

---

---

ESERCIZI DI  
FISICA GENERALE PER LA  
FACOLTÀ DI SCIENZE FARMACEUTICHE

---

---

IN PREPARAZIONE AL CORSO *FISICA E INFORMATICA*

SCRITTO DA  
DAVIDE MARIA  
TAGLIABUE

*UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
MILANO*

$\boxed{DMT}$

2024

## Indice

<b>1</b>	<b>Lezione di venerdì 5 Aprile 2024</b>	<b>2</b>
1.1	Cifre significative . . . . .	2
1.2	Cinematica . . . . .	2
1.3	Dinamica . . . . .	3
1.4	Gravitazione . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Lezione di venerdì 12 Aprile 2024</b>	<b>6</b>
2.1	Domande (18 punti) . . . . .	6
2.2	Esercizi (15 punti) . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Lezione di venerdì 10 Maggio 2024</b>	<b>13</b>
3.1	Fluidodinamica . . . . .	13
3.2	Temperatura e teoria cinetica . . . . .	15
3.3	Calorimetria . . . . .	17
3.4	Cicli termodinamici . . . . .	19

# 1 Lezione di venerdì 5 Aprile 2024

In questa lezione affrontiamo i seguenti argomenti:

- esercizi sulle *cifre significative*,
- esercizi sulla *cinematica*,
- esercizi sulla *dinamica*,
- esercizi sulla *gravitazione*.

## 1.1 Cifre significative

### Esercizio 1.1

Un edificio a forma di parallelepipedo ha una base di area  $225.4 \text{ m}^2$  e un'altezza di  $63.2 \text{ m}$ . Calcolare il suo volume, esprimendolo con il numero corretto di cifre significative.

**Soluzione:**

Il risultato di una moltiplicazione (o divisione) di due grandezze fisiche deve avere tante cifre significative quante ne ha la grandezza che ne contiene meno. In questo caso:

$$V = A \times h = (225.4 \text{ m}^2) \times (63.2 \text{ m}) = 142\,000 \text{ m}^3. \quad (1.1)$$

### Esercizio 1.2

In un esperimento di fisica, si misurano due lunghezze e si ottengono rispettivamente i valori  $x = 32.578 \text{ m}$  e  $y = 5.6489 \text{ m}$ . Si esprima la somma  $z = x + y$  con il numero corretto di cifre significative.

**Soluzione:**

Il risultato di una somma (o sottrazione) di due grandezze fisiche con una o più cifre decimali deve contenere un numero di cifre decimali pari a quello della grandezza che ne contiene di meno. In questo caso:

$$z = x + y = (32.578 \text{ m}) + (5.6489 \text{ m}) = 38.227 \text{ m}. \quad (1.2)$$

## 1.2 Cinematica

### Esercizio 1.3

Partendo da una corsia esterna, un'auto si immette in autostrada con una velocità iniziale pari a  $v_{\text{in}} = 35 \text{ km/h}$ . L'auto inizia poi ad accelerare con un'accelerazione costante di  $a = 4 \text{ m/s}^2$ , fino a raggiungere la velocità finale  $v_{\text{f}} = 130 \text{ km/h}$ . Si calcolino:

- i) l'intervallo di tempo  $\Delta t$  necessario per passare da  $v_0$  a  $v_f$ ,
- ii) lo spazio  $\Delta x$  percorso nel mentre.

**Soluzione:**

L'auto si muove di *moto rettilineo uniformemente accelerato*. Questo implica che

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\Delta v}{a}. \quad (1.3)$$

Utilizzando le unità del sistema internazionale, abbiamo  $v_{\text{in}} = 9.7 \text{ m/s}$  e  $v_f = 36.1 \text{ m/s}$ , da cui

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = 6.6 \text{ m/s}. \quad (1.4)$$

Questo risponde alla domanda i). Per quanto riguarda la domanda ii), ricordiamo che un oggetto che ha accelerazione lineare costante soddisfa la seguente equazione del moto:

$$\Delta x = v_{\text{in}} \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2. \quad (1.5)$$

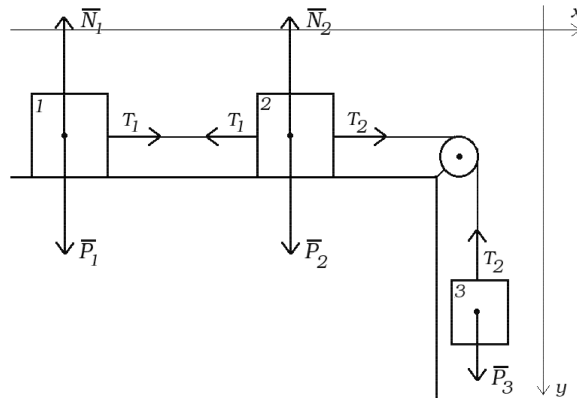
Sostituendo i valori numerici di  $v_{\text{in}}$ ,  $\Delta t$  e  $a$ , e approssimando il risultato a due cifre significative, troviamo

$$\Delta x = 150 \text{ m}. \quad (1.6)$$

**1.3 Dinamica****Esercizio 1.4**

I corpi 1, 2 e 3, di massa rispettivamente  $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3.0 \text{ kg}$  e  $m_3 = 4.0 \text{ kg}$ , sono collegati come in figura tramite un filo inestendibile. Trascurando ogni attrito, si calcolino:

- i) l'accelerazione  $a$  del sistema,
- ii) le tensioni dei due fili.

**Soluzione:**

Cominciamo con il definire la dinamica di ciascuno dei tre corpi:

$$\text{corpo 1: } \begin{cases} \vec{P}_1 - \vec{N}_1 = 0, \\ \vec{T}_1 = m_1 a \hat{x}, \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\text{corpo 2: } \begin{cases} \vec{P}_2 - \vec{N}_2 = 0, \\ \vec{T}_2 - \vec{T}_1 = m_2 a \hat{x}, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\text{corpo 3: } \begin{cases} \vec{P}_3 - \vec{T}_2 = m_3 a \hat{y}, \end{cases} \quad (1.9)$$

dove  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono i versori dei due assi. Per convenzione, abbiamo messo un segno *meno* davanti ai vettori delle forze che puntano nella direzione negativa degli assi. Notiamo inoltre che tutti e tre corpi si muovono con un'accelerazione che ha lo stesso modulo  $a$ , in quanto vincolati da un filo inestensibile. Per trovare i moduli  $a$ ,  $T_1$  e  $T_2$ , dobbiamo dunque risolvere il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a, \\ T_2 - T_1 = m_2 a, \\ m_3 g - T_2 = m_3 a. \end{cases} \quad (1.10)$$

Sostituiamo la prima equazione nella seconda, e poi la seconda nella terza, ottenendo:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a, \\ T_2 = (m_1 + m_2) a, \\ m_3 g - (m_1 + m_2) a = m_3 a, \end{cases} \quad (1.11)$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 4.4 \text{ m/s}^2, \\ T_1 &= \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 8.8 \text{ N}, \\ T_2 &= \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 22 \text{ N}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

## 1.4 Gravitazione

### Esercizio 1.5

Un asteroide di massa  $m$  si muove lungo un'orbita circolare di raggio  $r$  attorno al Sole, alla velocità  $v$ . A un certo punto impatta con un altro asteroide di massa  $M$  e viene spinto in una nuova orbita circolare, lungo cui si muove a  $1.5 v$ . Qual è il raggio della nuova orbita in termini di  $r$ ?

