

Esercitazione 2

Studio del circuito RLC in serie nel dominio del tempo e della frequenza

Marchesini Davide, Masiero Tommaso, Toffoli Marco - Gruppo IV-3
`davide.marchesini@studenti.unipd.it` `tommaso.masiero@studenti.unipd.it` `marco.toffoli.2@studenti.unipd.it`

Dipartimento di Fisica e Astronomia “G. Galilei”
Università degli studi di Padova

27 agosto 2024

In questa relazione ci occuperemo di stimare in maniera indiretta alcune grandezze caratteristiche di un circuito RLC come la sua induttanza e resistenza totali, il fattore di smorzamento delle oscillazioni, la frequenza di risonanza e il fattore di merito. Saranno discussi la presa dati, le tipologie di analisi e i metodi utilizzati per ridurre gli errori sia casuali che sistematici.

1. Introduzione

L'obiettivo di questa esperienza è lo studio della risposta di un circuito RLC in serie sotto l'azione di un potenziale:

- costante, per osservare la risposta nel tempo;
- oscillante, per analizzare come varia la tensione ai capi della resistenza e della capacità al variare della frequenza dell'onda in ingresso; in particolare ci occuperemo del fenomeno della risonanza, ovvero quel fenomeno per cui la funzione di trasferimento è massima.

2. Apparato e procedimento

In laboratorio abbiamo costruito un circuito RLC in serie collegato ad un generatore di funzioni (Tektronix AFG 1022) e ad un oscilloscopio (Tektronix TBS 1102B). Il circuito ha subito alcune modifiche durante l'esperienza. In particolare, il circuito iniziale è rappresentato in figura 1 dove le uniche resistenze inserite sono quelle del generatore R_G e dell'induttanza R_L , l'oscilloscopio è collegato tra la capacità C e l'induttanza L ed la sua massa è fatta coincidere con quella del generatore; quest'ultimo alimentava il circuito con una funzione a gradino a bassa frequenza e tensione impostata a 800mV. Per lo studio della risonanza abbiamo aggiunto un resistore R in modo tale da poter osservare la tensione sia ai capi di questo, che ai capi di C . In questo caso il generatore produceva un'onda sinusoidale con un'ampiezza di una decina di volt. In figura 2 e 3 sono riportati gli schemi del circuito con l'oscilloscopio rispettivamente ai capi di R e ai capi di C .

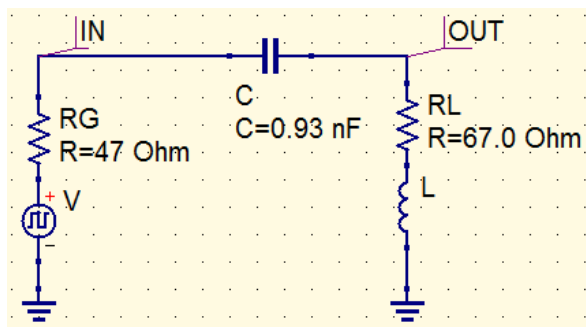


Figura 1. Schema dell'apparato utilizzato per studiare lo smorzamento di un sistema RLC.

I valori di R , R_L e C sono stati misurati a priori con il multimetro METRIX D00XTL37, mentre la resistenza R_G è stata stimata in una esperienza passata; questi valori sono riportati nella tabella

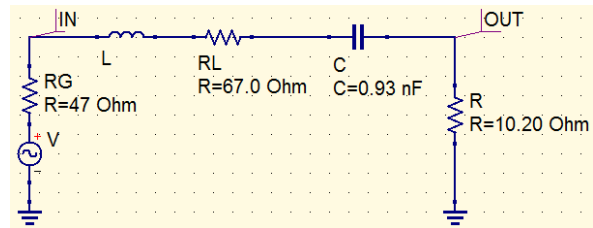


Figura 2. Schema dell'apparato utilizzato per lo studio della risonanza ai capi della resistenza.

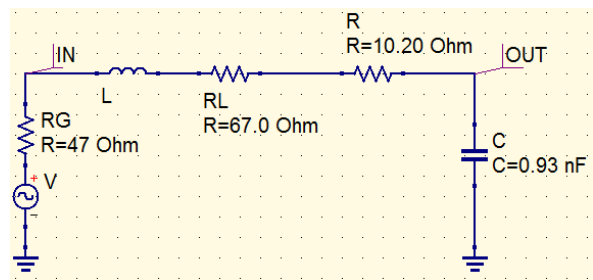


Figura 3. Schema dell'apparato utilizzato per lo studio della risonanza ai capi del condensatore.

1, a cui faremo riferimento successivamente. La varianza statistica associata a tali valori è stimata come somma quadratica di due contributi, uno percentuale e uno legato alla scala utilizzata nella misura ^[1].

	Valore	Incertezza
R_G	47Ω	3Ω
C	$0.93nF$	$0.02nF$
R_L	67.0Ω	0.8Ω
R	10.20Ω	0.08Ω

Tabella 1. Valori delle componenti del circuito

Il circuito è stato realizzato collegando il generatore ad una breadboard sulla quale abbiamo disposto gli elementi R , L e C collegandoli con piccoli cavi in rame (di resistenza circa 0.1Ω e quindi trascurabile in prima approssimazione rispetto alle altre resistenze) o se possibile sfruttando le righe e le colonne cortocircuitate della basetta.

Abbiamo collegato all'oscilloscopio due sonde, precedentemente calibrate, in modo da poter prelevare il segnale senza distorcerlo, sia in ingresso, subito dopo il generatore, che in uscita. Infine abbiamo fatto coincidere la massa del generatore con quella delle sonde.

Per il circuito 1 abbiamo impostato un'onda quadra di una frequenza tale da permettere al con-

densatore di caricarsi completamente, successivamente abbiamo adattato il display in modo da poter osservare su tutto lo schermo una decina di oscillazioni, simmetriche rispetto allo zero della scala delle tensioni.

Utilizzando i cursori dell'oscilloscopio abbiamo annotato i valori massimi e minimi del potenziale assunti durante ciascuna oscillazione, con i relativi tempi. Abbiamo preso anche i tempi in cui il potenziale si annullava, distinguendo quando questo succedeva con derivata positiva o negativa.

Infine abbiamo scaricato su una chiavetta USB tutti i punti tempo-tensione che l'oscilloscopio poteva tenere in memoria.

Per il circuito 2 e 3 abbiamo impostato un'onda sinusoidale e abbiamo variato la frequenza fino a trovare un intervallo di valori che rendevano massimo il potenziale in uscita. La frequenza di risonanza deve trovarsi in tale intervallo.

Successivamente, usando i cursori, abbiamo raccolto valori del periodo di oscillazione del segnale in uscita (prima ai capi di R , poi di C) in funzione della frequenza (in un intorno delle condizioni di risonanza) dell'onda in ingresso, del potenziale in uscita e del potenziale in ingresso.

