

Gruppo 12

Masiero Tommaso - Matricola 2015778 - Email tommaso.masiero@studenti.unipd.it

Marchesini Davide - Matricola 2009840 - Email davide.marchesini@studenti.unipd.it

Toffoli Marco - Matricola 2000397 - Email marco.toffoli.2@studenti.unipd.it

consegna relazione: 16/12/2021

Analisi di figure di diffrazione e interferenza prodotte da fenditure e oggetti micrometrici

1 Obiettivo

L'obiettivo dell'esperienza era studiare i fenomeni di interferenza e diffrazione in alcuni casi notevoli: singola fenditura, tre fenditure distanziate costantemente e oggetti fini. I nostri obiettivi erano ricavarci dei valori geometrici quali distanze o larghezze delle fenditure/oggetti grazie allo studio degli effetti sulla luce.

2 Apparato sperimentale

L'apparato strumentale utilizzato durante l'esperienza era costituito da:

- **Laser a diodo:** Emette un fascio di luce ad una lunghezza d'onda di $(\lambda = 670 \pm 5)nm$, il fascio luminoso emesso da quest'ultimo ha un'immagine circolare nella quale l'intensità risulta inversamente proporzionale al raggio. In particolare ha un profilo di intensità gaussiano.
- **Sistema di fenditure:** Il fascio luminoso emesso dal laser attraversa un componente costituito da un substrato di acetato nel quale sono impressi sistemi ad 1, 2, 3 e 4 fenditure rettilinee equidimensionali ed equispaziate. Le fenditure sono state create con la tecnica di foto-impressione, dunque i bordi risultano irregolari e con una risoluzione di $10 \mu m$, inoltre la pellicola nera non risultava completamente opaca e questi due fattori possono essere stati oggetto di errori sistematici. Tutto questo era montato su un supporto che poteva essere traslato in modo da allineare il tutto con il fascio laser.
- **Rivelatore:** Costituito da un fototransistor in grado di misurare l'intensità luminosa con $\sigma_I = 10 u.a.$ e montato su un braccio meccanico lungo circa 70 cm e avente perno sul supporto per le fenditure. Questo braccio poteva essere posizionato ad un angolo, rispetto alla direzione del raggio emesso del laser, minore di 90° grazie ad una vite fissata ad una distanza $d = (65.5 \pm 0.5)mm$ dal perno. Sapendo il valore del passo vite $p = (0.500 \pm 0.005)mm$ e quanti passi sono necessari per far compiere un giro completo alla vite (400 passi/giro) possiamo convertire i "passi motore" in radianti. La presa dati era regolata da un software mediante il quale era possibile

posizionare il braccio meccanico a diverse angolazioni, far partire la misurazione e in generale controllare la strumentazione.

3 Procedura di acquisizione dati

L'acquisizione dei dati relativi alle quattro diverse immagini di diffrazione/interferenza è avvenuta seguendo un'unica procedura e cambiando di volta in volta l'oggetto di studio. Inizialmente abbiamo raccolto i dati relativi all'intensità della radiazione emessa dal laser in modo da poter valutare quanto questa potesse alterare le figure di diffrazione del capello e del filo da pesca. Successivamente abbiamo inserito nell'alloggio apposito il supporto per fenditure allineando la fenditura singola con il fascio laser, abbiamo effettuato una prima scansione e tarato lo zero dello strumento circa sul primo massimo di diffrazione. Dopo queste misure di controllo l'acquisizione dei dati relativi ai diversi oggetti è avvenuta come segue. Conseguentemente all'allineamento dell'oggetto con il laser, utilizzando il software abbiamo portato il braccio dello strumento a circa -3500 passi motore in modo da fare una scansione continua dell'intervallo $[-3500; 3500]$ passi motore. Fare un'unica scansione invece che due (a destra dello zero e poi a sinistra) permette di evitare errori sistematici dovuti al fatto che il braccio non è detto che ripercorra esattamente gli stessi punti quando torna indietro e di conseguenza la seconda scansione sarebbe potuta risultare traslata rispetto alla prima.

