

# Modelli Differenziali

Davide Peccioli

Anno accademico 2022-2023

Università degli Studi di Torino



# Indice

<b>I</b>	<b>Complementi di Teoria delle E.D.O.</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Ripasso E.D.O.</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali</b>	<b>9</b>
2.1	Il teorema . . . . .	9
2.2	Equazione alle variazioni . . . . .	14
2.3	Flusso associato ad una equazione differenziale . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Equazioni autonome</b>	<b>19</b>
3.1	Equazioni autonome in una dimensione . . . . .	19
3.1.1	Equazione logistica . . . . .	19
3.1.2	Diagramma di fase . . . . .	20
3.2	Risultati e definizioni sui sistemi autonomi . . . . .	21
3.3	Stabilità dei punti di equilibrio . . . . .	28
3.4	Equazioni autonome in due dimensioni . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Sistemi di E.D.O. lineari</b>	<b>41</b>
4.1	Matrice diagonale . . . . .	44
4.2	Matrice diagonalizzabile . . . . .	47
4.3	Matrice esponenziale . . . . .	48
4.4	Matrice con autovalori in $\mathbb{C}$ . . . . .	51
4.5	Matrice con autovalori regolari in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ . . . . .	52
4.6	Matrice generica . . . . .	54
4.7	Metodo di linearizzazione . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Metodo diretto di Lyapunov per lo studio della stabilità degli equilibri</b>	<b>61</b>
5.1	Applicazione del metodo di Lyapunov . . . . .	64

5.2	Alcuni risultati teorici . . . . .	70
<b>II Introduzione alle tecniche geometriche per lo studio dei modelli differenziali in fisica matematica</b>		<b>73</b>
<b>6</b>	<b>Campi di vettori e forme differenziali su spazi affini</b>	<b>75</b>
6.1	Simboli di Christoffel . . . . .	84
6.2	Forme differenziali . . . . .	86
<b>7</b>	<b>Curve negli spazi affini, rappresentazione in coordinate non affini, e sistemi dinamici</b>	<b>91</b>
7.1	Risoluzione sistemi dinamici . . . . .	94
7.2	Velocità e accelerazione in coordinate non affini . . . . .	96
7.3	Moti geodetici su una superficie . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Il modello della visione</b>	<b>103</b>
8.1	Introduzione . . . . .	103
8.2	Il modello . . . . .	103

Parte I

# Complementi di Teoria delle E.D.O.



# Capitolo 1

## Ripasso E.D.O.

**Problema di Cauchy. (1.1)** Data una funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ , con

- $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  o, più precisamente
- $(t, \mathbf{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  aperto

ci si chiede sotto quali condizioni su  $\mathbf{f}$  il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

ammetta almeno una soluzione o ammetta esattamente una soluzione, al variare della condizione iniziale  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ .

### Teorema I.

#### Teorema di Peano

Se  $\mathbf{f}$  è continua su  $\Omega$ , allora per ogni punto  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  esiste un intorno di  $t_0$  nel quale è definita almeno una soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

**Pennello di Peano. (1.2)** La sola ipotesi di continuità non basta ad affermare anche l'unicità della soluzione del PdC.

Si scopre infatti che se si dimostra che il problema di Cauchy ammette due soluzioni distinte, allora in realtà ne ha infinite. Questo fenomeno, denominato pennello di Peano, è reso evidente dal seguente

**Esempio. (1.3)** Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Questo problema ammette certamente la soluzione  $u \equiv 0$ , ma anche le soluzioni

$$u_0^\pm = \begin{cases} \pm \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Per garantire l'unicità della soluzione, risulta così necessario il cosiddetto

#### Teorema II.

#### Teorema di Cauchy-Lipschitz

Se  $f$  è

- continua,
- localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e uniformemente nella prima<sup>a</sup>

allora per ogni punto  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$  esiste un intorno di  $t_0$ ,  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  nel quale è definita un'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

<sup>a</sup> Ovvero

$$\forall K \subset \Omega, \quad \exists L > 0 : \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in K.$$



**Dimostrazione di II.** La dimostrazione si articola nei seguenti passaggi:

- si considera l'equazione di Volterra

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) \, ds$$

e si mostra che quest'ultima ammette un'unica soluzione continua in un intorno di  $t_0$ ;

- esistenza e unicità dell'equazione di Volterra si dimostrano applicando il Teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli;
- la seguente successione

$$\mathbf{u}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_{n-1}(s)) \, ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

risulta convergere uniformemente alla soluzione dell'equazione di Volterra e dunque all'unica soluzione del Problema di Cauchy.

**Osservazione. (1.4)** L'intervallo di definizione della soluzione del problema di Cauchy è certamente più ampio di  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ : possiamo infatti applicare lo stesso teorema di esistenza ed unicità locale ai problemi di Cauchy con condizioni iniziali

$$(t_0 \pm \delta, \mathbf{u}(t_0 \pm \delta)) \in \Omega$$

ed iterare questo procedimento.

In generale, quindi, esiste un intervallo  $(T_{\min}, T_{\max})$  per la soluzione  $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_0)}(t)$ , che per costruzione non può che essere aperto e connesso.

**Teorema III.****Teorema di Esistenza Globale**

Sia  $f$  tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte.

Sia inoltre  $S = (a, b) \times \mathbb{R}^n$  una striscia tale che  $\bar{S} \subseteq \Omega$ . Se esiste una coppia di costanti positive  $k_1, k_2$  tali per cui

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2 \|x\|, \quad \forall (t, x) \in \bar{S}$$

allora, per ogni  $(t_0, x_0) \in S$ , l'intervallo massimale della soluzione  $u_{(t_0, x_0)}(t)$  contiene l'intervallo  $[a, b]$ .

**(1.5)** Questo teorema è ciò che garantisce l'esistenza globale per i sistemi lineari del tipo

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

con  $A(t)$  matrice  $n \times n$

**Teorema IV.**

Sia  $f$  tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte. Sia  $K \subset \subset \Omega^a$ ,  $(t_0, x_0) \in K$  e  $(T_{\min}, T_{\max})$  l'intervallo massimale di definizione di  $u_{(t_0, x_0)}(t)$ .

Allora il grafico di  $u$  esce definitivamente da  $K$  quando  $t \rightarrow T_{\min}^+$  o  $t \rightarrow T_{\max}^-$

---

<sup>a</sup> Ovvero  $K$  contenuto in  $\Omega$  e  $K$  compatto.

**Corollario - Esplosione in tempo finito. (1.6)** Sia  $f$  tale che soddisfi le condizioni del teorema di Cauchy-Lipschitz, e sia  $(T_{\min}, T_{\max})$  l'intervallo massimale di  $u_{(t_0, x_0)}(t)$ .

Se  $T_{\max} < +\infty$  allora

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \|u_{(t_0, x_0)}(t)\| = +\infty$$

se tale limite esiste. Analogamente se  $T_{\min} > -\infty$ .

**Attenzione. (1.7)** Per i prossimi risultati si consideri  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

**Corollario - Limitatezza a priori. (1.8)** Sia  $\mathbf{f}$  tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte. Sia  $(T_{\min}, T_{\max})$  l'intervallo massimale di  $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_0)}(t)$ .

Se esiste  $C > 0$  tale per cui

$$\left\| \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_0)}(t) \right\| \leq C, \quad \forall t \in [t_0, T_{\max})$$

allora  $T_{\max} = +\infty$ .



## Capitolo 2

# Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali

### 2.1 Il teorema

**Domanda. (2.1)** Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$$

con  $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Se prendiamo il sistema di Cauchy sostituendo a  $\mathbf{x}_0$  una  $\mathbf{x}$  vicina ad  $\mathbf{x}_0$ , cosa succede alla soluzione?

**Esempio. (2.2)** Preso il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{u} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

si ha che la soluzione  $\mathbf{u}_{(0, \mathbf{x}_0)}$  è, al variare del dato iniziale  $\mathbf{x}_0$ :

- $\mathbf{u}_{(0, \mathbf{x}_0)}(t) \equiv 0$ , se  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u}_{(0, \mathbf{x}_0)}(t) = \mathbf{x}_0 e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , se  $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$

$\Rightarrow$  non è dunque ragionevole pensare che se  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  la soluzione  $\mathbf{u}_{(t,\mathbf{x})}$  si mantenga sempre vicina a  $\mathbf{u}_{(t,\mathbf{x}_0)}$ .

### Teorema V.

#### Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$$

con  $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Sia  $I_{\max}$  l'intervallo massimale di  $\mathbf{u}_{(t_0,\mathbf{x}_0)}$  e  $[a, b] \subset I_{\max}$ . Allora:

1. esiste un intorno di  $\mathbf{x}_0$ ,  $N$ , tale che per ogni  $\mathbf{x} \in N$  il PdC

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x} \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione il cui intervallo massimale contiene  $[a, b]$ ;

2. per ogni  $\bar{\mathbf{x}}_0 \in N$  e per ogni  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$  con  $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_0$  in  $\mathbb{R}^n$  la soluzione del corrispondente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_k \end{cases}$$

converge uniformemente su  $[a, b]$  alla soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0. \end{cases}$$

**Osservazione. (2.3)** La richiesta  $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_0$  implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_k)}(t_0) = \mathbf{u}_{(t_0, \bar{\mathbf{x}}_0)}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$$

ovvero la convergenza puntuale della successione  $\{\mathbf{u}_{(t, \mathbf{x}_k)}\}_k$  in un punto. Il teorema afferma che la successione  $\{\mathbf{u}_{(t, \mathbf{x}_k)}\}_k$  converge non solo puntualmente, ma bensì uniformemente su  $[a, b]$ . Un risultato più generale è:

#### Teorema VI.

##### Teorema di Kamke

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$$

con  $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Sia  $I_{\max}$  l'intervallo massimale di  $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_0)}(t)$ . Fissiamo  $[a, b] \subset I_{\max}$ .

Prendiamo

- $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $t_k \rightarrow t_0$ ;
- $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ ;
- $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  funzioni di dominio  $\Omega$  che soddisfano il teorema di esistenza e unicità locale,

$$\mathbf{f}_k \rightarrow \mathbf{f} \quad \text{uniformemente sui compatti di } \Omega.$$

Allora definitivamente per ogni  $k$  il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}_k(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_k) = \mathbf{x}_k \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione definita su  $[a, b]$  e convergente uniformemente, su  $[a, b]$  stesso, alla soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Per la dimostrazione del Teorema V ci serviremo del

**Lemma di Gronwall. (2.4)** Sia  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua, e supponiamo che  $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \geq 0$  tali che

$$\phi(t) \leq A + B \int_a^t \phi(s) ds, \quad \forall t \in [a, b]$$

Allora

$$\phi(t) \leq A e^{B(t-a)}, \quad \forall t \in [a, b]$$

**Dimostrazione di (2.4)** Sia  $w(t) := A + B \int_a^t \phi(s) ds$ . Per ipotesi

- $\phi(t) \leq w(t)$  su  $[a, b]$ ;
- $w$  è derivabile (perché  $\phi$  è continua) e  $w'(t) = B \phi(t)$

Prendiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [w(t) e^{-B(t-a)}] &= [w'(t) - B w(t)] e^{-B(t-a)} \\ &= \underbrace{B}_{\geq 0} \underbrace{(\phi(t) - w(t))}_{\leq 0} \underbrace{e^{-B(t-a)}}_{\geq 0} \leq 0 \end{aligned}$$

$\implies$  la funzione  $w(t) e^{-B(t-a)}$  è decrescente su  $[a, b]$

$\implies$  è massima in  $t = a$ , ovvero

$$A := w(a) e^0 \geq w(t) e^{-B(t-a)} \geq \phi(t) e^{-B(t-a)}$$

$\implies \phi(t) \leq A e^{B(t-a)}$

■

**Dimostrazione di V.**

1. Dimostriamo per assurdo. Supponiamo che  $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbf{x}_\varepsilon \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$  tale per cui la soluzione massimale  $\mathbf{u}_\varepsilon(t) := \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_\varepsilon)}(t)$  di

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_\varepsilon \end{cases}$$



non sia definita su tutto  $[a, b]$ .

Per semplicità prendo  $t_0 = a$  e “lavoro a destra”.

Prendiamo  $\delta > 0$  sufficientemente piccolo e

$$k_\delta = \{(t, \mathbf{x}) \in \Omega : t \in [a, b], \|\mathbf{u}_0(t) - \mathbf{x}\| < \delta\}$$

Sia  $[a, b_\varepsilon)$  con  $b_\varepsilon < b$  l'intervallo massimale destro di  $\mathbf{u}_\varepsilon$ .

Necessariamente  $\mathbf{u}_\varepsilon$  deve uscire dal compatto  $k_\delta$  prima di  $b_\varepsilon$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_\varepsilon \in (a, b_\varepsilon) : \begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(t_\varepsilon) - \mathbf{u}_0(t_\varepsilon)\| = \delta \\ &\|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}_0(t)\| < \delta \quad \forall t \in [a, t_\varepsilon] \end{aligned}$$

Sfruttiamo il fatto che  $\mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{u}_\varepsilon$  siano le soluzioni di problemi di Cauchy e usiamo le loro equazioni di Volterra.

$$\mathbf{u}_\varepsilon(t) = \mathbf{u}_\varepsilon(a) + \int_a^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_\varepsilon(s)) \, ds$$

Definiamo ora, per ogni  $t \in [a, t_\varepsilon]$ , la funzione

$$\begin{aligned} \phi(t) &:= \|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}_0(t)\| \\ &= \left\| \mathbf{u}_\varepsilon(a) + \int_a^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_\varepsilon(s)) \, ds - \mathbf{u}_0(a) - \int_a^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_0(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon(a) - \mathbf{u}_0(a)\| + \int_a^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}_\varepsilon(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_0(s))\| \, ds \\ &\stackrel{\dagger}{\leq} \underbrace{\|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{x}_0\|}_{A_\varepsilon} + \underbrace{L}_{>0} \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s) - \mathbf{u}_0(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Dunque, per il lemma di Gronwall,  $\phi(t) \leq A_\varepsilon e^{L(t-a)}$ . Inoltre, avendo  $\phi(t_\varepsilon) = \delta$ , si ha che

$$0 < \delta \leq \underbrace{A_\varepsilon}_{\rightarrow 0} \underbrace{e^{L(t_\varepsilon-a)}}_{>0} \xrightarrow{\mathbf{x}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{x}_0} 0$$

che è assurdo.

---

<sup>†</sup> dove  $L$  è la costante di Lipschitz di  $\mathbf{f}$  su  $k_\delta$

2. Consideriamo  $\bar{x}_0 \in N$  e  $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$  tale che  $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{x}_0$ . Definiamo inoltre  $\bar{\mathbf{u}}(t) := \mathbf{u}_{(t_0, \bar{x}_0)}(t)$  e  $\mathbf{u}_k(t) := \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_k)}(t)$ .

- Sia  $\bar{K}_\delta$  il  $\delta$ -intorno compatto di  $\bar{\mathbf{u}}$ ;
- per  $k$  sufficientemente grandi, il grafico di  $\mathbf{u}_k$  rimane in  $\bar{K}_\delta$  (ragionando come il punto precedente);
- uso il lemma di Gronwall sulla

$$\phi(t) := \|\mathbf{u}_k(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\|$$

e ottengo, sempre utilizzando l'equazione di Volterra

$$\|\mathbf{u}_k(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| \leq \underbrace{\|\mathbf{x}_k - \bar{x}_0\|}_{\rightarrow 0} e^{L(b-a)}$$

dove  $L$  è la costante di Lipschitz di  $\mathbf{f}$  su  $\bar{K}_\delta$ . Così facendo:

$$\|\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} \|\mathbf{u}_k(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_k - \bar{x}_0\| e^{L(b-a)} \rightarrow 0$$

■

**Osservazione. (2.5)** Questo teorema si chiama di “dipendenza continua” perché la funzione:

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \mathcal{C}([a, b]; \|\cdot\|_\infty) \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t) \end{aligned}$$

è continua! Infatti, per  $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{x}_0 \in N$  le soluzioni corrispondenti convergono uniformemente.

## 2.2 Equazione alle variazioni

**Domanda. (2.6)** Ci chiediamo ora se la funzione  $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t)$  ha regolarità maggiore rispetto a  $\mathbf{x}$ ? Se sì, come si comporta  $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t)$ ?

**Equazione alle variazioni. (2.7)** Sia

$$\begin{cases} u'(t) = t u^2 \\ u(0) = x \end{cases} \quad u_{(0, x)}(t) = \frac{2x}{2 - t^2 x}, \quad t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{x}}, \sqrt{\frac{2}{x}}\right)$$

Ora, interpretando  $u_{(0,x)}(t)$  come funzione di due variabili  $t$  e  $x$ , analizziamone le derivate parziali:

$$\partial_t u_{(0,x)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} u_{(0,x)}(t) = \cdots = t u_{(0,x)}^2(t)$$

$$\begin{aligned} \partial_x u_{(0,x)}(t) &= \frac{\partial}{\partial x} u_{(0,x)}(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x}{2 - t^2 x} \right) \\ &= \frac{4 - \cancel{2t^2 x} - \cancel{2x}(\cancel{t^2})}{(2 - t^2 x)^2} = \frac{4}{(2 - t^2 x)^2} \end{aligned}$$

Notando che la soluzione è  $C^2$  possiamo permetterci di calcolare le derivate parziali seconde:

$$\partial_t \partial_x u_{(0,x)}(t) = \partial_x \partial_t u_{(0,x)}(t) = t \cdot 2u_{(0,x)}(t) \cdot \partial_x u_{(0,x)}(t)$$

Valutiamo tutto in  $x = x_0$ , ponendo  $v(t) := \partial_x u_{(0,x_0)}(t)$ . Si ha che

$$\frac{d}{dt} v(t) = 2t u_{(0,x_0)}(t) v(t)$$

ovvero

$$v'(t) = g(t) v(t), \quad g(t) = 2t u_{(0,x_0)}(t)$$

La funzione  $v(t)$  risolve un'equazione lineare che si chiama equazione alle variazioni dove

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial u} [f(t, u)]_{u=u_{(0,x_0)}(t)}.$$

### Generalizzazione. (2.8)

- Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1(\Omega)$ .
- Sia  $(t_0, x_0) \in \Omega$  e  $u_{(t_0, x_0)}(t)$  soluzione di

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e sia  $[a, b] \subseteq I_{\max}$ , dove  $I_{\max}$  è l'intervallo massimale di  $u_{(t_0, x_0)}(t)$

- Se  $N$  è intorno di  $x_0$ :  $\forall x \in N$ , l'unica soluzione  $u_{(t_0,x)}(t)$  di

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x \end{cases}$$

è definita su tutto  $[a, b]$

Sono nella situazione in cui vale:

$$\partial_t u_{(t_0,x)}(t) = f(t, u_{(t_0,x)}(t)) \quad \text{perché è soluzione} \quad (2.1)$$

$$u_{(t_0,x)}(t_0) = x \quad \text{è il dato iniziale} \quad (2.2)$$

(2.1): Interpretando la soluzione come funzione anche del dato iniziale  $x$ , supponiamo che  $u_{(t_0,x)}(t)$  sia derivabile in  $x$  (e questa cosa non è stata dimostrata).

