Università di Padova - Dipartimento Fisica e Astronomia
Corso: Sperimentazioni 1 - Canale M-Z.
Anno accademico: 2020-21.
Docenti: M. Doro (michele.doro@unipd.it), D. Mengoni

Gruppo 12
Masiero Tommaso - Matricola 2015778 - Email tommaso.masiero@studenti.unipd.it
Marchesini Davide - Matricola 2009840 - Email davide.marchesini@studenti.unipd.it
Toffoli Marco - Matricola 2000397 - Email marco.toffoli.2@studenti.unipd.it
Travali Davide - Matricola 2008630 - Email davide.travali@studenti.unipd.it

`Data consegna relazione: 09/06/2021`

Stima del valore dell'accelerazione di gravità a Padova

1 Obbiettivo dell'esperienza

L'obbiettivo dell'esperienza è quello di stimare il valore dell'accelerazione di gravità a Padova attraverso l'utilizzo di un pendolo di Kater.

2 Descrizione dell'apparato strumentale e della teoria di base dell'esperienza

Per motivi sanitari il gruppo è stato suddiviso in due sottogruppi che si sono alternati per la presa dati.
Lo strumento utilizzato per calcolare l'accelerazione di gravità è il pendolo di Kater, costituito da un'asta metallica graduata, una massa fissa posta ad una delle due estremità ed una massa mobile. Sull'asta erano inoltre presenti due coltelli, uno nella parte superiore e uno in quella inferiore, grazie ai quali il pendolo poteva essere fatto oscillare attorno a due diversi assi. Identificheremo con O e O' rispettivamente il centro di oscillazione superiore e inferiore.
La procedura utilizzata prevedeva di misurare, tramite cronometro digitale, il periodo di oscillazione rispetto ad uno dei due assi, cambiando man mano la distanza tra le due masse.Lo scopo di questo sistema di raccolta dati era quello di individuare la distanza tra di esse tale per cui il periodo di oscillazione attorno ad O fosse identico a quello di O', cercando cioè la posizione di isocronismo.
Era importante, per non complicare gli effetti dovuti all'oscillazione, scegliere un angolo abbastanza piccolo, con una distanza inferiore circa ai 15 centimetri dalla posizione centrale della massa mobile, a tale scopo, di comune accordo, il gruppo ha optato per 4 centimetri dal centro dal punto di oscillazione rispetto alla riga fissata al muro.

Per trovare il valore per il quale il periodo fosse il medesimo abbiamo raccolto dei dati inizialmente diminuendo la distanza tra le due masse 10cm alla volta, così da poter individuare un'area dentro la quale i periodi si assomigliassero. Una volta trovata la regione di interesse, si è ripetuta la presa dati spostando la massa di $1cm$ alla volta, allo scopo di

migliorare l'accuratezza della stima della posizione di isocronismo. Infine, abbiamo ripetuto le misure variando la posizione della massa mobile di $1mm$ alla volta.
La raccolta dati è stata effettuata automaticamente tramite un cronometro digitale collegato ad un sensore, che individuava il momento in cui l'asta passava per la verticale. La sensibilità e la risoluzione degli strumenti utilizzati sono riportate in tabella 1.

	Risoluzione	Sensibilità
Cronometro	$0.0001[s]$	$10^4[s^{-1}]$
Asta graduata	$0.1[cm]$	$10[cm^{-1}]$

Tabella 1: Sensibilità e risoluzione del cronometro digitale e dell'asta graduata.

Tale strumento ci ha permesso di prendere come misure dirette il periodo di oscillazione e la distanza tra le due masse, con i relativi possibili errori statistici, per poi calcolare le misure indirette quali l'accelerazione di gravità con relativo errore.

