

Gruppo 12

Masiero Tommaso - Matricola 2015778 - Email tommaso.masiero@studenti.unipd.it

Marchesini Davide - Matricola 2009840 - Email davide.marchesini@studenti.unipd.it

Toffoli Marco - Matricola 2000397 - Email marco.toffoli.2@studenti.unipd.it

Travali Davide - Matricola 2008630 - Email davide.travali@studenti.unipd.it

Data consegna relazione: 06/01/2021

Valutazione dell'andamento di misure ripetute relative al periodo del pendolo

1 Obiettivo dell'esperienza

L'obiettivo di questa esperienza era misurare il valore statisticamente più probabile del periodo di un pendolo attraverso l'analisi e la discussione di misure ripetute.

Per fare ciò il nostro gruppo di laboratorio è stato diviso in due sottogruppi, ognuno dei quali ha raccolto circa 100 misure sia del periodo singolo che del periodo quadruplo del proprio pendolo. Lo strumento consisteva in un'asta di metallo con due masse nell'estremità finale, una fissa e una mobile e, grazie ad un coltello posto nell'estremità superiore, era libero di oscillare. Abbiamo misurato il periodo con un cronometro digitale.

I due sottogruppi hanno utilizzato due metodi leggermente differenti per la raccolta dei dati, in modo da osservare se ciò influisse in maniera non trascurabile sul risultato finale. I due metodi verranno discussi successivamente.

Dopo un'analisi statistica dei dati raccolti, siamo stati in grado di fornire il valore del periodo di un pendolo con la sua relativa incertezza.

2 Descrizione dell'apparato strumentale e della procedura di misura

DESCRIZIONE DEGLI STRUMENTI

Gli strumenti che abbiamo usato in laboratorio per effettuare le misure sono:

- Pendolo (a due masse)
- Cronometro ($R=0.0001s$; $S=10000\ s^{-1}$)

[Tra parentesi sono riportate la risoluzione e la sensibilità massime del cronometro]

Il pendolo utilizzato è composto da due dischi, uno mobile ed uno fisso, di massa a noi non conosciuta. Queste due masse sono montate su un'asta che è collegata ad un supporto di metallo attaccato al muro, in modo da permetterne l'oscillazione. Il collegamento tra l'asta e il muro è la parte più importante del pendolo e consiste in un coltello affilato adeguatamente che oscilla su sé stesso, collegato con l'asta tramite una giunzione mobile (vedi figura 1), sia verticalmente che orizzontalmente.

Durante l'esperienza era importante assicurarsi che l'oscillazione avvenisse con un angolo minore di circa 15 gradi rispetto all'asse verticale, per farlo abbiamo utilizzato il regolo fissato al muro, di cui era dotato lo strumento. Il cronometro digitale che abbiamo usato, stampava in output i risultati della singola misurazione (in secondi). Questo strumento ha un'accuratezza e una prontezza molto elevate, infatti fornisce il valore della misura in un tempo minimo. Dalla descrizione del pendolo si può capire che nonostante esso sia stato progettato e costruito nel miglior modo possibile per poter mantenerne costante il periodo, questo risulta impossibile a causa del rallentamento dovuto all'usura del coltello e ad altri fattori, e ci aspettavamo di osservarne gli effetti sui dati raccolti.

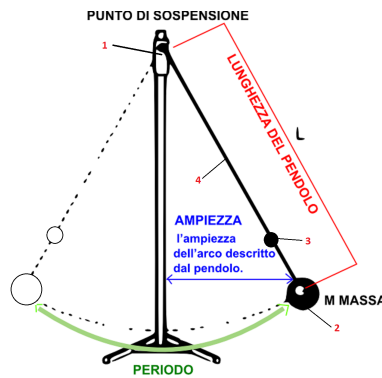


Figura 1: Disegno del pendolo a due masse

1	Coltello
2	Massa fissa
3	Massa mobile
4	Asta graduata (R= 1mm)

Tabella 1: Legenda

PROCEDURA DI MISURA

La procedura di misurazione era piuttosto semplice, ma ha richiesto un buon livello di concentrazione durante l'esperienza per ottenere un buon risultato. Ricordiamo che l'obiettivo, sinteticamente, era raccogliere i dati riguardo il periodo di un pendolo e stimarne il valore migliore. Per fare ciò bisognava in qualche modo riuscire a fermare il cronometro ad ogni oscillazione, e per facilitarne il conteggio abbiamo scelto di contare il numero di volte in cui l'asta assumeva la posizione centrale (questo avviene 2 volte per ogni oscillazione compiuta). Per motivi sanitari durante l'esperienza ci siamo divisi

in due sottogruppi da due persone ciascuno. La suddivisione delle mansioni all'interno di ogni sottogruppo era la seguente: un operatore aveva il compito di contare il numero di oscillazioni compiute dal pendolo e ad ognuna di esse (è stata effettuata anche una misura fermando il tempo ogni 4 oscillazioni) fermare il cronometro, l'altro operatore invece annotava su un foglio digitale il valore della misura. Come già detto in precedenza una condizione indispensabile per poter ridurre eventuali errori, nell'intervallo di tempo impiegato per la presa dati, era far partire l'oscillazione con un angolo piccolo (in modo da poter approssimare lo strumento ad un pendolo semplice). Con lo scopo di capire quanto l'angolo scelto avrebbe inciso nella misura abbiamo, quindi, deciso che un gruppo avrebbe fatto partire l'asta ad una distanza di (3 ± 0.05) cm e l'altro a (5 ± 0.05) cm dal centro.

