} ZZ_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \left(r_{red_2}^2 J_{m_2}\right) + \begin{bmatrix} 2L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 + L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_2 \\ L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} MZ_2}_{A(q)\ddot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 sin\left(q_2\right) \left(2\dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2^2\right) \\ L_1 sin\left(q_2\right) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} MZ_2}_{C(q,\dot{q})\dot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} gcos\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} \left(MZ_1 + m_2 L_1\right) + \begin{bmatrix} gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix} MZ_2}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Factorisation à partir du jeu de paramètres : ZZ_1, ZZ_2, MZ_2, $m_2 L_1^2$, MZ_1, $m_2 L_1$, $r_{red_1}^2 J_{m_1}$ et $r_{red_2}^2 J_{m_2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + m_2 L_1^2\right) + \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} ZZ_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \left(r_{red_2}^2 J_{m_2}\right) + \begin{bmatrix} 2L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 + L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_2 \\ L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} MZ_2}_{A(q)\ddot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 sin\left(q_2\right) \left(2\dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2^2\right) \\ L_1 sin\left(q_2\right) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} MZ_2}_{C(q,\dot{q})\dot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} gcos\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} \left(MZ_1 + m_2 L_1\right) + \begin{bmatrix} gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix} MZ_2}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

En regroupant les termes post-multipliés par MZ_2, il vient :

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Factorisation à partir du jeu de paramètres : ZZ_1, ZZ_2, MZ_2, $m_2 L_1^2$, MZ_1, $m_2 L_1$, $r_{red_1}^2 J_{m_1}$ et $r_{red_2}^2 J_{m_2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + m_2 L_1^2\right) + \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} ZZ_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \left(r_{red_2}^2 J_{m_2}\right) + \begin{bmatrix} 2L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 + L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_2 \\ L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} MZ_2}_{A(q)\ddot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 sin\left(q_2\right)\left(2\dot{q}_2\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2\right) \\ L_1 sin\left(q_2\right) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} MZ_2}_{C(q,\dot{q})\dot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} gcos\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} \left(MZ_1 + m_2 L_1\right) + \begin{bmatrix} gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix} MZ_2}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

En regroupant les termes post-multipliés par MZ_2, il vient :
$\Gamma = W\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right) \chi$ avec

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Factorisation à partir du jeu de paramètres : ZZ_1, ZZ_2, MZ_2, $m_2 L_1^2$, MZ_1, $m_2 L_1$, $r_{red_1}^2 J_{m_1}$ et $r_{red_2}^2 J_{m_2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + m_2 L_1^2\right) + \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} ZZ_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \left(r_{red_2}^2 J_{m_2}\right) + \begin{bmatrix} 2L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 + L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_2 \\ L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} MZ_2}_{A(q)\ddot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 sin\left(q_2\right)\left(2\dot{q}_2\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2\right) \\ L_1 sin\left(q_2\right) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} MZ_2}_{C(q,\dot{q})\dot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} gcos\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} \left(MZ_1 + m_2 L_1\right) + \begin{bmatrix} gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix} MZ_2}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

En regroupant les termes post-multipliés par MZ_2, il vient :
$\Gamma = W\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right) \chi$ avec

$$\chi = \begin{bmatrix} ZZ_1 + m_2 L_1^2 + r_{red_1}^2 J_{m_1} & ZZ2 & MZ2 & MZ_1 + m_2 L_1 & r_{red_2}^2 J_{m_2} \end{bmatrix}^t$$

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Factorisation à partir du jeu de paramètres : ZZ_1, ZZ_2, MZ_2, $m_2 L_1^2$, MZ_1, $m_2 L_1$, $r_{red_1}^2 J_{m_1}$ et $r_{red_2}^2 J_{m_2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + m_2 L_1^2\right) + \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} ZZ_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \left(r_{red_2}^2 J_{m_2}\right) + \begin{bmatrix} 2L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 + L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_2 \\ L_1 cos\left(q_2\right) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} MZ_2}_{A(q)\ddot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 sin\left(q_2\right)\left(2\dot{q}_2\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2\right) \\ L_1 sin\left(q_2\right) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix} MZ_2}_{C(q,\dot{q})\dot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} gcos\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix} \left(MZ_1 + m_2 L_1\right) + \begin{bmatrix} gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix} MZ_2}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

En regroupant les termes post-multipliés par MZ_2, il vient :
$\Gamma = W\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right) \chi$ avec
$\chi = \begin{bmatrix} ZZ_1 + m_2 L_1^2 + r_{red_1}^2 J_{m_1} & ZZ2 & MZ2 & MZ_1 + m_2 L_1 & r_{red_2}^2 J_{m_2} \end{bmatrix}^t$
et

Linéarité du modèle dynamique du robot 2 ddls

Factorisation à partir du jeu de paramètres : ZZ_1, ZZ_2, MZ_2, $m_2L_1^2$, MZ_1, m_2L_1, $r_{red_1}^2 J_{m_1}$ et $r_{red_2}^2 J_{m_2}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\left(r_{red_1}^2 J_{m_1} + ZZ_1 + m_2L_1^2\right) + \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \end{bmatrix} ZZ_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix}\left(r_{red_2}^2 J_{m_2}\right) + \begin{bmatrix} 2L_1 cos\left(q_2\right)\ddot{q}_1 + L_1 cos\left(q_2\right)\ddot{q}_2 \\ L_1 cos\left(q_2\right)\ddot{q}_1 \end{bmatrix} MZ_2}_{A(q)\ddot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 sin\left(q_2\right)\left(2\dot{q}_2\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2\right) \\ L_1 sin\left(q_2\right)\dot{q}_1^2 \end{bmatrix} MZ_2}_{C(q,\dot{q})\dot{q}}$$

$$\ldots + \underbrace{\begin{bmatrix} gcos\left(q_1\right) \\ 0 \end{bmatrix}\left(MZ_1 + m_2L_1\right) + \begin{bmatrix} gcos\left(q_1 + q_2\right) \\ gcos\left(q_1 + q_2\right) \end{bmatrix} MZ_2}_{G(q)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma}$$

