Modelli Differenziali

Davide Peccioli

Anno accademico 2022-2023

Università degli studi di Torino

Indice

Capitolo 1

Ripasso E.D.O.

Problema di Cauchy. (1.1) Data una funzione a valori in $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, con

- $r \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ o, più precisamente
- $(t, \boldsymbol{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Ω aperto

ci si chiede sotto quali condizioni su $\boldsymbol{f}$ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

ammette <u>almeno</u> una soluzione o ammette <u>esattamente</u> una soluzione, al variare della condizione iniziale $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$.

Teorema I.

Teorema di Peano

Se $\boldsymbol{f}$ è continua su Ω, allora per ogni punto $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$ esiste un intorno di t_0 nel quale è definita <u>almeno</u> una soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

Pennello di Peano. (1.2) Se si dimostra che il problema di Cauchy ammette due soluzioni distinte, allora in realtà ne ha infinite.

Esempio. (1.3) Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Questo problema ammette certamente la soluzione $u \equiv 0$, ma anche le soluzioni

$$u_0^{\pm} = \begin{cases} \pm\left(\dfrac{2}{3}\,t\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Teorema II.

Teorema di Cauchy-Lipschitz

Se $\boldsymbol{f}$

- è continua,
- è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e uniformemente nella prima[a]

allora per ogni punto $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$ esiste un intorno di t_0, $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ nel quale è definita un'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

[a] Ovvero

$$\forall\, K \subset \Omega, \quad \exists\, L > 0 : \quad \left\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) - f(t, \boldsymbol{y})\right\| \leq L\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \qquad \forall\, (t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in K.$$

Dimostrazione di II. La dimostrazione si articola nei seguenti passaggi:

- si considera l'equazione di Volterra

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{u}(s)\right)\, ds$$

  e si mostra che quest'ultima ammette unica soluzione continua in un intorno di t_0;

- esistenza e unicità dell'equazione di Volterra si dimostrano applicando il Teorema delle contrazioni di Banach-Cacioppoli;

- la seguente successione

$$\boldsymbol{u}_0(t) \equiv \boldsymbol{u}_0, \qquad \boldsymbol{u}_n(t) = \boldsymbol{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{u}_{n-1}(s)\right)\, ds, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

  risulta convergere uniformemente alla soluzione dell'equazione di Volterra e dunque all'unica soluzione del Problema di Cauchy.

Osservazione. (1.4) L'intervallo di definizione della soluzione del problema di Cauchy è certamente più ampio di $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$: possiamo infatti applicare lo stesso teorema di esistenza ed unicità locale ai problemi di Cauchy con condizioni iniziali

$$\left(t_0 \pm \delta, \boldsymbol{u}(t_0 \pm \delta)\right) \in \Omega$$

ed iterare questo procedimento.

In generale, quindi, esiste un intervallo $(T_{\min}, T_{\max})$ per la soluzione $\boldsymbol{u}(t; t_0, \boldsymbol{u}_0)$, che per costruzione non può che essere aperto e connesso.

Teorema III.

Teorema di Esistenza Globale

Sia f tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte.

Sia inoltre $S = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ una striscia tale che $\overline{S} \subseteq \Omega$. Se esiste una coppia di costanti positive k_1, k_2 tali per cui

$$\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\| \leq k_1 + k_2 \|\boldsymbol{x}\|, \quad \forall (t, \boldsymbol{x}) \in \overline{S}$$

allora, per ogni $(t_0, \boldsymbol{u}_0) \in S$, l'intervallo massimale della soluzione $\boldsymbol{u}(t; t_0, u_0)$ contiene l'intervallo $[a, b]$.

(1.5) Questo teorema è ciò che garantisce l'esistenza globale per i sistemi lineari del tipo

$$\boldsymbol{x}'(t) = A(t)\, \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t)$$

con $A(t)$ matrice $n \times n$

Teorema IV.

Sia $\boldsymbol{f}$ tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte. Sia $K \subset\subset \Omega^a$ $(t_0, \boldsymbol{u}_0) \in K$ e $(T_{\min}, T_{\max})$ l'intervallo massimale di definizione di $\boldsymbol{u}(t; t_0, \boldsymbol{u}(0))$.

Allora il grafico di $\boldsymbol{u}$ esce definitivamente da K quando $t \to T_{\min}^+$ o $t \to T_{\max}^-$

[a] Ovvero K contenuto in Ω e K compatto.

Corollario - Esplosione in tempo finito. (1.6) Sia $\boldsymbol{f}$ tale che soddisfi le condizioni del teorema di Cauchy-Lipschitz, e sia $(T_{\min}, T_{\max})$ l'intervallo massimale di $\boldsymbol{u}(t; t_0, u_0)$.

Se $T_{\max} < +\infty$ allora

$$\lim_{t \to T_{\max}^-} \|\boldsymbol{u}(t; t_0, u_0)\| = +\infty$$

se tale limite esiste. Analogamente se $T_{\min} > -\infty$.

Attenzione. (1.7) Per i prossimi risultati si consideri $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Corollario - Limitatezza a priori. (1.8) Sia $\boldsymbol{f}$ tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte. Sia $(T_{\min}, T_{\max})$ l'intervallo massimale di $\boldsymbol{u}(t; t_0, \boldsymbol{u}_0)$.

Se esiste $C > 0$ tale per cui

$$\left\|\boldsymbol{u}(t; t_0, \boldsymbol{u}_0)\right\| \leq C, \qquad \forall\, t \in [t_0, T_{\max})$$

allora $T_{\max} = +\infty$

Capitolo 2

Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali

2.1 Il teorema

Domanda. (2.1) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

con $\boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$ continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Se prendiamo il sistema di Cauchy sostituendo a $\boldsymbol{x}_0$ una $\boldsymbol{x}$ vicina ad $\boldsymbol{x}_0$, cosa succede alla soluzione?

Esempio. (2.2) Preso il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{x} \end{cases}$$

si ha che la soluzione è $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\, e^t$, $t \in \mathbb{R}$.

- Se $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \rightsquigarrow \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{0}) \equiv 0$;
- se $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ è una esponenziale

$\Longrightarrow$ non è ragionevole pensare che se $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$ la soluzione $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ si mantenga sempre vicina a $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)$.

Teorema V.

Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

con $\boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$ continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Sia $I_{\max}$ l'intervallo massimale di $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)$. Fissiamo $[a, b] \subset I_{\max}$. Allora:

1. esiste un intorno di $\boldsymbol{x}_0$, N, tale che per ogni $\boldsymbol{x} \in N$ la soluzione di
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x} \end{cases}$$
ammette un'unica soluzione il cui intervallo massimale contiene $[a, b]$;

2. per ogni $\overline{\boldsymbol{x}}_0 \in N$ e per ogni $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$ con $\boldsymbol{x}_k \to \overline{\boldsymbol{x}}_0$ in $\mathbb{R}^n$ la soluzione del corrispondente problema di Cauchy
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_k \end{cases}$$
converge uniformemente su $[a, b]$ alla soluzione di
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \end{cases}$$

Osservazione. (2.3) La richiesta $\boldsymbol{x}_k \to \overline{\boldsymbol{x}}_0$ implica

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{u}(t_0, \boldsymbol{x}_k) \longrightarrow \boldsymbol{u}(t_0, \overline{\boldsymbol{x}}_0) = \overline{\boldsymbol{x}}_0$$

ovvero la convergenza puntuale della successione $\left\{\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_k)\right\}_k$ in un punto;

$\Longrightarrow$ la successione $\left\{\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_k)\right\}_k$ converge uniformemente su $[a, b]$.

Teorema VI.

Teorema di Kamke

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

con $\boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$ continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Sia $I_{\max}$ l'intervallo massimale di $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0)$. Fissiamo $[a, b] \subset I_{\max}$.

Prendiamo

- $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $t_k \to t_0$;
- $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0$;
- $\{\boldsymbol{f}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successioni di dominio Ω che soddisfano il teorema di esistenza e unicità locale,

$$\boldsymbol{f}_k \to \boldsymbol{f} \quad \text{uniformemente sui compatti di } \Omega.$$

Allora definitivamente per ogni k il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}_k\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}'(t_k) = \boldsymbol{x}_k \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione definita su $[a, b]$ e convergente uniformemente su $[a, b]$ alla soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\left(t, \boldsymbol{u}(t)\right) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_0. \end{cases}$$

Lemma di Gronwall. (2.4) Sia $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, e supponiamo che $\exists\, A \in \mathbb{R}$, $\exists\, B \geq 0$ tali che

$$\phi(t) \leq A + B \int_a^t \phi(s)\, ds, \quad \forall\, t \in [a, b]$$

Allora

$$\phi(t) \leq A\, e^{B\,(t-a)}, \quad \forall\, t \in [a, b]$$

Dimostrazione di (2.4) Sia $w(t) := A + B \int_a^t \phi(s)\, ds$. Per ipotesi

- $\phi(t) \leq w(t)$ su $[a, b]$;
- w è derivabile (perché ϕ è continua) e

$$w'(t) = B\, \phi(t)$$

Prendiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[w(t)\, e^{-B\,(t-a)}\right] &= \left[w'(t) - B\, w(t)\right]\, e^{-B\,(t-a)} \\ &= B\, \big(\phi(t) - w(t)\big)\, e^{-B\,(t-a)} \geq 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ la funzione $w(t)\, e^{-B\,(t-a)}$ è decrescente su $[a, b]$

$\Longrightarrow$ è massima in $t = a$, ovvero

$$A = w(a)\, e^0 \geq w(t)\, e^{-B\,(t-a)} \geq \phi(t)\, e^{-B\,(t-a)}$$

$\Longrightarrow$ $\varphi(t) \leq A\, e^{B\,(t-a)}$ ■

Dimostrazione di V.

1. Dimostriamo per assurdo. Suppongo che per ogni $\varepsilon > 0$, $\exists\, \boldsymbol{x}_\epsilon \in B_\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$, la soluzione massimale $\boldsymbol{u}_\varepsilon := \boldsymbol{u}(\cdot, \boldsymbol{x}_\varepsilon)$ di

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}\,\big(t, \boldsymbol{u}(t)\big) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}_\varepsilon \end{cases}$$

non è definita su tutto $[a, b]$.

Per semplicità prendo $t_0 = a$ e "lavoro a destra".

Prendiamo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo e

$$k_\delta = \left\{(t, \boldsymbol{x}) \in \Omega : t \in [a, b], \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{x}\right\| < \delta\right\}$$

Sia $[a, b_\varepsilon)$ con $b_\varepsilon < b$ l'intervallo massimale detro di $\boldsymbol{u}_\varepsilon$.

Necessariamente $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ deve uscire dal compatto k_δ prima di b_ε:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, t_\varepsilon \in (a, b_\varepsilon) : \begin{aligned} \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t_\varepsilon) - \boldsymbol{u}_0(t_\varepsilon)\right\| &= \delta \\ \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{u}_0(t)\right\| &< \delta \quad \forall\, t \in [a, t_\varepsilon) \end{aligned}$$

Sfruttiamo il fatto che $\boldsymbol{u}_0$ e $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ siano le soluzioni di problemi di Cauchy e usiamo le loro equazioni di Volterra.

$$\boldsymbol{u}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{u}_\varepsilon(a) + \int_a^t \boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{u}_\varepsilon(s)\right)\, ds$$

Definiamo ora, per ogni $t \in [a, t_\varepsilon]$, la funzione

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(t) - \boldsymbol{u}_0(t)\right\| \\ &= \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(a) + \int_a^t \boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{u}_\varepsilon(s)\right)\, ds - \boldsymbol{u}_0 - \int_a^t \boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{u}_0(s)\right)\, ds\right\| \\ &\leq \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(a) - \boldsymbol{u}_0(a)\right\| + \int_a^t \left\|\boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{u}_\varepsilon(s)\right) - \boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{u}_0(s)\right)\right\|\, ds \\ &\underset{\dagger}{\leq} \underbrace{\left\|\boldsymbol{x}_\varepsilon - \boldsymbol{x}_0\right\|}_{A_\varepsilon} + L \int_0^t \left\|\boldsymbol{u}_\varepsilon(s) - \boldsymbol{u}_0(s)\right\|\, ds. \end{aligned}$$

Dunque, per il lemma di Gronwall, $\phi(t) \leq A_\varepsilon\, e^{L(t-a)}$. Inoltre, $\phi(t_\varepsilon) = \delta$, e si ha che

$$0 < \delta \leq A_\varepsilon\, e^{L(t_\varepsilon - a)} \longrightarrow 0$$

che è assurdo.

