Spazi di Hilbert finito dimensionali

Lezione 9

<u>Def</u> (Spazio pre-Hilbertiano): Uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ (su $\mathbb{C}$) è detto pre-Hilbertiano se su di esso è definito un prodotto interno

$(\cdot|\cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ tale che $\forall x, y \in \mathcal{H}$

- $(x|x) \geq 0$ e $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $(x|y+z) = (x|y) + (x,z)$ e viceversa per il primo elemento
- $(x|\lambda y) = \lambda (x|y) \quad \lambda \in \mathbb{C}$
- $\overline{(x|y)} = (y|x)$

ovvero è sesquilineare, def. positivo e non degenere

Il prodotto interno ci permette di definire una norma $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

<u>Def</u>: Una norma è detta di Hilbert se soddisfa la regola del parallelogramma

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

<u>Def</u>: Uno $\mathbb{C}$-spazio vettoriale equipaggiato con un prodotto interno si dice di Hilbert se la norma indotta dal prodotto interno lo rende ~~di~~ ~~+~~ uno spazio di Banach ovvero se è completo nella topologia indotta dalla norma.

ogni serie di Cauchy è convergente

$\forall \varepsilon \; \exists N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n,m > N_\varepsilon$

- Esercizio 23/09/2019

Nello spazio $\mathcal{H}$ delle matrici complesse $n \times n$ con prodotto interno $(B,A) = Tr(B^\dagger A)$ si consideri l'op. lineare $\hat{K} : A \longmapsto [Q, A]$ con Q fissata.

i) Determinare op $\hat{K}^\dagger$, è iniettivo?

ii) Si dimostri che $Ran(\hat{K}) \neq \mathcal{H}$

iii) Si consideri il caso in cui Q è hermitiana: mostrare che gli autovalori di $\hat{K}$ sono $\lambda_i - \lambda_j$, dove $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ è lo spettro della matrice Q; nel caso in cui tutti gli autovalori di Q sono non degeneri determinare la dim. di $Ker\, \hat{K}$

$\mathcal{H} \equiv M_{n\times n}(\mathbb{C})$: $\hat{K} : \mathcal{H} \longmapsto \mathcal{H}$ lineare

La linearità è la stessa che avete visto al corso di geometria 1, i.e.

$\hat{K}(A+B) = \hat{K}(A) + \hat{K}(B)$ $\quad \hat{K}(\lambda A) = \lambda \hat{K}(A) \quad \forall A,B \in \mathcal{H} \;\; \lambda \in \mathbb{C}$

$\hat{K} : A \longmapsto [Q,A]$ dove $[\cdot,\cdot]$ è detto commutatore (parentesi di Lie)

e sulle matrici agisce come segue

$[Q,A] = QA - AQ$ con il prodotto tra matrici.

i) $\hat{K}^{+}$? è iniettivo ?

$\hat{K}^{+}$ è l'op. aggiunto a $\hat{K}$.

<u>Thm</u>: Per ogni ~~funzionale~~ operatore lineare $\hat{A} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ esiste un operatore, $\hat{A}^{+}$ detto aggiunto, tale che $(x, \hat{A}y) = (\hat{A}^{+}x, y) \quad \forall x,y \in \mathcal{H}$

Per cui consideriamo $A,B \in \mathcal{H}$

$$(A, \hat{K}(B)) = (\hat{K}^{+}(A), B)$$

$$\parallel$$

$$(A,[Q,B]) = (A, QB - BQ) = (A,QB) - (A,BQ)$$

$$= Tr(A^{+}QB) - Tr(A^{+}BQ) \qquad \text{La traccia è ciclica!}$$

$$= Tr(A^{+}QB) - Tr(QA^{+}B)$$

$$= Tr((Q^{+}A)^{+}B) - Tr((AQ^{+})^{+}B)$$

$$= (Q^{+}A, B) - (AQ^{+}, B) = ([Q^{+}, A], B) = (\hat{K}^{+}(A), B)$$

Dunque $\hat{K}^{+} = [Q^{+}, \cdot\,]$.