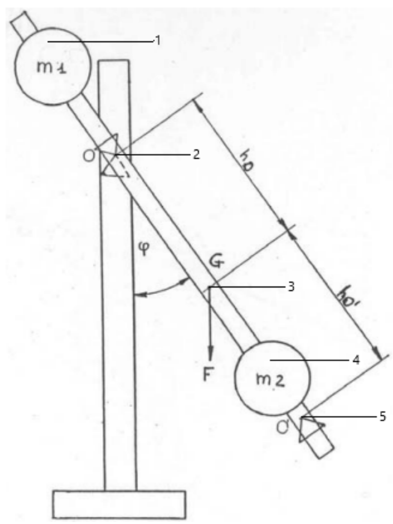

Figura 1: Schema approssimativo dell'apparato strumentale. La posizione del baricentro era a noi sconosciuta.

1	Massa fissa
2	Coltello superiore
3	Baricentro
4	Massa mobile
5	Coltello inferiore

Figura 2: Legenda relativa allo schema dell'apparato strumentale.

3 Presentazione dei dati, analisi e presentazione dei risultati

L'analisi dati si basa sulla stima della distanza L tra le due masse tale per cui si abbia la condizione di isocronismo. I due gruppi hanno raccolto varie stime di periodi migliorando man mano la stima di L, come si può osservare dai grafici 3, 4 e 5.

La stima del periodo più precisa per un set di dati ripetuti rispetto ad una certa distanza risulta essere la media aritmetica, avente come incertezza la propria deviazione standard rispetto alla media.

Come si osserva, l'andamento dei due periodi non è approssimabile né ad una retta né ad una parabola, perciò sono state necessarie misurazioni più precise fino ad una variazione della distanza delle due masse tra una misurazione e la successiva di 1 millimetro, così da poter eseguire un fit lineare dei dati vicini al punto di isocronismo.
L'interpolazione ci ha permesso di trovare le due rette che meglio approssimano l'andamento del periodo in funzione della distanza delle due masse. Per semplicità abbiamo chiamato T_1 il periodo di oscillazione attorno all'asse passante per O, mentre con T_2 quello relativo all'asse O'. Le serie sono state chiamate rispettivamente S e D. Di conseguenza avremo che:

$$T_1 = ax + b \tag{1}$$

$$T_2 = cx + d \tag{2}$$

Nella seguente tabella sono riassunti i parametri delle rette interpolanti.

a $[\frac{s}{cm}]$	0.0040	$\sigma_a[\frac{s}{cm}]$	0.0002
c $[\frac{s}{cm}]$	0.0050	$\sigma_c[\frac{s}{cm}]$	0.0002
b [s]	1.680	$\sigma_b[s]$	0.013
d [s]	1.570	$\sigma_d[s]$	0.012

Tabella 2: Coefficienti delle rette, con relativi errori, ottenuti attraverso il metodo di interpolazione lineare.

Di seguito sono riportati i grafici che mostrano il valore del periodo di oscillazione rispetto ai due assi al variare della distanza OO'.

