$\boxed{\text{TP n°2}}$
Dynamique et commande

1 Introduction

On propose d'étudier la modélisation dynamique et la commande du bras manipulateur développé par le *Laboratoire de Robotique Interactive* du *CEA List* (Fig. 1). Pour rappel, les modèles géométriques et cinématiques de ce robot ont déjà été étudiés dans le TP n°1.

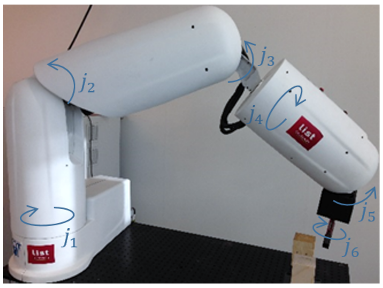


FIGURE 1 – Prototype de bras robotique poly-articulé du *CEA-LIST*.

Ce TP s'inscrit dans la continuité du TP précédent. Le recours aux questions traitées dans le TP n°1 est parfois nécessaire pour résoudre certaines questions du TP n°2.

Les valeurs numériques des paramètres du robot sont renseignées dans le tableau 1. Il est nécessaire de disposer des outils logiciels *Matlab*^{TM} et *Simulink*^{TM} pour pouvoir traiter ce sujet.

2 Modèle dynamique

Nous rappelons l'expression matricielle du modèle dynamique inverse du bras robotique :

$$A(q)\,\ddot{q} + C(q,\dot{q})\,\dot{q} + G(q) + \Gamma_f(\dot{q}) = \Gamma$$

- $A(q) \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ matrice d'inertie, symétrique et définie positive ;
- $C(q,\dot{q})\,\dot{q} \in \mathbb{R}^6$ vecteur des couples articulaires dus aux forces de *Coriolis* et centrifuge ;
- $G(q) \in \mathbb{R}^6$ vecteur des couples articulaires de gravité ;
- $\Gamma_f(\dot{q}) = \begin{bmatrix} \tau_{f_1} & \dots & \tau_{f_6} \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}^6$ vecteur des couples de frottement.

Nous désignons les vecteurs des positions, vitesses et accélérations articulaires par $q = [q_1, \ldots, q_6]^t$, $\dot{q} = [\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_6]^t$, $\ddot{q} = [\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_6]^t$, et le vecteur des couples articulaires par $\Gamma = [\tau_1, \ldots, \tau_6]^t$.

Pour rappel, les différents repères $\mathcal{R}_i$ attachés aux corps du robot ont été définis dans la question ***Q*1**.

***Q*12** Dans cette question, nous souhaitons déterminer la vitesse ${}^0V_{G_i}$ du centre de masse G_i et la vitesse de rotation ${}^0\omega_i$ de tous les corps $\mathcal{C}_i$ dans le repère $\mathcal{R}_0$. Proposer une fonction capable de retourner les matrices jacobiennes ${}^0J_{v_{G_i}}$ et ${}^0J_{\omega_i}$ définies par :

$$ {}^0V_{G_i} = {}^0J_{v_{G_i}}(q)\,\dot{q} \quad \text{et} \quad {}^0\omega_i = {}^0J_{\omega_i}(q)\,\dot{q}. $$

Pour ce faire, nous donnons la position du centre de masse G_i exprimée dans le repère $\mathcal{R}_i$ du corps $\mathcal{C}_i$:

$$ {}^i\overrightarrow{O_iG_i} = \left[\begin{array}{ccc} x_{G_i} & y_{G_i} & z_{G_i} \end{array}\right]^t \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, 6 $$

où les coordonnées x_{G_i}, y_{G_i}, et z_{G_i} sont données dans le tableau 1.

Pour traiter cette question, vous pourrez utiliser les fonctions développées à la question ***Q*3** et la fonction $CalculJacobienne\,(alpha, d, theta, r)$ développée à la question ***Q*6** retournant la matrice jacobienne ${}^0J_{O_E}$ à la base du calcul de la vitesse ${}^0\mathcal{V}_{0,E}\,(0_E)$ du point terminal O_E.