† dove L è la costante di lipschitzianità di f su k_δ

2. Sia $\overline{\boldsymbol{x}}_0 \in N$, e sia $\overline{\boldsymbol{u}}(t) \coloneqq \boldsymbol{u}(t, \overline{\boldsymbol{x}}_0)$;

   sia $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq N$ tale che $\boldsymbol{x}_k \longrightarrow \overline{\boldsymbol{x}}_0$, e sia $\boldsymbol{u}_k(t) \coloneqq \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_k)$.

   - Sia $\overline{K}_\delta$ il δ-intorno compatto di $\overline{\boldsymbol{u}}$;
   - per k sufficientemente grandi, il grafico di $\boldsymbol{u}_k$ rimane in $\overline{K}_\delta$ (ragionando come il punto precedente);
   - uso il lemma di Gronwall sulla

     $$\phi(t) \coloneqq \left\|\boldsymbol{u}_k(t) - \overline{\boldsymbol{u}}(t)\right\|$$

     e ottengo, sempre utilizzando l'equazione di volterra

     $$\left\|\boldsymbol{u}_k(t) - \overline{\boldsymbol{u}}(t)\right\| \leq \underbrace{\left\|\boldsymbol{x}_k - \overline{\boldsymbol{x}}_0\right\|}_{\to 0} e^{L(b-a)}$$

     dove L è la costante di lipschitzianità di $\boldsymbol{f}$ su $\overline{K}_\delta$

     $\implies \left\|\boldsymbol{u}_k - \overline{\boldsymbol{u}}\right\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} \left\|\boldsymbol{u}_k(t) - \overline{\boldsymbol{u}}(t)\right\| \leq \left\|\boldsymbol{x}_k - \overline{\boldsymbol{x}}_0\right\| e^{L(b-a)} \to 0$ ■

Osservazione. (2.5) Questo teorema si chiama di "dipendenza continua" perché la funzione:

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \mathscr{C}\left([a,b]; \|\cdot\|_\infty\right) \\ \boldsymbol{x} &\longmapsto \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

è continua; infatti, per $\boldsymbol{x}_k \to \overline{\boldsymbol{x}}_0 \in N$ le soluzioni corrispondenti convergono uniformemente.

2.2 Equazione alle variazioni

Domanda. (2.6) Ci chiediamo ora se la funzione $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ ha regolarità maggiore rispetto a $\boldsymbol{x}$? Se sì, come si comporta la funzione $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}}(t, \boldsymbol{x})$?

Equazione alle variazioni. (2.7)

$$\begin{cases} u' = t\, u^2 \\ u(0) = x \end{cases} \qquad u(t,x) = \frac{2x}{2 - t^2 x}, \quad t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{x}}, \sqrt{\frac{2}{x}}\right)$$

$u(t,x)$ la interpretiamo come funzione di due variabili t e x.

$$u_t(t,x) = \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \cdots = t\, u^2(t,x)$$

$$u_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{2-t^2x}\right)$$

$$= \frac{4 - \cancel{2t^2x} - \cancel{2x(-t^2)}}{(2-t^2x)^2} = \frac{4}{(2-t^2x)^2}$$

Noto che la soluzione è C^2: calcolo del derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} u_t(t,x)$$

$$= t \cdot 2u(t,x) \cdot u_x(t,x)$$

Valutiamo tutto in $x = x_0$, poniamo $v(t) \coloneqq u_x(t,x_0)$. Si ha che

$$\frac{d}{dt} v(t) = 2t\, u(t,x_0)\, v(t)$$

ovvero

$$v'(t) = g(t)\, v(t), \qquad g(t) = 2t\, u(t,x_0)$$

La funzione $v(t)$ risolve un'equazione <u>lineare</u> che si chiama <u>equazione alle variazioni</u> dove

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial u}\big[f(t,u)\big]_{u=u(t,x_0)}.$$

Generalizzazione. (2.8)

- Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$.
- Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$, $u(t,x_0)$ soluzione di

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

  e sia $[a,b] \subseteq I_{\max}$, dove $I_{\max}$ è l'intervallo massimale di $u(t,x_0)$

- Se N è intorno di x_0: $\forall\, x \in N$, l'unica soluzione $u(t,x)$ di

$$\begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = x \end{cases}$$

è definita su tutto $[a,b]$

Sono nella situazione in cui vale:

$$u_t(t,x) = f\big(t, u(t,x)\big) \qquad \text{perché è soluzione} \tag{2.1}$$
$$u(t_0,x) = x \qquad \text{è il dato iniziale} \tag{2.2}$$

(2.1): Supponiamo che $u(t,x)$ sia derivabile in x (e questa cosa non è stata dimostrata). Allora il secondo membro di (2.1) è derivabile in x, e dunque anche il primo. Derivando a sinistra e a destra in x otteniamo:

$$u_{tx}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} f\big(t, u(t,x)\big) = \frac{\partial f}{\partial u}\big(t, u(t,x)\big) \cdot u_x(t,x) \tag{2.3}$$

(2.2): Derivando ambo i membri rispetto a x, ottengo

$$u_x(t_0,x) = 1 \tag{2.4}$$

Sia $v(t) = u_x(t,x_0)$, allora da (2.3)

$$\begin{aligned} v'(t) = \frac{d}{dt} v(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}\big(t, u(t,x_0)\big) \cdot u_x(t,x_0) \\ &= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial u}\big(t, u(t,x_0)\big)}_{g(t):=} v(t), \end{aligned}$$

mentre da (2.4) ottengo $v(t_0) = 1$.

Abbiamo trovato che v risolve il problema di Cauchy lineare:

$$\begin{cases} v'(t) = g(t)\, v(t) \\ v(t_0) = 1 \end{cases}$$

2.3 Flusso associato ad una equazione differenziale

Definizione del flusso. (2.9) Sia $\boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\Omega)$.

Sia $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in \Omega$, e sia

$$\Omega_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : (t_0, \boldsymbol{x}) \in \Omega\}$$

e sia $I(\boldsymbol{x})$ l'intervallo massimale della soluzione $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x} \end{cases}$$

Considero ora l'insieme

$$E = \{(t, x) \in \Omega : \boldsymbol{x} \in \Omega_0, t \in I(\boldsymbol{x})\}.$$

La funzione $\boldsymbol{\Psi}$ definita sotto si chiama flusso, e indica dove si trova al tempo t la soluzione con dato iniziale $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{x}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} : E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \boldsymbol{x}) &\longmapsto \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \end{aligned} \qquad \boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}}(t) := \boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{x})$$

Teorema VII.

Se $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$, allora la funzione $\boldsymbol{\Psi}$ è di classe $C^1(E)$.

Sistemi autonomi. (2.10) Cosa succede nei sistemi autonomi? Considero

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{x} \in \Omega' \end{cases}$$

con $f : \Omega = \mathbb{R} \times \Omega' \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

- Ω è una "striscia" di $\mathbb{R}^{n+1}$,
- mentre Ω' è il dominio di $\boldsymbol{f}$.

$\Longrightarrow$ Ω_0 non dipende da t_0

$\Longrightarrow$ fissiamo $t_0 = 0$.

Se $I(\boldsymbol{x})$ è l'intervallo massimale per la soluzione con $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{x}$, e E è l'insieme:

$$E = \{(t, \boldsymbol{x}) : t \in I(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \Omega'\}$$

allora definisco la funzione

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} : E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \boldsymbol{x}) &\longmapsto \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

e $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{x}}(t) \coloneqq \boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{x})$ è soluzione con $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{x}$.

Esempio. (2.11)

$$\begin{cases} u' = u(1 - x) \\ u(0) = x \end{cases}$$

Si ha che

- se $x > 1$: $I(x) = (\alpha_x, +\infty)$ con $\alpha_x > -\infty$;
- se $x \in [0, 1 :]$ $I(x) = \mathbb{R}$;
- se $x < 0$: $I(x) = (-\infty, \omega_x)$ con $\omega_x < +\infty$

Capitolo 3

Equazioni autonome

3.1 Equazioni autonome in una dimensione

3.1.1 Equazione logistica

Studio delle soluzioni. (3.1) Sia $p'(t) = \big(k - h\,p(t)\big) \cdot p(t)$, dove $p(t)$ è il numero di individui in un popolazione al tempo t, con $k, h > 0$ e $p(t) \geq 0$.

Supponiamo che $p(0) = p_0 \geq 0$, ci chiediamo l'evoluzione di $p(t)$ per $t > 0$.

- Cerco le soluzioni costanti, ovvero $f(p) = 0$: $p = 0$ e $p = (k/h)$. Queste due sono soluzioni costanti per ogni tempo t.
- Studio la monotonia delle soluzioni: $p'(t) \geq 0$

  $$\big(k - h\,p(t)\big) \cdot \underbrace{p(t)}_{\geq 0} \geq 0.$$

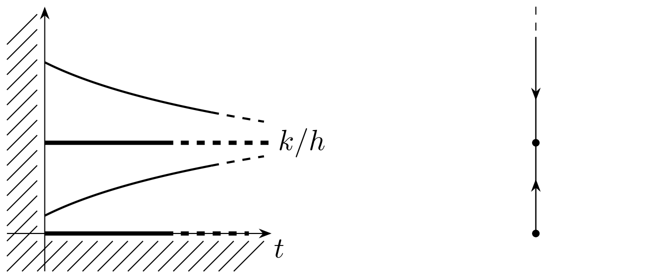
  Dunque $p'(t) \geq 0 \iff p(t) \leq k/h$

  $\implies$ se $p(t) \in (0, k/h)$ la soluzione cresce, mentre se $p(t) > k/h$ la soluzione decresce.

Se il dato iniziale $p_0 \in (0, k/h)$ allora la soluzione è crescente, e si troverà sempre nella striscia $[0, +\infty) \times (0, k/h)$ (per esistenza e unicità locale)

$\implies$ la soluzione si mantiene limitata, e in particolare

$$\|p\| \leq k/h.$$



(a) Grafico delle funzioni (b) Diagramma di fase

Figura 3.1: Equazione Logistica (**da finire**)

È soddisfatto il corollario (1.8), e quindi $T_{\max} = +\infty$

Se il dato iniziale $p_0 > k/h$, la soluzione è sempre monotona decrescente, e si troverà sempre nel semispazio $p > k/h$. Anche in questo caso si applica il corollario (1.8)

$\implies T_{\max} = +\infty$.

Osservo infine che il teorema dell'asintoto ci garantisce che tutte le soluzioni non costanti abbiano come limite a $+\infty$ la soluzione constante k/h.

Diagramma di fase. (3.2) Poiché $p(t) \in \mathbb{R}$, si dice che $\mathbb{R}$ è lo spazio delle fasi o degli stati.

Osservando la figura 3.1, il grafico a destra prende il nome di diagramma di fase.

Osservazione. (3.3) Tra due zeri consecutivi di f, la monotonia della soluzione (nel caso autonomo) non cambia.

3.1.2 Diagramma di fase

Definizione. (3.4) *Se u è una soluzione massimale*† *di $y' = f(y)$, l'insieme*

$$\gamma_u = \left\{ u(t) : t \in (T_{\min},\ T_{\max}) \right\}$$

è detta orbita di u.

† Ovvero il suo dominio di definizione è massimale.

Nota. (3.5) Le soluzioni stazionarie di $y' = f(y)$ hanno come orbita un singolo punto.

Definizione. (3.6) *L'insieme delle orbite con il loro verso di percorrenza costituisce il ritratto di fase di* $y' = f(y)$*.*

Esempio. (3.7) L'equazione logistica ha 5 orbite: due semirette, due punti e un segmento.

(3.8) Dimostreremo in $\mathbb{R}^n$ che per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola orbita. Nel caso 1-dimensionale, si può notare che se u_{x_0} è soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

allora la funzione $w(t) \coloneqq u_{x_0}(t + \tau)$ risolve

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = u_{x_0}(\tau) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ la soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

è $u_{x_0}(t - \tau)$

Esercizio. (3.9) Fare il diagramma di fase dell'equazione differenziale

$$y' = y(2 - y)\, e^{\sin y}$$

3.2 Risultati e definizioni sui sistemi autonomi

Definizione. (3.10) *Si dice sistema autonomo una equazione differenziale nella forma*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Ipotesi. (3.11) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \in \Omega \end{cases}$$

$\boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ localemente lipschitziana ($\Longleftarrow$ C^1), vale il teorema di esistenza e unicità locale della soluzione, $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$.