Allora il secondo membro di (2.1) è derivabile in  $x$ , e dunque anche il primo. Derivando a sinistra e a destra in  $x$  otteniamo:

$$\partial_t \partial_x u_{(t_0,x)}(t) = \partial_x f(t, u_{(t_0,x)}(t)) = \partial_u f(t, u_{(t_0,x)}(t)) \cdot \partial_x u_{(t_0,x)}(t) \quad (2.3)$$

(2.2): Derivando ambo i membri rispetto a  $x$ , ottengo

$$\partial_x u_{(t_0,x)}(t_0) = 1 \quad (2.4)$$

Sia  $v(t) = \partial_x u_{(t_0,x)}(t)$ , allora da (2.3)

$$v'(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \partial_u f(t, u_{(t_0,x)}(t)) \cdot \partial_x u_{(t_0,x)}(t) = \underbrace{\partial_u f(t, u_{(t_0,x)}(t))}_{g(t):= } \cdot v(t),$$

mentre da (2.4) ottengo  $v(t_0) = 1$ .

Abbiamo trovato che  $v$  risolve il problema di Cauchy lineare:

$$\begin{cases} v'(t) = g(t) v(t) \\ v(t_0) = 1 \end{cases}$$

## 2.3 Flusso associato ad una equazione differenziale

**Definizione del flusso. (2.9)** Sia  $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^1(\Omega)$ .

Sia  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ , e sia

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (t_0, \mathbf{x}) \in \Omega\}$$

e sia  $I(\mathbf{x})$  l'intervallo massimale della soluzione  $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x} \end{cases}$$

Considero ora l'insieme

$$E = \{(t, \mathbf{x}) \in \Omega : t \in I(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_0\} = I(\mathbf{x}) \times \Omega_0$$

La funzione  $\Psi$  definita sotto si chiama flusso, e indica dove si trova al tempo  $t$  la soluzione con dato iniziale  $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}$ .

$$\begin{aligned} \Psi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t) \end{aligned} \quad \Psi_{\mathbf{x}}(t) := \Psi(t, \mathbf{x})$$

**Teorema VII.**

Se  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ , allora la funzione  $\Psi$  è di classe  $C^1(E)$ .

**Sistemi autonomi. (2.10)** Analizziamo ora il caso dei sistemi autonomi. Prima di tutto

**Definizione. (2.11)** Si dice sistema autonomo un'equazione differenziale della forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Cosa succede nei sistemi autonomi? Sia

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{x} \in \Omega' \end{cases}$$

con  $\mathbf{f} : \Omega = \mathbb{R} \times \Omega' \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dove:

- $\Omega$  è una “striscia” di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,
- $\Omega'$  è il dominio di  $\mathbf{f}$ .

Poichè  $\Omega_0$  non dipende da  $t_0 \rightsquigarrow$  fissiamo  $t_0 = 0$ .

Preso  $I(\mathbf{x})$  intervallo massimale per la soluzione con  $\mathbf{u}_{(0,\mathbf{x})}$  e definito l'insieme  $E$  come:

$$E := \{(t, \mathbf{x}) : t \in I(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega'\} = I(\mathbf{x}) \times \Omega'$$

possiamo scrivere il flusso:

$$\begin{aligned} \Psi: E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{u}_{(0,\mathbf{x})}(t) \end{aligned}$$

e  $\Psi_{\mathbf{x}}(t) := \Psi(t, \mathbf{x})$  è soluzione con  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{x}$ .

**Esempio. (2.12)**

$$\begin{cases} u' = u(1-x) \\ u(0) = x \end{cases}$$

Si ha che

- se  $x > 1$ :  $I(x) = (\alpha_x, +\infty)$  con  $\alpha_x > -\infty$
- se  $x \in [0, 1]$ :  $I(x) = \mathbb{R}$
- se  $x < 0$ :  $I(x) = (-\infty, \omega_x)$  con  $\omega_x < +\infty$

## Capitolo 3

# Equazioni autonome

### 3.1 Equazioni autonome in una dimensione

#### 3.1.1 Equazione logistica

**Studio delle soluzioni. (3.1)** Sia  $p'(t) = (k - hp(t)) \cdot p(t)$ , dove  $p(t)$  è il numero di individui in una popolazione al tempo  $t$ , con  $k, h > 0$  e  $p(t) \geq 0$ .

Supponiamo che  $p(0) = p_0 \geq 0$ . Ci chiediamo l'evoluzione di  $p(t)$  per  $t > 0$ .

1. Prima di tutto cerchiamo le soluzioni costanti, ovvero quelle tali che  $f(p) = 0$ . Queste sono:  $p(t) \equiv 0$  e  $p(t) \equiv (k/h)$ .
2. Studiamo adesso, invece, la monotonia delle soluzioni:

$$p'(t) \geq 0 \iff (k - hp(t)) \cdot \underbrace{p(t)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Dunque  $p'(t) \geq 0 \iff p(t) \leq k/h$ .

Concludiamo così che: se  $p(t) \in (0, k/h)$  la soluzione cresce, mentre se  $p(t) \in (k/h, +\infty)$  la soluzione decresce.

Per stabilire il comportamento finale della soluzione dobbiamo analizzare i possibili dati iniziali  $p_0$  del sistema:

- $p_0 \in (0, k/h)$ : la soluzione è crescente, e si troverà sempre nella striscia  $[0, +\infty) \times (0, k/h)$  (per  $\exists$  e ! locale)

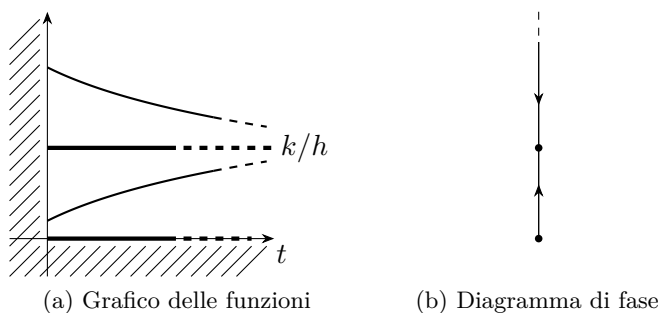


Figura 3.1: Equazione Logistica (**da finire**)

$\implies$  la soluzione si mantiene limitata, e in particolare

$$\|p\| \leq k/h.$$

È soddisfatto il corollario (1.8), e quindi  $T_{\max} = +\infty$

- $p_0 > k/h$ : la soluzione è sempre monotona decrescente, e si troverà sempre nel semispazio  $p > k/h$ . Anche in questo caso si applica il corollario (1.8)  $\implies T_{\max} = +\infty$ .

Si noti, infine, che il teorema dell'asintoto ci garantisce che tutte le soluzioni non costanti abbiano come limite a  $+\infty$  la soluzione costante  $k/h$ .

**Diagramma di fase. (3.2)** Poiché  $p(t) \in \mathbb{R}$ , si dice che  $\mathbb{R}$  è lo spazio delle fasi o degli stati.

Osservando la figura 3.1, il grafico (b) prende il nome di diagramma di fase.

**Osservazione. (3.3)** Tra due zeri consecutivi di  $f$ , la monotonia della soluzione (nel caso autonomo) non cambia.

### 3.1.2 Diagramma di fase

**Definizione. (3.4)** Se  $u$  è una soluzione massimale<sup>†</sup> di  $y' = f(y)$ , l'insieme

$$\gamma_u = \{u(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\}$$

<sup>†</sup> Ovvero il suo dominio di definizione è massimale.



è detta orbita di  $u$ .

**Nota. (3.5)** Le soluzioni stazionarie di  $y' = f(y)$  hanno come orbita un singolo punto.

**Definizione. (3.6)** *L'insieme delle orbite con il loro verso di percorrenza costituisce il ritratto di fase di  $y' = f(y)$ .*

**Esempio. (3.7)** L'equazione logistica, presa come equazione differenziale in  $s$ , ha 5 orbite: due semirette, due punti e un segmento.

**(3.8)** Dimostreremo in  $\mathbb{R}^n$  che per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola orbita. Nel caso 1-dimensionale, si può notare che se  $u_{(0,x_0)}(t)$  è soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

allora la funzione  $w(t) := u_{(0,x_0)}(t + \tau)$  risolve

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = u_{(0,x_0)}(\tau) \end{cases}$$

$\implies$  la soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

è  $u_{(0,x_0)}(t - \tau)$

**Esercizio. (3.9)** Fare il diagramma di fase dell'equazione differenziale

$$y' = y(2 - y) e^{\sin y}$$

## 3.2 Risultati e definizioni sui sistemi autonomi

**Ipotesi. (3.10)** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \Omega \end{cases}$$

$\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, n \geq 1$ , continua e localmente lipschitziana<sup>†</sup>, vale il teorema di esistenza e unicità locale della soluzione,  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ .

**Definizione. (3.11)**  $\Omega$  si dice spazio delle fasi o degli stati.

**Definizione. (3.12)** Se  $\mathbf{u}$  è una soluzione massimale di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , l'insieme

$$\gamma := \{u(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\}$$

è detta orbita per  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  e la soluzione  $\mathbf{u}$  è una parametrizzazione di  $\gamma$ .

**Osservazione. (3.13)**

$$\begin{cases} (T_{\min}, T_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

è una curva in  $\mathbb{R}^n$  con sostegno  $\gamma$ .

**Definizione. (3.14)** Lo spazio delle fasi in cui vengono disegnate le orbite con il loro verso di percorrenza (indotto dalle soluzioni) si dice ritratto di fase.

**Definizione. (3.15)** I punti  $\mathbf{p} \in \Omega$ :  $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  si chiamano equilibri o punti singolari

**Esempio. (3.16)**

$$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = x^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbf{f}(x, y) = (-y^2, x^2) \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{matrix}$$

Chi sono gli equilibri? Cerco  $(x_0, y_0) : \mathbf{f}(x_0, y_0) = \mathbf{0}$

$$(-y^2, x^2) = \mathbf{0} \iff (x, y) = \mathbf{0}$$

---

<sup>†</sup> Si ricordi che:  $C^1 \Rightarrow$  localmente lipschitziana

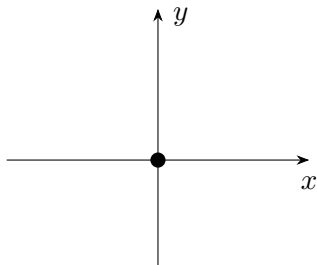


Figura 3.2: Punti di equilibrio per l'esempio (3.16)

Dunque l'unico punto di equilibrio è l'origine.

**Esempio. (3.17)**

$$\begin{cases} x' = -y^2 x \\ y' = x^2 \end{cases} \quad f(x, y) = (-y^2 x, x^2)$$

Gli equilibri sono tutti punti nella forma  $(0, y_0)$ .

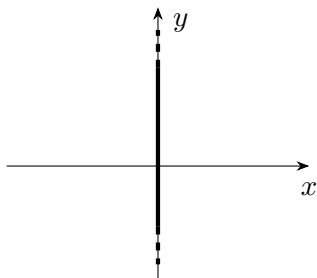


Figura 3.3: Punti di equilibrio per l'esempio (3.17)

#### Teorema VIII.

Sotto le ipotesi di (3.10), per ogni punto dello spazio delle fasi,  $\Omega$ , passa una e una sola orbita.

**Dimostrazione di VIII.** Sia  $p \in \Omega$ , e consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = p \end{cases} \quad (PC_p)$$

- ( $\exists$ ) Il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione  $\mathbf{u}$  (per il teorema di Cauchy-Lipschitz) e l'orbita associata a  $\mathbf{u}$  passa per  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} \in \gamma = \{\mathbf{u}(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\}$$

- (!) Intuitivamente, l'unicità è giustificata dal fatto che il sistema è autonomo, e quindi dal fatto che le traslate in  $t$  delle soluzioni sono ancora soluzioni.

Sappiamo che  $\mathbf{p} \in \gamma$ . Supponiamo che esista un'altra orbita  $\tilde{\gamma}$  tale che  $\mathbf{p} \in \tilde{\gamma}$ . Allora  $\tilde{\gamma}$  è orbita di  $\tilde{\mathbf{u}}$ , soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(\tilde{t}_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

Siano  $I$  e  $\tilde{I}$  gli intervalli massimali, rispettivamente, di  $\mathbf{u}$  e  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Siano

$$\begin{aligned} T &:= \tilde{t}_0 - t_0 \\ \mathbf{v}(t) &:= \tilde{\mathbf{u}}(t + \tilde{t}_0 - t_0) = \tilde{\mathbf{u}}(t + T). \end{aligned}$$

Si ha che

- l'orbita di  $\mathbf{v}$  è  $\tilde{\gamma}$ ;
- $\mathbf{v}$  è massimale, in quanto lo è  $\tilde{\mathbf{u}}$ ;
- $\mathbf{v}$  soddisfa

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(t) = \tilde{\mathbf{u}}'(t + T) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(t + T)) = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)) \\ \mathbf{v}(t_0) = \tilde{\mathbf{u}}(t_0 + T) = \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{t}_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

e quindi  $\mathbf{v}$  è soluzione massimale di

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

$\implies \mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono la stessa soluzione (massimale) di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

$\implies I$  e  $\tilde{I}$  sono uno traslato dell'altro, e  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  coincidono. ■

**Osservazione. (3.18)** La mappa:

$$\begin{array}{ccc} \text{soluzione di} & & \\ \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \longmapsto & \text{orbita} \end{array}$$

è ben definita, ma non è iniettiva (è suriettiva!).

Infatti, se  $\gamma$  è orbita

$$\gamma = \{u(t) : t \in (a, b)\} =_{\dagger} \{u_{\tau}(t) = u(t + \tau) : t \in (a - \tau, b - \tau)\}.$$

Dunque ogni orbita di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ha infinite parametrizzazioni.

**Teorema IX.**

Sotto le ipotesi di (3.10), sia  $\gamma^*$  un'orbita di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Allora:

$$\gamma^* = \{\mathbf{p}\} \iff \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}.$$

**Dimostrazione di IX.**

( $\Leftarrow$ ) Se  $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{p} \forall t \in \mathbb{R}$  è soluzione, e

$$\gamma^* = \{\mathbf{u}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{p}\}.$$

( $\Rightarrow$ ) Se  $\gamma^* = \{\mathbf{p}\}$ , allora esiste una soluzione  $\mathbf{u}$  di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  tale che  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}$  per ogni  $t \in (T_{\min}, T_{\max}) \rightsquigarrow \mathbf{u}(t)$  è costante, e dunque

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{p}). \quad \blacksquare$$

**Definizione. (3.19)** Una soluzione  $\mathbf{u}$  di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  si dice periodica di periodo  $T > 0$  se

1.  $\mathbf{u}$  è definita su  $\mathbb{R}$ ;
2.  $\mathbf{u}(t + T) = \mathbf{u}(t), \forall t \in \mathbb{R}$
3.  $T = \inf \{\tau > 0 : \mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$

---

$\dagger \forall \tau \in \mathbb{R}$

**Definizione. (3.20)** *L'orbita corrispondente ad una soluzione periodica si chiama orbita periodica e i suoi punti si chiamano punti periodici.*

**Teorema X.**

Sotto le ipotesi di (3.10), se  $\mathbf{u}$  è una soluzione non costante di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  con intervallo massimale  $J$  e

$$\exists t_1, t_2 \in J : \quad t_1 \neq t_2, \quad \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_2)$$

allora  $\mathbf{u}$  è una soluzione periodica.

**Osservazione. (3.21)** Le orbite periodiche si chiamano anche orbite chiuse. Infatti, il teorema X ci dice che se un'orbita si autointerseca, allora è periodica.

**Corollario. (3.22)** Le orbite di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  possono essere:

1. punti di equilibrio,  $\{\mathbf{p}\}$ ;
2. periodiche/chiuse;
3. orbite senza autointersezioni e contenenti più di un solo punto.

**Caso particolare. (3.23)** Per  $n = 1$  non esistono orbite periodiche non costanti, perché dovrebbero cambiare la monotonia e non è possibile perché  $x' = f(x)$ , e la cambierebbero su punti di equilibrio.

**Dimostrazione di X.** È analoga al teorema VIII.

Sia  $\mathbf{p} := \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_2)$ . Allora  $\mathbf{u}$  risolve due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{p} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{p} \end{cases}$$

entrambi risolti su  $J$ .

Gli intervalli massimali di questi due problemi di Cauchy devono essere uno traslato dell'altro, dunque  $J = \mathbb{R}$ .

Inoltre, supponendo  $t_2 > t_1$ , si ha che

$$\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(t + (t_2 - t_1))$$

risolvono entrambe

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{p} \end{cases}$$

Definito  $T := t_2 - t_1$ , per esistenza e unicità della soluzione allora:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

■

**Definizione. (3.24)** Un'orbita si dice singolare se si riduce ad un punto solo. Altrimenti si dice regolare.

#### Teorema XI.

Sia  $\gamma$  un'orbita non singolare di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  localmente lipschitziana.

Allora  $\gamma$  è una curva orientata in  $\Omega$  tangente in ogni punto al campo  $\mathbf{f}$ .

**Dimostrazione di XI.** Sia  $\mathbf{u}$  soluzione di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  tale che  $\gamma = \gamma_{\mathbf{u}}$ . Sia  $\mathbf{p}_0 \in \gamma$  e  $t_0 : \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{p}_0$ .

Poichè  $\gamma$  non è singolare  $\rightsquigarrow \mathbf{f}(\mathbf{p}_0) \neq \mathbf{0}$  (altrimenti  $\gamma = \{\mathbf{p}_0\}$  per il teorema precedente.)

La funzione  $t \mapsto \mathbf{u}(t)$  parametrizza  $\gamma$ . Quindi il vettore:

$$\mathbf{v} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + h) - \mathbf{u}(t_0)}{h}$$

è il vettore tangente a  $\gamma$  nel punto  $\mathbf{p}_0$ , ammesso che esista.

La funzione  $\mathbf{u}$  è di classe  $C^1$ , quindi il limite esiste ed è  $\mathbf{u}'(t_0)$ . Essendo

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$$

si ha che

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}'(t_0) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t_0)) = \mathbf{f}(\mathbf{p}_0)$$

■

### 3.3 Stabilità dei punti di equilibrio

**Obiettivo. (3.25)** Vogliamo classificare i punti di equilibrio in base a come le altre soluzioni si comportano in loro prossimità.

**Definizione. (3.26)** Sotto le ipotesi (3.10), sia  $\mathbf{p}: \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{p}$  si dice stabile se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ : se  $\hat{\mathbf{x}} \in \Omega, \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}\| < \delta$

$\implies$  la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

è definita su  $(t_0, +\infty)$  e dista da  $\mathbf{p}$  al più  $\varepsilon$ .

**Definizione. (3.27)** Sotto le ipotesi (3.10), sia  $\mathbf{p}: \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{p}$  si dice instabile se non è stabile.

