

## Gruppo 12

Masiero Tommaso - Matricola 2015778 - Email [tommaso.masiero@studenti.unipd.it](mailto:tommaso.masiero@studenti.unipd.it)

Marchesini Davide - Matricola 2009840 - Email [davide.marchesini@studenti.unipd.it](mailto:davide.marchesini@studenti.unipd.it)

Toffoli Marco - Matricola 2000397 - Email [marco.toffoli.2@studenti.unipd.it](mailto:marco.toffoli.2@studenti.unipd.it)

Travali Davide - Matricola 2008630 - Email [davide.travali@studenti.unipd.it](mailto:davide.travali@studenti.unipd.it)

Data consegna relazione: 28/02/2020

---

## Stima dell'accelerazione di gravità mediante l'utilizzo di un piano inclinato

### 1 Obiettivo dell'esperienza

L'obiettivo dell'esperienza era fornire una stima dell'accelerazione di gravità utilizzando una guidovia ad aria e raccogliendo serie di dati relativi ai tempi impiegati da una slitta per percorrere determinati spazi. Dovevamo inoltre verificare che le condizioni operative in cui ci eravamo posti fossero tali da permetterci di affermare che la slitta si muovesse con moto uniformemente accelerato.

Ogni 10 misurazioni di tempo, la lunghezza del percorso della slitta veniva aumentata di 10 centimetri. Successivamente, abbiamo ripetuto le misure aggiungendo una massa incognita sulla slitta. L'inclinazione del piano risultava di 45° rispetto all'asse orizzontale. Infine, dovevamo stabilire la compatibilità tra la stima di  $g$  da noi ottenuta e il valore di riferimento fornitoci.

### 2 Descrizione dell'apparato strumentale e della procedura di misura

STRUMENTI UTILIZZATI:

- Cronometro ( $R = 10^{-4}s$  ;  $S = 10^4 s^{-1}$ ).
- Guidovia ad aria con regolatore dell'inclinazione.
- Metro ( $R = 10^{-3}m$  ;  $S = 5 \cdot 10^{-4}m$ ).

[Tra parentesi sono riportate la risoluzione e la sensibilità massime dello strumento.]

Per motivi sanitari il gruppo è stato diviso in due sottogruppi da due operatori ciascuno, i cui compiti erano di regolare il flusso dell'aria, posizionare i traguardi e annotare i relativi tempi di passaggio della slitta per ogni percorso. La guidovia utilizzata consisteva in un percorso metallico orizzontale con dei piccoli fori posti verticalmente. Lo strumento era collegato ad un dispositivo in grado di proiettare aria compressa all'interno dell'asta, per poi farla uscire attraverso i vari fori, di pochi millimetri di distanza l'uno dall'altro. La guidovia era munita di elettrocalamita ad accensione a cui era attaccata una slitta di plexiglass. La slitta presentava tre estremità: una utile per tenerla salda alla calamita, l'altra per collegarvi dei pesi di massa incognita e l'ultima passando attraverso i sensori, posizionati in prossimità dei traguardi, azionava o fermava il cronometro. Lungo il percorso erano infatti posti due sensori ad infrarossi collegati al cronometro digitale a tale scopo. Il generatore che forniva aria compressa era munito di manopola girevole per modificare la portata della fuoriuscita dell'aria, che avrebbe poi influito sulla presa dati. Allo stesso modo, la calamita era dotata di interruttore utile a fermare il campo magnetico e far partire la slitta. Il cronometro usato era digitale e, dopo aver discusso con l'intero gruppo la risoluzione adatta, abbiamo optato per la massima possibile, ossia  $10^{-4}$ s. Questo perché, essendo la presa dati automatizzata e non soggetta alla risoluzione dell'occhio dell'operatore (che si ferma a  $10^{-2}$ s), tutte le cifre dopo la virgola assumevano importanza statistica, infatti la precisione del cronometro ci garantiva di poter controllare anche la quarta cifra decimale, che risultava importante soprattutto per brevi distanze. Prima di iniziare la presa dati, quindi, era importante riuscire ad individuare l'orizzontalità del piano: l'abbiamo cercata in 5 punti differenti del percorso, questo perché essendo lo strumento datato, l'usura di esso ha accentuato le irregolarità casuali presenti dal momento della sua produzione. Abbiamo così cercato l'orizzontalità media che ci permetteva di assumere il piano della guidovia orizzontale rispetto alla superficie terrestre. Una volta trovata, allo scopo di misurare indirettamente l'accelerazione di gravità, la guidovia è stata inclinata di  $45^\circ$  rispetto al suddetto piano, permettendo alla slitta di scivolarvi e di acquisire velocità. Per fare questo lo strumento era dotato di una manopola girevole munita di 12 tacche, della quale ogni giro corrispondeva ad una variazione dell'angolo  $\alpha$  di  $5^\circ$ . Sono stati necessari perciò 9 giri completi per posizionare la guidovia con l'inclinazione voluta.

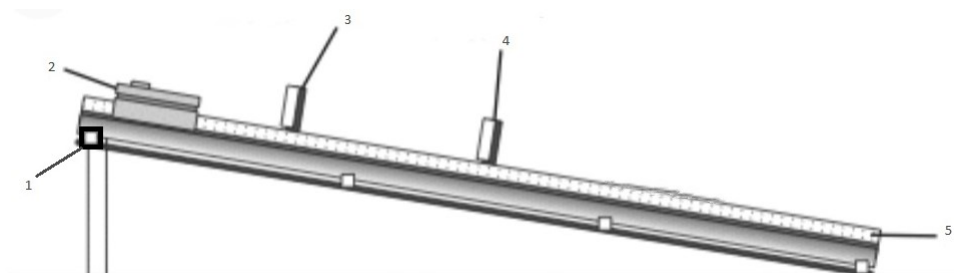


Figura 1: schema della guidovia con le sue parti essenziali.

