

## Gruppo 12

Masiero Tommaso - Matricola 2015778 - Email [tommaso.masiero@studenti.unipd.it](mailto:tommaso.masiero@studenti.unipd.it)

Marchesini Davide - Matricola 2009840 - Email [davide.marchesini@studenti.unipd.it](mailto:davide.marchesini@studenti.unipd.it)

Toffoli Marco - Matricola 2000397 - Email [marco.toffoli.2@studenti.unipd.it](mailto:marco.toffoli.2@studenti.unipd.it)

Travali Davide - Matricola 2008630 - Email [davide.travali@studenti.unipd.it](mailto:davide.travali@studenti.unipd.it)

Data consegna relazione: 16/04/2020

---

## Verifica sperimentale della legge di Stokes e stima del coefficiente viscoso di un liquido saponoso

### 1 Obiettivo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza consisteva nel verificare sperimentalmente la legge di Stokes e di riuscire, attraverso l'analisi dati, a stimare il coefficiente di attrito viscoso di un liquido saponoso di densità nota. Per far ciò abbiamo utilizzato un viscosimetro che, rilasciando una alla volta varie sfere di metallo di raggio crescente, ci ha permesso di misurare i tempi impiegati da queste per percorrere determinati spazi, in modo da poter stimare la velocità limite e di conseguenza la validità della legge che regola questi fenomeni fisici ed il coefficiente di attrito.

### 2 Descrizione dell'apparato strumentale e della procedura di misura

A causa della situazione sanitaria l'attività di laboratorio è stata svolta in modalità telematica utilizzando dei video riguardanti l'esperimento per i vari set di misure, registrati dal docente. Avevamo a disposizione 10 video in formato mp4 che sono stati visualizzati grazie all'applicazione VLC media, questa informazione sarà utile per stimare eventuali errori nelle misure.

Innanzitutto abbiamo misurato i tempi che le sferette di metallo impiegavano a percorrere diversi traguardi. Questi ultimi erano posti a 5 cm di distanza l'uno dall'altro e avevamo a disposizione 10 sfere di raggio diverso, in modo da permetterci di stimare il coefficiente viscoso e di cercare una dipendenza di tale valore dal raggio, cosa che in regime laminare non dovrebbe succedere. Il nostro viscosimetro era composto da un sistema di caduta, fissato alla sommità, che rilasciava verticalmente la pallina e da un cilindro contenente acqua saponosa. I traguardi erano segnati tramite delle circonferenze attorno al tubo e ogni lancio partiva esattamente al centro della circonferenza del cilindro, questo per ridurre gli effetti delle pareti del contenitore sul moto del liquido. Vicino alle pareti infatti ci si può aspettare che il moto del liquido non sia perfettamente laminare a causa di effetti

di frontiera. Per ridurre ancora di più le incertezze sistematiche il primo traguardo non era posizionato sulla superficie ma a 10cm di profondità, rispetto al livello del liquido. Questo permetteva di raggiungere la cosiddetta velocità limite. Infatti, l'equazione per un corpo immerso in liquido è:

$$v(t) = v_L e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (1)$$

a causa dell'attrito viscoso. Con  $\tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta}$  con  $\rho$  la densità del liquido,  $r$  il raggio della sfera e  $\eta$  il coefficiente viscoso. Facendo una approssimazione è possibile considerare che dopo un tempo di  $3\tau$ , con  $\tau$  circa uguale a  $0.01s$  per un liquido eterogeneo quale acqua e sapone, cioè dopo uno spazio percorso di circa  $2mm$ , si sia raggiunta la velocità limite secondo cui il moto della sfera è uniforme. Per non perturbare il sistema, conclusa la misura la sferetta è stata lasciata sul fondo.

Ogni strumento utilizzato ha una risoluzione. Quelle di cui non è trascurabile la considerazione sono:

- Del programma di conteggio del tempo, VLC media, che riusciva a definire un frame ogni 30ms. Quindi risoluzione  $30[ms]$  e sensibilità  $0.03[ms^{-1}]$
- Della linea di segnatura del traguardo, in quanto non sempre era possibile definire perfettamente il superamento di quest' ultimo, da parte della sfera, a causa dello spessore di circa un  $1[mm]$  e sensibilità risultante di  $0.1[mm^{-1}]$ .

Tuttavia, ciò che ha influenzato maggiormente le misure è stata la risoluzione della fotocamera, in particolare nei video delle sfere di raggio maggiore, in quanto in alcuni casi non era possibile mettere completamente a fuoco l'immagine. Tutti questi effetti assieme alla mancata possibilità di ripetere l'esperimento, possono influenzare la precisione, ma anche rendere necessaria l'eliminazione di alcune misure.

Per la visione dei video, ci siamo divisi in due sottogruppi: il primo, G1, ha raccolto i dati dei primi cinque, mentre il gruppo G2 dei restanti. Il programma VLC media ci permetteva di misurare una differenza di 30 millisecondi, quindi all'operatore spettava la decisione di scegliere il frame esatto in cui la sfera superava il traguardo. Tuttavia, non sempre la linea del traguardo era allineata con l'orizzonte della telecamera, portando a scegliere quando la sferetta passava per il centro, cercando di utilizzare lo stesso metodo per tutte le misure. E' stato utilizzato lo stesso viscosimetro per ogni misura, dunque sempre lo stesso liquido, senza la modifica di alcun parametro. i nostri risultati, quindi, riguardano solo questa sostanza particolare che dipende dalla composizione percentuale di sapone in acqua. Le misure di input per questa esperienza erano quindi le misure di tempo.

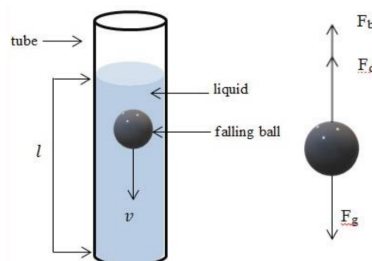


Figura 1: Schema qualitativo dell'apparato utilizzato per la stima del coefficiente viscoso di un liquido saponoso.

### 3 Stima dei possibili errori casuali e sistematici

Essendo l'attività svolta a distanza non è stata possibile nessuna personale regolazione dello strumento, tuttavia, disponendo dei video digitali, possiamo valutare gli errori dell'operatore durante la presa dati. I possibili errori sono divisi in sistematici come: l'effetto delle pareti, lo scambio di materia tra aria e liquido e la possibile stratificazione; vi sono inoltre alcuni errori puramente statistici come la scelta dei tempi.

**Temperatura e stato del liquido.** Il liquido che è stato usato è una miscela saponosa di acqua. Dobbiamo perciò considerare di misurare la viscosità solo in condizioni fisse dei parametri termodinamici. Di conseguenza, nel nostro caso, la viscosità potrebbe dipendere dalla temperatura e dalla pressione ambientale. Durante l'esperienza questi parametri si possono considerare costanti poiché le misure si suppongono effettuate tutte in un arco di tempo nel quale non è possibile assistere ad un cambiamento, non trascurabile, delle condizioni ambientali.

**Bolle di gas.** Durante l'esperienza si è vista la formazione di bolle di aria nel liquido durante la caduta della sfera. Questo fenomeno influenza in qualsiasi caso la nostra misura perché un miscuglio omogeneo od eterogeneo che sia, di due o più sostanze, ha una viscosità nel complesso diversa rispetto alle singole sostanze pure. Per noi risultava sufficiente che le bolle non incontrassero la sferetta nella sua caduta per minimizzare questo effetto. Questo fenomeno di formazione di bolle risultava presente principalmente per il passaggio da gas a liquido.

**Angolo di visuale.** Durante la ripresa dei video l'operatore non ha inquadrato sempre perfettamente la linea di passaggio della sfera causando inevitabilmente un errore di parallasse. Questo problema poteva essere risolto in una sola maniera: quando l'angolo di visuale era diverso da 0, bisogna considerare il passaggio della sfera nel centro dell'ellisse, la quale risultava dall'inclinazione della circonferenza disegnata sul bordo del tubo. Ovviamente, questa stima risulta dipendente dalla scelta dell'operatore.

**Reazione del sistema di misurazione.** Il fattore che però ha influenzato in maniera più rilevante la nostra misura riguarda la reazione del sistema di VLC time 3.2 che misura un frame ogni  $30ms$ . La nostra misura, quindi, è stata influenzata da questa impossibilità di misurare un intervallo di tempo sotto i  $30ms$ . Fortunatamente, il video poteva essere fermato e dunque valutata attentamente la scelta.

**Pareti.** I fluidi hanno comportamenti differenti in base alla presenza di materiali diversi. In particolare, le pareti hanno influenzato la nostra misura in quanto il moto in prossimità di esse non risulta perfettamente laminare, portando l'operatore a porre sempre al centro del tubo la sfera ed a prendere le misure con i traguardi posti almeno ad una distanza di 10cm dalle pareti superiori ed inferiori.