Intuitivamente, se  $p$  è un equilibrio, pur di partire sufficientemente vicino, riusciamo a far rimanere quanto vogliamo la soluzione vicina a  $p$ .

Al contrario, invece, essere instabile significa che  $\exists \varepsilon$  e una successione  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega, \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{p}$  tale che

$$\exists t_n: \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_n)}(t_n) > \varepsilon \quad \forall n$$

dove  $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_n)}$  è soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_n \end{cases}$$

**Definizione. (3.28)** Sotto le ipotesi (3.10), sia  $\mathbf{p}: \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ .  $\mathbf{p}$  si dice asintoticamente stabile se:

- è stabile;
- $\exists \delta > 0$  tale che  $\forall \bar{\mathbf{x}} \in B_\delta(\mathbf{p}) \subseteq \Omega$  si ha che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{(t_0, \bar{\mathbf{x}})}(t) = \mathbf{p}$$



### 3.4 Equazioni autonome in due dimensioni

**Orbite non singolari. (3.29)** Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

Supponiamo  $\mathbf{p} : \mathbf{f}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ . Com'è fatta l'orbita per  $\mathbf{p}$ ?

Se  $\mathbf{f}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ , allora almeno una delle sue componenti è non nulla.

Considerata  $f_1(\mathbf{p}) \neq 0 \rightsquigarrow$  il vettore tangente all'orbita per  $\mathbf{p}$  non è verticale.

Sia allora il sistema:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \\ (x(0), y(0)) = \mathbf{p} \end{cases}$$

e  $\mathbf{u}$  una soluzione massimale, tale che  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{p}$ .

Sapendo che  $\mathbf{u}'(0)$  non è un vettore verticale possiamo esprimere localmente la seconda componente dell'orbita per  $\mathbf{p}$  in funzione della prima. Ovvero:

$$\exists! \begin{cases} \varphi : I_{p_1} \longrightarrow I_{p_2} \\ x \longmapsto \varphi(x) \end{cases}$$

e questa funzione descrive l'orbita

$$\begin{cases} x = u_1(t) \\ y = u_2(t) = \varphi(x) = \varphi(u_1(t)) \end{cases}$$

Si ha che

$$f_2(\mathbf{u}(t)) = u_2'(t) = \varphi'(u_1(t)) \cdot u_1'(t)$$

da cui  $f_2(x, y) = \varphi'(x) f_1(x, y)$

$$\varphi'(x) = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} = \frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))}.$$

Stiamo dicendo che se  $f_1(p) \neq 0$ , l'orbita che passa per  $\mathbf{p}$  è rappresentabile mediante una funzione  $y = \varphi(x)$  che soddisfa

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases}$$

ovvero un problema di Cauchy monodimensionale non autonomo.

**Teorema XII.**

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \\ (x(0), y(0)) = \mathbf{p} \end{cases} \quad (\text{PC})$$

con  $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  di classe  $C^1$ . Supponiamo che  $f_1(\mathbf{p}) \neq 0$  (campo non verticale in  $\mathbf{p}$ ). Allora per degli opportuni intornoi  $I_{p_1}, I_{p_2}$ :

$$\begin{array}{l} \varphi : I_{p_1} \longrightarrow I_{p_2} \\ \text{è una rappresentazione} \\ \text{locale dell'orbita della} \\ \text{soluzione di (PC)} \end{array} \iff \varphi \text{ è soluzione di } \begin{cases} \varphi'(x) = \frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases} \quad (\text{PC})_\varphi$$

**Dimostrazione di XII.**

( $\implies$ ) Vedi: (3.29)

( $\impliedby$ ) Hp:  $\varphi$  è soluzione di  $(\text{PC})_\varphi$  e  $f_1(x, \varphi(x)) \neq 0$  in un opportuno intorno di  $p_1$ ,  $I_{p_1}$  (poiché  $f$  è  $C^1$ ).

Allora,  $\forall x \in I_{p_1}$  sia

$$\omega(x) := \int_{p_1}^x \frac{d\xi}{f_1(\xi, \varphi(\xi))}.$$

Poiché  $f_1$  è continua e non nulla

$\implies \omega$  è derivabile e

$$\begin{cases} \omega'(x) = \frac{1}{f_1(x, \varphi(x))} \\ \omega(p_1) = 0 \end{cases}$$

Poiché  $\omega'$  ha segno costante

$\implies \omega$  è strettamente monotona

$\implies \omega$  è invertibile.

$$\begin{aligned} \omega : I_{p_1} \rightarrow I \ni 0 &\rightsquigarrow \omega^{-1} = v : I \rightarrow I_{p_1} \\ v(0) &= p_1 \\ v'(t) &= \frac{1}{\omega'(v(t))} \end{aligned}$$

$$\implies v'(t) = f_1(v(t), \varphi(v(t))).$$

Definendo

$$\mathbf{u}(t) := \begin{pmatrix} v(t) \\ \varphi(v(t)) \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$\begin{cases} u_1'(t) = v'(t) = f_1(v(t), \varphi(v(t))) = f_1(u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) = \varphi'(v(t)) v'(t) = \frac{f_2}{f_1} f_1 = f_2 \end{cases}$$

e inoltre  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{p}$ . ■

### Esempio. (3.30)

$$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = x^2 \end{cases}$$

#### 1. Equilibri.

$$\mathbf{f}(x, y) = (-y^2, x^2) = (0, 0)$$

$\implies$  vi è un solo punto di equilibrio:  $\mathbf{0}$

#### 2. Punti con tangente orizzontale o verticale.

Il vettore tangente ad una soluzione in  $(x, y)$  è  $\mathbf{f}(x, y)$ , dunque:

- *Tangente verticale:*  $x' = 0 \iff y^2 = 0$

$\implies$  l'asse  $x$  viene intersecato verticalmente dalle orbite;

- *Tangente orizzontale:*  $y' = 0 \iff x^2 = 0$

$\implies$  l'asse  $y$  viene intersecato orizzontalmente dalle orbite.

In  $(x, 0)$  il vettore tangente alla soluzione che passa per quel punto è  $(0, x^2)$ , dunque tutte le orbite che passano per l'asse delle  $x$  sono percorse verso l'alto.

In  $(0, y)$  il vettore tangente alla soluzione che passa per quel punto è  $(-y^2, 0)$ , dunque tutte le orbite che passano per l'asse delle  $y$  sono percorse verso sinistra.

### 3. Orbite non singolari

Consideriamo i punti in cui  $f_1(x, y) \neq 0$ , ovvero i punti con  $y \neq 0$ . Cerchiamo l'equazione delle orbite dei punti che non sono sull'asse  $x$ .

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -\frac{x^2}{\varphi^2(x)} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases} \quad (\text{PC})_\varphi$$

che è a variabili separabili:

$$\begin{aligned} \varphi^2(x) \varphi'(x) &= -x^2 \\ \int \varphi^2(x) \varphi'(x) dx &= \int -x^2 dx \rightsquigarrow \int \varphi^2 d\varphi = -\int x^2 dx \\ &\rightsquigarrow \frac{1}{3} \varphi^3(x) = -\frac{1}{3} x^3 + c \end{aligned}$$

Imponendo il passaggio per  $\mathbf{p}$ , otteniamo che  $c = \frac{1}{3} p_2^3$ .

Dunque

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{p_2^3 - x^3}$$

e le orbite sono quelle mostrate in figura 3.4

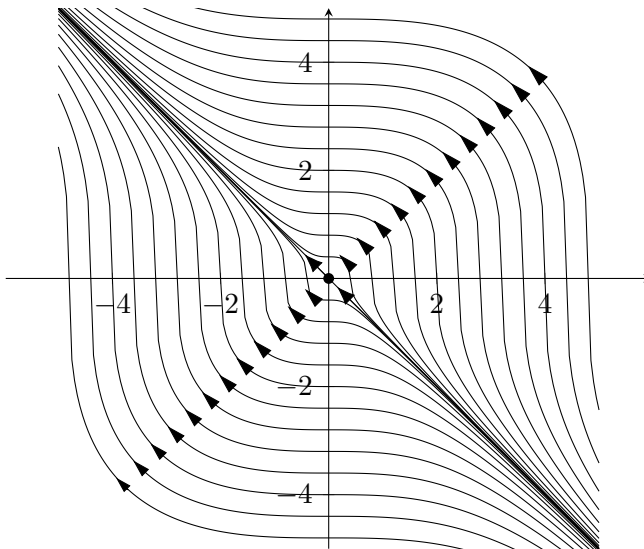


Figura 3.4: Orbite per il problema di Cauchy

**Esempio. (3.31)**

$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = -xy \end{cases}$$

1. Equilibri

Tutti i punti  $(x, 0)$  sono equilibri.

2. Tangente orizzontale e verticale

Tutta l'asse delle  $y$  è composta da punti a tangente orizzontale.

3. Orbite non singolari

Consideriamo  $f_1(x, y) \neq 0$ , ovvero quelli per i quali  $y \neq 0$ : troviamo tutte le orbite, infatti i punti  $(x, 0)$  sono equilibri. Calcolando:

$$\varphi'(x) = -\frac{x \varphi(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

Da qui, possiamo dire

$$\varphi(x) \varphi'(x) = -x \quad \implies \quad \varphi^2(x) = -x^2 + c$$

$c > 0$ , e  $\varphi(x) = \pm(c - x^2)^{1/2}$ .

Inoltre  $x' = y^2 > 0$  lungo le orbite. Dunque il diagramma di fase è così composto:

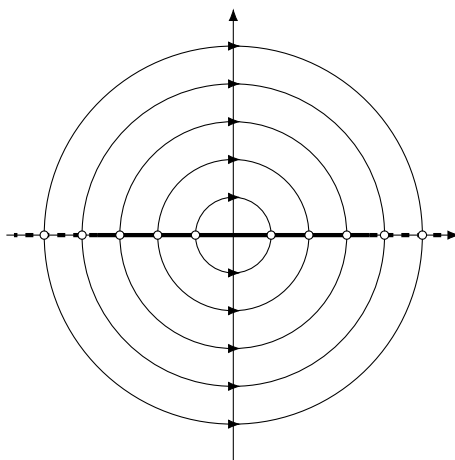


Figura 3.5: Diagramma di fase per l'esempio (3.31)

**Esempio. (3.32)**

$$\begin{cases} x' = y^2 - xy^2 \\ y' = -xy^3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (y^2 - xy^2, -xy^3) \end{array}$$

1. Equilibri:

$$\begin{cases} y^2(1 - x) = 0 \\ xy^3 = 0 \end{cases}$$

la prima equazione è soddisfatta per  $x = 1 \vee y = 0$ , mentre la seconda è soddisfatta per  $x = 0 \vee y = 0$ . Quindi:

$$f(x, y) = \mathbf{0} \iff y = 0$$

$\Rightarrow \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  è composto da equilibri.

2. Punti con tangente verticale  $[x' = 0]$ :

Oltre ai punti di equilibrio, sono tutti i punti sulla retta verticale  $x = 1$ . Questa quindi è una retta invariante, composta da orbite.

Se  $x = 1$  abbiamo

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y^3 \end{cases}$$

3. Punti con tangente orizzontale [ $y' = 0$ ]:

Oltre ai punti di equilibrio, sono tutti i punti sulla retta verticale  $x = 0$ .

Se  $x = 0$  abbiamo

$$\begin{cases} x' = y^2 > 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

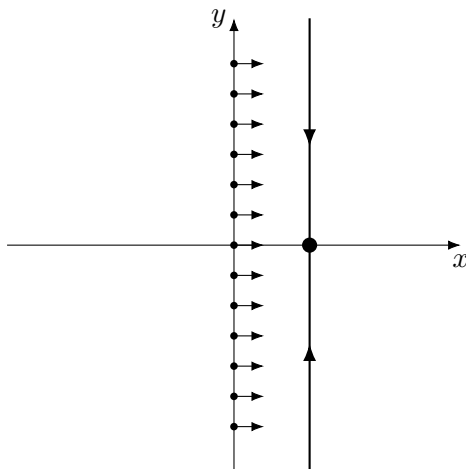


Figura 3.6: Punti con tangenti verticali e orizzontali per l'esempio (3.32)

4. Equazioni delle orbite: per  $y \neq 0$  e  $x \neq 1$  abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy^3}{y^2(1-x)} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} y'(x) = \frac{-x}{1-x} y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

e integrando si ottiene

$$\log \frac{|y|}{|y_0|} = x - x_0 + \log \frac{|x-1|}{|x_0-1|}$$

Notiamo che, poiché le orbite non intersecano l'asse  $x$  (poiché sono altre orbite),  $y(x)$  e  $y_0$  hanno lo stesso segno, dunque posso “eliminare”

i valori assoluti. Con lo stesso ragionamento è lecito “eliminare” anche il secondo valore assoluto. Così facendo abbiamo:

$$\log \frac{y}{y_0} = x - x_0 + \log \frac{x-1}{x_0-1}$$

Facendo l’esponenziale da ambo le parti otteniamo

$$y(x) = y_0 \frac{x-1}{x_0-1} e^{x-x_0}$$

Alcune osservazioni:

- (a) Le orbite con dato iniziale  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0, -y_0)$  sono simmetriche rispetto all’asse orizzontale

$\implies$  consideriamo solo  $y_0 > 0$ .

Dividiamo ancora i due casi:

$$\bullet \ x_0 > 1 \implies y_0 \frac{x-1}{x_0-1} > 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$$

e guardando l’equazione differenziale delle orbite (3.1)

$$y'(x) = \frac{x}{x-1} y(x) > 0$$

e quindi  $y$  come funzione di  $x$  è monotona crescente.

Notiamo inoltre che per  $x_0 > 1$ ,  $x' = y^2(1-x) < 0$ , dunque le frecce delle orbite sono rivolte verso  $x = 1$ .

$$\bullet \ x_0 < 1 \implies \frac{y_0}{x_0-1} > 0, \ x-1 < 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0^+$$

e inoltre la funzione è sempre positiva.

Poichè  $x' > 0 \rightsquigarrow$  le frecce sono rivolte verso  $x = 1$  (vedi 3.7).



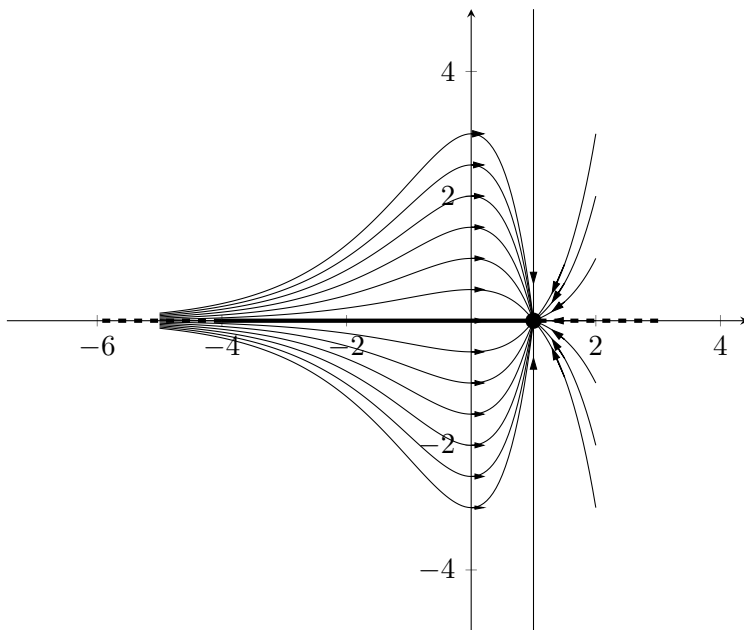


Figura 3.7: Orbite per l'esempio (3.32).

**Pendolo Piano Senza Attrito. (3.33)** Consideriamo un pendolo piano senza attrito, e sia  $\theta$  l'angolo rispetto alla verticale. La legge che regola il moto è

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$

Se  $\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , definendo  $x(t) = \theta(\alpha t)$ , l'equazione del moto diventa:

$$x''(t) = -\sin x(t)$$

equazione non lineare del secondo ordine.

La possiamo tramutare, tramite la trasformazione  $x'(t) = y(t)$ , in un sistema di equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin x(t) \end{cases}$$

Così facendo possiamo applicare il nostro solito studio:

1. Equilibri: sono i punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

ovvero tutti quelli nella forma  $(k\pi, 0)$ , per  $k \in \mathbb{Z}$ .

2. Punti con tangente orizzontale:  $x' = 0 \rightsquigarrow y = 0$ ;

Noto inoltre che  $y' > 0$  quando  $x \in [\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$ .

3. Punti con tangente verticale:  $y' = 0 \rightsquigarrow \sin x = 0$

$$\implies x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

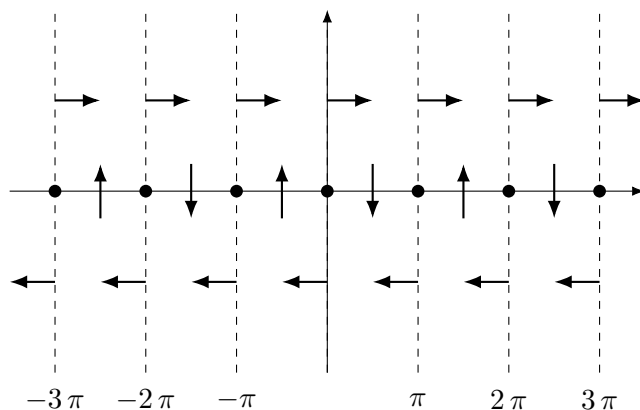


Figura 3.8: Punti di equilibrio e a tangente orizzontale/verticale per il pendolo senza attrito

4. Equazione delle orbite: quando  $y \neq 0$ , si ha che

$$y'(x) = \frac{-\sin x}{y(x)} \rightsquigarrow y(x) y'(x) = -\sin x$$

E integrando, otteniamo:

$$y_c(x) = \pm \sqrt{2(\cos x + c)}$$

Le orbite cambiano al variare di  $c$ :

- $c < -1$ : non ci sono soluzioni;

- $c = -1$ : ottengo i valori per cui  $\cos x = 1$ , ovvero i punti di equilibrio  $(2n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- $c \in (-1, 1)$ : ottengo soluzioni definite sull'intervallo  $[-x_c, x_c]$  modulo  $2\pi$ , dove

$$x_c = \arccos(-c);$$

- $c \geq 1$ : si creano infinite eterocline.