1	Regolatore di inclinazione
2	Slitta in plexiglass
3	Fotocellula di partenza
4	Fotocellula di arrivo
5	Rotaia ad aria

Tabella 1: Legenda relativa alla figura 1.

Per l'esperienza era essenziale la presenza dell'aria, infatti, grazie ad essa, la slitta una volta svincolata dal campo magnetico della calamita e sollevatasi leggermente rispetto al piano, risultava libera di muoversi lungo quest'ultimo. Grazie a ciò, si riusciva a diminuire l'attrito dinamico con il percorso e, assumendo trascurabile l'attrito viscoso, l'unica forza agente sulla slitta risultava la forza di gravità. Ciò che potrebbe aver influenzato la misura è quindi l'intensità del flusso d'aria, che era necessaria regolare ad un livello strategico. Una bassa intensità non avrebbe permesso alla slitta di eliminare del tutto l'attrito dinamico con il piano mentre un'alta intensità avrebbe rischiato di far oscillare la slitta durante la caduta, andando ad incidere casualmente sulla presa dati, come spiegato dettagliatamente in seguito. Lo strumento permetteva di poter scegliere tra 5 diverse intensità d'aria ed il gruppo ha deciso di comune accordo di optare per una via di mezzo, regolando il motorino in corrispondenza della terza tacca.

Il nostro obiettivo era prendere varie serie di misure dell'intervallo di tempo impiegato dalla slitta nel percorrere un determinato spazio, per poi calcolarne la velocità e successivamente l'intensità dell'accelerazione di gravità. In particolare, abbiamo effettuato 10 misure di tempo per ogni distanza utilizzata, partendo da 10 centimetri e aumentando di volta in volta di altri 10 cm la distanza percorsa dalla slitta. La procedura è stata ripetuta 7 volte (con un massimo di 70 centimetri di spazio percorso) con due guidovie e con operatori differenti su ciascuna. Successivamente si sono prese altrettante misurazioni aggiungendo una massa incognita alla slitta, per osservare eventuali cambiamenti significativi sul calcolo dell'accelerazione di gravità, dovuti soprattutto alla presenza dell'attrito. Il nostro scopo, infine, era quello di misurare la compatibilità del valore così ottenuto con il valore di riferimento fornitoci inizialmente, per poter trarre conclusioni sulla bontà della misura.

### 3 Regolazione del sistema di misurazione

Lo scopo della nostra esperienza era quello di misurare nel modo più accurato possibile l'accelerazione di gravità terrestre ( $g$ ), per fare ciò abbiamo utilizzato una guidovia ad aria. La nostra procedura di misura però, possiede alcune criticità. Più nello specifico, i principali fattori che potrebbero influenzare la misura sono:

- **L'orizzontalità della guidovia.** Questo è un fattore molto importante e non trascurabile, tant'è che prima di effettuare le misurazioni abbiamo stimato una condizione di orizzontalità media lungo tutta l'asta, regolandone l'inclinazione in corrispondenza di alcuni punti strategici. Più precisamente abbiamo posizionato la slitta in cinque punti diversi e modificato la pendenza della guidovia fino a trovare quella tale per cui la slitta restasse ferma. Abbiamo annotato il numero di giri effettuati con la manopola di regolazione dell'inclinazione, e, finita la procedura, abbiamo calcolato la media aritmetica di essi e la relativa incertezza, con lo scopo di ottenere un intervallo dentro al quale fosse presente l'orizzontalità media cercata. L'incertezza usata in questo caso è quella riferita alle distribuzioni uniformi di probabilità poiché il numero di giri effettuati dalla manopola di regolazione a cui corrisponde l'orizzontalità in ogni punto sono equamente probabili, in quanto la superficie della guidovia è casualmente irregolare.

- **La forza del getto d'aria.** Lo scopo dell'aria è quello di far tendere la forza d'attrito tra la guidovia e la slitta a 0, in modo da poter osservare un incremento lineare della velocità, privo di qualsiasi fattore frenante rilevante. La portata del getto d'aria era fondamentale regolarla in modo che non fosse né troppo forte, altrimenti il moto dell'aria avrebbe potuto influenzare il moto della slitta, né troppo debole, altrimenti non avrebbe svolto il suo compito, non riuscendo a diminuire nel modo voluto l'attrito. Per questo motivo abbiamo scelto di impostarlo ad un livello intermedio.
- **L'attrito dell'aria.** L'effetto di questo attrito non dovrebbe essere così rilevante, in quanto per le velocità raggiunte durante la nostra esperienza questa forza non è molto grande, ma comunque condiziona inevitabilmente le misure. Una volta visti i risultati forse potremo valutare solo qualitativamente se questo fattore e l'attrito tra la guidovia e la slitta abbiano influenzato la stima di  $g$  (accelerazione di gravità), in quanto entrambi tenderebbero ad abbassarne il valore.
- **Vibrazioni.** Lavorando quasi in assenza di attrito tra la guidovia e la slitta, abbiamo verificato sperimentalmente che ogni minima vibrazione del bancone su cui poggiavano gli strumenti influenzava il moto di quest'ultima. Come per l'attrito dell'aria la sua influenza nella misura è trascurabile in quanto quando la slitta è in movimento, le forze in gioco sono nettamente più forti di quella generata da una vibrazione di media intensità.

Tutti questi fattori, seppur alcuni trascurabili, avrebbero potuto influenzare la misura. Il fatto che la guidovia non fosse uniformemente orizzontale, rende le nostre misure instabili. Per esempio, ipotizzando che l'asta su cui deve scorrere la slitta presenti un avvallamento convesso nell'intervallo 70-80 cm, la slitta avrà un'accelerazione regolare prima di arrivare a percorrere questa zona, successivamente acquisterà più velocità del dovuto per poi rallentare leggermente, di conseguenza in base all'intervallo di lunghezza che si prende in considerazione l'accelerazione potrebbe variare. Tuttavia, avendo studiato l'orizzontalità media della guidovia e unendo i dati ottenuti a vari intervalli di lunghezza crescenti, non ci aspettiamo che questo influisca pesantemente sull'accuratezza della nostra misura, bensì sulla precisione.