Ci sono diversi fattori che potrebbero aver influenzato le misure, ora ci soffermeremo su ciò che ha avuto un maggior peso nel risultato delle misurazioni. Quello che ha influenzato in modo significativo la misura è l'abilità dell'operatore nel percepire con accuratezza quando terminava un'oscillazione e nel fermare il cronometro in quell'istante. Scientificamente si è calcolato che una persona normale ha tempi di reazione minimi di 20 centesimi di secondo, ciò significa che da quando l'operatore pensa che sia terminata un'oscillazione ci impiega circa 0.2 secondi per fermare il tempo. Da questo dato si riesce facilmente ad intuire quanto sia rilevante il tempo di reazione della persona sull'accuratezza della misura. Questo argomento verrà approfondito successivamente quindi per adesso ci limitiamo a dire che gli strumenti utilizzati per questa esperienza sono poco sensibili a qualsiasi fattore esterno.

Prima abbiamo mostrato che la risoluzione massima del cronometro è di 0.0001s, noi tuttavia, abbiamo usato una risoluzione diversa e questa scelta è stata ampiamente discussa all'interno del gruppo. Nel cronometro era possibile scegliere quattro differenti valori, andiamo con ordine e discutiamone i vantaggi e gli svantaggi di ognuno, per poi estrapolare le conclusioni e i motivi della nostra scelta.

- 0.1 s: Se avessimo scelto questo valore e avessimo eseguito le misure, avremmo ottenuto una distribuzione di probabilità uniforme in quanto la risoluzione scelta non avrebbe consentito di apprezzare la distribuzione casuale delle misure attorno al valore centrale (media). Ogni singola misura inoltre, avrebbe avuto molto probabilmente lo stesso valore abbassandone notevolmente l'accuratezza, e di conseguenza la media avrebbe perso significato.
- 0.01 s: Se avessimo scelto questa risoluzione probabilmente saremmo riusciti a cogliere l'andamento casuale delle misure attorno alla media, ottenendo così una distribuzione Gaussiana.
- 0.001 s: Questa sembra essere una scelta migliore di quella precedente, in quanto anch'essa permetterebbe di osservare una distribuzione gaussiana, anzi, grazie a una cifra saremmo stati in grado di ottenere una curva più regolare.
- 0.0001 s: Con questa scelta le cose non cambierebbero molto rispetto al caso precedente, in quanto non saremmo stati in grado di controllare la quarta cifra decimale, essendo la misura basata sulla risoluzione dell'occhio umano. Di conseguenza utilizzare questa risoluzione ci avrebbe portato ad appesantire, per quanto riguarda il numero di cifre da scrivere, le misure senza ottenere un reale guadagno.

Da quanto riportato qui sopra si possono intuire le motivazioni della nostra scelta ($R=0.001$ s), importante però è precisare che è sempre preferibile prendere le misure con una cifra significativa in più per poi, nel caso fosse necessario, approssimare tutto il set di dati.

3 Regolazione del sistema di misurazione

Grazie all'utilizzo di due metodi differenti, nonché di due pendoli separati, è possibile apprezzare l'andamento dei dati riguardanti il periodo per stimare eventuali cause di incertezza, per poi scegliere la serie migliore e stimare il valore medio delle oscillazioni. Durante la presa dati si è venuti inevitabilmente a contatto con errori casuali e anche possibili errori sistematici, che possono anche derivare da fattori esterni. I primi tendono a ridursi con l'aumentare delle misure, perciò effettuando più misurazioni si è sicuri di migliorare la precisione del risultato, arrivando ad una miglior stima di esso. Nel nostro caso, analizzando i due metodi utilizzati nell'esperienza è stato possibile trarre alcune ipotesi sulle possibili fonti di incertezza. Alcune tra queste incertezze si possono successivamente escludere dopo un'analisi statistica sui dati ottenuti e si possono osservare grazie ai grafici. In particolare, alcuni dei fattori esterni che potevano rendere la presa dati meno precisa potevano essere l'aria, che con la sua viscosità imprime resistenza al moto oscillatorio causando rallentamenti e modificandone di conseguenza il periodo, la forza di Archimede, che agisce su ogni corpo immerso in un fluido imprimendogli una spinta verso l'alto pari al peso spostato.

Dopo l'analisi dati si può procedere al calcolo dell'incertezza per poter affermare la bontà della stima e capire se questi errori hanno inciso su essa. In particolare, gli errori sistematici possono essere dovuti ad esempio allo strumento in questione. Avendo utilizzato due diversi pendoli ed effettuato circa lo stesso numero di misure ciascuno, si è in grado di notare, osservando l'andamento dei dati, il possibile effetto di questi errori che altrimenti sarebbe risultato nascosto. Essendo legati alle caratteristiche del singolo strumento infatti, risulteranno osservabili una volta confrontate le serie di dati.

Alcuni errori sistematici che si sarebbero potuti presentare sono riconducibili ad una mal taratura del regolo del pendolo, che può portare l'utilizzatore a sbagliare l'angolo di partenza e a selezionarne uno non più trascurabile per la misura del periodo del pendolo.

Si è dovuto inoltre considerare l'effetto di parallasse che coinvolge lo sperimentatore nella presa dell'angolo. Infatti, se l'operatore non fosse risultato perfettamente allineato con il piano ortogonale alla scala e passante per l'indice individuato, si sarebbe rischiato di non rientrare nelle piccole oscillazioni e di conseguenza nelle condizioni per poter considerare il pendolo semplice.