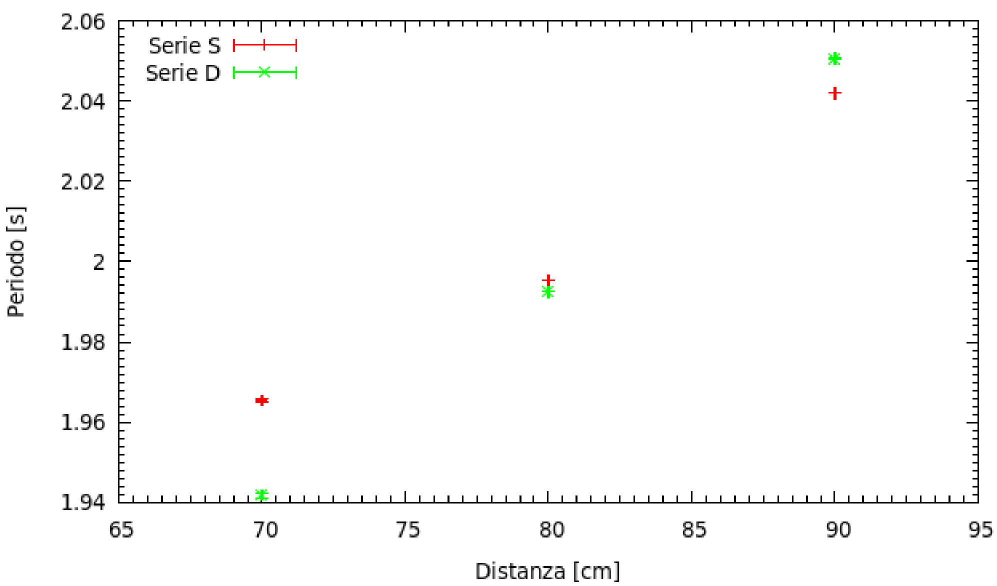

Figura 3: Grafico che mostra la variazione del periodo di oscillazione variando la distanza 10cm alla volta.

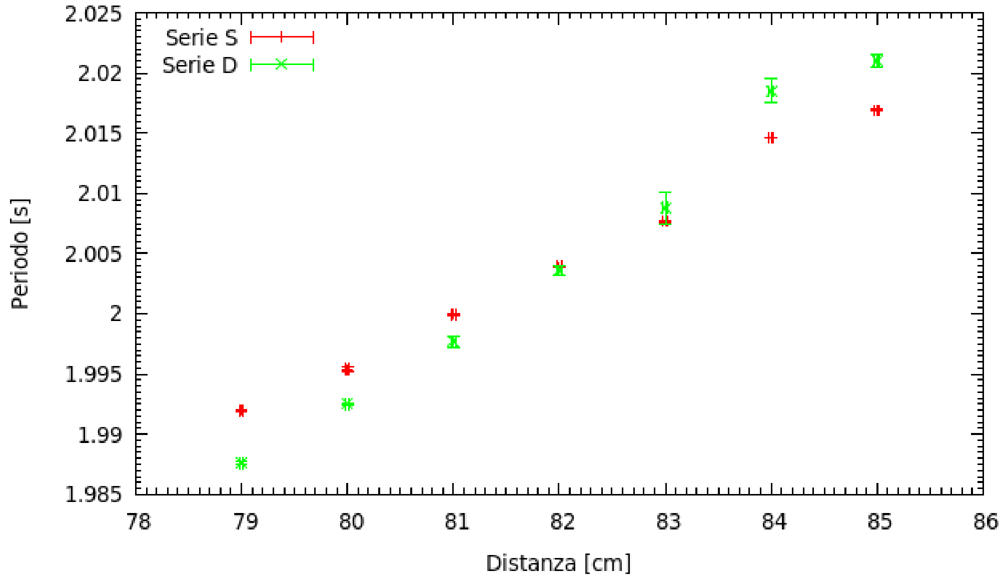

Figura 4: Grafico che mostra la variazione del periodo di oscillazione variando la distanza 1cm alla volta.