Lo strumento utilizzato è stato scelto appositamente per ottenere dei dati tali da permetterci di calcolare il valore dell'accelerazione di gravità con la maggiore accuratezza possibile (o almeno maggiore rispetto all'utilizzo di un pendolo semplice, perciò ci aspettiamo un tale risultato).

Ciò che potrebbe rendere inesatta la nostra aspettativa è l'orizzontalità irregolare della guidovia. Tuttavia mentre la conseguenza di ciò sulla stima di  $g$  è casuale, quest'ultimo conterrà inevitabilmente un errore in difetto rispetto al valore vero, dovuto all'attrito con la guidovia e con l'aria. Quest'ultima forza può essere eliminata solamente operando sotto vuoto, cosa peraltro molto costosa e complessa, ma ciò non è necessario per due motivi: innanzitutto questa forza per le velocità raggiunte durante l'esperienza è trascurabile, inoltre per abbassare ulteriormente l'incidenza della velocità si potrebbe ridurre la distanza percorsa dalla slitta, per cui basterebbe considerare i dati ottenuti con le

distanze minori, rischiando però di peggiorare ulteriormente la precisione. Passiamo ora a valutare la riproducibilità e ripetibilità delle misure considerando quanto precedentemente detto.

Ragionando per assurdo, se avessimo usato due guidovie diverse avremmo molto probabilmente ottenuto due serie di dati diverse, in quanto le aste su cui scorrono le slitte avrebbero sicuramente delle superfici diversamente irregolari che avrebbero diversificato le misure. Inoltre, il flusso d'aria dei due strumenti avrebbe potuto essere diverso causando un differente moto della slitta. Ripetendo una seconda volta le misure, nelle medesime condizioni e con la stessa strumentazione, il grado di concordanza tra le due serie di misure sarebbe sicuramente elevato. Questo è dovuto al fatto che il rivelatore ad infrarossi, che misura il tempo, è affetto da un minimo errore casuale e di conseguenza anche con un numero piccolo di singole misurazioni per intervallo, i dati sarebbero concordanti. Dalle considerazioni fatte si evince che rispettivamente la misura non è riproducibile ed è ripetibile.

## 4 Presentazione dei dati, analisi e presentazione dei risultati

Per una maggiore chiarezza abbiamo utilizzato delle sigle per rappresentare i vari set di misure:

*G1*: gruppo 1, Marchesini Davide e Travali Davide;

*G2*: gruppo 2, Masiero Tommaso e Toffoli Marco;

*V*: slitta vuota, priva di massa aggiuntiva;

*P*: slitta piena, alla quale è stato aggiunto un cilindro di ottone di peso sconosciuto.

Di seguito mostriamo le prime caratteristiche dei vari set di dati raccolti durante l'esperimento (i quali possono essere visionati in appendice). La prima riga della seconda colonna di ogni tabella mostra il punto di arrivo della slitta (in cm). Ricordiamo che per ogni misurazione la slitta è stata fatta partire da  $x_0 = 40cm$ .

Nelle righe successive viene invece mostrata la media aritmetica, la deviazione standard della media, la deviazione standard campionaria e il range in cui si trovano tutti i valori di ogni misurazione.

All'interno di queste tabelle abbiamo inserito i valori con un numero di cifre decimali maggiore rispetto a quello normalmente utilizzato per la rappresentazione di un dato, questo per permetterci successivamente di fare alcune considerazioni.

G1-V	50	60	70	80	90	100	110
Media A.[s]	0.3713	0.6898	0.9743	1.2350	1.4778	1.7010	1.9148
SE[s]	0.00011	0.00046	0.00044	0.00057	0.00113	0.00151	0.00083
S[s]	0.00034	0.00146	0.00138	0.00182	0.00357	0.00478	0.00263
Min-Max[s]	0.3707-0.3719	0.6887-0.6937	0.9727-0.9771	1.2307-1.237	1.473-1.4858	1.6975-1.7142	1.9115-1.9206

Tabella 2: Media aritmetica, deviazione standard della media, deviazione standard campionaria e massimo e minimo della serie G1-V.

G1-P	50	60	70	80	90	100	110
Media A.[s]	0.3714	0.6897	0.9732	1.2323	1.4729	1.6972	1.9085
SE[s]	0.00007	0.00022	0.00016	0.00038	0.00030	0.00016	0.00040
S[s]	0.00022	0.00070	0.00051	0.00119	0.00095	0.00051	0.00125
Min-Max[s]	0.371-0.3716	0.6885-0.6908	0.9725-0.9742	1.2302-1.2352	1.4711-1.4745	1.6966-1.6981	1.907-1.9109

Tabella 3: Media aritmetica, deviazione standard della media, deviazione standard campionaria e massimo e minimo della serie G1-P.

G2-V	50	60	70	80	90	100	110
Media A.[s]	0.3754	0.6997	0.9895	1.2513	1.4904	1.7206	1.9345
SE[s]	0.00048	0.00077	0.00048	0.00062	0.00047	0.00173	0.00075
S[s]	0.00173	0.00267	0.00168	0.00239	0.00147	0.00548	0.00237
Min-max[s]	0.3726-0.3781	0.6951-0.7031	0.9874-0.9918	1.2456-1.2537	1.4882-1.4934	1.7123-1.7289	1.9311-1.9383

Tabella 4: Media aritmetica, deviazione standard della media, deviazione standard campionaria e massimo e minimo della serie G2-V.