En regroupant les termes post-multipliés par MZ_2, il vient :
$\Gamma = W\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right)\chi$ avec
$\chi = \begin{bmatrix} ZZ_1 + m_2L_1^2 + r_{red_1}^2 J_{m_1} & ZZ2 & MZ2 & MZ_1 + m_2L_1 & r_{red_2}^2 J_{m_2} \end{bmatrix}^t$
et

$$W\left(q, \dot{q}, \ddot{q}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & L_1 cos\left(q_2\right)\left(2\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right) - L_1 sin\left(q_2\right)\left(2\dot{q}_2\dot{q}_1 + \dot{q}_2^2\right) + gcos\left(q_1 + q_2\right) & gcos\left(q_1\right) & 0 \\ 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & L_1 cos\left(q_2\right)\ddot{q}_1 + L_1 sin\left(q_2\right)\dot{q}_1^2 + gcos\left(q_1 + q_2\right) & 0 & \ddot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Cours

$\hat{\chi}$ solution de $\mathrm{Min}_{\chi} = \left\| \tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi \right\|_2$

$\hat{\chi}$ solution de $\text{Min}_{\chi} = \left\| \tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi \right\|_2$

Recherche de $\left.\frac{\partial J}{\partial \chi}\right)_{\chi=\hat{\chi}} = 0$ où $J = \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)$

$\hat{\chi}$ solution de $\text{Min}_\chi = \left\| \tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi \right\|_2$

Recherche de $\left.\frac{\partial J}{\partial \chi}\right)_{\chi=\hat{\chi}} = 0$ où $J = \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)$

Calcul du critère :

$$\begin{aligned} J &= \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \left(\tilde{\Gamma}^t - \chi^t \tilde{W}^t\right) \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \tilde{\Gamma}^t \tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}^t \tilde{W}\chi - \chi^t \tilde{W}^t \tilde{\Gamma} + \chi^t \tilde{W}^t \tilde{W}\chi \end{aligned}$$

$\hat{\chi}$ solution de $\text{Min}_\chi = \left\| \tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi \right\|_2$

Recherche de $\left.\frac{\partial J}{\partial \chi}\right)_{\chi=\hat{\chi}} = 0$ où $J = \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)$

Calcul du critère :

$$\begin{aligned} J &= \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \left(\tilde{\Gamma}^t - \chi^t \tilde{W}^t\right) \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \tilde{\Gamma}^t \tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}^t \tilde{W}\chi - \chi^t \tilde{W}^t \tilde{\Gamma} + \chi^t \tilde{W}^t \tilde{W}\chi \end{aligned}$$

Formulaire de dérivation des fonctions linéaires

$$\frac{\partial a^t x}{\partial x} = \frac{\partial x^t a}{\partial x} = a^t$$

$$\frac{\partial A x}{\partial x} = \frac{\partial x^t A}{\partial x^t} = A$$

Dérivation de fonctions quadratiques

$$\frac{\partial x^t A x}{\partial x} = x^t \left(A^t + A\right)$$

$\hat{\chi}$ solution de $\text{Min}_\chi = \left\| \tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi \right\|_2$

Recherche de $\left.\frac{\partial J}{\partial \chi}\right)_{\chi=\hat{\chi}} = 0$ où $J = \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)$

Calcul du critère :

$$\begin{aligned} J &= \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \left(\tilde{\Gamma}^t - \chi^t \tilde{W}^t\right) \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \tilde{\Gamma}^t\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}^t\tilde{W}\chi - \chi^t\tilde{W}^t\tilde{\Gamma} + \chi^t\tilde{W}^t\tilde{W}\chi \end{aligned}$$

Formulaire de dérivation des fonctions linéaires

$$\frac{\partial a^t x}{\partial x} = \frac{\partial x^t a}{\partial x} = a^t$$

$$\frac{\partial A x}{\partial x} = \frac{\partial x^t A}{\partial x^t} = A$$

Dérivation de fonctions quadratiques

$$\frac{\partial x^t A x}{\partial x} = x^t \left(A^t + A\right)$$

Calcul de la dérivée partielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \chi} &= -\tilde{\Gamma}^t\tilde{W} - \left(\tilde{W}^t\tilde{\Gamma}\right)^t + \chi^t \left(\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^t + \tilde{W}^t\tilde{W}\right) \\ &= -2\tilde{\Gamma}^t\tilde{W} + 2\chi^t\tilde{W}^t\tilde{W} \end{aligned}$$

$\hat{\chi}$ solution de $\text{Min}_\chi = \left\| \tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi \right\|_2$

Recherche de $\left.\frac{\partial J}{\partial \chi}\right)_{\chi=\hat{\chi}} = 0$ où $J = \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)$

Calcul du critère :

$$\begin{aligned} J &= \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right)^t \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \left(\tilde{\Gamma}^t - \chi^t \tilde{W}^t\right) \left(\tilde{\Gamma} - \tilde{W}\chi\right) \\ &= \tilde{\Gamma}^t\tilde{\Gamma} - \tilde{\Gamma}^t\tilde{W}\chi - \chi^t\tilde{W}^t\tilde{\Gamma} + \chi^t\tilde{W}^t\tilde{W}\chi \end{aligned}$$