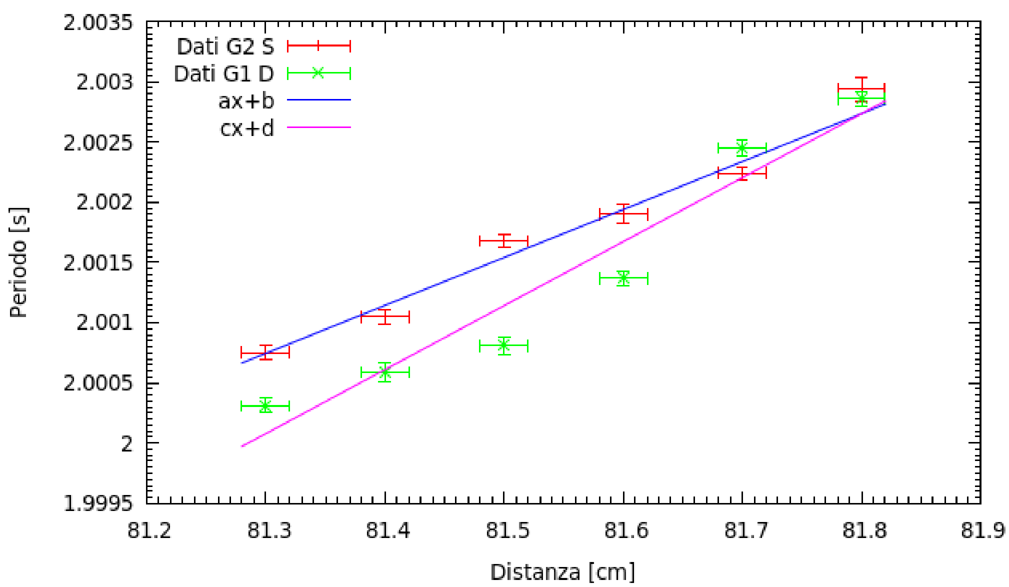

Figura 5: Grafico che mostra la variazione del periodo di oscillazione variando la distanza 1mm alla volta, con rette interpolanti.

Utilizzando quanto appena ricavato siamo stati in grado di ottenere la coordinata del punto di intersezione L delle due rette:

$$L = \frac{d-b}{a-c} \tag{3}$$

e quindi il valore del periodo di isocronismo:

$$T = aL + b \tag{4}$$

con relative incertezze calcolate usando la propagazione degli errori e relativa covarianza tra i parametri dell'equazione:

$$Cov(a,b) \approx Cov(c,d) = -\frac{\bar{x} \cdot \sigma_y^2}{N \cdot \sigma_x^2} = -1.7 \cdot 10^{-6} \tag{5}$$

Dove:
$\bar{x}$ è la media aritmetica delle distanze;
σ_y^2 è la varianza relativa al periodo;
σ_x^2 è la varianza relativa alla distanza;
N è il numero di misure.

La covarianza risulta uguale in entrambi casi in quanto il valore di σ_y è quasi il medesimo. Otteniamo in questo modo la stima del periodo di oscillazione con la relativa incertezza. Nella tabella seguente è riportata, oltre al periodo, anche la distanza tra i due centri di oscillazione, nota a priori.

$L[m]$	0.82	σ_L	0.04
$l[m]$	0,9945	σ_l	0,0002
$T[s]$	2,003	σ_T	0,013

Tabella 3: In ordine: punto di isocronismo, distanza assi di rotazione e periodo

Tuttavia il periodo misurato non corrisponde realmente al periodo di un oscillatore armonico, come già visto questo vale per angoli prossimi allo zero. Per questo motivo è possibile correggerne la stima in quanto risulta che:

$$T_0 = T \cdot \left(\frac{16}{16+\alpha^2}\right) \tag{6}$$

Dove:
T_0 è il periodo corretto, corrispondente a quello di un oscillatore armonico;
T è il periodo misurato;
α è l'angolo di oscillazione.

Un altro effetto che può essere causa di una stima inaccurata è l'usura dei coltelli sui quali il pendolo ha oscillato. Nelle condizioni ideali questi sarebbero dovuti essere perfettamente appuntiti, a causa dell'usura la punta si è sicuramente consumata portando ad una variazione del punto di contatto del coltello con la superficie durante il movimento dell'asta. Allora sapendo che l'usura del coltello risulta creare una curvatura dell'ordine di $r \approx 5 \cdot 10^{-2}$ si può usare la formula

$$T_0 = \frac{T}{1 - \frac{r}{2L}} \tag{7}$$

Si può dimostrare che la stima del periodo può essere ulteriormente corretta utilizzando la seguente equazione:

$$T_0 = T \cdot \left(\frac{2\rho}{2\rho - \rho_a} \right) \tag{8}$$

Dove:
ρ è la densità del pendolo;
ρ_a è la densità dell'aria.
Cioè correggiamo l'effetto di Archimede dovuto alla presenza di aria durante l'esperienza. Altri effetti come l'attrito dell'aria, le vibrazioni, lo spostamento del fluido circostante e li abbiamo ritenuti trascurabili in quanto l'errore causato sarebbe stato minore dell'incertezza già stimata.