#### Soluzione:

Prima dell'urto, l'asteroide di massa  $m$  orbita con moto circolare uniforme attorno al Sole. Ciò significa che la forza centripeta  $\vec{F}_c$  deve coincidere con la forza gravitazione  $\vec{F}_g$ , ossia  $\vec{F}_g = \vec{F}_c$ . Questo implica che

$$\frac{G m M_S}{r^2} = m \frac{v^2}{r}, \quad \implies \quad G M_S = r v^2 \equiv \text{costante}, \quad (1.13)$$

ossia il prodotto  $r v^2$  è costante. Pertanto, dopo l'urto, l'asteroide verrà spinto in una nuova orbita circolare con velocità  $v_f = 1.5 v$ , con un raggio  $r_f$  tale che

$$r_f v_f^2 = G M_S \equiv r v^2. \quad (1.14)$$

Troviamo quindi

$$r_f = \frac{v^2}{v_f^2} r = \frac{4}{9} v. \quad (1.15)$$

### Esercizio 1.6

Il pianeta Giove possiede una massa circa 320 volte maggiore della Terra. Per questo motivo è stato affermato che una persona verrebbe schiacciata dalla forza di gravità di un pianeta delle dimensioni di Giove, poiché un uomo non può sopravvivere a più di qualche  $g$ .

Si calcoli l'accelerazione, in termini di  $g$ , che una persona avvertirebbe se si trovasse all'equatore di Giove, tenendo conto anche della rotazione del pianeta. Si usino i seguenti dati:

- massa di Giove:  $M_G = 1.9 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ ,
- raggio equatoriale di Giove:  $R_G = 7.1 \cdot 10^4 \text{ km}$ ,
- periodo di rotazione di Giove:  $T_G = 9 \text{ h } 55 \text{ min}$ .

#### Soluzione:

Una persona che si trova all'equatore risente dell'azione di tre forze:

- i) forza di gravità  $\vec{F}_g$  (diretta verso il centro del pianeta),
- ii) forza *centrifuga*  $\vec{F}_{cf}$ , dovuta alla rotazione del pianeta; ha la stessa direzione di  $\vec{F}_g$ , ma verso opposto (punta verso l'esterno del pianeta),
- iii) reazione vincolare  $\vec{N}$  della superficie di Giove.

Chiamando  $\hat{r}$  il raggio versore che punta verso l'esterno, scriviamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \vec{F}_g + \vec{F}_{cf} + \vec{N} = 0, \\ \vec{F}_g = -\frac{G m M_G}{R_G^2} \hat{r}, \\ \vec{F}_{cf} = m \frac{v^2}{R_G} \hat{r}, \\ \vec{N} = m g_G \hat{r}, \end{cases} \quad (1.16)$$

dove  $g_G$  indica l'accelerazione percepita dalla persona sulla superficie di Giove. Otteniamo pertanto

$$-\frac{G m M_G}{R_G^2} + m \frac{v^2}{R_G} + m g_G = 0. \quad (1.17)$$

Notiamo che la massa  $m$  si semplifica, mentre la velocità tangenziale  $v$  si può esprimere come

$$v = \frac{2\pi R_G}{T_G}. \quad (1.18)$$

Pertanto, sostituendo tale espressione nell'Eq. (1.17), concludiamo che

$$g_G = \frac{G M_G}{R_G^2} - \frac{4\pi^2 R_G}{T_G^2} = 23 \text{ m/s}^2, \quad (1.19)$$

ossia

$$\frac{g_G}{g} = 2.3. \quad (1.20)$$

## 2 Lezione di venerdì 12 Aprile 2024

In questa lezione presentiamo le soluzioni della *Prova in itinere* del 15 Aprile 2020.

### 2.1 Domande (18 punti)

#### Esercizio 2.1

Calcolare il risultato con il giusto numero di cifre significative delle seguenti grandezze:

i)  $A = (5.4 \text{ cm}) \times (3.95 \text{ cm})$ ;

ii)  $V = (62 \text{ m/s}) + (10.2 \text{ m/s})$ .

**Soluzione:**

Il risultato di una moltiplicazione (o divisione) di due grandezze fisiche deve avere tante cifre significative quante ne ha la grandezza che ne contiene meno. In questo caso:

$$A = (5.4 \text{ cm}) \times (3.95 \text{ cm}) = 21 \text{ cm}^2. \quad (2.1)$$

Nel caso invece di una somma (o sottrazione) di due grandezze fisiche con una o più cifre decimali, il risultato deve contenere un numero di cifre decimali pari a quello della grandezza che ne contiene di meno. In questo caso,

$$V = (62 \text{ m/s}) + (10.2 \text{ m/s}) = 72 \text{ m/s}. \quad (2.2)$$

#### Esercizio 2.2

Dire quali sono grandezze scalari e vettoriali: *energia potenziale*, *pressione*, *carica elettrica*, *campo elettrico*.

**Soluzione:**

Il *campo elettrico* è l'unica grandezza vettoriale, mentre *energia potenziale*, *pressione* e *carica elettrica* sono scalari.

#### Esercizio 2.3

Indicare l'unità di misura di  $GM_T/R_T^2$ , dove  $G$  è la costante di gravitazione universale,  $M_T$  è la massa della terra e  $R_T$  è il raggio della terra.

**Soluzione:**

Notiamo che

$$F_g = \frac{G m M_T}{R_T^2} \quad (2.3)$$

esprime il modulo della forza di gravità che lega un corpo di massa  $m$  alla Terra. Pertanto,

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2} \quad (2.4)$$

deve avere la dimensione di un'accelerazione, ossia  $\text{m/s}^2$ .

---

#### Esercizio 2.4

In un moto circolare uniforme di periodo  $T = 3.5$  s e raggio  $R = 140.5$  cm, calcolare la frequenza di rotazione, la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta.