Per controllare se $\hat{K}^{+}$ è iniettivo $\left(\forall A,B \in \mathcal{H} \Rightarrow \hat{K}(A) \neq \hat{K}(B),\ A \neq B\right)$

controlliamo se $Ker(\hat{K}^{+}) = \{0\}$ dove $0 \in \mathcal{H}$ è la matrice nulla

Recall: $Ker(f) = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

Andiamo a cercare dunque se $\exists A \in \mathcal{H}$ t.c. $\hat{K}^+(A) = 0$

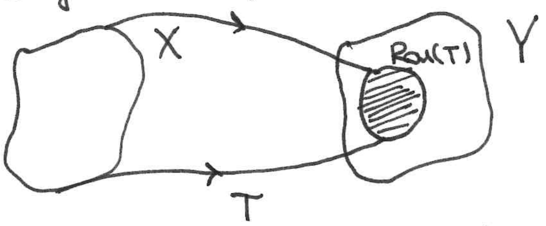
Data la forma di $\hat{K}^+$, notiamo che se $A \in \mathrm{Ker}(\hat{K}) \Rightarrow A$ commuta con Q^+. Ma evidentemente $Q^+ \in \mathcal{H}$ e dunque

$$\hat{K}^+(Q^+) = [Q^+, Q^+] = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(\hat{K}^+) \neq \{0\}$$

Allo stesso modo si mostra che $\hat{K}$ non è iniettivo.

ii) <u>Def</u>: Siano X, Y spazi vettoriali e $T: X \to Y$ lineare.

Il Range di T, $\mathrm{Ran}(T)$ è l'immagine di X sotto l'azione di T



Ciò che vogliamo mostrare è che $\mathrm{Ran}(\hat{K}) \neq \mathcal{H}$. Condizione necessaria affinché questo avvenga è che

$\dim \mathrm{Im}(\hat{K}) \neq \dim \mathcal{H}$. $\qquad \mathrm{Im}(\hat{K}) = \{A \in \mathcal{H} \mid \exists B \in \mathcal{H} : \hat{K}(B) = A\}$

Siccome siamo su uno spazio vettoriale finito dimensionale, possiamo sfruttare il thm. del rango più nullità

$$\dim(\mathcal{H}) = \dim(\mathrm{Ker}\,\hat{K}) + \dim(\mathrm{Im}\,\hat{K})$$

ma abbiamo visto che $\dim(\mathrm{Ker}\,\hat{K}) \geq 1$ poiché non è iniettivo

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\,\hat{K}) = -\dim(\mathrm{Ker}\,\hat{K}) + \dim(\mathcal{H}) \leq \dim(\mathcal{H}) - 1 \neq \dim(\mathcal{H})$$

$$\Rightarrow \mathrm{Ran}\,\hat{K} \neq \mathcal{H}$$

iii) Quando Q è hermitiana $\Rightarrow Q = Q^+$

Siano $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ gli autovalori di Q, non degeneri $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$.

Grazie al teorema spettrale sappiamo che Q hermitiana è sempre simile ad una matrice diagonale tramite una matrice unitaria

$(UU^+ = U^+U = \mathbb{1})$

Per cui $Q = UDU^+$ $\quad D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

Per cercare gli autovalori di $\hat{K}$ risolviamo il problema

$$\hat{K}(A) = \mu A \quad \text{con } \mu \in \mathbb{C}$$

$\Downarrow$

Q diagonalizzabile

$$\mu A = [Q, A] = QA - AQ = UDU^+A - AUDU^+$$

Moltiplico da sx per U^+ e da destra per U

$$\mu \underbrace{U^+AU}_{B} = D(U^+AU) - (U^+AU)D$$

$$\mu B = DB - BD \quad \text{con } B \in \mathcal{H}$$

consideriamo le componenti

$$\mu B_{ij} = \sum_K D_{iK} B_{Kj} - \sum_K B_{iK} D_{Kj}$$

prodotto riga per colonna

Siccome $D_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j$, nelle somme gli unici elementi non nulli sono quelli per cui $K = i$ (nella prima) e $K = j$ (nella seconda)

$$\mu B_{ij} = \lambda_i B_{ij} - \lambda_j B_{ij}$$

$$\Rightarrow [(\lambda_i - \lambda_j) - \mu] B_{ij} = 0 \quad \forall i,j = 1, \dots, n$$

Notiamo che, considerando la base canonica di $\mathcal{H} = M_{n\times n}(\mathbb{C})$, questa sarà sol. all'equazione.