G2-P	50	60	70	80	90	100	110
Media A.[s]	0.3731	0.6945	0.9815	1.2410	1.4798	1.7080	1.9159
SE[s]	0.00013	0.00027	0.00029	0.00044	0.00049	0.00026	0.00061
S[s]	0.00045	0.00095	0.00102	0.00146	0.00155	0.00081	0.00194
Min-Max[s]	0.3724-0.3738	0.6928-0.6958	0.9801-0.9833	1.2379-1.2425	1.478-1.4821	1.7064-1.709	1.9124-1.918

Tabella 5: Media aritmetica, deviazione standard della media, deviazione standard campionaria e massimo e minimo della serie G2-P.

Dalle precedenti tabelle si può notare come nessun dato si trovi più lontano di tre deviazioni standard rispetto alla media, di conseguenza possiamo affermare che la presenza di outliers è improbabile. Tuttavia i quattro set di misure sono riferiti a due strumenti diversi, ed a due gruppi di lavoro differenti. Per questo motivo non possono essere utilizzati tutti e quattro al nostro scopo (provenendo da due strumenti diversi non possono essere tra loro compatibili).

Dalle tabelle 2, 3, 4 e 5 si può notare che in generale i dati raccolti dal gruppo G1 sono più precisi, in quanto ogni set di misure ha una deviazione standard campionaria minore rispetto alle serie del gruppo G2, che sono quindi stati scartati.

Lo scopo dell'analisi è quello di verificare che nelle nostre condizioni il moto della slitta sia uniformemente accelerato e successivamente fornire una stima dell'accelerazione di gravità.

Ipotizzando di trascurare l'attrito e lavorando come se la nostra guidovia fosse un piano inclinato ideale, l'accelerazione di gravità è data dall'equazione:

$$g = \frac{a}{\sin(\alpha)} \quad (1)$$

Dove:

$a$  è l'accelerazione costante della slitta;

$\alpha$  è l'angolo di inclinazione della guidovia rispetto all'orizzontalità media lungo la guidovia.

Durante l'esperimento abbiamo inclinato la guidovia a  $45'$ , ovvero  $0.75$  gradi. L'incertezza su questo valore è data dall'incertezza riferita all'orizzontalità media. Per calcolare l'orizzontalità media abbiamo effettuato 5 misure in 5 punti diversi della guidovia. Assumendo una distribuzione uniforme possiamo calcolare l'incertezza sull'angolo come:

$$\sigma_\alpha = \frac{\max - \min}{\sqrt{12}} \quad (2)$$

Ottenendo quindi:

$$\alpha = (45.0 \pm 0.2) \text{minutid'arco}$$

Siccome siamo interessati ad una correlazione lineare tra due variabili, la nostra ipotesi non può avere come protagonisti il tempo impiegato e lo spazio percorso dalla slitta in quanto questi sono legati secondo la relazione:

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2 \quad (3)$$

Dove:

$t$  è il tempo;

$t_0$  è il tempo all'istante 0;

$x(t)$  è la posizione all'istante  $t$ ;

$v$  è la velocità all'istante  $t$ ;

$a$  è l'accelerazione all'istante  $t$ ;

che ha un andamento quadratico e non lineare.

Abbiamo quindi deciso di cercare la relazione tra il tempo impiegato e la velocità istantanea data dall'equazione lineare:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \quad (4)$$

Siccome la nostra ipotesi prevede che l'accelerazione sia costante, il calcolo della velocità istantanea non risulta problematico.

Si dimostra infatti che la velocità media  $\bar{v}$  in un intervallo  $\Delta t$  coincide con la velocità istantanea  $v_i$  nello stesso intervallo al tempo medio  $\bar{t}$ :

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (5)$$

E quindi:

$$\bar{v} = \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = v_i(\bar{t}) \quad (6)$$

Dove:

$t_i$  e  $t_{i+1}$  sono rispettivamente il tempo impiegato dalla slitta per raggiungere le posizioni  $x_i$  e  $x_{i+1}$ ;

$x_i$  e  $x_{i+1}$  sono le posizioni estreme di ogni intervallo di spazio  $\Delta x_i$  e  $\Delta x_{i+1}$ .

Per calcolare l'incertezza su  $\bar{t}$  e su  $v_i$  abbiamo utilizzato il metodo di propagazione degli errori. In particolare:

$$\sigma_{\bar{t}} \simeq \sqrt{\left(\frac{\delta g(t_1, t_2)}{\delta t_1}\right)^2 \cdot \sigma_{t_1}^2 + \left(\frac{\delta g(t_1, t_2)}{\delta t_2}\right)^2 \cdot \sigma_{t_2}^2} \quad (7)$$

$$\sigma_{v_1} \simeq \sqrt{\left(\frac{\delta f(\bar{t}, \Delta x)}{\delta \bar{t}}\right)^2 \cdot \sigma_{\bar{t}}^2 + \left(\frac{\delta f(\bar{t}, \Delta x)}{\delta(\Delta x)}\right)^2 \cdot \sigma_{\Delta x}^2} \quad (8)$$

$$\sigma_{\Delta x} = 2 \cdot \sigma_x = 2 \cdot \frac{R}{2} = R \quad (9)$$

Dove:

$\sigma_{\bar{t}}$  e  $\sigma_{v_1}$  sono rispettivamente l'incertezza sul tempo medio e l'incertezza sulla velocità istantanea al tempo  $\bar{t}$ ;

$g(t_1, t_2)$  rappresenta l'equazione 5;

$\sigma_{t_1}^2$  e  $\sigma_{t_2}^2$  sono rispettivamente la varianza di  $t_1$  e di  $t_2$ ;

$f(\bar{t})$  rappresenta l'equazione 6;

$\Delta x$  è la distanza percorsa dalla slitta;

$\sigma_{\Delta x}$  è l'incertezza relativa alla distanza che nel nostro caso è pari alla risoluzione del metro:  $R=0.1cm$ .