3. Risultati

In questa sezione sono riportati i dati raccolti durante l'esperienza e usati per l'analisi. Le incertezze associate alle varie grandezze sono state stimate trasformando l'errore massimo in statistico sotto l'ipotesi di distribuzione triangolare.

Abbiamo assunto un'incertezza trascurabile sul valore della frequenza del generatore, mentre per le misure con l'oscilloscopio abbiamo considerato un errore massimo sui tempi pari ad un decimo della scala di misura, e per le misure di potenziale, oltre all'errore di risoluzione (sempre pari ad un decimo della scala di lettura) abbiamo considerato un errore di guadagno pari al 3% del valore letto. ^[1]

3.1 Campionamento "nel tempo"

Il campionamento "nel tempo" riguarda il circuito di figura 1.

Nella tabella 14 in appendice sono riportati i valori dei tempi in cui il potenziale in uscita si annullava: essendo la risposta oscillante, questo succedeva due volte per ogni oscillazione, una con derivata positiva (n intero) e una con derivata negativa (n frazionario).

Nella tabella 15 in appendice invece, sono visibili i valori di tempo in cui il potenziale raggiunge-

va un massimo relativo (n intero) o un minimo (n frazionario).

Separatamente, nelle tabelle 2 e 3 sono riportati rispettivamente i valori del potenziale in uscita quando questo raggiungeva un massimo o un minimo all'interno dell'oscillazione.

n	V_{max} [mV]	$\sigma_{V_{max}}$ [mV]
2	656	11
3	536	10
4	432	10
5	352	9
6	288	9
7	232	9
8	192	8

Tabella 2. Valori massimi del potenziale delle prime oscillazioni.

n	V_{min} [mV]	$\sigma_{V_{min}}$ [mV]
1.5	-712	12
2.5	-576	11
3.5	-474	10
4.5	-368	9
5.5	-304	9
6.5	-248	9
7.5	-200	9

Tabella 3. Valori minimi del potenziale delle prime oscillazioni.

3.2 Campionamento "In frequenza"

Per la raccolta dei dati in funzione della frequenza dell'onda in ingresso abbiamo usato i circuiti in figura 2 e 3 a seconda che il segnale fosse preso ai capi del resistore o del condensatore.

Nelle tabelle 16 e 18 in appendice sono riportate le misure del periodo di oscillazione in funzione della frequenza, rispettivamente ai capi di R e di C .

Le tabelle 17 e 19 anch'esse in appendice, mostrano invece, sempre in funzione della frequenza dell'onda del generatore, il potenziale in ingresso e in uscita dal circuito, ai capi di R e ai capi di C .

4. Analisi nel dominio del tempo

4.1 Campionamento manuale

In laboratorio una volta costruito il circuito RLC e mandato ad esso, grazie al generatore, un'onda quadra, utilizzando l'oscilloscopio abbiamo misurato i tempi in cui si presentavano dei massimi

e dei minimi di potenziale. Facendo un fit lineare del tempo in funzione dell'ordine di oscillazione con una funzione del tipo $f(x)=ax+b$ otteniamo le stime dei parametri in ???4.

	a [s][μ s]	b [s][μ s]
$t_{min_{min}}$	10.83 ± 0.08	-10.7 ± 0.4
$t_{max_{max}}$	10.87 ± 0.08	-10.9 ± 0.4

Tabella 4. Risultati del fit per la stima del periodo

Di seguito è riportato il grafico contenente i dati e le rispettive rette di regressione.

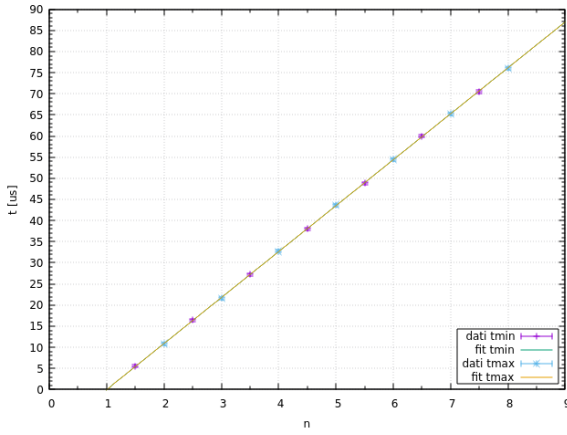


Figura 4. Interpolazione dei tempi in cui la tensione ha raggiunto i valori massimi e minimi

Osserviamo che le due rette di regressione non sono distinguibili e dunque sembrano coincidere perfettamente, a solo scopo illustrativo in figura ?????4 abbiamo riportato il grafico in cui gli ordini dei massimi sono traslati di $n=1\Delta n=1$.

Abbiamo poi misurato i tempi in cui il potenziale si annullava, distinguendo quando questo avveniva con derivata positiva t_+ , e quando con derivata negativa t_- .

I dati raccolti sono visibili in tabella ?????14, dove nn rappresenta l'ordine dell'intersezione, intero per t_+ , frazionario per t_- . Interpolando linearmente otteniamo il grafico in figura ?????6 mentre i parametri sono riportati in tabella ?????5.

	a [μ s]	b [μ s]
t_+	10.86 ± 0.03	-13.35 ± 0.17
t_-	10.84 ± 0.03	-13.36 ± 0.13

Tabella 5. Risultati interpolazione tempo con gli zeri stimati

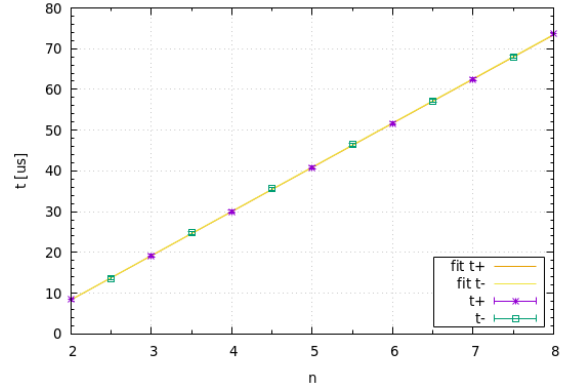


Figura 6. Interpolazione dei tempi in cui la tensione va a zero con derivata positiva, t_+ e negativa, t_- .

Essendo le interpolazioni di t_{max} e t_{min} e di t_+ e t_- in funzione di n , compatibili tra loro, possiamo escludere un eventuale errore di zero. Questo ci permette di stimare il periodo di oscillazione in due modi:

- utilizzando direttamente i dati delle tabelle 14 e 15, t_- , t_+ , t_{max} e t_{min} : in tutti i casi il periodo sarà pari alla differenza di un tempo t_{n+1} e il tempo precedente t_n della medesima serie di dati. In questo modo otteniamo quattro stime differenti riassunte nella seguente tabella:

	$T[\mu s]$	$\sigma_T[\mu s]$
t_+	10.9	0.2
t_-	10.9	0.3
t_{min}	10.8	0.2
t_{max}	10.9	0.2

Tabella 6. Periodi di oscillazione ottenuti a partire dai dati grezzi.

con incertezza stimata come:

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{T_i}}{\sqrt{N}}$$

Dove σ_{T_i} è l'incertezza associata ad una singola misura del periodo T_i stimata con propagazione degli errori ovvero, posto σ_t l'errore associato ad una singola misura di tempo: $\sigma_{T_i} = \sqrt{2}\sigma_t$.

