Teorema dei Residui

Def (Residuo): Sia $f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ meromorfa in U (olomorfa in $U \setminus \{z_0\}$).
Allora in $A(z_0, 0, r)$ vale lo sviluppo di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-z_0)^{-n}$$

Il coeff. b_1 è detto residuo di f in z_0 : $\text{Res}(f, z_0) = b_1$.

Thm (dei residui). Sia $f: U \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Sia γ una curva chiusa, regolare a tratti (C^1) in $U \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Siano i punti singolari di f tali che $z_k \in \text{Int}(\gamma)$ $\forall k = 1, \dots, n$. Allora

$$\oint_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, z_k)$$

Più in generale se γ ha winding number diverso da 1 intorno ai poli

$$\oint_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \text{Ind}_\gamma (z_k) \text{Res}(f, z_k)$$

Thm (residuo all'infinito): Sia γ curva chiusa semplice regolare a tratti e sia f analitica su e all'esterno di γ, allora

$$\oint_\gamma f = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

Per risolvere gli integrali utilizziamo una serie di lemmi

Lemma (cerchio piccolo): 1) Sia $U \subset \mathbb{C}$ aperto e sia f olomorfa tale che

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0 \implies \lim_{r \to 0} \oint_{\gamma_r} f = 0.$$

2) Sia f con polo semplice in z_0 e γ_r una curva intorno a z_0. Allora

$$\oint_{\gamma_r} f = (\phi_2 - \phi_1)\, i \,\text{Res}(f, z_0)$$

In particolare se $\gamma_r^{\pm}(\theta) = z_0 + re^{\pm i\theta}$ due semicirconf. con $-\pi \le \theta \le 0$ allora

$$\lim_{r \to 0} \oint_{\gamma_r^{\pm}} f = \pm \pi i \,\text{Res}(f, z_0)$$

Lemma (cerchio grande): Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e illimitato, sia $f: U \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che

$$\lim_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in U}} z f(z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R \to \infty} \oint_{\gamma_R \cap U} f = 0$$

Dove R è il raggio della semicirconferenza che da la curva intorno al polo.

Lemma (di Jordan): Sia f analitica in $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_0, \, \operatorname{Im} z \geq 0 \}$ e si consideri il cammino semicircolare $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $R > R_0$ così che $\{\gamma_R\} \subset A$. Se $\exists M_R$ t.c. $|f(z)| \leq M_R$ $\forall z \in \{\gamma_R\}$ e inoltre $\lim_{R \to \infty} M_R = 0$, allora

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} \, dz = 0 \quad , \ a > 0.$$

Più genericamente, se γ_R è un ~~raggio di~~ arco di circonferenza con ascissa curvilinea estesa tra θ_1 e θ_2 t.c. $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \pi$ e se

$$\lim_{R \to \infty} \max_{\theta \in [\theta_1, \theta_2]} |f(Re^{i\theta})| = 0$$

allora

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{\gamma_R} f(z) e^{iaz} = 0 .$$

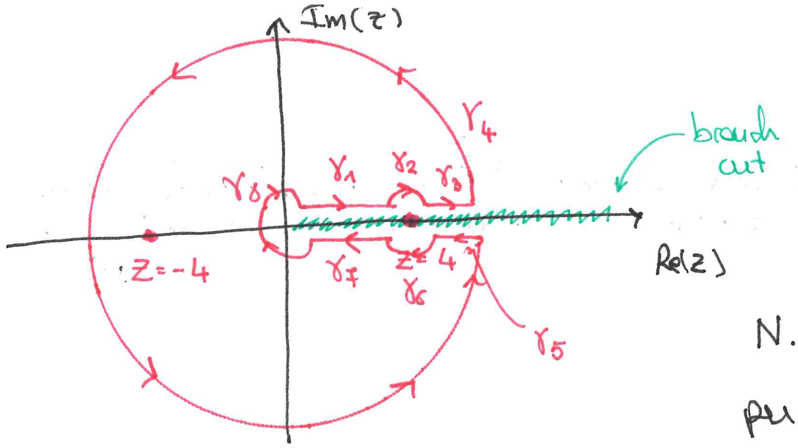
Esercizio 1

Calcolare $PV \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 16} \, dx$ usando tecniche di analisi complessa.