Nelle tabelle sottostanti abbiamo raccolto i risultati ottenuti utilizzando le equazioni appena espote.

G1-V				
Intervallo	$\bar{t}[s]$	$\sigma_{\bar{t}}[s]$	$v_i[cm/s]$	$\sigma_{v_i}[cm/s]$
40-50	0.1857	0.000054	26.932	0.5389
50-60	0.5306	0.000237	31.395	0.1892
60-70	0.8320	0.000317	35.155	0.1210
70-80	1.1046	0.000360	38.362	0.0913
80-90	1.3564	0.000633	41.184	0.0757
90-100	1.5894	0.000943	44.797	0.0668
100-110	1.8079	0.000862	46.777	0.0583

Tabella 6: valori del tempo medio con la sua incertezza (s) e velocità istantanea con la sua incertezza (cm/s) relativi a G1-V.

G1-P				
Intervallo	$\bar{t}[s]$	$\sigma_{\bar{t}}[s]$	$v_i[cm/s]$	$\sigma_{v_i}[cm/s]$
40-50	0.1857	0.000034	26.9258	0.5386
50-60	0.5305	0.000116	31.4187	0.1887
60-70	0.8314	0.000137	35.2700	0.1204
70-80	1.1028	0.000204	38.5951	0.0909
80-90	1.3526	0.000240	41.5679	0.0742
90-100	1.5851	0.000170	44.5692	0.0632
100-110	1.8028	0.000214	47.3462	0.0557

Tabella 7: valori del tempo medio con la sua incertezza (s) e velocità istantanea con la sua incertezza (cm/s) relativi a G1-P.



La nostra ipotesi, secondo la quale la velocità della slitta e il tempo percorso siano legati linearmente, definisce la relazione:

$$y = b + c \cdot x \quad (10)$$

Dove:

$x$  rappresenta il tempo;

$y$  rappresenta la velocità;

$b$  e  $c$  sono invece dei parametri che andremo a stimare, rispettivamente l'intercetta e il coefficiente angolare.

Siccome le incertezze sui tempi medi riportate nelle tabelle 6 e 7 sono molto piccole, ipotizziamo che possano essere trascurate.

I parametri  $b$  e  $c$  li stimiamo come:

$$b = \frac{1}{\Delta} \cdot \left[ \sum_{k=1}^N \frac{t_k^2}{\sigma_{v_k}^2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{v_k}{\sigma_{v_k}^2} - \sum_{k=1}^N \frac{t_k}{\sigma_{v_k}^2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{t_k v_k}{\sigma_{v_k}^2} \right] \quad (11)$$

$$c = \frac{1}{\Delta} \cdot \left[ \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_{v_k}^2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{t_k v_k}{\sigma_{v_k}^2} - \sum_{k=1}^N \frac{t_k}{\sigma_{v_k}^2} \cdot \sum_{k=1}^N \frac{v_k}{\sigma_{v_k}^2} \right] \quad (12)$$

$$\Delta = \sum_{k=0}^N \frac{1}{\sigma_{v_k}^2} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{t_k^2}{\sigma_{v_k}^2} - \left( \sum_{k=0}^N \frac{t_k}{\sigma_{v_k}^2} \right)^2 \quad (13)$$

$$\sigma_b = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{t_k^2}{\sigma_{v_k}^2}} \quad (14)$$

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{k=0}^N \frac{1}{\sigma_{v_k}^2}} \quad (15)$$

Dove:

$t_k$  è il  $k$ -esimo tempo medio  $\bar{t}$  precedentemente calcolato;

$v_k$  è il  $k$ -esima velocità istantanea al tempo  $\bar{t}$ ;

$\sigma_{v_i}$  è l'incertezza sul  $k$ -esima velocità istantanea;

$N$  è il numero totale di dati;

$\sigma_b$  è l'incertezza sul parametro  $a$ ;

$\sigma_c$  è l'incertezza sul parametro  $b$ .

Otteniamo quanto segue:

Serie	$b$ [cm/s <sup>2</sup> ]	$c$ [cm/s]	$\sigma_b$ [cm/s <sup>2</sup> ]	$\sigma_c$ [cm/s]
G1-V	24.9507	12.1804	0.1410	0.0941
G1-P	24.7712	12.5006	0.1395	0.0927

Tabella 8: Stima dei parametri  $b$  e  $c$  delle due serie con le loro relative incertezze

Nei grafici sottostanti mostriamo le misure, con le relative incertezze, e la retta dell'equazione 10 di cui abbiamo appena stimato i parametri.