Formulaire de dérivation des fonctions linéaires

$$\frac{\partial a^t x}{\partial x} = \frac{\partial x^t a}{\partial x} = a^t$$

$$\frac{\partial A x}{\partial x} = \frac{\partial x^t A}{\partial x^t} = A$$

Dérivation de fonctions quadratiques

$$\frac{\partial x^t A x}{\partial x} = x^t \left(A^t + A\right)$$

Calcul de la dérivée partielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \chi} &= -\tilde{\Gamma}^t\tilde{W} - \left(\tilde{W}^t\tilde{\Gamma}\right)^t + \chi^t\left(\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^t + \tilde{W}^t\tilde{W}\right) \\ &= -2\tilde{\Gamma}^t\tilde{W} + 2\chi^t\tilde{W}^t\tilde{W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left.\frac{\partial J}{\partial \chi}\right)_{\chi=\hat{\chi}} = 0 \Leftrightarrow \quad & \hat{\chi}^t\tilde{W}^t\tilde{W} = \tilde{\Gamma}^t\tilde{W} \\ \Leftrightarrow \quad & \tilde{W}^t\tilde{W}\hat{\chi} = \tilde{W}^t\tilde{\Gamma} \\ \Leftrightarrow \quad & \hat{\chi} = \underbrace{\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\tilde{W}^t}\tilde{\Gamma} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\hat{\chi}} &= E\left[(\chi-\hat{\chi})(\chi-\hat{\chi})^t\right] \\
&= E\left[\left(\chi-\tilde{W}^+\tilde{\Gamma}\right)\left(\chi-\tilde{W}^+\tilde{\Gamma}\right)^t\right] \\
&= E\left[\left(\chi-\tilde{W}^+\left(\tilde{W}\chi+\rho\right)\right)\left(\chi-\tilde{W}^+\left(\tilde{W}\chi+\rho\right)\right)^t\right] \\
&= E\left[\left(\chi-\underbrace{\tilde{W}^+\tilde{W}}_{\mathbb{I}}\chi-\tilde{W}^+\rho\right)\left(\chi-\underbrace{\tilde{W}^+\tilde{W}}_{\mathbb{I}}\chi-\tilde{W}^+\rho\right)^t\right] \\
&= E\left[\tilde{W}^+\rho\rho^t\tilde{W}^{+^t}\right] \\
&= \tilde{W}^+E\left[\rho\rho^t\right]\tilde{W}^{+^t} \\
&= \tilde{W}^+C_\rho\tilde{W}^{+^t} \\
&= \sigma_\rho^2\tilde{W}^+\tilde{W}^{+^t} \\
&= \sigma_\rho^2\left[\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\tilde{W}^t\right]\left[\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\tilde{W}^t\right]^t \\
&= \sigma_\rho^2\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)\left(\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\right)^t \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\hat{\chi}} &= E\left[(\chi-\hat{\chi})(\chi-\hat{\chi})^t\right] \\
&= E\left[\left(\chi-\tilde{W}^+\tilde{\Gamma}\right)\left(\chi-\tilde{W}^+\tilde{\Gamma}\right)^t\right] \\
&= E\left[\left(\chi-\tilde{W}^+\left(\tilde{W}\chi+\rho\right)\right)\left(\chi-\tilde{W}^+\left(\tilde{W}\chi+\rho\right)\right)^t\right] \\
&= E\left[\left(\chi-\underbrace{\tilde{W}^+\tilde{W}}_{\mathbb{I}}\chi-\tilde{W}^+\rho\right)\left(\chi-\underbrace{\tilde{W}^+\tilde{W}}_{\mathbb{I}}\chi-\tilde{W}^+\rho\right)^t\right] \\
&= E\left[\tilde{W}^+\rho\rho^t\tilde{W}^{+^t}\right] \\
&= \tilde{W}^+E\left[\rho\rho^t\right]\tilde{W}^{+^t} \\
&= \tilde{W}^+C_\rho\tilde{W}^{+^t} \\
&= \sigma_\rho^2\tilde{W}^+\tilde{W}^{+^t} \\
&= \sigma_\rho^2\left[\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\tilde{W}^t\right]\left[\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\tilde{W}^t\right]^t \\
&= \sigma_\rho^2\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)\left(\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\right)^t \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_{\hat{\chi}} &= \dots \\
&= \sigma_\rho^2\left(\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}\right)^t \\
&= \sigma_\rho^2\left(\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^t\right)^{-1} \\
&= \sigma_\rho^2\left(\tilde{W}^t\tilde{W}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Cours

Loi polynomiale de degré 3

Loi horaire :

$$q(t) = q_0 + r(t)D = q_0 + \left[a\left(\frac{t}{t_f}\right) + b\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 + c\left(\frac{t}{t_f}\right)^3\right](q_f - q_0)$$

Loi polynomiale de degré 3

Loi horaire :

$$q(t) = q_0 + r(t)D = q_0 + \left[a\left(\frac{t}{t_f}\right) + b\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 + c\left(\frac{t}{t_f}\right)^3\right](q_f - q_0)$$

(on vérifie ainsi que r(0)=0).