**Soluzione:**

In un moto circolare uniforme, la frequenza di rotazione è pari a

$$f = \frac{1}{T} = 0.29 \text{ Hz}, \quad (2.5)$$

la velocità angolare a

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2.5 \text{ m/s}, \quad (2.6)$$

dove abbiamo usato  $R = 1.405$  m, e l'accelerazione centripeta a

$$a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R} = 4.5 \text{ m/s}^2. \quad (2.7)$$

---

#### Esercizio 2.5

Il peso di un corpo è maggiore o minore se misurato sul monte Everest rispetto al livello del mare? Spiegare perché. Quanto varia l'accelerazione di gravità  $g$ ? Si consideri la massa della Terra  $M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$  kg, il raggio della Terra  $R_T = 6380$  km e l'altezza del monte Everest  $h = 8.90$  km.

**Soluzione:**

Il modulo della forza di gravità che lega un corpo di massa  $m$  alla Terra è pari a

$$F_g = \frac{G m M_T}{r^2}, \quad (2.8)$$

dove  $r$  è la distanza del corpo dal centro del pianeta. L'accelerazione di gravità sarà pertanto

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{G M_T}{r^2}. \quad (2.9)$$

Al crescere di  $r$ ,  $a_g$  diminuisce, quindi ci aspettiamo che l'accelerazione di gravità sia maggiore al livello del mare, dove troviamo come valore numerico

$$a_g = \frac{G M_T}{R_T^2} = 9.80 \text{ m/s}^2. \quad (2.10)$$

Sulla punta del monte Everest varrà invece

$$a_g = \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} = 9.77 \text{ m/s}^2. \quad (2.11)$$

---



**Esercizio 2.6**

Un oggetto di massa  $m = 1.2$  kg è fermo su un piano scabro nonostante che venga applicata una forza orizzontale di 2.3 N. Calcolare tutte le forze agenti sul corpo e indicarne il modulo, la direzione e il verso.

**Soluzione:**

Sul corpo agiscono quattro forze:

- i) la forza peso  $\vec{P}$ , diretta verso il centro della Terra, di modulo

$$P = mg = 12 \text{ N}; \quad (2.12)$$

- ii) la reazione vincolare del piano  $\vec{N} = -\vec{P}$ , con stesso modulo e direzione di  $\vec{P}$ , ma verso opposto;

- iii) una forza esterna di modulo  $F = 2.3$  N, parallela al piano;

- iv) la forza d'attrito  $\vec{F}_a = -\vec{F}$ , con stesso modulo e direzione di  $\vec{F}$ , ma verso opposto.

Ricordiamo che la forza d'attrito statico non ha un valore intrinseco, ma assume il modulo della forza cui si oppone, fino al valore massimo  $F_s^{\max} = \mu_s N$ .

**Esercizio 2.7**

Determinare lo spazio percorso da un oggetto lasciato cadere da una torre sotto l'azione della gravità dopo 1.3 s. Quale sarà lo spazio percorso tra  $t_1 = 1.5$  s e  $t_2 = 2.5$  s?

**Soluzione:**

Un corpo in caduta libera soddisfa la seguente legge oraria:

$$x_f = x_{\text{in}} + v_{\text{in}}(t_f - t_{\text{in}}) - \frac{1}{2}g(t_f - t_{\text{in}})^2, \quad (2.13)$$

dove abbiamo preso l'asse delle ordinate diretto verso l'alto. Siamo liberi di fissare  $t_{\text{in}} = 0$  s, e poiché in tale istante abbiamo  $v_{\text{in}} = 0$  m/s, l'Eq. (2.13) si riduce a

$$x_f = x_{\text{in}} - \frac{1}{2}g t_f^2. \quad (2.14)$$

Assumendo  $t_f = 1.3$  s, troviamo

$$\Delta x = x_f - x_{\text{in}} = -\frac{1}{2}g t_f^2 = -8.3 \text{ m}, \quad (2.15)$$

dove il segno  $-$  indica che il corpo, cadendo, si sta avvicinando all'origine del nostro sistema di riferimento, ossia il terreno.

Per trovare lo spazio percorso tra gli intervalli di tempo  $t_1$  e  $t_2$ , utilizziamo l'Eq. (2.14) per entrambi questi tempi, come segue:

$$\begin{cases} x(t_1) = x_{\text{in}} - \frac{1}{2}g t_1^2, \\ x(t_2) = x_{\text{in}} - \frac{1}{2}g t_2^2. \end{cases} \quad (2.16)$$

Sottraiamo la prima equazione del sistema alla seconda, ottenendo:

$$\Delta x_{21} = x(t_2) - x(t_1) = -\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) = -19.6 \text{ m}. \quad (2.17)$$

**Esercizio 2.8**

In un urto completamente anelastico un corpo di massa  $m = 1.2$  kg e velocità  $v = 10.2$  m/s urta su un corpo di massa  $M = 12.0$  kg a riposo. Calcolare l'impulso e l'energia cinetica prima e dopo l'urto del sistema. Commentare il risultato.

**Soluzione:**

Per definizione, in un *urto completamente anelastico* due corpi rimangono attaccati tra loro dopo l'impatto. Ciò significa che la quantità di moto finale sarà pari a  $p_f = (m + M)v_f$ . Per quanto riguarda la quantità di moto iniziale, questa corrisponde semplicemente a  $p_{in} = mv$ , poiché prima dell'impatto il corpo di massa  $M$  è fermo. Quindi

$$p_{in} = p_f \quad \Rightarrow \quad mv = (m + M)v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{m}{m + M}v = 0.93 \text{ m/s} . \quad (2.18)$$

La differenza tra la quantità di moto finale e iniziale del corpo di massa  $m$  ci restituisce l'*impulso* che esso ha *subito* dall'impatto con il corpo di massa  $M$ , e corrisponde a

$$\Delta p = m(v_f - v) = -11 \text{ kg m/s} . \quad (2.19)$$

Il segno  $-$  indica che l'impulso ha verso opposto alla direzione iniziale del moto del corpo di massa  $m$ .

**Esercizio 2.9**

Se il lavoro delle forze non conservative effettuato su un sistema è  $W_{nc} = -10.3$  J e la variazione dell'energia potenziale del sistema è  $\Delta U = 13.0$  J, quanto vale la variazione dell'energia cinetica  $\Delta K$  del sistema considerato?

**Soluzione:**

Ricordiamo che il *teorema delle forze vive* afferma che

$$W_{tot} = W_c + W_{nc} = \Delta K , \quad (2.20)$$

dove il lavoro conservativo corrisponde a  $W_c = -\Delta U$ . Nel nostro caso,

$$\Delta K = W_{nc} - \Delta U = -23.3 \text{ J} . \quad (2.21)$$

**Esercizio 2.10**

Calcolare l'allungamento di una molla di costante elastica  $k = 45.7$  N/m alla quale viene applicata una forza  $F = 10.5$  N.