- Consideriamo la funzione $f(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{z^2 - 16}$: questa ha un taglio dovuto alla radice quadrata + due poli semplici dovuti al denominat. $z = \pm 4$

Siccome vogliamo ricostruire quell'integrale reale, scegliamo il ramo della radice dove $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (Invece del ramo principale $-\pi \leq \varphi \leq \pi$)

Il taglio si troverà sull'asse reale positivo che ci permetterà di ricavare l'integrale



Scegliamo questo cammino (In $z=0$ abbiamo un branch point)

le curve $\gamma_1+\gamma_3$ e $\gamma_5+\gamma_7$ ricostruiscono l'integrale

N.B. $\gamma_5+\gamma_7$ si trovano sotto il taglio per cui $\varphi = 2\pi$ e la radice prende un segno negativo ($z = re^{i\varphi} \rightsquigarrow \sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\varphi/2} \Rightarrow \varphi = 2\pi \rightsquigarrow -\sqrt{r}$).

Vediamo ora i vari pezzi dell'integrale

1) $$\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_1+\gamma_3} f(z)\,dz = \cancel{2\pi i}\ PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\,dx$$

lemma piccoli archi

2) $$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_2} f(z)\,dz = -i\pi\,\mathrm{Res}(f,4) = -i\pi\lim_{z\to 4}(z-4)\frac{\sqrt{z}}{(z-4)(z+4)} = -i\pi\frac{1}{4}$$

3) $$\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma_4} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{R}\,e^{i\theta/2}}{R^2e^{2i\theta}-16}\,iRe^{i\theta}\,d\theta$$

$z = Re^{i\theta}$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_0^{2\pi}\frac{(e^{i\theta/2}\sqrt{R})}{e^{2i\theta}-(16/R^2)}\,ie^{2i\theta}\,d\theta \longrightarrow 0 \quad \text{lemma di Jordan}$$

siamo sotto al taglio

4) $$\lim_{R\to\infty}\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_5+\gamma_7} f(z)\,dz = PV\int_\infty^0\left(-\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\,dx\right) = PV\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\,dx$$

5) $$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_6} f(z)\,dz = -i\pi\,\mathrm{Res}(-f,4) = i\pi\frac{1}{4}$$

6) $$\lim_{r\to 0}\oint_{\gamma_8} f(z)\,dz = \lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{r}\,e^{i\theta/2}}{r^2e^{2i\theta}-16}\,ire^{i\theta}\,d\theta = 0$$

Per cui abbiamo che

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\,PV\int_0^\infty\frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\,dx$$

Ma per il thm dei residui

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f;-4) = 2\pi i \lim_{z\to -4} (z+4)\frac{\sqrt{z}}{(z-4)(z+4)} = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

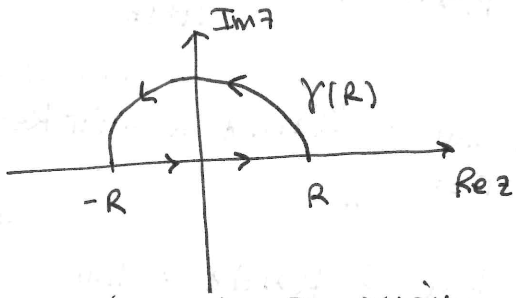
Dunque

$$PV\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2-16}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 2 (compito 23/09/19 es 1)

- Sia $\gamma(R)$ la semicirconferenza $\{z = Re^{i\theta},\ 0\le\theta\le\pi\}$. Si calcoli