Definizione. (3.12) *Ω si dice spazio delle fasi o degli stati.*

Definizione. (3.13) *Se $\boldsymbol{u}$ è una soluzione massimale di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, l'insieme*

$$\gamma := \{u(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\}$$

è detta orbita per $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e la soluzione $\boldsymbol{u}$ è una parametrizzazione di γ.

Osservazione. (3.14)

$$\begin{cases} (T_{\min}, T_{\max}) \to \mathbb{R}^n \\ \quad t \mapsto \boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

è una curva in $\mathbb{R}^n$ con sostegno γ.

Definizione. (3.15) *Lo spazio delle fasi in cui vengono disegnate le orbite con il loro verso di percorrenza (indotto dalle soluzioni) si dice ritratto di fase.*

Definizione. (3.16) *I punti $\boldsymbol{p} \in \Omega$ tali che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ si chiamano equilibri o punti singolari*

Esempio. (3.17)

$$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = x^2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{f}(x, y) &= (-y^2, x^2) \\ \boldsymbol{f} &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Chi sono gli equilibri? Cerco $(x_0, y_0) : \boldsymbol{f}(x_0, y_0) = \boldsymbol{0}$

$$(-y^2, x^2) = \boldsymbol{0} \iff (x, y) = \boldsymbol{0}$$

Dunque l'unico punto di equilibrio è l'origine, come mostrato in figura **??**.

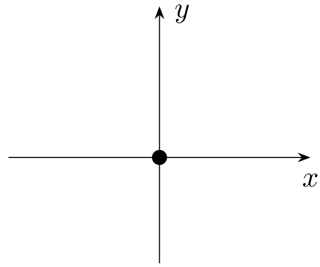


Figura 3.2: Punti di equilibrio per l'esempio (3.17)

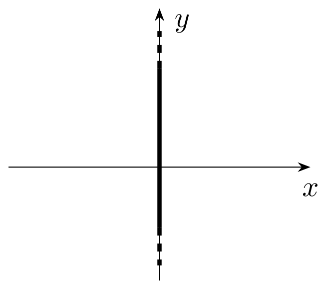


Figura 3.3: Punti di equilibrio per l'esempio (3.18)

Esempio. (3.18)

$$\begin{cases} x' = -y^2\, x \\ y' = x^2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{f}(x, y) = (-y^2\, x, x^2)$$

Gli equilibri sono tutti punti nella forma $(0, y_0)$, come mostrato in figura **??**.

Teorema VIII.

Sotto le ipotesi di (3.11), per ogni punto dello spazio delle fasi, Ω, passa una e una sola orbita.

Dimostrazione di VIII. Sia $\boldsymbol{p} \in \Omega$, e consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{p} \end{cases} \tag{$PC_{\boldsymbol{p}}$}$$

($\exists$) Il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione $\boldsymbol{u}$ (per il teorema di Cauchy-Lipschitz) e l'orbita associata a $\boldsymbol{u}$ passa per $\boldsymbol{p}$:

$$\boldsymbol{p} \in \gamma = \left\{\boldsymbol{u}(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\right\}$$

(!) Intuitivamente, l'unicità è giustificata dal fatto che il sistema è autonomo, e quindi dal fatto che le traslate in t delle soluzioni sono ancora soluzioni.

Sappiamo che $\boldsymbol{p} \in \gamma$. Supponiamo che esista un'altra orbita $\widetilde{\gamma}$ tale che $\boldsymbol{p} \in \widetilde{\gamma}$. Allora $\widetilde{\gamma}$ è orbita di $\widetilde{\boldsymbol{u}}$, soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(\widetilde{t_0}) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

Siano I e $\widetilde{I}$ gli intervalli massimali, rispettivamente, di $\boldsymbol{u}$ e $\widetilde{\boldsymbol{u}}$. Siano

$$\begin{aligned} T &\coloneqq \widetilde{t_0} - t_0 \\ \boldsymbol{v}(t) &\coloneqq \widetilde{\boldsymbol{u}}(t + \widetilde{t_0} - t_0) = \widetilde{\boldsymbol{u}}(t + T). \end{aligned}$$

Si ha che

- l'orbita di $\boldsymbol{v}$ è $\widetilde{\gamma}$;
- $\boldsymbol{v}$ è massimale, in quanto lo è $\widetilde{\boldsymbol{u}}$;
- $\boldsymbol{v}$ soddisfa

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}'(t) = \widetilde{\boldsymbol{u}}'(t+T) = \boldsymbol{f}\left(\widetilde{\boldsymbol{u}}(t+T)\right) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}(t)) \\ \boldsymbol{v}(t_0) = \widetilde{\boldsymbol{u}}(t_0 + T) = \widetilde{\boldsymbol{u}}(\widetilde{t_0}) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

e quindi $\boldsymbol{v}$ è soluzione massimale di

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \\ \boldsymbol{v}(t_0) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono la stessa soluzione (massimale) di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ I e $\widetilde{I}$ sono uno traslato dell'altro, e γ e $\widetilde{\gamma}$ coincidono. ■

Osservazione. (3.19) La mappa:

$$\begin{array}{c}\text{soluzione di} \\ \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\end{array} \quad \longmapsto \quad \text{orbita}$$

è ben definita, ma non è iniettiva (è suriettiva!).

Infatti, se γ è orbita

$$\gamma = \big\{u(t) : t \in (a,b)\big\} \underset{\dagger}{=} \big\{u_\tau(t) = u(t+\tau) : t \in (a-\tau, b-\tau)\big\}.$$

Dunque ogni orbita di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ha infinite parametrizzazioni.

Teorema IX.

Sotto le ipotesi di (3.11), sia $\gamma^\star$ un'orbita di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Allora:

$$\gamma^\star = \{\boldsymbol{p}\} \iff \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}.$$

Dimostrazione di IX.

($\Longleftarrow$) Se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$, allora $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{p}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$ è soluzione, e

$$\gamma^\star = \big\{\boldsymbol{u}(t) : t \in \mathbb{R}\big\} = \{\boldsymbol{p}\}.$$

($\Longrightarrow$) Se $\gamma^\star = \{\boldsymbol{p}\}$ allora esiste una soluzione $\boldsymbol{u}$ di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ tale che $\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{p}$ per ogni $t \in (T_{\min}, T_{\max})$. Allora $\boldsymbol{u}(t)$ è costante, e dunque

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(t)\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}). \qquad \blacksquare$$

Definizione. (3.20) *Una soluzione $\boldsymbol{u}$ di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se*

- *$\boldsymbol{u}$ è definita su $\mathbb{R}$;*
- *$\boldsymbol{u}(t+T) = \boldsymbol{u}(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$*
- *$T = \inf\big\{\tau > 0 : u(t+\tau) = u(t) \forall\, t \in \mathbb{R}\big\}$*

† $\forall \tau \in \mathbb{R}$

Definizione. (3.21) *L'orbita corrispondente ad una soluzione periodica si chiama orbita periodica e i suoi punti si chiamano punti periodici.*

Teorema X.

Sotto le ipotesi di (3.11), se $\boldsymbol{u}$ è una soluzione non costante di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ con intervallo massimale J, e se

$$\exists\, t_1, t_2 \in J : \quad t_1 \neq t_2, \quad \boldsymbol{u}(t_1) = \boldsymbol{u}(t_2)$$

allora $\boldsymbol{u}$ è una soluzione periodica.

Osservazione. (3.22) Le orbite periodiche si chiamano anche orbite chiuse. Infatti, il teorema X ci dice che se un'orbita si autointerseca, allora è periodica.

Corollario. (3.23) Le orbite di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ possono essere:

1. punti di equilibrio, $\{\boldsymbol{p}\}$;
2. periodiche/chiuse;
3. orbite senza autointersezioni e contenenti più di un solo punto.

Caso particolare. (3.24) Per $n = 1$ non esistono orbite periodiche non costanti, perché dovrebbero cambiare la monotonia e non è possibile perché $x' = f(x)$, e la cambierebbero su punti di equilibrio.

Dimostrazione di X. È analoga al teorema VIII.

Sia $\boldsymbol{p} := \boldsymbol{u}(t_1) = \boldsymbol{u}(t_2)$. Allora $\boldsymbol{u}$ risolve due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{p} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_2) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

entrambi risolti su J.

Gli intervalli massimali di questi due problemi di Cauchy devono essere uno traslato dell'altro, dunque $J = \mathbb{R}$.

Inoltre, supponendo $t_2 > t_1$, si ha che

$$\boldsymbol{u}(t), \qquad \boldsymbol{u}\left(t + (t_2 - t_1)\right)$$

risolvono entrambe

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

e per esistenza e unicità della soluzione si ha che

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(t+T), \quad \forall t \in \mathbb{R}, T = t_2 - t_1$$ ■

Teorema XI.

Sia γ un'orbita non singolare[a] di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\boldsymbol{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana.

Allora γ è una curva orientata in Ω tangente in ogni punto al campo $\boldsymbol{f}$.

[a] Ovvero $\gamma \neq \{\boldsymbol{p}\}$.

Dimostrazione di XI. Sia $\boldsymbol{u}$ soluzione di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ tale che $\gamma = \gamma_{\boldsymbol{u}}$. Sia $\boldsymbol{p}_0 \in \gamma$ e t_0 tale che $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{p}_0$.

γ non è singolare, quindi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}_0) \neq \boldsymbol{0}$ (altrimenti $\gamma = \{\boldsymbol{p}_0\}$ per il teorema precedente.)

La funzione $t \mapsto \boldsymbol{u}(t)$ parametrizza γ. Quindi il vettore:

$$\boldsymbol{v} := \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t_0 + h) - u(t_0)}{h} =$$

è il vettore tangente a γ nel punto $\boldsymbol{p}_0$, ammesso che esista.

La funzione $\boldsymbol{u}$ è di classe C^1, quindi il limite esiste ed è $\boldsymbol{u}'(t_0)$. Essendo

$$\boldsymbol{u}'(t) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(t)\big)$$

si ha che

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}'(t_0) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{u}(t_0)\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}_0)$$ ■

Definizione. (3.25) *Un'orbita si dice* <u>*singolare*</u> *se si riduce ad un punto solo. Altrimenti si dice* <u>*regolare*</u>.

3.3 Stabilità dei punti di equilibrio

Obiettivo. (3.26) Vogliamo classificare i punti di equilibrio in base a come le altre soluzioni si comportano in loro prossimità.

Definizione. (3.27) *Sotto le ipotesi di (3.11), sia $\boldsymbol{p}$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{p}$ si dice stabile se $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$: $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega$, $\|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}\| < \delta$*

$\implies$ *la soluzione di*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \hat{\boldsymbol{x}} \end{cases}$$

è definita su $(t_0, +\infty)$ e dista da $\boldsymbol{p}$ al più ε.

(3.28) La soluzione quindi rimane vicina all'equilibrio (quanto vogliamo) pur di partire sufficientemente vicino.

Definizione. (3.29) *Sotto le ipotesi di (3.11), sia $\boldsymbol{p}$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{p}$ si dice instabile se non è stabile.*

(3.30) Essere instabile significa che $\exists\, \varepsilon$ e una successione $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$, $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{p}$ tale che

$$\forall\, n, \quad \exists\, t_n : \quad \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}_n}(t_n) > \varepsilon$$

dove $\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x}_n}$ è soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_n \end{cases}$$

Definizione. (3.31) *Sotto le ipotesi di (3.11), sia $\boldsymbol{p}$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{p}$ si dice asintoticamente stabile se:*

- *$\boldsymbol{p}$ è stabile;*
- *$\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall\, \overline{\boldsymbol{x}} \in B_\delta(\boldsymbol{p})$, $\overline{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ si ha che*

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}_{\overline{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{p}$$

3.4 Equazioni autonome in due dimensioni

Orbite non singolari. (3.32) Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \end{cases}$$

Supponiamo $\boldsymbol{p} : \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$. Com è fatta l'orbita per $\boldsymbol{p}$?

Se $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{0}$, allora almeno una delle sue componenti è non nulla. Supponiamo che $f_1(\boldsymbol{p}) \neq 0$.

$\Longrightarrow$ il vettore tangente all'orbita per $\boldsymbol{p}$ non è verticale.

