ESERCIZI DI
FISICA GENERALE PER LA
FACOLTÀ DI SCIENZE FARMACEUTICHE

In preparazione al corso *Fisica e Informatica*

Scritto Da

Davide Maria
Tagliabue

Università degli Studi
Milano

$\boxed{\mathcal{DMT}}$

2024

Indice

1 Lezione di venerdì 5 Aprile 2024

In questa lezione presentiamo affrontiamo i seguenti argomenti:

- esercizi sulle cifre significative,
- esercizi sulla cinematica,
- esercizi sulla dinamica,
- esercizi sulla gravitazione.

1.1 Esercizi sulle cifre significative

Esercizio 1.1

Un edificio a forma di parallelepipedo ha una base di area 225.4 m^2 e un'altezza di 63.2 m. Calcolare il suo volume, esprimendolo con il numero corretto di cifre significative.

Soluzione:

Il risultato di una moltiplicazione (o divisione) di due grandezze fisiche deve avere tante cifre significative quante ne ha la grandezza che ne contiene meno. In questo caso:

$$V = A \times h = (225.4\ \mathrm{m}^2) \times (63.2\ \mathrm{m}) = 142\,000\ \mathrm{m}^3\,. \tag{1.1}$$

Esercizio 1.2

In un esperimento di fisica, si misurano due lunghezze e si ottengono rispettivamente i valori $x = 32.578$ m e $y = 5.6489$ m. Si esprima la somma $z = x + y$ con il numero corretto di cifre significative.

Soluzione:

Il risultato di una somma (o sottrazione) di due grandezze fisiche con una o più cifre decimali deve contenere un numero di cifre decimali pari a quello della grandezza che ne contiene di meno. In questo caso:

$$z = x + y = (32.578\ \mathrm{m}) + (5.6489\ \mathrm{m}) = 38.227\ \mathrm{m}\,. \tag{1.2}$$

1.2 Esercizi sulla cinematica

Esercizio 1.3

Partendo da una corsia esterna, un'auto si immette in autostrada con una velocità iniziale pari a $v_{\mathrm{in}} = 35$ km/h. L'auto inizia poi ad accelerare con unaccelerazione costante di $a = 4$ m/s^2, fino a raggiungere la velocità finale $v_{\mathrm{f}} = 130$ km/h. Si calcolino:

i) l'intervallo di tempo Δt necessario per passare da v_0 a v_f,

ii) lo spazio Δx percorso nel mentre.

Soluzione:

L'auto si muove di *moto rettilineo uniformemente accelarato*. Questo implica che

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta v}{a}\,. \tag{1.3}$$

Utilizzando le unità del sistema internazionale, abbiamo $v_{\text{in}} = 9.7$ m/s e $v_f = 36.1$ m/s, da cui

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = 6.6 \text{ m/s}\,. \tag{1.4}$$

Questo risponde alla domanda i). Per quanto riguarda la domanda ii), ricordiamo che un oggetto che ha accelerazione lineare costante soddisfa la seguente equazione del moto:

$$\Delta x = v_{\text{in}}\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2\,. \tag{1.5}$$

Sostituendo i valori numerici di v_{in}, Δt e a, e approssimando il risultato a due cifre significative, troviamo

$$\Delta x = 150 \text{ m}\,. \tag{1.6}$$

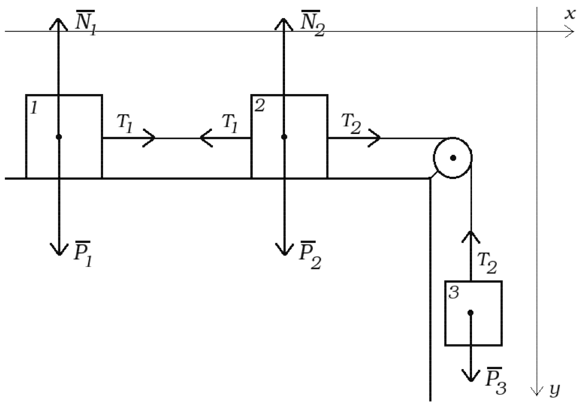
1.3 Esercizi sulla dinamica

Esercizio 1.4

I corpi 1, 2 e 3, di massa rispettivamente $m_1 = 2.0$ kg, $m_2 = 3.0$ kg e $m_3 = 4.0$ kg, sono collegati come in figura tramite un filo inestendibile. Trascurando ogni attrito, si calcolino:

i) l'accelerazione a del sistema,

ii) le tensioni dei due fili.