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{\gamma(R)} dz \frac{e^{-i\pi z}}{z^2-2z+2}$$



Si noti che su $\gamma(R)$ per $R\to\infty$ non possiamo utilizzare il thm di Jordan. Difatti su $\gamma(R)$ dobbiamo $\mathrm{Im}\,z>0$ per cui, considerando $z = x+iy$ si ha

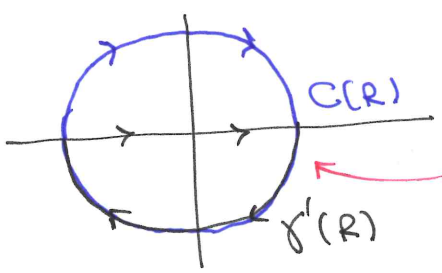
$$\exp[-i\pi(x+iy)] = \exp[-i\pi x]\exp[\pi y]$$

Per $R\to\infty$ il primo fattore oscilla ma il secondo fattore non sopprime esponenzialmente l'integrale $\Rightarrow$ non va a zero! Il lemma di Jordan è la la curva su cui è possibile utilizzare il lemma di Jordan è la semicirconf. nel LHP

Notiamo che $\gamma(R) = C(R)\setminus\gamma'(R)$ ed in $C(R)$ la funzione

$$f(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{z^2-2z+2}$$

è analitica $\Rightarrow$ Residui!



$$\oint_{\gamma'(R)} e^{-i\pi z} g(z) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Per cui

$$\oint_{\gamma(R)} f(z)\,dz = \oint_{C(R)} f(z)\,dz - \oint_{\gamma'(R)} f(z)\,dz$$

nel limite $R\to\infty$ questo fa zero per Jordan

I residui di $f(z)$ vanno calcolati nei poli, dove si annulla il denominatore

$$z^2-2z+2=0 \implies z_{1/2} = \frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} \begin{array}{l} \nearrow 1+i \\ \searrow 1-i \end{array}$$

Abbiamo due poli semplici

- $$\operatorname{Res}(f,1+i) = \lim_{z\to 1+i} \left(z-(1+i)\right) \frac{e^{-i\pi z}}{(z-(1+i))(z-(1-i))}$$

$$= \frac{e^{-i\pi(1+i)}}{(1+i-1+i)} = \frac{e^{-i\pi}}{2i}\, e^{\pi}$$

- $$\operatorname{Res}(f,1-i) = \lim_{z\to 1-i} \left(z-(1-i)\right) \frac{e^{-i\pi z}}{(z-(1+i))(z-(1-i))}$$

$$= \frac{e^{-i\pi(1-i)}}{(1-i-1-i)} = -\frac{e^{-i\pi}}{2i}\, e^{-\pi}$$

Dunque, dato

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma'(R)} f(z)\,dz = 0$$

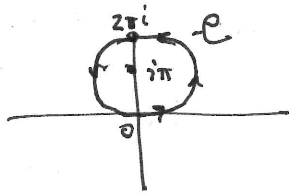
abbiamo che

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma(R)} f(z)\,dz = \cancel{2}\pi\cancel{i}\left[\frac{e^{-i\pi}}{\cancel{2}\cancel{i}}\, e^{\pi} - \frac{e^{-i\pi}}{\cancel{2}\cancel{i}}\, e^{-\pi}\right] = \pi e^{-i\pi}\left[e^{\pi}-e^{-\pi}\right]$$

$$= 2\pi e^{-i\pi}\sinh(\pi).$$

<u>Esercizio 3</u> (Compito 29/01/19 es 1)

Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza di centro $i\pi$ e raggio π. Calcolare l'integrale



$$\oint_{\mathcal{C}} dz\, \frac{e^{z/2}+|z|^2}{(z-i\pi)^2}$$

Domanda: Possiamo usare il thm dei residui? NO! la funzione non è olomorfa per via di $|z|^2 = z\bar{z}$ (Recall f olomorfa $\Rightarrow \bar{\partial} f = 0$).

