Esercizi Fourier

Esercizio 1

Trovare la $f(x)$ tale che $f(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, che soddisfa l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(z)\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\delta(x-y-z-t)dydzdt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \sigma \geq 1$$

Soluzione Es. 1

Integrando su y e z si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-t)\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dt = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

ove

$$G(x) = (f * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)f(y)dy$$

Usando il teorema di convoluzione due volte e le proprietà della trasformata di Fourier della gaussiana si ha, per $\sigma > 1$

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\sqrt{2\pi a^2}}$$

ove

$$a^2 = \frac{\sigma^2 - 1}{2}$$

mentre per $\sigma = 1$

$$f(x) = \delta(x)$$

Se $\sigma < 1$ non si ha soluzione.

Per chi conosce un po' di probabilità il risultato è ovvio; la somma di 3 variabile gaussiane indipendenti è una variabile gaussiana la cui varianza è la somma delle 3 varianze: $a^2 + a^2 + 1 = \sigma^2$.

Esercizio 4(10pt)

Trovare la $f(x,t)$ soluzione dell'equazione

$$\partial_t f(x,t) = e^{-t}\partial^2_{xx} f(x,t) - F(t)f(x,t)$$

con

$$F(t) = \frac{1}{t^\alpha}\Theta(t-0.8)\delta(\sin \pi t)$$

ove $\Theta(z)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $z < 0$ e vale 1 se $z > 0$, e condizione iniziale $f(x,0) = \delta(x-2)$. Determinare

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t)$$

per $\alpha > 0$. Lasciare indicate sommatorie il cui valore numerico non è facile da trovare.

Soluzione Es. 1

Passando in trasformata di Fuorier si ha

$$\frac{d}{dt}\hat{f}(k,t) = \left(-k^2 e^{-t} - F(t)\right)\hat{f}(k,t)$$

che si risolve facilmente:

$$\hat{f}(k,t) = e^{-H(t)}e^{-G(t)k^2}\hat{f}(k,0)$$

ove

$$G(t) = \int_0^t e^{-t'}dt' = 1 - e^{-t}, H(t) = \int_0^t F\left(t'\right)dt'$$

ricordando le proprieta' della $\Theta()$ e della delta di Dirac, si ha $H(t) = 0$ per $t < 1$, mentre per $t > 1$ si ha

$$F(t) = \frac{1}{\pi t^\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\delta(t-n), \quad H(t) = \sum_{n=1}^{N(t)}\frac{1}{\pi n^\alpha}$$

ove $N(t)$ e' la parte intera di $t:$ cioe' 1 se $1 < t < 2; 2$ se $2 < t < 3$ etc.

Si ha quindi

$$\begin{aligned} f(x,t) &= e^{-H(t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-G(t)k^2}\hat{f}(k,0)e^{ikx}dk \\ &= e^{-H(t)}\frac{1}{2\pi}\iint e^{-G(t)k^2} f\left(x',0\right)e^{ik\left(x-x'\right)}dkdx' \end{aligned}$$

Usando la $f\left(x',0\right)$, con calcoli standard (trasformata di Fuorier della Gaussiana) si ottiene

$$f(x,t) = e^{-H(t)}\frac{1}{\sqrt{4\pi G(t)}}e^{-\frac{(x-2)^2}{4G(t)}}$$

Notando che

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = 1$$

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^\alpha} = C(\alpha) < \infty \text{ solo se } \alpha > 1,$$

si ha

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) = 0 \text{ se } \alpha \leq 1$$

$$\lim_{t\to\infty} f(x,t) = e^{-C(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{4}} \text{ se } \alpha > 1$$

Esercizio 2

Data la funzione

$$P(x) = \Theta(x)e^{-x}$$

ove $\Theta(x)$ indica la funzione gradino che vale 0 se $x < 0$ e vale 1 se $x > 0$, calcolare

$$f(x) = \iint P(x_1)\, P(x_2)\, \delta(x - x_1 - x_2)\, dx_1 dx_2$$

Soluzione Es. 2

E' immediato scrivere $f(x)$ nella forma

$$f(x) = \int P(x_1)\, P(x - x_1)\, dx_1$$

passando in trasformata di Fourier e ricordando le proprieta' della convoluzione si ha

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi}(\hat{P}(k))^2$$

ove

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ikx} dx, \hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int P(x)e^{-ikx} dx.$$

Il calcolo di $\hat{P}(k)$ e' elementare:

$$\hat{P}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(ik+1)},$$

si ha quindi

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{ik+1}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{e^{ikx}}{(ik+1)^2} dk$$

l'integrale e' facile basta usare la formula di Cauchy:

$$f(x) = \Theta(x)xe^{-x}.$$

Esercizio 3

Trovare la $f(x)$ tale che $f(x) \to 0$ per $|x| \to \infty$, che soddisfa l'equazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g_1(z) g_1(t) \delta(x - y - z - t) dy dz dt = g_2(x)$$

ove

$$g_1(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad g_2(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \sigma^2 \leq 1/2$$

Soluzione Es. 3

Indicando con G la convoluzione di g_1 con se stessa, si ha

$$\int f(y) G(x - y) dy = g_2(x)$$

passando in trasformata di Fourier ed usando il teorema di convoluzione

$$G(x - y) = \frac{e^{-\frac{(x-y-2m)^2}{4\sigma^2}}}{\sqrt{4\pi\sigma^2}}$$

Utilizzando ancora il teorema di convoluzione si ha

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-M)^2}{2\Sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\Sigma^2}} \text{ con } M = -2m, \Sigma^2 = 1 - 2\sigma^2 \text{ se } \sigma^2 < 1/2$$

mentre se $\sigma^2 = 1/2$ si ha

$$f(x) = \delta(x - M)$$