La scelta di utilizzare due metodi di misura differenti per effettuare le stesse misurazioni permette quindi di confrontare i dati tra loro per scegliere quelli affetti dalla minor incertezza possibile, eliminando eventuali errori sistematici di uno dei due strumenti. Inoltre, osservando l'andamento lineare dei dati, si può capire se il sistema è stato perturbato significativamente nel tempo da fattori esterni. Durante l'analisi statistica si dimostra che alla misura è associata una determinata incertezza, derivante da tutti i fattori, sia interni che esterni, che non permettono di raggiungere una misura accurata.

Grazie al calcolo dell'incertezza ed all'utilizzo di due metodi di misura differenti, è possibile arrivare a stimare il periodo di un'oscillazione con un determinato margine di confidenza.

Durante la presa dati si sono utilizzati dunque due metodi differenti, prendendo diversi

angoli per ciascuna serie e diversi punti di riferimento per l'oscillazione. Nel nostro caso la distanza dal centro dell'oscillazione per il pendolo numero 1 risultava (3 ± 0.05) cm mentre per il pendolo numero 2 risultava (5 ± 0.05) cm, distanze abbastanza piccole da permettere di considerare lo strumento come ideale. Grazie ai grafici si può notare infatti se la misura del periodo nel tempo risulta simile tra i due pendoli, quindi si può capire se l'angolo scelto ha inciso significativamente sul calcolo del periodo, e se, inoltre, uno degli strumenti presentava errori sistematici osservabili. Questo permette di definire un grado di riproducibilità tra le due misure, che pone in relazione i due andamenti coi diversi metodi. Il grado di riproducibilità si può osservare confrontando i dati delle varie serie, arrivando a paragonare i due valori del misurando ottenuti nelle diverse condizioni. Inoltre, ciascuna delle due serie all'interno dello stesso sottogruppo è stata effettuata dagli stessi operatori, nelle stesse condizioni e con lo stesso metodo di misurazione, quindi si può arrivare a parlare di ripetibilità della singola serie. Osservando i grafici, infine, si può notare se l'andamento è rimasto costante nel tempo e se quindi, di conseguenza, possiamo affermare se il sistema in questione possa essere stabile, almeno per il numero di misure effettuate.

4 Presentazione dei dati, analisi e presentazione dei risultati

Come già precedentemente discusso, abbiamo ottenuto quattro set di dati: per ciascuno dei due pendoli abbiamo misurato il tempo impiegato per compiere un'oscillazione e il tempo impiegato per compierne quattro. Entrambe queste misure sono state ripetute (senza interrompere l'oscillazione) un centinaio di volte.

Usando un programma in C++ ed utilizzando il metodo di reindirizzamento dello istream (dai file .txt che avevamo scritto in laboratorio) abbiamo calcolato in primo luogo la media e la deviazione standard e successivamente il massimo e il minimo di ogni set di dati, che sono risultati utili per successive considerazioni. Nella tabella 2 sono riportate la media aritmetica, la mediana, la deviazione standard, la deviazione standard della media, il minimo, il massimo e il numero di dati per ogni set di misure raccolte. Osservando i massimi e i minimi da ciascun set si può affermare che nessun dato si trova al di fuori di tre deviazioni standard: per questo motivo, utilizzando quella che viene chiamata regola dei tre sigma, abbiamo deciso che non fossero presenti degli outliers e di conseguenza nessun dato è stato scartato. Si può inoltre osservare come i dati del secondo pendolo si distribuiscano in un intervallo temporale più ristretto: ciò è dovuto alla diversa precisione degli operatori e all'utilizzo di due pendoli e due procedure differenti.

Misure Periodo	Media [s]	Mediana [s]	σ_x [s]	$\sigma_{\bar{x}}$ [s]	Max e Min [s]	n° dati
Pendolo 1 periodo singolo	2.017	2.026	0.102	0.010	2.225-1.768	105
Pendolo 2 periodo singolo	2.047	2.047	0.036	0.004	2.127-1.960	104
Pendolo 1 periodo quadruplo	8.124	8.126	0.099	0.010	8.359-7.788	100
Pendolo 2 periodo quadruplo	8.196	8.194	0.046	0.005	8.297-8.079	95

Tabella 2: Tabella che mostra media, mediana, deviazione standard, deviazione standard dalla media, massimo e minimo per ogni set di dati. Tra parentesi quadre sono riportate le unità di misura di queste grandezze

La media si riferisce alla media aritmetica ed è stata calcolata come:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

La deviazione standard campionaria come:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

La deviazione standard della media come:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

Dove:

N è il numeo di dati;

\bar{x} è il valore medio;

$\sigma_{\bar{x}}$ è la deviazione standard dalla media;

σ_x è la deviazione standard campionaria.

Trattandosi di un fenomeno fisico ci aspettavamo che i dati si distribuissero attorno ad un valore centrale con un andamento di tipo gaussiano. Questo perché , a meno di errori sistematici, la misurazione aveva subito errori casuali dovuti alla natura del metodo stesso. Abbiamo proceduto quindi con il calcolo delle frequenze dei diversi periodi. Per fare ciò abbiamo sviluppato due programmi in C++, uno che raggruppasse i dati in bin e uno che simulasse una funzione gaussiana da sovrapporre ai nostri dati. Abbiamo individuato la giusta larghezza dei bin dapprima utilizzando delle regole numeriche (metodo della radice quadrata, regola di Sturges, regola di Scott e regola di Rice) per avere dei riferimenti, in particolare la radice quadrata, poi li abbiamo variati in modo da ottenere la distribuzione che potesse offrire il maggior numero di informazioni. Bisogna affermare che le regole precedentemente dette definiscono il numero di bin ma per sviluppare i grafici era neccessaria la loro larghezza.