**Influenza degli esperimenti precedenti.** Lo strumento usato, e di conseguenza il liquido, è lo stesso per tutte le misure e, seguendo il modello fisico del moto laminare, il ripetere le misure, la non estrazione delle sferette dal fondo, così come la formazione di bolle possono aver influenzato la distribuzione dei nostri dati in base all'ordine temporale di esecuzione dell'esperimento.

**Non linearità.** Il modello matematico che usiamo per calcolare la viscosità necessita del fatto che entro il primo traguardo (cioè 10cm dalla sommità) il moto della sfera sia lineare uniforme. Questa scelta fisicamente non è completamente corretta, infatti è la prima approssimazione che abbiamo dovuto adottare perché si approssimi il valore  $e^{-\frac{t}{\tau}}$  a 1 per  $t > 3\tau$ , secondo l'equazione cinetica sopracitata.

**Stratificazione del liquido.** Un altro errore possibile che risulta dalla natura del nostro liquido è la presenza di una stratificazione nel fondo, che comporta un andamento crescente della densità verso il basso e decrescente verso l'alto. Questo andrebbe a compromettere la linearità della velocità in quanto la viscosità, sapendo che dipende dalla densità, varierebbe in base alla posizione.

**Liquido non newtoniano.** Un altro fattore che dipende dalle caratteristiche del liquido utilizzato potrebbe essere il fatto che il liquido è non newtoniano, cioè la viscosità varia in ogni infinitesimo intervallo  $dh$  dell'altezza e  $dl$  della larghezza del tubo. Questo, a priori, non possiamo saperlo ma a seguito dell'analisi dei dati sarebbe possibile ricavare qualche informazione a riguardo. In particolare, supponendo una simmetria intorno all'asse verticale del cilindro in coordinate cilindriche si avrà non  $\eta(r, \phi, z)$  ma  $\eta(z)$ , con  $r$  il raggio dal centro del sistema alla superficie cilindrica di appartenenza del punto,  $\phi$  l'angolo di deviazione da una retta di riferimento passante per l'origine e perpendicolare all'asse  $z$  che indica l'altezza del punto nella superficie cilindrica. Infatti perché si ha  $r=0$  questo potrebbe in parte semplificare la verifica di tale ipotesi.

**Formazione di una scia.** Durante la caduta dei pesi si è notato come, in particolar modo nelle sferette di raggio maggiore, si formasse una scia di aria che comporterebbe una variazione della viscosità, questo risulta un fattore che influenza la forza di taglio. Quest'ultima dipende dall'area del corpo, quindi la formazione di una scia d'aria in un liquido modifica l'area di contatto e fenomeni di bordo tra i due fluidi. In particolare aumenta l'area di contatto tra un liquido e un gas mentre diminuisce quella con la sfera.

**Moto laminare del liquido.** Per poter utilizzare la legge di Stokes abbiamo dovuto considerare il liquido utilizzato come perfettamente laminare, quando un tale fluido non può fisicamente esistere. Se il moto del sistema fluido più sfera fosse completamente laminare, allora durante la discesa di quest'ultima, tutte le molecole del liquido contenuto nel cilindro percorrerebbero un moto con direzione tangente alla superficie della sfera e con una velocità che è funzione della distanza dal centro della sfera. Questo però non si verifica perché come detto precedentemente abbiamo notato la formazione di una scia nel caso di sferette di raggio maggiore.

**Passaggio Aria-Liquido** Per il fatto che la sferetta passi da un fluido come l'aria a un liquido saponoso si formano effetti di transizione come la formazione di una scia d'aria e di bolle sulla superficie della sfera. In particolare, questi fenomeni possono essere raggruppati sempre sotto l'ipotesi che il fluido non sia laminare.

Si è potuto notare come nell'incertezza relativa alla reazione dell'osservatore e del sistema VLC, esse dipendessero dal raggio della sfera, in quanto risultava più difficile prendere misure accurate all'aumentare di esso. Questo è dovuto al fatto che la velocità aumenta all'aumentare del raggio e dal fatto che lo spazio disponibile per stabilire il passaggio della sfera sul traguardo aumenta anch'essa, rendendo più soggettiva la percezione di tale evento. Nel video con il maggior raggio infatti, abbiamo misurato solamente il passaggio tra 2 traguardi.

Si può notare come, la maggior parte degli effetti che possono causare errori nelle nostre misure, risultino particolarmente dipendenti dalle caratteristiche del liquido e di conseguenza difficilmente eliminabili nelle nostre condizioni di misura.

## 4 Presentazione dei dati, analisi e presentazione dei risultati

In questa sezione analizzeremo e discuteremo i dati raccolti durante l'esperienza. Cercheremo di fornire una stima del coefficiente di attrito viscoso del fluido esaminato e, se possibile, di fornire una verifica sperimentale della legge di Stokes.

### 4.1 Introduzione

Disponendo di un percorso composto da traguardi posti ad intervalli di 5 centimetri, è stato possibile prendere serie di dati sul tempo impiegato da una sfera di metallo per la percorrenza di tali spazi. Dallo studio della legge, ci aspettavamo che i tempi misurati di una stessa pallina rimanessero pressoché identici, permettendoci di stimare la sua velocità limite. Per raggiungere questo valore era necessario attendere alcuni istanti dall'inizio del moto della sfera, perciò durante l'esperienza il primo traguardo utile per tenere il tempo è stato posto a 10 centimetri dalla superficie del liquido. Per l'esperienza abbiamo misurato quindi i vari tempi impiegati da dieci diverse palline, di raggio crescente, aspettandoci una velocità limite proporzionale al raggio. In forza di ciò si può ipotizzare che l'andamento tra spazio percorso e tempo impiegato sia lineare. Utilizzando più palline si arriva così a stimare il coefficiente di attrito viscoso che, in caso dovesse risultare costante tra i vari raggi, ci porterebbe ad una verifica sperimentale della legge di Stokes. Quest'ultima afferma che la forza agente su una sfera in caduta all'interno di un fluido con numero di Reynolds minore di circa 1 segue la formula:

$$F = -6\pi\eta r v \quad (2)$$

Dove:

$\eta$  è la viscosità del liquido;

$r$  è il raggio della sfera;

$v$  è la velocità relativa tra fluido e sfera, che nel nostro caso è rappresentata dalla velocità limite della sfera.

Per la seconda legge di Newton la risultante delle forze agenti su un corpo di massa  $m$  ne determina la sua accelerazione. In condizioni di equilibrio, perciò,  $F$  deve bilanciare la forza peso  $F_p = m \cdot g$  e la forza di attrito  $F_a = -p \cdot V \cdot g$ . Questo si può osservare notando il moto rettilineo uniforme della pallina, una volta stimata la velocità limite. Per l'esperienza era importante tenere a mente i seguenti valori della densità volumetrica rispettivamente del liquido e delle palline utilizzati:

$$\rho_0 = (1,032 \pm 0,001) \frac{g}{cm^3}$$

$$\rho = (7,870 \pm 0,005) \frac{g}{cm^3}$$

Prima di trattare i dati ottenuti è necessario, per rendere più chiara la lettura, associare dei nomi ai vari set di misure basandoci sul raggio della sfera utilizzata. D'ora in poi ci riferiremo alle misure nel seguente modo:

Set di misura	Raggio sfera [cm]	Incertezza [cm]	Set di misura	Raggio sfera [cm]	Incertezza [cm]
r1	0.075	0.001	r6	0.198	0.001
r2	0.079	0.001	r7	0.238	0.001
r3	0.100	0.001	r8	0.278	0.001
r4	0.119	0.001	r9	0.318	0.001
r5	0.159	0.001	r10	0.357	0.001

Tabella 1: Set di misure in base al raggio.

Specifichiamo inoltre che  $r10$  non è un vero e proprio set di misure. La velocità della sfera non ci ha permesso di misurare il tempo impiegato da essa per raggiungere ogni traguardo del cilindro, di conseguenza abbiamo potuto misurare solamente il tempo impiegato per percorrere 45cm, cioè dal secondo all'ultimo traguardo.

## 4.2 Interpolazione dei dati e calcolo della velocità limite

Tramite interpolazione lineare siamo stati in grado di calcolare i coefficienti angolari e le intercette delle nove rette rappresentative dell'andamento del tempo in funzione dello spazio percorso, una per ogni raggio utilizzato. Abbiamo quindi, ipotizzato un andamento del tipo:

$$t = bx + a \quad (3)$$

dove  $t$  è il tempo impiegato e  $x$  la distanza percorsa dalla sfera. Tutto ciò è stato fatto tenendo in considerazione le incertezze solo sull'asse delle ordinate, in quanto queste risultavano essere preponderanti rispetto a quelle sull'asse delle ascisse. In particolare, i tempi impiegati dalle sfere sono stati misurati tramite analisi frame by frame da video preregistrati. Per questo motivo abbiamo stimato l'incertezza sui tempi utilizzando la frequenza dei fotogrammi, che nel nostro caso era di 29.97 fps, e una distribuzione uniforme:

$$\sigma_t = \frac{1}{f \cdot \sqrt{12}} \quad (4)$$

ottenendo  $\sigma_t = 0.0097s$ .