Abbiamo fatto questa scelta perchè le cifre significative dei dati da noi raccolti sono tali da non permetterci di apprezzare una fluttuazione statistica di quest'ultimi e dunque utilizzando la deviazione standard avremmo rischiato di sottostimare l'incertezza.

Essendo queste stime di T tra loro compatibili possono essere mediate ottenendo:

$$T = (10.85 \pm 0.12) \mu s$$

- Alternativamente stimiamo il periodo utilizzando i coefficienti angolari delle rette di regressione discusse precedentemente. Essendo anch'essi tutti compatibili otteniamo mediando:

$$T = (10.85 \pm 0.02) \mu s$$

Per i calcoli successivi useremo quest'ultima come stima del periodo in quanto più precisa e meno sensibile ad errori rispetto a quella precedente. La pulsazione di oscillazione è definita come:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

e dunque nel nostro caso risulta essere:

$$\omega_d = (579 \pm 1) kHz \quad (2)$$

con:

$$\sigma_{\omega_d} = \frac{2\pi \cdot \sigma_T}{T^2} \quad (3)$$

In tabella 2 e 3 sono riportati i valori massimi e minimi del potenziale raggiunti per ogni oscillazione; come si vede diminuiscono in modulo dopo ogni oscillazione. Ciò è dovuto alla resistenza non nulla del circuito che dissipa energia attenuandone la risposta. Questa caratteristica è quantificata dal fattore di smorzamento δ definito come il rapporto tra il decremento logaritmico Δ e il periodo:

$$\delta = \frac{\Delta}{T} \quad (4)$$

$$\Delta = \ln \left(\frac{V_n}{V_{n+1}} \right) \quad (5)$$

Allora interpolando linearmente il logaritmo di V_{max} e di V_{min} (in modulo) in funzione dell'ordine n otteniamo due rette (rappresentate in figura 7) il cui coefficiente angolare m rappresenta l'opposto del decremento logaritmico Δ , dunque:

$$\delta = -\frac{m}{T} \quad (6)$$

e

$$\sigma_\delta = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{T} \right)^2 + \left(\frac{m \cdot \sigma_T}{T^2} \right)^2} \quad (7)$$

Dall'interpolazione otteniamo i parametri in tabella 7.

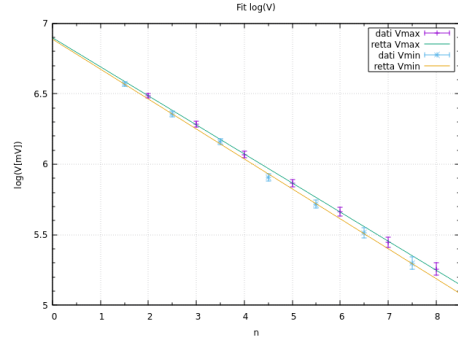


Figura 7. Interpolazione $\log(V)$ di massimi e minimi

	m	σ_m	$\delta [kHz]$	$\sigma_\delta [kHz]$
V_{max}	-0.207	0.005	19.1	0.5
V_{min}	-0.213	0.005	19.6	0.5

Tabella 7. Coefficiente angolare delle interpolazioni e relativo fattore di smorzamento.

Essendo $\delta(V_{min})$ e $\delta(V_{max})$ compatibili, possiamo farne la media pesata ottenendo:

$$\delta = (19.3 \pm 0.3) kHz$$

Noto il fattore di smorzamento, possiamo stimare la pulsazione propria del sistema ω_0 come:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} \quad (8)$$

mentre l'induttanza L , il fattore di merito Q e la resistenza totale R_{tot} come:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} \quad (9)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2 \cdot \delta} \quad (10)$$

$$R_{tot} = 2L\delta \quad (11)$$

Otteniamo i valori in tabella 8:

dove le incertezze sono state stimate attraverso la propagazione degli errori come:

$$\sigma_{\omega_0} = \sqrt{\frac{(\omega_d \cdot \sigma_{\omega_d})^2 + (\delta \cdot \sigma_\delta)^2}{\omega_d^2 + \delta^2}} \quad (12)$$

$$\sigma_L = \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \sigma_{\omega_0}}{\omega_0^3 \cdot C} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_C}{\omega_0^2 \cdot C^2} \right)^2} \quad (13)$$

	\bar{x}	$\sigma_{\bar{x}}$
ω_0 [kHz]	579.3	0.7
L [mH]	3.19	0.08
Q	15.0	0.3
R_{tot} [Ohm]	123	4

Tabella 8. Stime di alcune grandezze caratteristiche del circuito.

$$\sigma_Q = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\omega_0}}{2\delta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\delta} \cdot \omega_0}{2\delta^2}\right)^2} \quad (14)$$

$$\sigma_{R_{tot}} = 2 \cdot \sqrt{(\delta \cdot \sigma_L)^2 + (L \cdot \sigma_{\delta})^2} \quad (15)$$

Per come abbiamo costruito il circuito, se si considerano trascurabili le resistenze parassite, la resistenza totale R_{tot} dovrebbe coincidere con la somma della resistenza del generatore R_G e la resistenza dell'induttanza R_L ; la prima è stata stimata in un'un'altra esperienza come:

$$R_G = (47 \pm 3) \text{ Ohm}$$

mentre quella dell'induttanza è stata misurata con il multimetro Metrix ottenendo:

$$R_L = (67 \pm 3) \text{ Ohm}$$

La resistenza totale a priori risulta dunque essere:

$$R = (114 \pm 4) \text{ Ohm}$$

che è compatibile con R_{tot} , con un indice di compatibilità $r = 1.6$. Questo è il risultato che ci saremmo aspettati fin dall'inizio in quanto entro l'approssimazione fatta, trascurando eventuali resistenze parassite dovute al fatto che quello usato fosse un circuito reale, avendo collegato gli elementi in serie non vi è motivo per il quale R_{tot} risulti significativamente diversa da R , tuttavia vedremo successivamente che a seguito di altre misure e diverse analisi dati non si otterrà necessariamente questa compatibilità.

