# ESERCIZI DI
# FISICA GENERALE PER LA
# FACOLTÀ DI SCIENZE FARMACEUTICHE

In preparazione al corso *Fisica e Informatica*


Scritto Da

Davide Maria
Tagliabue

*Università degli Studi*
*Milano*



DMT
2024

# Indice

# 1 Lezione di venerdì 5 Aprile 2024

In questa lezione affrontiamo i seguenti argomenti:

- esercizi sulle *cifre significative*,
- esercizi sulla *cinematica*,
- esercizi sulla *dinamica*,
- esercizi sulla *gravitazione*.

## 1.1 Cifre significative

**Esercizio 1.1**

Un edificio a forma di parallelepipedo ha una base di area 225.4 m$^2$ e un'altezza di 63.2 m. Calcolare il suo volume, esprimendolo con il numero corretto di cifre significative.

**Soluzione:**

Il risultato di una moltiplicazione (o divisione) di due grandezze fisiche deve avere tante cifre significative quante ne ha la grandezza che ne contiene meno. In questo caso:

$$V = A \times h = (225.4 \text{ m}^2) \times (63.2 \text{ m}) = 1.42 \cdot 10^5 \text{ m}^3 \,. \tag{1.1}$$

---

**Esercizio 1.2**

In un esperimento di fisica, si misurano due lunghezze e si ottengono rispettivamente i valori $x =$ 32.578 m e $y =$ 5.6489 m. Si esprima la somma $z = x + y$ con il numero corretto di cifre significative.

**Soluzione:**

Il risultato di una somma (o sottrazione) di due grandezze fisiche con una o più cifre decimali deve contenere un numero di cifre decimali pari a quello della grandezza che ne contiene di meno. In questo caso:

$$z = x + y = (32.578 \text{ m}) + (5.6489 \text{ m}) = 38.227 \text{ m} \,. \tag{1.2}$$

---

## 1.2 Cinematica

**Esercizio 1.3**

Partendo da una corsia esterna, un'auto si immette in autostrada con una velocità iniziale pari a $v_{\text{in}} = 35$ km/h. L'auto inizia poi ad accelerare con unaccelerazione costante di $a = 4$ m/s$^2$, fino a raggiungere la velocità finale $v_{\text{f}} = 130$ km/h. Si calcolino:

i) l'intervallo di tempo $\Delta t$ necessario per passare da $v_0$ a $v_f$,

ii) lo spazio $\Delta x$ percorso nel mentre.

**Soluzione:**

L'auto si muove di *moto rettilineo uniformemente accelarato*. Questo implica che

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = \frac{\Delta v}{a}\,. \tag{1.3}$$

Utilizzando le unità del sistema internazionale, abbiamo $v_{\text{in}} = 9.7$ m/s e $v_f = 36.1$ m/s, da cui

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = 6.6 \text{ m/s}\,. \tag{1.4}$$

Questo risponde alla domanda i). Per quanto riguarda la domanda ii), ricordiamo che un oggetto che ha accelerazione lineare costante soddisfa la seguente equazione del moto:

$$\Delta x = v_{\text{in}}\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2\,. \tag{1.5}$$

Sostituendo i valori numerici di $v_{\text{in}}$, $\Delta t$ e $a$, e approssimando il risultato a due cifre significative, troviamo

$$\Delta x = 150 \text{ m}\,. \tag{1.6}$$

---

**Esercizio 1.4**

Un pilota parte da fermo e accelera uniformemente con una accelerazione $a = 10$ m/s$^2$ per una distanza $d = 0.40$ km. Determinare il tempo impiegato e la velocità finale dell'auto.

**Soluzione:**

Poiché il pilta si muove di *moto rettilineo uniformemente accelarato*, possiamo scrivere la sua legge oraria:

$$x_{\text{f}}(t) = \cancel{x_{\text{in}}} + \cancel{v_{\text{in}}(t - t_{\text{in}})} + \frac{1}{2}a(t - \cancel{t_{\text{in}}})^2 = \frac{1}{2}at^2\,, \tag{1.7}$$

dove $v_{\text{in}} = 0$ m/s per ipotesi, e dove abbiamo fissato il nostro sistema di riferimento tale che $x_{\text{in}} = 0$ m e $t_{\text{in}} = 0$ s. Fissando $x_{\text{f}}(t) = d$, troviamo il tempo trascorso, ossia

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = 8.9 \text{ s}\,, \tag{1.8}$$

e al velocità finale raggiunta

$$v_{\text{f}} = at = 89 \text{ m/s} = 320 \text{ km/h}\,. \tag{1.9}$$

---

**Esercizio 1.5**

Sull'autostrada A4 due automobili stanno viaggiando in direzione Milano. Ad un certo istante $t_{\text{in}} = 0$ s l'automobile $A$ passa il casello e procede con velocità costante $v_A = 25$ m/s. Nello stesso istante l'automobile $B$ parte da ferma, con accelerazione $a_B = 1.0$ m/s$^2$, da un autogrill posto dopo il casello ad una distanza pari a $x_{\text{in}} = 300$ m. Dopo quanto tempo e a che distanza dal casello l'automobile $A$ raggiungerà l'automobile $B$? Cosa succederebbe se l'accelerazione dell'automobile $B$ fosse $a'_B = 5.0$ m/s$^2$?

**Soluzione:**

Per risolvere il problema, scriviamo le leggi orarie delle due automobili. L'automobile $A$ si muove di *moto rettilineo uniforme*

$$x_A(t) = x_{A,\mathrm{in}} + v_A(t - t_{\mathrm{in}}) = v_A t\,, \tag{1.10}$$

dove $x_{A,\mathrm{in}} = 0$ m e $t_{\mathrm{in}} = 0$ s, mentre l'automobile $B$ si muove di *moto rettilineo uniformemente accelerato*

$$\begin{aligned} x_B(t) &= x_{B,\mathrm{in}} + v_{B,\mathrm{in}}(t - t_{\mathrm{in}}) + \frac{1}{2}a_B(t - t_{\mathrm{in}})^2 \\ &= x_{\mathrm{in}} + \frac{1}{2}a_B t^2\,, \end{aligned} \tag{1.11}$$

dove $x_{B,\mathrm{in}} = x_{\mathrm{in}}$ e $v_{B,\mathrm{in}} = 0$ m/s per ipotesi. L'automobile $A$ raggiungerà l'automobile $B$ quando entrambe occuperanno la stessa posizione nello stesso tempo, ossia quando uno specifico tempo $t$ risolve l'equazione

$$x_A(t) = x_B(t)\,. \tag{1.12}$$

Otteniamo pertanto

$$v_A t = x_{\mathrm{in}} + \frac{1}{2}a_B t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad t^2 - \frac{2v_A}{a_B}t + \frac{2x_{\mathrm{in}}}{a_B} = 0\,. \tag{1.13}$$

Le due soluzioni di questa equazione di secondo grado sono

$$t_\pm = \frac{v_A}{a_B} \pm \sqrt{\Delta}\,, \qquad \text{dove } \Delta = \left(\frac{v_A}{a_B}\right)^2 - \frac{2x_{\mathrm{in}}}{a_B}\,. \tag{1.14}$$

Tali soluzioni sono reali solo se $\Delta \geq 0$, ossia se

$$\left(\frac{v_A}{a_B}\right)^2 - \frac{2x_{\mathrm{in}}}{a_B} \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad v_A^2 \geq 2x_{\mathrm{in}}\, a_B\,. \tag{1.15}$$

La condizione (1.15) è soddisfatta nel nostro caso, e quindi le soluzioni dell'Eq. (1.13) sono reali e corrispondono a

$$t_- = 20 \text{ s}\,, \qquad t_+ = 30 \text{ s}\,. \tag{1.16}$$

Abbiamo trovato due tempi poiché $A$ e $B$ si incontrano due volte: la prima è quando $A$ supera $B$ al tempo $t_-$, la seconda è quando $B$ ha guadagnato abbastanza velocità da raggiungere nuovamente $A$ al tempo $t_+$ e superarla definitivamente. Nel nostro caso, siamo interessati alla prima volta in cui esse si incontrano, cioè a $t_-$, che è la risposta al problema. Nel frattempo, $A$ ha percorso una distanza dal casello pari a

$$x_A(t_-) = v_A t_- = 500 \text{ m}\,. \tag{1.17}$$

Da ultimo, notiamo che se ora assumiamo che $B$ acceleri con accelerazione $a'_B = 5.0$ m/s$^2$, allora la condizione (1.15) non è più soddisfatta, quindi l'Eq. (1.13) non ammette soluzioni reali. Ciò significa che $A$ e $B$ non si incontreranno mai.

## 1.3 Dinamica

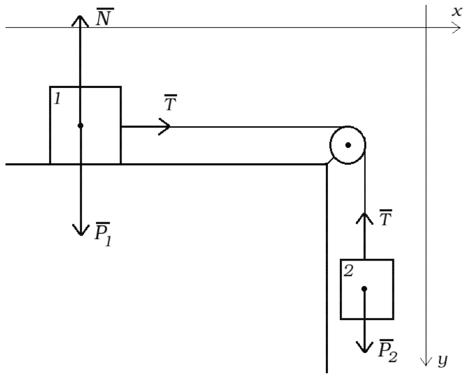
**Esercizio 1.6**

Un corpo di massa $m_1 = 5.0$ kg è posto su di un piano orizzontale ed è collegato tramite un filo inestensibile ad un corpo di massa $m_2 = 2.0$ kg. Trascurando ogni attrito, calcolare:

i) la reazione vincolare del piano $\vec{N}$;

ii) il modulo delll'accelerazione $a$ del sistema;

iii) la tensione $T$ del filo.