Soluzione:

Cominciamo con il definire la dinamica di ciascuno dei tre corpi:

$$\text{corpo 1:} \quad \begin{cases} \vec{P}_1 - \vec{N}_1 = 0\,, \\ \vec{T}_1 = m_1 a\,\hat{\boldsymbol{x}}\,, \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\text{corpo 2:} \quad \begin{cases} \vec{P}_2 - \vec{N}_2 = 0\,, \\ \vec{T}_2 - \vec{T}_1 = m_2 a\,\hat{\boldsymbol{x}}\,, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\text{corpo 3:} \quad \left\{ \vec{P}_3 - \vec{T}_2 = m_3 a\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \right. \tag{1.9}$$

dove $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ sono i versori dei due assi. Per convenzione, abbiamo messo un segno *meno* davanti ai vettori delle forze che puntano nella direzione negativa degli assi. Notiamo inoltre che tutti e tre corpi si muovono con un'accelerazione che ha lo stesso modula a, in quanto vincolati da un filo inestensibile. Per trovare i moduli a, T_1 e T_2, dobbiamo dunque risolvere il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a\,, \\ T_2 - T_1 = m_2 a\,, \\ m_3 g - T_2 = m_3 a\,. \end{cases} \tag{1.10}$$

Sostituiamo la prima equazione nella seconda, e poi la seconda nella terza, ottenendo:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a\,, \\ T_2 = (m_1 + m_2) a\,, \\ m_3 g - (m_1 + m_2) a = m_3 a\,, \end{cases} \tag{1.11}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 4.4\ \mathrm{m}^2\,, \\ T_1 &= \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 8.8\ \mathrm{N}\,, \\ T_2 &= \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 22\ \mathrm{N}\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

1.4 Esercizi sulla gravitazione

Esercizio 1.5

Un asteroide di massa m si muove lungo un'orbita circolare di raggio r attorno al Sole, alla velocità v. A un certo punto impatta con un altro asteroide di massa M e viene spinto in una nuova orbita circolare, lungo cui si muove a 1.5 v. Qual è il raggio della nuova orbita in termini di r?

Soluzione:

Prima dell'urto, l'asteroide di massa m orbita con moto circolare uniforme attorno al Sole. Ciò significa che la forza centripeta $\vec{F}_c$ deve coincidere con la forza gravitazione $\vec{F}_g$, ossia $\vec{F}_g = \vec{F}_c$. Questo implica che

$$\frac{G\, m M_\mathrm{S}}{r^2} = m\frac{v^2}{r}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad G M_\mathrm{S} = r v^2 \equiv \text{costante}\,, \tag{1.13}$$

ossia il prodotto rv^2 è costante. Pertanto, dopo l'urto, l'asteroide verrà spinto in una nuova orbita circolare con velocità $v_\mathrm{f} = 1.5\ v$, con un raggio r_f tale che

$$r_\mathrm{f} v_\mathrm{f}^2 = G M_\mathrm{S} \equiv r v^2\,. \tag{1.14}$$

Troviamo quindi

$$r_\mathrm{f} = \frac{v^2}{v_\mathrm{f}^2} r = \frac{4}{9} v\,. \tag{1.15}$$

Esercizio 1.6

Il pianeta Giove possiede una massa circa 320 volte maggiore della Terra. Per questo motivo è stato affermato che una persona verrebbe schiacciata dalla forza di gravità di un pianeta delle dimensioni di Giove, poiché un uomo non può sopravvivere a più di qualche g.