La fonction à programmer sera appelée de la manière suivante[1] :
$\left[{}^0J_{v_{G_i}}, {}^0J_{\omega_i}\right] = CalculMatriceJacobienneGi\,(alpha, d, theta, r, x_G, y_G, z_G)$.

***Q*13** Proposer une fonction retournant la matrice d'inertie $A\,(q) \in \mathbb{R}^{6\times6}$ du robot. La fonction sera appelée par $A = CalculMatriceInertie\,(q)$.

Pour cela, on donne les tenseurs d'inertie I_i exprimés dans leur repère $\mathcal{R}_i$ (d'origine O_i)[2] et la masse m_i de chaque corps $\mathcal{C}_i$.

En outre, vous tiendrez compte de l'ajout des contributions des inerties des actionneurs J_{m_i} ($i = 1, \ldots, 6$) ramenées côté corps sur la diagonale de $A\,(q)$ (on donne les valeurs des rapports de réduction r_{red_i} et des inerties J_{m_i} dans le tableau 1).

1. Le recours à la formule de *Varignon* est utile : $V_{G_i} = V_{O_E} + \omega_i \times \overrightarrow{O_EG_i}$, soit :

$$ {}^0J_{G_i} = \begin{bmatrix} I_{3\times3} & -{}^0\widehat{\overrightarrow{O_EG_i}} \\ 0_{3\times3} & I_{3\times3} \end{bmatrix} {}^0J_{O_E} $$

2. Il faudra alors exprimer les tenseurs d'inertie dans le repère $\mathcal{R}_i$ (d'origine G_i) à l'aide du théorème d'*Huygens*.

***Q*14** A partir du calcul des valeurs propres de $A(q)$, proposer deux scalaires $0 < \mu_1 < \mu_2$ pour borner inférieurement et supérieurement la matrice d'inertie, i.e.

$$\mu_1 \mathbb{I} \preceq A(q) \preceq \mu_2 \mathbb{I}$$

lorsque les variables articulaires varient entre les butées articulaires q_{min} et q_{max} définies à la question ***Q*10**.

***Q*15** Proposer une fonction $G = CalculCoupleGravite(q)$ capable de retourner le vecteur des couples articulaires de gravité $G(q) \in \mathbb{R}^6$.

On pourra utiliser la formulation analytique du gradient de l'énergie potentielle $E_p(q) = g^t \left(\sum_{i=1}^{6} m_i {}^0p_{G_i}(q) \right)$, soit :

$$G(q) = -\left({}^0J^t_{v_{G_1}} m_1 g + \ldots + {}^0J^t_{v_{G_6}} m_6 g \right)$$

où $g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9.81 \end{bmatrix}^t$.

***Q*16** Proposer un majorant g_b de $\|G(q)\|_1$, tel que :

$$\forall q \in [q_{min}, q_{max}], \quad \|G(q)\|_1 \leq g_b;$$

où $\|\bullet\|_1$ désigne la norme 1 d'un vecteur.

***Q*17** Proposer un bloc de simulation du robot sous *Simulink*^{TM} en programmant son modèle dynamique *direct* à partir des fonctions calculées précédemment, d'une fonction $\Gamma_f = CalculCoupleFrottement(\dot{q})$ à programmer et de la fonction $c = CalculCoupleCoriolisCentrifuge(q, \dot{q})$ donnée.

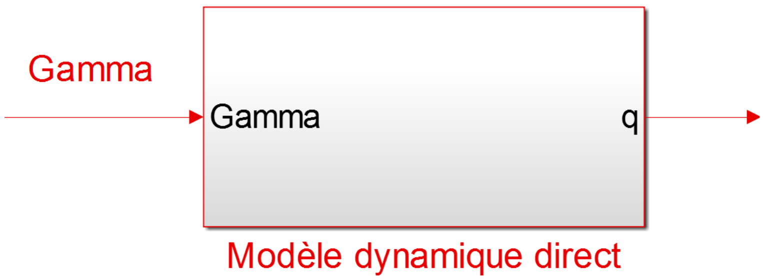


FIGURE 2 – Modèle de simulation du robot sous *Simulink*^{TM}.