**Soluzione:**

Cominciamo con il definire la dinamica dei due corpi:

$$\text{corpo 1:} \quad \begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{N} = 0\,, \\ T\,\hat{\boldsymbol{x}} = m_1 a\,\hat{\boldsymbol{x}}\,, \end{cases} \tag{1.18}$$

$$\text{corpo 2:} \quad \begin{cases} \vec{P}_2 - T\,\hat{\boldsymbol{y}} = m_2 a\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \end{cases} \tag{1.19}$$

dove $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ sono i versori dei due assi. Osserviamo che entrambi i corpi si muovono con un'accelerazione che ha lo stesso modula $a$, in quanto vincolati da un filo inestensibile. Dall'Eq. (1.18) ricaviamo la normale $\vec{N}$:

$$\vec{N} = -\vec{P}_1 = -m_1 g\,\hat{\boldsymbol{y}} = -49\ \mathrm{N}\,\hat{\boldsymbol{y}}\,. \tag{1.20}$$

Per quanto riguarda l'accelerazione $a$ e la tensione $T$, abbiamo il sistema di equazioni

$$\begin{cases} T = m_1 a \\ m_2 g - T = m_2 a\,, \end{cases} \tag{1.21}$$

che dà come soluzioni

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 2.8\ \mathrm{m/s^2}\,, \\ T &= \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 14\ \mathrm{N}\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

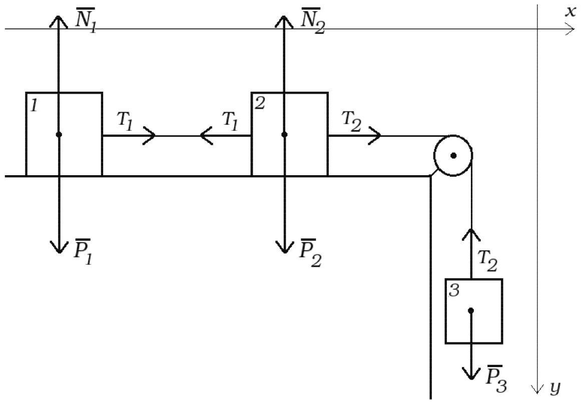
---

**Esercizio 1.7**

I corpi 1, 2 e 3, di massa rispettivamente $m_1 = 2.0$ kg, $m_2 = 3.0$ kg e $m_3 = 4.0$ kg, sono collegati come in figura tramite un filo inestendibile. Trascurando ogni attrito, si calcolino:

i) l'accelerazione $a$ del sistema,

ii) le tensioni dei due fili.




**Soluzione:**

Cominciamo con il definire la dinamica di ciascuno dei tre corpi:

$$\text{corpo 1:} \quad \begin{cases} \vec{P}_1 + \vec{N}_1 = 0\,, \\ T_1\,\hat{\boldsymbol{x}} = m_1 a\,\hat{\boldsymbol{x}}\,, \end{cases} \tag{1.23}$$

$$\text{corpo 2:} \quad \begin{cases} \vec{P}_2 + \vec{N}_2 = 0\,, \\ T_2\,\hat{\boldsymbol{x}} - T_1\,\hat{\boldsymbol{x}} = m_2 a\,\hat{\boldsymbol{x}}\,, \end{cases} \tag{1.24}$$

$$\text{corpo 3:} \quad \left\{ \vec{P}_3 - T_2\,\hat{\boldsymbol{y}} = m_3 a\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \right. \tag{1.25}$$

dove $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ sono i versori dei due assi. Notiamo che tutti e tre corpi si muovono con un'accelerazione che ha lo stesso modula $a$, in quanto vincolati da un filo inestensibile. Per trovare i moduli $a$, $T_1$ e $T_2$, dobbiamo dunque risolvere il seguente sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a\,, \\ T_2 - T_1 = m_2 a\,, \\ m_3 g - T_2 = m_3 a\,. \end{cases} \tag{1.26}$$

Sostituiamo la prima equazione nella seconda, e poi la seconda nella terza, ottenendo:

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a\,, \\ T_2 = (m_1 + m_2) a\,, \\ m_3 g - (m_1 + m_2) a = m_3 a\,, \end{cases} \tag{1.27}$$

da cui ricaviamo

$$\begin{aligned} a &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 4.4 \text{ m}^2\,, \\ T_1 &= \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 8.8 \text{ N}\,, \\ T_2 &= \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3} g = 22 \text{ N}\,. \end{aligned} \tag{1.28}$$

---

**Esercizio 1.8**

Un corpo di massa $m = 2.0$ kg è posto sulla sommità di un piano inclinato scabro di altezza $h = 3.0$ m, $\theta = 30°$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.20$. Ammettendo che il corpo parta da fermo, si calcolino:

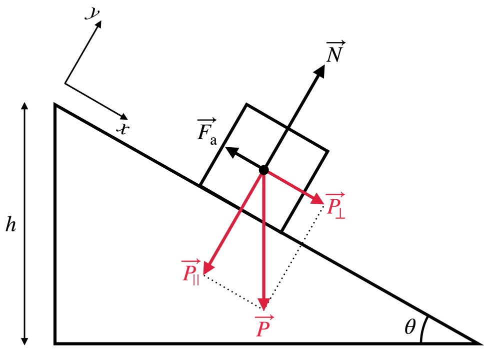
i) l'accelerazione $a$ cui è sottoposto il corpo;

ii) il tempo $t_\mathrm{f}$ impiegato per arrivare in fondo al piano;

iii) la velocità $v_\mathrm{f}$ che il corpo possiede alla fine.

**Soluzione:**

Per definire la dinamica del corpo, ci aiutiamo con un disegno dello schema delle forze, come segue:




Dividiamo dunque la forza peso $\vec{P}$ in due componenenti $\vec{P}_{||}$ e $\vec{P}_\perp$, la prima parallela e la seconda perpendincolare al piano inclinato. Chiamiamo $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ i corrispettivi versori degli assi. $\vec{P}_\perp$ è compensata dalla normale al piano, ossia

$$\vec{P}_\perp + \vec{N} = 0\,. \tag{1.29}$$

Prendendo i moduli di entrambi i vettori, troviamo:

$$mg\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{y}} - N\,\hat{\boldsymbol{y}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad N = mg\cos(\theta)\,. \tag{1.30}$$

Conoscendo $N$, possiamo calcolare la forza di attrito dinamico, che corrisponde a

$$\vec{F}_\mathrm{a} = -\mu_\mathrm{d} N\,\hat{\boldsymbol{x}} = -\mu_\mathrm{d} mg\cos(\theta)\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{1.31}$$

Pertanto, detta $\vec{a} = a\,\hat{\boldsymbol{x}}$ l'accelerazione lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$, possiamo scrivere l'equazione del moto

$$\vec{P}_\perp + \vec{F}_\mathrm{a} = m\vec{a}\,, \tag{1.32}$$

da cui ricaviamo l'accelerazione del corpo come segue:

$$mg\sin(\theta) - \mu_\mathrm{d} mg\cos(\theta) = ma \qquad \Longrightarrow \qquad a = g\big[\sin(\theta) - \mu_\mathrm{d}\cos(\theta)\big] = 3.2\ \mathrm{m/s^2}\,. \tag{1.33}$$

Questo risponde alla domanda i).

Passiamo al punto ii), dove viene chiesto il tempo impiegato dal corpo per arrivare in fondo al piano. Per trovarlo, cominciamo col notare che lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$ il corpo si muove di *moto rettilineo uniformemente accelerato*. La sua legge oraria, quindi, deve essere della forma

$$x(t) = \cancel{x_\mathrm{in}} + \cancel{v_\mathrm{in}(t - t_\mathrm{in})} + \frac{1}{2}a(t - \cancel{t_\mathrm{in}})^2 = \frac{1}{2}at^2\,, \tag{1.34}$$

dove $v_\mathrm{in} = 0$ m/s (il corpo parte da fermo), e dove abbiamo scelto un sistema di riferimento tale che $x_\mathrm{in} = 0$ m e $t_\mathrm{in} = 0$ s. La distanza totale percorsa dal corpo altro non è che la diagonale del triangolo di altezza $h$, ossia

$$D = \frac{h}{\sin(\theta)}\,. \tag{1.35}$$

Per percorrere tale distanza il corpo impiega esattamente un tempo $t_\text{f}$. Dunque, per trovare $t_\text{f}$ risolviamo l'equazione $x(t_\text{f}) = D$, che ha come soluzione

$$t_\text{f} = \sqrt{\frac{2D}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{a\sin(\theta)}} = 1.9 \text{ s}\,. \tag{1.36}$$

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per trovare anche la velocità $v_\text{f}$, data dalla formula

$$v_\text{f} = \cancel{v_\text{in}} + a(t_\text{f} - \cancel{t_\text{in}}) = a\,t_\text{f} = 6.1 \text{ m/s}\,, \tag{1.37}$$

che risponde alla domanda iii).

---

## 1.4 Gravitazione

**Esercizio 1.9**

Un asteroide di massa $m$ si muove lungo un'orbita circolare di raggio $r$ attorno al Sole, alla velocità $v$. A un certo punto impatta con un altro asteroide di massa $M$ e viene spinto in una nuova orbita circolare, lungo cui si muove a $1.5\,v$. Qual è il raggio della nuova orbita in termini di $r$?

**Soluzione:**

Prima dell'urto, l'asteroide di massa $m$ orbita con moto circolare uniforme attorno al Sole. Ciò significa che la forza centripeta $\vec{F}_c$ deve coincidere con la forza gravitazione $\vec{F}_g$, ossia $\vec{F}_g = \vec{F}_c$. Questo implica che

$$\frac{G\,mM_\text{S}}{r^2} = m\frac{v^2}{r}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad GM_\text{S} = rv^2 \equiv \text{costante}\,, \tag{1.38}$$

ossia il prodotto $rv^2$ è costante. Pertanto, dopo l'urto, l'asteroide verrà spinto in una nuova orbita circolare con velocità $v_\text{f} = 1.5\,v$, con un raggio $r_\text{f}$ tale che

$$r_\text{f} v_\text{f}^2 = GM_\text{S} \equiv rv^2\,. \tag{1.39}$$

Troviamo quindi

$$r_\text{f} = \frac{v^2}{v_\text{f}^2} r = \frac{4}{9} v\,. \tag{1.40}$$

---

**Esercizio 1.10**

Il pianeta Giove possiede una massa circa 320 volte maggiore della Terra. Per questo motivo è stato affermato che una persona verrebbe schiacciata dalla forza di gravità di un pianeta delle dimensioni di Giove, poiché un uomo non può sopravvivere a più di qualche $g$.

Si calcoli l'accelerazione, in termini di $g$, che una persona avvertirebbe se si trovasse all'equatore di Giove, tenendo conto anche della rotazione del pianeta. Si usino i seguenti dati:

- massa di Giove: $M_\text{G} = 1.9 \cdot 10^{27}\ kg$,
- raggio equatoriale di Giove: $R_\text{G} = 7.1 \cdot 10^4$ km,
- periodo di rotazione di Giove: $T_\text{G} = 9$ h 55 min.