In definitiva, le orbite sono quelle illustrate nella figura 3.9

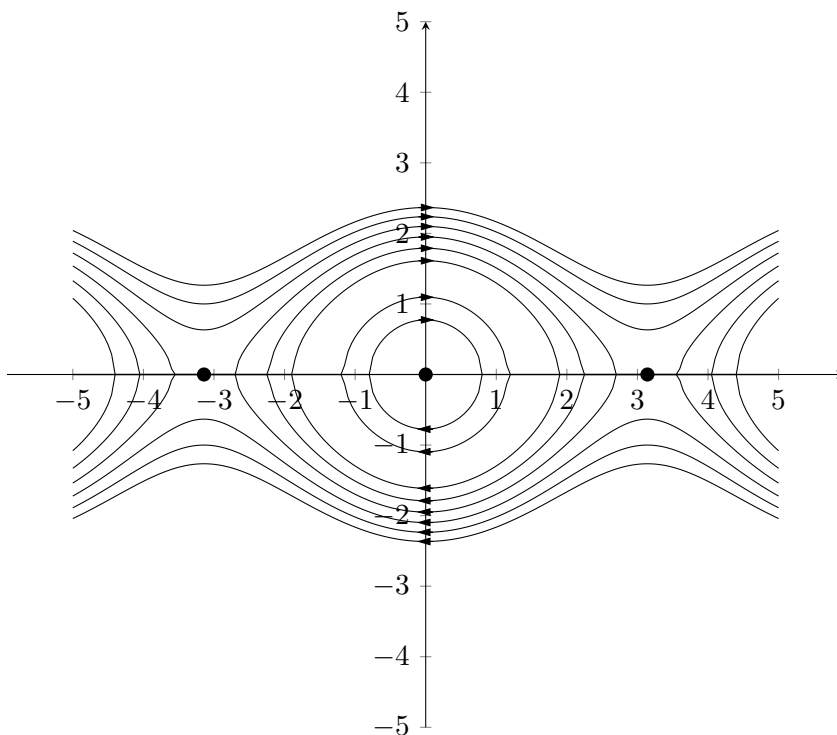


Figura 3.9: Orbite per il pendolo piano senza attrito

Per una comprensione più profonda, si rimanda alle dispense del corso, [dispense], pp. 27-31.

**Osservazione. (3.34)** L'equazione caratterizzante del pendolo piano

$$\ddot{x} = -\sin x$$

può essere considerata come un sistema conservativo in dimensione 1. Moltiplicando da entrambe le parti per  $\dot{x}$ , infatti, otteniamo:

$$\dot{x} \ddot{x} = -(\sin x) \dot{x}$$

Riconoscendone delle derivate e manipolando l'equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} (\cos x) \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x \right) = 0$$

E infine integrando:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x = c$$

Abbiamo trovato una costante del moto, pari alla somma tra energia cinetica ed energia potenziale: l'energia totale è conservata.

## Capitolo 4

# Sistemi di E.D.O. lineari

**Perché è utile studiarli.** (4.1) Sia data l'equazione autonoma  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  e sia  $\mathbf{x}^*$ :  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

$\implies \{\mathbf{x}^*\}$  è orbita, e può essere stabile, instabile,...

Consideriamo ora  $\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}$  e di conseguenza  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta})$ .

Sviluppiamo ora  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  al primo ordine:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}_{=\mathbf{0}} + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta} + o(\|\boldsymbol{\eta}\|), \quad \|\boldsymbol{\eta}\| \rightarrow \mathbf{0}$$

Dunque

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(t) = \boldsymbol{\eta}'(t)$$

Sostituisco e ottengo

$$\boldsymbol{\eta}'(t) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta}(t) + o(\|\boldsymbol{\eta}(t)\|)$$

dove  $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*)$  è una matrice costante.

**Ripasso.** (4.2) Un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie è un sistema della forma

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

dove

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

e tutte le funzioni sono continue su un intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$ .

Se  $b_1, \dots, b_n$  sono tutte nulle, il sistema si dice omogeneo.

**Caso monodimensionale. (4.3)** Sia  $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ ,  $f \in C^1(I \times \mathbb{R})$ . Per ogni condizione iniziale  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ , il problema di Cauchy associato al sistema ammette un'unica soluzione locale.

Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = A(t)$$

continua su  $I$ , abbiamo che su ogni striscia  $[a, b] \times \mathbb{R} \subseteq I \times \mathbb{R}$  tale funzione è limitata. Questo ci garantisce che ogni problema di Cauchy associato al sistema ammette un'unica soluzione definita sull'intero intervallo  $I$ .

**Alcuni Risultati. (4.4)** Posto

$$S_b := \{\text{soluzioni di } \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\}$$

valgono i seguenti risultati.

- Principio di Sovrapposizione. Se  $\mathbf{x}_1 \in S_{b_1}$  e  $\mathbf{x}_2 \in S_{b_2}$ , allora

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in S_{b_1+b_2}$$

- Soluzioni di un sistema omogeneo.  $S_0$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .
- Soluzioni di un sistema non omogeneo. Se  $\mathbf{x}_P$  risolve  $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ , allora

$$S_b = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_P : \mathbf{x}_0 \in S_0\}$$

- Lemma. Siano  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  delle  $n$  soluzioni del problema omogeneo  $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ . Allora  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$  sono funzioni linearmente indipendenti se e solo se  $\exists t_0 \in I$  tale che i vettori

$$\mathbf{y}_1(t_0), \dots, \mathbf{y}_n(t_0)$$

siano linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$ .

**Matrice Wronskiana. (4.5)** Se  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  sono  $n$  soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo  $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ , allora  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  si dice insieme fondamentale.

La matrice

$$W(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{bmatrix}$$

si dice matrice wronskiana.

Avendo che  $S_0 = \{W(t)\mathbf{c} : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\}$ , cerchiamo come selezionare in  $S_0$  la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Imponiamo  $W(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$ . Essendo le colonne di  $W(t_0)$  linearmente indipendenti,  $W(t_0)$  è invertibile e  $\mathbf{c} = [W(t_0)]^{-1}\mathbf{x}_0$ .

La soluzione dunque è

$$\mathbf{x}(t) = W(t) [W(t_0)]^{-1} \mathbf{x}_0$$

**Matrice risolvete. (4.6)** Se  $W$  è una matrice wronskiana e se, per qualche  $t_0 \in I$ , si ha  $W(t_0) = \text{Id}_n$ , allora  $W$  viene detta matrice risolvete o di transizione o di monodromia.

Se  $W(t)$  è una matrice wronskiana per

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

allora

$$\Phi(t) = W(t) [W(t_0)]^{-1}$$

è di monodromia.

**Equazioni differenziali lineari di grado  $n$ . (4.7)** Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t)y^{(n-2)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) + b(t).$$

Supponendo che tutte le  $a_i$  e  $b$  siano continue su  $I \subseteq \mathbb{R}$  intervallo. Definiamo

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

Otteniamo così il sistema lineare del primo ordine  $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)$  con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

**Obiettivo. (4.8)** L'obiettivo è risolvere l'equazione

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

L'esistenza delle soluzioni è garantita su tutto  $\mathbb{R}$ .

Analizzeremo diverse casistiche:

1.  $A$  diagonale;
2.  $A$  diagonalizzabile;
3.  $A$  con autovalori in  $\mathbb{C}$ , tutti autovalori regolari<sup>†</sup>;
4. caso generale.

**Osservazione. (4.9)** Per un'equazione della forma  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  è sempre soluzione (e quindi è equilibrio).

E' facile osservare, in realtà, che gli equilibri del sistema sono proprio gli elementi del  $\ker A$ .

## 4.1 Matrice diagonale

**Risoluzione generica. (4.10)** Il caso in cui  $A$  è una matrice diagonale è abbastanza semplice. Consideriamo il sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , con

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

---

<sup>†</sup> Un autovalore è regolare se la molteplicità algebrica e geometrica coincidono



Questo è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \end{cases}$$

Integrando otteniamo che  $x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ , dove  $c_i$  è una costante arbitraria. Abbiamo così costruito la nostra soluzione:

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & e^{t\lambda_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}}_{W(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

In questo caso  $W(t)$  è anche di monodromia.

**Ritratto di fase per  $n = 2$ . (4.11)** Siamo nel caso

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

- Supponiamo che  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ . L'equazione delle orbite è

$$x_2 = c x_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

- Se  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ , allora le orbite sono di equazione  $x_2 = c x_1$ : sono tutte rette. In particolare, tutte le rette passanti per l'origine sono orbite, anche gli assi.

Per stabilire il verso di percorrenza delle orbite, si studia nuovamente il sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

si ha che

- \* se  $\lambda > 0$ ,  $\|\mathbf{x}(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$ , e quindi le semirette vengono percorse verso l'esterno;

- \* se  $\lambda < 0$ ,  $\|\mathbf{x}(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ , e quindi le semirette vengono percorse verso l'interno.
- Consideriamo  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ma di segno concorde  $\rightsquigarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ .
  - \* Se  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  e sono entrambe positive, le orbite sono uscenti e tangenti a  $x_1$ ;
  - \* Se  $\lambda_2/\lambda_1 > 1$  e sono entrambe negative, le orbite sono entranti e tangenti a  $x_1$ ;
  - \* se  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$  e sono entrambe positive, le orbite sono uscenti e tangenti a  $x_2$
  - \* se  $\lambda_2/\lambda_1 < 1$  e sono entrambe negative, le orbite sono entranti e tangenti a  $x_2$
- Consideriamo  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , ma di segno discorde  $\rightsquigarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ .

In questo caso l'origine si chiama sella, e si ha che

$$x_2 = c x_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Essendo  $\lambda_2/\lambda_1 < 0$ , le orbite sono quelle di equazione  $y = c x^\beta$ , eventualmente simmetrizzate rispetto all'asse delle  $y$ .

- Se  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ , suppongo che uno  $\lambda_1 \neq 0$  (se fossero entrambi nulli, allora tutti i punti di  $\mathbb{R}^2$  sarebbero di equilibrio)

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda x_1 \\ x'_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2 \equiv c_2 \end{cases}$$

Dunque, quando  $c_1 = 0$  ottengo infiniti punti di equilibrio, in quanto

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha come nucleo tutto l'asse  $x_2$ .

Inoltre, si ha che se

- $\lambda_1 > 0$ : tutti gli equilibri sono instabili;
- $\lambda_1 < 0$ : tutti gli equilibri sono stabili, non asintotici.

## 4.2 Matrice diagonalizzabile

Adesso supponiamo che  $A$  sia diagonalizzabile.

Sia  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Siano  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  i suoi autovalori e  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  i corrispondenti autovettori. Valgono i seguenti risultati:

- $ce^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i$  è una soluzione per ogni  $c \in \mathbb{R}$  e  $i = 1, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(ce^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i) &= c\lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i \\ A(ce^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i) &= ce^{\lambda_i t} A\mathbf{u}_i = c\lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i, i = 1, \dots, n$  sono una base di  $S_0$ : Questo perchè  $\varphi_i(0) = \mathbf{u}_i$  sono linearmente indipendenti e per il lemma allora le funzioni proprio sono linearmente indipendenti
- La matrice wronskiana è:

$$\begin{aligned} W(t) &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \mathbf{u}_1 & \dots & e^{\lambda_n t} \mathbf{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & e^{t\lambda_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Poichè  $W(0) = Q$ , se poniamo:

$$\Phi(t) := W(t)Q^{-1} \rightsquigarrow \Phi(0) = Id$$

e quindi  $\Phi$  è di monodromia.

**Conclusione. (4.12)** Quindi se  $A$  è diagonalizzabile con  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  autovalori e  $Q = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  matrice con gli autovettori corrispondenti sulle colonne. Allora:

$$S_0 = \left\{ Q \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & e^{t\lambda_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} Q^{-1} \mathbf{x}_0 : \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Ora ci chiediamo: come troviamo il ritratto di fase se  $A$  è diagonalizzabile?

### 4.3 Matrice esponenziale<sup>†</sup>

**Definizione. (4.13)** Data  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , definiamo

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

**Ripasso. (4.14)** Per continuare la nostra digressione, è bene tenere a mente alcune proprietà relative alle matrici e alle serie:

- *Norma euclidea matriciale:*

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

con la disuguaglianza:  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ .

- *Criterio di Weierstrass per le serie:*

$$\sum_k \|B_k\| < \infty \implies \sum_k B_k < \infty$$

**Buona definizione. (4.15)** Dunque, affinché  $e^A$  sia ben definita, vogliamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$$

sia convergente, e in effetti si ha:

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

e la serie di numeri reali converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} \in \mathbb{R}$$

dunque la matrice esponenziale è sempre ben definita.

---

<sup>†</sup> Dal [paganisalsa]

**Proprietà. (4.16)**  $e^A$  soddisfa queste proprietà:

- i.  $e^{\mathbf{0}_n} = \mathbb{I}_n$
- ii.  $e^{A+B} = e^A e^B$ ;
- iii.  $A e^A = e^A A$

**Teorema XIII.**

La matrice  $e^{tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , è la matrice di monodromia (risolvente) per

$$\mathbf{x}' = A \mathbf{x}.$$

In particolare, l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

è  $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0$ .

**Osservazione. (4.17)** Nella risoluzione dei sistemi lineari per matrici diagonali e diagonalizzabili, è stata calcolata esplicitamente la matrice risolvente. Per l'unicità della soluzione, segue che:

1. per  $A$  diagonale,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. per  $A$  diagonalizzabile,  $A = Q D Q^{-1}$ ,  $Q$  matrice degli autovettori,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = Q e^{tD} Q^{-1}$$

**Dimostrazione di XIII.** Dimostro che la soluzione è

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0.$$

La condizione iniziale è soddisfatta, devo verificare che  $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} \mathbf{x}_0 - e^{tA} \mathbf{x}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} e^{tA} \mathbf{x}_0 - e^{tA} \mathbf{x}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} e^{tA} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

La tesi da dimostrare, ora, è che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} = A$$

ovvero che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} - A \right) = 0$$

Svolgendo i passaggi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} - A \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n - hA}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \cdot \frac{1}{h} = 0$$

Mostriamo l'ultima uguaglianza evidenziando che la norma di quel termine tende a 0.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \right\| &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} \\ &= \frac{1}{|h|} \left( e^{|h| \|A\|} - 1 - |h| \|A\| \right) \\ &= \frac{e^{|h| \|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \\ &= \|A\| \underbrace{\frac{e^{|h| \|A\|} - 1}{|h| \|A\|}}_{\xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 1} - \|A\| \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

## 4.4 Matrici con autovalori in $\mathbb{C}$

**Caso  $2 \times 2$  base. (4.18)** Consideriamo  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  in forma canonica

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

I due autovalori sono

$$\mu = a + i b \quad \bar{\mu} = a - i b$$

Il sistema  $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$  diventa:

$$\begin{cases} x_1' = a x_1 - b x_2 \\ x_2' = b x_1 + a x_2 \end{cases}$$

Definiamo la funzione complessa

$$z(t) := x_1(t) + i x_2(t)$$

e deriviamola:

$$\begin{aligned} z'(t) &= x_1'(t) + i x_2'(t) \\ &= a x_1(t) - b x_2(t) + i b x_1(t) + i a x_2(t) \\ &= \mu x_1(t) + i \mu x_2(t) = \mu z(t) \end{aligned}$$

Dunque si ha che

$$z(t) = c e^{\mu t}, \quad c = c_1 + i c_2 \in \mathbb{C}$$

Esplicitando ora la funzione:

$$\begin{aligned} z(t) &= (c_1 + i c_2) e^{(a+ib)t} = (c_1 + i c_2) e^{at} e^{ibt} \\ &= (c_1 + i c_2) e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) \\ &= e^{at} [c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt)] + i e^{at} [c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)] \end{aligned}$$

Da qui, ricordando la definizione di  $z(t)$  :

$$\begin{cases} x_1 = e^{at} [c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt)] \\ x_2 = e^{at} [c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)] \end{cases}$$

Siamo ora in grado di scrivere la soluzione dell'equazione differenziale iniziale:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}}_{R_{bt}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(0)}$$

Dunque le orbite sono contraddistinte da:

- una dilatazione se  $a > 0$  (e in questo caso l'origine si chiama sorgente);
- una contrazione se  $a < 0$  (e in questo caso l'origine si chiama sink, o pozzo);

mentre per quanto riguarda la rotazione, questa sarà:

- antioraria se  $b > 0$ ;
- oraria se  $b < 0$ .

Figura 4.1: Diagramma di fase per (4.18)

#### Teorema XIV.

Le soluzioni di  $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$  con  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  con autovalori complessi

$$\mu, \bar{\mu} = a \pm i b$$

e autovettori  $\mathbf{z}_\mu, \bar{\mathbf{z}}_\mu = \mathbf{w} \pm i \mathbf{v}$ , definita la matrice  $Q = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$  sono

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} Q R_{bt} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$$

In particolare, l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

$$\text{è } \mathbf{x}(t) = e^{at} Q R_{bt} Q^{-1} \mathbf{x}_0$$

**Osservazione. (4.19)** Per il teorema precedente, se  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  con autovalori complessi, allora

$$e^{tA} = e^{at} Q R_{bt} Q^{-1}$$

## 4.5 Matrice con autovalori regolari in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$

**Ipotesi. (4.20)** Consideriamo  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ , con

- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$  autovalori reali con autovettori  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$ ;



•  $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_k, \bar{\mu}_k\}$  autovalori complessi con autovettori  $\{z_1, \dots, z_k\}$  tali per cui  $h + 2k = n$ . Scrivo

$$\begin{aligned}\mu_j &= a_j + i b_j \\ z_j &= w_j + i v_j\end{aligned}$$

Costruisco la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_h & v_1 & w_1 & \dots & v_k & w_k \end{pmatrix}$$

e la matrice pseudo diagonale:

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_h & & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

e dunque si ha che

$$\widetilde{R} = e^{t\widetilde{D}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & e^{\lambda_h t} & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} e^{a_1 t} R_{b_1 t} \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} e^{a_k t} R_{b_k t} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

dove  $R_{b_j t}$  è la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix}$$

**Teorema XV.**

Nelle ipotesi precedenti, le soluzioni di  $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$  sono:  $\mathbf{x}(t) = Q e^{t\tilde{D}} \mathbf{c}$ , al variare di  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ . In particolare, la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

è  $\mathbf{x}(t) = Q e^{t\tilde{D}} Q^{-1} \mathbf{x}_0$

**Osservazione. (4.21)** Per il teorema XIII, nelle ipotesi precedenti si ha che

$$e^{tA} = Q e^{t\tilde{D}} Q^{-1}$$

**Esercizio. (4.22)** Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## 4.6 Matrice generica

**Matrice  $2 \times 2$  in forma canonica. (4.23)** Consideriamo una matrice  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  con autovalori non regolari, scritta in forma canonica:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

con  $\lambda_1 = \lambda_2$  e  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Risolviamo il sistema associato:  $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \lambda x + c_2 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Lo si vuole scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t):=} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Poiché  $\Phi(0) = \mathbb{1}_2$ , allora  $\Phi$  è la risolvante, e posso scrivere:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Manca il diagramma di fase

#### Teorema XVI.

Sia  $A \in \mathbb{R}^{2,2}$  con autovalori non regolari qualsiasi e polinomio caratteristico  $p_A(t) = (t - \lambda)^2$ . Sia  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  l'unico autovettore di  $A$ , e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  tale che

- $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$
- $(A - \lambda \mathbb{1}) \mathbf{v} = \mathbf{u}$ .