Subito dopo l'acquisizione di ogni set di dati abbiamo effettuato una scansione a laser spento, in modo da poter stimare il rumore di fondo dovuto principalmente alla luce dell'ambiente. Questa operazione è stata eseguita più volte in quanto nell'intervallo temporale in cui è avvenuto l'esperimento la luce dell'ambiente esterno non è rimasta costante. Abbiamo eseguito queste operazioni con la fenditura singola, con il set a tre fenditure, con il filo da pesca e col capello rispettivamente. Per questi ultimi due oggetti abbiamo modificato l'intervallo di acquisizione dati portandolo a $[-4500; 4500]$ passi motore in quanto ci era sembrato che si notassero variazioni di intensità anche oltre i 3500 passi motore. (metti come abbiamo messo capello e filo)

4 Analisi

Durante tutta l'analisi dati considereremo l'incertezza sull'angolo in passi motore associato ad ogni misurazione di intensità effettuata dal sistema di:

$$\sigma_{\theta}(pm) = \frac{\Delta}{\sqrt{12}} \quad (1)$$

dove Δ è il numero di passi motore per punto. Inoltre in tutti i casi abbiamo considerato solo i dati appartenenti agli intervalli $[500 : 2000]$ e $[-2000 : -500]$ passi motore per tutti gli effetti di fondo oppure per fenomeni dovuti alla non completa opacità dell'oggetto.

4.1 Zero

Prima della raccolta dati abbiamo tarato il braccio meccanico affinché lo zero coincidesse circa con il massimo di intensità prodotto dal laser attraverso la singola fenditura. Interpolando linearmente i punti a destra e a sinistra del massimo con due differenti rette,

abbiamo stimato la posizione reale del massimo di intensità come la posizione dell'intersezione delle due rette e abbiamo così corretto la stima grossolana dello zero fatta in laboratorio. In particolare abbiamo ottenuto che i valori delle interpolazioni valgono: e

	positivi (p)	negativi (n)
$a[\frac{u.a}{pm}]$	-591,97	667,46
$\sigma_a[\frac{u.a}{pm}]$	0,05	0,06
$b[u.a]$	272515	289710
$\sigma_b[u.a]$	8	10

Tabella 1: Coefficienti dell'interpolazione

tramite le formule:

$$\theta_0 = \frac{b_p - b_n}{a_p - a_n} \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta_0} = \sqrt{\left(\frac{1}{a_p - a_n}\right)^2 * (\sigma_{b_p}^2 + \sigma_{b_n}^2) + \left(\frac{b_p - b_n}{(a_p - a_n)^2}\right)^2 * (\sigma_{a_p}^2 + \sigma_{a_n}^2) + 2 \frac{b_p - b_n}{(a_p - a_n)^3} * (Cov(a_n, b_n) + Cov(a_p, b_p))}$$

Con la covarianza stimata grazie a

$$Cov(a, b) = -\frac{\bar{\theta} \cdot \sigma_I^2}{N \cdot Var[\theta]} \quad (3)$$

Dove $\bar{\theta}$ è la media dei vari θ misurati, σ_I^2 è la varianza riferita alla misura singola di intensità che vale $5.7u.a$ e $Var[\theta]$ la varianza della popolazione di valori di θ . Otteniamo allora la stima

$$\theta_0 = -13.653 \pm 0.011pm \quad (4)$$

Si nota come l'incertezza sia minore dell'incertezza per gli angoli di conseguenza essa non influenza fortemente la posizione angolare dei nostri dati.