**Soluzione:**

È sufficiente usare la *legge di Hooke*:

$$F = k\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{k} = 0.230 \text{ m} . \quad (2.22)$$

## 2.2 Esercizi (15 punti)

### Esercizio 2.11: (*nome originale: A*)

Due asteroidi si urtano frontalmente: prima dell'urto l'asteroide  $A$  ( $m_A = 6.9 \cdot 10^{12}$  kg) ha un velocità di 2.9 km/s e l'asteroide  $B$  ( $m_B = 1.20 \cdot 10^{13}$  kg) ha un velocità di 1.9 km/s orientata in senso opposto. Se gli asteroidi si uniscono, quale sarà la velocità (direzione e modulo) del nuovo asteroide dopo l'urto? Calcolare l'energia cinetica prima e dopo l'urto e spiegare il risultato ottenuto.

#### Soluzione:

Trattandosi di un urto totalmente anaelastico, si conserva la quantità di moto totale, ma non l'energia cinetica. La quantità di moto prima dell'urto è data da

$$\vec{p}_{\text{in}} = m_A \vec{v}_{\text{in}}^A + m_B \vec{v}_{\text{in}}^B, \quad (2.23)$$

mentre quella dopo l'urto corrisponde a

$$\vec{p}_{\text{f}} = (m_A + m_B) \vec{v}_{\text{f}}. \quad (2.24)$$

Prendendo il versore  $\hat{x}$  con stessa direzione e verso di  $\vec{v}_{\text{in}}^A$ , abbiamo

$$\vec{p}_{\text{in}} = \vec{p}_{\text{f}} \quad \Rightarrow \quad (m_A v_{\text{in}}^A - m_B v_{\text{in}}^B) \hat{x} = (m_A + m_B) v_{\text{f}} \hat{x}, \quad (2.25)$$

da cui otteniamo

$$v_{\text{f}} = \frac{m_A v_{\text{in}}^A - m_B v_{\text{in}}^B}{m_A + m_B} = -0.15 \text{ km/s} = -1.5 \cdot 10^2 \text{ m/s}. \quad (2.26)$$

$\vec{v}_{\text{f}}$  ha pertanto la stessa direzione e verso di  $\vec{v}_{\text{in}}^B$ .

Per quanto concerne la variazione di energia cinetica, troviamo

$$\Delta K = K_{\text{f}} - K_{\text{in}} = \frac{1}{2} (m_A + m_B) v_{\text{f}}^2 - \frac{1}{2} (m_A (v_{\text{in}}^A)^2 + m_B (v_{\text{in}}^B)^2) = -2.9 \cdot 10^{19} \text{ J}. \quad (2.27)$$

Come ci aspettavamo, durante l'urto è andata persa parte dell'energia cinetica. È importante sottolineare che, per il calcolo di  $\Delta K$ , tutte le velocità devono essere espresse in m/s.

### Esercizio 2.12: (*nome originale: B*)

Un corpo di massa  $m = 3.2$  kg, attaccato ad una molla con costante elastica  $k = 290$  N/m, compie un moto armonico. A distanza di  $d = 2.5$  cm dalla posizione di equilibrio il corpo si muove con velocità  $v = 0.90$  m/s. Calcolare

- i) l'ampiezza del moto,
- ii) la massima velocità scalare raggiunta dal corpo.

#### Soluzione:

Per trovare l'ampiezza del moto, è sufficiente applicare la *conservazione dell'energia meccanica* (si noti che la forza elastica è *conservativa*):

$$K_{\text{in}} + U_{\text{in}} = \cancel{K_{\text{f}}} + U_{\text{f}}. \quad (2.28)$$

La posizione iniziale è quella in cui conosciamo i dati  $d$  e  $v$ , mentre la posizione finale quella corrispondente al massimo allungamento della molla, che è proprio l'ampiezza  $A$  del moto. In tale posizione, la velocità è nulla, da cui  $K_f = 0$  J. Quindi,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{mv^2 + kd^2}{k}} = 0.098 \text{ m}, \quad (2.29)$$

dove abbiamo usato  $d = 0.025$  m.

Possiamo trovare una via alternativa per risolvere il problema. Sappiamo che la legge oraria per un corpo che si muove di moto circolare uniforme corrisponde a

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.30)$$

dove  $\phi$  è una generica fase. La legge della velocità è invece

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi). \quad (2.31)$$

Sappiamo che al tempo  $t_{\text{in}}$  il sistema si trova nella posizione  $x(t_{\text{in}}) = d$  con una velocità  $v(t_{\text{in}}) = v$ . Pertanto, abbiamo che

$$\begin{cases} A \sin(\omega t_{\text{in}} + \phi) = d, \\ A\omega \cos(\omega t_{\text{in}} + \phi) = v. \end{cases} \quad (2.32)$$

Dividiamo la prima equazione per la seconda, così da trovare:

$$\frac{1}{\omega} \tan(\omega t_{\text{in}} + \phi) = \frac{d}{v} \quad \Rightarrow \quad \omega t_{\text{in}} + \phi = \tan^{-1} \left( \frac{\omega d}{v} \right). \quad (2.33)$$

A questo punto, invertiamo la prima equazione in (2.32) per ottenere l'ampiezza:

$$A = \frac{d}{\sin(\omega t_{\text{in}} + \phi)} = \frac{d}{\sin \left( \tan^{-1} \left( \frac{\omega d}{v} \right) \right)} = 0.098 \text{ m}, \quad (2.34)$$

che coincide con il risultato ottenuto tramite la conservazione dell'energia.

Da ultimo, per quanto riguarda la velocità scalare massima, dall'Eq. (2.31) troviamo:

$$v(t) = A\omega \cos(\omega t + \phi) \leq \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \equiv v_{\text{max}} = 0.93 \text{ m/s}. \quad (2.35)$$

### Esercizio 2.13: (*nome originale: C*)

Un corpo di massa  $m = 12.0$  kg si trova su un piano inclinato scabro con angolo  $\alpha = 30^\circ$  rispetto al superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito statico è  $\mu_s = 0.42$ . Determinare se il corpo scivola o se rimane fermo sul piano inclinato. Qual è l'angolo massimo consentito affinché il corpo di massa  $m$  non scivoli?

#### Soluzione:

Dividiamo la forza peso  $\vec{P}$  in due componenti  $\vec{P}_{\parallel}$  e  $\vec{P}_{\perp}$ , la prima parallela e la seconda perpendicolare al piano inclinato.  $\vec{P}_{\perp}$  è compensata dalla normale al piano, ossia

$$\vec{P}_{\perp} + \vec{N} = 0. \quad (2.36)$$

Prendendo i moduli di entrambi i vettori, troviamo:

$$mg \cos(\alpha) - N = 0 \quad \implies \quad N = mg \cos(\alpha). \quad (2.37)$$

Conoscendo  $N$ , possiamo calcolare la forza di attrito statico massima, che corrisponde a

$$F_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos(\alpha) = 43 \text{ N}. \quad (2.38)$$

Notiamo che  $\vec{F}_s^{\max}$  è diretta lungo la componente parallela al piano, ma in verso opposto a  $\vec{P}_{||}$ . Il sistema è in equilibrio se e solo se  $P_{||} \leq F_s^{\max}$ . Tuttavia,  $P_{||}$  è pari a

$$P_{||} = mg \sin(\alpha) = 58.8 \text{ N}, \quad (2.39)$$

quindi il sistema non è in equilibrio.