Difatti l'eq. ci dice che se $B_{IJ} \neq 0 \Rightarrow B_{ij} = 0 \quad \forall i \neq I, j \neq J$

siccome per h.p. $\lambda_i \neq \lambda_j$

La base canonica $e_{\alpha\beta}$ ha proprio questa forma

$$\begin{array}{cc} e_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} & \leftarrow \alpha \\ \uparrow \\ \beta & \end{array}$$

Questo mostra che $\mu = \lambda_i - \lambda_j$ e che una base di autovettori per $\hat{K}$ è data da $E_{\alpha\beta} = U e_{\alpha\beta} U^+$ con autovalori $\lambda_\alpha - \lambda_\beta$

La dim. di $\mathrm{Ker}\,\hat{K}$ si può trovare banalmente. Siccome $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, gli unici autovettori nulli di $\hat{K}$ (quelli che spannano $\mathrm{Ker}\,\hat{K}$) sono $\alpha = \beta$ $(\lambda_\alpha - \lambda_\beta = 0)$. Per cui

$$\mathrm{Ker}\,\hat{K} = \mathrm{Span}\left\{ E_{\alpha\alpha} = U e_{\alpha\alpha} U^\dagger \right\}_{\alpha=1}^{n}$$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}\,\hat{K} = n.$$

- Esercizio 29/01/2019

Sullo spazio ~~della~~ lineare delle matrici 3×3 $M_3(\mathbb{R})$ munito di prodotto interno $(A,B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$, si consideri l'op. lineare $\hat{M} : M_3(\mathbb{R}) \to M_3(\mathbb{R})$ def. con $\hat{M}A = M \cdot A$ dove

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Si espliciti l'op. adj $\hat{M}^\dagger$

ii) Si determini $\mathrm{Ker}\,\hat{M}$ e la sua dim.

iii) Si determini il proiettore $\hat{P}$ su $\mathrm{Ker}\,\hat{M}$

iv) Si calcoli $\hat{P} I$, dove I è id. 3×3.

i) Per def. di op. adj $(A, \hat{M}B) = (\hat{M}^\dagger A, B)$ e dunque

$$\mathrm{Tr}(A^T \hat{M} B) = \mathrm{Tr}(A^T M B) = \mathrm{Tr}\left((M^T A)^T B \right)$$

$$= (M^T A, B) = (\hat{M}^\dagger A, B)$$

Per cui $\hat{M}^\dagger A = M^T A$. ← azione di $\hat{M}$ su $M_3(\mathbb{R})$

ii) $\mathrm{Ker}\,\hat{M} = \{ A \in M_3(\mathbb{C}) \mid M \cdot A = 0 \}$

Usiamo la seguente notazione

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \equiv \left(\vec{a}_1 \middle| \vec{a}_2 \middle| \vec{a}_3 \right)$$

$\vec{a}_i$ vettori di $\mathbb{R}^3$

$$M = \begin{pmatrix} — \; m_1^T \; — \\ \vdots \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \vec{m}_1^T \\ \hline \vec{m}_2^T \\ \hline \vec{m}_3^T \end{pmatrix}$$

Per trovare una base di Ker $\hat{M}$ risolviamo le eq

$$(MA)_{ij} = \vec{m}_i^T \vec{v}_j = 0 \qquad (1)$$

Notiamo che $\vec{m}_1^T = \vec{m}_2^T + \vec{m}_3^T$. La sol. dell'eq (1) è della forma

$$\begin{cases} \vec{m}_2^T \cdot \vec{v}_j = 0 \\ \vec{m}_3^T \cdot \vec{v}_j = 0 \end{cases} \quad \forall j = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_j \perp \operatorname{Span}\{\vec{m}_2, \vec{m}_3\}$$

Data l'ortogonalità dello span si ha che $\vec{v}_j = \alpha_j (\vec{m}_2 \times \vec{m}_3)$ con $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Chiamiamo $\vec{m}_2 \times \vec{m}_3 \equiv \vec{\mu}$ e poniamo $\|\vec{\mu}\| = 1$. Chiaramente $\vec{v}_j$ fornisce una base per Ker $\hat{M}$ e dunque

$$\operatorname{Ker} \hat{M} = \left\{ (\alpha_1 \vec{\mu} \,|\, \alpha_2 \vec{\mu} \,|\, \alpha_3 \vec{\mu}) \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3 \right\}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} \hat{M} = 3.$$

iii) L'azione del proiettore $\hat{P}$ su Ker $\hat{M}$, data la base

$$u_1 = (\vec{\mu} \,|\, 0 \,|\, 0), \quad u_2 = (0 \,|\, \vec{\mu} \,|\, 0), \quad u_3 = (0 \,|\, 0 \,|\, \vec{\mu})$$

di Ker $\hat{M}$, è dato da

$$\hat{P} A = \sum_{i=1}^{3} (A \,|\, u_i)\, u_i$$

Fare esempio proiezione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ se non è chiara la formula

ma notiamo che

$$(A \,|\, u_1) = \operatorname{Tr}(A^T u_1) = \operatorname{Tr}\left(A^T (\vec{\mu} \,|\, 0 \,|\, 0)\right) = \operatorname{Tr}\left(A^T \mu \,|\, 0 \,|\, 0\right) = (A^T \mu)_1$$

$$\rightsquigarrow \operatorname{Tr}\left[\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{13} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{31} & & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 \\ \mu_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \operatorname{Tr}\left[\begin{pmatrix} \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \mu_3 a_{13} & 0 & 0 \\ \mu_1 a_{21} + \cdots & 0 & 0 \\ \mu_1 a_{31} + \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12} + \mu_3 a_{13}$$