La stima dei parametri  $a$  e  $b$  delle rette è riassunta nella seguente tabella:

Set	a [s]	b [ $\frac{s}{cm}$ ]	$\sigma_a$ [s]	$\sigma_b$ [ $\frac{s}{cm}$ ]	$r$
r1	-1,2649	7,9815	0.0065	0.0002	194.7
r2	-0,9600	7,1169	0.0065	0.0002	144.6
r3	-0,7027	4,4405	0.0065	0.0002	87.5
r4	-0,2372	2,9587	0.0065	0.0002	35.7
r5	-0,07272	1,6444	0.0065	0.0002	20.6
r6	-0,2129	1,0199	0.0065	0.0002	29.7
r7	0,0073	0,6324	0.0065	0.0002	-1.6
r8	-0,1912	0,3789	0.0065	0.0002	26.5
r9	-0,3943	0,1897	0.0065	0.0002	50.6

Tabella 2: Riassunto dei dati relativi all'interpolazione delle varie serie di dati. Nell'ultima colonna è riportato il valore del coefficiente di compatibilità tra l'intercetta della retta e l'origine degli assi.

Il set  $r10$  non compare in tabella in quanto, come già spiegato precedentemente, non presenta misure sufficienti da permetterci di effettuare un'interpolazione.

Si può notare che il valore dell'intercetta delle varie rette non risulta in nessun caso compatibile con l'origine degli assi (mostrata nell'ultima colonna della tabella precedente), portandoci quindi a supporre la presenza di errori sistematici.

Il coefficiente di compatibilità è stato calcolato come:

$$r = \frac{|a|}{\sigma_a} \quad (5)$$

Il grafico sottostante, rappresentativo di tutte le misure, mostra il tempo impiegato dalle tre sfere più piccole per raggiungere i vari traguardi con le relative rette interpolanti. Sulle ascisse troviamo lo spazio percorso mentre sulle ordinate il tempo impiegato. Le barre di errore dei dati sono troppo piccole per poter essere apprezzate ma si può notare come l'andamento sia effettivamente lineare. Una dimostrazione di ciò deriva dal calcolo del coefficiente di correlazione, misurato di valore 0,99 per tutti e tre i raggi. Dall'andamento si può dedurre che nell'istante in cui abbiamo iniziato a raccogliere i dati, le sfere avevano già raggiunto la loro velocità limite.

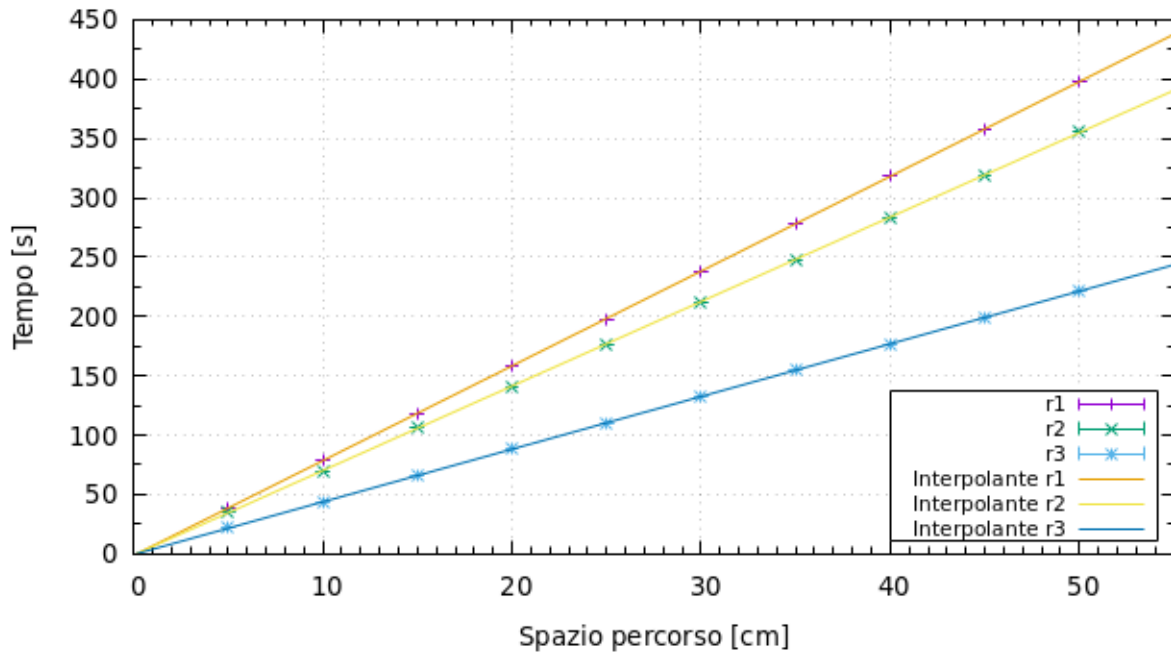


Figura 2: Grafico spazio-tempo dei set  $r1$ ,  $r2$ ,  $r3$ .

Da ipotesi, la velocità limite  $v_L$ , data dal reciproco del coefficiente angolare delle varie rette ottenute, deve essere proporzionale al raggio, otteniamo dunque i seguenti risultati:

Set	$v_L [\frac{cm}{s}]$	$\sigma_{v_L} [\frac{cm}{s}]$	Set	$v_L [\frac{cm}{s}]$	$\sigma_{v_L} [\frac{cm}{s}]$
r1	0,1253	$3.3 \cdot 10^{-6}$	r6	0,9804	$2.0 \cdot 10^{-4}$
r2	0,1405	$4.1 \cdot 10^{-6}$	r7	1,5812	$5.2 \cdot 10^{-4}$
r3	0,2252	$1.1 \cdot 10^{-5}$	r8	2,6396	$1.5 \cdot 10^{-3}$
r4	0,3380	$2.4 \cdot 10^{-5}$	r9	5,2990	$5.9 \cdot 10^{-3}$
r5	0,6081	$7.8 \cdot 10^{-5}$	r10	10.8069	$2.5 \cdot 10^{-2}$

Tabella 3: Tabella velocità limite

Dove l'incertezza sulla velocità è stata calcolata come:

$$\sigma_{v_L} = \frac{\sigma_b}{b^2} \quad (6)$$

L'equazione di Stokes è la relazione che può permetterci di stimare la viscosità del nostro fluido. Tuttavia, questa è valida sotto l'ipotesi che il fluido possa considerarsi continuo e in particolare che il moto del sistema sfera-liquido sia laminare. Se questa condizione è verificata allora:

$$\eta = \frac{2}{9} \frac{r_i^2}{v_{L_i}} (\rho - \rho_0) g \quad (7)$$

Dove:

$\eta$  è il coefficiente di viscosità;

$r_i$  è raggio sfera [cm];

$\rho$  è densità volumetrica pallina [ $g/cm^3$ ];

$\rho_0$  è densità volumetrica liquido [ $g/cm^3$ ];

$g$  è accelerazione di gravità [ $m/s^2$ ];

$v_{L_i}$  è velocità limite della pallina [ $cm/s$ ];

Di conseguenza ci aspettavamo che all'aumentare del raggio al quadrato la velocità limite aumentasse linearmente. Il grafico sottostante mostra l'andamento della velocità in funzione dei raggi (elevati al quadrato) e si può osservare anche senza l'ausilio di test specifici come questo si discosti significativamente dall'essere lineare. Per completezza abbiamo calcolato la retta interpolante e l'errore a posteriori. Quest'ultimo, che nel caso di un andamento lineare dovrebbe risultare simile all'incertezza sulle velocità, è invece estremamente maggiore.

Il fatto che la velocità limite non rispetti l'andamento predetto dall'equazione 7 è indice della presenza di errori sistematici o del fatto che non siano verificate le condizioni necessarie affinché l'equazione descriva accuratamente il fenomeno fisico.