Utilizzando Gnuplot abbiamo costruito un istogramma di frequenza. Per trovare la Gaussiana che meglio approssimava la distribuzione dei nostri dati abbiamo utilizzato la formula:

$$f(x) = \frac{Nw}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Dove:

w è la larghezza del bin;

N è il numero totale di misure;

x è la ascissa nel quale volevamo calcolare quel valore che risulta il centro del bin;

μ è la media calcolata precedentemente;

σ è la deviazione standard del campione considerato.

La precedente tabella è risultata particolarmente utile per lo sviluppo dei grafici.

Infatti, sapendo che la possibile curva di distribuzione poteva essere di tipo normale ci sarebbero bastati media e deviazione standard per simulare la gaussiana più probabile.

In figura 2 e in figura 3 si può osservare come la distribuzione dei dati abbia effettivamente l'andamento che ci aspettavamo.

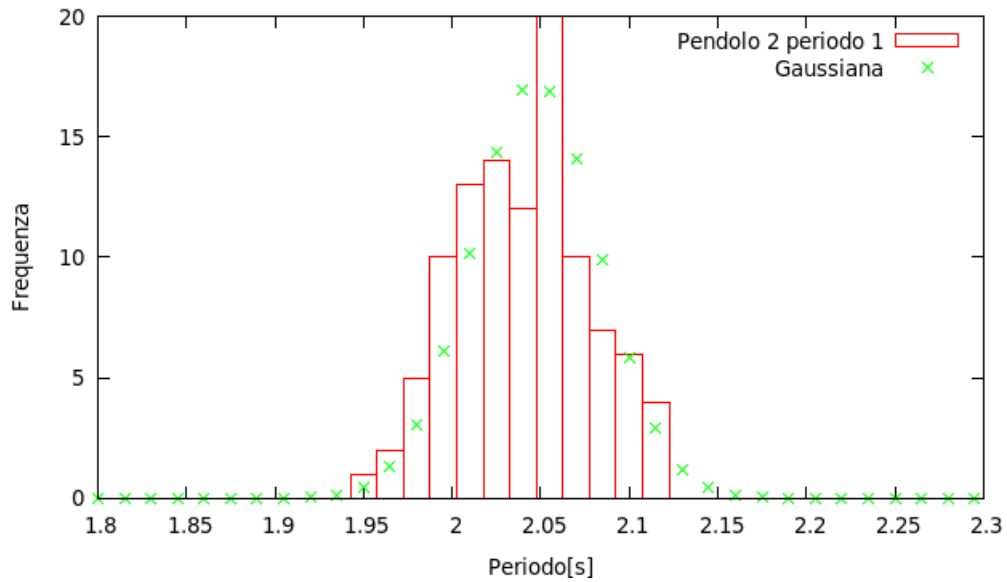


Figura 2: Istogramma di frequenza dei valori del periodo singolo del secondo pendolo con sovrapposizione dei punti della gaussiana associata.

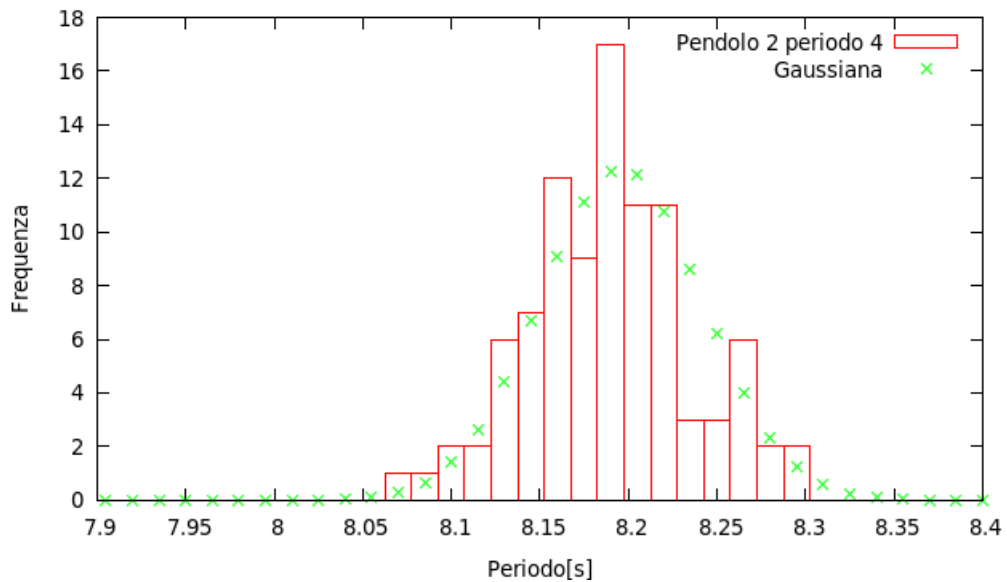


Figura 3: Istogramma di frequenza dei valori del periodo quadruplo del secondo pendolo con sovrapposizione dei punti della gaussiana associata .

Come precedentemente detto, le misure relative al periodo del primo pendolo erano sensibilmente meno precise di quelle relative al primo pendolo e per questo le abbiamo

scartate.