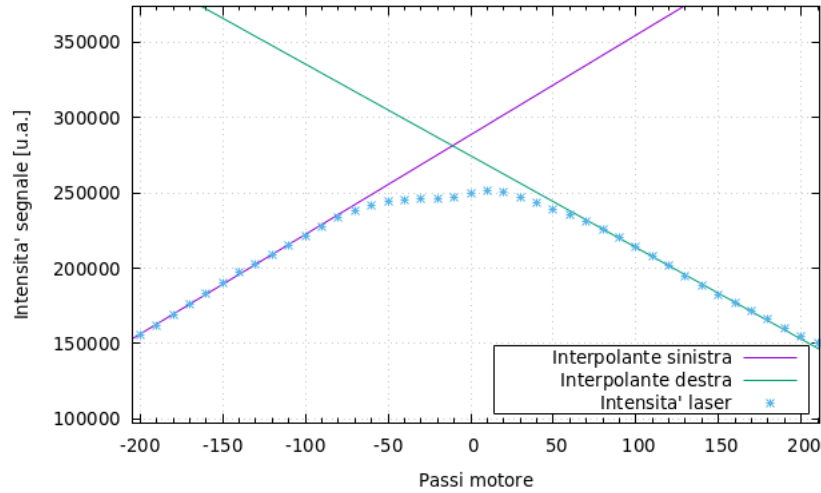


Figura 1: interpolazione per la ricerca dello zero.

4.2 Fondo

Prima di ogni misura abbiamo eseguito una scansione senza laser, per stimare l'interazione della luce ambientale con il rivelatore, cioè stimando il rumore di fondo. In questo

caso, per ipotesi, il valore dell'intensità al variare dell'angolo non doveva cambiare, dunque abbiamo supposto che i nostri dati si distribuissero nel grafico passi motore-intensità come una retta orizzontale con coefficiente angolare uguale a zero. Abbiamo effettuato una misurazione del fondo prima di ogni presa dati, allo scopo di non trascurare eventuali cambiamenti ambientali, e in tutti i casi abbiamo trovato un valore negativo del coefficiente angolare, in particolare il massimo in modulo è circa 0.006.

Durante la presa dati il rumore di fondo dovrebbe essere rimasto costante, e provando ad effettuare un test di student a due code per valutare la compatibilità con lo zero del coefficiente angolare, con un numero di gradi di libertà pari a $k = N - 2$ dove N è il numero di punti raccolti dal software ed in tutti i casi otteniamo che i nostri dati si distribuiscono come una retta con coefficiente diverso da zero con un livello di confidenza superiore al 99,95%. Considerando però che ogni intervallo tra un minimo e il seguente è piccolo, la variazione risulta non importante in quanto a noi interessa solo il valore dell'angolo e non dell'intensità, infatti si può considerare ogni intervallo tra minimi traslato solo verticalmente senza considerare il coefficiente angolare di qui sopra. Indipendentemente da ciò, possiamo considerare che i nostri valori sono maggiorati di un'intensità che abbiamo stimato di circa 2700(ua) (valore approssimativo, ogni presa dati è stata trattata considerando la misurazione del fondo corrispondente), e dunque basterà porre attenzione a non considerare i minimi la cui intensità sia minore del rumore di fondo.

4.3 Singola fenditura

Dai dati raccolti in laboratorio abbiamo ricavato i nostri minimi sperimentali almeno fino al quinto ordine, e di tali minimi abbiamo sia l'intensità sia la distanza angolare dallo zero. Sapendo che i minimi di diffrazione si trovano nelle posizioni appartenenti a:

$$h \sin \theta = m \lambda \quad (5)$$

con λ la lunghezza d'onda, θ l'angolo, h la larghezza di tale fenditura e m l'ordine del minimo, risulta facile calcolare la larghezza della fenditura grazie ad un'interpolazione con $x = m$ e $y = \sin \theta$ assumendo un andamento del tipo:

$$y = ax + b \quad (6)$$

Di conseguenza avremo che il coefficiente angolare è descritto dalla seguente relazione: $a = \frac{\lambda}{h}$.