Allora, le soluzioni di  $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$  sono nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} (c_1 + c_2 t) \mathbf{u} + e^{\lambda t} c_2 \mathbf{v}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

**Dimostrazione di XVI.** Si ha che  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$  sono una base di  $\mathbb{R}^2$ , dunque necessariamente una qualsiasi funzione deve essere nella forma

$$\mathbf{x}(t) = y_1(t) \mathbf{u} + y_2(t) \mathbf{v}$$

Imponiamo che  $\mathbf{x}(t)$  risolva  $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}$ , e determiniamo  $y_1$  e  $y_2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= y_1'(t) \mathbf{u} + y_2'(t) \mathbf{v} \\ A \mathbf{x}(t) &= y_1(t) A \mathbf{u} + y_2(t) A \mathbf{v} \end{aligned}$$

ma  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ , e  $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{u}$ , e quindi  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= A\mathbf{x}(t) = y_1(t)\lambda\mathbf{u} + y_2(t)(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{u}) \\ &= (\lambda y_1(t) + y_2(t))\mathbf{u} + \lambda y_2(t)\mathbf{v}\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza con  $\mathbf{x}'(t)$ , si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}$$

che ha proprio come soluzione

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) \\ y_2 = e^{\lambda t}c_2 \end{cases}$$

■

### Teorema XVII.

Considero il sistema  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ , con  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Siano

- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$  autovalori reali, di molteplicità algebrica, rispettivamente  $m_1, \dots, m_h$ ;
- $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_k, \bar{\mu}_k\}$  autovalori complessi,  $\mu_j, \bar{\mu}_j = a_j \pm b_j i$ , di molteplicità algebrica, rispettivamente  $n_1, \dots, n_k$

tali per cui

$$\sum_{i=1}^h m_i + 2 \sum_{i=1}^k n_i = n$$

Per ciascun autovalore, sia  $F$  l'insieme:

$$\begin{aligned}F_{\lambda_i} &= \{t^j e^{\lambda_i t} : j = 0, \dots, m_i - 1\} \\ F_{\mu_i} &= \{t^j e^{a_i t} \cos(b_i t), t^j e^{a_i t} \sin(b_i t) : j = 0, \dots, n_i - 1\}\end{aligned}$$

e definiamo  $F_A = \bigcup_j F_{\lambda_j} \cup \bigcup_j F_{\mu_j}$ .

Allora ogni componente di  $\mathbf{x}(t)$  è combinazione lineare di elementi di  $F_A$ .

**Corollario sulla stabilità dell'origine. (4.24)** Considero il sistema  $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$ .

- Se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale  $< 0$   
 $\implies \mathbf{0}$  è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- Se esiste almeno un autovalore di  $A$  con parte reale  $> 0$   
 $\implies \mathbf{0}$  è un punto di equilibrio instabile.
- Se tutti gli autovalori di  $A$  hanno parte reale  $\leq 0$   
 $\implies \mathbf{0}$  è un punto di equilibrio stabile.

**Esercizio. (4.25)** Stabilire per quali  $a \in \mathbb{R}$  tutte le soluzioni del seguente sistema si mantengono limitate.

$$\begin{cases} x'_1 = a x_2 + x_4 \\ x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = -a x_1 - x_3 \end{cases}$$

**Soluzione (4.25).** Scriviamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo le soluzioni combinazioni lineari di elementi di  $F_A$ , le uniche funzioni ammesse per avere limitatezza sono seni e coseni.

$\implies$  imponiamo che gli autovalori di  $A$  siano tutti in  $i\mathbb{R}$ , e che siano semplici (ovvero con molteplicità algebrica 1).

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p_A(t) = \cdots = t^4 + (2a + 1)t^2 + a$$

da cui ricavo che, per  $\lambda$  autovalore:

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{(2a + 1)^2 - 4a}}{2} = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{4a^2 + 1}}{2}$$

Per avere autovalori immaginari puri, voglio che siano entrambi strettamente minori di 0.

Noto che  $\lambda_-^2 < \lambda_+^2$ , dunque impongo soltanto  $\lambda_+^2 < 0 \iff$

$$\begin{aligned} -(2a+1) + \sqrt{4a^2+1} &< 0 \\ \sqrt{4a^2+1} &< 0 \end{aligned}$$

da cui ricavo il sistema:

$$\begin{cases} 2a+1 > 0 \\ 4a^2+1 < (2a+1)^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a > -1/2 \\ a > 0 \end{cases}$$

$\implies$  se  $a > 0$  ho quattro (e sono certo essere distinti, poiché la radice quadrata è iniettiva) autovalori in  $i\mathbb{R}$ .

## 4.7 Metodo di linearizzazione

**Classificazione di un punto di equilibrio per un sistema lineare.**

**(4.26)** Per il sistema  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , l'origine è un punto di equilibrio:

- iperbolico:
  - attrattore: se  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  per ogni autovalore  $\lambda$  di  $A$ ;
  - repulsore: se  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  per ogni autovalore  $\lambda$  di  $A$ ;
  - sella: se tutti gli autovalori di  $A$  hanno  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$  e c'è almeno una coppia di autovalori di segno opposto;
- centro: se esiste almeno un autovalore  $\lambda$  di  $A$  nullo o con  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ .

### Teorema XVIII.

#### Teorema di Hartman-Grobman

Se  $\mathbf{x}^*$  è un equilibrio dell'equazione autonoma  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  e nel sistema linearizzato

$$\mathbf{x}' = \underbrace{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*)}_A \mathbf{x}$$

l'origine è iperbolica, allora la stabilità di  $\mathbf{x}^*$  come equilibrio di  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  è la stessa di quella dell'origine per il sistema linearizzato.

**Esempio. (4.27)** Considero il sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + x^3 \\ y' = -2y \end{cases}$$

i cui equilibri sono

$$(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana in un punto generico:

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi:

- $J_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  che ha due autovalori reali negativi  
 $\implies$  per il teorema di Hartman-Grobman  $(0, 0)$  è asintoticamente stabile;
- $J_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$  il cui punto di equilibrio è sella  
 $\implies$  per il teorema di Hartman-Grobman  $(\pm 1, 0)$  sono instabili.

**Osservazione. (4.28)** Il metodo di linearizzazione:

- è un metodo locale e non globale;
- fornisce la stabilità senza conoscere un ritratto di fase;
- non funziona quando la parte reale degli autovalori è nulla.





## Capitolo 5

# Metodo diretto di Lyapunov per lo studio della stabilità degli equilibri

**Ipotesi. (5.1)**

- Sia  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.
- $\mathbf{p} \in \Omega$ :  $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  (equilibrio).
- $V: B_r(\mathbf{p}) \subseteq \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , con  $r > 0$  e  $V \in C^1(B_r(\mathbf{p}))$ .

**Idea di base. (5.2)** Sotto le ipotesi (5.1), se troviamo una funzione  $V$  tale che

- $V$  sia positiva in un intorno di  $\mathbf{p}$  e nulla in  $\mathbf{p}$ ;
- $V$  sia decrescente lungo le traiettorie vicino a  $\mathbf{p}$ .

Allora  $\mathbf{p}$  è stabile o asintoticamente stabile.

**Monotonia di  $V$ . (5.3)** Sotto le ipotesi (5.1), supponiamo che  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  è una soluzione dell'equazione differenziale.

- Valutiamo  $V$  lungo  $\mathbf{x}(t)$ , ovvero  $V(\mathbf{x}(t))$ .

- Ne calcoliamo la monotonia in  $t$ , definendo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) := \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t))$$

Dunque:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \langle \nabla V(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = \langle \nabla V(\mathbf{x}(t)), \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \rangle$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{V} : B_r(\mathbf{p}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \langle \nabla V(\xi), \mathbf{f}(\xi) \rangle \end{aligned}$$

Poiché sia  $V$  che  $\mathbf{f}$  sono di classe  $C^1 \rightsquigarrow \nabla V$  è continua  $\rightsquigarrow \dot{V}$  è continua.  
 $\dot{V}$  è detta la derivata totale di  $V$  rispetto al campo  $\mathbf{f}$ .

#### Teorema XIX.

##### Teorema di Lyapunov

Supponiamo le ipotesi (5.1).

- |          |  |  |
|----------|--|--|
| $(H_1):$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\mathbf{p}) = 0;</math></li> <li>• <math>V</math> è definita positiva in <math>\mathbf{p};</math></li> <li>• <math>\dot{V}</math> è semi definita negativa in <math>\mathbf{p}</math></li> </ul>  | $\implies \mathbf{p}$ è stabile.                 |
| $(H_2):$ | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\mathbf{p}) = 0;</math></li> <li>• <math>V</math> è definita positiva in <math>\mathbf{p};</math></li> <li>• <math>\dot{V}</math> è definita negativa in <math>\mathbf{p}.</math></li> </ul>  | $\implies \mathbf{p}$ è asintoticamente stabile. |
| $(H_3)$  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>V(\mathbf{p}) = 0;</math></li> <li>• <math>\forall \varepsilon \in (0, r),</math><br/> <math>\exists \mathbf{x}_\varepsilon \in B_\varepsilon(\mathbf{p})</math> tale che <math>V(\mathbf{x}_\varepsilon) &gt; 0;</math></li> <li>• <math>\dot{V}</math> è definita positiva in <math>\mathbf{p}.</math></li> </ul> | $\implies \mathbf{p}$ è instabile.               |

**Osservazione. (5.4)** Questo metodo:

- è locale;
- determina la stabilità semplice;

- non stabilisce come determinare la funzione  $V$ ;
- non determina necessariamente l'asintotica stabilità di alcuni punti di equilibrio stabili.

**Definizione. (5.5)** *Una funzione  $V$  che soddisfa  $(H_1)$  o  $(H_2)$  o  $(H_3)$  si dice funzione di Lyapunov.*

**Dimostrazione di XIX.** Dimostriamo solo la prima parte. La tesi è la stabilità di  $\mathbf{p}$ , ovvero:  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tale che, se  $\mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p})$ , la soluzione  $\psi_{\mathbf{q}}(t)$  del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q} \end{cases}$$

soddisfi:

- $T_{\max} = +\infty$ ;
- $\exists T \geq 0: \forall t > T$

$$\psi_{\mathbf{q}}(t) \in B_\varepsilon(\mathbf{p})$$

Fisso  $\varepsilon < r$ , in modo che  $V$  sia definita su  $B_\varepsilon(\mathbf{p})$ , e definisco

$$m_\varepsilon = \min_{\mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{p})} V(\mathbf{x}) > 0$$

poiché  $V$  è definita positiva.

Avendo  $V(\mathbf{p}) = 0$  e  $V$  continua  $\implies \exists \delta \in (0, \varepsilon): V(\mathbf{x}) < \frac{1}{2}m_\varepsilon, \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{p})$

Dimostro che questo  $\delta$  soddisfa la condizione di stabilità.

Per assurdo, supponiamo che  $\exists \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p})$  tale che la soluzione  $\psi_{\mathbf{q}}(t)$  di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q} \end{cases}$$

per qualche  $\tau$  sia

$$\|\psi_{\mathbf{q}}(\tau) - \mathbf{p}\| = \varepsilon \quad \|\psi_{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{p}\| < \varepsilon, \forall t \in [0, \tau)$$

Per ipotesi  $\dot{V}(\mathbf{x})$  è semidefinita negativa, cioè  $V$  decresce lungo le soluzioni:

$$m_\varepsilon \leq V(\psi_{\mathbf{q}}(\tau)) \leq V(\mathbf{q}) = V(\psi_{\mathbf{q}}(0)) < \frac{m_\varepsilon}{2}$$

Assurdo! ■

**Corollario - Applicazione ai sistemi  $\ddot{x} = -\nabla U(x)$ . (5.6)** Sia  $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aperto e  $p \in \Omega$

- $U \in C^1(\Omega)$ ;
- $p$  sia un minimo stretto di  $U$ .

Allora  $(p, 0)$  è un punto di equilibrio stabile per

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\nabla U(x) \end{cases}$$

**Dimostrazione di (5.6)** Considero  $V(x, y)$ ,

$$V(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 + U(x) - U(p)$$

Si ha che

- $V(p, 0) = 0$ ;
- $V(x, y) > 0$  in un intorno di  $(p, 0)$ , poiché  $U(x) > U(p)$  per ipotesi;
- $\dot{V}(x, y) = 0$ .

$\Rightarrow V$  soddisfa le ipotesi  $(H_1)$

$\Rightarrow (p, 0)$  è stabile. ■

## 5.1 Applicazione del metodo di Lyapunov

**Come trovare  $V$ . (5.7)** Per applicare il teorema di Lyapunov è necessario trovare la funzione  $V$ . Alcuni candidati possono essere:

- la funzione distanza, ad una potenza pari

$$V(x) = \|x - p\|^{2k}$$

- combinazioni lineari di potenze pari; ad esempio, in  $\mathbb{R}^2$ , una espressione nella forma:

$$V(x, y) = \alpha x^{2k} + \beta y^{2l}$$

**Esempio. (5.8)** Consideriamo

$$\begin{cases} x' = -y - 3x^3 \\ y' = x^5 - 2y^3 \end{cases}$$

Mostrare che  $(0, 0)$  è l'unico equilibrio e che è asintoticamente stabile, sfruttando un'opportuna funzione di Lyapunov della forma

$$V(x, y) = \alpha x^{2m} + \beta y^{2n}$$

- Equilibri:

$$\begin{cases} -y - 3x^3 = 0 \\ x^5 - 2y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x^3 \\ x^5 - 2(-3x^3)^3 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ottengo  $x^5(1 + 54x^4) = 0$ , ovvero  $x = 0$

$$\implies y = 0$$

Dunque l'unico equilibrio è  $(0, 0)$ .

- Vogliamo che  $V$  sia definita positiva in  $(0, 0)$  e che  $\dot{V}$  sia definita negativa.

$$- V(x, y) = \alpha x^{2m} + \beta y^{2n} \text{ è definita positiva } \iff \alpha, \beta > 0.$$

$$- \dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} y'(t):$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \alpha 2m x^{2m-1}(-y - 3x^3) + \beta 2n y^{2n-1}(x^5 - 2y^3) \\ &= \underline{-2\alpha m x^{2m-1} y - 6\alpha m x^{2n+2}} \\ &\quad + \underline{2\beta n x^5 y^{2n-1} - 4\beta x y^{2n+2}} \end{aligned}$$

La parte sottolineata, poiché  $m, n, \alpha, \beta > 0$ , è già definita negativa in  $(0, 0)$ . Richiediamo ora, per esempio, che l'altro pezzo di  $\dot{V}$  sia nullo. In particolare, vorremmo che fossero monomi simili:

$$\begin{cases} 2m - 1 = 5 \\ 2n - 1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$$

e dunque

$$-6\alpha x^5 y + 2\beta x^5 y = (-6\alpha + 2\beta)x^5 y = 0.$$

Dunque, scegliendo  $m = 3, n = 1, \beta = 3\alpha$  si ottiene una funzione che soddisfa tutte le ipotesi.

**Esempio. (5.9)** Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + y - (x + y)(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y + (x + y)(x^2 + y^2) \end{cases}$$

- Equilibri:

$$\begin{cases} 0 = -x + y - (x + y)(x^2 + y^2) \\ 0 = -x + y + (x + y)(x^2 + y^2) \end{cases} \implies \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = y - x \\ (x + y)(x^2 + y^2) = x - y \end{cases}$$

$$\implies y - x = 0 \text{ e } x = y.$$

Sostituendo nella prima equazione,  $(2x)(2x^2) = 0$

$$\implies x = 0$$

$$\implies (0, 0) \text{ è l'unico equilibrio.}$$

- Linearizzazione: la matrice associata al sistema linearizzato è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha entrambi gli autovalori nulli: il metodo non funziona.

- Lyapunov<sup>†</sup>: osservo che la funzione  $V(x, y)$  suggerita ha una sella in  $(0, 0)$ , dunque se il metodo di Lyapunov funziona dimostrerà l'instabilità.

Il segno di  $V$  su  $\mathbb{R}^2$  è mostrato in figura 5.1

---

<sup>†</sup> Suggerimento: utilizzare  $V(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

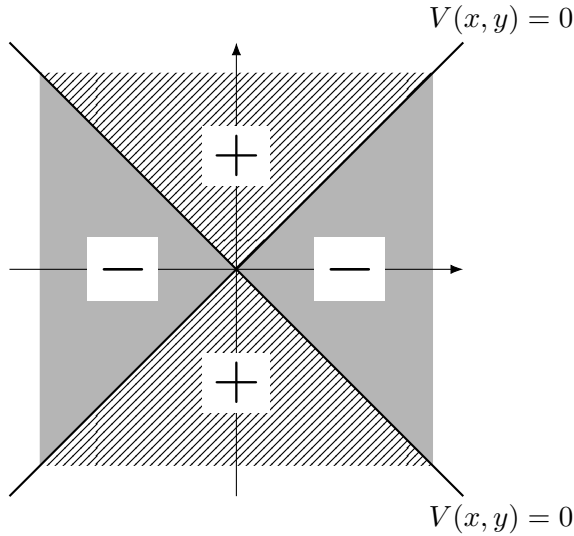


Figura 5.1: Segno su  $\mathbb{R}^2$  di  $V(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

In ogni intorno di  $(0, 0)$  la funzione  $V$  cambia di segno

$\implies \exists \{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tale che

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{0} \\ (x_n, y_n) &\geq 0, \quad \forall n \end{aligned}$$

Verifico ora il segno di  $\dot{V}$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' \\ &= -x(-x + y) + y(-x + y) \\ &\quad + x(x + y)(x^2 + y^2) + y(x + y)(x^2 + y^2) \\ &= \underbrace{x^2 - xy - xy + y^2}_{(x-y)^2} + (x + y)^2(x^2 + y^2) \geq 0 \end{aligned}$$

e si annulla solo nell'origine.

$\implies$  sono soddisfatte le ipotesi  $(H_3)$  del teorema di Lyapunov.

**Esercizio. (5.10)** Considero il sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases}$$

e le funzioni

$$V_1(x, y) = x^2 + y^2$$

$$V_2(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2}$$

$$V_3(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} + x^3 y$$

Stabilire se  $V_1, V_2$  e  $V_3$  sono funzioni di Lyapunov per il sistema.

**Soluzione (5.10).**

- $(0, 0)$  è l'unico equilibrio.
- $V_1(x, y) = x^2 + y^2$  è definita positiva in  $(0, 0)$ .

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x, y) &= \frac{\partial V_1}{\partial x} x' + \frac{\partial V_1}{\partial y} y' \\ &= \end{aligned}$$

Manca la fine dell'esercizio

**Osservazione. (5.11)** Il sistema precedente può essere visto come

$$x'' = -x^3 - x'$$

Se considero solo  $x'' = -x^3$ , posso vederlo nella forma

$$x'' = -\nabla U(x), \quad U(x) = \frac{1}{4}x^4$$

Quindi il termine  $-x'$  è dissipativo



**Teorema XX.**

**Teorema di La Salle-Krasovskii**

Sia  $\mathbf{p}$  un punto di equilibrio stabile per  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , e  $V$  una funzione di Lyapunov che soddisfa le ipotesi  $(H_1)$ .

Sia

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p}) : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Se  $\mathcal{E}$  non contiene orbite complete distinte da  $\{\mathbf{p}\}$ , allora  $\mathbf{p}$  è asintoticamente stabile.