**Soluzione:**

Una persona che si trova all'equatore risente dell'azione di tre forze:

i) forza di gravità $\vec{F}_g$ (diretta verso il centro del pianeta),

ii) forza *centrifuga* $\vec{F}_{\rm cf}$, dovuta alla rotazione del pianeta; ha la stessa direzione di $\vec{F}_g$, ma verso opposto (punta verso l'esterno del pianeta),

iii) reazione vincolare $\vec{N}$ della superficie di Giove.

Chiamando $\hat{\boldsymbol{r}}$ il raggio versore che punta verso l'esterno, scriviamo il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \vec{F}_g + \vec{F}_{\rm cf} + \vec{N} = 0\,, \\ \vec{F}_g = -\frac{G\,mM_{\rm G}}{R_{\rm G}^2}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,, \\ \vec{F}_{\rm cf} = m\frac{v^2}{R_{\rm G}}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,, \\ \vec{N} = mg_{\rm G}\,\hat{\boldsymbol{r}}\,, \end{cases} \tag{1.41}$$

dove $g_{\rm G}$ indica l'accelerazione percepita dalla persona sulla superficie di Giove. Otteniamo pertanto

$$-\frac{G\,mM_{\rm G}}{R_{\rm G}^2} + m\frac{v^2}{R_{\rm G}} + mg_{\rm G} = 0\,. \tag{1.42}$$

Notiamo che la massa $m$ si semplifica, mentre la velocità tangenziale $v$ si può esprimere come

$$v = \frac{2\pi R_{\rm G}}{T_{\rm G}}\,. \tag{1.43}$$

Pertanto, sostituendo tale espressione nell'Eq. (1.42), concludiamo che

$$g_{\rm G} = \frac{GM_{\rm G}}{R_{\rm G}^2} - \frac{4\pi^2 R_{\rm G}}{T_{\rm G}^2} = 23 \text{ m/s}^2\,, \tag{1.44}$$

ossia

$$\frac{g_{\rm G}}{g} = 2.3\,. \tag{1.45}$$

---

## 2 Lezione di venerdì 12 Aprile 2024

In questa lezione presentiamo le soluzioni della *Prova in itinere* del 15 Aprile 2020.

### 2.1 Domande (18 punti)

**Esercizio 2.1**

Calcolare il risultato con il giusto numero di cifre significative delle seguenti grandezze:

i) $A = (5.4\ \text{cm}) \times (3.95\ \text{cm})$;

ii) $V = (62\ \text{m/s}) + (10.2\ \text{m/s})$.

**Soluzione:**

Il risultato di una moltiplicazione (o divisione) di due grandezze fisiche deve avere tante cifre significative quante ne ha la grandezza che ne contiene meno. In questo caso:

$$A = (5.4\ \text{cm}) \times (3.95\ \text{cm}) = 21\ \text{cm}^2\,. \tag{2.1}$$

Nel caso invece di una somma (o sottrazione) di due grandezze fisiche con una o più cifre decimali, il risultato deve contenere un numero di cifre decimali pari a quello della grandezza che ne contiene di meno. In questo caso,

$$V = (62\ \text{m/s}) + (10.2\ \text{m/s}) = 72\ \text{m/s}\,. \tag{2.2}$$

---

**Esercizio 2.2**

Dire quali sono grandezze scalari e vettoriali: *energia potenziale*, *pressione*, *carica elettrica*, *campo elettrico*.

**Soluzione:**

Il *campo elettrico* è l'unica grandezza vettoriale, mentre *energia potenziale*, *pressione* e *carica elettrica* sono scalari.

---

**Esercizio 2.3**

Indicare l'unità di misura di $GM_\text{T}/R_\text{T}^2$, dove $G$ è la costante di gravitazione universale, $M_\text{T}$ è la massa della terra e $R_\text{T}$ è il raggio della terra.

**Soluzione:**

Notiamo che

$$F_g = \frac{G\,mM_\text{T}}{R_\text{T}^2} \tag{2.3}$$

esprime il modulo della forza di gravità che lega un corpo di massa $m$ alla Terra. Pertanto,

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_\text{T}}{R_\text{T}^2} \tag{2.4}$$

deve avere la dimensione di un'accelerazione, ossia m/s$^2$.

---

**Esercizio 2.4**

In un moto circolare uniforme di periodo $T = 3.5$ s e raggio $R = 140.5$ cm, calcolare la frequenza di rotazione, la velocità tangenziale e l'accelerazione centripeta.

**Soluzione:**

In un moto circolare uniforme, la frequenza di rotazione è pari a

$$f = \frac{1}{T} = 0.29 \text{ Hz}\,, \tag{2.5}$$

la velocità angolare a

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2.5 \text{ m/s}\,, \tag{2.6}$$

dove abbiamo usato $R = 1.405$ m, e l'accelerazione centripeta a

$$a_{\text{cp}} = \frac{v^2}{R} = 4.5 \text{ m/s}^2\,. \tag{2.7}$$

---

**Esercizio 2.5**

Il peso di un corpo è maggiore o minore se misurato sul monte Everest rispetto al livello del mare? Spiegare perché. Quanto varia l'accelerazione di gravità $g$? Si consideri la massa della Terra $M_{\text{T}} = 5.98 \cdot 10^{24}$ kg, il raggio delle Terra $R_{\text{T}} = 6\,380$ km e l'altezza del monte Everest $h = 8.90$ km.

**Soluzione:**

Il modulo della forza di gravità che lega un corpo di massa $m$ alla Terra è pari a

$$F_g = \frac{G\, m M_{\text{T}}}{r^2}\,, \tag{2.8}$$

dove $r$ è la distanza del corpo dal centro del pianeta. L'accelerazione di gravità sarà pertanto

$$a_g = \frac{F_g}{m} = \frac{G M_{\text{T}}}{r^2}\,. \tag{2.9}$$

Al crescere di $r$, $a_g$ diminuisce, quindi ci aspettiamo che l'accelerazione di gravità sia maggiore al livello del mare, dove troviamo come valore numerico

$$a_g = \frac{G M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}^2} = 9.80 \text{ m/s}^2\,. \tag{2.10}$$

Sulla punta del monte Everest varrà invece

$$a_g = \frac{G M_{\text{T}}}{(R_{\text{T}} + h)^2} = 9.77 \text{ m/s}^2\,. \tag{2.11}$$

---

**Esercizio 2.6**

Un oggetto di massa $m = 1.2$ kg è fermo su un piano scabro nonostante che venga applicata una forza orizzontale di 2.3 N. Calcolare tutte le forze agenti sul corpo e indicarne il modulo, la direzione e il verso.

**Soluzione:**

Sul corpo agiscono quattro forze:

i) la forza peso $\vec{P}$, diretta verso il centro della Terra, di modulo

$$P = mg = 12 \ N \, ; \tag{2.12}$$

ii) la reazione vincolare del piano $\vec{N} = -\vec{P}$, con stesso modulo e direzione di $\vec{P}$, ma verso opposto;

iii) una forza esterna di modulo $F = 2.3$ N, parallela al piano;

iv) la forza d'attrito $\vec{F}_{\rm a} = -\vec{F}$, con stesso modulo e direzione di $\vec{F}$, ma verso opposto.

Ricordiamo che la forza d'attrito statico non ha un valore intrinseco, ma assume il modulo della forza cui si oppone, fino al valore massimo $F_{\rm s}^{\rm max} = \mu_s N$.

---

**Esercizio 2.7**

Determinare lo spazio percorso da un oggetto lasciato cadere da una torre sotto l'azione della gravità dopo 1.3 s. Quale sarà lo spazio percorso tra $t_1 = 1.5$ s e $t_2 = 2.5$ s?

**Soluzione:**

Un corpo in caduta libera soddisfa la seguente legge oraria:

$$x_{\rm f} = x_{\rm in} + v_{\rm in}(t_{\rm f} - t_{\rm in}) - \frac{1}{2} g (t_{\rm f} - t_{\rm in})^2 \, , \tag{2.13}$$

dove abbiamo preso l'asse delle ordinate diretto verso l'alto. Siamo liberi di fissare $t_{\rm in} = 0$ s, e poiché in tale istante abbiamo $v_{\rm in} = 0$ m/s, l'Eq. (2.13) si riduce a

$$x_{\rm f} = x_{\rm in} - \frac{1}{2} g \, t_{\rm f}^2 \, . \tag{2.14}$$

Assumendo $t_{\rm f} = 1.3$ s, troviamo

$$\Delta x = x_{\rm f} - x_{\rm in} = -\frac{1}{2} g \, t_{\rm f}^2 = -8.3 \ {\rm m} \, , \tag{2.15}$$

dove il segno $-$ indica che il corpo, cadendo, si sta avvicinando all'origine del nostro sistema di riferimento, ossia il terreno.

Per trovare lo spazio percorso tra gli intervalli di tempo $t_1$ e $t_2$, utilizziamo l'Eq. (2.14) per entrambi questi tempi, come segue:

$$\begin{cases} x(t_1) = x_{\rm in} - \frac{1}{2} g \, t_1^2 \, , \\ x(t_2) = x_{\rm in} - \frac{1}{2} g \, t_2^2 \, . \end{cases} \tag{2.16}$$

Sottraiamo la prima equazione del sistema alla seconda, ottenendo:

$$\Delta x_{21} = x(t_2) - x(t_1) = -\frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2) = -19.6 \ {\rm m} \, . \tag{2.17}$$

---

**Esercizio 2.8**

In un urto completamente anelastico un corpo di massa $m = 1.2$ kg e velocità $v = 10.2$ m/s urta su un corpo di massa $M = 12.0$ kg a riposo. Calcolare l'impulso e l'energia cinetica prima e dopo l'urto del sistema. Commentare il risultato.

**Soluzione:**

Per definizione, in un *urto completamente anaelastico* due corpi rimangono attaccati tra loro dopo l'impatto. Ciò significa che la quantità di moto finale sarà pari a $p_\mathrm{f} = (m + M)v_\mathrm{f}$. Per quanto riguarda la quantità di moto iniziale, questa corrisponde semplicemente a $p_\mathrm{in} = mv$, poiché prima dell'impatto il corpo di massa $M$ è fermo. Quindi

$$p_\mathrm{in} = p_\mathrm{f} \qquad \Longrightarrow \qquad mv = (m + M)v_\mathrm{f} \qquad \Longrightarrow \qquad v_\mathrm{f} = \frac{m}{m + M}v = 0.93 \text{ m/s}, . \tag{2.18}$$

La differenza tra la quantità di moto finale e iniziale del corpo di massa $m$ ci restituisce l'*impulso* che esso ha *subito* dall'impatto con il corpo di massa $M$, e corrisponde a

$$\Delta p = m(v_\mathrm{f} - v) = -11 \text{ kg m/s} . \tag{2.19}$$

Il segno $-$ indica che l'impulso ha verso opposto alla direzione iniziale del moto del corpo di massa $m$.