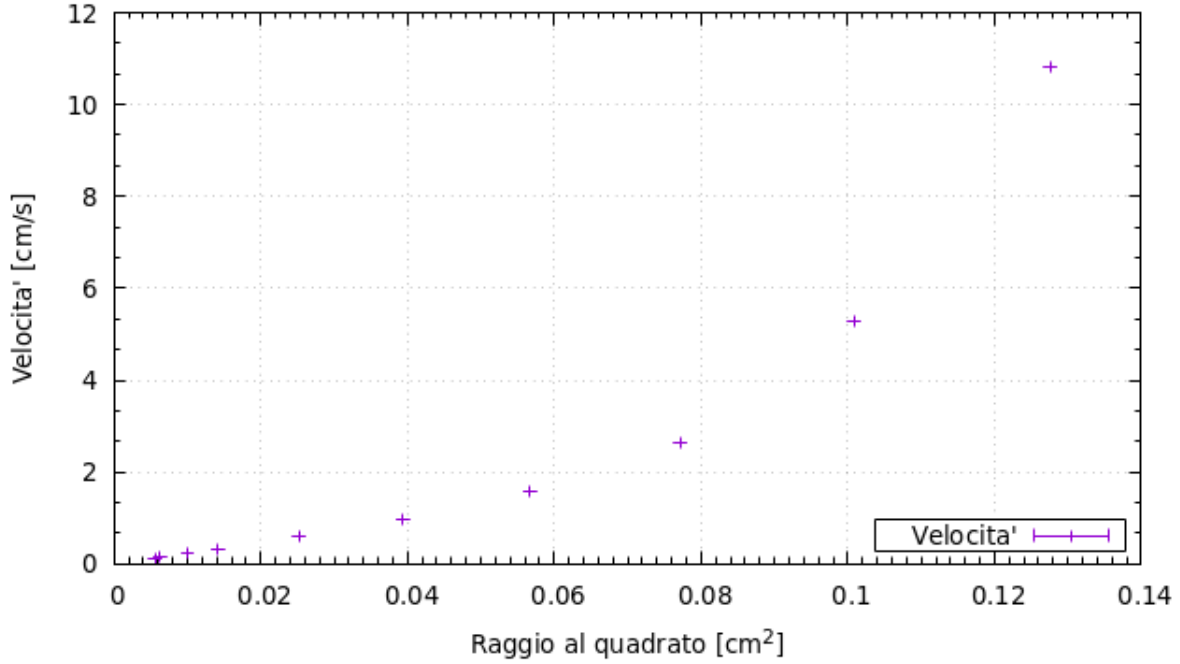


Figura 3: Grafico che mette in relazione la velocità limite con il raggio al quadrato delle varie sfere. Le barre di errore non sono visibili in quanto troppo piccole rispetto alla scala del grafico.

Nonostante sia ormai appurato che nel nostro caso la velocità limite non sia direttamente proporzionale al quadrato del raggio, cercheremo brevemente di ipotizzare nel modo più accurato possibile il tipo di legame che c'è tra questi due parametri.

Guardando il grafico precedente si può notare come le  $y$  tendano a  $+\infty$  più velocemente di una parabola, questo ci porta a pensare che la relazione cercata sia del tipo esponenziale.

Per avere una conferma diretta di quanto ipotizzato, cercheremo di costruire un grafico manipolando i parametri in modo tale da ricavare un andamento il più possibile lineare, fatto ciò basterà dimostrare tale relazione per confermare l'ipotesi iniziale. Dal fatto che sospettiamo che  $v_L$  cresca esponenzialmente, risulta naturale la scelta di impostare un grafico in scala semilogaritmica mettendo sulle ascisse  $r_i^2$  e sulle ordinate  $\ln(v_L)$ , così facendo dovremmo ottenere un andamento lineare.

Di seguito è riportato il grafico di cui si è appena parlato, valutando l'andamento esponenziale solo per le velocità per i maggiori sei raggi in quanto per i restanti quattro l'andamento risultava lineare, ed è chiaramente visibile che i dati si distribuiscono attorno ad una retta. Per completezza abbiamo calcolato il chi quadro allo scopo di avere una conferma definitiva di quanto affermato, ottenendo però un valore  $\chi^2 = 92300$  decisamente fuori dall'intervallo entro il quale avremmo ottenuto un esito positivo, questo può indicare, in quanto l'andamento è palesemente lineare, che le incertezze su  $v_L$  siano state sottostimate.

Pur non avendo ottenuto una conferma diretta delle nostre ipotesi, non ci sentiamo di smentirle, ma possiamo affermare che la velocità nell'intervallo considerato cresce circa in modo esponenziale.

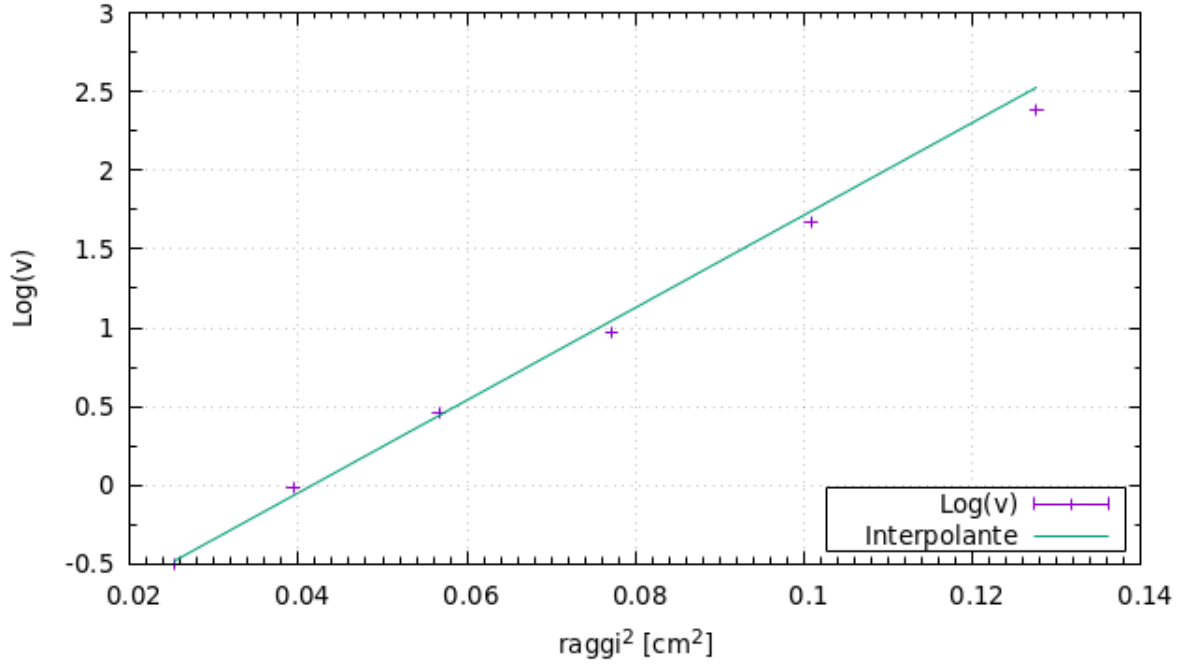


Figura 4: Grafico che mostra l'andamento lineare delle velocità (in scala logaritmica) in funzione del raggio al quadrato

### 4.3 Prima stima del coefficiente di viscosità

Anche se i dati precedenti già ci danno informazioni sul fatto che qualcosa non è andato come avevamo previsto, abbiamo proceduto a stimare il coefficiente viscoso che agiva sulla pallina, rallentandone il moto. Siccome ogni sfera è stata lasciata cadere nello stesso liquido è normale aspettarsi che ogni set di misure fornisca stime tra loro compatibili. Il coefficiente viscoso è stato calcolato utilizzando l'equazione 7, mentre l'incertezza come:

$$\sigma_{\eta} = \sqrt{\left(\frac{2}{9} \frac{r_i^2}{v_{L_i}} g\right)^2 \cdot \sigma_{\Delta\rho}^2 + \left(\frac{2}{9} \frac{(\rho - \rho_0)}{v_{L_i}^2} r_i^2 g\right)^2 \cdot \sigma_{v_{L_i}}^2} \quad (8)$$

Abbiamo trascurato le incertezze sui singoli raggi  $r_i$  delle sfere perché trascurabili rispetto a quelle degli altri parametri.

Di seguito sono riportati i valori di ogni  $\eta$  calcolato:

Palline	$\eta$	$\sigma_{\eta}$
r1	66,926	0,059
r2	66,841	0,059
r3	66,193	0,058
r4	62,523	0,055
r5	61,776	0,055
r6	59,870	0,054
r7	53,457	0,050
r8	43,587	0,045
r9	28,358	0,040
r10	17,599	0.043

Tabella 4: Stime del coefficiente viscosi relative ai vari set di misure.