La deviazione standard è una grandezza che definisce la precisione delle misure e, come si può facilmente osservare dalla tabella 2, il gruppo che ha lavorato con il secondo pendolo ha raccolto dei dati sensibilmente più precisi, con una deviazione standard pari ad almeno la metà di quella dei dati del primo pendolo.

Si può infatti notare dalla figura 4 che è presente un problema intrinseco dei dati del primo gruppo e questo non era accettabile se volevamo migliorare la precisione dei nostri risultati complessivi. In questo grafico abbiamo inserito tutti i dati relativi ad entrambi i pendoli; si possono individuare 4 zone, ognuna della quali contiene circa 100 misure. Ad ogni zona corrisponde un set di misure, da sinistra verso destra: periodo singolo pendolo due, periodo quadruplo pendolo due, periodo singolo pendolo uno e periodo quadruplo pendolo uno. Infine abbiamo escluso i dati relativi alla misura del periodo singolo del pendolo 2 in quanto, anche se ad un primo sguardo può sembrare che i due set di misure siano similmente precisi, bisogna considerare che sia la media che la deviazione standard del set relativo al periodo quadruplo vanno divise per quattro per avere il periodo di una singola oscillazione, rendendo la stima finale molto più precisa.

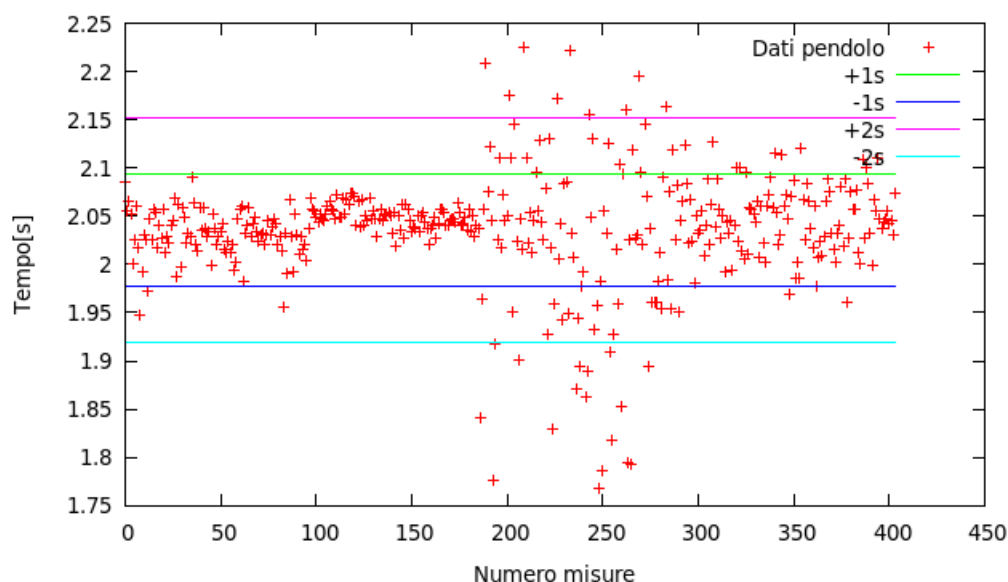


Figura 4: Distribuzione dei dati relativi ai quattro set di misure. Le linee colorate rappresentano le deviazioni standard calcolate su tutte le misure. Si nota come se avessimo unito i dati senza alcuna considerazione quelli relativi al pendolo 2 periodo quadruplo sarebbero stati dentro al $\pm\sigma$

In Figura 5 si può invece vedere come varia la deviazione standard man mano che vengono aggiunte le misure successive. Le prime 200 misure sono relative al pendolo due, mentre le successive al pendolo uno. È evidente un aumento della deviazione standard nel momento in cui vengono aggiunti dati del primo pendolo.

Abbiamo poi verificato che il rallentamento del pendolo fosse trascurabile. Già osservando come variavano i dati nel tempo avremmo potuto concludere che il periodo non tende a diminuire, o che comunque gli errori casuali coprono questo fenomeno.

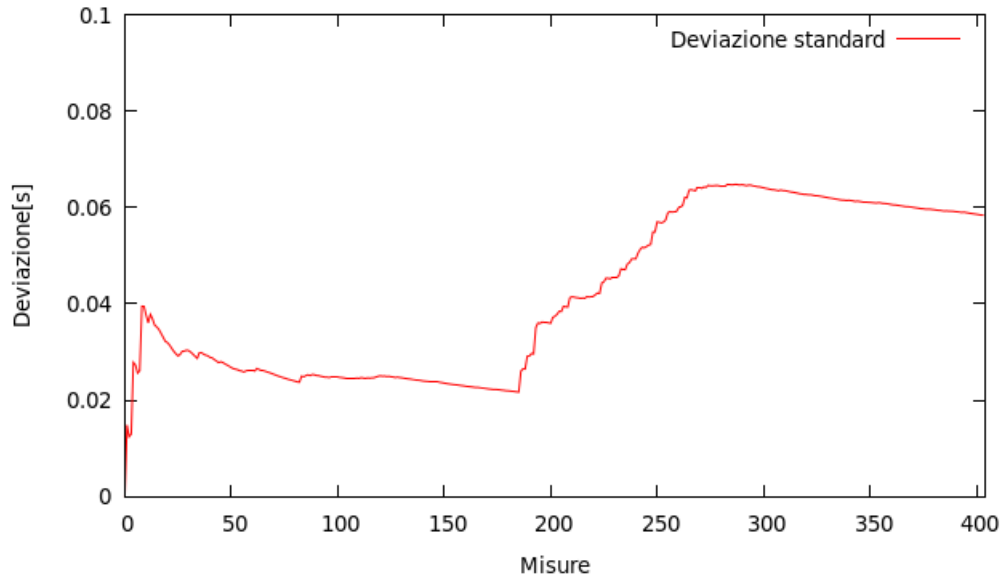


Figura 5: Grafico che mostra come varia la deviazione standard man mano che vengono aggiunte le misure del periodo dei pendoli. Intorno alla 200-esima misura si nota un aumento della deviazione standard.

