

Gruppo IV-3

Masiero Tommaso - Matricola 2015778 - Email tommaso.masiero@studenti.unipd.it

Marchesini Davide - Matricola 2009840 - Email davide.marchesini@studenti.unipd.it

Toffoli Marco - Matricola 2000397 - Email marco.toffoli.2@studenti.unipd.it

Stima delle principale lunghezze d'onda visibili emesse da una sorgente al cadmio

1 Obiettivo

L'obiettivo di questa esperienza è stimare le lunghezze d'onda delle linee principali di emissione nel visibile di una lampada al cadmio grazie alle misure angolari dei massimi di interferenza prodotti da un reticolo di diffrazione posto tra la lampada e l'osservatore.

2 Apparato strumentale

La nostra strumentazione di misura era composta da più parti, tutte fisse ad una base in legno. Le componenti rotanti ruotavano, a meno di un errore di eccentricità, attorno allo stesso asse.

Gli elementi principali della strumentazione utilizzata sono :

- **Lampada al cadmio:** utilizzata come sorgente, emette soprattutto in quattro righe spettrali che potevano essere identificate ad occhio come: blu, azzurro, verde e rosso.
- **Collimatore:** è uno strumento adoperato per poter lavorare nelle condizioni di Fraunhofer, ha permesso di avere fasci luminosi paralleli in uscita. E' composto principalmente da una lente acromatica che produce fasci paralleli se la sorgente è posta alla sua distanza focale, infatti nel collimatore era presente una vite di regolazione per poter mettere a fuoco la lampada. All'apertura del canale c'era anche una placca mobile che permetteva di variare la larghezza della fenditura dal quale entrava la luce della lampada.
- **Reticolo:** il nostro reticolo ha un passo stimato di $d = 3.33 \pm 0.03 \mu m$. Esso era posto su un sistema rotante che però è stato subito fissato in quanto non permette di misurare l'angolazione del corpo a differenza della base rotante. Si è notato come durante il processo di ortogonalizzazione il supporto che conteneva il reticolo non fosse esattamente perpendicolare alla base su cui poggiava. Questo non dovrebbe influenzare i nostri dati perchè l'ortogonalità è stata controllata direttamente sul reticolo.

- **Telescopio:** per la presa dati l'osservatore doveva guardare in un telescopio composto da un sistema di lenti regolabile in modo tale da poter metter a fuoco una croce presente nell'immagine. Inoltre, il telescopio poteva girare insieme alla base rotante grazie ad un braccio verticale.
- **Base rotante:** questa è la componente dalla quale sono stati ricavati tutti i dati. Essa era collegata al telescopio ed è composta da due nonii incisi sulla base. I nonii sono strumenti che permettono la misura di frazioni di unità dunque nel nostro caso la lettura di un nonio riportava i gradi e i primi d'angolo. Per eliminare un eventuale errore di eccentricità avevamo a disposizione due posizioni di misura una a 180 dall'altra. Il nonio frazionario aveva una risoluzione di 2 primi ma a causa dell'impossibilità di lettura dovuta alla capacità degli operatori o dal fatto che le linee di misura non erano perfettamente definite a causa dell'usura, la risoluzione risulta di 4 primi.

3 Procedura di acquisizione dati

La procedura di acquisizione dati è stata preceduta da una fase di preparazione dello strumento.

Per evitare errori dovuti alla diversa distanza focale degli occhi dei vari operatori, il cannocchiale è stato tarato sin dall'inizio da un solo individuo che avrebbe poi dovuto controllare la strumentazione durante tutta l'esperienza. Questa operazione è avvenuta prima mettendo a fuoco una croce presente nell'oculare del telescopio e poi ruotando quest'ultimo verso il più lontano oggetto a disposizione e mettendolo a fuoco, nel nostro caso abbiamo usato il tetto di una casa distante qualche decina di metri.

Il telescopio è stato poi riallineato con la sorgente al cadmio la quale era disposta su un supporto che permetteva sia di muoverla leggermente in modo tale da metterla direttamente a fuoco e sia di ridurre o aumentare la larghezza di una fessura attraverso la quale passava la luce. La larghezza di questa fessura doveva essere scelta in modo tale che passasse abbastanza luce da poter vedere i diversi ordini di diffrazione e al tempo stesso non troppa da farli sovrapporre, e per farlo abbiamo anche tenuto in considerazione il fatto che se la fessura fosse stata troppo grande avremmo avuto difficoltà a centrare la croce sopracitata con l'immagine. Infine il cannocchiale è stato fissato in modo tale che la croce fosse centrata con l'ordine zero di diffrazione della sorgente.