Consideriamo allora il sistema:

$$\begin{cases} x' = f_1(x,y) \\ y' = f_2(x,y) \\ \big(x(0), y(0)\big) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

e sia $\boldsymbol{u}$ una soluzione massimale, tale che $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{p}$. $\boldsymbol{u}'(0)$ non è un vettore verticale

$\Longrightarrow$ localmente posso esprimere la seconda componente dell'orbita per $\boldsymbol{p}$ in funzione della prima.

$$\exists! \begin{cases} \varphi : I_{p_1} \longrightarrow I_{p_2} \\ \qquad x \longmapsto \varphi(x) \end{cases}$$

e questa funzione descrive l'orbita

$$\begin{cases} x = u_1(t) \\ y = \varphi(x) = u_2(t) \\ \qquad\quad = \varphi\left(u_1(t)\right) \end{cases}$$

Si ha che

$$f_2\left(\boldsymbol{u}(t)\right) = u_2'(t) = \varphi'\left(u_1(t)\right) \cdot u_1'(t)$$

da cui $f_2(x,y) = \varphi'(x)\, f_1(x,y)$

$$\varphi'(x) = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)} = \frac{f_2\left(x, \varphi(x)\right)}{f_1\left(x, \varphi(x)\right)}.$$

Stiamo dicendo che se $f_1(p) \neq 0$ l'orbita che passa per $\boldsymbol{p}$ la posso esprimere mediante una funzione $y = \varphi(x)$ che soddisfa

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \dfrac{f_2\big(x, \varphi(x)\big)}{f_1\big(x, \varphi(x)\big)} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases}$$

ovvero un problema di Cauchy monodimensionale non autonomo.

Teorema XII.

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \\ \big(x(0), y(0)\big) = \boldsymbol{p} \end{cases} \tag{PC}$$

con $\boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. Supponiamo che $f_1(\boldsymbol{p}) \neq 0$ (campo non verticale in $\boldsymbol{p}$). Allora per degli opportuni intorni I_{p_1}, I_{p_2}:

$\varphi : I_{p_1} \longrightarrow I_{p_2}$ è una rappresentazione locale dell'orbita della soluzione di (PC)

$\iff$ φ è soluzione di

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \dfrac{f_2\big(x, \varphi(x)\big)}{f_1\big(x, \varphi(x)\big)} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases} \tag{PC$_\varphi$}$$

Dimostrazione di XII.

($\implies$) Vedi: (3.32)

($\impliedby$) φ è soluzione di (PC)$_\varphi$. Per ipotesi sappiamo che $f_1\big(x, \varphi(x)\big) \neq 0$ in un opportuno intorno di p_1, I_{p_1} (poiché f è C^1).

Allora, $\forall\, x \in I_{p_1}$ sia

$$\omega(x) = \int_{p_1}^{x} \frac{d\,\xi}{f_1\big(\xi, \varphi(\xi)\big)}.$$

Poiché f_1 è continua e non nulla

$\implies$ ω è derivabile e

$$\begin{cases} \omega'(x) = \dfrac{1}{f_1\big(x, \varphi(x)\big)} \\ \omega(p_1) = 0 \end{cases}$$

Poiché ω' ha segno costante

$\implies$ ω è strettamente monotona

$\implies$ ω è invertibile.

$$\omega : I_{p_1} \to I \ni 0 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} \omega^{-1} &=: v : I \longrightarrow I_{p_1} \\ v(0) &= p_1 \\ v'(t) &= \frac{1}{\omega'\big(v(t)\big)} \end{aligned}$$

$\implies$ $v'(t) = f_1\Big(v(t), \varphi\big(v(t)\big)\Big)$.

Se chiamo

$$\boldsymbol{u}(t) := \begin{pmatrix} v(t) \\ \varphi\big(v(t)\big) \end{pmatrix}$$

ho che

$$\begin{cases} u_1'(t) = v'(t) = f_1\Big(v(t), \varphi\big(v(t)\big)\Big) = f_1\big(u_1(t), u_2(t)\big) \\ u_2'(t) = \varphi'\big(v(t)\big)\ v'(t) = \dfrac{f_2}{f_1} f_1 = f_2 \end{cases}$$

e inoltre $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{p}$. ■

Esempio. (3.33)

$$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = x^2 \end{cases}$$

1. Equilibri.

$$\boldsymbol{f}(x, y) = (-y^2, x^2) = (0, 0)$$

$\implies$ ho un solo punto di equilibrio, $\mathbf{0}$.

2. Punti con tangente orizzontale o verticale.

   Il vettore tangente ad una soluzione in (x, y) è $\boldsymbol{f}(x, y)$, dunque:

   - tangente verticale: $x' = 0 \iff y^2 = 0$

     $\implies$ l'asse x viene intersecato verticalmente dalle orbite;

   - tangente verticale: $y' = 0 \iff x^2 = 0$

     $\implies$ l'asse y viene intersecato orizzontalmente dalle orbite.

   In $(x, 0)$ il vettore tangente alla soluzione che passa per quel punto è $(0, x^2)$, dunque tutte le orbite che passano per l'asse delle x sono percorse verso l'alto.

   In $(0, y)$ il vettore tangente alla soluzione che passa per quel punto è $(-y^2, 0)$, dunque tutte le orbite che passano per l'asse delle y sono percorse verso sinistra.

3. Orbite non singolari

   Consideriamo i punti in cui $f_1(x, y) \neq 0$, ovvero i punti con $y \neq 0$. Cerchiamo l'equazione delle orbite dei punti che non sono sull'asse x.

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -\frac{x^2}{\varphi^2(x)} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases} \tag{PC$_\varphi$}$$

   che è a variabili separabili:

$$\varphi^2(x)\,\varphi'(x) = -x^2$$

$$\int \varphi^2(x)\,\varphi'(x)\,dx = \int -x^2\,dx$$

$$\int \varphi\,d\varphi = -\int x^2\,dx$$

$$\frac{1}{3}\varphi^3(x) = -\frac{1}{3}x^3 + c$$

   Imponendo il passaggio per $\boldsymbol{p}$, otteniamo che $c = \dfrac{1}{3}\,p_2^3$.

   Dunque

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{p_2^3 - x^3}$$

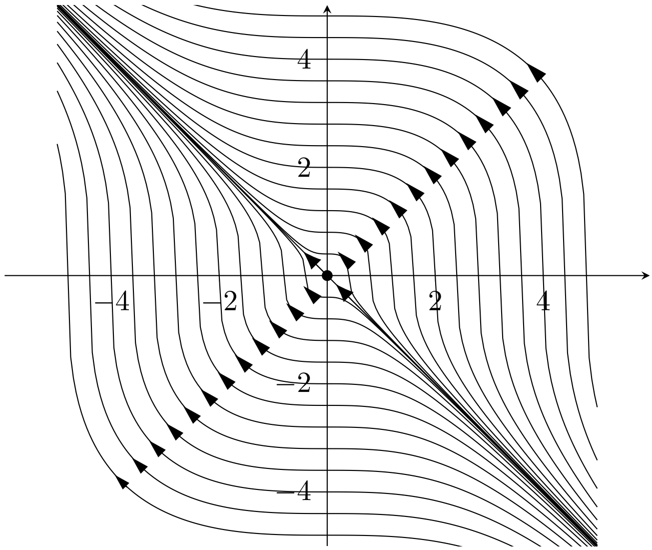


Figura 3.4: Orbite per il problema di Cauchy

e le orbite sono quelle mostrate in figura 3.4

Esempio. (3.34)

$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = -xy \end{cases}$$

1. Equilibri

   Tutti i punti $(x, 0)$ sono equilibri.

2. Tangente orizzontale e verticale

   Tutta l'asse delle y è composta da punti a tangente orizzontale.

3. Orbite non singolari

   Consideriamo $f_1(x, y) \neq 0$, ovvero quelli per i quali $y \neq 0$: troviamo tutte le orbite, infatti i punti $(x, 0)$ sono equilibri. Calcolando:

   $$\varphi'(x) = -\frac{x\,\varphi(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

   Da qui, possiamo dire

   $$\varphi(x)\,\varphi'(x) = -x \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi^2(x) = -x^2 + c$$

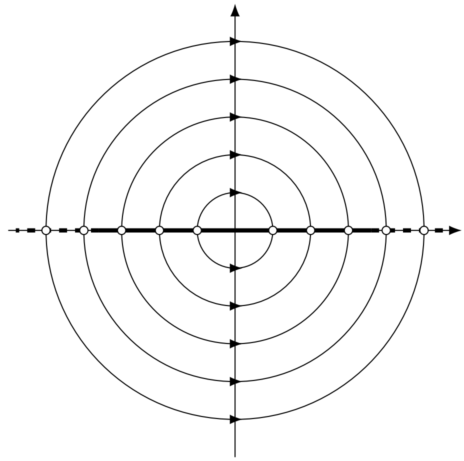


Figura 3.5: Diagramma di fase per l'esempio (3.34)

$c > 0$, e $\varphi(x) = \pm(c - x^2)^{1/2}$.

Inoltre $x' = y^2 > 0$ lungo le orbite. Dunque il diagramma di fase è quello illustrato in figure 3.5.

Esempio. (3.35)

$$\begin{cases} x' = y^2 - xy^2 \\ y' = -x\,y^3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (y^2 - xy^2, -xy^3) \end{aligned}$$

1. Equilibri:

$$\begin{cases} y^2(1 - x) = 0 \\ x\,y^3 = 0 \end{cases}$$

   la prima equazione è soddisfatta per $x = 1$, oppure per $y = 0$, mentre la seconda è soddisfatta da $x = 0$ oppure $y = 0$.

   Entrambe le equazioni sono soddisfatte se e solo se $y = 0$

   $\implies \big\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\big\}$ è composto da equilibri.

2. Punti con tangente verticale: $x' = 0$;

   Oltre ai punti di equilibrio, sono tutti i punti sulla retta verticale $x = 1$. Questa quindi è una retta invariante, composta da orbite.

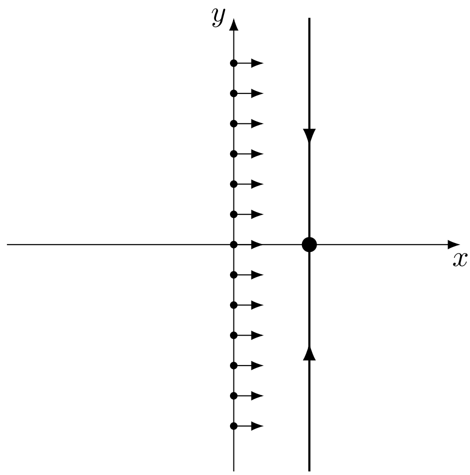


Figura 3.6: Punti con tangenti verticali e orizzontali per l'esempio (3.35)

Se $x = 1$ abbiamo

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y^3 \end{cases}$$

3. <u>Punti con tangente orizzontale</u>: $y' = 0$.

   Oltre ai punti di equilibrio, sono tutti i punti sulla retta verticale $x = 0$.

   Se $x = 0$ abbiamo

$$\begin{cases} x' = y^2 > 0 \quad y > 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

4. <u>Equazioni delle orbite</u>: per $y \neq 0$ e $x \neq 1$ ho:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy^3}{y^2(1-x)} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} y'(x) = \dfrac{-x}{1-x}\, y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

   e integrando si ottiene

$$\log \frac{|y|}{|y_0|} = x - x_0 + \log \frac{|x-1|}{|x_0-1|}$$

   Noto che poiché le orbite non intersecano l'asse x (poiché sono altre orbite), $y(x)$ e y_0 hanno lo stesso segno, dunque posso "eliminare" i valori assoluti. Con lo stesso ragionamento "elimino" il secondo valore assoluto. Diventa:

$$\log \frac{y}{y_0} = x - x_0 + \log \frac{x-1}{x_0-1}$$

Facendo l'esponenziale da ambo le parti otteniamo

$$y(x) = y_0 \, \frac{x-1}{x_0-1} \, e^{x-x_0}$$

Alcune osservazioni:

(a) le orbite con dato iniziale (x_0, y_0) e $(x_0, -y_0)$ sono simmetriche rispetto all'asse orizzontale

$\implies$ consideriamo solo $y_0 > 0$.

Dividiamo ancora i due casi:

- $x_0 > 1 \implies y_0 \, \dfrac{x-1}{x_0-1} > 0$

$$\implies \lim_{x \to 1^+} y(x) = 0^+, \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

  e guardando l'equazione differenziale delle orbite (3.1)

$$y'(x) = \frac{x}{x-1} \, y(x) > 0$$

  e quindi y come funzione di x è monotona crescente.

  Noto inoltre che per $x_0 > 1$, $x' = y^2(1-x) < 0$, dunque le frecce delle orbite sono rivolte verso $x = 1$.

