

Modelli Differenziali

Davide Peccioli

Anno accademico 2022-2023

Università degli studi di Torino

Indice

1	Ripasso E.D.O.	1
2	Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali	7
2.1	Il teorema	7
2.2	Equazione alle variazioni	12
2.3	Flusso associato ad una equazione differenziale	14
3	Equazioni autonome	17
3.1	Equazioni autonome in una dimensione	17
3.1.1	Equazione logistica	17
3.1.2	Diagramma di fase	18
3.2	Risultati e definizioni sui sistemi autonomi	19
3.3	Stabilità dei punti di equilibrio	26
3.4	Equazioni autonome in due dimensioni	27
4	Sistemi di E.D.O. lineari	39
4.1	Matrice diagonale	42
4.2	Matrice diagonalizzabile	45
4.3	Matrice esponenziale	45
4.4	Matrice con autovalori in \mathbb{C}	48
4.5	Matrice con autovalori regolari in \mathbb{R} o in \mathbb{C}	49
4.6	Matrice generica	51
4.7	Metodo di linearizzazione	55
5	Metodo diretto di Lyapunov per lo studio della stabilità degli equilibri	57
5.1	Applicazione del metodo di Lyapunov	60
5.2	Alcuni risultati teorici	66

6	Campi di vettori e forme differenziali su spazi affini	69
6.1	Simboli di Christoffel	77
6.2	Forme differenziali	79
7	Curve negli spazi affini, rappresentazione in coordinate non affini, e sistemi dinamici	83
7.1	Risoluzione sistemi dinamici	86
7.2	Velocità e accelerazione in coordinate non affini	88
7.3	Moti geodetici su una superficie	91
8	Il modello della visione	93
8.1	Introduzione	93
8.2	Il modello	93

Capitolo 1

Ripasso E.D.O.

Problema di Cauchy. (1.1) Data una funzione a valori in \mathbb{R}^n , $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, con

- $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o, più precisamente
- $(t, \mathbf{x}) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, Ω aperto

ci si chiede sotto quali condizioni su \mathbf{f} il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione o ammette esattamente una soluzione, al variare della condizione iniziale $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$.

Teorema I.

Teorema di Peano

Se \mathbf{f} è continua su Ω , allora per ogni punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ esiste un intorno di t_0 nel quale è definita almeno una soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Pennello di Peano. (1.2) Se si dimostra che il problema di Cauchy ammette due soluzioni distinte, allora in realtà ne ha infinite.

Esempio. (1.3) Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt[3]{u(t)} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Questo problema ammette certamente la soluzione $u \equiv 0$, ma anche le soluzioni

$$u_0^\pm = \begin{cases} \pm \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Teorema II.

Teorema di Cauchy-Lipschitz

Se f

- è continua,
- è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e uniformemente nella prima^a

allora per ogni punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$ esiste un intorno di t_0 , $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ nel quale è definita un'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

^a Ovvero

$$\forall K \subset \Omega, \quad \exists L > 0 : \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall (t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in K.$$

Dimostrazione di II. La dimostrazione si articola nei seguenti passaggi:

- si considera l'equazione di Volterra

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) \, ds$$

e si mostra che quest'ultima ammette unica soluzione continua in un intorno di t_0 ;

- esistenza e unicità dell'equazione di Volterra si dimostrano applicando il Teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli;
- la seguente successione

$$\mathbf{u}_0(t) \equiv \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{u}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_{n-1}(s)) \, ds, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

risulta convergere uniformemente alla soluzione dell'equazione di Volterra e dunque all'unica soluzione del Problema di Cauchy.

Osservazione. (1.4) L'intervallo di definizione della soluzione del problema di Cauchy è certamente più ampio di $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$: possiamo infatti applicare lo stesso teorema di esistenza ed unicità locale ai problemi di Cauchy con condizioni iniziali

$$(t_0 \pm \delta, \mathbf{u}(t_0 \pm \delta)) \in \Omega$$

ed iterare questo procedimento.

In generale, quindi, esiste un intervallo (T_{\min}, T_{\max}) per la soluzione $\mathbf{u}(t; t_0, \mathbf{u}_0)$, che per costruzione non può che essere aperto e connesso.

Teorema III.

Teorema di Esistenza Globale

Sia f tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte.

Sia inoltre $S = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ una striscia tale che $\overline{S} \subseteq \Omega$. Se esiste una coppia di costanti positive k_1, k_2 tali per cui

$$\|f(t, x)\| \leq k_1 + k_2 \|x\|, \quad \forall (t, x) \in \overline{S}$$

allora, per ogni $(t_0, x_0) \in S$, l'intervallo massimale della soluzione $u_{(t_0, x_0)}(t)$ contiene l'intervallo $[a, b]$.

(1.5) Questo teorema è ciò che garantisce l'esistenza globale per i sistemi lineari del tipo

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t)$$

con $A(t)$ matrice $n \times n$

Teorema IV.

Sia f tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte. Sia $K \subset \subset \Omega^a$, $(t_0, x_0) \in K$ e (T_{\min}, T_{\max}) l'intervallo massimale di definizione di $u_{(t_0, x_0)}(t)$.