Loi polynomiale de degré 3

Loi horaire :

$$q(t) = q_0 + r(t)D = q_0 + \left[a\left(\frac{t}{t_f}\right) + b\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 + c\left(\frac{t}{t_f}\right)^3\right](q_f - q_0)$$

(on vérifie ainsi que r(0)=0).
Recherche des coefficients a, b et c :

Loi polynomiale de degré 3

Loi horaire :

$$q(t) = q_0 + r(t)D = q_0 + \left[a\left(\frac{t}{t_f}\right) + b\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 + c\left(\frac{t}{t_f}\right)^3\right](q_f - q_0)$$

(on vérifie ainsi que r(0)=0).
Recherche des coefficients a, b et c :

- Condition 1 :

$$r(t_f) = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 1$$

Loi polynomiale de degré 3

Loi horaire :

$$q(t) = q_0 + r(t)D = q_0 + \left[a\left(\frac{t}{t_f}\right) + b\left(\frac{t}{t_f}\right)^2 + c\left(\frac{t}{t_f}\right)^3\right](q_f - q_0)$$

(on vérifie ainsi que r(0)=0).
Recherche des coefficients a, b et c :

- Condition 1 :

$$r(t_f) = 1 \Leftrightarrow a + b + c = 1$$

- Condition 2 :

$$\begin{aligned}
\dot{q}(0) = \dot{q}_0 \Leftrightarrow & \quad \dot{r}(0)D = \dot{q}_0 \\
\Leftrightarrow & \quad \left[\frac{a}{t_f} + \frac{2b}{t_f^2}t + \frac{3c}{t_f^3}t^2\right]_{t=0}(q_f - q_0) = \dot{q}_0 \\
\Leftrightarrow & \quad a\frac{(q_f - q_0)}{t_f} = \dot{q}_0
\end{aligned}$$

Loi polynomiale de degré 3

- Condition 3 :

Loi polynomiale de degré 3

- Condition 3 :

$$\begin{aligned}\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f \Leftrightarrow & \quad \dot{r}(t_f)D = \dot{q}_f \\ \Leftrightarrow & \quad a\frac{(q_f - q_0)}{t_f} + b\frac{2\,(q_f - q_0)}{t_f} + c\frac{3\,(q_f - q_0)}{t_f} = \dot{q}_f\end{aligned}$$

Loi polynomiale de degré 3

- Condition 3 :

$$\begin{aligned}\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f \Leftrightarrow & \qquad \dot{r}(t_f)D = \dot{q}_f \\ \Leftrightarrow & \qquad a\frac{(q_f - q_0)}{t_f} + b\frac{2\,(q_f - q_0)}{t_f} + c\frac{3\,(q_f - q_0)}{t_f} = \dot{q}_f\end{aligned}$$

Écriture sous forme d'un système linéaire :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{t_f} & 0 & 0 \\ \frac{1}{t_f} & \frac{2}{t_f} & \frac{3}{t_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\dot{q}_0}{(q_f - q_0)} \\ \frac{\dot{q}_f}{(q_f - q_0)} \end{bmatrix}$$

Loi polynomiale de degré 3

- Condition 3 :

$$\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f \Leftrightarrow \qquad \dot{r}(t_f)D = \dot{q}_f$$

$$\Leftrightarrow \qquad a\frac{(q_f - q_0)}{t_f} + b\frac{2\,(q_f - q_0)}{t_f} + c\frac{3\,(q_f - q_0)}{t_f} = \dot{q}_f$$

Écriture sous forme d'un système linéaire :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{t_f} & 0 & 0 \\ \frac{1}{t_f} & \frac{2}{t_f} & \frac{3}{t_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\dot{q}_0}{(q_f - q_0)} \\ \frac{\dot{q}_f}{(q_f - q_0)} \end{bmatrix}$$

On vérifie que le système est bien inversible ($det\,(A) = -\frac{1}{t_f^2}$) et l'inverse de A vaut :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & t_f & 0 \\ 3 & -2t_f & -t_f \\ -2 & t_f & t_f \end{bmatrix}$$

Loi polynomiale de degré 3

- Condition 3 :

$$\dot{q}(t_f) = \dot{q}_f \Leftrightarrow \qquad \dot{r}(t_f)D = \dot{q}_f$$

$$\Leftrightarrow \qquad a\frac{(q_f - q_0)}{t_f} + b\frac{2\,(q_f - q_0)}{t_f} + c\frac{3\,(q_f - q_0)}{t_f} = \dot{q}_f$$

Écriture sous forme d'un système linéaire :

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{t_f} & 0 & 0 \\ \frac{1}{t_f} & \frac{2}{t_f} & \frac{3}{t_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\dot{q}_0}{(q_f - q_0)} \\ \frac{\dot{q}_f}{(q_f - q_0)} \end{bmatrix}$$

On vérifie que le système est bien inversible ($det\,(A) = -\frac{1}{t_f^2}$) et l'inverse de A vaut :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & t_f & 0 \\ 3 & -2t_f & -t_f \\ -2 & t_f & t_f \end{bmatrix}$$

Ainsi, les coefficients de la loi polynomiale valent :

$$\begin{cases} a = t_f \frac{\dot{q}_0}{(q_f - q_0)} \\ b = 3 - 2t_f \frac{\dot{q}_0}{(q_f - q_0)} - t_f \frac{\dot{q}_f}{(q_f - q_0)} \\ c = -2 + t_f \frac{\dot{q}_0}{(q_f - q_0)} + t_f \frac{\dot{q}_f}{(q_f - q_0)} \end{cases}$$

Cours

Loi bang-bang avec palier de vitesse

Condition d'existence d'un palier de vitesse :

$$\underbrace{\frac{|D_i|}{2}}_{\substack{\text{Distance à parcourir} \\ \text{pendant la phase d'accélération}}} > \underbrace{|d_i|}_{\substack{\text{Distance déjà parcourue} \\ \text{à la vitesse } \dot{q}_i \\ \text{jusqu'à } T_i \text{ avant saturation}}}$$