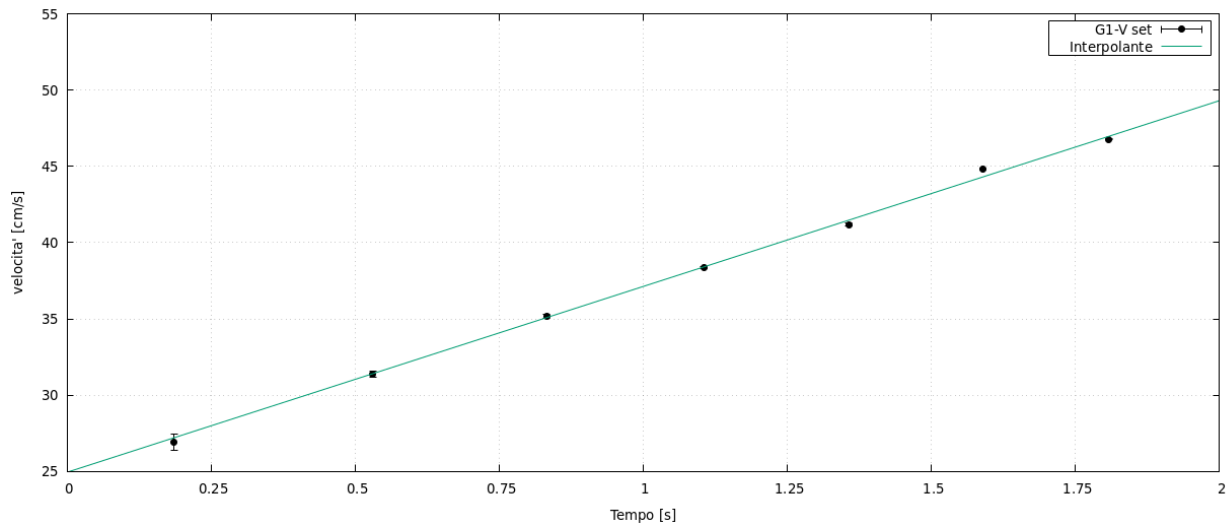


Figura 2: In questo grafico sono stati riportati i dati della serie G1-V con la relativa retta di regressione.

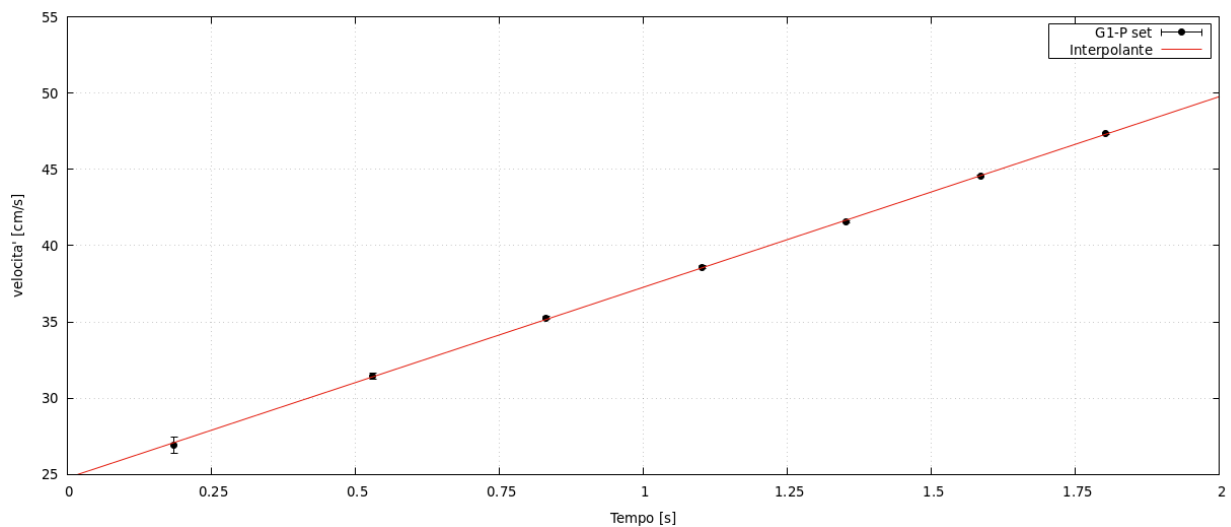


Figura 3: In questo grafico sono stati riportati i dati della serie G1-P con la relativa retta di regressione.

In entrambi i grafici non è possibile apprezzare (se non per il primo punto) l'incertezza dei dati. Questo perchè utilizzando il cronometro digitale la precisione dei tempi è elevatissima. Anche la precisione del metro utilizzato per misurare le distanze è molto elevata e di conseguenza il valore delle velocità oscilla tra due numeri molto simili.

I parametri  $b$  e  $c$  rappresentano la nostra miglior stima di  $v_0$  e  $a$  dell'equazione 4. Tuttavia dobbiamo verificare che la nostra ipotesi sia qualitativamente corretta, più precisamente verifichiamo che l'andamento dei nostri dati sia compatibile con un'ipotesi lineare. Per fare ciò calcoliamo l'errore a posteriori dato da:

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N-2} \cdot \sum_{k=0}^N (v_k - b - c \cdot t_k)^2} \quad (16)$$

Otteniamo:

$$\delta_v = 0.30s$$

$$\delta_p = 0.31s$$

Siccome i valori ottenuti sono *maggiori* delle incertezze relative alle velocità (eccetto per il primo punto di ogni serie) è possibile che siano state sottostimate alcune incertezze (sistematiche o casuali) durante l'analisi.

Il parametro che più ci interessa per il calcolo di  $g$  è l'accelerazione della slitta. Essa non è altro che il coefficiente angolare della retta interpolante, che risulta essere, nel caso della slitta vuota:

$$a_v = (12.20 \pm 0.09)cm/s^2$$

Mentre per la slitta carica:

$$a_p = (12.50 \pm 0.09)cm/s^2$$

Per poter giudicare la diversa influenza dell'attrito nelle due misure ne abbiamo calcolato l'indice di compatibilità:

$$r = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sqrt{\sigma_{\mu_1}^2 + \sigma_{\mu_2}^2}} \quad (17)$$

Dove:

$\mu_1$  rappresenta il valore medio della prima grandezza, nel nostro caso  $a_v$ ;

$\mu_2$  rappresenta il valore medio della seconda grandezza, nel nostro caso  $a_p$ .

In questo modo otteniamo:

$$r = 2.42$$

Questo risultato ci permette di affermare che non c'è compatibilità ottima tra le due serie. È possibile che le turbolenze create a seguito della fuoriuscita dell'aria e la presenza dell'attrito hanno influito negativamente sulla slitta scarica. Si nota infatti che l'accelerazione della slitta carica è maggiore.

Si può raggiungere la stessa conclusione anche osservando il grafico sottostante, dove si nota facilmente che all'aumentare del tempo la differenza tra le velocità tra le due slitte aumenta.