**Esempio. (5.12)** Se consideriamo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases} \quad \begin{aligned} V_2(x, y) &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 \\ \dot{V}_2(x, y) &= -y^2 \end{aligned}$$

l'insieme

$$\mathcal{E} = \{(x, y) : -y^2 = 0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

Ci chiediamo se questo insieme contiene orbite distinte da  $\mathbf{p}$ .

Sostituisco  $y = 0$  nel sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -x^3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  l'asse  $x$  non contiene orbite distinte da  $\mathbf{p}$ , poiché in ogni punto tranne l'origine l'orbita passante per quel punto è perpendicolare all'asse  $x$ .

**Modello preda-predatore Lodka-Volterra. (5.13)** Siano:

- $C(t)$  il numero di prede al tempo  $t$  (dove  $c$  sta per coniglio);
- $L(t)$  il numero di predatori al tempo  $t$  (dove  $l$  sta per lupo).

Supponiamo che entrambe queste popolazioni crescano proporzionalmente a se stesse:

$$\begin{aligned} C'(t) &= c C(t) \\ L'(t) &= l L(t) \end{aligned}$$

dove  $c, l$  sono tassi di crescita.

Consideriamo però dei tassi di crescita sifatti:

$$c = \gamma - \delta L(t), \quad l = -\alpha + \beta C(t)$$

dove  $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ .

Ottengo il modello

$$\begin{cases} C'(t) = (\gamma - \delta L(t)) C(t) \\ L'(t) = (-\alpha + \beta C(t)) L(t) \end{cases} \quad \alpha, \beta, \delta, \gamma > 0.$$

Riscaliamo le variabili o, equivalentemente, supponiamo  $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 1$ :

$$\begin{cases} C' = (1 - L) C \\ L' = (C - 1) L \end{cases}$$

Ha senso supporre che  $C(t), L(t) > 0$ , poiché sono numeri di individui.

- Equilibri: facilmente si nota che i punti di equilibri sono  $(0, 0), (1, 1)$ .  
È interessante notare che due specie in competizione trovano sempre un equilibrio, che non prevede l'annichilimento di ambo le specie.
- Rette invarianti: sono presenti due rette invarianti:
  - $L = 0$ , orbita uscente dall'origine;
  - $C = 0$ , orbita entrante nell'origine.
- Equazioni delle orbite: le soluzioni si trovano sugli insiemi di livello della funzione

$$g(C, L) = (C - \log C) + (L - \log L)$$

## 5.2 Alcuni risultati teorici

**Osservazione.** (5.14) Consideriamo  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{p} \in \Omega$  punto di equilibrio asintoticamente stabile,  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.

Nei sistemi lineari, se  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  per tutti gli autovalori  $\lambda$

$\implies \mathbf{p}$  attrae tutte le orbite.

**Definizione. (5.15)** Consideriamo  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{p} \in \Omega$  punto di equilibrio,  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.

$\mathbf{p}$  si dice attrattore globale se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_{(0, \mathbf{q})}(t) = \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{q} \in \Omega$$

dove  $\phi_{(0, \mathbf{q})}(t)$  è soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q}. \end{cases}$$

#### Teorema XXI.

##### Teorema di Barbashin-Krasovskii

Se  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di Lyapunov che soddisfa  $(H_2)$  e

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty, \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$$

allora  $\mathbf{p}$  è un attrattore globale.

**Osservazione. (5.16)** Se  $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  ammette più di un punto di equilibrio, allora nessuno dei due può essere attrattore globale.

**Esempio. (5.17)** Manca un esempio

In questo sistema l'orbita periodica di raggio 1 è un ciclo limite.

**Definizione. (5.18)** Un ciclo limite è un'orbita chiusa che ammette un'intorno che non contiene altre orbite chiuse.

**Definizione. (5.19)** Se  $\gamma$  è un ciclo limite che ammette un intorno  $I_\gamma$  tale che

$$\forall \mathbf{q} \in I_\gamma, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi_{(0, \mathbf{q})}(t), \gamma) = 0$$

allora  $\gamma$  si dice stabile. Altrimenti  $\gamma$  è instabile.

## Teorema XXII.

**Teorema di Poincaré-Bendixon**

Sia  $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega$  aperto e  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ . Supponiamo che

- $K \subseteq \Omega$  compatto;
- $\forall \mathbf{p} \in K, \mathbf{f}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ ;
- $\exists \mathbf{q} \in K$  tale che  $\phi_{(0,\mathbf{q})}(t) \in K, \forall t \geq 0$ .

Allora  $K$  contiene un ciclo limite.

**Definizione. (5.20)** *Il compatto  $K$  che soddisfa questo teorema si chiama trapping region.*

**Esempio. (5.21)** Torniamo all'esempio di prima, scritto direttamente in forma polare:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta = 1 \end{cases}$$

Per un compatto nella forma  $\{r \in [r_1, r_2]\}$ , con  $r_1 < 1 < r_2$ , questo teorema garantisce l'esistenza di un ciclo limite, come trovato "a mano".

**Osservazione. (5.22)** Questo teorema è peculiare per la dimensione due.

## Parte II

# Introduzione alle tecniche geometriche per lo studio dei modelli differenziali in fisica matematica



## Capitolo 6

# Campi di vettori e forme differenziali su spazi affini

**Definizione. (6.1)** Si chiama spazio affine la terna  $(A, E, \delta)$ , dove:

- $A$  è un insieme di elementi che chiamiamo punti
- $E$  è uno spazio vettoriale
- $\delta: A \times A \rightarrow E$  è un'applicazione tale che:

1.  $\forall (P, \mathbf{v}) \in A \times E, \exists! Q \in A: \delta(P, Q) = \mathbf{v}$

2.  $\forall P, Q, R \in A, \delta(P, Q) + \delta(Q, R) = \delta(P, R)$

La dimensione dello spazio affine  $A$  è la dimensione dello spazio vettoriale soggiacente  $E$ .

**Notazione. (6.2)** Uno spazio affine  $(A, E, \delta)$  è indicato più brevemente con  $A$ , mentre il vettore  $\delta(P, Q)$  è indicato semplicemente con  $PQ$ .

**Definizione. (6.3)** Un vettore  $\mathbf{v} \in E$  è chiamato vettore libero, mentre con la coppia  $(P, \mathbf{v})$  indicheremo il vettore  $\mathbf{v}$  applicato nel punto  $P$ .

**Definizione. (6.4)** Sia  $A$  uno spazio affine. Un riferimento cartesiano è una coppia  $(O, \mathbf{c}_\alpha)$ , dove:

- $O$  è l'origine

- $(\mathbf{c}_\alpha) = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$  è una base di  $E$

Un riferimento cartesiano stabilisce una corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned}\Phi: A &\leftrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\leftrightarrow (x^\alpha)\end{aligned}$$

dove ad ogni punto  $P \in A$  si fa corrispondere l'ennupla reale  $(x^\alpha)$  costituita dalle componenti secondo la base  $(\mathbf{c}_\alpha)$  del vettore  $OP$ :

$$OP = \mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{c}_\alpha$$

Risultano così definite anche delle mappe  $x^\alpha: A \rightarrow \mathbb{R}$  dette coordinate cartesiane o affini, tali che  $x^\alpha(P)\mathbf{c}_\alpha = OP$

**Osservazione. (6.5)** Questa corrispondenza biunivoca istituisce anche una topologia di  $A$  indotta dalla topologia di  $\mathbb{R}^n$ .

**Trasformazioni affini. (6.6)** Se si considerano due riferimenti affini  $(O, \mathbf{c}_\alpha)$  e  $(O', \mathbf{c}_{\alpha'})$ , allora vi è un legame tra i due sistemi di coordinate indotti  $(x^\alpha)$  e  $(x^{\alpha'})$ , ovvero:

$$x^\alpha = a_{\alpha'}^\alpha x^{\alpha'} + b^\alpha \qquad x^{\alpha'} = a_\alpha^{\alpha'} x^\alpha + b^{\alpha'}$$

Dove  $a_{\alpha'}^\alpha$  e  $a_\alpha^{\alpha'}$  compongono le matrici dei cambiamenti di base:

$$\mathbf{c}_{\alpha'} = a_{\alpha'}^\alpha \mathbf{c}_\alpha \qquad \mathbf{c}_\alpha = a_\alpha^{\alpha'} \mathbf{c}_{\alpha'}$$

Mentre  $(b^\alpha)$   $(b^{\alpha'})$  sono le componenti rispettivamente del vettore  $OO'$  e  $O'O$ .

**Definizione. (6.7)** Sia  $A$  uno spazio affine. Una funzione  $f$  del tipo:

$$\begin{aligned}f: A &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto f(P)\end{aligned}$$

è detta campo scalare.

**Definizione. (6.8)** Possiamo vedere  $f = g \circ \Phi$  con:

$$\begin{aligned}A &\xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ P &\xrightarrow{\Phi} (x^\alpha) \xrightarrow{g} g(x^\alpha)\end{aligned}$$

Dove  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è detta rappresentazione del campo  $f$ .



**Proprietà. (6.9)** L'insieme dei campi scalari su  $A$  ha una struttura di anello commutativo ed algebra associativa e commutativa.

Siano  $f, g$  due campi scalari e  $P \in A$ , allora vale:

1. *Somma di campi:*  $(f + g)(P) = f(P) + g(P)$
2. *Prodotto numerico:*  $(fg)(P) = f(P)g(P)$
3. *Prodotto per uno scalare:*  $(af)(P) = af(P), a \in \mathbb{R}$

Denoteremo con  $\mathcal{F}(A)$  l'anello dei campi scalari sullo spazio affine  $A$ .

**Definizione. (6.10)** Un campo vettoriale è una mappa:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}: A &\rightarrow A \times E \\ P &\mapsto (P, \mathbf{X}(P))\end{aligned}$$

ovvero ad un punto  $P$  associa un vettore  $\mathbf{X}(P)$  applicato in  $P$ .

**Definizione. (6.11)** Fissato un riferimento cartesiano, ogni campo vettoriale  $\mathbf{X}$  risulta rappresentato da un insieme di  $n$  funzioni reali  $X^\alpha: A \rightarrow \mathbb{R}$ , dette componenti cartesiane, tali che:

$$\mathbf{X}(P) = X^\alpha(P)\mathbf{c}_\alpha$$

Queste componenti in quanto campi scalari hanno anche loro una funzione rappresentativa, tale per cui si possono anche denotare come  $X^\alpha(x^\beta)$ .

**Proprietà. (6.12)** Siano  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  due campi vettoriali. Sono definite le operazioni di:

1. *Somma:*  $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(P) = \mathbf{X}(P) + \mathbf{Y}(P)$
2. *Prodotto per un numero reale:*  $(a\mathbf{X})(P) = a(\mathbf{X}(P)), a \in \mathbb{R}$

Con queste due operazioni l'insieme dei campi vettoriali su  $A$ , che denoteremo con  $\mathcal{X}(A)$ , ha una struttura di modulo.

**Definizione. (6.13)** Sia  $f \in \mathcal{F}(A)$  e  $X \in \mathcal{X}(A)$ . La derivata di un campo scalare  $f$  rispetto ad un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  è il campo scalare:

$$\mathbf{X}(f) = X^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

Dove con:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

s'intende la derivata parziale rispetto alla  $x^\alpha$  della funzione rappresentativa  $f(x^1, \dots, x^n)$  in un qualunque sistema di coordinate cartesiane.

**Osservazione. (6.14)** Dunque è una mappa che, una volta fissato un  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$ , lavora:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}: \mathcal{F}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ f &\mapsto \mathbf{X}(f) = X^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \end{aligned}$$

**Proprietà. (6.15)** Siano  $f, g \in \mathcal{F}(A)$ . Si verifica facilmente che  $\mathbf{X}$  soddisfa:

- $\mathbb{R}$ -lineare:  $\mathbf{X}(af + bg) = a\mathbf{X}(f) + b\mathbf{X}(g) \quad a, b \in \mathbb{R}$
- *Regola di Leibnitz*:  $\mathbf{X}(f \cdot g) = \mathbf{X}(f) \cdot g + f \cdot \mathbf{X}(g)$

Una funzione che soddisfa queste due proprietà è per l'appunto chiamata derivazione.

**Invarianza per cambiamenti di coordinate affini. (6.16)** Un'altro fatto interessante in merito alla derivazione di un campo scalare  $f$  rispetto ad un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  è la sua indipendenza dalle coordinate affini stabilite. Sia  $X \in \mathcal{X}(A)$  e siano  $(\mathbf{c}_\alpha)$  e  $(\mathbf{c}_{\alpha'})$  due basi. Si consideri la rappresentazione del campo secondo le due basi:

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{c}_\alpha = X^{\alpha'} \mathbf{c}_{\alpha'}$$

Tenuto conto delle relazioni tra le basi, si ha la relazione:

$$X^{\alpha'} = a_{\alpha}^{\alpha'} X^\alpha$$

D'altra parte, interpretando la  $f$  come funzione delle  $(x^\alpha)$  per il tramite delle  $(x^{\alpha'})$  dalle relazioni precedenti tra le basi si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} a_{\alpha}^{\alpha'}$$

Si ha quindi:

$$X^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = X^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} a_\alpha^{\alpha'} = X^{\alpha'} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}}$$

Ciò mostra l'indipendenza della definizione dalla scelta delle coordinate cartesiane.

**Definizione. (6.17)** Siano  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(A)$ . Definiamo il commutatore di  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  come il campo vettoriale:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathcal{X}(A) \times \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{X}(A) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_f = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) \quad f \in \mathcal{F}(A) \end{aligned}$$

**Proprietà. (6.18)** Siano  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathcal{X}(A)$ . Il commutatore è un'operazione binaria interna  $[\cdot, \cdot]$ :

- *Anticommutativa*:  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$
- *Bilineare*:  $[a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]$
- Soddisfa l'*Identità di Jacobi*:

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] = 0$$

Ovvero  $(\mathcal{X}(A), [\cdot, \cdot])$  è un'algebra di Lie.

**L'espressione del commutatore. (6.19)** Andiamo ad analizzare l'espressione del commutatore con l'obiettivo di renderla più semplice e compatta:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_f &= X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) \right) - Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( X^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) \right) = \\ &= \left( X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} Y^\beta \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) + \cancel{X^\alpha Y^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) \right)} + \\ &\quad - \left( Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} X^\beta \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) - \cancel{Y^\alpha X^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) \right)} \end{aligned}$$

Scambiando  $\alpha \leftrightarrow \beta$  e semplificando i termini opposti si ottiene:

$$\left( X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} Y^\beta - Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} X^\beta \right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} (f) \quad \forall f \in \mathcal{F}(A)$$

Ottenendo così:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\beta \mathbf{c}_\beta$$

dove:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\beta = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} Y^\beta - Y^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} X^\beta$$

è la componente rispetto alla base  $\mathbf{c}_\beta$ .

**Definizione. (6.20)** Sia  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$ . La divergenza di  $\mathbf{X}$  è una funzione:

$$\begin{aligned} \text{div}: \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ \mathbf{X} &\mapsto \text{div}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

$$\text{Dove } \text{div}(\mathbf{X}) = \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

**Proprietà. (6.21)** Siano  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(A)$ . La divergenza gode delle seguenti proprietà:

- *Somma:*  $\text{div}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \text{div}(\mathbf{X}) + \text{div}(\mathbf{Y})$
- *Prodotto per campo scalare:*  $\text{div}(f\mathbf{X}) = f\text{div}(\mathbf{X}) + \mathbf{X}(f)$ ,  $f \in \mathcal{F}(A)$
- $\mathbf{X} = \text{costante}^\dagger \Rightarrow \text{div}(\mathbf{X}) = 0$

**Definizione. (6.22)** Una carta di dimensione  $n$  su un insieme  $A$  è una coppia  $(U, \varphi)$ , dove

- $U \subseteq A$
- $\varphi$  è una mappa biettiva:

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

la cui immagine  $\varphi(U)$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

---

<sup>†</sup> Considerato  $\mathbf{X} = \text{costante}$  nelle coordinate cartesiane affini ( $x^\alpha$ )

**Definizione. (6.23)** Possiamo definire le coordinate associate alla carta  $(U, \varphi)$  come le  $n$  funzioni:

$$q^i: U \rightarrow \mathbb{R} \qquad q^i = pr_i \circ \varphi$$

dove:  $pr_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  è la proiezione della  $i$ -esima coordinata.  
 $(r^1, \dots, r^n) \mapsto r^i$

**Osservazione. (6.24)** Siano  $A$  uno spazio affine,  $(x^\alpha)$  delle coordinate affini su  $A$  e  $(U, \varphi)$  una carta di dimensione  $n$ .

Le coordinate  $q^i$  si possono rappresentare come funzioni delle  $n$   $(x^\alpha)$ :

$$q^i = q^i(x^\alpha)$$

Essendo tutte applicazioni biettive si può invertire su  $\varphi(U)$ , ovvero:

$$x^\alpha = x^\alpha(q^i)$$

Quindi ricapitolando

**Definizione. (6.25)** Si possono definire i cambiamenti (o trasformazioni) di coordinate, come:

$$q^i = q^i(x^\alpha) \qquad x^\alpha = x^\alpha(q^i)$$

Con le matrici Jacobiane delle trasformazioni, rispettivamente:

$$E_\alpha^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha}(x^\beta) \qquad E_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i}(q^j)$$

Queste sono regolari e una l'inversa dell'altra.

**Coordinate non affini - Cerchio. (6.26)** Si considerino le coordinate del piano affine  $(x, y)$  e le trasformazioni di queste in coordinate polari piane  $(r, \theta)$ :

$$x^\alpha = x^\alpha(q^i): \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \qquad r > 0, -\pi < \theta < \pi$$

Queste hanno come trasformazione inversa di coordinate:

$$q^i = q^i(x^\alpha): \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x \geq 0 \\ \pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x < 0, y > 0 \\ -\pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x < 0, y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

**ESEMPIO coordinate non affini - Sfera. (6.27)** Consideriamo le coordinate dello spazio affine  $(O, (x, y, z))$  e la trasformazione in coordinate polari sferiche:

$$x^\alpha = x^\alpha(q^i): \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

Dove  $(q^1, q^2, q^3) = (r, \varphi, \theta)$  sono definite sul dominio aperto  $U$  in  $\mathbb{R}^3$ , asportando il semiasse positivo delle  $x$  e tutto l'asse  $z$ .

La carta è a valori nell'aperto  $\varphi(V) = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3: r > 0, 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi\}$ , dove:

$$\begin{cases} r \equiv \text{raggio} \\ \varphi \equiv \text{colatitudine} \\ \theta \equiv \text{longitudine} \end{cases}$$

**Notazione. (6.28)** In generale  $x^\alpha = x^\alpha(q^i)$  si può anche scrivere come  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^i)$  con  $\mathbf{x}$  un vettore in  $\mathbb{R}^3$  che rappresenta il vettore posizione  $OP = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$ .

**Definizione. (6.29)** Si possono definire  $n$  campi vettoriali su  $\varphi(U)$ , come segue:

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}$$

Questi ovviamente hanno componenti rispetto alla base  $(\mathbf{c}_\alpha)$ :

$$\mathbf{E}_i = E_i^\alpha \mathbf{c}_\alpha$$

E vengono chiamati riferimento naturale associato alle coordinate non affini  $(q^i)$ .