Affinché il sistema risulti in equilibrio, deve valere la condizione:

$$P_{||} \leq F_s^{\max} \quad \implies \quad mg \sin(\alpha) \leq \mu_s mg \cos(\alpha), \quad (2.40)$$

condizione soddisfatta solo se

$$\tan(\alpha) \leq \mu_s \quad \implies \quad \alpha \leq \tan^{-1}(\mu_s) = 23^\circ. \quad (2.41)$$

---

### 3 Lezione di venerdì 10 Maggio 2024

In questa lezione affrontiamo i seguenti argomenti:

- esercizi sulla *fluidodinamica*,
- esercizi sulla *temperatura e teoria cinetica*,
- esercizi sulla *calorimetria*,
- esercizi sui *cicli termodinamici*.

#### 3.1 Fluidodinamica

##### Esercizio 3.1

L'acqua scorre attraverso un idrante di raggio 9.6 cm con una velocità di modulo 1.3 m/s. Alla fine del tubo l'acqua esce attraverso un ugello di raggio 2.5 cm.

- Trovare il modulo della velocità dell'acqua che esce dall'ugello.
- Supponendo che la pressione nell'idrante sia di 350 kPa, trovare la pressione nell'ugello.

**Soluzione:**

Per rispondere alla domanda i), assumiamo che il fluido sia ideale e, dette  $v_1$  e  $v_2$  le velocità del fluido rispettivamente attraverso le superfici  $S_1$  e  $S_2$ , imponiamo la *conservazione della portata*:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \implies \quad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1 = 19 \text{ m/s}. \quad (3.1)$$

Passando alla domanda ii), utilizziamo l'*equazione di Bernoulli*:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \cancel{\rho g h_1} = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2}, \quad (3.2)$$

dove abbiamo cancellato i contributi gravitazionali poiché  $h_1 = h_2$ . Ci rimane pertanto

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) = 170 \text{ kPa}, \quad (3.3)$$

con  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

##### Esercizio 3.2

Durante una tempesta, un vento soffia a 35.5 m/s sul tetto, orizzontale, di una piccola casa. Trovare la differenza di pressione tra l'aria dentro la casa e quella sulla superficie del tetto (la densità dell'aria è  $1.29 \text{ kg/m}^3$ ).

**Soluzione:**

Assumiamo che l'aria sia un fluido ideale e imponiamo l'equazione di Bernoulli all'interno e all'esterno del tetto:

$$P_{\text{int}} + \frac{1}{2} \cancel{\rho v_{\text{int}}^2} + \cancel{\rho g h_{\text{int}}} = P_{\text{est}} + \frac{1}{2} \rho v_{\text{est}}^2 + \cancel{\rho g h_{\text{est}}}. \quad (3.4)$$

Notiamo che i contributi gravitazionali si semplificano poiché, trascurando lo spessore del tetto, abbiamo  $h_{\text{int}} = h_{\text{est}}$ . Inoltre,  $v_{\text{int}} = 0$  m/s poiché l'aria interna al tetto è ferma. Concludiamo quindi che

$$\Delta P = P_{\text{int}} - P_{\text{est}} = \frac{1}{2} \rho v_{\text{est}}^2 = 813 \text{ Pa}. \quad (3.5)$$

Come si può osservare, la pressione interna (che equivale a 1 atm) è maggiore di quella esterna a causa della velocità del vento. In alcuni casi, la forza esercitata sulla superficie del tetto dalla differenza di pressione (diretta dal basso verso l'alto) è capace di scoperciarlo.

### Esercizio 3.3

Un corpo di rame ( $\rho_{\text{Cu}} = 8900 \text{ kg/m}^3$ ) di massa 3.0 kg viene completamente immerso in acqua ( $\rho_{\text{acq}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) ed appeso a una molla di massa trascurabile che risulta deformata di 3.0 cm. Calcolare la costante elastica della molla.

#### Soluzione:

Consideriamo un sistema di riferimento diretto verso l'alto (sia  $\hat{\mathbf{y}}$  il versore) e scriviamo le forze che agiscono sul corpo:

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg \hat{\mathbf{y}}, \\ \vec{F}_{\text{el}} = k\Delta x \hat{\mathbf{y}}, \\ \vec{F}_{\text{A}} = \rho_{\text{acq}} V_{\text{im}} g \hat{\mathbf{y}}, \end{cases} \quad (3.6)$$

dove  $\vec{P}$  è la forza peso,  $\vec{F}_{\text{el}}$  è la forza elastica ( $\Delta x = 3.0 \text{ cm}$ ), e  $\vec{F}_{\text{A}}$  è la *forza di Archimede*, nota anche come *forza idrostatica*.  $V_{\text{im}}$  indica il volume immerso, che in questo caso coincide con il volume totale  $V$  poiché il corpo è completamente immerso in acqua. Le tre forze sono in equilibrio tra loro, ossia

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{A}} = 0 \quad \implies \quad mg = k\Delta x + \rho_{\text{acq}} V g. \quad (3.7)$$

A questo punto, dal momento che  $V = m/\rho_{\text{Cu}}$ , possiamo ricavare la costante elastica della molla:

$$k = \frac{mg - \rho_{\text{acq}} V g}{\Delta x} = \frac{mg}{\Delta x} \left( 1 - \frac{\rho_{\text{acq}}}{\rho_{\text{Cu}}} \right) = 870 \text{ N/m}. \quad (3.8)$$

### Esercizio 3.4

In un vasto serbatoio aperto con le pareti verticali vi è dell'acqua fino ad un'altezza  $H = 8.0 \text{ m}$ . Si pratica un foro in una delle pareti a una profondità  $h = 2.0 \text{ m}$  al di sotto del livello dell'acqua. Calcolare a quale distanza  $d$  dal piede della parete il getto d'acqua uscente dal serbatoio colpisce il piano orizzontale.