Si calcoli l'accelerazione, in termini di g, che una persona avvertirebbe se si trovasse all'equatore di Giove, tenendo conto anche della rotazione del pianeta. Si usino i seguenti dati:

- massa di Giove: $M_\mathrm{G} = 1.9 \cdot 10^{27}\ kg$,
- raggio equatoriale di Giove: $R_\mathrm{G} = 7.1 \cdot 10^4$ km,
- periodo di rotazione di Giove: $T_\mathrm{G} = 9$ h 55 min.

Soluzione:

Una persona che si trova all'equatore risente dell'azione di tre forze:

i) forza di gravità $\vec{F}_g$ (diretta verso il centro del pianeta),

ii) forza *centrifuga* $\vec{F}_\mathrm{cf}$, dovuta alla rotazione del pianeta; ha la stessa direzione di $\vec{F}_g$, ma verso opposto (punta verso l'esterno del pianeta),

iii) reazione vincolare $\vec{N}$ della superficie di Giove.

Chiamando $\hat{\boldsymbol{r}}$ il raggio versore che punta verso l'esterno, scriviamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \vec{F}_g + \vec{F}_\mathrm{cf} + \vec{N} = 0\,, \\ \vec{F}_g = -\frac{G\,mM_\mathrm{G}}{R_\mathrm{G}^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,, \\ \vec{F}_\mathrm{cf} = m\frac{v^2}{R_\mathrm{G}}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,, \\ \vec{N} = mg_\mathrm{G}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,, \end{cases} \tag{1.16}$$

dove g_G indica l'accelerazione percepita dalla persona sulla superficie di Giove. Otteniamo pertanto

$$-\frac{G\,mM_\mathrm{G}}{R_\mathrm{G}^2} + m\frac{v^2}{R_\mathrm{G}} + mg_\mathrm{G} = 0\,. \tag{1.17}$$

Notiamo che la massa m si semplifica, mentre la velocità tangenziale v si può esprimere come

$$v = \frac{2\pi R_\mathrm{G}}{T_\mathrm{G}}\,. \tag{1.18}$$

Pertanto, sostituendo tale espressione nell'Eq. (1.17), concludiamo che

$$g_\mathrm{G} = \frac{GM_\mathrm{G}}{R_\mathrm{G}^2} - \frac{4\pi^2 R_\mathrm{G}}{T_\mathrm{G}^2} = 23\ \mathrm{m/s^2}\,, \tag{1.19}$$

ossia

$$\frac{g_\mathrm{G}}{g} = 2.3\,. \tag{1.20}$$

2 Lezione di venerdì 12 Aprile 2024

In questa lezione presentiamo le soluzioni della *Prova in itinere* del 15 Aprile 2020.

2.1 Domande (18 punti)

Esercizio 2.1

Calcolare il risultato con il giusto numero di cifre significative delle seguenti grandezze:

i) $A = (5.4 \text{ cm}) \times (3.95 \text{ cm})$;

ii) $V = (62 \text{ m/s}) + (10.2 \text{ m/s})$.

Soluzione:

Il risultato di una moltiplicazione (o divisione) di due grandezze fisiche deve avere tante cifre significative quante ne ha la grandezza che ne contiene meno. In questo caso:

$$A = (5.4 \text{ cm}) \times (3.95 \text{ cm}) = 21 \text{ cm}^2 \,. \tag{2.1}$$

Nel caso invece di una somma (o sottrazione) di due grandezze fisiche con una o più cifre decimali, il risultato deve contenere un numero di cifre decimali pari a quello della grandezza che ne contiene di meno. In questo caso,

$$V = (62 \text{ m/s}) + (10.2 \text{ m/s}) = 72 \text{ m/s} \,. \tag{2.2}$$

Esercizio 2.2

Dire quali sono grandezze scalari e vettoriali: *energia potenziale*, *pressione*, *carica elettrica*, *campo elettrico*.

Soluzione:

Il *campo elettrico* è l'unica grandezza vettoriale, mentre *energia potenziale*, *pressione* e *carica elettrica* sono scalari.