A questo punto, messa a fuoco e calibrata tutta la strumentazione dovevamo assicurarci che il reticolo di diffrazione fosse ortogonale al fascio luminoso, dunque abbiamo prima posizionato "ad occhio" il reticolo in modo tale che secondo noi fosse ortogonale e successivamente controllato ed eventualmente modificato la sua orientazione. Per la procedura di controllo abbiamo innanzitutto preso il valore dell'angolo θ_0 utilizzando i due noni (A e B) e poi posizionato il cannocchiale in modo da osservare il secondo ordine di diffrazione a destra e sinistra (+2 e -2) della linea verde e misurarne le posizioni angolari. La posizione angolare dell'ordine di diffrazione è dunque data dalla media tra quella misurata col nonio B, (θ_B), e quella del nonio A, data da $\theta_A = \theta_{A_m} - \pi$ dove abbiamo sottratto π all'angolo misurato per lo sfasamento tra i due noni. La media tra le posizioni degli ordini +2 e -2 del verde dovrebbe essere per ipotesi uguale a θ_0 , misurato precedentemente, entro 4'.

Una volta ortogonalizzato il reticolo abbiamo iniziato la presa dati misurando le posizioni angolari dei primi 3 ordini di diffrazione, sia positivi che negativi, per le quattro righe luminose più intense emesse dalla sorgente ossia blu, verde, rosso e azzurro.

4 Analisi

4.1 Stima degli errori casuali associati alle diverse grandezze misurate.

In questa sezione riporteremo le equazioni utilizzate per calcolare i vari errori associati alle grandezze in gioco.

Con Δ indicheremo l'errore massimo, fornitoci a priori, del passo del reticolo d , della scala graduata del nonio θ_0 e delle lunghezze d'onda di riferimento λ_t .

	$d[\mu m]$	$\theta_0[primi]$	$\lambda_t[nm]$
Δ	0.03	2	0.01

Tabella 1: Errori massimi associati ad alcuni parametri

Per queste tre grandezze l'errore statistico è stato calcolato come:

$$\sigma_x = \frac{2 \cdot \Delta}{\sqrt{12}} \quad (1)$$

Mentre attraverso la propagazione degli errori:

$$\sigma_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\theta_A}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\theta_B}}{2}\right)^2 + (\sigma_{\theta_0})^2} \quad (2)$$

con α il generico angolo ottenuto dalla lettura dei due noni, θ_A e θ_B e calcolato come

$$\alpha = \frac{\theta_A + \theta_B - \pi}{2} - \theta_0 \quad (3)$$

Per l'analisi è stato poi necessario calcolare $\sin(\alpha)$ e $d \cdot \sin(\alpha)$, con:

$$\sigma_{\sin(\alpha)} = \cos(\alpha) \cdot \sigma_\alpha \quad (4)$$

$$\sigma_{d \cdot \sin(\alpha)} = \sqrt{(d \cdot \sigma_{\sin(\alpha)})^2 + (\sin(\alpha) \cdot \sigma_d)^2} \quad (5)$$

4.2 Stima delle lunghezze d'onda con interpolazione

Sappiamo dalla teoria che per i massimi di interferenza dovuta all'attraversamento di un reticolo vale:

$$d \sin(\alpha) = k \lambda \quad (6)$$

con k l'ordine del massimo, λ la lunghezza d'onda e d il passo del reticolo.

Allora avendo a nostra disposizione le misure degli angoli associate ai massimi con relativo ordine, abbiamo interpolato linearmente con $y = d \sin(\alpha)$ e $x = k$ (abbiamo considerato gli errori σ_{y_i} diversi). La relazione teorica tra i due dovrebbe essere del tipo $y = mx$, abbiamo pertanto effettuato le interpolazioni sia ad un parametro che a due per osservare l'eventuale presenza di errori sistematici. I risultati sono riassunti nelle tabelle sottostanti. Il coefficiente "a" delle interpolazioni rappresenta la stima della lunghezza d'onda associata, espressa in angstrom.

Colore	$a[A]$	σ_a	χ^2 ridotto	p-value
Blu	4677	12	2.4	0.033
Rosso	6558	115	235.2	0
Verde	5077	8	1.9	0.089
Azzurro	5510	461	4981.2	0

Tabella 2: Interpolazione ad un parametro.

Colore	$a[A]$	σ_a	b	σ_b	χ^2 ridotto	p-value
Blu	4677	9	10	15	2.7	0.028
Rosso	6593	234	-48	315	549.3	0
Verde	5077	9	-12	14	2.0	0.092
Azzurro	5771	201	-1612	326	876.8	0

Tabella 3: Interpolazione a due parametri.