#### Soluzione:

Per risolvere il problema facciamo ricorso all'equazione di Bernoulli

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{cost}. \quad (3.9)$$

Consideriamo un punto generico sulla superficie del fluido a contatto con l'aria e un punto sulla superficie del fluido adiacente al foro. Applichiamo la legge di Bernoulli in questi due punti:

$$P_0 + \rho g H = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_{\text{foro}}^2 + \rho g (H - h), \quad (3.10)$$

dove abbiamo considerato nulla la velocità del fluido sulla superficie. Notiamo inoltre che in entrambi i punti la pressione è pari alla pressione atmosferica  $P_0$ , che quindi si semplifica nell'equazione. Dall'equazione precedente ricaviamo la velocità:

$$v_{\text{foro}} = \sqrt{2gh}. \quad (3.11)$$

A questo punto il problema si è ridotto ad un esercizio di cinematica in due dimensioni. Consideriamo una particella di fluido come il generico punto materiale lanciato orizzontalmente con velocità lungo l'asse  $x$  pari a  $v_{x,\text{in}} = v_{\text{foro}}$  e  $v_{y,\text{in}} = 0$  m/s. Le equazioni del moto di tale particella sono:

$$\begin{cases} y(t) = (H - h) - \frac{1}{2}gt^2, \\ x(t) = v_{x,\text{in}}(t - t_{\text{in}}), \end{cases} \quad (3.12)$$

dove  $y_{\text{in}} = (H - h)$  indica l'altezza iniziale. Siamo liberi di fissare  $t_{\text{in}} = 0$  s. Per trovare  $d$ , dobbiamo risolvere il sistema imponendo  $x(t) = d$  e  $y(t) = 0$  m:

$$\begin{cases} H - h = \frac{1}{2}gt^2, \\ d = v_{\text{foro}}t. \end{cases} \quad (3.13)$$

Dalla prima equazione ricaviamo il tempo

$$t = \sqrt{\frac{2(H - h)}{g}}, \quad (3.14)$$

che sostituito nella seconda ci restituisce il risultato finale

$$d = v_{\text{foro}}t = 2\sqrt{h(H - h)} = 6.9 \text{ m}. \quad (3.15)$$

## 3.2 Temperatura e teoria cinetica

### Esercizio 3.5

Qual è l'energia traslazionale media di una molecola di ossigeno in condizioni standard? Qual è l'energia cinetica traslazionale totale di 1.0 mol?

**Soluzione:**

In un gas perfetto, l'energia traslazionale (ossia cinetica) media delle molecole in moto casuale è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta del gas. Nello specifico, si dimostra che

$$\bar{K} = \frac{1}{2}mv_{\text{qm}}^2 = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T, \quad (3.16)$$

dove  $\bar{K}$  è l'energia cinetica media di una singola molecola del gas,  $v_{\text{qm}}$  la *velocità quadratica media*, e  $k_{\text{B}}$  la *costante di Boltzmann*. Nelle *condizioni standard* abbiamo  $T = 0^\circ \text{C} = 273.15 \text{ K}$ , da cui

$$\bar{K} = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T = 5.7 \cdot 10^{-21} \text{ J}. \quad (3.17)$$

Per calcolare l'energia cinetica traslazionale totale a  $T = 25^\circ \text{C} = 298.15 \text{ K}$ , moltiplichiamo l'energia cinetica media  $\bar{K}$  a tale temperatura per il numero totale  $N$  di particelle contenute in  $n = 1.0$  mol:

$$E_{\text{tot}} = N\bar{K} = \frac{3}{2} \underbrace{\frac{N}{N_{\text{A}}}}_n \underbrace{N_{\text{A}}k_{\text{B}}}_R T = \frac{3}{2}nRT = 3700 \text{ J}, \quad (3.18)$$

dove  $N_{\text{A}}$  è il *numero di Avogadro* e  $R$  è la *costante universale dei gas*.



**Esercizio 3.6**

Se una banda di ferro ( $\alpha_{\text{Fe}} = 12 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$ ) fosse fissata saldamente attorno all'equatore terrestre a  $25 \text{ C}^\circ$  e venisse poi riscaldata a  $55 \text{ C}^\circ$ , di quanto si verrebbe a trovare al di sopra della Terra? ( $R_{\text{T}} = 6300 \text{ km}$ )

**Soluzione:**

Inizialmente la barra di ferro ha una lunghezza  $l_0$  pari alla circonferenza della Terra. Dopo un innalzamento  $\Delta T$  della temperatura, la sua lunghezza sarà

$$l = l_0(1 + \alpha_{\text{Fe}}\Delta T). \quad (3.19)$$

Poiché  $l = 2\pi(R_{\text{T}} + \Delta R)$  e  $l_0 = 2\pi R_{\text{T}}$ , allora

$$\Delta R = \frac{l - l_0}{2\pi} = \alpha_{\text{Fe}}\Delta T R_{\text{T}} = 2300 \text{ m} = 2.3 \text{ km}. \quad (3.20)$$

**Esercizio 3.7**

Un cubo di ferro galleggia in una bacinella di mercurio a  $0 \text{ C}^\circ$ . Se si alza la temperatura a  $25 \text{ C}^\circ$ , il cubo galleggerà più in alto o più in basso? Di quale percentuale cambierà la frazione di volume immerso? I coefficienti di dilatazione del volume del mercurio e del ferro valgono rispettivamente  $\beta_{\text{Hg}} = 180 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$  e  $\beta_{\text{Fe}} = 35 \cdot 10^{-6} (\text{C}^\circ)^{-1}$ .

**Soluzione:**

In generale, se un oggetto di volume  $V_0$  è sottoposto a una variazione di temperatura  $\Delta T$ , il suo volume finale diventa

$$V = V_0(1 + \beta\Delta T). \quad (3.21)$$

Sia  $m$  = la massa di questo oggetto. Poiché essa non varia al variare della temperatura, ne consegue che

$$\rho_0 V_0 = \rho V \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{V_0}{V} \rho_0 = \frac{\rho_0}{1 + \beta\Delta T}. \quad (3.22)$$

Ora che sappiamo come varia la densità di un corpo al variare di  $T$ , possiamo risolvere il problema. Per il principio di Archimede, l'equazione che regola il galleggiamento di un corpo immerso in un fluido è data da

$$V_{\text{im}} \rho_{\text{fluido}} = V_{\text{corpo}} \rho_{\text{corpo}}, \quad (3.23)$$

dove  $V_{\text{im}}$  indica il volume del corpo immerso nel fluido. Nel nostro caso, nella situazione iniziale abbiamo

$$V_{\text{im}}^{(\text{in})} \rho_{\text{Hg}}^{(\text{in})} = V_{\text{Fe}}^{(\text{in})} \rho_{\text{Fe}}^{(\text{in})} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{\text{im}}^{(\text{in})}}{V_{\text{Fe}}^{(\text{in})}} = \frac{\rho_{\text{Fe}}^{(\text{in})}}{\rho_{\text{Hg}}^{(\text{in})}}, \quad (3.24)$$

dove  $V_{\text{im}}^{(\text{in})}/V_{\text{Fe}}^{(\text{in})}$  è proprio la frazione di volume immerso iniziale. Volendo ora la frazione di volume immerso dopo un incremento  $\Delta T$  della temperatura, riscriviamo l'Eq. (3.25) nella condizione finale:

$$V_{\text{im}}^{(\text{fin})} \rho_{\text{Hg}}^{(\text{fin})} = V_{\text{Fe}}^{(\text{fin})} \rho_{\text{Fe}}^{(\text{fin})} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{\text{im}}^{(\text{fin})}}{V_{\text{Fe}}^{(\text{fin})}} = \frac{\rho_{\text{Fe}}^{(\text{fin})}}{\rho_{\text{Hg}}^{(\text{fin})}} = \frac{1 + \beta_{\text{Hg}}\Delta T}{1 + \beta_{\text{Fe}}\Delta T} \frac{\rho_{\text{Fe}}^{(\text{in})}}{\rho_{\text{Hg}}^{(\text{in})}}. \quad (3.25)$$