La fonction $\Gamma_f = CalculCoupleFrottement(\dot{q})$ à programmer retournera le vecteur des couples articulaires produit par les forces de frottement. Dans ce TP, nous choisissons un modèle de frottement du type :

$$\tau_{f_i}(\dot{q}_i) = diag(\dot{q}_i) F_{v_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, 6$$

où les constantes F_{v_i} sont données dans le tableau 1.

En outre, la fonction $c = CalculCoupleCoriolisCentrifuge\,(q, \dot{q})$, qui est donnée, retourne le vecteur des couples articulaires produit par les forces de *Coriolis* et centrifuges (où le vecteur c correspond à la quantité $C\,(q, \dot{q})\,\dot{q}$).

3 Génération de trajectoire articulaire

***Q*18** On souhaite générer une trajectoire polynomiale de degré 5 à suivre dans l'espace articulaire permettant d'atteindre en temps minimal t_f la configuration finale désirée q_{d_f} à partir de la configuration initiale q_{d_i}. Ce mouvement est effectué à vitesses et accélérations initiales et finales nulles, et est échantillonné à une période $T_e = 1$ms. On donne :

- $q_{d_i} = [-1.00, 0.00, -1.00, -1.00, -1.00, -1.00]^t$ rad,
- $q_{d_f} = [0.00, 1.00, 0.00, 0.00, 0.00, 0.00]^t$ rad.

Quel est le temps minimal final t_{f_i} pour chaque articulation i en ne tenant compte que du vecteur k_a des accélérations articulaires maximales ? Les termes k_{a_i} seront calculés à partir du rapport des couples moteurs maximaux τ_{max_i} (donnés dans le tableau 1), des rapports de réduction r_{red_i} et des inerties maximales vues par les articulations (supposées toutes égales à la valeur μ_2 calculée à la question ***Q*14**).

***Q*19** Programmer une fonction $q_c = GeneTraj(q_{d_i}, q_{d_f}, t)$ capable de générer le point de consigne $q_c\,(t)$ à l'instant t de la trajectoire demandée précédemment. Dans cette question, vous choisirez un temps global final minimum de $t_f = 0.5$ s pour coordonner toutes les articulations [3].

Créer le bloc de génération de trajectoire correspondant sous *Simulink*^{TM}.

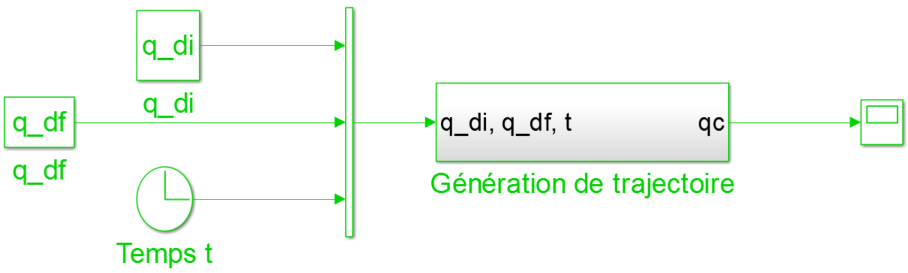


FIGURE 3 – Génération de trajectoire sous *Simulink*^{TM}.

Tracer l'évolution temporelle des trajectoires articulaires désirées q_{c_i} (pour $i = 1, \ldots, 6$) lorsque t varie de 0 à t_f.

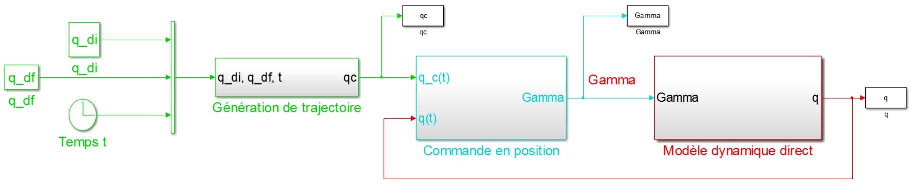
3. Ce temps global final minimum est un majorant des temps t_{f_i} qui ont été calculés à la question ***Q*18**.