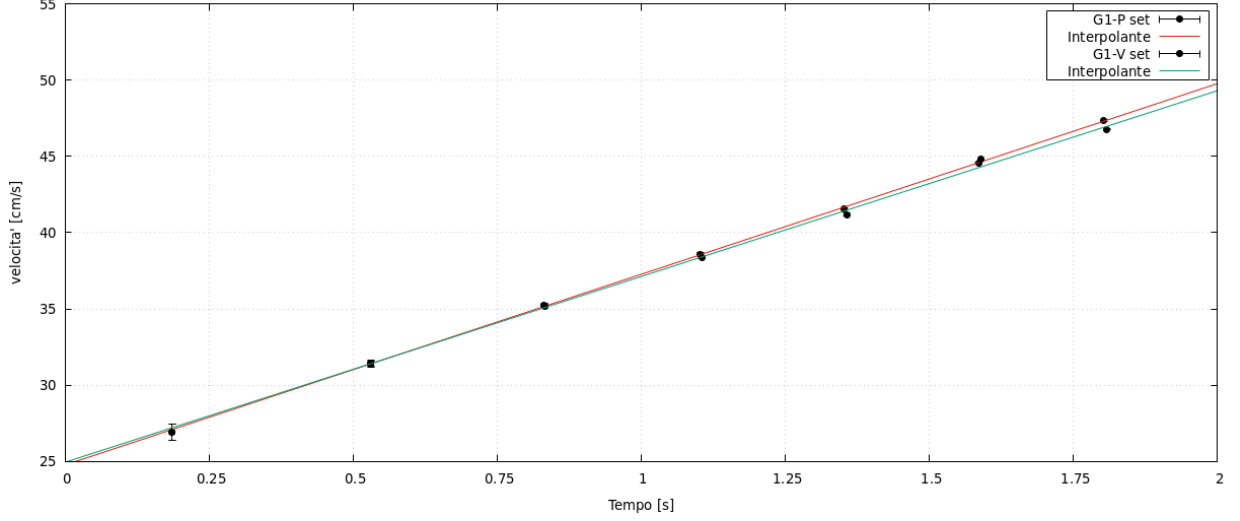


Figura 4: Tutti i dati rappresentati in un solo grafico per notare differenze e similitudini

Dall'equazione 1 possiamo quindi calcolare il valore di  $g$ . La sua incertezza è invece data da:

$$\sigma_g \simeq \sqrt{\left(\frac{\delta z(a, \alpha)}{\delta a}\right)^2 \cdot \sigma_a^2 + \left(\frac{\delta z(a, \alpha)}{\delta \alpha}\right)^2 \cdot \sigma_\alpha^2} \quad (18)$$

Dove:

$z(a, \alpha)$  rappresenta l'equazione 1.

Otteniamo quindi, nel caso della slitta vuota:

$$g_v = (930 \pm 290) \text{ cm/s}^2$$

Mentre per la slitta con il disco di ottone:

$$g_p = (950 \pm 290) \text{ cm/s}^2$$

Con l'equazione 17 calcoliamo se le nostre due stime dell'accelerazione di gravità sono compatibili con il valore di riferimento a Padova, il quale è:  $g = (980.3 \pm 0.1) \text{ cm/s}^2$ .

$r$ G1-V	0.17
$r$ G1-P	0.10

Tabella 9: Indici di compatibilità tra i valori da noi ottenuti e il valore di riferimento.

Essendo entrambi gli indici  $\ll 1$  si potrebbe affermare che la compatibilità sia ottima. Tuttavia l'errore su entrambe le accelerazioni di gravità stimate è tanto grande da rendere la nostra misura molto poco precisa.

Le cause di questo risultato sono principalmente due:

- La formula utilizzata per propagare gli errore dell'accelerazione e dell'angolo non è corretta, essa ci restituisce un'approssimazione in quanto ipotizza una correlazione

nulla tra l'angolo e l'accelerazione.

- L'incertezza sull'angolo incide significativamente sul calcolo dell'incertezza dell'accelerazione di gravità, molto di più dell'incertezza sull'accelerazione. Per calcolarla noi abbiamo effettuato solo 5 misure di orizzontalità lungo la guidovia; se ne avessimo fatte molte di più la stima sarebbe risultata molto più precisa.

## 5 Discussione dei risultati sperimentali e conclusioni.

Lo scopo di questa esperienza era quello di verificare che con una guidovia ad aria compressa, leggermente inclinata, la slitta procedesse con un moto uniformemente accelerato e, successivamente, fornire una stima dell'accelerazione di gravità, ovvero dell'unica forza (trascurando l'attrito) che agiva direttamente sulla slitta.

Dopo aver preparato gli strumenti nelle migliori condizioni abbiamo effettuato delle misurazioni, in particolare abbiamo misurato i tempi impiegati dalla slitta per percorrere diversi intervalli di spazio.

Dopo una prima analisi generale abbiamo scartato i dati che ci sembravano meno precisi; con i rimanenti siamo stati in grado di calcolare i parametri della funzione che abbiamo ipotizzato fosse quella che legava tempo e velocità linearmente.

Dopo aver verificato che la nostra ipotesi fosse valida, e che quindi il moto risultasse effettivamente uniformemente accelerato, abbiamo potuto fornire una stima dell'accelerazione di gravità.

In tutta la relazione abbiamo tenuto separati i dati relativi alla slitta carica e quella relativi alla slitta scarica, questo perchè pensavamo che il peso potesse influire significativamente sui risultati finali. Le nostre aspettative sono risultate corrette in quanto, innanzitutto, si può notare dalla figura 4 che con la slitta scarica (a) all'aumentare del tempo trascorso, il rapporto tra velocità e tempo all'istante  $t_i$  diminuisce rispetto al caso della slitta carica (b). Queste differenze però, non ci permettono di determinare quanto sia stato rilevante l'effetto dell'attrito, tuttavia consentono di affermare che facendo analisi più approfondite si noterebbe e forse sarebbe possibile anche stimarlo.