Con le correzioni viste sopra otteniamo come stima finale del periodo:

$$T = (2.003 \pm 0.015)s$$

Si può notare che non è variata rispetto quella precedente, questo perché gli errori causati dagli effetti presi in considerazione rientrano nelle incertezze statistiche.

4 Discussione dei risultati sperimentali

Una volta stimato il periodo di oscillazione nella condizione di isocronismo, siamo stati in grado di stimare il valore dell'accelerazione di gravità a Padova, in quanto:

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot l}{T^2} \tag{9}$$

Dove:
l è la distanza tra i due centri di oscillazione.

Per quanto riguarda l'incertezza abbiamo usato il metodo di propagazione degli errori, ottenendo quindi che:

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \cdot \sigma_l^2 + \left(\frac{-8\pi^2 \cdot l \cdot T}{T^4}\right)^2 \cdot \sigma_T^2} \tag{10}$$

Ottenendo infine:

$$g = (9.79 \pm 0.14)\frac{m}{s^2}$$

Per valutare la compatibilità con il valore di riferimento, essendo privo di incertezza, possiamo effettuare il test di Student a due code, otteniamo un valore t pari a:

$$t = \frac{g - g_0}{\sigma_g} = 0.13$$

Dove g_0=9,8065855 $\frac{m}{s^2}$. Questo ci permette di accettare l'ipotesi di compatibilità con un livello di confidenza del 99.9%.

Da questa stima si evince come l'effetto degli errori sistematici si possa trascurare per la procedura di misura utilizzata perché il valore di riferimento rientra nelle incertezze casuali.

5 Conclusioni

L'obbiettivo dell'esperienza consisteva nel riuscire, tramite un pendolo composto di Kater, a stimare l'accelerazione di gravità a Padova, calcolandone successivamente la relativa compatibilità con il valore fornitoci, supposto vero. A seguito della presa dati si sono analizzati i dati ottenuti per stimare con accuratezza il punto di isocronismo, arrivando ad ottenere:

$$L = (0.82 \pm 0.04)m$$

con relativa stima sul periodo :

$$T = (2.003 \pm 0.015)s$$

Infine, con i dati ottenuti, si è proceduto a stimare l'accelerazione di gravità a Padova, ottenendo:

$$g = (9.79 \pm 0.14)\frac{m}{s^2}$$

Si nota allora come essendo il valore ottenuto compatibile con quello fornitoci non si ha nessun errore sistematico sulla misura ad eccezione di quelli già corretti precendentemente. Ottenendo una compatibilità ottima con il valore di riferimento fornitoci.

6 Note

	81,3	81,4	81,5	81,6	81,7	81,8
T S	2,00075	2,00105	2,00168	2,00190	2,00224	2,00294
$\sigma_T S$	0,00006	0,00006	0,00005	0,00008	0,00005	0,00010
T D	2,00031	2,00059	2,00081	2,00137	2,00245	2,00286
$\sigma_T D$	0,00006	0,00008	0,00007	0,00006	0,00007	0,00006

Tabella 4: Dati raccolti durante l'esperienza con T la media e σ_T la deviazione standard sulla media.

$L[cm]$	$T[s]$	$\sigma_T[s]$
85	2,0139	0,00006
84	2,01464	0,00006
83	2,0077	0,00006
82	2,00391	0,00006
81	1,99994	0,00006
80	1,99538	0,0002
79	1,99198	0,00004

Tabella 5: Serie S dati gruppo G1 al centimetro

$L[cm]$	$T[s]$	$\sigma_T[s]$
85	2,021	0,0005
84	2,0185	0,001
83	2,0088	0,0013
82	2,0036	0,0004
81	1,9977	0,0005
80	1,9925	0,0001
79	1,9876	0,0001

Tabella 6: Serie D dati gruppo G1 al centimetro

$L[cm]$	$T[s]$	$\sigma_T[s]$
90S	1,99538	0,00004
80S	1,96543	0,0002
70S	2,04194	0,00024
90D	2,0506	0,0001
80D	1,9925	0,0006
70D	1,9419	0,0001

Tabella 7: Dati G1 ogni 10cm