Si può osservare che per quanto riguarda il blu e il verde i parametri ottenuti nei due modi sono molto simili. Lo stesso non si può dire per il rosso e l'azzurro, inoltre per questi due colori nessuna delle due interpolazioni sembra essere compatibile con la nostra ipotesi. In più abbiamo ottenuto che le intercette (b) sono tutte compatibili con lo zero quindi molto probabilmente l'errore sistematico risulta trascurabile.

Osservando i grafici si può notare come nel rosso sia presente un dato che si discosta sensibilmente dalla retta, mentre nell'azzurro i dati associati agli ordini negativi sembrano posizionarsi su una retta con pendenza maggiore rispetto a quella calcolata, che porterebbe ad una lunghezza d'onda molto più grande di quella associata al colore azzurro.

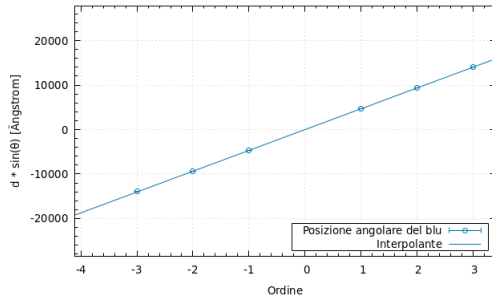


Figura 1: Interpolazione ad un parametro dei dati relativi alla radiazione blu.

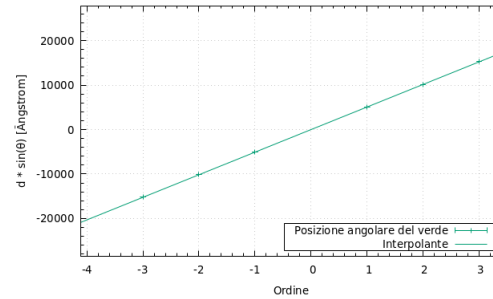


Figura 2: Interpolazione ad un parametro dei dati relativi alla radiazione verde.

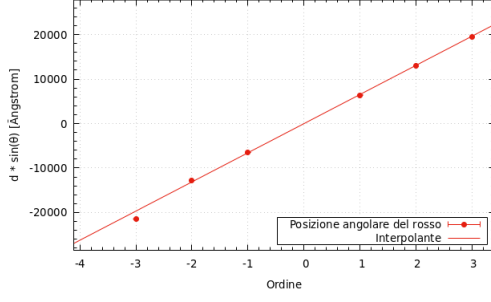


Figura 3: Interpolazione ad un parametro dei dati relativi alla radiazione rosso.

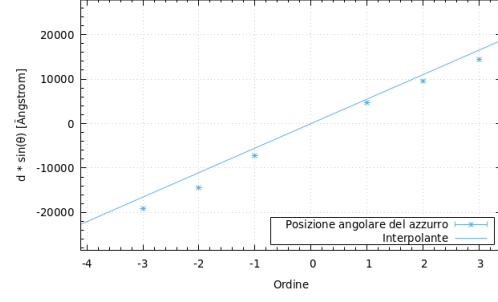


Figura 4: Interpolazione ad un parametro dei dati relativi alla radiazione azzurro.

Per questi motivi abbiamo deciso utilizzare per il rosso tutti i dati eccetto quello relativo all'ordine -3, mentre per l'azzurro solo quelli con ordini positivi. Otteniamo:

Colore	$a[A]$	σ_a	χ^2 ridotto	p-value
Blu	4677	12	2.4	0.03308
Rosso	6446	18	4.8	0.00071
Verde	5077	8	1.9	0.08956
Azzurro	4770	23	8.2	0.00029

Tabella 4: Interpolazione ad un parametro ottenuta eliminando i dati anomali.

4.3 Stima delle lunghezze d'onda come singola misura

Possiamo provare a stimare le lunghezze d'onda in un altro modo per poi confrontare i risultati, in particolare abbiamo che:

$$\lambda_i = \frac{d \sin(\alpha_i)}{n_i} \quad (7)$$

$$\sigma_{\lambda_i} = \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha_i)}{m}\right)^2 \cdot \sigma_d^2 + \left(\frac{d \cos(\alpha_i)}{m}\right)^2 \cdot \sigma_{\alpha_i}^2} \quad (8)$$

dove n_i è l'ordine dell'i-esimo massimo di intensità e α_i è l'angolo corrispondente. In questo modo dunque, non facciamo altro che calcolare la lunghezza d'onda associata ad ogni singola misurazione per poi farne una media pesata. Otteniamo i riassunti nelle successive tabelle.