Esercizio 2.3

Indicare l'unità di misura di GM_T/R_T^2, dove G è la costante di gravitazione universale, M_T è la massa della terra e R_T è il raggio della terra.

Soluzione:

Notiamo che

$$F_g = \frac{G\,mM_\text{T}}{R_\text{T}^2} \tag{2.3}$$

esprime il modulo della forza di gravità che lega un corpo di massa m alla Terra. Pertanto,

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_\text{T}}{R_\text{T}^2} \tag{2.4}$$

deve avere la dimensione di un'accelerazione, ossia m/s^2.

Esercizio 2.4

In un moto circolare uniforme di periodo $T = 3.5$ s e raggio $R = 140.5$ cm, calcolare la frequenza di rotazione, la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta.

Soluzione:

In un moto circolare uniforme, la frequenza di rotazione è pari a

$$f = \frac{1}{T} = 0.29 \text{ Hz}\,, \tag{2.5}$$

la velocità angolare a

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2.5 \text{ m/s}\,, \tag{2.6}$$

dove abbiamo usato $R = 1.405$ m, e l'accelerazione centripeta a

$$a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R} = 4.5 \text{ m/s}^2\,. \tag{2.7}$$

Esercizio 2.5

Il peso di un corpo è maggiore o minore se misurato sul monte Everest rispetto al livello del mare? Spiegare perché. Quanto varia l'accelerazione di gravità g? Si consideri la massa della Terra $M_{\text{T}} = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, il raggio delle Terra $R_{\text{T}} = 6\,380$ km e l'altezza del monte Everest $h = 8.90$ km.

Soluzione:

Il modulo della forza di gravità che lega un corpo di massa m alla Terra è pari a

$$F_g = \frac{G\,mM_{\text{T}}}{r^2}\,, \tag{2.8}$$

dove r è la distanza del corpo dal centro del pianeta. L'accelerazione di gravità sarà pertanto

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_{\text{T}}}{r^2}\,. \tag{2.9}$$

Al crescere di r, a_g diminuisce, quindi ci aspettiamo che l'accelerazione di gravità sia maggiore al livello del mare, dove troviamo come valore numerico

$$a_g = \frac{GM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}^2} = 9.80 \text{ m/s}^2\,. \tag{2.10}$$

Sulla punta del monte Everest varrà invece

$$a_g = \frac{GM_{\text{T}}}{(R_{\text{T}} + h)^2} = 9.77 \text{ m/s}^2\,. \tag{2.11}$$

Esercizio 2.6

Un oggetto di massa $m = 1.2$ kg è fermo su un piano scabro nonostante che venga applicata una forza orizzontale di 2.3 N. Calcolare tutte le forze agenti sul corpo e indicarne il modulo, la direzione e il verso.

Soluzione:

Sul corpo agiscono quattro forze:

i) la forza peso $\vec{P}$, diretta verso il centro della Terra, di modulo

$$P = mg = 12\ N\,; \tag{2.12}$$

ii) la reazione vincolare del piano $\vec{N} = -\vec{P}$, con stesso modulo e direzione di $\vec{P}$, ma verso opposto;

iii) una forza esterna di modulo $F = 2.3$ N, parallela al piano;

iv) la forza d'attrito $\vec{F}_{\mathrm{a}} = -\vec{F}$, con stesso modulo e direzione di $\vec{F}$, ma verso opposto.

Ricordiamo che la forza d'attrito statico non ha un valore intrinseco, ma assume il modulo della forza cui si oppone, fino al valore massimo $F_{\mathrm{s}}^{\mathrm{max}} = \mu_s N$.

Esercizio 2.7

Determinare lo spazio percorso da un oggetto lasciato cadere da una torre sotto l'azione della gravità dopo 1.3 s. Quale sarà lo spazio percorso tra $t_1 = 1.5$ s e $t_2 = 2.5$ s?