Loi bang-bang avec palier de vitesse

Condition d'existence d'un palier de vitesse :

$$\underbrace{\frac{|D_i|}{2}}_{\substack{\text{Distance à parcourir} \\ \text{pendant la phase d'accélération}}} > \underbrace{|d_i|}_{\substack{\text{Distance déjà parcourue} \\ \text{à la vitesse } \dot{q}_i \\ \text{jusqu'à } T_i \text{ avant saturation}}}$$

- Recherche de l'instant T_i :

Loi bang-bang avec palier de vitesse

Condition d'existence d'un palier de vitesse :

$$\underbrace{\frac{|D_i|}{2}}_{\substack{\text{Distance à parcourir} \\ \text{pendant la phase d'accélération}}} > \underbrace{|d_i|}_{\substack{\text{Distance déjà parcourue} \\ \text{à la vitesse } \dot{q}_i \\ \text{jusqu'à } T_i \text{ avant saturation}}}$$

- Recherche de l'instant T_i :
  - d'une part, pour $0 \leq t \leq T_i$, la vitesse articulaire suit la loi horaire suivante :

$$\dot{q}_i = k_{a_i} t$$

Loi bang-bang avec palier de vitesse

Condition d'existence d'un palier de vitesse :

$$\underbrace{\frac{|D_i|}{2}}_{\substack{\text{Distance à parcourir} \\ \text{pendant la phase d'accélération}}} > \underbrace{|d_i|}_{\substack{\text{Distance déjà parcourue} \\ \text{à la vitesse } \dot{q}_i \\ \text{jusqu'à } T_i \text{ avant saturation}}}$$

- Recherche de l'instant T_i :
  - d'une part, pour $0 \leq t \leq T_i$, la vitesse articulaire suit la loi horaire suivante :

$$\dot{q}_i = k_{a_i} t$$

  - d'autre part, pour $T_i \leq t \leq t_{f_i} - T_i$, la vitesse articulaire est constante et égale à sa vitesse de saturation :

$$\dot{q}_i = k_{v_i}$$

Loi bang-bang avec palier de vitesse

Condition d'existence d'un palier de vitesse :

$$\underbrace{\frac{|D_i|}{2}}_{\substack{\text{Distance à parcourir} \\ \text{pendant la phase d'accélération}}} > \underbrace{|d_i|}_{\substack{\text{Distance déjà parcourue} \\ \text{à la vitesse } \dot{q}_i \\ \text{jusqu'à } T_i \text{ avant saturation}}}$$

- Recherche de l'instant T_i :
  - d'une part, pour $0 \leq t \leq T_i$, la vitesse articulaire suit la loi horaire suivante :

$$\dot{q}_i = k_{a_i} t$$

  - d'autre part, pour $T_i \leq t \leq t_{f_i} - T_i$, la vitesse articulaire est constante et égale à sa vitesse de saturation :

$$\dot{q}_i = k_{v_i}$$

  - Donc, l'instant T_i se déduit des deux équations précédentes évaluées à ce même instant :

$$T_i = \frac{k_{v_i}}{k_{a_i}}$$

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Recherche de la distance parcourue jusqu'à T_i :

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Recherche de la distance parcourue jusqu'à T_i :
  - L'accélération étant constante et la vitesse nulle au départ, la distance parcourue par l'articulation i pendant le temps T_i est :

$$\frac{1}{2} k_{a_i} T_i^2$$

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Recherche de la distance parcourue jusqu'à T_i :
  - L'accélération étant constante et la vitesse nulle au départ, la distance parcourue par l'articulation i pendant le temps T_i est :

$$\frac{1}{2} k_{a_i} T_i^2$$

  - Soit, en remplaçant T_i par l'expression précédente :

$$d_i = \int_0^{T_i} \dot{q}_i dt = \frac{1}{2} k_{a_i} T_i^2 = \frac{1}{2} k_{a_i} \left(\frac{k_{v_i}}{k_{a_i}} \right)^2 = \frac{k_{v_i}^2}{2 k_{a_i}}$$

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Recherche de la distance parcourue jusqu'à T_i :
  - L'accélération étant constante et la vitesse nulle au départ, la distance parcourue par l'articulation i pendant le temps T_i est :

$$\frac{1}{2} k_{a_i} T_i^2$$

  - Soit, en remplaçant T_i par l'expression précédente :

$$d_i = \int_0^{T_i} \dot{q}_i dt = \frac{1}{2} k_{a_i} T_i^2 = \frac{1}{2} k_{a_i} \left(\frac{k_{v_i}}{k_{a_i}} \right)^2 = \frac{k_{v_i}^2}{2k_{a_i}}$$

- Finalement, la condition d'existence du palier est :

$$\frac{|D_i|}{2} > \frac{k_{v_i}^2}{2k_{a_i}} \Leftrightarrow |D_i| > \frac{k_{v_i}^2}{k_{a_i}}$$

Cours

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Aire du profil de vitesse valant :

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Aire du profil de vitesse valant :

$$\mathscr{A} = k_{v_i}\left(t_{f_i} - T_i\right)$$

où $T_i = \frac{k_{v_i}}{k_{a_i}}$ d'après l'exercice précédent.

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Aire du profil de vitesse valant :

$$\mathscr{A} = k_{v_i}\left(t_{f_i} - T_i\right)$$

où $T_i = \frac{k_{v_i}}{k_{a_i}}$ d'après l'exercice précédent.