4 Commande dans l'espace articulaire

***Q*20** Le robot est asservi en position au moyen d'une commande articulaire P.D. décentralisée avec compensation de la gravité :

$$\Gamma = K_p (q_d - q) + K_d (\dot{q}_d - \dot{q}) + \hat{G}(q)$$

Créer le bloc de commande en position correspondant sous *Simulink*^{TM}, puis construire le schéma de commande en boucle fermée intégrant les blocs précédemment définis.



Proposer un réglage des gains articulaires K_{p_i} et K_{d_i} capables d'assurer une réponse temporelle stable et amortie du système en boucle fermée, dont l'erreur $e(t) = q_{c_i}(t) - q_i(t)$ en suivi de trajectoire soit au plus de 0.05 rad pour chaque articulation. En outre, votre réglage des gains K_{p_i} et K_{d_i} doit être acceptable du point de vue des couples articulaires maximaux admissibles (calculés à partir des couples moteurs maximaux τ_{max_i}).

Donner les valeurs numériques retenues pour votre réglage de gains.

Tracer l'évolution temporelle des trajectoires articulaires $q_i(t)$, ainsi que celle des erreurs $e(t)$ en suivi de trajectoire.

Tracer l'évolution temporelle des couples articulaires de commande $\tau_i(t)$ correspondant à votre réglage de gain.

Annexe

Paramètres	Valeurs numériques	Grandeurs
x_{G_1}, y_{G_1}, z_{G_1}	0m, 0m, −0.25m	Coordonnées de G_1 dans $\mathcal{R}_1$
x_{G_2}, y_{G_2}, z_{G_2}	0.35m, 0m, 0m	Coordonnées de G_2 dans $\mathcal{R}_2$
x_{G_3}, y_{G_3}, z_{G_3}	0m, −0.1m, 0m	Coordonnées de G_3 dans $\mathcal{R}_3$
x_{G_4}, y_{G_4}, z_{G_4}	0m, 0m, 0m	Coordonnées de G_4 dans $\mathcal{R}_4$
x_{G_5}, y_{G_5}, z_{G_5}	0m, 0m, 0m	Coordonnées de G_5 dans $\mathcal{R}_5$
x_{G_6}, y_{G_6}, z_{G_6}	0m, 0m, 0m	Coordonnées de G_6 dans $\mathcal{R}_6$
m_1	15.0kg	Masse du corps 1
m_2	10.0kg	Masse du corps 2
m_3	1.0kg	Masse du corps 3
m_4	7.0kg	Masse du corps 4
m_5	1.0kg	Masse du corps 5
m_6	0.5kg	Masse du corps 6
I_1	$\begin{bmatrix} 0.80 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.80 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{O_1}} kg.m^2$	Tenseur d'inertie du corps 1
I_2	$\begin{bmatrix} 0.10 & 0 & 0.10 \\ 0 & 1.50 & 0 \\ 0.10 & 0 & 1.50 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{O_2}} kg.m^2$	Tenseur d'inertie du corps 2
I_3	$\begin{bmatrix} 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{O_3}} kg.m^2$	Tenseur d'inertie du corps 3
I_4	$\begin{bmatrix} 0.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{O_4}} kg.m^2$	Tenseur d'inertie du corps 4
I_5	$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{O_5}} kg.m^2$	Tenseur d'inertie du corps 5
I_6	$\begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{O_6}} kg.m^2$	Tenseur d'inertie du corps 6
J_{m_i} $(i = 1, \ldots, 6)$	$10 \times 10^{-6} kg.m^2$	Moment d'inertie des rotors
r_{red_i} $(i = 1, \ldots, 3)$	100	Rapport de réduction
r_{red_i} $(i = 4, \ldots, 6)$	70	Rapport de réduction
$F_{v_1}, \ldots, F_{v_6}$	$10N.m.rad^{-1}.s$	Frottements visqueux articulaires
τ_{max_i} $(i = 1, \ldots, 6)$	$5N.m$	Couple maximal des moteurs

TABLE 1 – Données numériques du robot.