Soluzione:

Un corpo in caduta libera soddisfa la seguente legge oraria:

$$x_{\mathrm{f}} = x_{\mathrm{in}} + v_{\mathrm{in}}(t_{\mathrm{f}} - t_{\mathrm{in}}) - \frac{1}{2}g(t_{\mathrm{f}} - t_{\mathrm{in}})^2\,, \tag{2.13}$$

dove abbiamo preso l'asse delle ordinate diretto verso l'alto. Siamo liberi di fissare $t_{\mathrm{in}} = 0$ s, e poiché in tale istante abbiamo $v_{\mathrm{in}} = 0$ m/s, l'Eq. (2.13) si riduce a

$$x_{\mathrm{f}} = x_{\mathrm{in}} - \frac{1}{2}g\,t_{\mathrm{f}}^2\,, \tag{2.14}$$

Assumendo $t_{\mathrm{f}} = 1.3$ s, troviamo

$$\Delta x = x_{\mathrm{f}} - x_{\mathrm{in}} = -\frac{1}{2}g\,t_{\mathrm{f}}^2 = -8.3\ \mathrm{m}\,, \tag{2.15}$$

dove il segno $-$ indica che il corpo, cadendo, si sta avvicinando all'origine del nostro sistema di riferimento, ossia il terreno.

Per trovare lo spazio percorso tra gli intervalli di tempo t_1 e t_2, utilizziamo l'Eq. (2.14) per entrambi questi tempi, come segue:

$$\begin{cases} x(t_1) = x_{\mathrm{in}} - \frac{1}{2}g\,t_1^2\,, \\ x(t_2) = x_{\mathrm{in}} - \frac{1}{2}g\,t_2^2\,. \end{cases} \tag{2.16}$$

Sottraiamo la prima equazione del sistema alla seconda, ottenendo:

$$\Delta x_{21} = x(t_2) - x(t_1) = -\frac{1}{2}g(t_2^2 - t_1^2) = -19.6\ \mathrm{m}\,. \tag{2.17}$$

Esercizio 2.8

In un urto completamente anelastico un corpo di massa $m = 1.2$ kg e velocità $v = 10.2$ m/s urta su un corpo di massa $M = 12.0$ kg a riposo. Calcolare l'impulso e l'energia cinetica prima e dopo l'urto del sistema. Commentare il risultato.

Soluzione:

Per definizione, in un *urto completamente anaelastico* due corpi rimangono attaccati tra loro dopo l'impatto. Ciò significa che la quantità di moto finale sarà pari a $p_{\mathrm{f}} = (m + M)v_{\mathrm{f}}$. Per quanto riguarda la quantità di moto iniziale, questa corrisponde semplicemente a $p_{\mathrm{in}} = mv$, poiché prima dell'impatto il corpo di massa M è fermo. Quindi

$$p_{\mathrm{in}} = p_{\mathrm{f}} \qquad \Longrightarrow \qquad mv = (m + M)v_{\mathrm{f}} \qquad \Longrightarrow \qquad v_{\mathrm{f}} = \frac{m}{m+M}v = 0.93 \text{ m/s},. \tag{2.18}$$

La differenza tra la quantità di moto finale e iniziale del corpo di massa m ci restituisce l'*impulso* che esso ha *subito* dall'impatto con il corpo di massa M, e corrisponde a

$$\Delta p = m(v_{\mathrm{f}} - v) = -11 \text{ kg m/s}. \tag{2.19}$$

Il segno $-$ indica che l'impulso ha verso opposto alla direzione iniziale del moto del corpo di massa m.

Esercizio 2.9

Se il lavoro delle forze non conservative effettuato su un sistema è $W_{\mathrm{nc}} = -10.3$ J e la variazione dell' energia potenziale del sistema è $\Delta U = 13.0$ J, quanto vale la variazione dell'energia cinetica ΔK del sistema considerato?

Soluzione:

Ricordiamo che il *teorema delle forze vive* afferma che

$$W_{\mathrm{tot}} = W_{\mathrm{c}} + W_{\mathrm{nc}} = \Delta K\,, \tag{2.20}$$

dove il lavoro conservativo corrisponde a $W_{\mathrm{c}} = -\Delta U$. Nel nostro caso,

$$\Delta K = W_{\mathrm{nc}} - \Delta U = -23.3 \text{ J}. \tag{2.21}$$

Esercizio 2.10

Calcolare l'allungamento di una molla di costante elastica $k = 45.7$ N/m alla quale viene applicata una forza $F = 10.5$ N.