Per cui si ha

$$\hat{\mathcal{P}}A = \sum_{i=1}^{3} (A^T\bar{\mu})_i u_i = \sum_{i,j=1}^{3} (A^T_{ij}\mu_j) u_i$$

Dunque i suoi elem. di matrice sono

$$(\hat{\mathcal{P}}A)_{rs} = \sum_{i,j=1}^{3} (A^T_{ij}\mu_j)(u_i)_{rs} = \sum_{i,j=1}^{3} (A^T_{ij}\mu_j)\,\delta_{is}\,\mu_r$$

$$= \sum_{j=1}^{3} A^T_{sj}\,\mu_j\mu_r$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \mathcal{P}_{rj} A_{js} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \mathcal{P}_{rj} A^T_{sj} = \sum_{j=1}^{3} A^T_{sj}\,\mu_j\mu_r}_{\text{Queste devono combaciare termine per termine}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{rj} = \mu_r\mu_j}$$

Notare che la norm. di μ è fondamentale poiché gli autovalori di un proiettore sono esclusivamente 0 o +1

$$\hat{\mathcal{P}}\cdot A = \Pi\cdot A \qquad \Pi_{ij} = \mu_i\mu_j$$

iv) L'azione sull'identità è banale

$$(\hat{\mathcal{P}}\,\mathbb{1})_{ij} = (\Pi\,\mathbb{1})_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \Pi_{ik}\delta_{kj} = \sum_{k=1}^{3} \mu_i\mu_k\delta_{kj} = \mu_i\mu_j .$$

N.B: I valori del vettore $\bar{\mu}$ possono essere calcolati dalla def. opportunamente normalizzato.

$$\bar{\mu} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}}\right) \qquad \bar{\mu}' = (1,-1,-3)$$

$$\hat{\mathcal{P}} \rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

• Esercizio 19/06/2019

Dimostrare ~~da~~ l'affermazione "per una matrice $n \times n$ complessa Θ la norma sup coincide con $\sqrt{\lambda_M}$, dove λ_M è l'autovalore massimo della matrice $\Theta^+\Theta$".
In alternativa, verificare che l'affermazione è vera per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

La norma sup è definita come $\sup\limits_{\substack{x \in D(\Theta) \\ x \neq 0}} \dfrac{\|\Theta x\|}{\|x\|} = \|\Theta\|_{sup}$

L'op. agisce su uno spazio vettoriale generico, non abbiamo una def. esplicita della sua norma, però sappiamo che

1) $\|\Theta x\|^2 = (\Theta x, \Theta x) = (x \mid \Theta^+ \Theta x)$

notiamo che $\Theta^+\Theta$ è hermitiano, difatti $(\Theta^+\Theta)^+ = \Theta^+\Theta$ per cui, per il thm spettrale, $\exists D$ diagonale (reale) t.c.

$\Theta^+\Theta = U^+ D U$ con U unitaria.

Inoltre $\Theta^+\Theta$ è semidef. positivo, ossia $x^T \Theta^+ \Theta x \geq 0$, difatti

$$x^T \Theta^+ \Theta x = (x \mid \Theta^+ \Theta x) = (\Theta x \mid \Theta x) = \|\Theta x\|^2 \geq 0 \quad \text{per def.}$$

↳ gli autovalori di $\Theta^+\Theta$ sono ≥ 0.

Dunque

$$\|\Theta\|_{sup} = \sqrt{\frac{(x \mid U^+ D U x)}{(x, x)}} \sup_{x \in \mathbb{C}^n / \{0\}}$$

$$= \sqrt{\frac{(Ux \mid DUx)}{(x \mid x)}} \sup_{x \in \mathbb{C}^n / \{0\}}$$

il sup va prima l'ho dimenticato!