4.2 Campionamento automatico

Per ridurre l'incertezza associata alla misura dei tempi, durante l'acquisizione manuale dei dati abbiamo dovuto utilizzare una scala di $10\mu\text{s}/\text{div}$, questo però non ci ha permesso di visualizzare gran parte dell'oscillazione. Per avere un maggior numero di dati abbiamo scaricato in una chiavetta il file prodotto dall'oscilloscopio, dove sono riportati i valori del potenziale ad intervalli di 100ns . Da questi abbiamo estratto i tempi associati ai massimi e minimi relativi ottenendo un totale di 20 punti.

Con questo sistema aumentiamo leggermente l'incertezza sui tempi ma oltre ad avere un numero maggiore di punti, anche il valore medio dovrebbe risultare più accurato in quanto nel campionamento manuale i cursori dello strumento non permettevano di fare spostamenti di 100ns , bensì molto più discreti.

Interpolando linearmente otteniamo una retta il cui coefficiente angolare rappresenta la stima del periodo di oscillazione. In figura 8 è riportato il grafico dell'interpolazione.

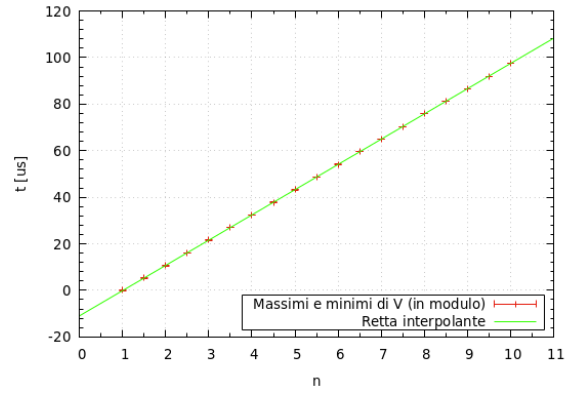


Figura 8. Interpolazione dei tempi di massimo e minimo del potenziale. Dati scaricati dallo strumento.

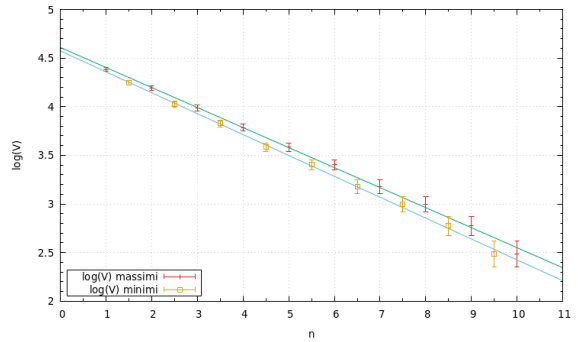


Figura 9. Interpolazione del logaritmo del potenziale in funzione dell'ordine di oscillazione.

La stima del periodo con questo sistema risulta essere:

$$T = (10.841 \pm 0.006) \mu\text{s}$$

compatibile con quella precedente con un coefficiente di compatibilità $r = 0.48$.

Stimando il fattore di smorzamento δ con lo stesso set di dati, quindi interpolando $\log(V_{max})$ e $\log(V_{min})$ in funzione di n come fatto con i dati

precedenti, otteniamo:

$$\delta(V_{max}) = (19.0 \pm 0.1)kHz$$

$$\delta(V_{min}) = (19.6 \pm 0.2)kHz$$

Dal grafico in figura 9 si nota una certa trasversalità tra le due rette di regressione, come succedeva nel caso dello stesso fit per i dati presi manualmente.

La compatibilità tra i due coefficienti angolari non è ottima ma con un coefficiente di compatibilità $r = 2.2$ (in linea di massima comunque non molto buona) ci permette di farne una media pesata e fornire un'unica stima per il fattore di smorzamento usando il periodo stimato in questo paragrafo:

$$\delta = (19.09 \pm 0.10)kHz$$

Questa nuova stima risulta compatibile con quella ottenuta precedentemente mediante lo studio dei dati raccolti manualmente, tuttavia notiamo che l'incertezza del periodo ottenuta in questa analisi è molto più piccola di quella ottenuta in precedenza (differiscono di un ordine di grandezza), inoltre i due δ ottenuti per V_{max} e V_{min} in questo caso risultano meno compatibili rispetto a prima. Per questi due motivi abbiamo deciso di essere prudenti e di considerare tutta questa analisi solamente come una verifica della bontà delle stime ottenute dalle misure manuali, ed evidentemente questa verifica ha avuto esito positivo in quanto sia i periodi che i fattori di smorzamento risultano compatibili tra loro.

4.3 Interpolazione globale della forma d'onda

Una stima più affidabile di tutti i parametri usando i dati scaricati dall'oscilloscopio la si può ottenere interpolando tutti i valori di potenziale in funzione del tempo. In particolare, dalla teoria ^[1] i punti (t, V) dovrebbero disporsi seguendo una funzione del tipo:

$$V(t) = \frac{V(0)e^{-\delta t}}{\phi} \cdot (\delta \sin(t\phi) + \phi \cdot \cos(t\phi)) \quad (16)$$

$$\text{dove } \phi = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

Il grafico in figura 10 mostra tale interpolazione. I parametri ω_0 e δ stimati attraverso il fit sono:

$$\delta = 20.1 \pm 0.2kHz$$

$$\omega_0 = 573.2 \pm 0.2kHz$$

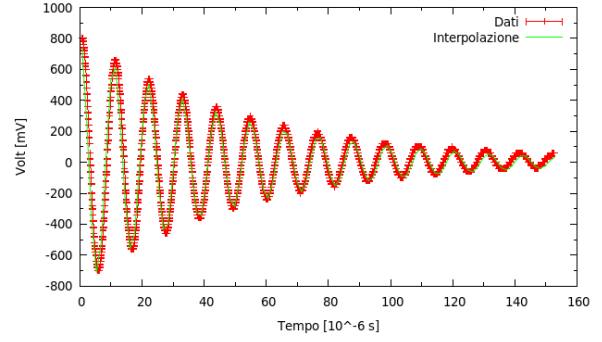


Figura 10. Interpolazione dei potenziali in funzione del tempo.

Dove le incertezze sono stimate dal software Gnuplot attraverso il metodo di minimizzazione del χ^2 .

Utilizzando le equazioni 8, 10, 9, 11 possiamo stimare ω_d , Q , L e R_{tot} :

$$\omega_d = (572.9 \pm 0.2)kHz$$

$$Q = 14.2 \pm 0.1$$

$$L = (3.26 \pm 0.01)mH$$

$$R_{tot} = (131.0 \pm 1.3)\Omega$$

4.3.1 Stima dei parametri attraverso la minimizzazione del χ^2

I valori dei parametri stimati dai software di interpolazione sono in linea di principio quelli per cui il valore del χ^2 è minimo. Tuttavia può accadere che il programma confonda dei minimi locali per dei minimi globali, restituendo dei valori falsati. Questo è tanto più probabile quanto più è complessa la distribuzione teorica dei dati e quanti più parametri sono coinvolti nel processo.

Per δ e ω_0 abbiamo studiato il χ^2 ad un grado di libertà per ricavarci le loro incertezze.