Blu

	$\lambda_i[\text{\AA}]$	$\sigma_{\lambda_i}[\text{\AA}]$
λ_{-1}	4692	18
λ_{-2}	4673	14
λ_{-3}	4644	13
λ_1	4692	18
λ_2	4692	14
λ_3	4703	13

Figura 5: Valori delle singole lunghezze d'onda per il blu

Rosso

	$\lambda_i [\text{\AA}]$	$\sigma_{\lambda_i}[\text{\AA}]$
λ_{-1}	6449	21
λ_{-2}	6394	18
λ_{-3}	7142	19
λ_1	6420	21
λ_2	6470	18
λ_3	6493	17

Figura 6: Valori delle singole lunghezze d'onda per il rosso

Verde

	$\lambda_i[\text{\AA}]$	$\sigma_{\lambda_i}[\text{\AA}]$
λ_{-1}	5104	19
λ_{-2}	5071	15
λ_{-3}	5059	14
λ_1	5056	19
λ_2	5076	15
λ_3	5100	14

Figura 7: Valori delle singole lunghezze d'onda per il verde

Azzurro

	$\lambda_i[\text{\AA}]$	$\sigma_{\lambda_i}[\text{\AA}]$
λ_{-1}	7264	23
λ_{-2}	7190	20
λ_{-3}	6364	17
λ_1	4721	18
λ_2	4775	14
λ_3	4802	13

Figura 8: Valori delle singole lunghezze d'onda per l'azzurro

Osserviamo subito che i risultati ottenuti per gli ordini negativi dell'azzurro sono completamente sbagliati (lo si può affermare sapendo che $\lambda_a \approx 470nm$), di conseguenza possiamo affermare che con ogni probabilità trascurando questi ultimi otterremo una stima più accurata. Inoltre si può vedere come il dato che abbiamo trascurato nell'interpolazione del rosso effettivamente risulta non compatibile col resto dei dati. Effettuando una media pesata dei soli valori compatibili tra loro (ovvero tutti tranne quelli menzionati sopra) otteniamo le seguenti lunghezze d'onda:

$$\lambda_r = (644.7 \pm 0.8)nm$$

$$\lambda_v = (507.7 \pm 0.6)nm$$

$$\lambda_b = (468.0 \pm 0.6)nm$$

$$\lambda_a = (479 \pm 1)nm$$

Questi risultati risultano tutti compatibili con quelli stimati mediante interpolazione, tuttavia per il timore di aver sottostimato le incertezze con il metodo appena descritto confronteremo con i valori di riferimento i risultati ottenuti con quest'ultimo metodo.

5 Conclusioni

L'obiettivo di questa esperienza era fornire una stima delle lunghezze d'onda principali emesse dalla sorgente al cadmio. Abbiamo interpolato i dati raccolti sia con rette ad

un parametro che a due osservando che i risultati non variavano entro le loro incertezze. Questo ci ha permesso di concludere che non fossero presenti errori sistematici legati alla strumentazione, in quanto in tal caso avremmo dovuto osservare per tutte le lunghezze d'onda uno spostamento apprezzabile dell'intercetta dallo zero.

Abbiamo individuato alcuni dati anomali tra i set del rosso e dell'azzurro e li abbiamo eliminati ipotizzando che l'errore non fosse statistico ma dovuto ad una non corretta lettura del nonio.

Abbiamo stimato inoltre le stesse lunghezze d'onda singolarmente per ogni ordine di diffrazione ottenendo delle stime compatibili con quelle ottenute dall'interpolazione, in ogni caso abbiamo scelto di usare quelle provenienti dall'interpolazione in quanto la stima del loro errore è più prudente.

Avendo a disposizione i valori di riferimento delle varie λ ne abbiamo calcolato la compatibilità con le nostre stime:

Colore	λ stimata [Å]	σ_λ [Å]	λ teorica [Å]	σ_λ [Å]	r
Rosso	6446	18	6438.5	0.06	0.44
Blu	4677	12	4678.2	0.06	0.10
Verde	5077	8	5085.8	0.06	1.00
Azzurro	4770	23	4799.9	0.06	1.29

Tabella 5: Compatibilità con i valori di riferimento.

dove l'indice di compatibilità è stato calcolato come:

$$r = \frac{|\lambda_t - \lambda_s|}{\sqrt{\sigma_\lambda^2 + \sigma_{\lambda_s}^2}} \quad (9)$$

con λ_t e λ_s le lunghezze d'onda teorica e stimata.

Riportiamo dunque le nostre stime finali:

$$\lambda_r = (645 \pm 2)nm$$

$$\lambda_v = (507.8 \pm 0.8)nm$$

$$\lambda_b = (468 \pm 1)nm$$

$$\lambda_a = (477 \pm 2)nm$$