Combinando questo risultato con la seconda equazione in (3.25), otteniamo

$$\frac{V_{\text{im}}^{(\text{fn})}}{V_{\text{Fe}}^{(\text{fn})}} = \frac{1 + \beta_{\text{Hg}}\Delta T}{1 + \beta_{\text{Fe}}\Delta T} \frac{V_{\text{im}}^{(\text{in})}}{V_{\text{Fe}}^{(\text{in})}} = 1.0036 \frac{V_{\text{im}}^{(\text{in})}}{V_{\text{Fe}}^{(\text{in})}}, \quad (3.26)$$

ossia la frazione di volume immerso aumenta dello 0.36%.

In conclusione, il cubo di ferro, galleggia più in basso. Infatti, sebbene sia il ferro sia il mercurio si espandano all'aumentare della temperatura, il mercurio ha in percentuale un'espansione maggiore poiché  $\beta_{\text{Hg}} > \beta_{\text{Fe}}$ . Questo fa sì che la sua densità in proporzione diminuisca più di quella del ferro, che quindi galleggerà più in basso.

### 3.3 Calorimetria

#### Esercizio 3.8

Un blocco di rame di massa  $m_{\text{Cu}} = 10 \text{ g}$  si trova a una temperatura iniziale  $T_{\text{in}} = 12 \text{ C}^\circ$ . Al blocco viene fornito un calore  $Q = 320 \text{ J}$ . Determinare la temperatura finale  $T_{\text{f}}$  del blocco sapendo che il calore specifico del rame è  $c_{\text{Cu}} = 0.093 \text{ cal}/(\text{gC}^\circ)$ .

**Soluzione:**

Se una quantità di calore  $Q$  viene fornita a una sostanza di massa  $m$  e calore specifico  $c$ , senza incorrere in una transizione di fase, allora la temperatura della sostanza varia secondo la legge  $Q = mc\Delta T$ , da cui

$$\Delta T = T_{\text{f}} - T_{\text{in}} = \frac{Q}{mc}. \quad (3.27)$$

Tenendo conto che la conversione da cal a J è pari a

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}, \quad (3.28)$$

esprimiamo il calore specifico del rame come

$$c_{\text{Cu}} = 0.389 \text{ J}/(\text{gC}^\circ), \quad (3.29)$$

e sostituiamo questo valore nell'Eq. (3.27), ottenendo

$$T_{\text{f}} = T_{\text{in}} + \frac{Q}{mc} = 94 \text{ C}^\circ. \quad (3.30)$$

#### Esercizio 3.9

Un blocco di rame di massa  $m_{\text{Cu}} = 400 \text{ g}$  si trova alla temperatura iniziale  $T_{\text{in}}^{\text{Cu}} = 95 \text{ C}^\circ$ . Un blocco di alluminio di massa  $m_{\text{Al}} = 800 \text{ g}$  si trova invece alla temperatura iniziale  $T_{\text{in}}^{\text{Al}} = 27 \text{ C}^\circ$ . Essi vengono posti a contatto. Calcolare la temperatura di equilibrio del sistema  $T_{\text{eq}}$ , sapendo che il calore specifico del rame e dell'alluminio sono rispettivamente  $c_{\text{Cu}} = 0.389 \text{ J}/(\text{gC}^\circ)$  e  $c_{\text{Al}} = 0.900 \text{ J}/(\text{gC}^\circ)$ .

**Soluzione:**

Il corpo più caldo (rame) si raffredda fino alla temperatura di equilibrio, mentre il corpo più freddo (alluminio) si scalda fino alla temperatura di equilibrio. Poiché non viene scambiata energia con l'ambiente esterno, il calore ceduto dal rame  $Q_{\text{Cu}}$  equivale al calore assorbito dall'alluminio  $Q_{\text{Al}}$ :

$$Q_{\text{Cu}} + Q_{\text{Al}} = 0. \quad (3.31)$$

Dal momento che la temperatura di equilibrio è tale per cui  $27\text{ C}^\circ < T_{\text{eq}} < 95\text{ C}^\circ$ , nessuno dei due materiali compie una transizione di fase, da cui segue che

$$\begin{cases} Q_{\text{Cu}} = m_{\text{Cu}}c_{\text{Cu}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Cu}}), \\ Q_{\text{Al}} = m_{\text{Al}}c_{\text{Al}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Al}}). \end{cases} \quad (3.32)$$

Risolviemo dunque l'equazione

$$m_{\text{Cu}}c_{\text{Cu}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Cu}}) + m_{\text{Al}}c_{\text{Al}}(T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Al}}) = 0, \quad (3.33)$$

che ha come soluzione

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_{\text{Cu}}c_{\text{Cu}}T_{\text{in}}^{\text{Cu}} + m_{\text{Al}}c_{\text{Al}}T_{\text{in}}^{\text{Al}}}{m_{\text{Cu}}c_{\text{Cu}} + m_{\text{Al}}c_{\text{Al}}} = 39\text{ C}^\circ. \quad (3.34)$$

### Esercizio 3.10

Una massa di ghiaccio  $m_{\text{ghi}} = 1.5\text{ kg}$  alla temperatura  $T_{\text{in}}^{\text{ghi}} = -40\text{ C}^\circ$  è posta in un recipiente contenete una massa d'acqua  $m_{\text{acq}} = 2.0\text{ kg}$  alla temperatura iniziale  $T_{\text{in}}^{\text{acq}} = 20\text{ C}^\circ$ . Calcolare la massa  $m$  di ghiaccio che si fonde, sapendo che:

- calore specifico dell'acqua:  $c_{\text{acq}} = 4.186 \cdot 10^3\text{ J}/(\text{kgC}^\circ)$ ,
- calore specifico del ghiaccio:  $c_{\text{ghi}} = 3.093 \cdot 10^3\text{ J}/(\text{kgC}^\circ)$ ,
- calore latente di fusione del ghiaccio:  $\lambda_{\text{ghi}} = 3.33 \cdot 10^5\text{ J/kg}$ .