---

**Esercizio 2.9**

Se il lavoro delle forze non conservative effettuato su un sistema è $W_\mathrm{nc} = -10.3$ J e la variazione dell' energia potenziale del sistema è $\Delta U = 13.0$ J, quanto vale la variazione dell'energia cinetica $\Delta K$ del sistema considerato?

**Soluzione:**

Ricordiamo che il *teorema delle forze vive* afferma che

$$W_\mathrm{tot} = W_\mathrm{c} + W_\mathrm{nc} = \Delta K \, , \tag{2.20}$$

dove il lavoro conservativo corrisponde a $W_\mathrm{c} = -\Delta U$. Nel nostro caso,

$$\Delta K = W_\mathrm{nc} - \Delta U = -23.3 \text{ J} . \tag{2.21}$$

---

**Esercizio 2.10**

Calcolare l'allungamento di una molla di costante elastica $k = 45.7$ N/m alla quale viene applicata una forza $F = 10.5$ N.

**Soluzione:**

È sufficiente usare la *legge di Hooke*:

$$F = k\Delta x \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x = \frac{F}{k} = 0.230 \text{ m} . \tag{2.22}$$

---

## 2.2 Esercizi (15 punti)

**Esercizio 2.11: (*nome originale*: A)**

Due asteroidi si urtano frontalmente: prima dell'urto l'asteroide $A$ ($m_A = 6.9 \cdot 10^{12}$ kg) ha un velocità di 2.9 km/s e l'asteroide $B$ ($m_B = 1.20 \cdot 10^{13}$ kg) ha un velocità di 1.9 km/s orientata in senso opposto. Se gli asteroidi si uniscono, quale sarà la velocità (direzione e modulo) del nuovo asteroide dopo l'urto? Calcolare l'energia cinetica prima e dopo l'urto e spiegare il risultato ottenuto.

**Soluzione:**

Trattandosi di un urto totalmente anaelastico, si conserva la quantità di moto totale, ma non l'energia cinetica. La quantità di moto prima dell'urto è data da

$$\vec{p}_{\rm in} = m_A \vec{v}^A_{\rm in} + m_B \vec{v}^B_{\rm in} \, , \tag{2.23}$$

mentre quella dopo l'urto corrisponde a

$$\vec{p}_{\rm f} = (m_A + m_B)\vec{v}_{\rm f} \, . \tag{2.24}$$

Prendendo il versore $\hat{\boldsymbol{x}}$ con stessa direzione e verso di $\vec{v}^A_{\rm in}$, abbiamo

$$\vec{p}_{\rm in} = \vec{p}_{\rm f} \qquad \Longrightarrow \qquad (m_A v^A_{\rm in} - m_B v^B_{\rm in})\,\hat{\boldsymbol{x}} = (m_A + m_B) v_{\rm f}\,\hat{\boldsymbol{x}} \, , \tag{2.25}$$

da cui otteniamo

$$v_{\rm f} = \frac{m_A v^A_{\rm in} - m_B v^B_{\rm in}}{m_A + m_B} = -0.15 \text{ km/s} = -1.5 \cdot 10^2 \text{ m/s} \, . \tag{2.26}$$

$\vec{v}_{\rm f}$ ha pertanto la stessa direzione e verso di $\vec{v}^B_{\rm in}$.

Per quanto concerne la variazione di energia cinetica, troviamo

$$\Delta K = K_{\rm f} - K_{\rm in} = \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_{\rm f}^2 - \frac{1}{2}\Big(m_A (v^A_{\rm in})^2 + m_B (v^B_{\rm in})^2\Big) = -2.9 \cdot 10^{19} \text{ J} \, . \tag{2.27}$$

Come ci aspettavamo, durante l'urto è andata persa parte dell'energia cinetica. È importante sottolineare che, per il calcolo di $\Delta K$, tutte le velocità devono essere espresse in m/s.

---

**Esercizio 2.12: (*nome originale*: B)**

Un corpo di massa $m = 3.2$ kg, attaccato ad una molla con costante elastica $k = 290$ N/m, compie un moto armonico. A distanza di $d = 2.5$ cm dalla posizione diequilibrio il corpo si muove con velocità $v = 0.90$ m/s. Calcolare

i) l'ampiezza del moto,

ii) la massima velocità scalare raggiunta dal corpo.

**Soluzione:**

Per trovare l'ampiezza del moto, è sufficiente applicare la *conservazione dell'energia meccanica* (si noti che la forza elastica è *conservativa*):

$$K_{\rm in} + U_{\rm in} = \cancel{K_{\rm f}} + U_{\rm f} \, . \tag{2.28}$$

La posizione iniziale è quella in cui conosciamo i dati $d$ e $v$, mentre la posizione finale quella corrispondente al massimo allungamento della molla, che è proprio l'ampiezza $A$ del moto. In tale posizione, la velocità è nulla, da cui $K_\mathrm{f} = 0$ J. Quindi,

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kA^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \sqrt{\frac{mv^2 + kd^2}{k}} = 0.098 \text{ m}\,, \tag{2.29}$$

dove abbiamo usato $d = 0.025$ m.

Possiamo trovare una via alternativa per risolvere il problema. Sappiamo che la legge oraria per un corpo che si muove di moto circolare uniforme corrisponde a

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi)\,, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \tag{2.30}$$

dove $\phi$ è una generica fase. La legge della velocità è invece

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi)\,. \tag{2.31}$$

Sappiamo che al tempo $t_\mathrm{in}$ il sistema si trova nella posizione $x(t_\mathrm{in}) = d$ con una velocità $v(t_\mathrm{in}) = v$. Pertanto, abbiamo che

$$\begin{cases} A\sin(\omega t_\mathrm{in} + \phi) = d\,, \\ A\omega\cos(\omega t_\mathrm{in} + \phi) = v\,. \end{cases} \tag{2.32}$$

Dividiamo la prima equazione per la seconda, così da trovare:

$$\frac{1}{\omega}\tan(\omega t_\mathrm{in} + \phi) = \frac{d}{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \omega t_\mathrm{in} + \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega d}{v}\right)\,. \tag{2.33}$$

A questo punto, invertiamo la prima equazione in (2.32) per ottenere l'ampiezza:

$$A = \frac{d}{\sin(\omega t_\mathrm{in} + \phi)} = \frac{d}{\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\omega d}{v}\right)\right)} = 0.098 \text{ m}\,, \tag{2.34}$$

che coincide con il risultato ottenuto tramite la conservazione dell'energia.

Da ultimo, per quanto riguarda la velocità scalare massima, dall'Eq. (2.31) troviamo:

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi) \leq \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A \equiv v_\mathrm{max} = 0.93 \text{ m/s}\,. \tag{2.35}$$

---

**Esercizio 2.13: (*nome originale*: C)**

Un corpo di massa $m = 12.0$ kg si trova su un piano inclinato scabro con angolo $\alpha = 30°$ rispetto al superficie orizzontale. Il coefficiente di attrito statico è $\mu_s = 0.42$. Determinare se il corpo scivola o se rimane fermo sul piano inclinato. Qual è l'angolo massimo consentito affinché il corpo di massa $m$ non scivoli?

**Soluzione:**

Dividiamo la forza peso $\vec{P}$ in due componenenti $\vec{P}_{||}$ e $\vec{P}_\perp$, la prima parallela e la seconda perpendincolare al piano inclinato. $\vec{P}_\perp$ è compensata dalla normale al piano, ossia

$$\vec{P}_\perp + \vec{N} = 0\,. \tag{2.36}$$

Prendendo i moduli di entrambi i vettori, troviamo:

$$mg\cos(\alpha) - N = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad N = mg\cos(\alpha)\,. \tag{2.37}$$

Conoscendo $N$, possiamo calcolare la forza di attrito statico massima, che corrisponde a

$$F_{\mathrm{s}}^{\max} = \mu_{\mathrm{s}} N = \mu_{\mathrm{s}} mg\cos(\alpha) = 43\ \mathrm{N}\,. \tag{2.38}$$

Notiamo che $\vec{F}_{\mathrm{s}}^{\max}$ è diretta lungo la componente parallela al piano, ma in verso opposto a $\vec{P}_{||}$. Il sistema è in equilibrio se e solo se $P_{||} \leq F_{\mathrm{s}}^{\max}$. Tuttavia, $P_{||}$ è pari a

$$P_{||} = mg\sin(\alpha) = 58.8\ \mathrm{N}\,, \tag{2.39}$$

quindi il sistema non è in equilibrio.

Affinché il sistema risulti in equilibrio, deve valere la condizione:

$$P_{||} \leq F_{\mathrm{s}}^{\max} \qquad \Longrightarrow \qquad mg\sin(\alpha) \leq \mu_{\mathrm{s}} mg\cos(\alpha)\,, \tag{2.40}$$

condizione soddisfatta solo se

$$\tan(\alpha) \leq \mu_{\mathrm{s}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha \leq \tan^{-1}(\mu_{\mathrm{s}}) = 23^\circ\,. \tag{2.41}$$

---

## 3 Lezione di venerdì 10 Maggio 2024

In questa lezione affrontiamo i seguenti argomenti:

- esercizi sulla *fluidodinamica*,
- esercizi sulla *temperatura e teoria cinetica*,
- esercizi sulla *calorimetria*,
- esercizi sui *cicli termodinamici.*

### 3.1 Fluidodinamica

**Esercizio 3.1**

L'acqua scorre attraverso un idrante di raggio 9.6 cm con una velocità di modulo 1.3 m/s. Alla fine del tubo l'acqua esce attraverso un ugello di raggio 2.5 cm.

i) Trovare il modulo della velocità dell'acqua che esce dall'ugello.

ii) Supponendo che la pressione nell'idrante sia di 350 kPa, trovare la pressione nell'ugello.

**Soluzione:**

Per rispondere alla domanda i), assumiamo che il fluido sia ideale e, dette $v_1$ e $v_2$ le velocità del fluido rispettivamente attraverso le superfici $S_1$ e $S_2$, imponiamo la *conservazione della portata*:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 v_1 = 19 \text{ m/s} \,. \tag{3.1}$$

Passando alla domanda ii), utilizziamo *l'equazione di Bernoulli*:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g h_1} = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g h_2} \,, \tag{3.2}$$

dove abbiamo cancellato i contributi gravitazionali poiché $h_1 = h_2$. Ci rimane pertanto

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 170 \text{ kPa} \,, \tag{3.3}$$

con $\rho = 1000$ kg/m$^3$.