Le loro caratteristiche principali sono:

1. Non essere, in generale, costanti, a causa della loro dipendenza  $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i(q^j)$ .
2. Essere tra loro indipendenti e costituire così una base dei campi di vettori su  $U$ .

**Trasformazione di  $\mathbf{X}$ : coordinate affini  $\rightsquigarrow$  coordinate non affini. (6.30)**

Sia  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$ . Sappiamo sia che:

$$\mathbf{X} = X^i(q^j) \mathbf{E}_i = \boxed{X^i \mathbf{E}_i} = X^i E_i^\alpha \mathbf{c}_\alpha = \boxed{X^\alpha \mathbf{c}_\alpha}$$

Uguagliando così i due termini evidenziati abbiamo le relazioni tra i coefficienti delle due rappresentazioni del campo vettoriale  $\mathbf{X}$ :

$$\begin{aligned} X^i &= E_i^\alpha X^\alpha \\ X^\alpha &= E_i^\alpha X^i \end{aligned}$$

**Interpretazione degli  $\mathbf{E}_i$  come derivazioni. (6.31)** Consideriamo i campi vettoriale  $\mathbf{E}_i$ . Questi possiamo interpretarli come delle derivazioni del tipo:

$$\mathbf{E}_i(f) = \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

Ovvero come la derivata della funzione rappresentativa  $f$  rispetto alle coordinate non affini  $(q^i)$ . Per fare ciò, quello che sta accadendo è:

$$\begin{aligned} \varphi(U) &\xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (q^i) &\mapsto \varphi^{-1}(q^i) \mapsto f(\varphi^{-1}(q^i)) \equiv f(q^i) \end{aligned}$$

Quindi procedendo con questa interpretazione:

$$\mathbf{E}_i(f) = \frac{\partial}{\partial q^i}(f) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f) = E_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f)$$

Concludendo, dunque, per un generico campo vettoriale  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{X}(f) = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}(f) = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f)$$

## 6.1 Simboli di Christoffel

Consideriamo i campi vettoriali  $\mathbf{E}_i$ . Visto che questi possono essere espressi in funzione delle coordinate  $q^i$ , ha senso considerarne le derivate parziali:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^j \partial q^i}$$

Queste derivate parziali sono a loro volta dei campi vettoriali e quindi possiamo considerarne la rappresentazione secondo il riferimento  $(\mathbf{E}_i)$ :

$$\partial_j \mathbf{E}_i = \partial_j \partial_i \mathbf{x} = \Gamma_{ji}^h \mathbf{E}_h$$

**Definizione. (6.32)** *Le componenti  $\Gamma_{ji}^h$ , definite come precede, sono delle funzioni sopra il dominio  $U$  della carta, denominate simboli di Christoffel.*

**Proprietà. (6.33)** I simboli di Christoffel hanno le seguenti proprietà:

- $\boxed{\Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h}$ : Questo vale per definizione stessa dei simboli di Christoffel. Essendo definiti tramite le derivate seconde di funzioni regolari, sono simmetrici rispetto agli indici in basso.
- $\boxed{\Gamma_{ji}^h = 0 \iff \text{le coordinate sono cartesiane}}$ : Dalla definizione si vede che sono identicamente nulli se e solo se i campi  $\mathbf{E}_i$  sono costanti e ciò accade se e solo se le coordinate sono cartesiane.

**Osservazione. (6.34)** Le componenti del commutatore sono le stesse in ogni sistema di coordinate:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial q^j}$$



**Definizione. (6.35)** La divergenza in coordinate non affini è il campo scalare:

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial q^i} X^i + \Gamma_{ji}^j X^i$$

*Si verifica facilmente che soddisfa le condizioni precedentemente enunciate per la divergenza.*

**Osservazione. (6.36)** Questa, euristicamente, può essere vista come:

- La traccia di un'opportuna matrice:

$$(a_{ij}) = \left( \frac{\partial X^j}{\partial q^i} + \Gamma_{ik}^j X^k \right)$$

- Un prodotto che *assomiglia* al prodotto scalare

## 6.2 Forme differenziali

**Definizione. (6.37)** Sia  $A$  uno spazio affine. Una forma lineare o 1-forma su  $A$  è un'applicazione:

$$\varphi: \mathcal{X}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$$

tale che  $\varphi$  sia  $\mathcal{F}(A)$ -lineare, ovvero:

$$\varphi(f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}) = f\varphi(\mathbf{X}) + g\varphi(\mathbf{Y}) \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(A) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(A)$$

**Proprietà. (6.38)** L'insieme delle forme lineari su  $A$ ,  $\Phi^1(A)$ , è un modulo sull'anello  $\mathcal{F}(A)$ . Le operazioni sono così definite:

- *Somma di 1-forme:*  $(\varphi + \psi)(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) + \psi(\mathbf{X})$ ,  $\forall \varphi, \psi \in \Phi^1(A)$
- *Prodotto per un campo scalare:*  $(f\varphi)(\mathbf{X}) = f \cdot \varphi(\mathbf{X})$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}(A)$

**Notazione. (6.39)** Denotiamo con  $\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle$  il valore della forma lineare  $\varphi$  sul campo vettoriale  $\mathbf{X}$ . In tal modo

**Definizione. (6.40)** Definiamo un'applicazione lineare:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{X}(A) \times \Phi^1(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$$

che prende il nome di valutazione tra una forma lineare e un campo vettoriale.

**Osservazione. (6.41)** Una forma lineare può anche essere interpretata come campo di covettori, cioè come un'applicazione:

$$\varphi: A \rightarrow A \times E^*$$

che associa ad ogni punto  $P \in A$  un covettore applicato in  $P$ .

Il collegamento tra questa e la definizione precedente è dato dalla formula:

$$\langle \mathbf{X}, \varphi(P) \rangle = \langle \mathbf{X}(P), \varphi(P) \rangle$$

Assume così senso valutare una 1-forma  $\varphi$  su di un vettore applicato  $(P, \mathbf{v})$ . Il risultato  $\langle \mathbf{v}, \varphi(P) \rangle$  è un numero reale.

**Il differenziale. (6.42)** Un esempio fondamentale di 1-forma è il differenziale  $df$  di un campo scalare  $f$ .

Questo è definito dall'uguaglianza:

$$\langle \mathbf{X}, df \rangle = \mathbf{X}(f)$$

La linearità dell'applicazione:

$$\begin{aligned} df: \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ \mathbf{X} &\mapsto \langle \mathbf{X}, df \rangle \end{aligned}$$

segue dal fatto che  $\mathbf{X}(f)$  è lineare rispetto al campo vettoriale  $\mathbf{X}$ , una volta fissato il campo scalare  $f$ . Inoltre dalla regola di Leibnitz per la derivata rispetto ad un campo vettoriale segue la regola di Leibnitz per il differenziale:

$$d(fg) = gdf + fdg$$

**Differenziale di  $(q^i)$**  Il nostro obiettivo adesso è quello di studiare il differenziale delle  $(q^i)$ , generiche coordinate su un aperto  $U$ .

Essendo delle funzioni reali su  $U$  possiamo considerarne i differenziali  $(dq^i)$ . Queste, come già visto, fanno corrispondere ad un campo  $\mathbf{X}$  le sue componenti  $X^i$ :

$$\langle \mathbf{X}, dq^i \rangle = X^i$$

E quindi in particolare:

$$\langle \mathbf{E}_k, dq^i \rangle = \delta_k^i$$

D'altra parte, nel dominio  $U$ , ogni forma lineare è combinazione lineare dei differenziali delle coordinate, ovvero ammette una rappresentazione locale:

$$\varphi = \varphi_i dq^i \tag{6.1}$$

Dove le  $(\varphi_i)$  sono funzioni reali su  $U$  dette componenti di  $\varphi$  nelle coordinate  $(q^i)$ , definite da:

$$\varphi_i = \langle \mathbf{E}_i, \varphi \rangle \tag{6.2}$$

Si noti come 6.1  $\rightsquigarrow$  6.2, infatti:

$$\langle \mathbf{E}_k, \varphi \rangle = \varphi_i \langle \mathbf{E}_k, dq^i \rangle = \varphi_i \delta_k^i = \varphi_k$$

Viceversa, 6.2 $\rightsquigarrow$ 6.1:

$$\langle \mathbf{X}, \varphi_i dq^i \rangle = \varphi_i \langle \mathbf{X}, dq^i \rangle = \langle \mathbf{E}_i, \varphi \rangle X^i = \langle X^i \mathbf{E}_i, \varphi \rangle = \langle \mathbf{X}, \varphi \rangle$$

Dalle formule precedenti segue che la valutazione di una forma lineare sopra un campo vettoriale è data, *qualunque siano le coordinate scelte*, dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\boxed{\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle = X^i \varphi_i}$$

**Definizione. (6.43)** Una forma differenziale o p-forma su uno spazio affine  $A$  è un'applicazione  $p$ -lineare antisimmetrica dello spazio  $\mathcal{X}(A)^p$  nello spazio  $\mathcal{F}(A)$ :

$$\phi: \underbrace{\mathcal{X}(A) \times \mathcal{X}(A) \times \cdots \times \mathcal{X}(A)}_{p \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{F}(A)$$

**Notazione. (6.44)** Indicheremo con:

$$\Phi^p(A) = \text{spazio delle } p \text{ forme sopra } A$$

definendo:

$$\Phi^0(A) = \mathcal{F}(A)$$

**Derivazione esterna. (6.45)** Sulle  $p$ -forme differenziali è definita l'operazione fondamentale chiamata derivazione esterna. Questa è una generalizzazione dell'operatore di differenziale applicabile sulle 0-forme alle  $p$ -forme e per questo è indicato con  $d$ .

$$d: \Phi^p(A) \rightarrow \Phi^{p+1}(A)$$

La sua proprietà fondamentale è  $d^2 \equiv 0$ .

**Osservazione. (6.46)** Per l'antisimmetria, se  $p > n = \dim(A)$ , allora  $\Phi^p(A) \equiv 0$ .

**Invarianza della rappresentazione differenziale 1-forma. (6.47)** Sia  $\varphi$  una 1-forma su  $A$  scritta in rappresentazione locale come:

$$\varphi = \varphi_i dq^i$$

Il contenuto di questo paragrafo sarà quello di dimostrare la rappresentazione del suo differenziale in coordinate locali:

$$d\varphi = d\varphi_i \wedge dq^i$$

e il fatto che questa non dipenda dalle coordinate scelte. Ovvero presa:

$$\varphi = \varphi_{i'} dq^{i'} \longrightarrow d\varphi = \varphi_{i'} \wedge dq^{i'}$$

Mostriamo questo secondo fatto.

Siano  $(q^i)$  e  $(q^{i'})$  due sistemi di coordinate generiche. Ricordando che la matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è:

$$E_{i'}^{i'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i}$$

Si noti come:

$$dq^{i'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} dq^i$$

E quindi:

$$\varphi_{i'} = E_{i'}^i \varphi_i$$

Iniziamo allora i calcoli. Tenendo a mente che:

$$d\varphi_{i'} = d(E_{i'}^i \varphi_i) = dE_{i'}^i \varphi_i + E_{i'}^i d\varphi_i$$

Studiamo il membro destro della tesi:

$$\begin{aligned} d\varphi_{i'} \wedge dq^{i'} &= \varphi_i \frac{\partial E_{i'}^i}{\partial q^k} dq^k \wedge dq^{i'} + E_{i'}^i d\varphi_i \wedge dq^{i'} = \\ &= \varphi_i \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'} \partial q^{k'}}}_{\text{simmetrico in } i', k'} \underbrace{dq^{k'} \wedge dq^{i'}}_{\text{antisimmetrico in } i', k'} + d\varphi_i \wedge E_{i'}^i dq^{i'} = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv 0} = d\varphi_i \wedge dq^i \end{aligned}$$



## Capitolo 7

# Curve negli spazi affini, rappresentazione in coordinate non affini, e sistemi dinamici

**Definizione. (7.1)** Chiamiamo curva parametrizzata in uno spazio affine  $A$  un'applicazione  $\gamma: I \rightarrow A$  da un intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$  nello spazio affine.

**Definizione. (7.2)** Considerata un'origine  $O \in A$ , per la curva  $\gamma$  vi è una rappresentazione vettoriale:

$$\mathbf{x} = \gamma(t) \qquad \text{con } \mathbf{x} = OP$$

che dunque identifica i punti  $P \in A$  con il loro vettore posizione rispetto al punto  $O$ .

Siano  $(x^\alpha)$  delle coordinate cartesiane aventi origine in  $O$ . Si possono allora considerare le equazioni parametriche:

$$x^\alpha = \gamma^\alpha(t) \qquad \alpha = 1, \dots, n$$

**Interpretazione cinematica. (7.3)** Una curva può essere interpretata come moto di un punto  $P$  nello spazio affine, se il parametro  $t$  viene inteso come tempo.

Nel caso in cui la curva rappresenti il moto di un punto nello spazio affine tridimensionale euclideo, il generico vettore  $OP = \mathbf{x}$  è chiamato vettore posizione.

**Definizione. (7.4)** *L'immagine della curva, cioè l'insieme*

$$\gamma(I) = \{P \in A \mid \exists t \in I : \gamma(t) = P\}$$

*è detta traiettoria o orbita<sup>†</sup>.*

**Definizione. (7.5)** *Il vettore tangente alla curva  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$  è il vettore denotato con  $\dot{\gamma}(t)$  definito dal limite:*

$$\dot{\gamma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

*Questo nel contesto cinematico prende il nome di velocità istantanea e lo si denota con  $\mathbf{v}(t)$ .*

**Campo tangente come curva. (7.6)** Convieni interpretare il vettore tangente  $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(t)$  come vettore applicato nel punto  $\gamma(t)$ . Ovvero come un'applicazione:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t) &: I \rightarrow A \times E \\ t &\mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

che viene detta curva tangente della curva  $\gamma: I \rightarrow A$ .

**Definizione. (7.7)** *Siano  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$  una curva e  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  un campo scalare, entrambi almeno di classe  $C^1$ . Definiamo la derivata del campo scalare  $F$  lungo la curva  $\gamma$  come:*

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = \langle \mathbf{v}(t), dF \rangle \quad \forall t \in I$$

---

<sup>†</sup> In geometria è questa in realtà la vera e propria curva, ovvero il luogo dei punti definito da  $n - 1$  equazioni.



*Questa è la definizione naturale, infatti:*

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \frac{d\gamma^\alpha}{dt}(t) = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} v^\alpha(t) = \langle \mathbf{v}(t), dF \rangle$$

**Definizione. (7.8)** Una curva integrale di un campo vettoriale  $\mathbf{X}$  è una curva:

$$\gamma: I \rightarrow A$$

*tale che:*

- $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ;
- $\forall \gamma(t) \in A$ , il vettore tangente  $\dot{\gamma}(t)$  coincide con il valore del campo  $\mathbf{X}$  in quel punto ovvero:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \mathbf{X} \circ \gamma = \mathbf{X}(\gamma(t)) \\ I &\xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\mathbf{X}} A \times E \\ \dot{\gamma}(t) &: I \rightarrow A \times E \end{aligned}$$

**Definizione. (7.9)** Diciamo inoltre che la curva integrale è basata nel punto  $P_0$  se  $\gamma(0) = P_0$ .

**Notazione. (7.10)** In rappresentazione vettoriale sarebbe:

$$\mathbf{x} = \gamma(t) \text{ curva integrale} \iff \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

Le curve integrali rappresentano i moti delle particelle del fluido secondo l'interpretazione del campo  $\mathbf{X}$  come campo di velocità.

**Definizione. (7.11)** Un campo vettoriale interpretato come campo di velocità viene detto sistema dinamico.

**Notazione. (7.12)** Un sistema dinamico si può rappresentare dunque come un'equazione differenziale:

- vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

- in coordinate affini:

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = X^\alpha(x^\beta)$$

- in coordinate generiche:

$$\frac{dq^i}{dt} = X^i(x^j)$$

In particolare sono  $n$  equazioni differenziali ordinarie in forma normale autonoma.

## 7.1 Risoluzione sistemi dinamici

Integrare significa trovare tutte le soluzioni del sistema dinamico e queste costituiscono lo spazio delle soluzioni/spazio dei moti.

**Definizione. (7.13)** *Dato un sistema dinamico e un punto  $P_0 \in A$ , parliamo di curva integrale massimale  $\gamma_{P_0}: I_{P_0} \rightarrow A$ , quando presa un'altra curva integrale  $\gamma: I \rightarrow A$  basata in  $P_0$ , allora:*

$$I \subseteq I_{P_0} \qquad \gamma_{P_0}|_I = \gamma$$

Una volta fissate le condizioni iniziali/dati iniziali riusciamo ad individuare un'unica soluzione del sistema dinamico grazie al

**Teorema XXIII.**

**Teorema di Cauchy**

Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale di classe  $C^k (k \geq 1)$  su un dominio  $M$ . Fissato un punto  $P_0 \in M$  esiste una e una sola curva integrale massimale basata in  $P_0$

$$\gamma_{P_0}: I_{P_0} \rightarrow M$$

Se  $I_{P_0} = \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{X}$  si dice completo.

**Definizione. (7.14)** *Il flusso del campo di vettori  $\mathbf{X}$  descrive lo spazio delle soluzioni (o insieme di tutte le curve integrali del campo  $\mathbf{X}$ ). Si definisce come la funzione:*

$$\begin{aligned} \varphi: D \subseteq \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, P_0) &\mapsto \gamma_{P_0}(t) \end{aligned}$$

**Teorema XXIV.**

Sia  $\mathbf{X}$  campo vettoriale di classe  $C^k (k \geq 1)$  su un dominio  $M$ , allora:

1. Il dominio  $D$  del flusso  $\varphi$  è un aperto di  $\mathbb{R} \times M$  e  $\varphi \in C^k(D)$
2. Sia  $V \subseteq M$  aperto,  $\delta > 0$  e si consideri  $(-\delta, \delta) \times V \subseteq D$ . Allora  $\forall t \in (-\delta, \delta)$ :

$$\begin{aligned} \varphi_t: V &\rightarrow V_t \\ P &\mapsto \varphi(t, P) \end{aligned}$$

è un omeomorfismo  $C^k$  di  $V$  su  $V_t \subseteq M$  con  $\varphi_t: P \mapsto \varphi(-t, P)$  omeomorfismo inverso

3. Vale:

$$\varphi(t, \varphi(s, P)) = \varphi(t + s, P)$$

$\forall t, s, P$  per cui i due membri hanno significato.

**Osservazione. (7.15)** Se  $\mathbf{X}$  è completo, allora:

- $D = \mathbb{R} \times M$
- $\varphi_t: M \rightarrow M, P \mapsto \varphi_t(P) = \gamma_P(t)$  è una trasformazione  $C^k$  di  $M$ .