Da un punto di vista operativo abbiamo calcolato il χ^2 per ogni coppia (δ, ω_0) facendo variare solo uno dei due parametri e l'altro costante.

Per trovare il punto di minimo della curva (che dovrebbe coincidere con il valore ottenuto dal programma) abbiamo interpolato i dati in un suo intorno con una funzione parabolica della forma:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (17)$$

In questo modo otteniamo le figure 11 per δ costante e 12 per ω_0 costante.

In tabella 9 sono riportate le stime dei parametri della parabola.

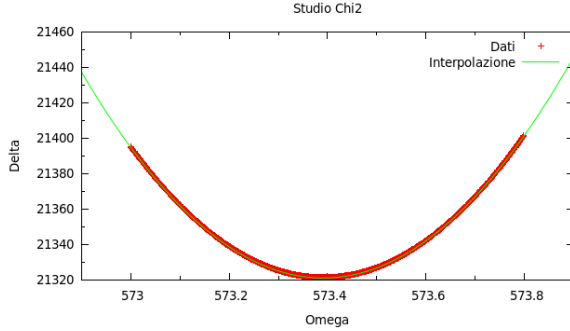


Figura 11. Valori del χ^2 al variare del parametro ω_0 .

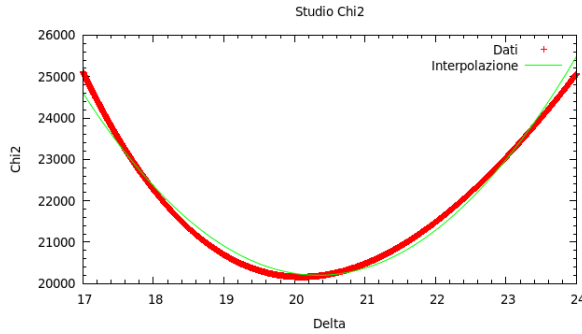


Figura 12. Valori del χ^2 al variare del parametro δ .

	a	b	c
δ	$4.817 \cdot 10^2$	$-5.525 \cdot 10^5$	$1.584 \cdot 10^8$
ω_0	$3.943 \cdot 10^2$	$-1.604 \cdot 10^4$	$1.833 \cdot 10^5$

Tabella 9. Stime dei coefficienti delle parabole usate per la determinazione del valore minimo di χ^2 .

Le migliori stime di δ e ω_0 dovrebbero corrispondere ai vertici della parabola:

$$\delta, \omega_0 = -\frac{b}{2a}$$

Gli errori su tali parametri possono essere stimati considerando che, per il χ^2 a 1 grado di libertà, il loro intervallo di confidenza è rappresentato dall'insieme di valori intorno al minimo tali per cui risulti:

$$\chi^2 = \chi_{min}^2 + 1$$

Operativamente, l'incertezza associata ai parametri è stimata come:

$$\sigma = \frac{|x_1 - x_2|}{2} \quad (18)$$

dove x_1 e x_2 sono le soluzioni dell'equazione:

$$\chi_{min}^2 + 1 = ax^2 + bx + c$$

In tabella 10 sono riportate le stime di δ e ω_0 ottenute con questo procedimento, e le stime dei parametri ω_d , Q , L e R_{tot} che seguono direttamente dalle equazioni 8, 10, 9, 11.

δ [kHz]	20.3 ± 0.1
ω_0 [kHz]	573.39 ± 0.09
ω_d [kHz]	573.03 ± 0.09
Q	14.11 ± 0.07
L [mH]	3.27 ± 0.07
R_{tot} [Ω]	133 ± 3

Tabella 10. Stime dei parametri del circuito ottenute attraverso il metodo di minimizzazione del χ^2 su δ e ω_0 .

I valori di δ e ω_0 stimati con il fit dell'intera forma d'onda (16) dovrebbero coincidere esattamente con i punti critici delle curve del χ^2 e così avviene entro certi limiti. Come si vede dall'immagine 12, la curva non coincide perfettamente con l'andamento dei dati e questo potrebbe essere causato dall'asimmetria della curva nell'intorno del minimo, ovvero dal fatto che in questo intorno la curva non possa essere considerata con buona approssimazione una parabola, tuttavia la corrispondente stima di δ risulta compatibile con il valore ottenuto mediante fit globale ($r=0.9$).

5. Analisi nel dominio della frequenza

Utilizzando il circuito in figura 2 e 3 abbiamo stimato gli stessi parametri della sezione precedente

osservando la risposta, sia ai capi di R che ai capi di C , in funzione della frequenza dell'onda in ingresso; questa è legata alla pulsazione ω secondo:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (19)$$

5.1 Stime attraverso misure puntuali

5.1.1 Ai capi di R

Sapendo che ai capi di R la tensione in uscita è massima alla frequenza di risonanza, abbiamo variato la frequenza dell'onda in ingresso fino a ritrovare questa condizione, ottenendo così:

$$f_{0,amp} = (86.4 \pm 0.2)kHz$$

dove l'incertezza associata deriva da una distribuzione triangolare applicata all'intervallo le cui frequenze non permettevano di distinguere variazioni del potenziale attorno al suo valore massimo.

Alla frequenza di risonanza la risposta ai capi della resistenza ha sfasamento nullo rispetto alla forzante e abbiamo ottenuto questa condizione per:

$$f_{0,sfas} = (86.1 \pm 0.2)kHz$$

Dette f_1 e f_2 , chiamati limiti di banda, le frequenze della forzante per le quali la funzione di trasferimento $A(\omega) := \frac{V_{out}}{V_{in}}$ è ridotta di un fattore $\sqrt{2}$ rispetto al suo valore massimo A_0 , variando f dal generatore e confrontando di volta in volta il valore della funzione di trasferimento con A_0 abbiamo ottenuto:

$$f_1 = (81.6 \pm 0.2)kHz$$

$$f_2 = (92.7 \pm 0.2)kHz$$

dunque grazie alla relazione:

$$f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2} \quad (20)$$

possiamo fornire una nuova stima della frequenza di risonanza:

$$f_0 = (86.97 \pm 0.14)kHz$$

con errore dato dalla propagazione:

$$\sigma_{f_0} = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{f_1 f_2}} \cdot \frac{\sigma_f}{2} \quad (21)$$

Il valore di f_0 così ottenuto non è compatibile con $f_{0,amp}$ e $f_{0,sfas}$, e quindi per avere una prima stima di L e Q abbiamo deciso di utilizzare la media ponderata di queste ultime due, e grazie alle seguenti formule:

$$L = \frac{1}{C \cdot (2\pi f_0)^2} \quad (22)$$

$$Q = \frac{f_0}{(f_2 - f_1)} \quad (23)$$

Abbiamo ottenuto le stime di seguito riportate:

$$f_0 = (86.3 \pm 0.1)kHz$$

$$L = (3.65 \pm 0.06)mH$$

$$Q = 7.8 \pm 0.2$$

5.2 Interpolazione con curve teoriche

Il valore di Q appena riportato non è confrontabile con quello stimato nelle sezioni precedenti in quanto per l'analisi in frequenza abbiamo utilizzato un circuito con una resistenza differente. Per questo motivo abbiamo raccolto i quattro set di dati visibili in tabella 17, 16, 18 e 19 in cui sono riportati i potenziali in ingresso e in uscita, ai capi di R e di C , in funzione di f in un intorno della frequenza di risonanza trovata con le misure puntuali.