---

**Esercizio 3.2**

Durante una tempesta, un vento soffia a 35.5 m/s sul tetto, orizzontale, di una piccola casa. Trovare la differenza di pressione tra l'aria dentro la casa e quella sulla superficie del tetto (la densità dell'aria è 1.29 kg/m$^3$).

**Soluzione:**

Assumiamo che l'aria sia un fluido ideale e imponiamo l'equazione di Bernoulli all'interno e all'esterno del tetto:

$$P_{\text{int}} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_{\text{int}}^2} + \cancel{\rho g h_{\text{int}}} = P_{\text{est}} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{est}}^2 + \cancel{\rho g h_{\text{est}}} \,. \tag{3.4}$$

Notiamo che i contributi gravitazionali si semplificano poiché, trascurando lo spessore del tetto, abbiamo $h_{\text{int}} = h_{\text{est}}$. Inoltre, $v_{\text{int}} = 0$ m/s poiché l'aria interna al tetto è ferma. Concludiamo quindi che

$$\Delta P = P_{\text{int}} - P_{\text{est}} = \frac{1}{2}\rho v_{\text{est}}^2 = 813 \text{ Pa}\,. \tag{3.5}$$

Come si può osservare, la pressione interna (che equivale a 1 atm) è maggiore di quella esterna a causa della velocità del vento. In alcuni casi, la forza esercitata sulla superficie del tetto dalla differenza di pressione (diretta dal basso verso l'alto) è capace di scoperchiarlo.

---

**Esercizio 3.3**

Un corpo di rame ($\rho_{\text{Cu}} = 8900$ kg/m$^3$) di massa 3.0 kg viene completamente immerso in acqua ($\rho_{\text{acq}} = 1000$ kg/m$^3$) ed appeso a una molla di massa trascurabile che risulta deformata di 3.0 cm. Calcolare la costante elastica della molla.

**Soluzione:**

Consideriamo un sistema di riferimento diretto verso l'alto (sia $\hat{\boldsymbol{y}}$ il versore) e scriviamo le forze che agiscono sul corpo:

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \\ \vec{F}_{\text{el}} = k\Delta x\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \\ \vec{F}_{\text{A}} = \rho_{\text{acq}} V_{\text{im}} g\,\hat{\boldsymbol{y}}\,, \end{cases} \tag{3.6}$$

dove $\vec{P}$ è la forza peso, $\vec{F}_{\text{el}}$ è la forza elastica ($\Delta x = 3.0$ cm), e $\vec{F}_{\text{A}}$ è la *forza di Archimede*, nota anche come *forza idrostatica*. $V_{\text{im}}$ indica il volume immerso, che in questo caso coincide con il volume totale $V$ poiché il corpo è completamente immerso in acqua. Le tre forze sono in equilibrio tra loro, ossia

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{el}} + \vec{F}_{\text{A}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad mg = k\Delta x + \rho_{\text{acq}} V g\,. \tag{3.7}$$

A questo punto, dal momento che $V = m/\rho_{\text{Cu}}$, possiamo ricavare la costante elastica della molla:

$$k = \frac{mg - \rho_{\text{acq}} V g}{\Delta x} = \frac{mg}{\Delta x}\left(1 - \frac{\rho_{\text{acq}}}{\rho_{\text{Cu}}}\right) = 870 \text{ N/m}\,. \tag{3.8}$$

---

**Esercizio 3.4**

In un vasto serbatoio aperto con le pareti verticali vi è dell'acqua fino ad un'altezza $H = 8.0$ m. Si pratica un foro in una delle pareti a una profondità $h = 2.0$ m al di sotto del livello dell'acqua. Calcolare a quale distanza $d$ dal piede della parete il getto d'acqua uscente dal serbatoio colpisce il piano orizzontale.

**Soluzione:**

Per risolvere il problema facciamo ricorso all'equazione di Bernoulli

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{cost}\,. \tag{3.9}$$

Consideriamo un punto generico sulla superficie del fluido a contatto con l'aria e un punto sulla superficie del fluido adiacente al foro. Applichiamo la legge di Bernoulli in questi due punti:

$$\cancel{P_0} + \rho g H = \cancel{P_0} + \frac{1}{2}\rho v_{\text{foro}}^2 + \rho g (H - h)\,, \tag{3.10}$$

dove abbiamo considerato nulla la velocità del fluido sulla superficie. Notiamo inoltre che in entrambi i punti la pressione è pari alla pressione atmosferica $P_0$, che quindi si semplifica nell'equazione. Dall'equazione precedente ricaviamo la velocità:

$$v_{\text{foro}} = \sqrt{2gh}\,. \tag{3.11}$$

A questo punto il problema si è ridotto ad un esercizio di cinematica in due dimensioni. Consideriamo una particella di fluido come il generico punto materiale lanciato orizzontalmente con velocità lungo l'asse $x$ pari a $v_{x,\text{in}} = v_{\text{foro}}$ e $v_{y,\text{in}} = 0$ m/s. Le equazioni del moto di tale particella sono:

$$\begin{cases} y(t) = (H-h) - \frac{1}{2}g(t-t_{\text{in}})^2\,, \\ x(t) = v_{x,\text{in}}(t-t_{\text{in}})\,, \end{cases} \tag{3.12}$$

dove $y_{\text{in}} = (H-h)$ indica l'altezza iniziale. Siamo liberi di fissare $t_{\text{in}} = 0$ s. Per trovare $d$, dobbiamo risolvere il sistema imponendo $x(t) = d$ e $y(t) = 0$ m:

$$\begin{cases} H-h = \frac{1}{2}gt^2\,, \\ d = v_{\text{foro}}t\,. \end{cases} \tag{3.13}$$

Dalla prima equazione ricaviamo il tempo

$$t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}\,, \tag{3.14}$$

che sostituito nella seconda ci resituisce il risultato finale

$$d = v_{\text{foro}}t = 2\sqrt{h(H-h)} = 6.9 \text{ m}\,. \tag{3.15}$$

---

## 3.2 Temperatura e teoria cinetica

**Esercizio 3.5**

Qual è l'energia traslazionale media di una molecola di ossigeno in condizioni standard? Qual è l'energia cinetica traslazionale totale di 1.0 mol?

**Soluzione:**

In un gas perfetto, l'energia traslaziononale (ossia cinetica) media delle molecole in moto casuale è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta del gas. Nello specifico, si dimostra che

$$\overline{K} = \frac{1}{2}mv_{\text{qm}}^2 = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T\,, \tag{3.16}$$

dove $\overline{K}$ è l'energia cinetica media di una singola molecola del gas, $v_{\text{qm}}$ la *velocità quadratica media*, e $k_{\text{B}}$ la *costante di Boltzmann.* Nelle *condizioni standard* abbiamo $T = 0$ °C $= 273.15$ K, da cui

$$\overline{K} = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T = 5.7 \cdot 10^{-21}\,\text{J}\,. \tag{3.17}$$

Per calcolare l'energia cinetica traslazionale totale a $T = 25$ °C $= 298.15$ K, moltiplichiamo l'energia cinetica media $\overline{K}$ a tale temperatura per il numero totale $N$ di particelle contenute in $n = 1.0$ mol:

$$E_{\text{tot}} = N\overline{K} = \frac{3}{2}\underbrace{\frac{N}{N_{\text{A}}}}_{n}\underbrace{N_{\text{A}}k_{\text{B}}}_{R}T = \frac{3}{2}nRT = 3700 \text{ J}\,, \tag{3.18}$$

dove $N_{\text{A}}$ è il *numero di Avogadro* e $R$ è la *costante universale dei gas.*

---

**Esercizio 3.6**

Se una banda di ferro ($\alpha_{\mathrm{Fe}} = 12 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$) fosse fissata saldamente attorno all'equatore terrestre a 25 °C e venisse poi riscaldata a 55 °C, di quanto si verrebbe a trovare al di sopra della Terra? ($R_{\mathrm{T}} = 6300$ km)

**Soluzione:**

Inizialmente la barra di ferro ha una lunghezza $l_0$ pari alla circonferenza della Terra. Dopo un innalazamento $\Delta T$ della temperatura, la sua lunghezza sarà

$$l = l_0(1 + \alpha_{\mathrm{Fe}}\Delta T)\,. \tag{3.19}$$

Poiché $l = 2\pi(R_{\mathrm{T}} + \Delta R)$ e $l_0 = 2\pi R_{\mathrm{T}}$, allora

$$\Delta R = \frac{l - l_0}{2\pi} = \alpha_{\mathrm{Fe}}\Delta T R_{\mathrm{T}} = 2300 \text{ m} = 2.3 \text{ km}\,. \tag{3.20}$$

---

**Esercizio 3.7**

Un cubo di ferro galleggia in una bacinella di mercurio a 0 °C. Se si alza la temperatura a 25 °C, il cubo galleggerà più in alto o più in basso? Di quale percentuale cambierà la frazione di volume immerso? I coefficienti di dilatazione del volume del mercurio e del ferro valgono rispettivamente $\beta_{\mathrm{Hg}} = 180 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$ e $\beta_{\mathrm{Fe}} = 35 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$.