Le stime ottenute di  $g$  sono molto poco precise, questo perchè l'incertezza è stata calcolata con l'equazione 18 che in forma esplicita diventa:

$$\sigma_g = \sqrt{\frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \cdot \sigma_a^2 + \frac{a^2 \cdot \cos^2\alpha}{\text{sen}^4\alpha} \cdot \sigma_\alpha^2} \quad (19)$$

Essendo che 45 minuti d'arco corrispondono a 0.75 gradi, possiamo parlare di un angolo piccolo. Il secondo termine sotto radice presenta un  $\text{Sen}^4\alpha$ , questo significa che l'incertezza di  $g$  dipende per la maggior parte dall'incertezza di  $\alpha$ . A titolo di esempio, se fossimo riusciti ad ottenere una stima dell'orizzontalità con un'incertezza di 0.06 minuti d'arco invece che 0.2, l'errore sul calcolo di  $g$  sarebbe passato da  $\pm 290$  a circa  $\pm 74$ .

Possiamo quindi affermare che le nostre stime sono compatibili con il valore di riferimento ma l'errore percentuale è significativamente alto:

$$\epsilon_v = \frac{\sigma_{gv}}{g_v} \cdot 100 = 31.2\%$$

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_{gp}}{g_p} \cdot 100 = 30.5\%$$

## 6 Appendice

50	60	70	80	90	100	110
0.3714	0.6895	0.9727	1.2355	1.4818	1.6998	1.9115
0.3712	0.6903	0.9748	1.2363	1.4784	1.7032	1.9134
0.3713	0.6890	0.9748	1.2355	1.4762	1.7142	1.9141
0.3719	0.6903	0.9771	1.2332	1.4755	1.6983	1.9175
0.3713	0.6889	0.9755	1.2365	1.4858	1.7027	1.9152
0.3716	0.6906	0.9732	1.2356	1.4754	1.6975	1.9127
0.3710	0.6937	0.9727	1.2353	1.4759	1.7008	1.9160
0.3711	0.6887	0.9734	1.2370	1.4759	1.6994	1.9206
0.3717	0.6894	0.9744	1.2354	1.4796	1.6976	1.9123
0.3711	0.6888	0.9752	1.2307	1.4779	1.6981	1.9135
0.3707	0.6888	0.9732	1.2335	1.4730	1.6993	1.9157

Tabella 10: dati G1-V.

50	60	70	80	90	100	110
0.3716	0.6908	0.9735	1.2315	1.4722	1.6967	1.9109
0.3712	0.6908	0.9728	1.2321	1.4718	1.6969	1.9103
0.3713	0.6903	0.9725	1.2317	1.4734	1.6973	1.9083
0.3715	0.6894	0.9735	1.2324	1.4736	1.6966	1.9079
0.3716	0.6885	0.9733	1.2302	1.4745	1.6976	1.9081
0.3716	0.6895	0.9734	1.2352	1.4732	1.6974	1.9070
0.3714	0.6895	0.9735	1.2325	1.4711	1.6967	1.9074
0.3711	0.6892	0.9742	1.2324	1.4725	1.6975	1.9079
0.3710	0.6896	0.9732	1.2327	1.4726	1.6981	1.9087
0.3714	0.6896	0.9727	1.2323	1.4733	1.6979	1.9093
0.3716	0.6892	0.9726	1.2323	1.4734	1.6969	1.9072

Tabella 11: dati G1-P.

50	60	70	80	90	100	110
0.3751	0.6951	0.9918	1.2456	1.4934	1.7213	1.9364
0.3781	0.6967	0.9875	1.2537	1.4911	1.7263	1.9336
0.3771	0.6990	0.9874	1.2477	1.4882	1.7123	1.9329
0.3726	0.7021	0.9876	1.2527	1.4899	1.7133	1.9362
0.3734	0.7031	0.9902	1.2499	1.4906	1.7223	1.9367
0.3736	0.7000	0.9910	1.2535	1.4887	1.7289	1.9345
0.3738	0.7017	0.9889	1.2532	1.4900	1.7169	1.9311
0.3762	0.6987	0.9887	1.2525	1.4901	1.7183	1.9315
0.3768	0.7015	0.9880	1.2517	1.4917	1.7255	1.9383
0.3763	0.6966	0.9903	1.2526	1.4907	1.7209	1.9336
0.3769	0.7031	0.9917	1.2514			
0.3759	0.6986	0.9910	1.2496			
0.3740			1.2536			
			1.2493			
			1.2522			

Tabella 12: dati G2-V.

50	60	70	80	90	100	110
0.3730	0.6956	0.9810	1.2389	1.4821	1.7090	1.9180
0.3724	0.6942	0.9815	1.2408	1.4781	1.7070	1.9124
0.3731	0.6946	0.9812	1.2418	1.4807	1.7083	1.9161
0.3731	0.6934	0.9808	1.2408	1.4797	1.7079	1.9166
0.3730	0.6943	0.9833	1.2379	1.4821	1.7084	1.9166
0.3733	0.6950	0.9801	1.2405	1.4808	1.7090	1.9159
0.3727	0.6934	0.9816	1.2413	1.4780	1.7082	1.9177
0.3738	0.6956	0.9814	1.2424	1.4788	1.7080	1.9124
0.3736	0.6958	0.9825	1.2417	1.4785	1.7064	1.9165
0.3733	0.6942	0.9831	1.2422	1.4791	1.7081	1.9164
0.3736	0.6946	0.9806	1.2425			
0.3724	0.6928	0.9805				

Tabella 13: dati G2-P.