Per una verifica più oggettiva abbiamo separato i dati di entrambe le misurazioni ottenendo due campioni di dati: il primo composto dalle prime 47 misure e il secondo dalle successive 48. Per ciascuno abbiamo poi calcolato la media, la deviazione standard della media e l'indice di compatibilità.

Nella tabella 3 sono riassunti i risultati.

Misure Periodo quadruplo	Media aritmetica [s]	σ [s]
Prima metà dei dati	8.220	0.043
Seconda metà dei dati	8.176	0.041

Tabella 3: Media e deviazione standard

L'indice di compatibilità è stato calcolato come:

$$r = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$$

Dove:

r è l'indice di compatibilità;

\bar{x}_1 e \bar{x}_2 sono rispettivamente la media della prima e della seconda metà di misure;

σ_1 e σ_2 sono rispettivamente le deviazioni standard della prima e della seconda metà di misure.

Essendo l'indice di compatibilità 0.74, decisamente inferiore ad 1, abbiamo concluso che il rallentamento del pendolo nel tempo fosse trascurabile.

Non siamo riusciti a notare nessun effetto attribuibile al differente angolo di oscillazione dei due pendoli; per trovare una qualche correlazione sarebbero forse serviti più set di dati raccolti dallo stesso pendolo e nelle stesse condizioni, ma con diversi angoli.

Alla luce di queste considerazioni abbiamo potuto stimare il valore del periodo di oscillazione del secondo pendolo. Il tempo impiegato per compiere quattro oscillazioni è:

$$t = (8.20 \pm 0.05)s$$

Per ottenere la stima del periodo di oscillazione questo risultato va diviso per quattro:

$$T = (2.05 \pm 0.01)s$$

5 Discussione dei risultati sperimentali e conclusioni.

L'obiettivo finale di questa esperienza era quello di trovare il valore statisticamente più probabile del periodo di oscillazione del pendolo, utilizzando due pendoli differenti e prendendo due serie di misure: una per il periodo singolo e una per il periodo quadruplo. La serie di dati da noi scelta per rappresentare il valore del periodo del pendolo è la misurazione del periodo quadruplo sul pendolo numero 2. Il risultato ottenuto dalle misurazioni effettuate è:

$$T = (2.05 \pm 0.01)s$$

dove T indica il periodo del pendolo.

Il motivo principale per cui abbiamo scelto i dati del periodo quadruplo del pendolo numero 2 è stato il basso valore di incertezza (0.01s) e quindi la buona precisione di questo set di dati rispetto agli altri. Osservando le medie delle altre misurazioni e le loro incertezze si vede che il valore proposto è contenuto in tutti gli altri intervalli di affidabilità, quindi c'è una probabilità molto buona che la nostra misura sia accurata. L'obiettivo dichiarato dell'esperienza era riuscire ad osservare una distribuzione normale di probabilità delle nostre misure e così è stato, infatti dai grafici riportati si possono osservare quattro curve gaussiane. Non abbiamo a disposizione un valore di riferimento riguardo il periodo del pendolo utilizzato, pertanto non possiamo valutare se la nostra misura è accurata o meno, però è possibile confrontare le medie e le incertezze dei quattro grafici. Osservando i grafici si può notare che tutti gli intervalli di affidabilità sono inclusi uno nell'altro, quindi non sono disgiunti tra loro e questo ci fa pensare che il valore vero sia all'interno dell'intervallo più piccolo, di conseguenza ci siamo limitati a scegliere e a presentare i valori ricavati dal grafico più preciso. Se avessimo usato un sensore ad infrarossi per rilevare le oscillazioni, le misure sarebbero state necessariamente più precise perché l'errore casuale da cui sono affette si riduce, infatti le nostre misure sono affette da un errore casuale amplificato dal fatto che abbiamo contato le oscillazioni con i nostri occhi. Possiamo affermare, dunque, che per il nostro obiettivo il metodo utilizzato è stato il migliore possibile perché ha permesso di osservare una distribuzione normale di probabilità. La differenza tra le incertezze derivanti dal pendolo 1 e dal pendolo numero 2 può essere stata causata dal diverso tempo di reazione dell'operatore, che può comportare scarti anche di diversi centesimi di secondo rispetto al valore reale, oppure da un'instabilità del

coltello su cui era appoggiato il pendolo, dovuto al suo deperimento nel tempo. L'incertezza infatti deriva da molteplici possibili errori casuali, provocati sia da fattori interni che esterni. Alla base delle ipotesi sui possibili errori che potevamo incontrare durante la presa dati, ci aspettavamo una variazione significativa del periodo del pendolo. Durante l'esperimento si è ipotizzato infatti una diminuzione significativa del periodo con il passare del tempo, a causa di fattori esterni quali: l'attrito con l'aria, la forza di Archimede, etc. ma grazie all'utilizzo di due pendoli differenti è stato possibile notare, oltre alla trascurabilità di questo effetto, anche le eventuali incertezze sistematiche che hanno influenzato la misura. Osservando i grafici si nota però come non siano presenti errori sistematici che abbiano inciso durante la presa dati, permettendoci di riuscire a comparare le varie serie tra loro e stabilire la stima migliore del periodo.