**Soluzione:**

In generale, se un oggetto di volume $V_0$ è sottoposto a una variazione di temperatura $\Delta T$, il suo volume finale diventa

$$V = V_0(1 + \beta\Delta T)\,. \tag{3.21}$$

Sia $m =$ la massa di questo oggetto. Poiché essa non varia al variare della temperatura, ne consegue che

$$\rho_0 V_0 = \rho V \qquad \Longrightarrow \qquad \rho = \frac{V_0}{V}\rho_0 = \frac{\rho_0}{1 + \beta\Delta T}\,. \tag{3.22}$$

Ora che sappiamo come varia la densità di un corpo al variare di $T$, possiamo risolvere il problema. Per il principio di Archimede, l'equazione che regola il galleggiamento di un corpo immerso in un fluido è data da

$$V_{\mathrm{im}}\,\rho_{\mathrm{fluido}} = V_{\mathrm{corpo}}\,\rho_{\mathrm{corpo}}\,, \tag{3.23}$$

dove $V_{\mathrm{im}}$ indica il volume del corpo immerso nel fluido. Nel nostro caso, nella situazione iniziale abbiamo

$$V_{\mathrm{im}}^{(\mathrm{in})}\rho_{\mathrm{Hg}}^{(\mathrm{in})} = V_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{in})}\rho_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{in})} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{V_{\mathrm{im}}^{(\mathrm{in})}}{V_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{in})}} = \frac{\rho_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{in})}}{\rho_{\mathrm{Hg}}^{(\mathrm{in})}}\,, \tag{3.24}$$

dove $V_{\mathrm{im}}^{(\mathrm{in})}/V_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{in})}$ è proprio la frazione di volume immerso iniziale. Volendo ora la frazione di volume immerso dopo un incremento $\Delta T$ della temperatura, riscriviamo l'Eq. (3.25) nella condizione finale:

$$V_{\mathrm{im}}^{(\mathrm{fin})}\rho_{\mathrm{Hg}}^{(\mathrm{fin})} = V_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{fin})}\rho_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{fin})} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{V_{\mathrm{im}}^{(\mathrm{fin})}}{V_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{fin})}} = \frac{\rho_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{fin})}}{\rho_{\mathrm{Hg}}^{(\mathrm{fin})}} = \frac{1 + \beta_{\mathrm{Hg}}\Delta T}{1 + \beta_{\mathrm{Fe}}\Delta T}\,\frac{\rho_{\mathrm{Fe}}^{(\mathrm{in})}}{\rho_{\mathrm{Hg}}^{(\mathrm{in})}}\,. \tag{3.25}$$

Combinando questo risultato con la seconda equazione in (3.25), otteniamo

$$\frac{V_{\rm im}^{(\rm fin)}}{V_{\rm Fe}^{(\rm fin)}} = \frac{1+\beta_{\rm Hg}\Delta T}{1+\beta_{\rm Fe}\Delta T}\,\frac{V_{\rm im}^{(\rm in)}}{V_{\rm Fe}^{(\rm in)}} = 1.0036\,\frac{V_{\rm im}^{(\rm in)}}{V_{\rm Fe}^{(\rm in)}}\,, \tag{3.26}$$

ossia la frazione di volume immerso aumenta dello 0.36%.

In conclusione, il cubo di ferro, galleggia più in basso. Infatti, sebbene sia il ferro sia il mercurio si espandano all'aumentare della temperatura, il mercurio ha in percentuale un'espansione maggiore poiché $\beta_{\rm Hg} > \beta_{\rm Fe}$. Questo fa sì che la sua densità in proporzione diminuisca più di quella del ferro, che quindi galleggerà più in basso.

---

## 3.3 Calorimetria

**Esercizio 3.8**

Un blocco di rame di massa $m_{\rm Cu} = 10$ g si trova a una temperatura iniziale $T_{\rm in} = 12$ °C. Al blocco viene fornito un calore $Q = 320$ J. Determinare la temperatura finale $T_{\rm f}$ del blocco sapendo che il calore specifico del rame è $c_{\rm Cu} = 0.093$ cal/(g°C).

**Soluzione:**

Se una quantità di calore $Q$ viene fornita a una sostanza di massa $m$ e calore specifico $c$, senza incorrere in una transizione di fase, allora la temperatura della sostanza varia seondo la legge $Q = mc\Delta T$, da cui

$$\Delta T = T_{\rm f} - T_{\rm in} = \frac{Q}{mc}\,. \tag{3.27}$$

Tenendo conto che la conversione da cal a J è pari a

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}\,, \tag{3.28}$$

esprimiamo il calore specifico del rame come

$$c_{\rm Cu} = 0.389 \text{ J/(g°C)}\,, \tag{3.29}$$

e sostituiamo questo valore nell'Eq. (3.27), ottenendo

$$T_{\rm f} = T_{\rm in} + \frac{Q}{mc} = 94 \text{ °C}\,. \tag{3.30}$$

---

**Esercizio 3.9**

Un blocco di rame di massa $m_{\rm Cu} = 400$ g si trova alla temperatura iniziale $T_{\rm in}^{\rm Cu} = 95$ °C. Un blocco di alluminio di massa $m_{\rm Al} = 800$ g si trova invece alla temperatura iniziale $T_{\rm in}^{\rm Al} = 27$ °C. Essi vengono posti a contatto. Calcolare la temperatura di equilibrio del sistema $T_{\rm eq}$, sapendo che il calore specifico del rame e dell'alluminio sono rispettivamente $c_{\rm Cu} = 0.389$ J/(g°C) e $c_{\rm Al} = 0.900$ J/(g°C).

**Soluzione:**

Il corpo più caldo (rame) si raffredda fino alla temperatura di equilibrio, mentre il corpo più freddo (alluminio) si scalda fino alla temperatura di equilibrio. Poiché non viene scambiata energia con l'ambiente esterno, il calore ceduto dal rame $Q_{\rm Cu}$ equivale al calore assorbito dall'alluminio $Q_{\rm Al}$:

$$Q_{\rm Cu} + Q_{\rm Al} = 0\,. \tag{3.31}$$

Dal momento che la temperatura di equilibrio è tale per cui 27 °C < $T_{\text{eq}}$ < 95 °C, nessuno dei due materiali compie una transizione di fase, da cui segue che

$$\begin{cases} Q_{\text{Cu}} = m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} (T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Cu}}) \,, \\ Q_{\text{Al}} = m_{\text{Al}} c_{\text{Al}} (T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Al}}) \,. \end{cases} \tag{3.32}$$

Risolviamo dunque l'equazione

$$m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} (T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Cu}}) + m_{\text{Al}} c_{\text{Al}} (T_{\text{eq}} - T_{\text{in}}^{\text{Al}}) = 0 \,, \tag{3.33}$$

che ha come soluzione

$$T_{\text{eq}} = \frac{m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} T_{\text{in}}^{\text{Cu}} + m_{\text{Al}} c_{\text{Al}} T_{\text{in}}^{\text{Al}}}{m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} + m_{\text{Al}} c_{\text{Al}}} = 39 \text{ °C} \,. \tag{3.34}$$

---

**Esercizio 3.10**

Una massa di ghiaccio $m_{\text{ghi}} = 1.5$ kg alla temperatura $T_{\text{in}}^{\text{ghi}} = -40$ °C è posta in un recipiente contenete una massa d'acqua $m_{\text{acq}} = 2.0$ kg alla temperatura iniziale $T_{\text{in}}^{\text{acq}} = 20$ °C. Calcolare la massa $m$ di ghiaccio che si fonde, sapendo che:

- calore specifico dell'acqua: $c_{\text{acq}} = 4.186 \cdot 10^3$ J/(kg°C),
- calore specifico del ghiaccio: $c_{\text{ghi}} = 3.093 \cdot 10^3$ J/(kg°C),
- calore latente di fusione del ghiaccio: $\lambda_{\text{ghi}} = 3.33 \cdot 10^5$ J/kg.

**Soluzione:**

Inizialmente l'acqua si raffredda fino ad una temperatura $T_1$ cedendo al ghiaccio il calore $Q_1$ che serve a far raggiungere a quest'ultimo la temperatura di 0 °C. Vale pertanto l'equazione

$$\underbrace{m_{\text{acq}} c_{\text{acq}} (T_1 - T_{\text{in}}^{\text{acq}})}_{=Q_1} + m_{\text{ghi}} c_{\text{ghi}} (0 \text{ °C} - T_{\text{in}}^{\text{ghi}}) = 0 \,, \tag{3.35}$$

da cui

$$T_1 = T_{\text{acq}} + \frac{m_{\text{ghi}} c_{\text{ghi}} T_{\text{in}}^{\text{ghi}}}{m_{\text{acq}} c_{\text{acq}}} = 5 \text{ °C} \,. \tag{3.36}$$

Poiché ora l'acqua è a 5 °C e il ghiaccio a 0 °C, il sistema non è ancora in equilibrio. Pertanto, l'acqua cede calore $Q_2$ al ghiaccio fino a raggiungere la temperatura di equilibrio di $T_2 = 0$ °C, fondendo una massa $m$ di ghiaccio secondo la relazione

$$\underbrace{m_{\text{acq}} c_{\text{acq}} (0 \text{ °C} - T_1)}_{=Q_2} + \lambda_{\text{ghi}} m = 0 \,. \tag{3.37}$$

Otteniamo pertanto

$$m = \frac{m_{\text{acq}} c_{\text{acq}} T_1}{\lambda_{\text{ghi}}} = 0.13 \text{ kg} \,. \tag{3.38}$$

---

## 3.4 Cicli termodinamici

**Esercizio 3.11**

Calcolare il calore assorbito da $n = 2.00$ mol di gas monoatomico durante il ciclo

$$A \to B \to C \to D \to A \,, \tag{3.39}$$

dove

$$\begin{aligned} A \to B &= \text{isocora} \qquad & B \to C &= \text{isoterma}\,, \\ C \to D &= \text{isocora} \qquad & D \to A &= \text{isoterma}\,. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Si assumano i seguenti valori:

$$P_A = 2.000 \cdot 10^5 \text{ Pa}\,, \qquad P_B = 4P_A\,, \qquad P_C = 2.285 \cdot 10^5 \text{ Pa}\,, \qquad P_D = \frac{P_C}{4}\,, \tag{3.41}$$

$$T_A = 122 \text{ K}\,, \qquad T_B = 4T_A\,, \qquad T_C = 4T_A\,, \qquad T_D = T_A\,, \tag{3.42}$$