- Par ailleurs, l'aire du profil de vitesse est égale à la distance parcourue, puisque :

$$\mathscr{A} = \int_0^{t_{f_i}} \dot{q}_i dt = q_i\left(t_{f_i}\right) - q_i\left(t_0\right) = |D_i|$$

Loi bang-bang avec palier de vitesse

- Aire du profil de vitesse valant :

$$\mathscr{A} = k_{v_i}\left(t_{f_i} - T_i\right)$$

où $T_i = \frac{k_{v_i}}{k_{a_i}}$ d'après l'exercice précédent.

- Par ailleurs, l'aire du profil de vitesse est égale à la distance parcourue, puisque :

$$\mathscr{A} = \int_0^{t_{f_i}} \dot{q}_i dt = q_i\left(t_{f_i}\right) - q_i\left(t_0\right) = |D_i|$$

- Finalement, on déduit que :

$$k_{v_i}\left(t_{f_i} - T_i\right) = |D_i| \Leftrightarrow t_{f_i} = \frac{|D_i|}{k_{v_i}} + \underbrace{T_i}_{\frac{k_{v_i}}{k_{a_i}}}$$

Cours

Stabilité au sens de *Lyapunov*

Equation différentielle du 2nd ordre du mouvement angulaire :

$$\underbrace{\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)}_{I_{eq}} \ddot{q}_i + f_{v_i} \dot{q}_i + m_i g d_i sin\left(q_i\right) = \tau_i,$$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

Equation différentielle du 2nd ordre du mouvement angulaire :

$$\underbrace{\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)}_{I_{eq}} \ddot{q}_i + f_{v_i} \dot{q}_i + m_i g d_i sin\left(q_i\right) = \tau_i,$$

- Recherche des points d'équilibre :
  A l'équilibre, $\ddot{q}_i = \dot{q}_i = 0$ et en l'absence de commande ($\tau_i = 0$ pour le système autonome) :

$$m_i g d_i sin\left(q_i\right) = 0.$$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

Equation différentielle du 2nd ordre du mouvement angulaire :

$$\underbrace{\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)}_{I_{eq}} \ddot{q}_i + f_{v_i} \dot{q}_i + m_i g d_i sin\left(q_i\right) = \tau_i,$$

- Recherche des points d'équilibre :
  A l'équilibre, $\ddot{q}_i = \dot{q}_i = 0$ et en l'absence de commande ($\tau_i = 0$ pour le système autonome) :

  $$m_i g d_i sin\left(q_i\right) = 0.$$

  Les positions d'équilibre correspondent au cas : $q_{i_e} = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Dans l'intervalle considéré, il n'y a plus qu'un seul point d'équilibre :

  $$q_{i_e} = 0.$$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

Equation différentielle du 2nd ordre du mouvement angulaire :

$$\underbrace{\left(m_i d_i^2 + I_{G_i} + r_{red_i}^2 J_{m_i}\right)}_{I_{eq}} \ddot{q}_i + f_{v_i}\dot{q}_i + m_i g d_i sin\left(q_i\right) = \tau_i,$$

- Recherche des points d'équilibre :
  A l'équilibre, $\ddot{q}_i = \dot{q}_i = 0$ et en l'absence de commande ($\tau_i = 0$ pour le système autonome) :

  $$m_i g d_i sin\left(q_i\right) = 0.$$

  Les positions d'équilibre correspondent au cas : $q_{i_e} = n\pi$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Dans l'intervalle considéré, il n'y a plus qu'un seul point d'équilibre :

  $$q_{i_e} = 0.$$

- Proposition d'une fonction de *Lyapunov* candidate :

  $$V\left(x\right) = m_i g d_i \left(1 - cos\left(q_i\right)\right) + \frac{1}{2} I_{eq}\dot{q}_i^2,$$

  somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique du système (en posant $x = [q_i, \dot{q}_i]^t$). Notons que, localement (i.e. pour $q_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$), $V\left(x\right) \succ 0$ sauf en $x = [0, 0]$ où $V\left(0\right) = 0$.

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Calcul de la dérivée de la fonction de *Lyapunov* candidate :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= m_i g d_i sin(q_i)\dot{q}_i + I_{eq}\dot{q}_i\ddot{q}_i \\ &= \dot{q}_i\left(m_i g d_i sin(q_i) + I_{eq}\ddot{q}_i\right) \\ &= -f_{v_i}\dot{q}_i^2 \\ &\leq 0\end{aligned}$$

Ainsi, le point d'équilibre $x_e = [q_{i_e} = 0, \dot{q}_{i_e} = 0]^t$ origine du système est stable.

Cours

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Fonction de *Lyapunov* :