**Definizione. (7.16)** Al variare del parametro  $t \in \mathbb{R}$  i diversi flussi  $\varphi_t$  costituiscono un gruppo ad un parametro, ovvero un'insieme  $\{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$  tale che valgono:

- $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$
- $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t$
- $\varphi_0 = id_M$
- $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$

**Osservazione. (7.17)** Ad ogni gruppo ad un parametro si può associare il campo vettoriale  $\mathbf{X}$  corrispondente e viceversa. Ovvero questo sono condizioni necessarie e sufficienti affinché un insieme di curve  $\varphi(t, P)$  sia lo spazio delle soluzioni di un certo campo vettoriale.

**Definizione. (7.18)** Sia  $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$ . Definiamo l'integrale primo di  $\mathbf{X}$  come il campo scalare  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\forall \gamma: I \rightarrow A$  curva integrale, vale:

$$F \circ \gamma(t_1) = F \circ \gamma(t_2) \iff \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = 0, \forall t \in I \iff \langle \mathbf{X}, dF \rangle = 0$$

$\forall t_1, t_2 \in I$

## 7.2 Velocità e accelerazione in coordinate non affini

**Velocità in coordinate non affini. (7.19)** Consideriamo una curva  $\gamma$  e delle coordinate non affini  $(q^i)$ . La curva è rappresentata da:

$$q^i(t) = \gamma^i(t)$$

Ricordando che  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{E}_i$ , abbiamo che:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}}_{\mathbf{E}_i} \cdot \frac{dq^i}{dt} = v^i \mathbf{E}_i$$

Quindi la velocità in componenti rispetto alle coordinate  $(q^i)$  è data da

$$v^i(t) = \frac{dq^i(t)}{dt}$$

**Osservazione. (7.20)** Come già visto l'espressione del campo di vettori  $\mathbf{v}$  non cambia nei due sistemi  $(\mathbf{c}_\alpha)$  e  $(\mathbf{E}_i)$ , ovvero:

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{c}_\alpha = v^i \mathbf{E}_i$$

**Accelerazione in coordinate non affini. (7.21)** Nel riferimento affine  $(\mathbf{c}_\alpha)$ , l'accelerazione è definita come:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^\alpha}{dt}(t) \mathbf{c}_\alpha = a^\alpha(t) \mathbf{c}_\alpha$$

Ora allora analizziamo  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$  passando per le coordinate non affini:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{d}{dt} \mathbf{E}_i = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{\partial}{\partial q^j}(\mathbf{E}_i) \cdot \overbrace{\frac{dq^j}{dt}}^{v^j} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + \boxed{v^i v^j \Gamma_{ji}^k \mathbf{E}_k}$$

Ora, scambiando  $i \leftrightarrow k$  in  $\square$  e raccogliendo, otteniamo:

$$\left( \frac{dv^i}{dt} + v^k v^j \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{E}_i = a^i \mathbf{E}_i$$

Quindi si noti che a meno che  $\Gamma_{jk}^i = 0$ , abbiamo:

$$a^i \neq \frac{dv^i}{dt}$$

**Coordinate polari. (7.22)** Consideriamo le coordinate polari. Per quanto riguarda la velocità abbiamo:

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{E}_r + \dot{\theta}\mathbf{E}_\theta = v^r\mathbf{E}_r + v^\theta\mathbf{E}_\theta$$

Ora analizziamo l'accelerazione sfruttando l'espressione ottenuta precedentemente:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left( \frac{dv^r}{dt} + \cancel{v^r v^\theta \Gamma_{r\theta}^r} + v^\theta v^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + \cancel{v^\theta v^r \Gamma_{\theta r}^r} + \cancel{v^r v^r \Gamma_{rr}^r} \right) \mathbf{E}_r + \\ & + \left( \frac{dv^\theta}{dt} + v^r v^\theta \Gamma_{r\theta}^\theta + \cancel{v^r v^r \Gamma_{rr}^\theta} + v^\theta v^r \Gamma_{\theta r}^\theta + \cancel{v^\theta v^\theta \Gamma_{\theta\theta}^\theta} \right) \mathbf{E}_\theta \end{aligned}$$

Ricordando inoltre che  $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$  e  $\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{dv^r}{dt} - r v^\theta v^\theta \right) \mathbf{E}_r + \left( \frac{dv^\theta}{dt} + \frac{2}{r} v^\theta v^r \right) \mathbf{E}_\theta = \\ & = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{E}_r + \left( \ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} \right) \mathbf{E}_\theta = \\ & = a^r \mathbf{E}_r + a^\theta \mathbf{E}_\theta \end{aligned}$$

Si osservi che ponendo  $\mathbf{E}_r = \mathbf{u}$  e  $\mathbf{E}_\theta = r\tau$  con  $\mathbf{u}$  e  $\tau$  versori nella rappresentazione radiale del moto si ottiene la classica scomposizione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{radiale}} + \mathbf{a}_{\text{trasversale}}$$

**Definizione. (7.23)** Definiamo la velocità areolare come:

$$\mathbf{v}_{ar} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \mathbf{k}$$

**Definizione. (7.24)** Definiamo moto centrale un moto tale per cui:

$$\exists O \in A \text{ origine} : \forall t \in I \quad \mathbf{a}(t) \wedge \mathbf{r}(t) = 0$$

Studiando adesso che la derivata della velocità areolare è:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{ar}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \overbrace{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{v})}^0 + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}$$

e che quindi è uguale a 0, ovvero la velocità areolare è costante  $\iff$  il moto è centrale.

**Dalla traiettoria agli enti fondamentali della cinematica. (7.25)**

Sia  $\mathbf{r} = r(\theta)$ . Da esso si possono scrivere tutti gli enti fondamentali della cinematica.

Sia  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta(t))\mathbf{u}$  la nostra traiettoria del moto. Studiamo la velocità:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta}\mathbf{u} + r \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \left( \frac{dr}{d\theta} \mathbf{u} + r \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right)$$

Ora utilizzando la costante delle aree  $c = r^2 \dot{\theta}$  otteniamo:

$$\frac{c}{r^2} \left( \frac{dr}{d\theta} \mathbf{u} + r \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right) = c \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \mathbf{u} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right)$$

e riconoscendo in  $\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = \tau$ , abbiamo che:

$$\mathbf{v} = c \left( -\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \mathbf{u} + \frac{1}{r} \tau \right)$$

Prendiamo adesso in esame l'accelerazione, sfruttando l'espressione appena ottenuta per la velocità:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= c \left( -\frac{d}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{u} - \cancel{\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{u}}{dt}} + \cancel{\frac{d}{dt} \frac{1}{r}} \cdot \tau + \frac{1}{r} \frac{d\tau}{dt} \right) = \\ &= c\dot{\theta} \left( -\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{r} \frac{d\tau}{d\theta} \right) \end{aligned}$$

Ricordando che  $\frac{d\tau}{d\theta} = -\mathbf{u}$  da  $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}$ , abbiamo:

$$\mathbf{a} = -\frac{c^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) \mathbf{u}$$

**Definizione. (7.26)** *Uno spazio affine euclideo è una quaterna  $(A, E, \delta, \mathbf{g})$ , dove  $(A, E, \delta)$  è uno spazio affine e  $\mathbf{g}$  è un tensore metrico su  $E$  (considerato come spazio vettoriale euclideo). Ovvero  $\mathbf{g}$  è una forma bilineare simmetrica:*

$$\begin{aligned} \mathbf{g}: \mathcal{X}(A) \times \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

dove, considerata  $g$  come il prodotto scalare su  $E$ ,  $\forall P \in A$  l'immagine è definita come:

$$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})(P) = g(\mathbf{X}(P), \mathbf{Y}(P))$$

**Definizione. (7.27)** Definiamo l'ascissa euclidea (o ascissa curvilinea) una funzione monotona crescente  $g$  tale che presa:

$$\begin{aligned} g: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) \end{aligned}$$

allora

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt}}$$

### 7.3 Moti geodetici su una superficie

Sia  $Q$  una superficie regolare nello spazio tridimensionale con rappresentazione  $OP = \mathbf{r}(q^1, q^2)$ . Sia assegnata sulla superficie una curva  $\gamma$  di equazioni parametriche  $q^i(t) = \gamma^i(t)$ .

Il vettore  $\mathbf{v}(t)$  tangente alla curva è banalmente tangente anche alla superficie. Se consideriamo invece il suo vettore derivata:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

questo in generale non è tangente alla superficie. Infatti:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{d\mathbf{E}_i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{dq^j}{dt} (\Gamma_{ji}^k \mathbf{E}_k + B_{ji} \mathbf{N})$$

con  $\mathbf{N}$  il vettore normale alla superficie. Quindi:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{\left( \frac{dv^i}{dt} + v^k \frac{dq^i}{dt} \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{E}_i}_{\text{tangente a } Q} + v^i \frac{dq^j}{dt} B_{ji} \mathbf{N}$$



La componente tangente della derivata della velocità è chiamata derivata intrinseca della velocità. Se volessimo scriverla però rispetto alle coordinate non affini  $(q^i)$ , essendo

$$v^i = \frac{dq^i}{dt};$$

$$\mathbf{a}_{\text{intrinseca}}^k = \frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt}$$

Abbiamo così scomposto l'accelerazione come:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{intrinseca}}^k + \mathbf{a}_N$$

Una volta scissa l'accelerazione possiamo finalmente definire cos'è

**Definizione. (7.28)** *Il moto geodetico o moto inerziale su una superficie è il moto in cui:*

$$\mathbf{a}_{\text{intrinseca}} = 0, \quad \forall t \quad [\mathbf{a} = \mathbf{a}_N]$$

Questa condizione può essere anche rappresentata sotto forma di sistema di equazioni differenziali infatti:

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt} = 0 \iff \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k v^i v^j \end{cases}$$

Così facendo i moti geodetici diventano le curve integrali di questo sistema dinamico associato al campo vettoriale  $\mathbf{X}$  definito sui vettori dello spazio tangente alla superficie  $Q$ . Questo scritto come derivazione sarebbe:

$$\mathbf{X} = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k}$$

$\mathbf{X}$  con un abuso di notazione prende il nome di flusso geodetico. Così facendo assegnato un  $P_0 \in Q$  e  $\mathbf{v}_0$  tangente a  $Q$  in  $P_0$ ,  $\exists!$  una curva geodetica massimale basata in  $P_0$  e avente come vettore tangente in  $t = 0$  il vettore  $\mathbf{v}_0$ .

### Energia cinetica come integrale primo delle geodetiche

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \gamma(t)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = 0$$

$$\frac{d}{dv}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Poichè  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_N \perp \mathbf{v}$

Quindi l'energia cinetica è un integrale primo delle geodetiche. In particolare il moto è uniforme, ovvero il modulo della velocità è costante lungo le geodetiche.

# Capitolo 8

## Il modello della visione

### 8.1 Introduzione

Il modello della visione di Jean Petitot è un tentativo di rappresentare tramite la modellizzazione matematica come gli oggetti ed enti del mondo esterno vengano recepiti, codificati e rappresentati dalla corteccia visuale del nostro cervello, in particolare si sofferma su una modellizzazione del primo stadio di rappresentazione degli oggetti esterni, il cosiddetto  $V1$ . Ci si chiede appunto come enti geometrici esterni semplici come punti o anche più complessi come linee e forme possano essere interpretate e codificate dal nostro apparato neuro-visivo.

### 8.2 Il modello

**Def** La struttura geometrica più importante definita sulla mappa delle fibre che modella il funzionamento ottico di  $V1$  è chiamata struttura di contatto, denotata con  $\mathcal{C}$ .

Il modello geometrico della visione di Petitot rappresenta le connessioni neuronali retina-corteccia visiva nel seguente modo:

$$I \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\mathbf{X}} A \times E \xrightarrow{\hat{\gamma}} A' \xrightarrow{\mathbf{X}} A' \times E'$$

Dove:

$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow A \\ t &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

che poi viene inviato tramite  $\mathbf{X}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}: A &\rightarrow A \times E \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \dot{x}, \dot{y})\end{aligned}$$

Successivamente:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}: A \times E &\rightarrow A' \\ (x, y, \dot{x}, \dot{y}) &\mapsto (x, y, p = \dot{y})\end{aligned}$$

E infine tramite  $\mathbf{X} \in \ker \omega$ , con  $\omega = dy - p dx$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}: A' &\rightarrow A' \times E' \\ (x, y, p = \dot{y}) &\mapsto (x, y, p = \dot{y}, \dot{x} = 1, \dot{y} = p, \dot{p} = \ddot{y})\end{aligned}$$

Dove  $\Gamma$  è la curva geodetica per  $g_C$  ed è definita come:

$$\Gamma = \dot{\gamma}|_{(\dot{x}=1, \dot{y}=p)} \quad \text{lift di Legendre}$$

e invece:

$$g_C(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) = \delta_{ij} \quad i = 1, 2$$

e  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$  che generano il  $\ker \omega$ .

**andrea donati** Sia  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale e  $\Gamma$  una curva integrale di  $\mathbf{X}$ , dove:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}: A' &\rightarrow TA' \\ (x, y, p) &\mapsto (\xi, \eta, \pi)\end{aligned}$$

dove con  $TA'$  indichiamo il fibrato tangente di  $A'$ . Defiamo inoltre:

$$\dot{\Gamma} = (\mathbf{X} \circ \Gamma) = \dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y + \dot{p}\partial_p$$

Supponiamo che:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = p \end{cases}$$

lungo  $\Gamma$ , si ha dunque che:

$$\dot{\Gamma} = \partial_x + p\partial_y + \dot{p}\partial_p = \partial_x + \dot{y}\partial_y + \ddot{y}\partial_y$$

Ora, considerata la forma  $w = -pdx + dy$ , si noti che lungo  $\Gamma$   $w(\mathbf{x}) = 0$  e in generale il  $\ker w$  definisce una struttura di contatto su  $A'$ :

$$\mathbf{x} \in \ker w \iff \eta - p\xi = 0$$

dove il membro a destra definisce un piano di contatto.

Un tale campo vettoriale può essere scritto nel seguente modo:

$$\xi(\partial_x + p\partial_y) + \pi\partial_p = 0 = \xi\partial_x + \overbrace{\xi p}^{\eta} \partial_y + \pi\partial_p$$

Ora definiamo i vettori:

$$\mathbf{t}_1 = \partial_x + p\partial_y \quad \mathbf{t}_2 = \partial_p \quad \mathbf{t}_1 \perp \mathbf{t}_2$$

Creando così una coppia  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$  di vettori ortonormali (ortogonali sicuramente, ci basta normalizzarli successivamente).

Lungo  $\Gamma$   $\dot{y} = p\dot{x}$ , ma  $\dot{x} = 1 \rightsquigarrow x = s + c$ .

Possiamo così riparametrizzare  $\Gamma$  per il parametro  $x$  e vedere  $\Gamma$  come l'indicatrice delle tangenti di una curva  $\gamma$ , dove quindi:

$$\begin{aligned} \gamma &= (x, y(x)) \\ \Gamma: A' &\rightarrow A' \times E \\ (x, y, p) &\longleftrightarrow (x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{aligned}$$

Esistono solo curve integrali di dimensione 1 dal teorema di Frobenius che dice che  $dw \wedge w = 0 \Rightarrow \nexists$  superfici integrali della distribuzione di contatto.

Le proprietà di  $w$  permettono di definire una metrica sulla struttura di contatto detta metrica di Carnot-Caratheodory denotata con  $g_C$ .

Le curve geodetiche rispetto a  $g_C$  sono curve  $\Gamma$  tangenti a  $\mathcal{C}$  (struttura di contatto), ovvero curve integrali del campo di partenza e tali che:

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = p \end{cases} \text{ sollevamento di Legendre (non lui eh, qualcosa qui vicino)}$$

Definiamo con  $A' = \text{corteccia visiva primaria } (V_1)$ .

Stiamo studiando il modello di Petitot. Riprendendo il discorso fatto, definiamo la metrica di Carnot-Caratheodory come:

$$g_C(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_j) = \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2\}$$

$A'$  è un gruppo di Lie con le operazioni:

1.  $(x, y, p) \cdot (x', y', p') = (x + x', y + y', p + p')$
2.  $[(\xi, \eta, \pi), (\xi', \eta', \pi')] = (0, \xi' \pi - \xi \pi', 0)$

Tramite questa metrica definiamo la distanza:

$$d_C(P'_1, P'_2) = \inf \left\{ \int_I \|\dot{\Gamma}(s)\| ds \right\}$$

Estendiamo la nostra base ortonormale  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$  a una base  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$  con un opportuno  $\mathbf{t}_3$  tale che si mantenga l'ortonormalità della base. Inoltre  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$  è una metrica sub-Riemanniana.

Ci poniamo l'obiettivo di minimizzare:

$$\int_{P'_A}^{P'_B} ds \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dp^2$$

con norma del vettore tangente lungo  $\Gamma$  che è:

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \pi^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \dot{\eta}^2(x)}$$

Definiamo:

$$L(x, y, p, \dot{x}, \dot{y}, \dot{p}) = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \pi^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \dot{\eta}^2(x)}$$

e usiamo le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} L - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \right) L = 0 & \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial y} L = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p} L - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial}{\partial \pi} \right) L = 0 & \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial y} L = 0 \end{cases}$$

I due annullamenti sono perchè  $L$  non dipende da  $y$  e da  $p$ .

Poniamo  $\Sigma = \xi p - \eta$ , ma  $\xi = 1$  lungo  $\Gamma$  quindi  $\Sigma = p - \eta$ . Questo nuovo oggetto ci serve per imporre il vincolo del piano di contatto:

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) (L + \overbrace{\lambda(x)}^{\text{moltiplicatore di Lagrange}} \Sigma) = 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial p} - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial \pi} \right) (L + \lambda(x) \Sigma) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \eta} - \lambda(x) \right) = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial \eta} = \lambda(x) + A \quad A \in \mathbb{R} \\ \lambda(x) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \pi} \right) = 0 \longrightarrow \lambda(x) + A = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \pi} \right) + A \end{cases}$$

Ottenendo così:

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \lambda(x) + A = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \pi} \right)$$

Ovvero:

$$\frac{\dot{y}(x)}{\sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \ddot{y}^2(x)}} = A + \frac{d}{dx} \frac{\ddot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2(x) + \ddot{y}^2(x)}}$$

Svolgendo calcoli otteniamo:

$$\ddot{y}^2 = \frac{(1 + \dot{y}^2)^2 - (1 + \dot{y}^2)(A\dot{y} + B)^2}{(A\dot{y} + B)^2} \quad A, B \in \mathbb{R} \quad *$$

Le soluzioni di questa complessa espressione si ottengono da integrali ellittici.

Se  $y$  è pari,  $\gamma$  è simmetrica ( $\gamma(x) = \gamma(-x)$ ), avendo  $A = 0$  e  $K = \frac{1}{B}$ .

Sostituendo otteniamo:

$$\ddot{y}^2 = (1 + \dot{y}^2)^2 [k^2(1 + \dot{y}^2) - 1]$$

Concludendo:

$$x(y) = c \int_0^{\dot{y}} \frac{1}{\sqrt{(1 + t^2)(1 + \frac{k^2}{k^2 - 1} t^2)}} dt$$