L'incertezza associata al seno dell'angolo l'abbiamo stimata attraverso la propagazione degli errori come:

$$\sigma_{yi} = \sigma_{\sin(\theta_i)} = \cos(\theta_i) \cdot \sigma_{\theta_i} \quad (7)$$

con σ_{θ_i} l'incertezza sull'angolo calcolata anch'essa mediante propagazione degli errori come:

$$\sigma_{\theta_i(rad)} = \sqrt{\delta^2 \cdot \sigma_{pm}^2 + \theta_i(pm)^2 \cdot \sigma_{\delta}^2} \quad (8)$$

Dove δ è il fattore di conversione tra i passi motore e l'angolo in radianti ($\theta(rad) = \delta \cdot \theta(pm)$), mentre σ_{pm} è l'errore sulla determinazione della posizione dei minimi di intensità, stimato come scritto precedentemente.

In particolare abbiamo interpolato separatamente i minimi a destra e a sinistra dello zero perchè di principio non siamo sicuri dell'ordine di ogni minimo, ma della loro sequenzialità sì e a noi interessa solamente il coefficiente angolare il quale non varia per traslazioni sulle

ascisse. Allora otteniamo (con destra sono intesi i valori positivi di angolo e sinistra quelli negativi):

	destra	sinistra
a	$8.26 \cdot 10^{-3}$	$7.92 \cdot 10^{-3}$
b	$-3.01 \cdot 10^{-3}$	$1.57 \cdot 10^{-3}$
σ_a	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
σ_b	$9 \cdot 10^{-5}$	$9 \cdot 10^{-5}$

Tabella 2: Coefficienti dell'interpolazione per le misure da singola fenditura

Di seguito mostriamo il grafico che mostra le due rette assieme ai punti interpolati.

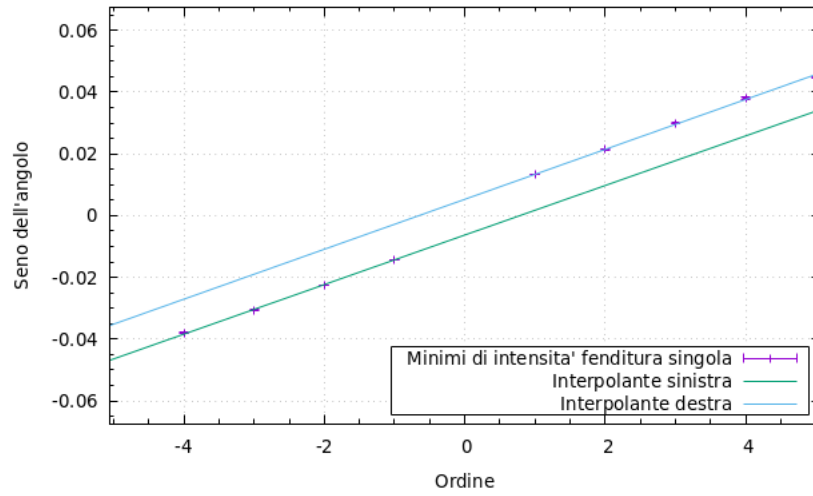


Figura 2: Interpolazione grafica dei minimi di intensità nella figura di diffrazione da singola fenditura.

Arrivati a questo punto è possibile stimare la larghezza della fenditura sapendo che vale:

$$h = \frac{\lambda}{a} \quad (9)$$

e grazie alla propagazione degli errori

$$\sigma_h = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\lambda}{a}\right)^2 + \left(\frac{\lambda \sigma_a}{a^2}\right)^2} \quad (10)$$

Allora otteniamo i seguenti valori:

	destra [μm]	sinistra [μm]
h	81.1 ± 1.2	84.6 ± 1.3

Tabella 3: Risultati della larghezza della fenditura nei due casi

Il coefficiente di compatibilità tra i due valori vale $r = 1.9$, dunque è possibile fare una media ponderata tra i due che vale:

$$h = (82.7 \pm 0.9) \mu m$$

4.3.1 Analisi con interpolazione parabolica

Solo per l'esperienza della singola fenditura abbiamo stimato lo spessore della fenditura usando un'incertezza sui minimi ricavata da un'interpolazione parabolica invece di quella stimata attraverso l'equazione 1.