E' immediato constatare che  $\eta$  diminuisce all'aumentare del raggio della sfera. Nel grafico successivo questo andamento è ancora più visibile:

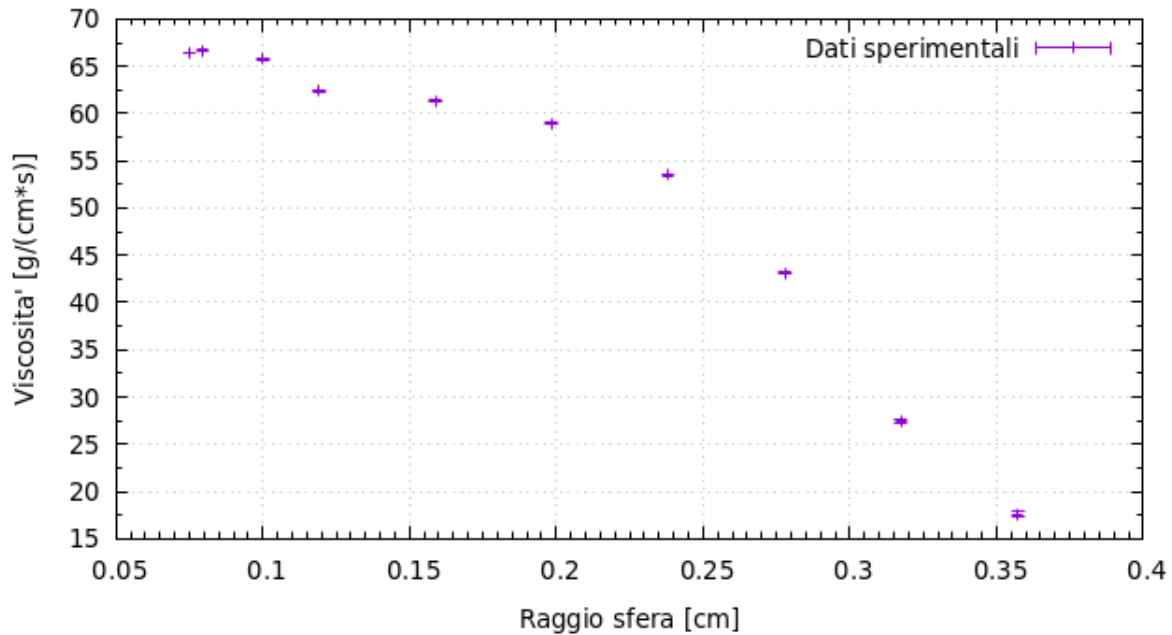


Figura 5: Grafico che mostra l'andamento del coefficiente di viscosità in funzione del raggio, il quale sarebbe dovuto risultare costante sotto le ipotesi iniziali.

Si può capire facilmente che la decrescenza di  $\eta$  può essere dovuta all'andamento esponenziale della velocità limite, supposto al paragrafo precedente.

Calcolando l'indice di compatibilità tra tutte le stime di  $\eta$  possiamo affermare che le uniche misure che risultano tra loro compatibili sono r1 e r2 con un indice di compatibilità  $r = 1.0$ . Siccome r1 e r2 sono le misurazioni in cui sono state usate le due sfere più piccole questo ci porta a pensare che all'aumentare del raggio ci discostiamo sempre di più dalle condizioni necessarie all'applicazione della legge di Stokes.

#### 4.4 Ipotesi sugli errori sistematici per una stima accurata di $\eta$

I motivi per i quali le stime della viscosità sembrano avere una dipendenza dal raggio sono diversi. Non potendo recarci in laboratorio per nuove misurazioni dobbiamo limitarci a lavorare con i dati già raccolti.

Per prima cosa abbiamo verificato l'effetto fondo o parete. A causa di questo effetto le velocità limite potrebbero non essere quelle reali. La velocità limite può essere corretta tramite l'equazione:

$$v_{\infty} = v_L \cdot \left(1 + 2.4 \cdot \frac{r}{R}\right) \cdot \left(1 + 3.3 \cdot \frac{r}{R}\right) \quad (9)$$

Dove:

$R$  è il raggio del cilindro;

$H$  è l'altezza del cilindro.

I risultati che otteniamo con questa correzione non si differenziano quasi in nessun modo da quelli originale. Per questo possiamo affermare che non è (solo) l'effetto parete o fondo a rendere incompatibili le varie stime di  $\eta$ .

Siccome per r5 ci è stato fornito un video in cui vengono lasciate cadere quattro sfere dello stesso diametro una dopo l'altra nello stesso cilindro, possiamo controllare la presenza di viscosità locali. Più in particolare possiamo osservare se la velocità limite di una sfera è influenzata dal lancio precedente.

Il grafico sottostante mostra le velocità limite delle sfere del set r5. E' immediato notare come la velocità cresca un lancio dopo l'altro. Il motivo è probabilmente attribuibile alla dissoluzione di gas nel liquido e alla formazione di piccole bolle che influenzano i lanci precedenti e successivi.

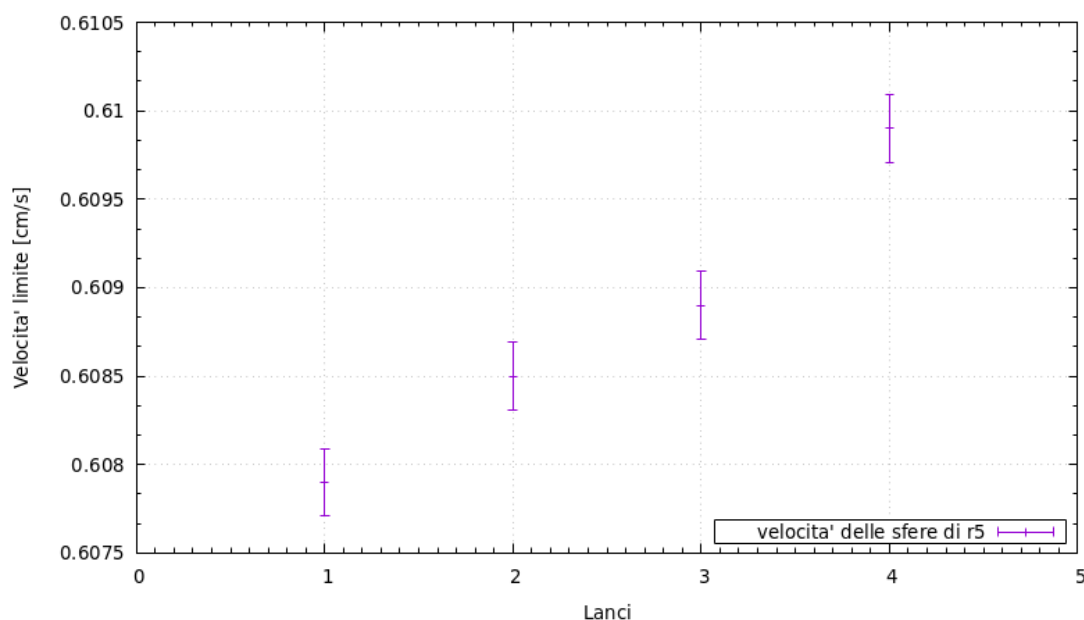


Figura 6: Grafico che mostra come la velocità limite di una sfera sia maggiore di quella precedentemente lanciata nello stesso cilindro.

Questa prima analisi non ci permette di produrre una stima di un errore sistematico, ma siccome tutte le sfere sono sempre state lanciate nello stesso cilindro, possiamo affermare che le prime sono meno influenzate da questo effetto rispetto alle ultime.

Sempre grazie al fatto che abbiamo a disposizione un set di misure ripetute possiamo controllare se la viscosità possa variare in funzione della profondità. Nel grafico successivo sono mostrate le velocità medie ad ogni tacca del cilindro. L'andamento è chiaramente decrescente portandoci a pensare che più la sfera scende nel cilindro e più risente dell'attrito viscoso. Se così fosse il fluido non sarebbe definibile come fluido Newtoniano e di conseguenza non ci permetterebbe di verificare la legge di Stokes.

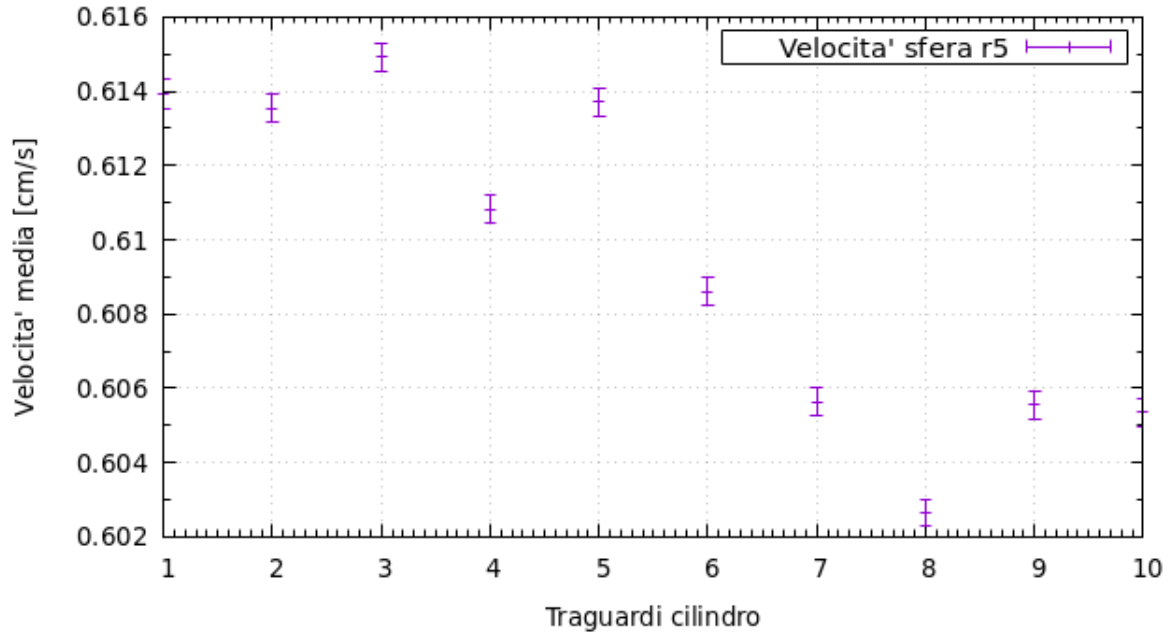


Figura 7: Velocità media sfera r5 in funzione del traguardo.