#### Soluzione:

Inizialmente l'acqua si raffredda fino ad una temperatura  $T_1$  cedendo al ghiaccio il calore  $Q_1$  che serve a far raggiungere a quest'ultimo la temperatura di  $0\text{ C}^\circ$ . Vale pertanto l'equazione

$$\underbrace{m_{\text{acq}}c_{\text{acq}}(T_1 - T_{\text{in}}^{\text{acq}})}_{=Q_1} + m_{\text{ghi}}c_{\text{ghi}}(0\text{ C}^\circ - T_{\text{in}}^{\text{ghi}}) = 0, \quad (3.35)$$

da cui

$$T_1 = T_{\text{acq}} + \frac{m_{\text{ghi}}c_{\text{ghi}}T_{\text{in}}^{\text{ghi}}}{m_{\text{acq}}c_{\text{acq}}} = 5\text{ C}^\circ. \quad (3.36)$$

Poiché ora l'acqua è a  $5\text{ C}^\circ$  e il ghiaccio a  $0\text{ C}^\circ$ , il sistema non è ancora in equilibrio. Pertanto, l'acqua cede calore  $Q_2$  al ghiaccio fino a raggiungere la temperatura di equilibrio di  $T_2 = 0\text{ C}^\circ$ , fondendo una massa  $m$  di ghiaccio secondo la relazione

$$\underbrace{m_{\text{acq}}c_{\text{acq}}(0\text{ C}^\circ - T_1)}_{=Q_2} + \lambda_{\text{ghi}}m = 0. \quad (3.37)$$

Otteniamo pertanto

$$m = \frac{m_{\text{acq}}c_{\text{acq}}T_1}{\lambda_{\text{ghi}}} = 0.13\text{ kg}. \quad (3.38)$$

### 3.4 Cicli termodinamici

#### Esercizio 3.11

Calcolare il calore assorbito da  $n = 2.00$  mol di gas monoatomico durante il ciclo

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A, \quad (3.39)$$

dove

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &= \text{isocora} & B \rightarrow C &= \text{isoterma}, \\ C \rightarrow D &= \text{isocora} & D \rightarrow A &= \text{isoterma}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Si assumano i seguenti valori:

$$P_A = 2.000 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad P_B = 4P_A, \quad P_C = 2.285 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \quad P_D = \frac{P_C}{4}, \quad (3.41)$$

$$T_A = 122 \text{ K}, \quad T_B = 4T_A, \quad T_C = 4T_A, \quad T_D = T_A, \quad (3.42)$$

#### Soluzione:

Poiché abbiamo a che fare con un ciclo, la variazione totale di energia interna è nulla ( $\Delta E = 0$ ), e il calore assorbito dal gas è pari a

$$Q = W, \quad (3.43)$$

dove  $W$  è il lavoro totale compiuto dal gas. Notiamo che

$$W = \cancel{W_{AB}} + W_{BC} + \cancel{W_{CD}} + W_{DA} = W_{BC} + W_{DA}, \quad (3.44)$$

in quanto il lavoro compiuto nelle trasformazioni isocore è nullo. Sfruttando l'espressione generale del lavoro compiuto in una isoterma si ha

$$\begin{aligned} W_{BC} &= nRT_B \log \left( \frac{V_C}{V_B} \right) = nRT_B \log \left( \frac{P_B}{P_C} \right), \\ W_{DA} &= nRT_A \log \left( \frac{V_A}{V_D} \right) = nRT_A \log \left( \frac{P_D}{P_A} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sostituendo i dati del problema, troviamo

$$\begin{aligned} W_{BC} &= 4nRT_A \log \left( \frac{4P_A}{P_C} \right), \\ W_{DA} &= -nRT_A \log \left( \frac{4P_A}{P_C} \right), \end{aligned} \quad (3.46)$$

da cui ricaviamo

$$Q = 3nRT_A \log \left( \frac{4P_A}{P_C} \right) = 7630 \text{ J}. \quad (3.47)$$

#### Esercizio 3.12

Calcolare il calore  $Q$  assorbito dal gas nel ciclo

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A, \quad (3.48)$$

dove

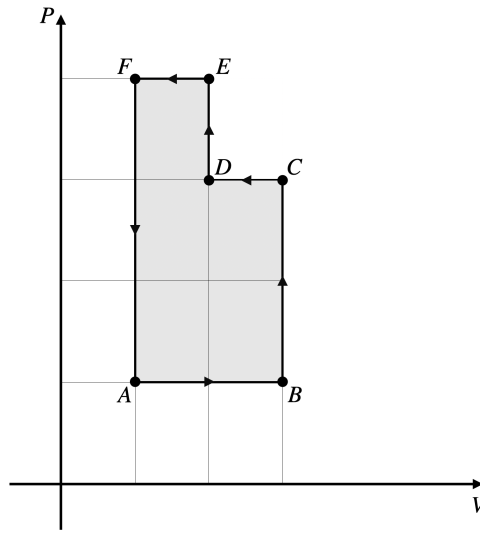
$$\begin{array}{lll} A \rightarrow B = \text{isobara} & B \rightarrow C = \text{isocora}, & C \rightarrow D = \text{isobara}, \\ D \rightarrow E = \text{isocora} & E \rightarrow F = \text{isobara}, & F \rightarrow A = \text{isocora}. \end{array} \quad (3.49)$$

Si assumano i seguenti valori:

$$V_A = \frac{V_B}{3} = \frac{V_D}{2} = 3 \text{ m}^3, \quad P_A = \frac{P_C}{3} = \frac{P_E}{4} = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (3.50)$$

**Soluzione:**

Rappresentiamo graficamente il ciclo termodinamico:



Detto  $W$  il lavoro totale compiuto dal gas, il calore assorbito  $Q$  dal gas è dato da

$$Q = W, \quad (3.51)$$

dove la variazione di energia interna  $\Delta E$  è nulla poiché abbiamo a che fare con un ciclo. Tenendo conto che il lavoro di una trasformazione isocora è nullo, e usando le relazioni  $V_C = V_B$ ,  $V_E = V_D$  e  $V_F = V_A$ , possiamo calcolare  $W$  come segue:

$$\begin{aligned} W &= W_{AB} + \cancel{W_{BC}} + W_{CD} + \cancel{W_{DE}} + W_{EF} + \cancel{W_{FA}} \\ &= W_{AB} + W_{CD} + W_{EF} \\ &= P_A(V_B - V_A) + P_C(V_D - V_C) + P_E(V_F - V_E) \\ &= P_A(3V_A - V_A) + 3P_A(2V_A - 3V_A) + 4P_A(V_A - 2V_A) \\ &= -5P_A V_A \\ &= -3 \cdot 10^6 \text{ J}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Il segno negativo del risultato suggerisce che il gas *cede* calore dopo un ciclo termodinamico. Questo è coerente col fatto che il ciclo è percorso in senso antiorario, come mostrato in figura.