**Soluzione:**

Poiché abbiamo a che fare con un ciclo, la variazione totale di energia interna è nulla ($\Delta E = 0$), e il calore assorbito dal gas è pari a

$$Q = W\,, \tag{3.43}$$

dove $W$ è il lavoro totale compiuto dal gas. Notiamo che

$$W = \cancel{W_{AB}} + W_{BC} + \cancel{W_{CD}} + W_{DA} = W_{BC} + W_{DA}\,, \tag{3.44}$$

in quanto il lavoro compiuto nelle trasformazioni isocore è nullo. Sfruttando l'espressione generale del lavoro compiuto in una isoterma si ha

$$\begin{aligned} W_{BC} &= nRT_B \log\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = nRT_B \log\left(\frac{P_B}{P_C}\right)\,, \\ W_{DA} &= nRT_A \log\left(\frac{V_A}{V_D}\right) = nRT_A \log\left(\frac{P_D}{P_A}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Sostituendo i dati del problema, troviamo

$$\begin{aligned} W_{BC} &= 4nRT_A \log\left(\frac{4P_A}{P_C}\right)\,, \\ W_{DA} &= -nRT_A \log\left(\frac{4P_A}{P_C}\right)\,, \end{aligned} \tag{3.46}$$

da cui ricaviamo

$$Q = 3nRT_A \log\left(\frac{4P_A}{P_C}\right) = 7630 \text{ J}\,. \tag{3.47}$$

---

**Esercizio 3.12**

Calcolare il calore $Q$ assorbito dal gas nel ciclo

$$A \to B \to C \to D \to E \to F \to A\,, \tag{3.48}$$

dove

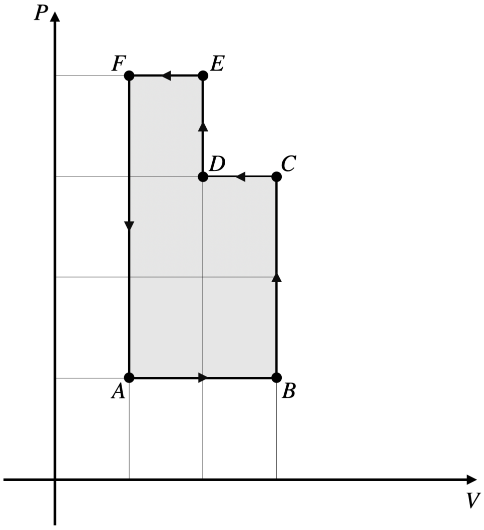
$$A \to B = \text{isobara} \qquad B \to C = \text{isocora}\,, \qquad C \to D = \text{isobara}\,,$$
$$D \to E = \text{isocora} \qquad E \to F = \text{isobara}\,, \qquad F \to A = \text{isocora}\,. \tag{3.49}$$

Si assumano i seguenti valori:

$$V_A = \frac{V_B}{3} = \frac{V_D}{2} = 3\ \text{m}^3\,, \qquad P_A = \frac{P_C}{3} = \frac{P_E}{4} = 2 \cdot 10^5\ \text{Pa}\,. \tag{3.50}$$

**Soluzione:**

Rappresentiamo graficamente il ciclo termodinamico:




Detto $W$ il lavoro totale compiuto dal gas, il calore assorbito $Q$ dal gas è dato da

$$Q = W\,, \tag{3.51}$$

dove la variazione di energia interna $\Delta E$ è nulla poiché abbiamo a che fare con un ciclo. Tenendo conto che il lavoro di una trasformazione isocora è nullo, e usando le relazioni $V_C = V_B$, $V_E = V_D$ e $V_F = V_A$, possiamo calcolare $W$ come segue:

$$\begin{aligned} W &= W_{AB} + \cancel{W_{BC}} + W_{CD} + \cancel{W_{DE}} + W_{EF} + \cancel{W_{FA}} \\ &= W_{AB} + W_{CD} + W_{EF} \\ &= P_A(V_B - V_A) + P_C(V_D - V_C) + P_E(V_F - V_E) \\ &= P_A(3V_A - V_A) + 3P_A(2V_A - 3V_A) + 4P_A(V_A - 2V_A) \\ &= -5P_AV_A \\ &= -3 \cdot 10^6\ \text{J}\,. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Il segno negativo del risultato suggerisce che il gas *cede* calore dopo un ciclo termodinamico. Questo è corente col fatto che il ciclo è percorso in senso antiorario, come mostrato in figura.

# 4 Lezione di venerdì 27 Maggio 2024

In questa lezione presentiamo le soluzioni della *Prova in itinere* del 26 Maggio 2021. Si ricorda di esprimere i risultati nelle unità del Sistema Internazionale MKS.

*Costanti utili*:

- calore specifico dell'acqua: $c_{\rm acq} = 4186$ J/(kg°C),
- densità dell'acqua: $\rho_{\rm acq} = 1000$ kg/m$^3$,
- costante dielettrica del vuoto: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C$^2$/(N m$^2$),
- costante universale dei gas: $R = 8.314$ J/(mol K).

## 4.1 Domande (18 punti)

**Esercizio 4.1**

La relazione tra gradi centigradi e Fahrenheit è

$$T(^\circ\mathrm{C}) = \frac{5}{9}\big(T(^\circ\mathrm{F}) - 32\big)\,. \tag{4.1}$$

Che valore ha lo zero assoluto nella scala Fahrenheit?

**Soluzione:**

Nella scala centigrada lo zero assoluto corrisponde a $-273.15$ °C, che diventano

$$T(^\circ\mathrm{F}) = \left[\frac{9}{5}T(^\circ\mathrm{C}) + 32\right]\ ^\circ\mathrm{F} = -459.67\ ^\circ\mathrm{F} \tag{4.2}$$

nella scala Fahrenheit.

---

**Esercizio 4.2**

Un gas è in equilibrio termico a temperatura ambiente $T = 20.0$ °C. Che temperatura deve raggiungere affinché l'energia cinetica media delle molecole raddoppi?

**Soluzione:**

In un gas perfetto, l'energia traslaziononale (ossia cinetica) media $\overline{K}$ delle molecole in moto casuale è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta del gas e corrisponde a

$$\overline{K} = \frac{3}{2}k_{\rm B}T\,, \tag{4.3}$$

dove $k_{\rm B}$ la *costante di Boltzmann*. Chiedendo che $\overline{K}_{\rm f} = 2\overline{K}_{\rm in}$, troviamo

$$2\left(\frac{3}{2}k_{\rm B}T_{\rm in}\right) = \frac{3}{2}k_{\rm B}T_{\rm f} \qquad \Longrightarrow \qquad T_{\rm f} = 2T_{\rm in} = 586\ \mathrm{K} = 313\ ^\circ\mathrm{C}\,. \tag{4.4}$$

---

**Esercizio 4.3**

Quanto calore occorre fornire a 1.0 litri di acqua inizialmente a temperatura ambiente a $T = 20.0$ °C per portarla alla temperatura di ebollizione?

**Soluzione:**

Poiché per arrivare alla temperatura di ebollizione l'acqua non subisce alcuna trasformazione di fase, possiamo determinare il calore $Q$ da fornire tramite la legge

$$Q = mc_{\text{acq}}\Delta T = V\rho_{\text{acq}}c_{\text{acq}}(100\ {}^\circ\text{C} - 20\ {}^\circ\text{C}) = 3.3 \cdot 10^5\ \text{J}\,, \tag{4.5}$$

dove abbiamo usato la conversione 1 L = $10^{-3}$ m$^3$.

---

**Esercizio 4.4**

Una bombola chiusa da un valvola contiene ossigeno e può scambiare calore con l'ambiente esterno. Dire se tale sistema può essere considerato un sistema termodinamico chiuso, aperto, o isolato. Spiegare il motivo.

**Soluzione:**

Il sistema non può scambiare massa con l'ambiente esterno, tuttavia può scambiare con esso calore (e quindi energia). Si tratta pertanto di un sistema *chiuso*.

---

**Esercizio 4.5**

In un ambiente freddo una persona può perdere energia per conduzione e irraggiamento, con una potenza dissipata $P = 200$ W. Stimare il tempo che la persona impiegherebbe a passare dalla temperatura di 36.5 °C a 35.5 °C se il metabolismo non entrasse in azione. Assumere una massa corporea di 70.0 kg e il calore specifico del corpo umano di 3470 J/(kg°C).

**Soluzione:**

In un intervallo di tempo $\Delta t$, la persona dissipa una quantità di calore pari a $Q = -P\Delta t$, dove il segno meno indica che il calore è ceduto. D'altra parte, conoscendo il calore specifico $c$ della persona, la sua massa e la variazione di temperatura, sappiamo che tale calore si può anche calcolare come $Q = mc\Delta T$. Otteniamo pertanto

$$-P\Delta t = mc\Delta T \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta t = -\frac{mc\Delta T}{P} = 1200\ \text{s}\,, \tag{4.6}$$

ossia 20 min.

---

**Esercizio 4.6**

Una quantità di calore pari a 2350 J viene fornita a un sistema termodinamico che compie un lavoro negativo sull'ambiente esterno pari a $-1150$ J. Qual è la variazione di energia interna del sistema?

**Soluzione:**

Utilizziamo l'equazione che lega energia interna, calore e lavoro:

$$\Delta E = Q - W = 3500 \text{ J}\,. \tag{4.7}$$

Si noti che $W < 0$, da cui $\Delta E > Q$.

---

**Esercizio 4.7**

Dire quali delle seguenti affermazioni sono corrette e spiegarne brevemente il motivo:

i) il calore fluisce spontaneamente da un oggetto caldo a uno freddo;

ii) esiste una macchina termica che abbia un rendimento del 100%, ovvero che possa trasformare completamente una data quantità di calore in lavoro;

iii) le trasformazioni spontanee tendono verso le stato di massimo disordine o massima entropia.

**Soluzione:**

Rispondiamo per punti:

i) VERO: corrisponde all'enunciato di Clausius del secondo principio della termodinamica;

ii) FALSO: contraddice il secondo principio della termodinamica e in particolare l'enunciato di Kelvin-Plank;

iii) VERO: in accordo con la formulazione generale del secondo principio della termodinamica.

---

**Esercizio 4.8**

Il flusso attraverso la superficie di un cubo di lato 32.5 cm è uguale a 2.30 $\mathrm{N\,m^2/C}$. Quanto vale la carica interna al cubo?

**Soluzione:**

Il *teorema di Gauss* stabilisce una relazione tra il flusso del campo elettrico attraverso la superficie chiusa $S$ e la carica interna tramite l'equazione

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}\,. \tag{4.8}$$

Si ricava pertanto la carica interna come

$$Q_{\text{int}} = \varepsilon_0 \Phi_S(\vec{E}) = 2.04 \cdot 10^{-11} \text{ C}\,. \tag{4.9}$$

Si noti che il risultato è indipendente dal lato del cubo.

---

**Esercizio 4.9**

A un condensatore di capacità 3.2 $\mu$F viene applicata una differenza di potenziale di 950 V. Calcolare la carica e l'energia immagazzinata dal sistema.

**Soluzione:**

Detta $C$ la capacità del condensatore e $\Delta V$ la differenza di potenziale ai suoi capi, la carica elettrica su una superficie delle sue lamine è pari a

$$Q = C\Delta V = 3.0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{C}\,, \tag{4.10}$$

mentre l'energia immagazzinata a

$$E = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = 1.4\ \mathrm{J}\,. \tag{4.11}$$

---

**Esercizio 4.10**

Determinare il potenziale elettrostatico in un punto distante 22 cm da una carica puntiforme di 4.50 $\mu$C. Supporre il potenziale $V$ nullo all'infinito.