- $x_0 < 1 \implies \dfrac{y_0}{x_0 - 1} > 0$, $x - 1 < 0$:

$$\lim_{x \to 1^-} y(x) = 0^+, \qquad \lim_{x \to -\infty} y(x) = 0^+$$

  e inoltre la funzione è sempre positiva.

  Si inoltre che $x' > 0$, dunque le frecce sono rivolte verso $x = 1$.

Le orbite sono illustrate nella figura 3.7

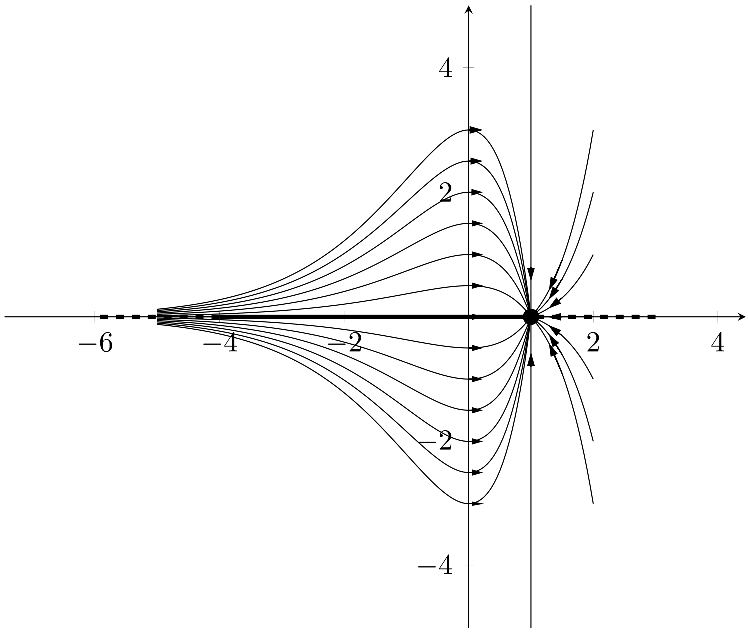


Figura 3.7: Orbite per l'esempio (3.35).

Pendolo Piano Senza Attrito. (3.36) Consideriamo un pendolo piano senza attrito, e sia θ l'angolo rispetto alla verticale. La legge che regola il moto è

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l}\,\sin\theta(t)$$

Se $\alpha = \sqrt{g/l}$, definendo $x(t) = \theta(\alpha\, t)$, l'equazione del moto diventa:

$$x''(t) = -\sin x(t)$$

equazione non lineare del secondo ordine. La trasformo, tramite la trasformazione $x'(t) = y(t)$, in un sistema di equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin x(t) \end{cases}$$

1. Equilibri: sono i punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

ovvero tutti quelli nella forma $(k\,\pi, 0)$, per $k \in \mathbb{Z}$.

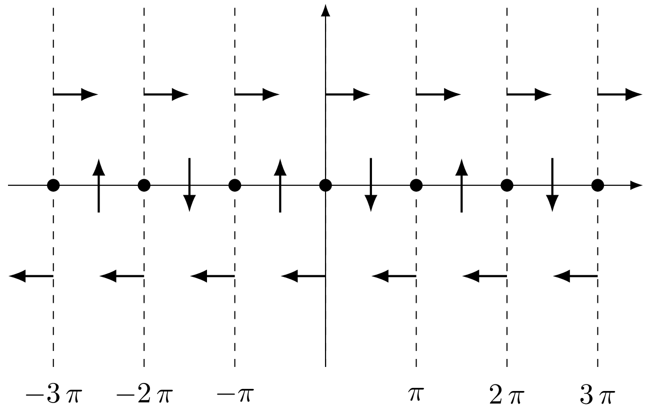


Figura 3.8: Punti di equilibrio e a tangente orizzontale/verticale per il pendolo senza attrito

2. Punti con tangente orizzontale: $x' = 0 \rightsquigarrow y = 0$;

   Noto inoltre che $y' > 0$ quando $x \in [\pi + 2k\,\pi, 2(k+1)\,\pi]$.

3. Punti con tangente verticale: $y' = 0 \rightsquigarrow \sin x = 0$

   $\implies x = k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. Equazione delle orbite: quando $y \neq 0$, si ha che

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-\sin x}{y(x)} \\ y(x)\, y'(x) &= -\sin x \\ y_c(x) &= \pm\sqrt{2\,(\cos x + c)} \end{aligned}$$

   Le orbite variano al variare di c:

   - $c < -1$: non ci sono soluzioni;
   - $c = -1$: ottengo i valori per cui $\cos x = 1$, ovvero i punti di equilibrio $(2n\,\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$;
   - $c \in (-1, 1)$: ottengo soluzioni definite sull'intervallo $[-x_c, x_c]$ modulo 2π, dove
   $$x_c = \arccos -c;$$
   - $c \geq 1$: si creano infinite eterocline.

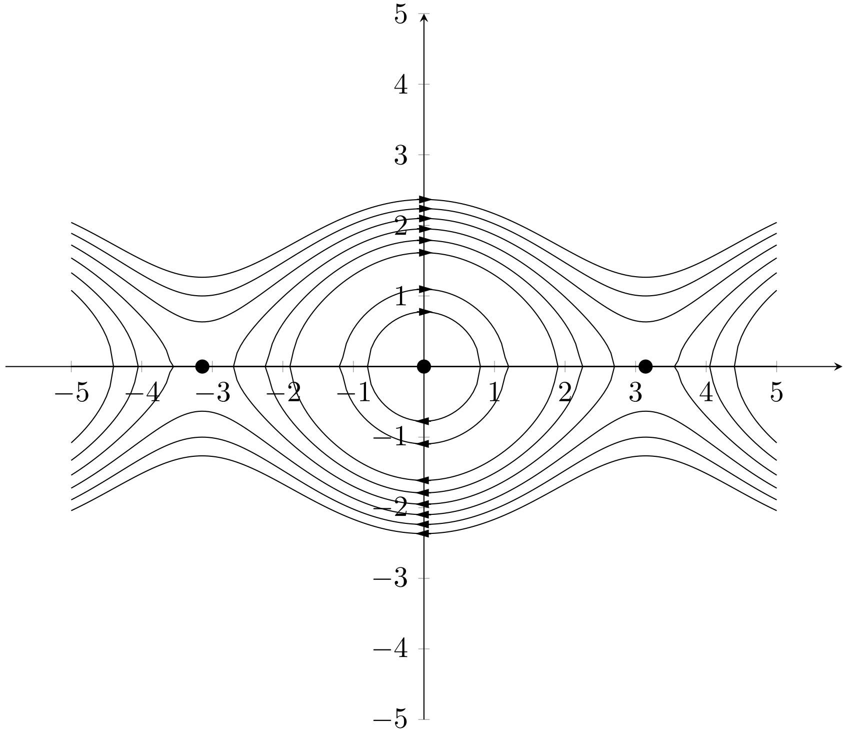


Figura 3.9: Orbite per il pendolo piano senza attrito

In definitiva, le orbite sono quelle illustrate nella figura 3.9

Per una comprensione più profonda, si rimanda alle dispense del corso, [1], pp. 27-31.

Osservazione. (3.37) L'equazione caratterizzante del pendolo piano

$$\ddot{x} = -\sin x$$

può essere considerato come sistema conservativo in dimensione 1. Moltiplicando da entrambe le parti per $\dot{x}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{x}\,\ddot{x} &= -(\sin x)\,\dot{x} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{x}^2\right) &= \frac{d}{dt}\,(\cos x) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\dot{x}^2 - \cos x\right) &= 0 \\ \frac{1}{2}\,\dot{x}^2 - \cos x &= c \end{aligned}$$

Abbiamo trovato una costante del moto, pari alla somma tra energia cinetica ed energia potenziale: l'energia totale è conservata.

Capitolo 4

Sistemi di E.D.O. lineari

Perché è utile studiarli. (4.1) Sia data l'equazione autonoma $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$; sia $\boldsymbol{x}^\star$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^\star) = \mathbf{0}$

$\implies \{\boldsymbol{x}^\star\}$ è orbita, e può essere stabile, instabile,...

Considero ora $\boldsymbol{x}^\star + \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{x}$;

$\implies \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^\star + \boldsymbol{\eta})$.

Sviluppo ora $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ al primo ordine:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^\star)}_{=\mathbf{0}} + J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^\star)\,\boldsymbol{\eta} + o\left(\|\boldsymbol{\eta}\|\right), \qquad \|\boldsymbol{\eta}\| \to \mathbf{0}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{x}^\star + \boldsymbol{\eta}(t) \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}'(t) &= \boldsymbol{\eta}'(t) \end{aligned}$$

Sostituisco e ottengo

$$\boldsymbol{\eta}'(t) = J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^\star)\,\boldsymbol{\eta}(t) + o\left(\|\boldsymbol{\eta}(t)\|\right)$$

dove $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^\star)$ è una matrice costante.

Ripasso. (4.2) Un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie è un sistema della forma

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$$

dove

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

e tutte le funzioni sono continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se $b_1, \dots, b_n$ sono tutte nulle, il sistema si dice omogeneo.

Caso monodimensionale. (4.3) Ponendo $f(t,x) = A(t)\,x + b(t)$, $f \in C^1(I \times \mathbb{R})$: per ogni condizione iniziale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ il problema di Cauchy associato al sistema ammette un'unica soluzione locale.

Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = A(t)$$

continua su I, abbiamo che su ogni striscia $[a,b] \times \mathbb{R} \subseteq I \times \mathbb{R}$ tale funzione è limitata, e deduciamo che ogni problema di Cauchy associato al sistema ammette un'unica soluzione definita sull'intero intervallo I.

Alcuni Risultati. (4.4) Posto

$$S_{\boldsymbol{b}} \coloneqq \{\text{soluzioni di } \boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)\}$$

valgono i seguenti risultati.

- Principio di Sovrapposizione. Se $\boldsymbol{x}_1 \in S_{\boldsymbol{b}_1}$ e $\boldsymbol{x}_2 \in S_{\boldsymbol{b}_2}$, allora

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in S_{\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2}$$

- Soluzioni di un sistema omogeneo. $S_{\boldsymbol{0}}$ è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.
- Soluzioni di un sistema non omogeneo. Se $\boldsymbol{x}_P$ risolve $\boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$, allora

$$S_{\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_P : \boldsymbol{x}_0 \in S_{\boldsymbol{0}}\}$$

- Lemma. Siano $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ delle n soluzioni del problema omogenero $\boldsymbol{x}' = A(t)\, \boldsymbol{x}$. Allora $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ sono funzioni linearmente indipendente se e solo se esiste $t_0 \in I$ tale che i vettori

$$\boldsymbol{y}_1(t_0), \ldots, \boldsymbol{y}_n(t_0)$$

sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$.

Matrice Wronskiana. (4.5) Se $\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogenero $\boldsymbol{x}' = A(t)\, \boldsymbol{x}$, allora $\{\boldsymbol{\varphi}_1, \ldots, \boldsymbol{\varphi}_n\}$ si dice insieme fondamentale.

La matrice

$$W(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1 & \ldots & \boldsymbol{\varphi}_n \end{bmatrix}$$

si dice matrice wronskiana.

Si ha che $S_{\mathbf{0}} = \{W(t)\, \boldsymbol{c} : \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n\}$. Per selezionare in $S_{\mathbf{0}}$ la soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\, \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

imponiamo $W(t_0)\, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}_0$. Essendo le colonne di $W(t_0)$ linearmente indipendenti, $W(t_0)$ è invertibile e $\boldsymbol{c} = \left[W(t_0)\right]^{-1} \boldsymbol{x}_0$. La soluzione dunque è

$$\boldsymbol{x}(t) = W(t)\, \left[W(t_0)\right]^{-1} \boldsymbol{x}_0$$

Matrice risolvente. (4.6) Se W è una matrice wronskiana e se, per qualche $t_0 \in I$, si ha $W(t_0) = \mathrm{Id}_n$, allora W viene detta matrice risolvente o di transizione o di monodromia.

Se $W(t)$ è una matrice wronskiana per

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\, \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

allora

$$\Phi(t) = W(t)\, \left[W(t_0)\right]^{-1}$$

è di monodromia.

Equazioni differenziali lineari di grado n. (4.7) Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)\, y^{(n-2)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) + b(t).$$

Supponiamo che tutte le a_i e b siano continue su $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

Definendo

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad \ldots, \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

otteniamo il sistema lineare del primo ordine $\boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}(t)$ con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \ldots & a_{n-1}(t) & \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Obiettivo. (4.8) L'obiettivo è risolvere l'equazione

$$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}, \qquad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

L'esistenza delle soluzioni è garantita su tutto $\mathbb{R}$.