Le curve teoriche che ipotizziamo rappresentino i nostri dati sono le seguenti:

- Funzione di trasferimento ai capi del condensatore (dati denominati FCA):

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega}{\omega_0})^2 + (\frac{\omega}{\omega_0 Q})^2}} \quad (24)$$

- Funzione di trasferimento ai capi della resistenza (dati denominati FRA):

$$A(\omega) = \frac{H}{\sqrt{1 + [Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})]^2}} \quad (25)$$

- Sfasamento angolare ai capi del condensatore (dati denominati FCT):

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}{\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \right) + \frac{\pi}{2} \quad (26)$$

- Sfasamento angolare ai capi della resistenza (dati denominati FRT):

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}{\frac{\omega}{\omega_0 Q}} \right) \quad (27)$$

Le interpolazioni con queste curve sono visibili nei grafici 13, 14, 15 e 16.

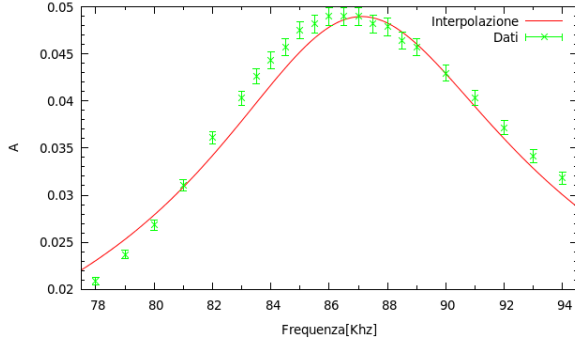


Figura 13. Interpolazione dati FRA, ampiezza segnale in funzione della frequenza.

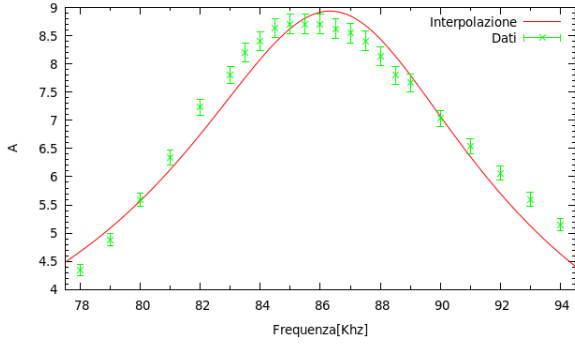


Figura 14. Interpolazione dati FCA, ampiezza segnale in funzione della frequenza.

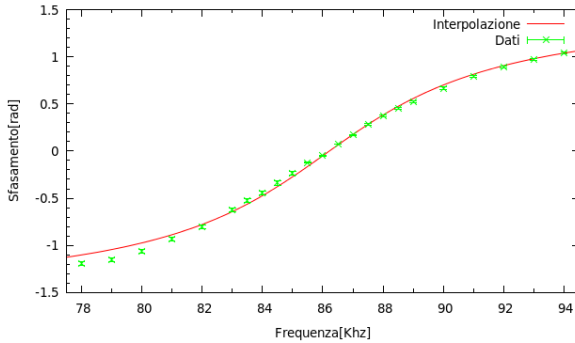


Figura 15. Interpolazione dati FRT, sfasamento in funzione della frequenza.

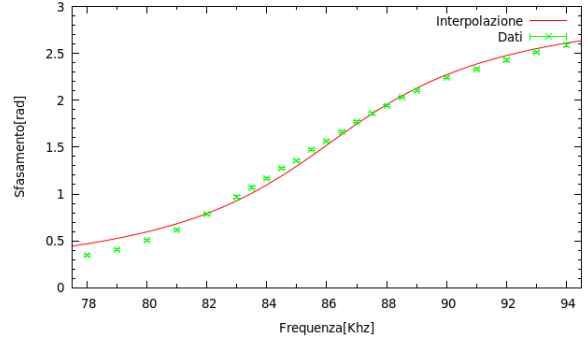


Figura 16. Interpolazione dati FCT, sfasamento in funzione della frequenza.

La funzione di trasferimento è definita come:

$$A(\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)}$$

e l'incertezza sui dati è stata stimata come:

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{0.04V/div}{V_{in}}\right)^2 + \left(\frac{0.04V/div}{V_{out}}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2}$$

Dove abbiamo aggiunto un errore di calibrazione a causa del fatto che durante la presa dati usiamo due sonde e due canali diversi per V_{in} e V_{out} ; in questo caso $k = 1$ e $\sigma_k = 0.012$.

Per quanto riguarda lo sfasamento $\Delta\phi$ invece, avendo a disposizione sia la frequenza sia lo sfasamento temporale Δt , possiamo utilizzare la seguente formula:

$$\Delta\phi = 2\pi f \Delta t \quad (28)$$

con incertezza $\sigma_{\Delta\phi} = 2\pi f \cdot \sigma_{\Delta t}$ dove abbiamo assunto l'incertezza su f completamente trascurabile rispetto a quella su Δt .

Interpolando otteniamo le seguenti stime per la frequenza di risonanza f_0 , la pulsazione di risonanza ω_0 e il fattore Q :

	Q	σ_Q	ω_0 [KHz]	σ_{ω_0} [KHz]	f_0 [KHz]	σ_{f_0} [KHz]
FCA	8.9	0.1	543.2	0.8	86.45	0.12
FRA	8.1	0.2	546.5	0.7	86.97	0.11
FCT	9.7	0.3	541.3	0.5	86.15	0.08
FRT	9.9	0.2	541.8	0.7	86.22	0.06

Tabella 11. Dati dell'interpolazione con Q , ω_0 e f_0

Nella tabella 11 per il caso FRA è riportata l'interpolazione con il parametro H impostato in modo da eseguire un fit con soli due parametri, il valore di H è stato fissato a $H = 0.04897$ che risulta

essere il valore del massimo della funzione di trasferimento, allo scopo di poter effettuare un fit con solo due parametri liberi. Dai dati ricavati grazie ai fit osserviamo che:

- i set FCT e FRT restituiscono parametri tra loro perfettamente compatibili; inoltre il risultato ottenuto per f_0 è compatibile con quello ottenuto con le misure puntuali in ampiezza e in frequenza;
- nessun'altra coppia di set di dati produce stime di parametri compatibili.