Se così fosse il coefficiente viscoso potrebbe anche essere funzione della profondità. Per questo motivo, abbiamo provato a ripetere la stima di  $\eta$  utilizzando i tempi misurati fino al quarto traguardo, ovvero fino ad una profondità di circa 25cm per notare un'eventuale stratificazione sul fondo.

I risultati sono riassunti nella seguente tabella:

Pallina	$\eta$	$\sigma_\eta$
r1	66.352	0,059
r2	66.650	0,059
r3	65.706	0,059
r4	62.371	0,058
r5	61.315	0,063
r6	58.391	0,073
r7	53.424	0,087
r8	42.907	0,107
r9	27.463	0,133

Tabella 5: Coefficiente viscoso ricalcolato utilizzando i primi 4 tempi misurati di ogni sfera.

Dai dati ottenuti si nota però come i valori si discostino poco da quelli prima ricavati, impedendoci di migliorare la stima del coefficiente viscoso per il liquido in questione. In particolare, le misure r1 ed r2 che prima risultavano compatibili ora non lo sono più.

Per l'applicazione della legge di Stokes è necessario che il moto sia laminare, per questo motivo abbiamo deciso di calcolare il numero di Reynolds per ogni set di misurazione. A rigore, il numero da noi calcolato non è il numero reale in quanto sarebbe necessario conoscere la viscosità reale del fluido, tuttavia può fornirci delle informazioni grossolane per quanto riguarda la laminarità o meno del sistema. Ricordiamo inoltre che il moto del fluido è considerabile laminare se il numero di Reynolds è minore di 1:

$$Re = \frac{r_t \rho v_L}{\mu} \quad (10)$$

Dove:

$Re$  è il numero di Reynolds;

$r_t$  il raggio del tubo;

$\rho$  la densità volumetrica del liquido;

$v_L$  la velocità limite;

$\eta$  il coefficiente di attrito viscoso.

Set	r1	r2	r3	r4	r5	r6	r7	r8	r9	r10
Numero di R.	0.02	0.02	0.03	0.05	0.09	0.15	0.27	0.56	1.74	5.70

Tabella 6: Riassunto dei risultati ottenuti dal calcolo del numero di Reynolds.

Si può verificare dalla tabella come gli unici set di misure che forniscono una stima del numero di Reynolds maggiore di 1 sono r9 e r10. Inoltre, maggiore è il raggio della sfera che viene lasciata cadere e meno il moto risulta laminare, come ci si poteva facilmente aspettare. Il fatto che questo numero rimanga comunque abbastanza basso per quasi tutti i set di misure ci fa pensare che a rendere poco accurata (e precisa) la nostra stima di  $\eta$  non sia tanto la laminarità del fluido, piuttosto il fatto che questo non sia considerabile un fluido Newtoniano.

Alla luce dei risultati appena esposti possiamo affermare che la presenza di viscosità locali e la dipendenza di  $\eta$  dalla profondità non sono così influenti da permetterci di correggere la nostra stima. Inoltre, sembra che il moto del sistema sia approssimabile ad un moto laminare. Di conseguenza crediamo che il fluido studiato non sia un fluido Newtoniano.

Questo non ci permette di verificare la legge di Stokes. Tuttavia, la nostra stima sperimentale migliore di  $\eta$  terrà in considerazione solo i primi due set, r1 e r2, in quanto questi, oltre ad essere gli unici a fornire stime di  $\eta$  compatibili, sono anche quelli che "disturbano" meno il liquido poiché le sfere sono le più piccole e le più leggere.

Tramite media ponderata otteniamo:

$$\eta = (66.88 \pm 0.04) \frac{g}{cm \cdot s}$$

Con un errore relativo del 0.6%

#### 4.5 Stima di $\eta$ mediante interpolazione polinomiale

Fino ad ora abbiamo valutato quali siano i migliori dati per poterne effettuare la media pesata e presentare un unico valore per il coefficiente di viscosità, la stima così ottenuta però potrebbe non essere rappresentativa del fenomeno fisico in questione. Al posto di utilizzare i singoli valori di  $\eta$  per fornirne un'unica stima complessiva, possiamo provare a trattare in modo matematico il problema non tanto per ottenerne una migliore, ma più per avere un'indicazione del valore a cui potrebbe tendere la viscosità al diminuire del raggio.

Qui sotto è riportato il grafico che rappresenta la variazione di  $\eta$  in funzione di  $r^2$ , in verde è rappresentata la funzione polinomiale di quarto grado che meglio interpola i nostri dati, quest'ultima è stata stimata con un programma apposito in C++.

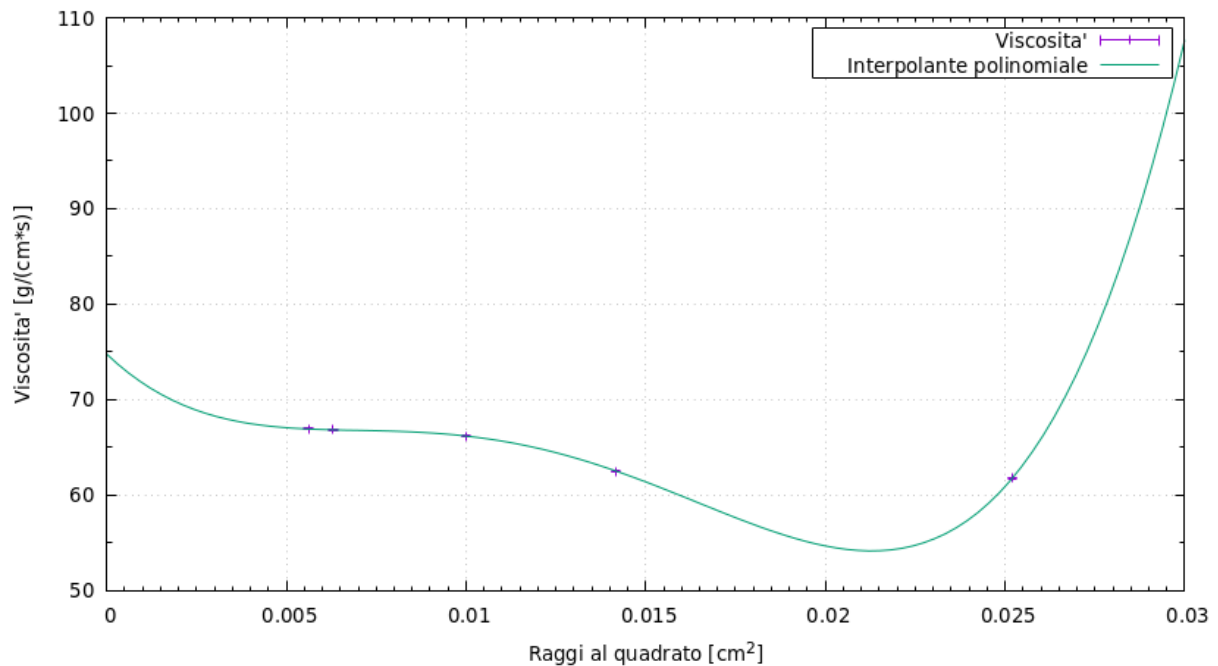


Figura 8: Funzione interpolante

Otteniamo quindi la funzione seguente, dove  $x = r^2$  :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + k \quad (11)$$

Con:

$$\begin{aligned} a &= 8.53 \cdot 10^8; \\ b &= -3.99 \cdot 10^7; \\ c &= 586531; \\ d &= -3581.25; \\ k &= 74.7677. \end{aligned}$$

Per valutare la bontà di tale interpolazione abbiamo effettuato il test del  $\chi^2$  che risulta essere:  $\chi^2 = 1.15 \cdot 10^{-6}$ .

Notiamo che interpolando con una funzione polinomiale di quarto grado i cinque dati

considerati abbiamo zero gradi di libertà, e siccome  $\chi^2 \sim 0$  possiamo concludere che i dati seguono l'ipotesi rappresentata da  $f(x)$  che potrebbe anche non essere valida in se', ma il campione e' compatibile con l'ipotesi entro le fluttuazioni statistiche. Un'altra conseguenza di avere zero gradi di libertà è che in questo caso tutti gli errori dei parametri sono zero per definizione, in quanto in questo caso il programma utilizzato non stima gli errori, di conseguenza otterremo un  $\eta$  privo di errore.