Per gradi:

1. A diagonale;
2. A diagonalizzabile;
3. A con autovalori in $\mathbb{C}$, tutti autovalori regolari†;
4. caso generale.

Osservazione. (4.9) Per una equazione nella forma $\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ è sempre soluzione (e quindi è equilibrio).

Ogni punto di $\ker A$ è un punto di equilibrio.

† Un autovalore è regolare se la molteplicità algebrica e geometrica coincidono

4.1 Matrice diagonale

Risoluzione generica. (4.10) Il sistema $\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda 3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

diventa:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1\, x_1(t) \\ x_2'(t) = \lambda_2\, x_2(t) \\ \vdots \end{cases}$$

$\implies x_i(t) = c_i\, e^{\lambda_i\, t}$ per ogni $i = 1, \ldots, m$, dove c_i è una costante arbitraria.

$$\implies \boldsymbol{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t\,\lambda_1} & & & & \\ & e^{t\,\lambda_2} & & & \\ & & e^{t\,\lambda 3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{t\,\lambda_n} \end{pmatrix}}_{W(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

In questo caso $W(t)$ è anche di monodromia.

Ritratto di fase per $n = 2$. (4.11) Siamo nel caso

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1\, e^{\lambda_1\, t} \\ x_2(t) = c_2\, e^{\lambda_2\, t} \end{cases}$$

- Supponiamo che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$. L'equazione delle orbite è

$$x_2 = c\, x_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

  - Se $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, allora le orbite sono di equazione $x_2 = c\, x_1$: sono tutte rette. In particolare, tutte le rette passanti per l'origine sono orbite, <u>anche gli assi</u>.

Per stabilire il verso di percorrenza delle orbite, si studia nuovamente il sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1\, e^{\lambda\, t} \\ x_2(t) = c_2\, e^{\lambda\, t} \end{cases}$$

si ha che

* se $\lambda > 0$, $\|\boldsymbol{x}(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$, e quindi le semirette vengono percorse verso l'esterno;
* se $\lambda < 0$, $\|\boldsymbol{x}(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$, e quindi le semirette vengono percorse verso l'interno.

– Consideriamo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ma di segno concorde $\rightsquigarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.

* Se $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ e sono entrambe positive, le orbite sono <u>uscenti</u> e tangenti a x_1;
* Se $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ e sono entrambe negative, le orbite sono <u>entranti</u> e tangenti a x_1;
* se $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ e sono entrambe positive, le orbite sono <u>uscenti</u> e tangenti a x_2
* se $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ e sono entrambe negative, le orbite sono <u>entranti</u> e tangenti a x_2

– Consideriamo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ma di segno discorde $\rightsquigarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

In questo caso l'origine si chiama <u>sella</u>, e si ha che

$$x_2 = c\, x_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Essendo $\lambda_2/\lambda_1 < 0$, le orbite sono quelle di equazione $y = c\, x^{\beta}$, eventualmente simmetrizzate rispetto all'asse delle y.

- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, suppongo che uno $\lambda_1 \neq 0$ (se fossero entrambi nulli, allora tutti i punti di $\mathbb{R}^2$ sarebbero di equilibrio)

$$\begin{cases} x_1' = \lambda\, x_1 \\ x_2' = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_1(t) = c_1\, e^{\lambda_1\, t} \\ x_2 \equiv c_2 \end{cases}$$

Dunque, quando $c_1 = 0$ ottengo infiniti punti di equilibrio, in quanto

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha come nucleo tutto l'asse x_2.

Inoltre, si ha che se

- $\lambda_1 > 0$: tutti gli equilibri sono instabili;
- $\lambda_1 < 0$: tutti gli equilibri sono stabili, non asintotici.

4.2 Matrice diagonalizzabile

Manca un pezzo

4.3 Matrice esponenziale†

Definizione. (4.12) *Data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, definiamo*

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Ripasso. (4.13)

- Si definisce la norma euclidea matriciale come:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

  e vale la disuguaglianza: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

- Criterio di Weierstrass:

$$\sum_k \|B_k\| < \infty \implies \sum_k B_k$$

† Dal [2]

Buona definizione. (4.14) Dunque, affinché e^A sia ben definita, vogliamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$$

sia convergenti, e in effetti si ha:

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!} \left\| A^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \left\| A \right\|^k$$

e la serie di numeri reali converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left\| A \right\|^k}{k!}$$

dunque la matrice esponenziale è sempre ben definità.

Proprietà. (4.15) e^A soddisfa queste proprietà:

i. $e^{\mathbf{0}_n} = \mathbb{1}_n$

ii. $e^{A+B} = e^A \, e^B$;

iii. $A \, e^A = e^A \, A$

Teorema XIII.

La matrice e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, è la matrice di monodromia (risolvente) per

$$\boldsymbol{x}' = A \, \boldsymbol{x}.$$

In particolare, l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A \, \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

è $\boldsymbol{x}(t) = e^{tA} \, \boldsymbol{x}_0$.

Osservazione. (4.16) Nella risoluzione dei sistemi lineari per matrici diagonali e diagonalizzabile, è stata calcolata esplicitamente la matrice risolvente. Per l'unicità della soluzione, segue che:

1. per A diagonale,
$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. per A diagonalizzabile, $A = Q\,D\,Q^{-1}$, Q matrice degli autovettori,
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad e^{tA} = Q\,e^{tD}\,Q^{-1}$$

Dimostrazione di XIII. Dimostro che la soluzione è
$$\boldsymbol{x}(t) = e^{t\,A}\,\boldsymbol{x}_0.$$
La condizione iniziale è soddisfatta, devo verificare che $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$.
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A}\,\boldsymbol{x}_0 - e^{tA}\,\boldsymbol{x}_0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{hA}\,e^{tA}\,\boldsymbol{x}_0 - e^{tA}\,\boldsymbol{x}_0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h}\,e^{tA}\,\boldsymbol{x}_0 \end{aligned}$$
La tesi da dimostrare, ora, è che
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} = A$$
ovvero che
$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} - A \right) = 0$$
Svolgendo i passaggi:
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} - A \right) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n - hA}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!}}{h} = 0 \end{aligned}$$

Mostro l'ultima uguaglianza mostrando che la norma di quel termine tende a 0.

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \right\| &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^k \left\|A\right\|^k}{k!} \\
&= \frac{1}{|h|} \left(e^{|h|\|A\|} - 1 - |h| \left\|A\right\| \right) \\
&= \frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \\
&= \|A\| \underbrace{\frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h| \left\|A\right\|}}_{\xrightarrow[|h|\to 0]{} 1} - \|A\| \xrightarrow[|h|\to 0]{} 0
\end{aligned}
$$

■

4.4 Matrice con autovalori in $\mathbb{C}$

Caso 2×2 base. (4.17) Consideriamo $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ in forma canonica,

$$
A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0
$$

I due autovalori sono

$$
\begin{aligned}
\mu &= a + i\, b \\
\overline{\mu} &= a - i\, b
\end{aligned}
$$

Il sistema $\boldsymbol{x}' = A\, \boldsymbol{x}$ diventa:

$$
\begin{cases} x_1' = a\, x_1 - b\, x_2 \\ x_2' = b\, x_1 + a\, x_1 \end{cases}
$$

Definisco la funzione complessa

$$
z(t) \coloneqq x_1(t) + i\, x_2(t)
$$

e la derivo:

$$
\begin{aligned}
z'(t) &= x_1'(t) + i\, x_2'(t) \\
&= a\, x_1(t) - b\, x_2(t) + i\, b\, x_1(t) + i\, a\, x_2(t) \\
&= \mu\, x_1(t) + i\, \mu\, x_2(t) = \mu\, z(t)
\end{aligned}
$$

Figura 4.1: Diagramma di fase per (4.17)

Dunque si ha che

$$z(t) = c\, e^{\mu\, t}, \quad c = c_1 + i\, c_2 \in \mathbb{C}$$

Esplicitando ora la funzione:

$$\begin{aligned} z(t) &= (c_1 + i\, c_2) e^{(a+i\, b)t} = (c_1 + i\, c_2) e^{a\, t}\, e^{i\, b\, t} \\ &= (c_1 + i\, c_2) e^{a\, t} \big(\cos(bt) + i\, \sin(bt)\big) \\ &= e^{a\, t} \big[c_1\, \cos(bt) - c_2\, \sin(bt)\big] + i\, e^{a\, t} \big[c_1\, \sin(bt) + c_2\, \cos(bt)\big] \end{aligned}$$

Da qui posso scrivere, ricordando la definizione di $z(t)$

$$\begin{cases} x_1 = e^{a\, t} \big[c_1\, \cos(bt) - c_2\, \sin(bt)\big] \\ x_2 = e^{a\, t} \big[c_1\, \sin(bt) + c_2\, \cos(bt)\big] \end{cases}$$

Posso ora quindi scrivere la soluzione dell'equazione differenziale iniziale:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}}_{R_{bt}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}(0)}$$

Dunque le orbite sono contraddistinte da:

- una dilatazione se $a > 0$ (e in questo caso l'origine si chiama sorgente);
- una contrazione se $a < 0$ (e in questo caso l'origine si chiama *sink*, o pozzo);

mentre per quanto riguarda la rotazione, questa sarà:

- antioraria se $b > 0$;
- oraria se $b < 0$.

Teorema XIV.

Le soluzioni di $\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$ con $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori complessi

$$\mu, \overline{\mu} = a \pm i\,b$$

e autovettori $\boldsymbol{z}_\mu = \boldsymbol{w} + i\,\boldsymbol{v}$, definita la matrice $Q = [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ sono

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{at} Q\, R_{bt}\, \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$$

In particolare, l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

è $\boldsymbol{x}(t) = e^{at}\, Q\, R_{bt}\, Q^{-1}\, \boldsymbol{x}_0$

Osservazione. (4.18) Per il teorema precedente, se $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori complessi, allora

$$e^{tA} = e^{at}\, Q\, R_{bt}\, Q^{-1}$$

4.5 Matrice con autovalori regolari in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$

Ipotesi. (4.19) Consideriamo $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, con

- $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_h\}$ autovalori reali con autovettori $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_h\}$;
- $\{\mu_1, \overline{\mu}_1, \ldots, \mu_k, \overline{\mu}_k\}$ autovalori complessi con autovettori $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k\}$

tali per cui $h + 2k = n$. Scrivo

$$\begin{aligned} \mu_j &= a_j + i\,b_j \\ \boldsymbol{z}_j &= \boldsymbol{w}_j + i\,\boldsymbol{v}_j \end{aligned}$$

Costruisco la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \ldots & \boldsymbol{u}_h & \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{w}_1 & \ldots & \boldsymbol{v}_k & \boldsymbol{w}_k \end{pmatrix}$$

e la matrice pseudo diagonale:

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_h & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

e dunque si ha che

$$\widetilde{R} = e^{t\widetilde{D}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{\lambda_h t} & & & \\ & & & \left[e^{a_1 t} R_{b_1 t}\right] & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \left[e^{a_k t} R_{b_k t}\right] \end{pmatrix}$$

dove $R_{b_j t}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix}$$

Teorema XV.

Nelle ipotesi precedenti, le soluzioni di $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$ sono: $\boldsymbol{x}(t) = Q\,e^{t\widetilde{D}}\,\boldsymbol{c}$, al variare di $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$. In particolare, la soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

è $\boldsymbol{x}(t) = Q\,e^{t\,\widetilde{D}}\,Q^{-1}\,\boldsymbol{x}_0$

Osservazione. (4.20) Per il teorema XIII, nelle ipotesi precedenti si ha che

$$e^{tA} = Q\, e^{t\,\widetilde{D}}\, Q^{-1}$$

Esercizio. (4.21) Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{p} \end{cases}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.6 Matrice generica

Matrice 2×2 in forma canonica. (4.22) Consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori non regolari, scritta in forma canonica:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\boldsymbol{u} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Risolviamo il sistema associato: $\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} x' = \lambda\,x + y \\ y' = \lambda\,y \end{cases} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{cases} x' = \lambda\,x + c_2\,e^{\lambda\,t} \\ y(t) = c_2\,e^{\lambda\,t} \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2\,t)\,e^{\lambda\,t} \\ y(t) = c_2\,e^{\lambda\,t} \end{cases}$$

Lo si vuole scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda\,t} & t\,e^{\lambda\,t} \\ 0 & e^{\lambda\,t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t):=} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\Phi(0) = \mathbb{1}_2$, allora Φ è la risolvente, e posso scrivere:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t\, e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Manca il diagramma di fase

Teorema XVI.