Dopo aver raccolto le diverse serie di dati ne abbiamo fatto una prima analisi superficiale per verificare la presenza di dati anomali (outliers) o di errori sistematici importanti. Successivamente abbiamo prodotto dei grafici che ci hanno permesso di identificare il tipo di distribuzione che approssimasse l'andamento dei nostri dati. In questo modo abbiamo potuto individuare quale serie di dati fosse più precisa per utilizzarla come serie principale per il calcolo del periodo di oscillazione. Di questa serie di misure abbiamo calcolato diversi parametri tra cui la media aritmetica, la mediana, la deviazione standard e l'indice di compatibilità tra la prima metà dei dati e l'ultima metà. Quest'ultima grandezza ci ha permesso di affermare che la diminuzione del periodo nel tempo è del tutto trascurabile in quanto la risoluzione degli strumenti utilizzati e la prontezza degli operatori ne nascondeva l'effetto sui dati.

6 Appendice

La distribuzione cumulativa del periodo quadruplo pendolo 2 è riportata in figura 6.

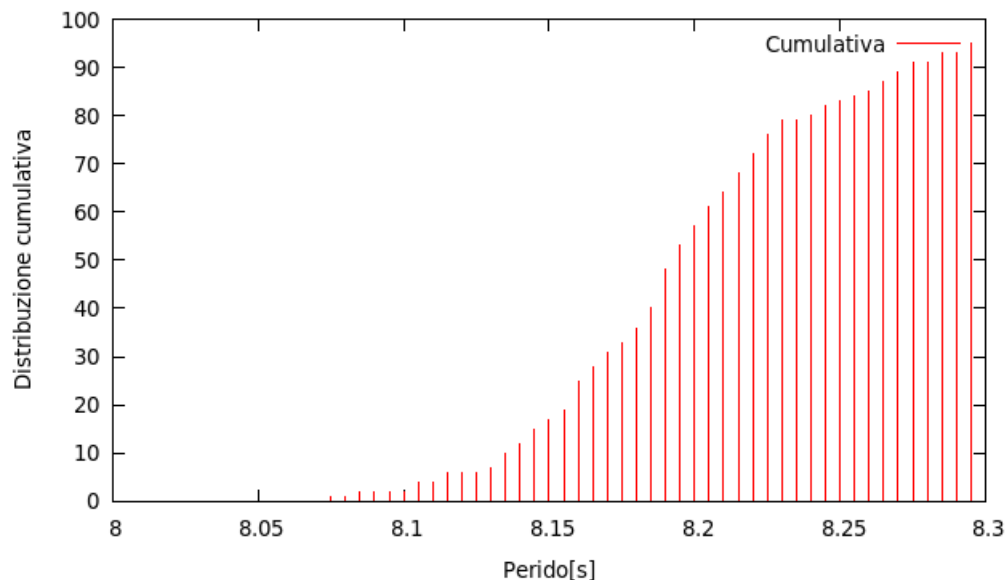


Figura 6: Il grafico riporta la distribuzione cumulativa del pendolo 2 periodo quadruplo.

Abbiamo riportato il calcolo della media passo dopo passo per notare fluttuazioni anomale. Si nota subito come in alcuni punti del grafico risultino delle variazioni brusche

ma non sufficienti per mostrare andamenti sistematicamente differenti nei due pendoli. Questo è dovuto in primo luogo al fatto che ci siano state diverse prese dati e non una singola continua. I dati sono ordinati in: pendolo 2 periodo singolo, pendolo 2 periodo quadruplo, pendolo 1 periodo singolo e pendolo 1 periodo quadruplo

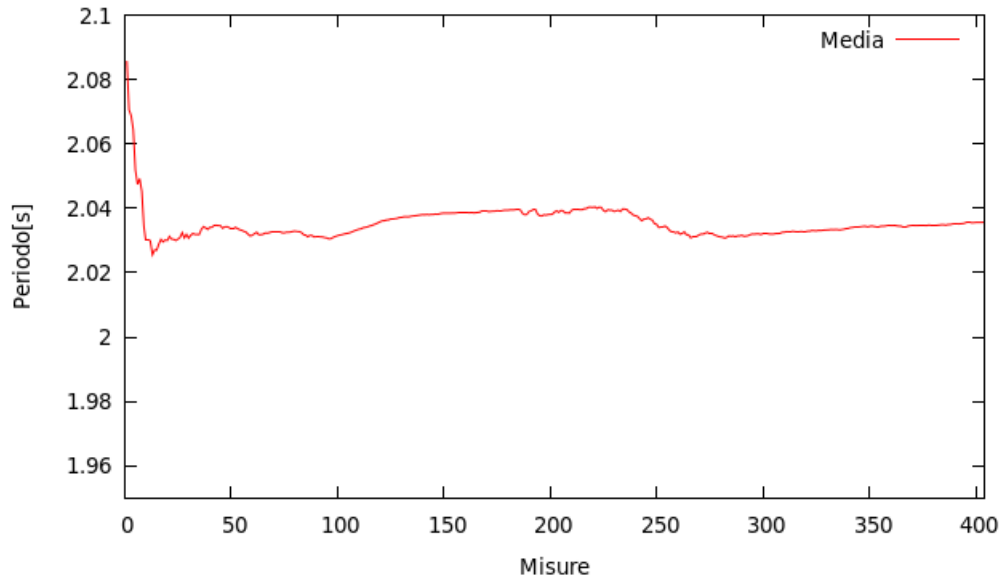


Figura 7: Media continua con i quattro set di dati ordinati in: periodo singolo pendolo 2, periodo quadruplo pendolo 2, periodo singolo pendolo 1, periodo quadruplo pendolo 1

Riportiamo i grafici relativi anche dei due set di misure del pendolo 1 e facciamo osservare come con la stessa larghezza dei bin la curva gaussiana non sia evidente quanto nel pendolo 2.