Il fit è stato eseguito escludendo gli ultimi quattro  $\eta$  sperimentali perchè includendo uno ad uno questi valori non avremmo ottenuto un  $\chi^2$  soddisfacente, con particolari problemi in prossimità dello zero. Siamo stati quindi, in un certo senso, costretti a considerare solo i primi cinque dati e ad interpolare con una funzione polinomiale di quarto grado per poter accettare l'ipotesi.

Precedentemente abbiamo mostrato che probabilmente la velocità limite cresce esponenzialmente all'aumentare del raggio della sfera utilizzata, questo è in forte contrasto con le ipotesi iniziali per le quali la velocità dovrebbe crescere linearmente, questo però è possibile molto probabilmente solo in casi specifici che non tratteremo ora. Abbiamo anche visto che questo comportamento anomalo della velocità tende a minimizzarsi per i raggi più piccoli, permettendoci quindi di utilizzare la legge di Stokes per stimare la viscosità del liquido, di conseguenza possiamo affermare che se valutiamo quest'ultima definitivamente per il raggio che tende a zero, dovremmo ottenere una stima sempre più prossima al valore vero. Studiamo quindi il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k$$

Dove  $k$  è il parametro precedentemente stimato, quindi risulta che:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \eta(r) = 74.7677 \frac{g}{cm \cdot s}$$

Possiamo dunque concludere che analiticamente risulta un tale coefficiente di viscosità, privo di errore:

$$\eta = 74.7677 \frac{g}{cm \cdot s}$$

Questo valore avrà una certa probabilità, che non siamo in grado di calcolare ma che possiamo assumere buona, di rappresentare il valore vero.

Tuttavia tutte queste ipotesi andrebbero verificate sperimentalmente eseguendo nuove misurazioni in laboratorio con sfere di raggio sufficientemente piccolo, cosa che in questo momento non ci è permessa. Per questo motivo la stima di  $\eta$  che ci sentiamo di fornire è quella calcolata a partire dai soli primi due set di misure.

## 5 Discussione dei risultati sperimentali e conclusioni.

Lo scopo dell'esperienza era stimare il coefficiente di viscosità di un liquido saponoso e verificare la validità della legge di Stokes. Questa afferma che se una sfera attraversa un fluido con moto laminare sotto l'azione della forza peso, si muoverà di moto rettilineo uniforme. In particolare, ci si può aspettare che la velocità limite raggiunta dalla sfera sia proporzionale al suo raggio al quadrato e che il coefficiente viscoso sia invece indipendente da quest'ultimo.



Tramite l'utilizzo di un viscosimetro e del software VLC media, abbiamo preso vari set di dati per  $N=10$  palline di raggio diverso e stesso materiale, allo scopo di verificare tale legge. A seguito dell'analisi dati però, è risultato che il coefficiente viscoso dipende dalle caratteristiche della sfera, portandoci a supporre la presenza di eventuali errori sistematici, come il fatto che il liquido potesse essere non newtoniano. Questa ipotesi è stata rafforzata anche dalla non compatibilità dei tempi impiegati dalla sfera per passare da un traguardo all'altro, sintomo che il moto era perturbato da un qualche fattore. Dalla prima analisi dati ne è risultato che solo il coefficiente di  $r1$  ed  $r2$  fosse compatibile, portandoci a supporre che ci fosse un effetto di stratificazione verso il fondo, tanto più visibile tanto più grande era il raggio della pallina. Perciò, abbiamo ricalcolato i coefficienti viscosi utilizzando solo i tempi relativi ai primi 4 traguardi, arrivando però a peggiorare la nostra stima, ottenendo 10 coefficienti tutti tra loro incompatibili.

Accertandoci che la deviazione dei dati dalla linearità non fosse dovuta alla turbolenza del moto o da effetti di fondo o parete siamo giunti alla conclusione che l'ipotesi più probabile fosse che il liquido saponoso utilizzato assumesse le caratteristiche di un fluido non newtoniano in determinate condizioni. Come diretta conseguenza non abbiamo potuto fornire una conferma sperimentale della legge di Stokes.

Nonostante questo, si può comunque osservare la presenza di una terza forza, contraria alla forza peso e concorde alla forza di Archimede, che permette alla risultante di queste due forze di poter essere approssimabile a zero, portando il moto ad essere uniforme, entro le relative incertezze, arrivando a definire una velocità limite. In particolare, i coefficienti viscosi diminuiscono sensibilmente man mano che il raggio della pallina aumenta, in accordo con quanto detto sullo studio degli errori sistematici, che ci aspettavamo rilevanti con l'aumentare delle dimensioni del corpo immerso. Notiamo anche come la dipendenza della viscosità dal raggio della pallina possa essere un effetto di non-laminarità del moto del fluido, e si può supporre che all'aumentare del raggio il moto diventi significativamente turbolento scostandosi sempre di più dall'essere laminare, cioè l'ipotesi dal quale eravamo partiti.

Possiamo affermare che l'esperimento non ci ha permesso di stimare accuratamente il coefficiente di viscosità perché quasi tutti i valori risultano incompatibili e tutti questi dipendono dalle condizioni del fluido. Infatti, come avevamo notato sin dal principio, gli effetti quali: la formazione di una scia, le bolle di gas e forse anche la diversa densità del fluido in base all'altezza, che prima dell'esperienza erano supposte effetti trascurabili, hanno influenzato la misurazione. È possibile, però, ricavare come valore più probabile quello delle prime due sferette. Allora, disponendo di solo due misure compatibili del coefficiente viscoso, trattatisi dei raggi più piccoli inseriti  $r1$  ed  $r2$  e seguendo questa ipotesi, la stima migliore che ci sentiamo di fornire del coefficiente viscoso  $\eta$  è:

$$\eta = (66,88 \pm 0,04) \frac{g}{cm \cdot s}$$

Per cercare di ottimizzare la nostra stima di  $\eta$  abbiamo infine calcolato, tramite un apposito programma in C++, una funzione polinomiale che meglio approssimasse l'andamento del coefficiente viscoso in base al raggio al quadrato. In particolare, notando

l'andamento dei coefficienti viscosi e seguendo le ipotesi dichiarate, abbiamo proceduto a rimuovere i dati degli ultimi cinque raggi. Dopo aver valutato la bontà del fit abbiamo calcolato il limite della funzione per un raggio infinitesimo, cercando di ottenere una stima non influenzata dagli errori sistematici presenti.

A seguito di questa analisi, perciò, abbiamo ottenuto come valore di  $\eta$ :

$$\eta = 74.7677 \frac{g}{cm \cdot s}$$

Risultato incompatibile con la stima sperimentale ma che, in linea di principio, potrebbe rappresentare una alternativa, la cui bontà andrebbe verificata eseguendo nuove misurazioni con sfere di raggio inferiore a r1.

## 6 Appendice

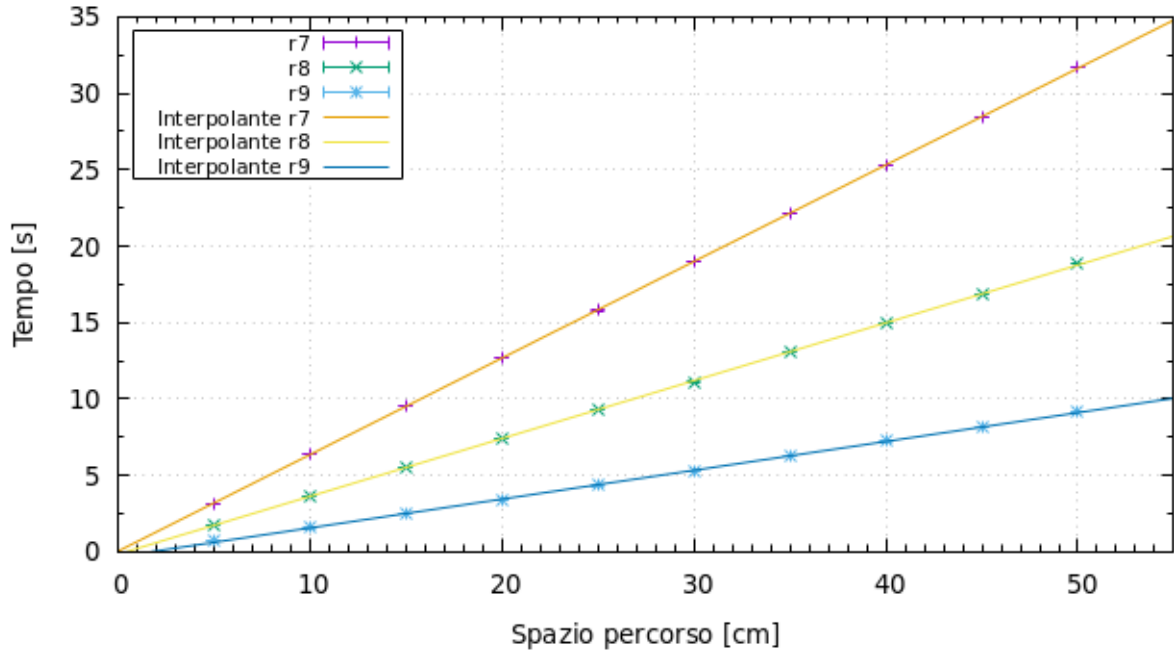


Figura 9: Grafico che mostra l'andamento delle velocità limite in funzione del raggio della sfera.