Abbiamo interpolato i 5 dati che si trovavano in un intorno di ciascun minimo secondo l'equazione: $y = ax^2 + bx + c$. A titolo di esempio il grafico seguente mostra quest'interpolazione per il secondo minimo di diffrazione:

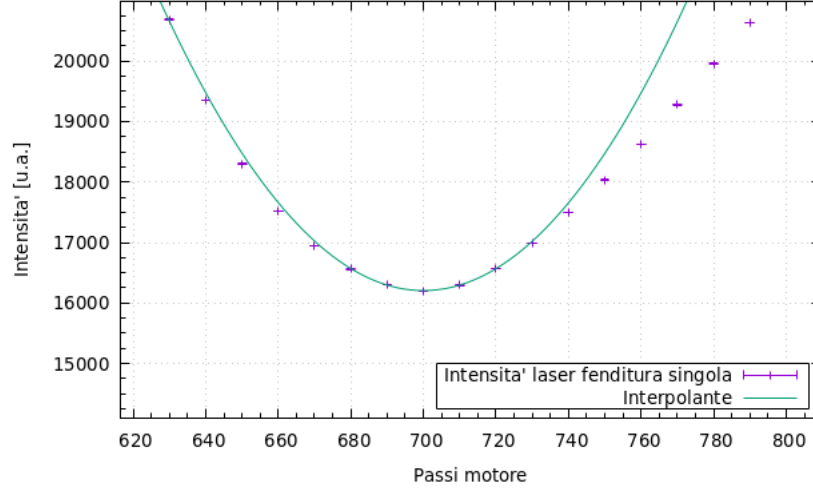


Figura 3: fit parabolico intorno ai dati relativi al secondo minimo di diffrazione.

In tabella sono riassunti i minimi con relative incertezze ottenute con questo sistema:

Ordine	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4
Minimo [p.m]	-1996.6	-1603.7	-1191.7	-751.1	699.9	1133.00	1582	2014.1
$\sigma_{x_{min}}$ [p.m]	1.7	0.2	0.2	0.1	0.2	0.06	3	2.7

Tabella 4: Incertezze sulla posizione dei minimi di diffrazione per la singola fenditura ottenute attraverso fit parabolico.

Dove le incertezze sono state ottenute considerando che la posizione del minimo è:

$$x_{min} = -\frac{b}{2a} \quad (11)$$

e il suo errore segue dalla propagazione secondo:

$$\sigma_{x_{min}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a \cdot b}{2a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2a}\right)\left(-\frac{b}{2a^2}\right)Cov(a, b)} \quad (12)$$

A questo punto risulta semplice interpolare i dati con il nostro fit lineare come fatto precedentemente ricavandoci: Allora otteniamo il seguente risultato per la larghezza della fenditura:

	destra	sinistra
a	$8 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-3}$
b	$-7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
σ_a	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$
σ_b	$4 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$

Tabella 5: Coefficienti dell'interpolazione per le misure da singola fenditura con interpolazione

$$h = (83.7 \pm 0.9) \mu m$$

Che risulta compatibile con il valore calcolato precedentemente.
Come stima finale della fenditura utilizziamo la media ponderata delle stime fatte. Otteniamo:

$$h = (83.2 \pm 0.6) \mu m$$

4.4 Tre fenditure

Nel caso di interferenza tra N fenditure, nel nostro caso tre, valgono le seguenti relazioni rispettivamente per massimi e per i minimi:

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (13)$$

dove d è la distanza tra le fenditure e m è un numero intero che esprime l'ordine dei massimi e

$$d \sin \theta = \frac{k}{3} \lambda \quad (14)$$

dove k è un numero intero non multiplo di $N = 3$.

