Modelli differenziali: trasmissione del calore

Esercizio 1. *Consideriamo l'equazione del calore in una sbarra di metallo posta nell'intervallo* $[0, 1]$ *al tempo* $t > 0$. *I bordi della sbarra sono tenuti a temperatura nulla (condizioni di Dirichlet omogenee) e all'istante iniziale* $t = 0$ *la temperatura è nulla. Precisamente il modello è dato da*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \quad \text{in } (0,1),\ t > 0, \quad \mu = 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) = 0 \quad x \in (0,1)\ . \end{cases}$$

dove f *è stata determinata imponendo che la soluzione esatta sia* $u(x,t) = \sin(\pi x)\sin(\pi t)$. *Tale problema descrive ad esempio l'evoluzione della temperatura* $u(t,x)$ *nel punto* x *al tempo* t *di una barra metallica di lunghezza unitaria che occupa l'intervallo* $(0, 1)$ *la cui conducibilità termica è* $\mu = 1$ *e i cui estremi sono tenuti ad una temperatura costante di zero gradi. La produzione calorica per unità di lunghezza fornita alla barra è data dalla forzante* f.

a) verificate che $f(t,x) = \pi\sin(\pi x)(\cos(\pi t) + \pi\sin(\pi t))$.

c) Utilizzate le differenze finite per la semidiscretizzazione spaziale su una griglia uniforme con nodi $x_j = jh$, $0 \leq j \leq N + 1$, *and* $h = 1/(N + 1)$. *Arriverete in questo modo ad un sistema di equazioni differenziali ordinario del tipo*

$$\begin{cases} \mathbf{u}' + \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \qquad t > 0, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0\ , \end{cases}$$

Calcolate le dimensioni e gli elementi dei vettori $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{u}_0$, *e della matrice* $\mathbf{A}$.

d) Per la discretizzazione temporale, mettete a confronto i metodi di Eulero esplicito, Eulero implicito e Crank-Nicolson con passo Δt *costante.*

Esercizio 2. *Risolvere il seguente modello*

$$\begin{cases} y''(t) + 100y'(t) + y(t) = 0, \\ y(0) = 10, \quad y'(0) = 20, \end{cases}$$

con $t \in [0, 1]$, *usando Eulero esplicito ed implicito. Valutare la soluzione per* $h = 0.001$, $h = 0.01$, $h = 0.02$, $h = 0.2$. *Commentare i risultati ottenuti.*

Attività proposta

Esercizio 3. *Consideriamo un gruppo di* n *particelle (agenti) al tempo* t *e con* $x_i(t)$ *indichiamo la loro opinione a partire da uno stato iniziale* $x_i(0) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. *Supponiamo che lo stato di ciascuna particella vari in dipendenza dello stato delle altre. L'idea alla base di questo modello è che gli agenti con opinione completamente differente non influenzano gli altri e vi è una specie di mediazione tra gli agenti le cui opinioni sono all'interno di un intervallo limitato di confidenza descritto da un parametro* $\epsilon \geq 0$. *Sia* $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \cdots x_n(t)]^T$, *lo stato del sistema al tempo* $t \geq 0$. *La dinamica dell'opinione dell'* $i-$*esima particella è data dalle equazioni*

$$\frac{d}{dt}x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}(t,\epsilon)(x_j(t) - x_i(t)), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

dove $\mathbf{A}(t,\epsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *è la matrice di interazione data da*

$$A_{i,j}(t,\epsilon) := \begin{cases} \frac{1}{\sigma_i} & \textit{se } |x_i - x_j| \le \epsilon, \\ \\ 0 & \textit{altrimenti}, \end{cases}$$

dove, posto $\mathcal{N}_i(t,\epsilon) := \{j \in \{1,\cdots,n\} : |x_i - x_j| \le \epsilon\}$, $i = 1,\cdots,n$ *per definire l'intorno della* $i-$*esima particella* $x_i(t)$ *al tempo* t*, abbiamo due possibili tipi di interazioni definite da*

$$\sigma_i := \begin{cases} |\mathcal{N}_i(t,\epsilon)|, & \textit{interazioni non simmetriche}, \\ \\ n & \textit{interazioni simmetriche}. \end{cases} \tag{2}$$

Implementare un m-file che prenda in input il numero n *degli agenti e il valore del parametro di confidenza* ϵ*. Il programma deve prevedere possibili valori iniziali* $x_i(0) \in [0,1]$ *per gli agenti; in particolare deve prevedere condizioni iniziali per le opinioni degli agenti di tipo equispaziato oppure di tipo random oppure condizioni iniziali secondo la distribuzione normale con media* 0.5 *e deviazione standard a scelta, ad esempio* `x0 = 0.5 + 0.09.*randn(n,1);` *oppure ancora condizioni iniziali di tipo non simmetrico, ad esempio* `x0(:,1) = pearsrnd(0.3,0.15,1,3,n,1);` *(si consiglia* `help pearsrnd`*). Utilizzare il metodo di Eulero esplicito per determinare la soluzione numerica del sistema differenziale* (1)*. Porre il passo temporale* $dt = 1\mathrm{e}-1$ *e il tempo di valutazione* $t_{fin} = 20$*. Plottare la soluzione numerica nell'intervallo* $[0, t_{fin}]$*. Il programma deve implementare le due possibili scelte per* σ_i *secondo le definizioni* (2)*. In base alle possibili scelte per le condizioni iniziali delle opinioni degli agenti (variare anche la deviazione standard o altri parametri statistici), per le interazioni, di tipo simmetrico e non, per il parametro di confidenza* ϵ*, e per il numero di particelle* n*, discutere le seguenti situazioni*

1. *quando si ha consenso?*
2. *quando si ha clustering?*
3. *studiare il transiente tra interazioni simmetriche e non simmetriche;*
4. *fissare un agente* $i = \bar{i}$ *e vedere come varia* $\sigma_i(t)$*.*