Queste considerazioni, ci lasciano ipotizzare un possibile problema con i dati riguardanti le funzioni di trasferimento. Anche solo osservando i grafici in figura 13 e 14 si vede come la curva teorica non rappresenta bene i dati; in un intorno della frequenza di risonanza f_0 i nostri dati hanno un andamento troppo asimmetrico rispetto a quanto ci saremmo aspettati e questo invece non avviene per lo sfasamento, inducendoci così a considerare i set FRT e FCT come più rappresentativi dell'intero fenomeno.

Tenendo conto delle considerazioni precedentemente fatte possiamo fornire un'unica stima di Q , f_0 e ω_0 facendo una media pesata solo tra i valori ottenuti con i set di dati FRT e FCT:

$$\begin{aligned} Q &= (9.8 \pm 0.2) \\ f_0 &= (86.19 \pm 0.05) \text{ kHz} \\ \omega_0 &= (541.4 \pm 0.4) \text{ kHz} \end{aligned}$$

Con le formule già utilizzate in precedenza otteniamo le altre grandezze caratteristiche del circuito:

$$\begin{aligned} L &= (3.68 \pm 0.06) \text{ mH} \\ \Delta f &= (8.8 \pm 0.2) \text{ kHz} \end{aligned}$$

Nel caso di misure ai capi del condensatore il valore massimo non si ha alla frequenza di risonanza ma a valori più bassi e possiamo calcolare la pulsazione alla quale corrisponde il massimo con la seguente formula:

$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (29)$$

con errore:

$$\sigma_\omega = \sqrt{\left(\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \sigma_{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0 \sigma_Q}{2Q^4 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}\right)^2} \quad (30)$$

così facendo si otteniamo un valore di:

$$\omega_{max} = (541.5 \pm 0.8) \text{ kHz}$$

Durante il fenomeno della risonanza, un circuito RLC ideale ha una impedenza puramente resistiva; questo fatto ci fornisce un metodo per la stima della resistenza totale.

Il potenziale del generatore in ingresso non è costante proprio a causa della variazione dell'impedenza del circuito in funzione della frequenza, in particolare esso dovrebbe seguire una funzione del tipo:

$$V_{in} = V_{0,in} \cdot \left(1 - \frac{k}{\sqrt{1 + [Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})]^2}}\right) \quad (31)$$

dove $k = \frac{R_G}{R_{tot}}$.

Nel nostro caso abbiamo fissato i parametri Q e ω_0 appena stimati e $V_{0,in} = 16.1 \text{ V}$, possiamo interpolare i dati (V_{in}, f) delle tabelle 17 e 19 in funzione solo di k . Il grafico in figura 17 mostra tale procedimento per quanto riguarda il set di dati FRA.

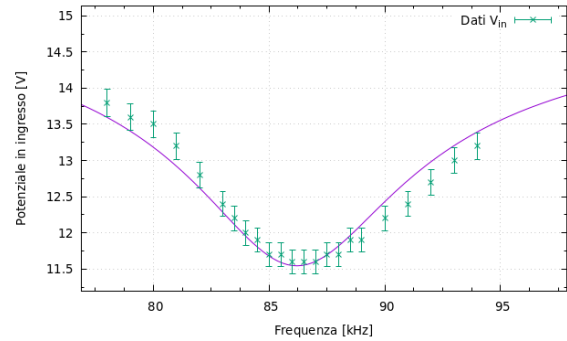


Figura 17. Interpolazione del potenziale in ingresso in funzione della frequenza.

Le interpolazioni forniscono come risultati:

$$k_{FRA} = 0.25 \pm 0.01$$

$$k_{FCA} = 0.24 \pm 0.01$$

Grazie al fatto che sono compatibili possiamo ricavare una media pesata ottenendo:

$$k = 0.244 \pm 0.006$$

A questo punto possiamo stimare la resistenza totale del circuito come:

$$R_{tot} = \frac{R_G}{k} \quad (32)$$

$$\sigma_{R_{tot}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{R_G}}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_k \cdot R_G}{k^2}\right)^2} \quad (33)$$

dunque risulta:

$$R_{tot} = (193 \pm 13) \Omega$$

che oltre ad essere una stima poco precisa (con un errore percentuale del 7%), non è nemmeno compatibile con quella teorica calcolata a priori:

$$R_{tot,th} = (134 \pm 5) \Omega$$

Un valore così elevato di resistenza non è plausibile per il nostro circuito.

Tale stima di R_{tot} dipende in maniera inversamente proporzionale da k , tuttavia quest'ultimo è molto sensibile ad una variazione dei parametri fissati Q e ω_0 ; il fatto che questi siano diversi a seconda dei metodi applicati per la loro determinazione non ci permette di averne una stima accurata e di conseguenza quella di R_{tot} lo è ancora meno.

we

6. Conclusioni

Di seguito riportiamo le stime ottenute nella sezione di analisi, divise per circuito e metodo.

	ω_0 [10^3rad/s]	L [mH]	Q	R_{tot} [Ω]
Manuali	579.3 ± 0.7	3.19 ± 0.08	15 ± 0.3	123 ± 4
Fit	572.9 ± 0.2	3.26 ± 0.01	14.2 ± 0.1	131 ± 1
Studio χ^2	573.39 ± 0.09	3.27 ± 0.07	14.11 ± 0.07	133 ± 3

Tabella 12. RLC nel dominio del tempo (analisi A).

	ω_0 [10^3rad/s]	L [mH]	Q	Δf [kHz]
Puntuali	541.9 ± 0.9	3.65 ± 0.06	7.8 ± 0.2	11.1 ± 0.3
Fit	541.4 ± 0.4	3.68 ± 0.06	9.8 ± 0.2	8.8 ± 0.2

Tabella 13. RLC nel dominio della frequenza (analisi B).

Vediamo che si ottengono dei risultati diversi per le due analisi a causa del fatto che per fare l'analisi del circuito RLC nel dominio di frequenza abbiamo aggiunto una resistenza, quindi non tutte le stime sono tra loro confrontabili. Noi dovremmo però avere i valori di L compatibili tra le due analisi, in quanto abbiamo usato uguali induttanze tuttavia questo non avviene.

L'incompatibilità di ω_0 tra le due analisi può provenire sostanzialmente da:

- qualche problema durante la presa dati in laboratorio;
- un'analisi dati in qualche modo non corretta.

Se proviamo a calcolare i valori teorici di ω_0 con la formula:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

per $C_1 = 930 \text{pF}$ e $C_2 = 920 \text{pF}$, otteniamo che ne consegue una variazione: $\Delta\omega_0 = \omega_0^{(2)} - \omega_0^{(1)} = 3 \text{kHz}$, ovvero per una variazione della capacità di 10pF la pulsazione ω_0 cambia di ben 3kHz e con essa anche la nostra stima dell'induttanza L . Vediamo quindi che, per esempio, se la resistenza di 10Ω che abbiamo aggiunto nella seconda analisi avesse avuto una capacità dell'ordine di 100pF , questo basterebbe a spiegare la discrepanza delle nostre stime dell'oscillazione. E' del tutto plausibile quindi, che l'incompatibilità tra le nostre stime di ω_0 e di conseguenza anche di L sia dovuta ad eventuali capacità parassite all'interno del circuito.