**Soluzione:**

Il potenziale elettrico nel vuoto per una carica puntiforme è dato da

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \mathrm{cost}\,, \tag{4.12}$$

quindi è definito a meno di una costante arbitraria. Tuttavia, ci viene detto che per $r \to \infty$ il potenziale si annulla, quindi cost $= 0$. Troviamo pertanto

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = 1.8 \cdot 10^5\ \mathrm{V}\,. \tag{4.13}$$

---

## 4.2 Esercizi (15 punti)

**Esercizio 4.11: (*nome originale*: A)**

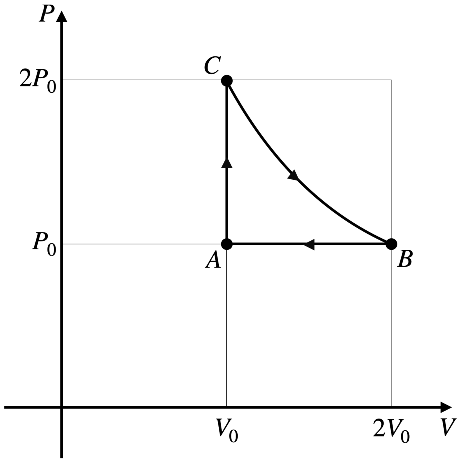
Una mole di gas perfetto biatomico compie un ciclo come quello rappresentato in figura, dove $A \to B$ è una trasformazione a volume costante, $B \to C$ è una trasformazione a temperatura costante e $C \to A$ una trasformazione a pressione costante. Le condizioni iniziali del gas sono $P_0 = 2.3 \cdot 10^5$ Pa e $V_0 = 16$ dm$^3$. Calcolare, nell'ipotesi che tutte le trasformazioni siano reversibili:

i) il lavoro effettuato;

ii) il calore assorbito;

iii) il rendimento del ciclo.

Il calore specifico molare per un gas biatomico vale $C_V = \frac{5}{2}R$ a volume costante e $C_P = \frac{7}{2}R$ a pressione costante.




**Soluzione:**

Il lavoro totale del ciclo termodinamico descritto nel testo è dato da

$$W = \cancel{W_{AB}} + W_{BC} + W_{CA} = W_{BC} + W_{CA}\,, \tag{4.14}$$

dove $W_{AB}$ è nullo poiché si tratta di una trasformazione isocora, $W_{BC}$ è pari a

$$W_{BC} = \underbrace{nRT_B}_{=P_BV_B} \log\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = 2P_0V_0 \log 2\,, \tag{4.15}$$

e $W_{CA}$ a

$$W_{CA} = P_A(V_A - V_C) = -P_0V_0\,. \tag{4.16}$$

Otteniamo quindi

$$W = P_0V_0(2\log 2 - 1) = 1.4 \cdot 10^3 \text{ J}\,, \tag{4.17}$$

che risponde alla domanda i). Per quanto riguarda la domanda ii), sappiamo che la variazione di energia interna in un ciclo termodinamico è sempre nulla, da cui

$$\Delta E = Q - W = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Q = W = 1.4 \cdot 10^3 \text{ J}\,. \tag{4.18}$$

Infine, per la domanda iii), abbiamo bisogno di conoscere il calore assorbito $Q_{\text{ass}}$ e ceduto $Q_{\text{ced}}$ per calcolare il rendimento

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{Q_{\text{ass}}}\,. \tag{4.19}$$

Nell'isocora $A \to B$, il calore è *assorbito* ed è dato da

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= nC_V(T_B - T_A) \\ &= nC_V\left(\frac{P_BV_B}{nR} - \frac{P_AV_A}{nR}\right) \\ &= \frac{C_V}{R}(2P_0V_0 - P_0V_0) \\ &= \frac{5}{2}P_0V_0\,, \end{aligned} \tag{4.20}$$

nell'isoterma $B \to C$, il calore è nuovamente *assorbito* ed è pari a ($\Delta E = 0$ J)

$$Q_{BC} = W_{BC} = 2P_0V_0 \log 2\,, \tag{4.21}$$

mentre nell'isobara $C \to A$ il calore è *ceduto* e vale

$$\begin{aligned} Q_{CA} &= nC_P(T_A - T_C) \\ &= nC_P\left(\frac{P_A V_A}{nR} - \frac{P_C V_C}{nR}\right) \\ &= \frac{C_P}{R}(P_0V_0 - 2P_0V_0) \\ &= -\frac{7}{2}P_0V_0 \,. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Segue dunque che

$$\begin{aligned} Q_{\text{ass}} &= Q_{AB} + Q_{BC} = P_0V_0\left(\frac{5}{2} + 2\log 2\right) \,, \\ Q_{\text{ced}} &= Q_{CA} = -\frac{7}{2}P_0V_0 \,, \end{aligned} \tag{4.23}$$

da cui

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{\text{ced}}|}{Q_{\text{ass}}} = 1 - \frac{\frac{7}{2}}{\frac{5}{2} + 2\log 2} = 0.099 \ (= 9.9\%) \,. \tag{4.24}$$

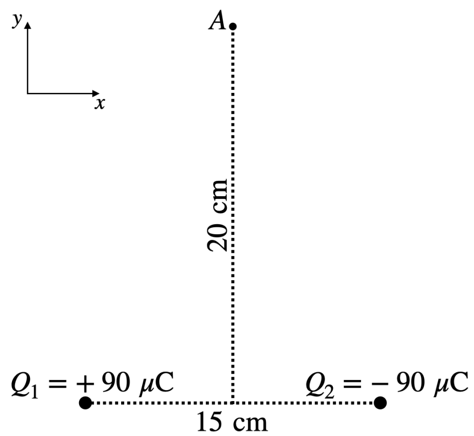
---

**Esercizio 4.12: (*nome originale*: B)**

Calcolare:

i) il campo elettrico nel punto $A$ sull'asse di simmetria della distribuzione di cariche in figura;

ii) il lavoro necessario per portare una carica di 13 $\mu$C dall'infinito al punto A.



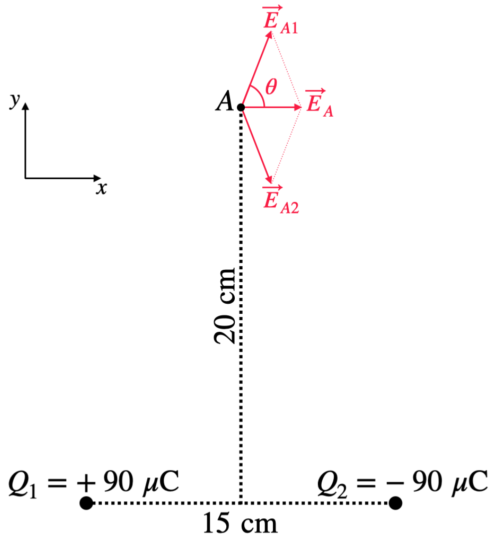

**Soluzione:**

Per prima cosa, andiamo a tracciare nel punto $A$ i vettori di campo elettrico $\vec{E}_{A1}$ e $\vec{E}_{A2}$, generati rispettivamente dalle cariche $Q_1$ e $Q_2$. Come mostra la figura che segue, le componenti lungo $\hat{\boldsymbol{y}}$ dei due campi sono uguali ed opposte, quindi si annullano a vicenda, mentre quelle lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$ hanno stesso modulo e verso, quindi si sommano tra loro. Nello specifico, possiamo dire che

$$\begin{cases} E_{A1,y} = -E_{A2,y} \,, \\ E_{A1,x} = E_{A2,x} \,, \end{cases} \tag{4.25}$$

da cui ricaviamo

$$\vec{E}_A = 2E_{A1,x}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,. \tag{4.26}$$




Per determinare $\vec{E}_A$, non ci rimane che calcolare il modulo $E_{A1,x}$. Detti $D = 20$ cm e $d = (15\text{ cm})/2 = 7.5$ cm, la distanza tra $Q_1$ e il punto $A$ è data da

$$r_{A1} = \sqrt{D^2 + d^2}\,, \tag{4.27}$$

che utilizziamo per calcolare il modulo del campo $E_{A1}$:

$$E_{A1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r_{A1}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{D^2 + d^2}\,. \tag{4.28}$$

Siamo interessati alla proiezione lungo $\hat{\boldsymbol{x}}$, che otteniamo come segue:

$$E_{A1,x} = E_{A1}\cos\theta = E_{A1}\frac{d}{r_{A1}} = E_{A1}\frac{d}{\sqrt{D^2 + d^2}}\,. \tag{4.29}$$

Mettendo insieme questi risultati, troviamo infine

$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q_1 d}{(D^2 + d^2)^{3/2}}\,\hat{\boldsymbol{x}} = 1.2\cdot 10^6\ \text{N/C}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,, \tag{4.30}$$

che risponde alla domanda i). Per rispondere alla domanda ii), sappiamo che il lavoro $W$ che occorre effettuare per portare una carica $q = 13\ \mu$C dall'infinito al punto $A$ è dato da (la forza elettrica è una forza *conservativa*)

$$W = \Delta U = U_A - U_\infty\,, \tag{4.31}$$

dove $U = qV$ è l'energia potenziale e $V$ il potenziale elettrico. Assumendo $V$ nullo all'infinito, troviamo:

$$W = q(V_A - \cancel{V_\infty}) = qV_A = q\underbrace{(V_{A1} + V_{A2})}_{=0} = 0\ \text{J}\,. \tag{4.32}$$

Notiamo infatti che il punto $A$ è equidistante da $Q_1$ e $Q_2$, e tenendo conto che $Q_2 = -Q_1$, ne consegue che $V_{A2} = -V_{A1}$, da cui $W = 0$ J.

---

**Esercizio 4.13: (*nome originale*: C)**

Una stufetta che opera a 220 V dissipa una potenza di 190 W. Calcolare:

i) la corrente che attraversa la stufetta quando è in funzione;

ii) la sua resistenza.

**Soluzione:**

Nota la potenza $P$ e il voltaggio $\Delta V$ a cui opera la stufetta, possiamo calcolare la corrente che attraversa quest'ultima mentre è in funzione come

$$I = \frac{P}{\Delta V} = 0.863 \text{ A} \,. \tag{4.33}$$

Conoscendo ora la corrente $I$, possiamo ricavare la resistenza della stufetta tramite la relazione

$$R = \frac{P}{I} = 255 \ \Omega \,. \tag{4.34}$$