Soluzione:

È sufficiente usare la *legge di Hooke*:

$$F = k\Delta x\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x = \frac{F}{k} = 0.230 \text{ m}. \tag{2.22}$$

2.2 Esercizi (15 punti)

Esercizio 2.11: (*nome originale*: A)

Due asteroidi si urtano frontalmente: prima dell'urto l'asteroide A ($m_A = 6.9 \cdot 10^{12}$ kg) ha un velocità di 2.9 km/s e l'asteroide B ($m_B = 1.20 \cdot 10^{13}$ kg) ha un velocità di 1.9 km/s orientata in senso opposto. Se gli asteroidi si uniscono, quale sarà la velocità (direzione e modulo) del nuovo asteroide dopo l'urto? Calcolare l'energia cinetica prima e dopo l'urto e spiegare il risultato ottenuto.

Soluzione:

Trattandosi di un urto totalmente anaelastico, si conserva la quantità di moto totale, ma non l'energia cinetica. La quantità di moto prima dell'urto è data da

$$\vec{p}_{\rm in} = m_A \vec{v}^A_{\rm in} + m_B \vec{v}^B_{\rm in}\,, \tag{2.23}$$

mentre quella dopo l'urto corrisponde a

$$\vec{p}_{\rm f} = (m_A + m_B)\vec{v}_{\rm f}\,. \tag{2.24}$$

Prendendo il versore $\hat{\boldsymbol{x}}$ con stessa direzione e verso di $\vec{v}^A_{\rm in}$, abbiamo

$$\vec{p}_{\rm in} = \vec{p}_{\rm f}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad (m_A v^A_{\rm in} - m_B v^B_{\rm in})\,\hat{\boldsymbol{x}} = (m_A + m_B) v_{\rm f}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,, \tag{2.25}$$

da cui otteniamo

$$v_{\rm f} = \frac{m_A v^A_{\rm in} - m_B v^B_{\rm in}}{m_A + m_B} = -0.15 \text{ km/s} = -1.5 \cdot 10^2 \text{ m/s}\,. \tag{2.26}$$

$\vec{v}_{\rm f}$ ha pertanto la stessa direzione e verso di $\vec{v}^B_{\rm in}$.

Per quanto concerne la variazione di energia cinetica, troviamo

$$\Delta K = K_{\rm f} - K_{\rm in} = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{\rm f}^2 - \frac{1}{2}\Big(m_A (v^A_{\rm in})^2 + m_B (v^B_{\rm in})^2\Big) = -2.9 \cdot 10^{19} \text{ J}\,. \tag{2.27}$$

Come ci aspettavamo, durante l'urto è andata persa parte dell'energia cinetica. È importante sottolineare che, per il calcolo di ΔK, tutte le velocità devono essere espresse in m/s.

Esercizio 2.12: (*nome originale*: B)

Un corpo di massa $m = 3.2$ kg, attaccato ad una molla con costante elastica $k = 290$ N/m, compie un moto armonico. A distanza di $d = 2.5$ cm dalla posizione diequilibrio il corpo si muove con velocità $v = 0.90$ m/s. Calcolare

i) l'ampiezza del moto,

ii) la massima velocità scalare raggiunta dal corpo.

Soluzione:

Per trovare l'ampiezza del moto, è sufficiente applicare la *conservazione dell'energia meccanica* (si noti che la forza elastica è *conservativa*):

$$K_{\rm in} + U_{\rm in} = \cancel{K_{\rm f}} + U_{\rm f}\,. \tag{2.28}$$

La posizione iniziale è quella in cui conosciamo i dati d e v, mentre la posizione finale quella corrispondente al massimo allungamento della molla, che è proprio l'ampiezza A del moto. In tale posizione, la velocità è nulla, da cui $K_\mathrm{f} = 0$ J. Quindi,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{mv^2 + kd^2}{k}} = 0.098 \text{ m}\,, \tag{2.29}$$

dove abbiamo usato $d = 0.025$ m.