Però la funzione è additiva

$$f(z) = \frac{e^{z/2}}{(z-i\pi)^2} + \frac{|z|^2}{(z-i\pi)^2} = f_1(z) + f_2(z)$$

Si ha che $f_1(z)$ è olomorfa $\Rightarrow$ residui. Notiamo che $z = i\pi$ è un polo doppio : 2 strade

1) Se f ha polo di ordine K in z_0, il residuo in z_0 è dato da

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(K-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{K-1} \left((z-z_0)^K f(z)\right)\Big|_{z=z_0}$$

2) Calcolo sviluppo di Laurent e prendo coeff. di esp. dell'ordine $(z-z_0)^{-1}$.

Vediamo entrambi. Prima il caso (2)

$$f_1(z) \sim \frac{1}{(z-i\pi)^2} \underbrace{\left[e^{i\pi/2} + \frac{1}{2} e^{i\pi/2}(z-i\pi) + \cdots \right]}_{\text{Sviluppo exp in } z = i\pi}$$

$$= \frac{1}{(z-i\pi)^2} e^{i\pi/2} + \frac{1}{2} e^{i\pi/2} \frac{1}{z-i\pi} + o((z-i\pi)^0)$$

$$= \frac{i}{(z-i\pi)^2} + \frac{i}{2} \frac{1}{z-i\pi} + \cdots$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f_1, i\pi) = \frac{i}{2}$$

Dunque

$$\oint_{\mathcal{C}} f_1(z)\,dz = 2\pi i \frac{i}{2} = -\pi$$

Metodo (1) $(K = 2)$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(z-i\pi)^2 \frac{e^{z/2}}{(z-i\pi)^2} \right] = \frac{1}{2} e^{z/2} \xrightarrow[z = i\pi]{} \frac{i}{2}. \quad \checkmark$$

Per la parte non-olomorfa della funzione dobbiamo fare alcune manipolazioni

$$\oint_{\mathcal{C}} \frac{z\bar{z}}{(z-i\pi)^2}\,dz \xrightarrow[w=z-i\pi]{} \oint_{\mathcal{C}'} \frac{(\bar{z}-i\pi)(z+i\pi)}{z^2}\,dz$$

dove $\mathcal{C}'$ è la circonferenza centrata in 0 di raggio π (lo shift del contorno di integrazione è dovuto al cambio di variabile $z \to z+i\pi$)

Dunque ora calcoliamo

$$\oint_{\mathcal{C}'} \frac{(\bar{w}-i\pi)(w+i\pi)}{w^2}\,dw = \oint_{\mathcal{C}'} \frac{1}{w^2}\left[w\bar{w} - i\pi w + i\pi\bar{w} + \pi^2\right]$$

Notiamo che su $\mathcal{C}'$, $w = \pi e^{i\theta} \Rightarrow \bar{w} = \pi e^{-i\theta} = \frac{\pi^2}{w}$ per cui

$$= \oint_{\mathcal{C}'} \frac{1}{w^2}\left[\pi^2 - i\pi w + i\frac{\pi^3}{w} + \pi^2\right]$$

$\propto \frac{1}{w^2}$ integrale nullo su $\mathcal{C}'$

$\propto \frac{1}{w^3}$ integrale nullo su $\mathcal{C}'$

$\propto \frac{1}{w^2}$ integrale nullo su $\mathcal{C}'$ → Thm integrale di Cauchy con $\mathrm{Ind}(\gamma, 0) = 1$ dove $\gamma \equiv \mathcal{C}$.

Rimane solamente

$$= \oint_{\mathcal{C}'} \frac{1}{w^2}(-i\pi w) = \oint_{\mathcal{C}'} \frac{-i\pi}{w}\,dw = 2\pi i(-i\pi) = 2\pi^2$$

Per cui l'integrale darà

$$\boxed{I = -\pi + 2\pi^2}$$