Ma ponendo $y = Ux$, questo è semplicemente un cambio di base (biunivoco e unitario)

$$= \sup_{y \in \mathbb{C}^n / \{0\}} \sqrt{\frac{(y \mid Dy)}{(y \mid y)}} \longleftarrow$$

trasf. unitarie lasciano invariata la norma per def.

Su $\mathbb{C}^n$ conosciamo il prodotto scalare canonico e D è diagonale

$$\Rightarrow \sqrt{(y|Dy)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2} \leq \sqrt{\lambda_M} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} = \sqrt{\lambda_M} \sqrt{(y|y)}$$

Dobbiamo massimizzare $\sqrt{\frac{(y|Dy)}{(y|y)}}$ ma per quanto trovato

$$\sqrt{\frac{(y|Dy)}{(y|y)}} \leq \sqrt{\lambda_M}$$

Se scelgo $y = u_{max}$ ~~l'autovalo~~ l'autovettore associato all'autovalore λ_M

$$\Rightarrow \sup_{y \in \mathbb{C}^n / \{0\}} \sqrt{\frac{(y|Dy)}{(y|y)}} = \sqrt{\lambda_M} \Rightarrow \|\Theta\|_{sup} = \sqrt{\lambda_M}$$

→ vettori ortogonali $(x|x')=0$ $\qquad (\|x\| = \sqrt{(x|x)})$

→ insieme di vettori ortonormali $(u_i|u_j)=\delta_{ij}$

→ disuguaglianza di Schwarz $|(x|y)| \le \|x\|\|y\|$

→ disuguaglianza di Bessel $\{u_k\}_{k=1}^{n}$ set ortonormale

$$\|x\|^2 \ge \sum_{k=1}^{n} |(u_k|x)|^2$$

$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ $\qquad (x|\cdot) : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ continuo

---

esercizio) spazio normato

$x \perp y$ nel senso Birkhoff-James

$$\Updownarrow$$

$$\|x\| \le \|x+\lambda y\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

---

spazio con prodotto interno

$(x|y)=0$

$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$

$$\|x+\lambda y\|^2 = (x+\lambda y|x+\lambda y) = (x|x) + \lambda(x|y) + \bar{\lambda}(y|x) + |\lambda|^2(y|y) =$$

$$= \|x\|^2 + \lambda(x|y) + \bar{\lambda}\,\overline{(x|y)} + |\lambda|^2\|y\|^2$$

$$\|x+\lambda y\|^2 \ge \|x\|^2$$

$$|\lambda|^2\|y\|^2 + \lambda(x|y) + \bar{\lambda}\,\overline{(x|y)} \ge 0$$

$$\|y\|^2 \ne 0$$

$$|\lambda|^2 + \lambda\frac{(x|y)}{\|y\|^2} + \bar{\lambda}\frac{\overline{(x|y)}}{\|y\|^2} \ge 0$$

$$\left|\lambda + \frac{(x|y)}{\|y\|^2}\right|^2 - \frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^4} \ge 0$$

$$\frac{|(x|y)|^2}{\|y\|^4} = 0 \iff (x|y)=0$$

$\Rightarrow$ sequenza di Cauchy

le somme parziali formano una sequenza di Cauchy in $\mathcal{B}(X)$ se le somme parziali della serie di potenze $f(\|\hat{A}\|)$ sono una sequenza di Cauchy in $\mathbb{C}$

$$f(\|\hat{A}\|) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \|\hat{A}\|^n$$

condizione sufficiente $\|\hat{A}\| < R$

dove R è il raggio di convergenza della serie $f(z)$ criterio della radice

completezza di $\mathcal{B}(X)$ implica che $f(\hat{A})$ è ben definito

$$f(\hat{A}) = \lim_{N\to\infty} \hat{S}_N$$

$$\|f(\hat{A}) - \lim_{N\to\infty} \hat{S}_N\| = 0$$

convergenza in norma

---

(1) $\hat{A},\ f(\hat{A}) \in \mathcal{B}(X)$

$\hat{A}x = \lambda x$ con $x \in X$

allora $f(\hat{A})x = f(\lambda)x$

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{A}^n$$

$$f(\hat{A})x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\hat{A}^n x}_{\underbrace{\hat{A}^{n-1}\hat{A}x}_{\hat{A}^{n-1}\lambda x}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n x = f(\lambda)x$$

(Spazi di Hilbert) $\mathcal{H}$

prodotto interno

$(\,|\,) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(x|x) \geq 0$ e $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$

$(x|\lambda y) = \lambda(x|y)$ $\longrightarrow$ $(\lambda x|y) = \bar{\lambda}(x|y)$

$\overline{(x|y)} = (y|x)$