Possiamo trovare una via alternativa per risolvere il problema. Sappiamo che la legge oraria per un corpo che si muove di moto circolare uniforme corrisponde a

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{2.30}$$

dove ϕ è una generica fase. La legge della velocità è invece

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{2.31}$$

Sappiamo che al tempo t_in il sistema si trova nella posizione $x(t_\mathrm{in}) = d$ con una velocità $v(t_\mathrm{in}) = v$. Pertanto, abbiamo che

$$\begin{cases} A\sin(\omega t_\mathrm{in} + \phi) = d\,, \\ A\omega\cos(\omega t_\mathrm{in} + \phi) = v\,. \end{cases} \tag{2.32}$$

Dividiamo la prima equazione per la seconda, così da trovare:

$$\frac{1}{\omega}\tan(\omega t_\mathrm{in} + \phi) = \frac{v}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega t_\mathrm{in} + \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega v}{d}\right)\,. \tag{2.33}$$

A questo punto, invertiamo la prima equazione in (2.32) per ottenere l'ampiezza:

$$A = \frac{d}{\sin(\omega t_\mathrm{in} + \phi)} = \frac{d}{\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega v}{d}\right)\right)} = 0.098 \text{ m}\,, \tag{2.34}$$

che coincide con il risultato ottenuto tramite la conservazione dell'energia.

Da ultimo, per quanto riguarda la velocità scalare massima, dall'Eq. (2.31) troviamo:

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \leq \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A \equiv v_\mathrm{max} = 0.93 \text{ m/s}\,. \tag{2.35}$$

Esercizio 2.13: (*nome originale*: C)

Un corpo di massa $m = 12.0$ kg si trova su un piano inclinato scabro con angolo $\alpha = 30°$ rispetto al superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.42$. Determinare se il corpo scivola o se rimane fermo sul piano inclinato. Qual è l'angolo massimo consentito affinché il corpo di massa m non scivoli?

Soluzione:

Dividiamo la forza peso $\vec{P}$ in due componenenti $\vec{P}_{||}$ e $\vec{P}_\perp$, la prima parallela e la seconda perpendincolare al piano inclinato. $\vec{P}_\perp$ è compensata dalla normale al piano, ossia

$$\vec{P}_\perp + \vec{N} = 0\,. \tag{2.36}$$

Prendendo i moduli di entrambi i vettori, troviamo:

$$mg\cos(\alpha) - N = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad N = mg\cos(\alpha)\,. \tag{2.37}$$

Conoscendo N, possiamo calcolare la forza di attrito statico massima, che corrisponde a

$$F_{\mathrm{s}}^{\max} = \mu_{\mathrm{s}} N = \mu_{\mathrm{s}} m g \cos(\alpha) = 43 \text{ N} . \tag{2.38}$$

Notiamo che $\vec{F}_{\mathrm{s}}^{\max}$ è diretta lungo la componente parallela al piano, ma in verso opposto a $\vec{P}_{||}$. Il sistema è in equilibrio se e solo se $P_{||} \leq F_{\mathrm{s}}^{\max}$. Tuttavia, $P_{||}$ è pari a

$$P_{||} = m g \sin(\alpha) = 58.8 \text{ N} , \tag{2.39}$$

quindi il sistema non è in equilibrio.

Affinché il sistema risulti in equilibrio, deve valere la condizione:

$$P_{||} \leq F_{\mathrm{s}}^{\max} \qquad \Longrightarrow \qquad m g \sin(\alpha) \leq \mu_{\mathrm{s}} m g \cos(\alpha) , \tag{2.40}$$

condizione soddisfatta solo se

$$\tan(\alpha) \leq \mu_{\mathrm{s}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \leq \tan^{-1}(\mu_{\mathrm{s}}) = 23^{\circ} . \tag{2.41}$$