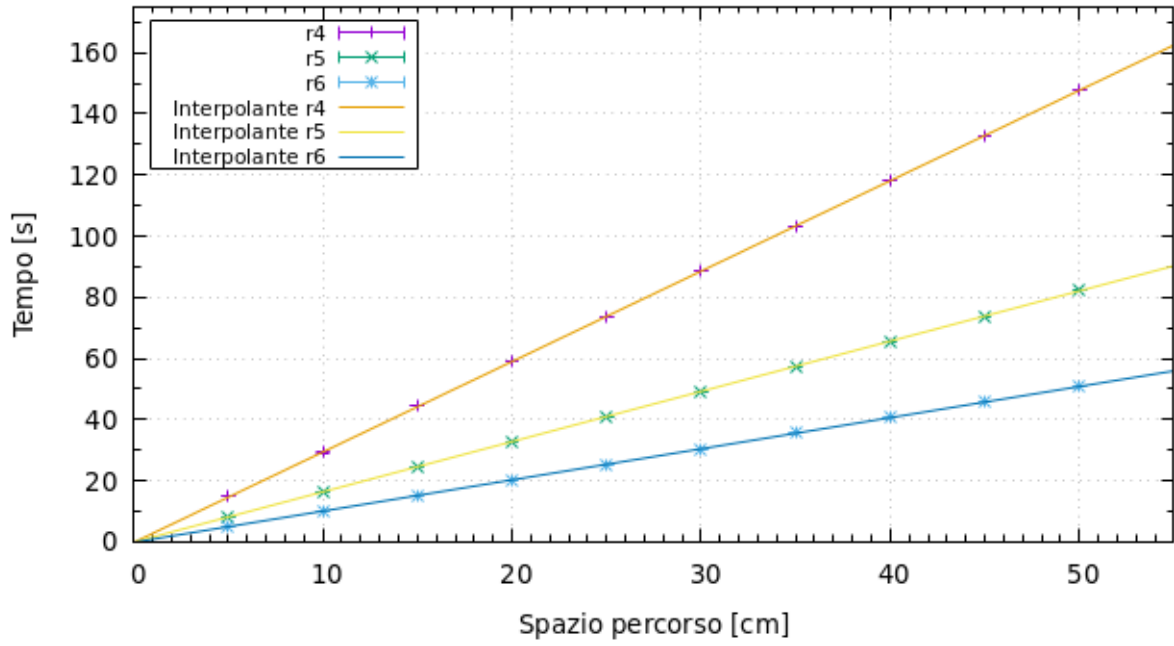


Figura 10: Grafico che mostra l'andamento delle velocità limite in funzione del raggio della sfera.

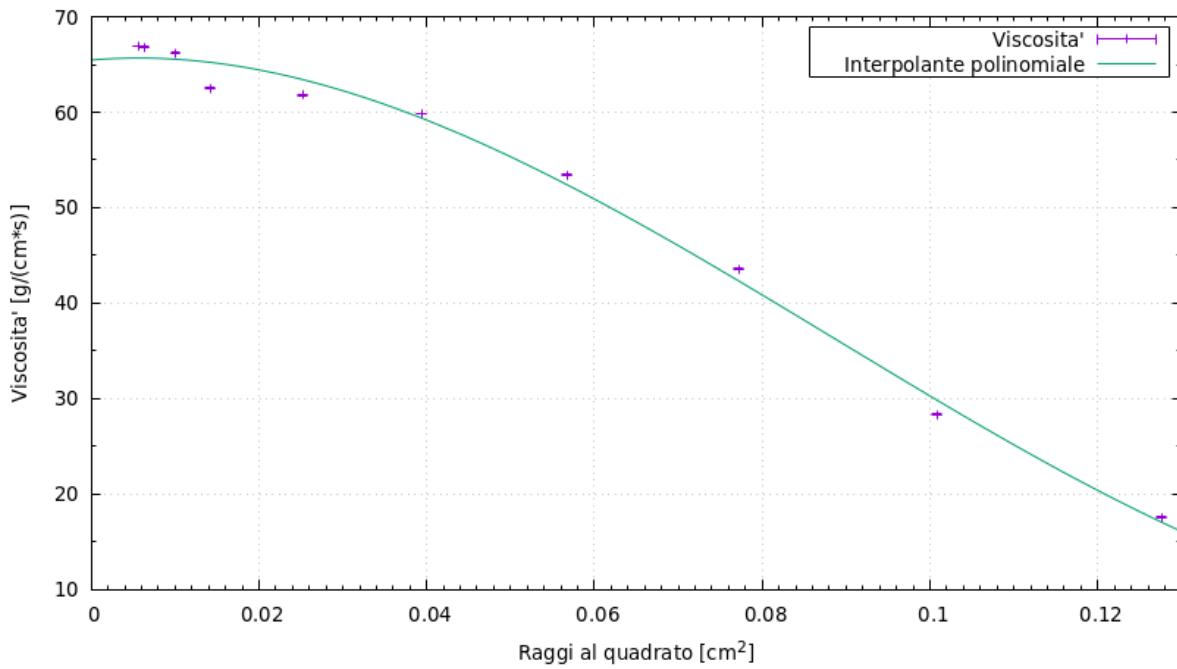


Figura 11: Grafico in cui sono mostrate le viscosità in funzione dei raggi al quadrato interpolate da una funzione polinomiale del terzo ordine. Con  $r^2 \sim 0$  il valore del coefficiente viscoso risulta essere:  $\eta = (66 \pm 2) \text{ g/(cm} \cdot \text{s)}$ .

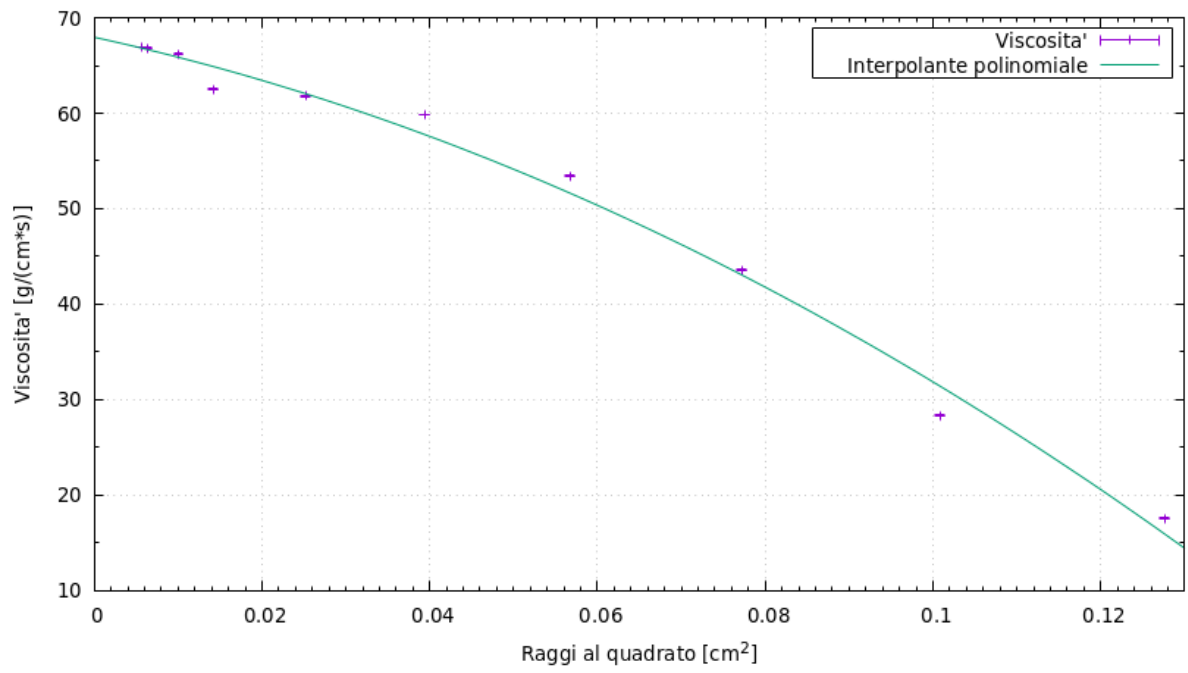


Figura 12: Grafico in cui sono mostrate le viscosità in funzione dei raggi al quadrato interpolate da una funzione polinomiale del secondo ordine. Con  $r^2 \sim 0$  il valore del coefficiente viscoso risulta essere:  $\eta = (68 \pm 2)g/(cm \cdot s)$ .