Si nota subito come sia più semplice, in questo caso, lavorare con i massimi di interferenza piuttosto che con i minimi perchè per quest'ultimi è necessario introdurre una numerazione (determinata da k) meno intuitiva, perciò noi stimeremo la distanza tra le fenditure lavorando solamente con i massimi (di interferenza). Il procedimento risulta simile a quanto fatto nel caso della singola fenditura, e mediante interpolazione lineare, separatamente per angoli positivi e negativi, con $x = m$ e $y = \sin \theta$ otteniamo i seguenti risultati:

	destra	sinistra
a	$1.697 \cdot 10^{-3}$	$1.703 \cdot 10^{-3}$
b	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$1.92 \cdot 10^{-3}$
σ_a	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
σ_b	$4 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-5}$

Tabella 6: Coefficienti dell'interpolazione per le misure di tre fenditure

Da questo ci possiamo ricavare la larghezza della fenditura con le formule 9 e 10.
Otteniamo i risultati in tabella 7

La compatibilità tra le due stime vale $r = 0.2$, dunque la media ponderata risulta:

$$394 \pm 4 \mu m$$

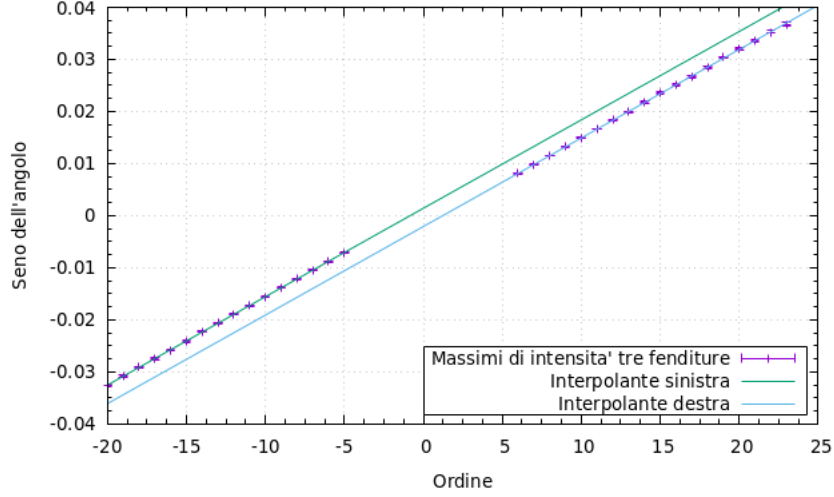


Figura 4: Interpolazione grafica dei massimi (di intensità) di diffrazione attraverso fenditura tripla.

destra [μm]	sinistra [μm]
395 ± 6	393 ± 6

Tabella 7: Valori e incertezze delle distanze per i massimi

4.5 Filo da pesca e capello

L'esperimento è simile a quello precedente solo che il fenomeno avviene con 2 sorgenti separate prima dal filo e poi dal capello, allora per il calcolo del diametro di questi due corpi basterà usare un procedimento simile, stando però attenti a considerare solo i minimi di diffrazione e non quelli di interferenza. Inoltre saranno esclusi a priori i dati vicino al massimo centrale perchè il rilevatore in quell'intervallo angolare è andato in saturazione.

Per individuare i minimi da utilizzare nell'interpolazione abbiamo confrontato la curva teorica con quella descritta dai nostri dati e abbiamo considerato dunque solo quelli in corrispondenza dei minimi di diffrazione teorici.

Sappiamo che per i minimi di diffrazione vale:

$$D \sin \theta = m \lambda \quad (15)$$

con D il diametro dell'oggetto e m numero intero che rappresenta l'ordine del minimo. Allo stesso modo di quanto fatto prima possiamo utilizzare un fit lineare con $x = m$ e $y = \sin \theta$ e usando le incertezze ricavate da 7 con $\Delta = 5 \mu m$. Otteniamo dunque i seguenti risultati (usando la stessa convenzione per destra e sinistra di prima):

	a	b	σ_a	σ_b
filo (sinistra)	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$-5.0 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	$7.4 \cdot 10^{-6}$
minimi filo (destra)	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$-4.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-6}$	$7.4 \cdot 10^{-6}$
minimi capello (sinistra)	$1.1 \cdot 10^{-2}$	$-9.3 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$
minimi capello (destra)	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$2.8 \cdot 10^{-4}$	$3.9 \cdot 10^{-6}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$