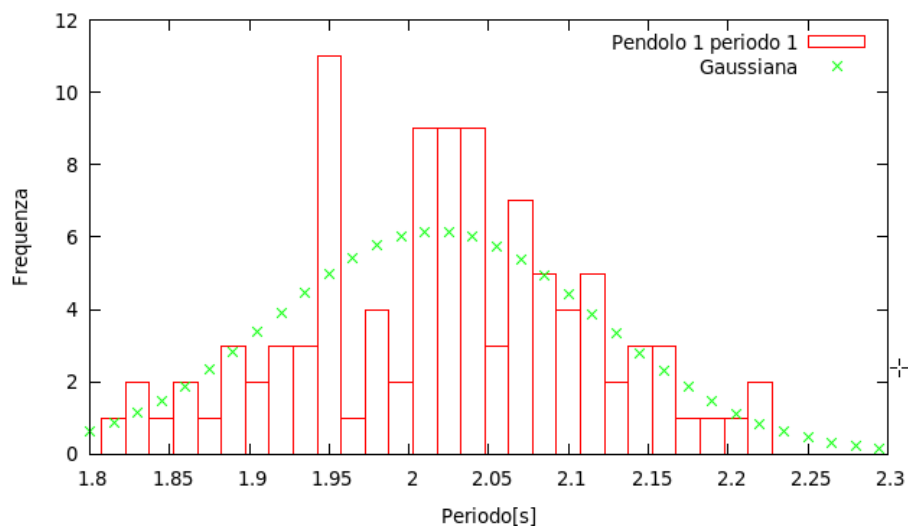


Figura 8: Dati relativi al pendolo 1 periodo singolo con caratteristiche uguali a quelli precedentemente descritti. Si nota come abbiamo deciso di mantenere la stessa larghezza dei bin e di come la forma Gaussiana sia poco rilevabile

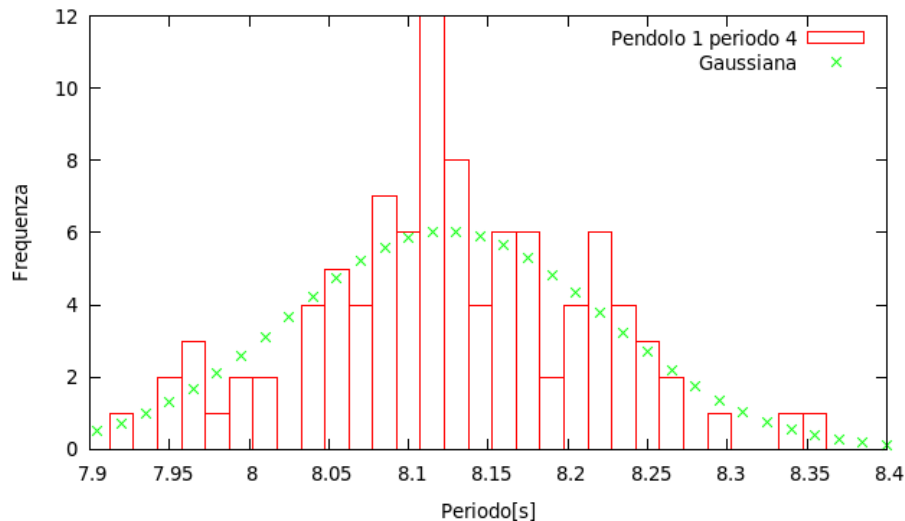


Figura 9: Dati relativi al pendolo 1 periodo quadruplo. Come per il pendolo 2 il grafico del periodo quadruplo risulta più affine ad una funzione gaussiana rispetto al periodo singolo.

Riportiamo i programmi in c++ eseguiti per i calcoli.
 Programma per calcolare la funzione normale punto
 per punto e inserirla nei grafici in modo da
 evidenziare o meno un andamento di tipo gaussiano

```
int main(){

long double s, m, p, k, w, f;
cin>>m>>s>>p;
k=1/(s*sqrt(2*M_PI));

for(double i=0.0; i<10;i=i+p){
    f=k*N*p*pow(2.71828, -pow((i-m)/s, 2)/2);
    cout<<i<<"\t"<<f<<endl;
}

return 0;
}
```

Programma che inseriti i dati in cin restituisce
 le loro frequenze relative al valore massimo con
 un raggruppamento in bin per 0.015

```
int main(){

vector <double> v;
vector <double> h(15000, 0);
double a, c;
```

```

int k=0;
double p=0.015;

while( cin>>a){
    v.push_back(a);
}

double b;
double o;

for(int w=0; w<v.size(); w++){
    c=v.at(w);
    for(double i=0.0; i<10; i+=p){
        b=i/p;
        if(c>i && c<(i+p)){
            h[b]++;
        }
    }
}

for(double i=0.0; i<10; i+=p){
    cout<<i<<"\t"<<h[k]<<endl;
    k++;
}

return 0;
}

```