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\,\dot{q} + \frac{1}{2}e^t K_p e$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\,\dot{q} + \frac{1}{2}e^t K_p e$
  - on note $e = q_d - q$ avec q_d constant $\Rightarrow \dot{e} = -\dot{q}$
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e = \dot{e} = 0$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\,\dot{q} + \frac{1}{2}e^t K_p e$
  - on note $e = q_d - q$ avec q_d constant $\Rightarrow \dot{e} = -\dot{q}$
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e = \dot{e} = 0$
- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e^t K_p e$
  - on note $e = q_d - q$ avec q_d constant $\Rightarrow \dot{e} = -\dot{q}$
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e = \dot{e} = 0$
- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= \left(\frac{1}{2}\ddot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^t \dot{A}(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\ddot{q}\right) + \left(\frac{1}{2}\dot{e}^t K_p e + \frac{1}{2}e^t K_p \dot{e}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\dot{q}^t \dot{A}(q)\dot{q} + \dot{q}^t A(q)\ddot{q}\right) + \left(-\frac{1}{2}\dot{q}^t K_p e - \frac{1}{2}e^t K_p \dot{q}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\dot{q}^t \dot{A}(q)\dot{q} + \dot{q}^t A(q)\ddot{q}\right) + \left(-\dot{q}^t K_p e\right) \\
&= \dot{q}^t \left(\frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q} + \underbrace{A(q)\ddot{q}}_{=\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q}}\right) - \dot{q}^t K_p e \\
&= \dot{q}^t \left(\underbrace{\Gamma}_{=K_p e - K_d \dot{q}} - C(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - \dot{q}^t K_p e \\
&= \left(\frac{1}{2}\dot{q}^t \left(\dot{A} - 2C\right)\dot{q} + \dot{q}^t K_p e - \dot{q}^t K_d \dot{q}\right) - \dot{q}^t K_p e
\end{aligned}
$$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

  Ainsi, $\dot{V} \leq 0$, ce qui prouve la stabilité seulement.
- D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$.

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

  Ainsi, $\dot{V} \leq 0$, ce qui prouve la stabilité seulement.
- D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$.

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

  Ainsi, $\dot{V} \leq 0$, ce qui prouve la stabilité seulement.
- D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. L'ensemble invariant M est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs).

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

  Ainsi, $\dot{V} \leq 0$, ce qui prouve la stabilité seulement.
- D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. L'ensemble invariant M est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs). Dans ce cas, on note que la dynamique du système en boucle fermée vaut :

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

  Ainsi, $\dot{V} \leq 0$, ce qui prouve la stabilité seulement.
- D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. L'ensemble invariant M est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs). Dans ce cas, on note que la dynamique du système en boucle fermée vaut :

$$
\dot{q} = 0 \Rightarrow \qquad A(q)\,\ddot{q} = K_p e \Rightarrow \qquad \ddot{q} = A^{-1}(q)\,K_p e
$$

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

  Ainsi, $\dot{V} \leq 0$, ce qui prouve la stabilité seulement.
- D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. L'ensemble invariant M est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs). Dans ce cas, on note que la dynamique du système en boucle fermée vaut :

$$
\dot{q} = 0 \Rightarrow \qquad A(q)\,\ddot{q} = K_p e \Rightarrow \qquad \ddot{q} = A^{-1}(q)\,K_p e
$$

  A l'équilibre, puisque $\ddot{q} = 0$, on déduit que $e = 0$.

Stabilité au sens de *Lyapunov*

- Preuve de stabilité (seule pour le moment)

$$
\begin{aligned}
&= \dots \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\dot{q}^t\left(\dot{A}-2C\right)\dot{q}}_{=0 \text{ car } \left(\dot{A}-2C\right) \text{ est antisym.}} \quad -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0 \quad (\text{car } K_d = diag\left(k_{d_i}\right) > 0)
\end{aligned}
$$

  Ainsi, $\dot{V} \leq 0$, ce qui prouve la stabilité seulement.
- D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. L'ensemble invariant M est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs). Dans ce cas, on note que la dynamique du système en boucle fermée vaut :

$$
\dot{q} = 0 \Rightarrow \qquad A(q)\,\ddot{q} = K_p e \Rightarrow \qquad \ddot{q} = A^{-1}(q)\,K_p e
$$

  A l'équilibre, puisque $\ddot{q} = 0$, on déduit que $e = 0$. Le système converge asymptotiquement vers le seul état invariant défini par $\dot{V}(x) = 0$, i.e. $q = q_d$ et $\dot{q} = 0$.

Commande articulaire P.I.D. décentralisée en mode articulaire

Équation du système linéaire en boucle fermée :

$$a_{ii}\ddot{q}_i + f_{v_i}\dot{q}_i + \gamma_i = \tau_i = k_{p_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{d_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{i_i}\int_{t_0}^{t}\left(q_{d_i} - q_i\right)d\lambda$$

Commande articulaire P.I.D. décentralisée en mode articulaire

Équation du système linéaire en boucle fermée :

$$a_{ii}\ddot{q}_i + f_{v_i}\dot{q}_i + \gamma_i = \tau_i = k_{p_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{d_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{i_i}\int_{t_0}^{t}\left(q_{d_i} - q_i\right)d\lambda$$

En appliquant la transformée de Laplace $\mathscr{L}_a$ à cette équation différentielle linéaire à coefficients constants,

$$X(s) = \mathscr{L}_a\left\{x(t)\right\} = \int_{0-}^{+\infty} e^{-st}x(t)\,dt$$

Commande articulaire P.I.D. décentralisée en mode articulaire

Équation du système linéaire en boucle fermée :

$$a_{ii}\ddot{q}_i + f_{v_i}\dot{q}_i + \gamma_i = \tau_i = k_{p_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{d_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{i_i}\int_{t_0}^{t}\left(q_{d_i} - q_i\right)d\lambda$$

En appliquant la transformée de Laplace $\mathscr{L}_a$ à cette équation différentielle linéaire à coefficients constants,

$$X(s) = \mathscr{L}_a\{x(t)\} = \int_{0-}^{+\infty} e^{-st}x(t)\,dt$$

et en utilisant quelques propriétés remarquables de cette transformée (en l'occurrence, $\mathscr{L}_a\{\dot{x}(t)\} = sX(s)$ et $\mathscr{L}_a\{\int x(t)\} = \frac{X(s)}{s}$ à C.I. nulles), il vient (à couple perturbateur nul) :

$$\left(a_{ii}s^2 + f_{v_i}s\right)q_i(s) = \left(k_{p_i} + k_{d_i}s + \frac{k_{i_i}}{s}\right)\left(q_{d_i}(s) - q_i(s)\right)$$