Per ogni parametro considerato abbiamo ricavato varie stime con metodi diversi, ed essi sono quasi sempre incompatibili tra loro. Questo può essere dovuto da una sottostima degli errori ed eventualmente anche dalla presenza di diversi errori sistematici in alcune misure.

Un altro problema riguarda capire la causa di un fit con le curve di risonanza della funzione di trasferimento così insoddisfacente, a differenza di quanto accade con l'analisi degli sfasamenti. Se aumentiamo il valore del parametro Q , nel caso della funzione di trasferimento, fino a quello dello stimato con il fit dello sfasamento, la forma della curva risulta migliore ovvero la larghezza e l'andamento fuori da un intorno abbastanza grande di ω_0 risulta più compatibile con quello dei dati, tuttavia la curva subisce una traslazione verticale. Forse se avessimo preso più dati distanti dalla risonanza il fit sarebbe risultato migliore, è possibile che ci sia qualche errore nelle nostre misure, che però non riusciamo a quantificare.

7. Appendice

Riferimenti bibliografici

- [1] A. Longhin, A. Patelli, *Note di sperimentazioni di fisica 2*, 2022

n	t_0 [μs]	σ_{t_0} [μs]
2	8.4	0.4
2.5	13.6	0.4
3	19.2	0.4
3.5	24.8	0.4
4	30.0	0.4
4.5	35.6	0.4
5	40.8	0.4
5.5	46.4	0.4
6	51.6	0.4
6.5	57.2	0.4
7	62.4	0.4
7.5	68.0	0.4
8	73.6	0.4

Tabella 14. Tempi di azzeramento del potenziale.

n	t_{max}^{min} [μs]	$\sigma_{t_{max}^{min}}$ [μs]
1.5	5.6	0.4
2	10.8	0.4
2.5	16.4	0.4
3	21.6	0.4
3.5	27.2	0.4
4	32.8	0.4
4.5	38	0.4
5	43.6	0.4
5.5	48.8	0.4
6	54.4	0.4
6.5	60	0.4
7	65.2	0.4
7.5	70.4	0.4
8	76	0.4

Tabella 15. Tempi di massimo e minimo del potenziale in uscita.

f [kHz]	Δt [μs]	$\sigma_{\Delta t}$ [μs]
78.0	2.44	0.06
79.0	2.32	0.06
80.0	2.12	0.06
81.0	1.84	0.06
82.0	1.56	0.06
83.0	1.20	0.06
83.5	1.00	0.06
84.0	0.84	0.06
84.5	0.64	0.06
85.0	0.44	0.06
85.5	0.23	0.01
86.0	0.093	0.001
86.5	0.136	0.006
87.0	0.312	0.006
87.5	0.52	0.03
88.0	0.68	0.03
88.5	0.82	0.03
89.0	0.94	0.03
90.0	1.18	0.03
91.0	1.38	0.03
92.0	1.54	0.03
93.0	1.66	0.03
94.0	1.76	0.03

Tabella 16. Periodo di oscillazione del potenziale in uscita al variare della frequenza dell'onda in ingresso. Campionamento ai capi di R.

f [kHz]	V_{in}	$\sigma_{V_{in}}$	V_{out}	$\sigma_{V_{out}}$
78.0	13.8	0.4	0.288	0.009
79.0	13.6	0.4	0.32	0.01
80.0	13.5	0.4	0.36	0.01
81.0	13.2	0.4	0.41	0.01
82.0	12.8	0.4	0.46	0.01
83.0	12.4	0.4	0.50	0.02
83.5	12.2	0.4	0.52	0.02
84.0	12.0	0.4	0.53	0.02
84.5	11.9	0.4	0.54	0.02
85.0	11.7	0.4	0.56	0.02
85.5	11.7	0.4	0.56	0.02
86.0	11.6	0.4	0.57	0.02
86.5	11.6	0.4	0.57	0.02
87.0	11.6	0.4	0.57	0.02
87.5	11.7	0.4	0.56	0.02
88.0	11.7	0.4	0.56	0.02
88.5	11.9	0.4	0.55	0.02
89.0	11.9	0.4	0.54	0.02
90.0	12.2	0.4	0.52	0.02
91.0	12.4	0.4	0.50	0.02
92.0	12.7	0.4	0.47	0.01
93.0	13.0	0.4	0.44	0.01
94.0	13.2	0.4	0.42	0.01

Tabella 17. Potenziale in ingresso e ai capi di R al variare della frequenza del segnale.

f [kHz]	Δt [μs]	$\sigma_{\Delta t}$ [μs]
78.0	0.70	0.03
79.0	0.82	0.03
80.0	1.00	0.03
81.0	1.22	0.03
82.0	1.52	0.03
83.0	1.86	0.03
83.5	2.04	0.03
84.0	2.20	0.03
84.5	2.40	0.03
85.0	2.54	0.03
85.5	2.74	0.03
86.0	2.90	0.03
86.5	3.06	0.03
87.0	3.24	0.03
87.5	3.38	0.03
88.0	3.52	0.03
88.5	3.66	0.03
89.0	3.76	0.03
90.0	3.96	0.03
91.0	4.08	0.03
92.0	4.20	0.03
93.0	4.30	0.03
94.0	4.38	0.03

Tabella 18. Periodo di oscillazione del potenziale in uscita al variare della frequenza dell'onda in ingresso. Campionamento ai capi di C.

f [kHz]	V_{in}	$\sigma_{V_{in}}$	V_{out}	$\sigma_{V_{out}}$
78.0	13.8	0.4	60	2
79.0	13.6	0.4	66	2
80.0	13.3	0.4	74	2
81.0	13.0	0.4	82	3
82.0	12.5	0.4	90	3
83.0	12.2	0.4	95	3
83.5	12.0	0.4	98	3
84.0	11.9	0.4	100	3
84.5	11.7	0.4	101	3
85.0	11.6	0.4	101	3
85.5	11.6	0.4	101	3
86.0	11.6	0.4	101	3
86.5	11.6	0.4	100	3
87.0	11.7	0.4	100	3
87.5	11.7	0.4	98	3
88.0	11.9	0.4	97	3
88.5	12.0	0.4	94	3
89.0	12.0	0.4	92	3
90.0	12.4	0.4	87	3
91.0	12.6	0.4	82	3
92.0	12.8	0.4	78	2
93.0	13.0	0.4	73	2
94.0	13.2	0.4	68	2

Tabella 19. Potenziale in ingresso e ai capi di C al variare della frequenza del segnale.