Sia $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori <u>non regolari</u> qualsiasi e polinomio caratteristico $p_A(t) = (t - \lambda)^2$. Sia $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ l'unico autovettore di A, e $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che

- $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{u}$
- $(A - \lambda\, \mathbb{1})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$.

Allora, le soluzioni di $\boldsymbol{x}' = A\, \boldsymbol{x}$ sono nella forma:

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}(c_1 + c_2\, t)\boldsymbol{u} + e^{\lambda t} c_2\, \boldsymbol{v}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione di XVI. Si ha che $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$, dunque necessariamente una qualsiasi funzione deve essere nella forma

$$\boldsymbol{x}(t) = y_1(t)\, \boldsymbol{u} + y_2(t)\, \boldsymbol{v}$$

Imponiamo che $\boldsymbol{x}(t)$ risolva $\boldsymbol{x}'(t) = A\, \boldsymbol{x}$, e determiniamo y_1 e y_2.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'(t) &= y_1'(t)\, \boldsymbol{u} + y_2'(t)\, \boldsymbol{v} \\ A\, \boldsymbol{x}(t) &= y_1(t) A\, \boldsymbol{u} + y_2(t) A\, \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

ma $A\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{u}$, e $A\boldsymbol{v} - \lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, e quindi $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}'(t) = A\, \boldsymbol{x}(t) &= y_1(t)\lambda \boldsymbol{u} + y_2(t)(\lambda \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}) \\ &= \big(\lambda\, y_1(t) + y_2(t)\big)\, \boldsymbol{u} + \lambda\, y_2(t)\, \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza con $\boldsymbol{x}'(t)$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_1' = \lambda\, y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda\, y_2 \end{cases}$$

che ha proprio come soluzione

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) \\ y_2 = e^{\lambda t} c_2 \end{cases}$$ ■

Teorema XVII.

Considero il sistema $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$, con $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Siano

- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$ autovalori reali, di molteplicità algebrica, rispettivamente $m_1, \dots, m_k$;
- $\{\mu_1, \overline{\mu}_1, \dots, \mu_k, \overline{\mu}_k\}$ autovalori complessi, $\mu_j, \overline{\mu}_i = a_j \pm b_j\, i$, di molteplicità algebrica, rispettivamente $n_1, \dots, n_k$

tali per cui

$$\sum_{i=1}^{h} m_i + 2 \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Per ciascun autovalore, sia F l'insieme:

$$F_{\lambda_i} = \left\{ t^j\, e^{\lambda_i t} : j = 0, \dots, m_i - 1 \right\}$$
$$F_{\mu_i} = \{ t^j\, e^{a_i t} \cos(b_i t), t^j\, e^{a_i t} \sin(b_i t) : j = 0, \dots, n_i - 1 \}$$

e definiamo $F_A = \bigcup_j F_{\lambda_j} \cup \bigcup_j F_{\mu_j}$.

Allora <u>ogni</u> componente di $\boldsymbol{x}(t)$ è combinazione lineare di elementi di F_A.

Corollario sulla stabilità dell'origine. (4.23) Considero il sistema $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$.

- Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0

  $\implies$ $\mathbf{0}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- Se esiste almeno un autovalore di A con parte reale > 0

  $\implies$ $\mathbf{0}$ è un punto di equilibrio <u>instabile</u>.
- Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale ≤ 0

$\implies$ $\mathbf{0}$ è un punto di equilibrio stabile.

Esercizio. (4.24) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni del seguente sistema si mantengono limitate.

$$\begin{cases} x_1' = a\,x_2 + x_4 \\ x_2' = -x_1 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = -a\,x_1 - x_3 \end{cases}$$

Soluzione (4.24). Scriviamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo le soluzioni combinazioni lineari di elementi di F_A, le uniche funzioni ammesse per avere limitatezza sono seni e coseni.

$\implies$ imponiamo che gli autovalori di A siano tutti in $i\mathbb{R}$, e che siano <u>semplici</u> (ovvero con molteplicità algebrica 1).

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p_A(t) = \cdots = t^4 + (2a+1)t^2 + a$$

da cui ricavo che, per λ autovalore:

$$\lambda^2_\pm = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{(2a+1)^2 - 4a}}{2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{4a^2+1}}{2}$$

Per avere autovalori immaginari puri, voglio che siano entrambi <u>strettamente</u> minori di 0.

Noto che $\lambda^2_- < \lambda^2_+$, dunque impongo soltanto $\lambda^2_+ < 0 \iff$

$$\begin{aligned} -(2a+1) + \sqrt{4a^2+1} &< 0 \\ \sqrt{4a^2+1} &< 0 \end{aligned}$$

da cui ricavo il sistema:

$$\begin{cases} 2a+1>0 \\ 4a^2+1<(2a+1)^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a>-1/2 \\ a>0 \end{cases}$$

$\implies$ se $a>0$ ho quattro (e sono certo essere distinti, poiché la radice quadrata è iniettiva) autovalori in $i\mathbb{R}$.

4.7 Metodo di linearizzazione

Classificazione di un punto di equilibrio per un sistema lineare. (4.25) Per il sistema $\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}$, l'origine è un punto di equilibrio:

- <u>iperbolico</u>:
  - <u>attrattore</u>: se $\operatorname{Re}\lambda < 0$ per ogni autovalore λ di A;
  - <u>repulsore</u>: se $\operatorname{Re}\lambda > 0$ per ogni autovalore λ di A;
  - <u>sella</u>: se tutti gli autovalori di A hanno $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ e c'è almeno una coppia di autovalori di segno opposto;
- <u>centro</u>: se esiste almeno un autovalore λ di A nullo o con $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Teorema XVIII.

Teorema di Hartman-Grobman

Se $\boldsymbol{x}^*$ è un equilibrio dell'equazione autonoma $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e nel sistema linearizzato

$$\boldsymbol{x}' = \underbrace{J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{x}^*)}_{A}\,\boldsymbol{x}$$

l'origine è iperbolica, allora la stabilità di $\boldsymbol{x}^*$ come equilibrio di $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ è la stessa di quella dell'origine per il sistema linearizzato.

Esempio. (4.26) Considero il sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + x^3 \\ y' = -2y \end{cases}$$

i cui equilibri sono

$$(0,0),\ (1,0),\ (-1,0)$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana in un punto generico:

$$J_{\boldsymbol{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} -1+3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi:

- $J_{\boldsymbol{f}}(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ che ha due autovalori reali negativi

  $\implies$ per il teorema di Hartman-Grobman $(0,0)$ è asintoticamente stabile;
- $J_{\boldsymbol{f}}(\pm 1,0) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ il cui punto di equilibrio è sella

  $\implies$ per il teorema di Hartman-Grobman $(\pm 1,0)$ sono instabili.

Osservazione. (4.27) Il metodo di linearizzazione:

- è un metodo locale e non globale;
- fornisce la stabilità senza conoscere un ritratto di fase;
- non funziona quando la parte reale degli autovalori è nulla.

Capitolo 5

Metodo diretto di Lyapunov per lo studio della stabilità degli equilibri

Ipotesi. (5.1)

- Sia $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
- $\boldsymbol{p} \in \Omega$ tale che $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{0}$ (equilibrio).
- $V : B_r(\boldsymbol{p}) \longrightarrow \mathbb{R}$, con $r > 0$ e $B_r(\boldsymbol{p}) \subseteq \Omega$, V di classe C^1.

Idea di base. (5.2) Sotto le ipotesi (5.1), se troviamo una funzione V tale che

- V sia positiva in un intorno di $\boldsymbol{p}$ e nulla in $\boldsymbol{p}$;
- V sia decrescente lungo le traiettorie vicino a $\boldsymbol{p}$.

Allora $\boldsymbol{p}$ è stabile o asintoticamente stabile.

Monotonia di V. (5.3) Sotto le ipotesi (5.1), supponiamo che $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ è una soluzione dell'equazione differenziale.

- Valutiamo V lungo $\boldsymbol{x}(t)$, ovvero $V\big(\boldsymbol{x}(t)\big)$.

- Ne calcoliamo la monotonia in t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\left(\boldsymbol{x}(t)\right) =: \dot{V}\left(\boldsymbol{x}(t)\right)$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\boldsymbol{x}(t)\right) &= \left\langle \nabla V\left(\boldsymbol{x}(t)\right), \boldsymbol{x}'(t)\right\rangle \\ &= \left\langle \nabla V\left(\boldsymbol{x}(t)\right), \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(t)\right)\right\rangle\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\dot{V} : B_r(\boldsymbol{p}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \left\langle \nabla V(\xi), \boldsymbol{f}(\xi)\right\rangle\end{aligned}$$

Poiché sia V che $\boldsymbol{f}$ sono di classe C^1, allora anche ∇V è continua, e quindi $\dot{V}$ è continua.

Questa è la derivata totale di V rispetto al campo $\boldsymbol{f}$.

Teorema XIX.

Teorema di Lyapunov

Supponiamo le ipotesi (5.1).

(H_1):
- V è definita positiva in $\boldsymbol{p}$;
- $\dot{V}$ è semi definita negativa in $\boldsymbol{p}$

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{p}$ è stabile.

(H_2):
- V è definita positiva in $\boldsymbol{p}$;
- $\dot{V}$ è definita negativa in $\boldsymbol{p}$.

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{p}$ è asintoticamente stabile.

(H_3)
- $V(\boldsymbol{p}) = 0$;
- $\forall\, \varepsilon \in (0, r)$, $\exists\, \boldsymbol{x}_\epsilon \in B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$ tale che $V(\boldsymbol{x}_\varepsilon) > 0$;
- $\dot{V}$ è definita positiva in $\boldsymbol{p}$.

$\Longrightarrow$ $\boldsymbol{p}$ è instabile.

Osservazione. (5.4) Questo metodo:

- è locale;
- determina la stabilità semplice;

- non stabilisce come determinare la funzione V;
- non determina necessariamente l'asintotica stabilità di alcuni punti di equilibrio stabili.

Definizione. (5.5) *Una funzione V che soddisfa (H_1) o (H_2) o (H_3) si dice funzione di Lyapunov.*

Dimostrazione di XIX. Dimostriamo solo la prima parte. La tesi è la stabilità di $\boldsymbol{p}$, ovvero: $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $\boldsymbol{q} \in B_\delta(\boldsymbol{p})$, la soluzione $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}}(t)$ del sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{q} \end{cases}$$

soddisfi:

- $T_{\max} = +\infty$;
- $\exists\, T \geq 0$ tale che $\forall\, t > T$,

$$\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}}(t) \in B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$$

Fisso $\varepsilon < r$, in modo che V sia definita su $B_\varepsilon(\boldsymbol{p})$, e definisco

$$m_\varepsilon = \min_{x \in \partial B_\varepsilon(\boldsymbol{p})} V(x) > 0$$

poiché V è definita positiva.

$V(\boldsymbol{p}) = 0$, e inoltre V è continua

$\implies \exists\, \delta \in (0, \varepsilon)$ tale che $V(x) < \frac{1}{2} m_\varepsilon$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in B_\delta(\boldsymbol{p})$.

Dimostro che questo δ soddisfa la condizione di stabilità.

Per assurdo, supponiamo che $\exists\, \boldsymbol{q} \in B_\delta(\boldsymbol{p})$ tale la soluzione $\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}}(t)$ di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{q} \end{cases}$$

per qualche τ sia

$$\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}}(\tau) - \boldsymbol{p}\| = \varepsilon$$

e che $\|\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}}(\tau) - \boldsymbol{p}\| < \varepsilon$, $\forall\, t \in [0, \tau)$.

Per ipotesi $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ è semidefinita negativa, cioè V decresce lungo le soluzioni:

$$m_\varepsilon \leq V\left(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}}(\tau)\right) \leq V(\boldsymbol{q}) = V\left(\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{q}}(\tau)\right) < \frac{m_\varepsilon}{2}.$$

Assurdo. ■

Corollario - Applicazione ai sistemi $\ddot{\boldsymbol{x}} = -\nabla U(\boldsymbol{x})$. (5.6) Sia $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto e $\boldsymbol{p} \in \Omega$-

- $U \in C^1(\Omega)$;
- $\boldsymbol{p}$ sia un minimo stretto di U.