Commande articulaire P.I.D. décentralisée en mode articulaire

Équation du système linéaire en boucle fermée :

$$a_{ii}\ddot{q}_i + f_{v_i}\dot{q}_i + \gamma_i = \tau_i = k_{p_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{d_i}\left(q_{d_i} - q_i\right) + k_{i_i}\int_{t_0}^{t}\left(q_{d_i} - q_i\right)d\lambda$$

En appliquant la transformée de Laplace $\mathscr{L}_a$ à cette équation différentielle linéaire à coefficients constants,

$$X(s) = \mathscr{L}_a\{x(t)\} = \int_{0-}^{+\infty} e^{-st}x(t)\,dt$$

et en utilisant quelques propriétés remarquables de cette transformée (en l'occurrence, $\mathscr{L}_a\{\dot{x}(t)\} = sX(s)$ et $\mathscr{L}_a\{\int x(t)\} = \frac{X(s)}{s}$ à C.I. nulles), il vient (à couple perturbateur nul) :

$$\left(a_{ii}s^2 + f_{v_i}s\right)q_i(s) = \left(k_{p_i} + k_{d_i}s + \frac{k_{i_i}}{s}\right)\left(q_{d_i}(s) - q_i(s)\right)$$

On déduit ainsi la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{q_i(s)}{q_{d_i}(s)} = \frac{k_{d_i}s^2 + k_{p_i}s + k_{i_i}}{a_{ii}s^3 + \left(k_{d_i} + f_{v_i}\right)s^2 + k_{p_i}s + k_{i_i}}$$

Cours

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* :

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\,\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^t \left(\dot{q}^t A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p \dot{X} \\
&= \dot{q}^t \left(\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t (\Gamma - G(q)) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t \left(J(q)^t K_p e_x - K_d\dot{q} + \widehat{G}(q) - G(q)\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^t \left(\dot{q}^t A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p \dot{X} \\
&= \dot{q}^t \left(\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t (\Gamma - G(q)) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t \left(J(q)^t K_p e_x - K_d\dot{q} + \widehat{G}(q) - G(q)\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$.

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^t \left(\dot{q}^t A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p \dot{X} \\
&= \dot{q}^t \left(\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t (\Gamma - G(q)) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t \left(J(q)^t K_p e_x - K_d\dot{q} + \widehat{G}(q) - G(q)\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$.

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^t \left(\dot{q}^t A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p \dot{X} \\
&= \dot{q}^t \left(\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t (\Gamma - G(q)) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t \left(J(q)^t K_p e_x - K_d\dot{q} + \widehat{G}(q) - G(q)\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$. L'ensemble invariant est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs).

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^t \left(\dot{q}^t A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p \dot{X} \\
&= \dot{q}^t \left(\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t (\Gamma - G(q)) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t \left(J(q)^t K_p e_x - K_d\dot{q} + \widehat{G}(q) - G(q)\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$.
L'ensemble invariant est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs). Dans ce cas, on note que la dynamique du système en boucle fermée vaut :

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^t \left(\dot{q}^t A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p \dot{X} \\
&= \dot{q}^t \left(\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t (\Gamma - G(q)) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t \left(J(q)^t K_p e_x - K_d\dot{q} + \widehat{G}(q) - G(q)\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$.
L'ensemble invariant est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs). Dans ce cas, on note que la dynamique du système en boucle fermée vaut :

$$\ddot{q} = A^{-1}(q)(\Gamma - G(q)) \Rightarrow \ddot{q} = A^{-1}(q)J(q)^t K_p e_x$$

Régulation PID décentralisée en mode cartésien

- Fonction de *Lyapunov* : $V = \frac{1}{2}\dot{q}^t A(q)\dot{q} + \frac{1}{2}e_x^t K_p e_x$
  - on note $e_x = X_d - X$ l'erreur cartésienne avec X_d constant $\Rightarrow \dot{e_X} = -\dot{X} = -MGD(q)$;
  - $V \geq 0$ et $V = 0 \Leftrightarrow e_x = 0$ et $\dot{q} = 0$, soit

$$V = 0 \Leftrightarrow [q, \dot{q}] \in \{\dot{q} = 0, q/MGD(q) = X_d\} \subseteq S$$

- Preuve de stabilité

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{q}^t \left(\dot{q}^t A(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p \dot{X} \\
&= \dot{q}^t \left(\Gamma - C(q,\dot{q})\dot{q} - G(q) + \frac{1}{2}\dot{A}(q)\dot{q}\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t (\Gamma - G(q)) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= \dot{q}^t \left(J(q)^t K_p e_x - K_d\dot{q} + \widehat{G}(q) - G(q)\right) - e_x^t K_p J\dot{q} \\
&= -\dot{q}^t K_d \dot{q} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de LaSalle, les trajectoires du système converge asymptotiquement vers le plus grand ensemble invariant de $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\right\}$. Or $\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow \dot{q} = 0$.
L'ensemble invariant est défini par $\dot{q} = 0$ (et $\ddot{q} = 0$ d'ailleurs). Dans ce cas, on note que la dynamique du système en boucle fermée vaut :

$$\ddot{q} = A^{-1}(q)(\Gamma - G(q)) \Rightarrow \ddot{q} = A^{-1}(q)J(q)^t K_p e_x$$

A l'équilibre, puisque $\ddot{q} = 0$, on déduit que $K_p e_x \in N_{J(q)^t}$.

Cours