Tabella 8: Coefficienti dell'interpolazione per le misure del filo e del capello

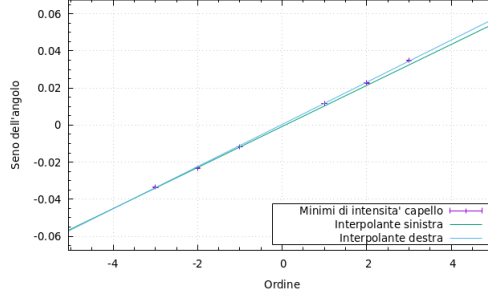


Figura 5: Interpolazione grafica dei minimi di intensità di diffrazione dovuta alla presenza del capello.

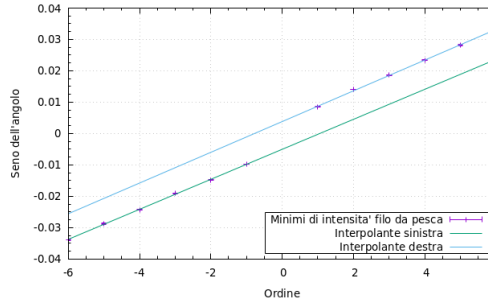


Figura 6: Interpolazione grafica dei minimi di intensità di diffrazione dovuta alla presenza del filo.

Sapendo che vale 9 e che l'incertezza risulta 10 per propagazione degli errori, possiamo stimare il diametro del filo da pesca e del capello. Otteniamo dunque i seguenti valori per i diametri:

	destra [μm]	sinistra [μm]
filo	140 ± 2	140 ± 2
capello	60.9 ± 0.9	55.8 ± 0.8

Tabella 9: Valori e incertezze per i diametri degli oggetti

Per quanto riguarda il coefficiente di compatibilità r otteniamo che solo una delle due coppie è composta da valori compatibili tra loro ed in particolare $r_f = 0.9$ e $r_c = 4.1$. Possiamo quindi fornire una stima unica sicura solo nel caso del filo:

$$D_f = (140 \pm 2)\mu m$$

4.6 Analisi finale

Per fare una verifica dell'ipotesi di linearità dei dati abbiamo calcolato il χ^2 per ogni interpolazione ma non è stato riportato perchè come succede spesso i valori risultano molto maggiori del valore di riferimento tabulato, e nel nostro caso addirittura di 3 ordini di differenza. Per questo al posto del χ^2 potremmo utilizzare come stimatore di bontà delle nostre interpolazioni le varianze dei parametri a e b che dovrebbero aumentare nel caso i dati non seguano un fit lineare. Come si nota, per i parametri a delle varie esperienze c'è sempre un errore percentuale almeno inferiore allo 0.2 per cento e questo

ci permette di affermare che probabilmente i nostri dati seguono un andamento lineare ma abbiamo sottostimato le incertezze sugli angoli.

5 Conclusioni

Abbiamo ricavato i valori seguenti nella sezione dell'analisi dei dati:

- Singola fenditura:

$$h = (83.2 \pm 0.6)\mu m \quad (16)$$

- Tre fenditure :

$$d = (394 \pm 4\mu)m \quad (17)$$

- Filo da pesca:

$$D_{filo} = (140 \pm 2)\mu m \quad (18)$$

- Capello:

$$D_{capellod} = (60.9 \pm 0.9)\mu m \quad (19)$$

$$D_{capellos} = (55.8 \pm 0.8)\mu m \quad (20)$$

Nel caso del filo e del capello ci è stato possibile misurare direttamente i loro diametri grazie ad un microscopio ottico ottenendo i valori $D_{capello} = 56 \pm 6$ e $D_{filo} = 138 \pm 14$. Possiamo dire allora che il valore più probabile per la stima del diametro del capello può essere quello con un coefficiente di compatibilità minore con quello misurato con il microscopio. Otteniamo allora che la stima probabilmente più accurata è:

$$D_c = (55.8 \pm 0.8)\mu m$$