Allora $(\boldsymbol{p}, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{y}' = -\nabla U(\boldsymbol{x}) \end{cases}$$

Dimostrazione di (5.6) Considero $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$,

$$V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{y}\|^2 + U(\boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{p})$$

Si ha che

- $V(\boldsymbol{p}, 0) = 0$;
- $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) > 0$ in un intorno di $(\boldsymbol{p}, 0)$, poiché $U(\boldsymbol{x}) > U(\boldsymbol{p})$ per ipotesi;
- $\dot{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$.

$\Longrightarrow$ V soddisfa le ipotesi (H_1)

$\Longrightarrow$ $(\boldsymbol{p}, 0)$ è stabile. ■

5.1 Applicazione del metodo di Lyapunov

Come trovare V. (5.7) Per applicare il teorema di Lyapunov è necessario trovare la funzione V. Alcuni candidati possono essere:

- la funzione distanza, ad una potenza pari

$$V(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{p}\|^{2k}$$

- combinazioni lineari di potenze pari; ad esempio, in $\mathbb{R}^2$, una espressione nella forma:
$$V(x,y) = \alpha x^{2k} + \beta y^{2l}$$

Esempio. (5.8) Consideriamo

$$\begin{cases} x' = -y - 3x^3 \\ y' = x^5 - 2y^3 \end{cases}$$

Mostrare che $(0,0)$ è l'unico equilibrio e che è asintoticamente stabile, sfruttando un'opportuna funzione di Lyapunov della forma

$$V(x,y) = \alpha x^{2m} + \beta y^{2n}$$

- Equilibri:

$$\begin{cases} -y - 3x^3 = 0 \\ x^5 - 2y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -3x^3 \\ x^5 - 2(-3x^3)^3 = 0 \end{cases}$$

  Dalla seconda equazione ottengo $x^5\left(1 + 54x^4\right) = 0$, ovvero $x = 0$

  $\implies y = 0$

  Dunque l'unico equilibrio è $(0,0)$.

- Vogliamo che V sia definita positiva in $(0,0)$ e che $\dot{V}$ sia definita negativa.
  - $V(x,y) = \alpha x^{2m} + \beta y^{2n}$ è definita positiva $\iff \alpha, \beta > 0$.
  - $\dot{V}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} y'(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= \alpha\, 2m\, x^{2m-1}(-y - 3x^3) + \beta\, 2n\, y^{2n-1}(x^5 - 2y^3) \\ &= -2\alpha m\, x^{2m-1} y \underline{-6\alpha m x^{2n+2}} \\ &\quad + 2\beta n x^5 y^{2n-1} \underline{-4\beta x y^{2n+2}} \end{aligned}$$

    La parte sottolineata, poiché $m, n, \alpha, \beta > 0$, è già definita negativa in $(0,0)$. Richiediamo ora, per esempio, che l'altro pezzo di $\dot{V}$ sia nullo. In particolare, vorremmo che fossero monomi simili:

$$\begin{cases} 2m - 1 = 5 \\ 2n - 1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$$

e dunque

$$-6\alpha x^5 y + 2\beta x^5 y = (-6\alpha + 2\beta) x^5 y = 0.$$

Dunque, scegliendo $m = 3, n = 1, \beta = 3\,\alpha$ si ottiene una funzione che soddisfa tutte le ipotesi.

Esempio. (5.9) Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + y - (x+y)(x^2+y^2) \\ y' = -x + y + (x+y)(x^2+y^2) \end{cases}$$

- Equilibri:

$$\begin{cases} 0 = -x + y - (x+y)(x^2+y^2) \\ 0 = -x + y + (x+y)(x^2+y^2) \end{cases} \implies \begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = y - x \\ (x+y)(x^2+y^2) = x - y \end{cases}$$

  $\implies y - x = 0$ e $x = y$.

  Sostituendo nella prima equazione, $(2x)(2x^2) = 0$

  $\implies x = 0$

  $\implies (0,0)$ è l'unico equilibrio.

- Linearizzazione: la matrice associata al sistema linearizzato è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  che ha entrambi gli autovalori nulli: il metodo non funziona.

- Lyapunov[†]: osservo che la funzione $V(x,y)$ suggerita ha una sella in $(0,0)$, dunque se il metodo di Lyapunov funziona dimostrerà l'instabilità.

  Il segno di V su $\mathbb{R}^2$ è mostrato in figura 5.1

  In ogni intorno di $(0,0)$ la funzione V cambia di segno

[†] Suggerimento: utilizzare $V(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

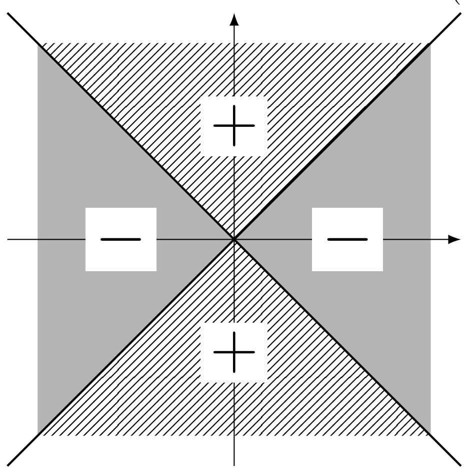


Figura 5.1: Segno su $\mathbb{R}^2$ di $V(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

$\implies$ $\exists\,\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbf{0}$$
$$(x_n, y_n) \geq 0, \quad \forall\, n$$

Verifico ora il segno di $\dot{V}$:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= \frac{\partial V}{\partial x}\, x' + \frac{\partial V}{\partial y}\, y' \\ &= -x(-x+y) + y(-x+y) \\ &\qquad + x(x+y)(x^2+y^2) + y(x+y)(x^2+y^2) \\ &= x^2 - xy - xy + y^2 + (x+y)^2(x^2+y^2) \geq 0\end{aligned}$$

e si annulla <u>solo</u> nell'origine.

$\implies$ sono soddisfatte le ipotesi (H_3) del teorema di Lyapunov.

Esercizio. (5.10) Considero il sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases}$$

e le funzioni

$$\begin{aligned} V_1(x,y) &= x^2 + y^2 \\ V_2(x,y) &= \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} \\ V_3(x,y) &= \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} + x^3 y \end{aligned}$$

Stabilire se V_1, V_2 e V_3 sono funzioni di Lyapunov per il sistema.

Soluzione (5.10).

- $(0,0)$ è l'unico equilibrio.
- $V_1(x,y) = x^2 + y^2$ è definita positiva in $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x,y) &= \tfrac{\partial V_1}{\partial x}\, x' + \tfrac{\partial V_2}{\partial y}\, y' \\ &= \end{aligned}$$

Manca la fine dell'esercizio

Osservazione. (5.11) Il sistema precedente può essere visto come

$$x'' = -x^3 - x'$$

Se considero solo $x'' = -x^3$, posso vederlo nella forma

$$x'' = -\nabla U(x), \qquad U(x) = \frac{1}{4}x^4$$

Quindi il termine $-x'$ è dissipativo

Teorema XX.

Teorema di La Salle-Krasovskii

Sia $\boldsymbol{p}$ un punto di equilibrio stabile per $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, e V una funzione di Lyapunov che soddisfa le ipotesi (H_1).

Sia

$$\mathscr{E} = \{\boldsymbol{x} \in B_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{p}) : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Se $\mathscr{E}$ non contiene orbite complete distinte da $\{\boldsymbol{p}\}$, allora $\boldsymbol{p}$ è asintoticamente stabile.

Esempio. (5.12) Se consideriamo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases} \qquad \begin{aligned} V_2(x,y) &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 \\ \dot{V}_2(x,y) &= -y^2 \end{aligned}$$

l'insieme

$$\mathscr{E} = \Big\{(x,y) : -y^2 = 0\Big\} = \big\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\big\}$$

Ci chiediamo se questo insieme contiene orbite distinte da $\boldsymbol{p}$.

Sostituisco $y = 0$ nel sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -x^3 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ l'asse x non contiene orbite distinte da $\boldsymbol{p}$, poiché in ogni punto tranne l'origine l'orbita passante per quel punto è perpendicolare all'asse x.

Modello preda-predatore Lodka-Volterra. (5.13) Siano:

- $C(t)$ il numero di prede al tempo t (dove c sta per coniglio);
- $L(t)$ il numero di predatori al tempo t (dove l sta per lupo).

Supponiamo che entrambe queste popolazioni crescono proporizionalmente a sé stessi:

$$\begin{aligned} C'(t) &= c\,C(t) \\ L'(t) &= l\,L(t) \end{aligned}$$

dove c, l sono tassi di crescita.

Consideriamo però dei tassi di crescita sifatti:

$$x = \gamma - \delta\,L(t), \qquad l = -\alpha + \beta\,C(t)$$

dove $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$.

Ottengo il modello

$$\begin{cases} C'(t) = \big(\gamma - \delta\,L(t)\big)\;C(t) \\ L'(t) = \big(-\alpha + \beta\,C(t)\big)\;L(t) \end{cases} \qquad \alpha, \beta, \delta, \gamma > 0.$$

Riscaliamo le variabili, o equivalentemente supponiamo $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 1$:

$$\begin{cases} C' = (1 - L)\, C \\ L' = (C - 1)\, L \end{cases}$$

Ha senso supporre che $C(t), L(t) > 0$, poiché sono numeri di individui.

- Equilibri: facilmente si nota che i punti di equilibri sono $(0,0), (1,1)$.

  È interessante notare che due specie in competizione trovano sempre un equilibrio, che non prevede l'annichilimento di ambo le specie.

- Rette invarianti: sono presenti due rette invarianti:
  - $L = 0$, orbita uscente dall'origine;
  - $C = 0$, orbita entrante nell'origine.
  - Equazioni delle orbite: le soluzioni si trovano sugli insiemi di livello della funzione

    $$g(C, L) = (C - \log C) + (L - \log L)$$

5.2 Alcuni risultati teorici

Osservazione. (5.14) Consideriamo $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{p} \in \Omega$ punto di equilibrio asintoticamente stabile, $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Nei sistemi lineari, se $\operatorname{Re}\lambda < 0$ per tutti gli autovalori λ

$\implies$ $\boldsymbol{p}$ attrae tutte le orbite.

Definizione. (5.15) *Consideriamo $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{p} \in \Omega$ punto di equilibrio, $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.*

$\boldsymbol{p}$ si dice attrattore globale se

$$\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p}, \qquad \forall\, \boldsymbol{q} \in \Omega$$

dove $\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{q})$ è soluzione di

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{q}. \end{cases}$$

Teorema XXI.

Teorema di Barbashin-Krasovskii

Se $V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Lyapunov che soddisfa (H_2) e

$$V(\boldsymbol{x}) \longrightarrow +\infty, \qquad \|\boldsymbol{x}\| \longrightarrow +\infty$$

allora $\boldsymbol{p}$ è un attrattore globale.

Osservazione. (5.16) Se $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ammette più di un punto di equilibrio, allora nessuno dei due può essere attrattore globale.

Esempio. (5.17) Manca un esempio

In questo sistema l'orbita periodica di raggio 1 è un ciclo limite.

Definizione. (5.18) *Un ciclo limite è un'orbita chiusa che ammette un'intorno che non contiene altre orbite chiuse.*

Definizione. (5.19) *Se γ è un ciclo limite che ammette un intorno I_γ tale che*

$$\forall\, \boldsymbol{q} \in I_\gamma, \qquad \lim_{t \to +\infty} d\left(\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{q}), \gamma\right) = 0$$

allora γ si dice stabile. Altrimenti γ è instabile.

Teorema XXII.

Teorema di Poincaré-Bendixon

Sia $\boldsymbol{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Ω aperto e $\boldsymbol{f} \in C^1(\Omega)$. Supponiamo che

- $K \subseteq \Omega$ compatto;
- $\forall\, \boldsymbol{p} \in K$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \neq \boldsymbol{0}$;
- $\exists\, \boldsymbol{q} \in K$ tale che $\boldsymbol{\phi}_t(\boldsymbol{q}) \in K$, $\forall\, t \geq 0$.

Allora K contiene un ciclo limite.

Definizione. (5.20) *Il compatto K che soddisfa questo teorema si chiama trapping region.*

Esempio. (5.21) Torniamo all'esempio di prima, scritto direttamente in forma polare:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta = 1 \end{cases}$$

Per un compatto nella forma $\{r \in [r_1, r_2]\}$, con $r_1 < 1 < r_2$, questo teorema garantisce l'esistenza di un ciclo limite, come trovato "a mano".

Osservazione. (5.22) Questo teorema è peculiare per la dimensione due.

Bibliografia

[1] Vivina Barutello. *Modelli Differenziali*. 2023.

[2] Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa. *Analisi matematica 2*. 2016.