Allora il grafico di u esce definitivamente da K quando $t \rightarrow T_{\min}^+$ o $t \rightarrow T_{\max}^-$

^a Ovvero K contenuto in Ω e K compatto.

Corollario - Esplosione in tempo finito. (1.6) Sia f tale che soddisfi le condizioni del teorema di Cauchy-Lipschitz, e sia (T_{\min}, T_{\max}) l'intervallo massimale di $u_{(t_0, x_0)}(t)$.

Se $T_{\max} < +\infty$ allora

$$\lim_{t \rightarrow T_{\max}^-} \|u_{(t_0, x_0)}(t)\| = +\infty$$

se tale limite esiste. Analogamente se $T_{\min} > -\infty$.

Attenzione. (1.7) Per i prossimi risultati si consideri $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Corollario - Limitatezza a priori. (1.8) Sia \mathbf{f} tale che le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz siano soddisfatte. Sia (T_{\min}, T_{\max}) l'intervallo massimale di $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_0)}(t)$.

Se esiste $C > 0$ tale per cui

$$\left\| \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_0)}(t) \right\| \leq C, \quad \forall t \in [t_0, T_{\max})$$

allora $T_{\max} = +\infty$.

Capitolo 2

Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali

2.1 Il teorema

Domanda. (2.1) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$$

con $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Se prendiamo il sistema di Cauchy sostituendo a \mathbf{x}_0 una \mathbf{x} vicina ad \mathbf{x}_0 , cosa succede alla soluzione?

Esempio. (2.2) Preso il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{u} \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

si ha che la soluzione $\mathbf{u}_{(0, \mathbf{x}_0)}$ è, al variare del dato iniziale \mathbf{x}_0 :

- $\mathbf{u}_{(0, \mathbf{x}_0)}(t) \equiv 0$, se $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$
- $\mathbf{u}_{(0, \mathbf{x}_0)}(t) = \mathbf{x}_0 e^t$, $t \in \mathbb{R}$, se $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$

\Rightarrow non è dunque ragionevole pensare che se $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ la soluzione $\mathbf{u}_{(t,\mathbf{x})}$ si mantenga sempre vicina a $\mathbf{u}_{(t,\mathbf{x}_0)}$.

Teorema V.

Teorema di dipendenza continua dai dati iniziali

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$$

con $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Sia I_{\max} l'intervallo massimale di $\mathbf{u}_{(t,\mathbf{x}_0)}$ e $[a, b] \subset I_{\max}$. Allora:

1. esiste un intorno di \mathbf{x}_0 , N , tale che per ogni $\mathbf{x} \in N$ la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x} \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione il cui intervallo massimale contiene $[a, b]$;

2. per ogni $\bar{\mathbf{x}}_0 \in N$ e per ogni $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$ con $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_0$ in \mathbb{R}^n la soluzione del corrispondente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_k \end{cases}$$

converge uniformemente su $[a, b]$ alla soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0. \end{cases}$$

Osservazione. (2.3) La richiesta $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{\mathbf{x}}_0$ implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_k)}(t_0) = \mathbf{u}_{(t_0, \bar{\mathbf{x}}_0)}(t_0) = \bar{\mathbf{x}}_0$$

ovvero la convergenza puntuale della successione $\{\mathbf{u}_{(t, \mathbf{x}_k)}\}_k$ in un punto;

\implies la successione $\{\mathbf{u}_{(t, \mathbf{x}_k)}\}_k$ converge uniformemente su $[a, b]$.

Teorema VI.

Teorema di Kamke

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$$

con $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile e uniformemente nella prima.

Sia I_{\max} l'intervallo massimale di $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}_0)$. Fissiamo $[a, b] \subset I_{\max}$.

Prendiamo

- $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $t_k \rightarrow t_0$;
- $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$;
- $\{\mathbf{f}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successioni di dominio Ω che soddisfano il teorema di esistenza e unicit  locale,

$$\mathbf{f}_k \rightarrow \mathbf{f} \quad \text{uniformemente sui compatti di } \Omega.$$

Allora definitivamente per ogni k il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}_k(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}'(t_k) = \mathbf{x}_k \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione definita su $[a, b]$ e convergente uniformemente su $[a, b]$ alla soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Lemma di Gronwall. (2.4) Sia $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e supponiamo che $\exists A \in \mathbb{R}, \exists B \geq 0$ tali che

$$\phi(t) \leq A + B \int_a^t \phi(s) ds, \quad \forall t \in [a, b]$$

Allora

$$\phi(t) \leq A e^{B(t-a)}, \quad \forall t \in [a, b]$$

Dimostrazione di (2.4) Sia $w(t) := A + B \int_a^t \phi(s) ds$. Per ipotesi

- $\phi(t) \leq w(t)$ su $[a, b]$;
- w è derivabile (perché ϕ è continua) e

$$w'(t) = B \phi(t)$$

Prendiamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [w(t) e^{-B(t-a)}] &= [w'(t) - B w(t)] e^{-B(t-a)} \\ &= B (\phi(t) - w(t)) e^{-B(t-a)} \geq 0 \end{aligned}$$

\Rightarrow la funzione $w(t) e^{-B(t-a)}$ è decrescente su $[a, b]$

\Rightarrow è massima in $t = a$, ovvero

$$A = w(a) e^0 \geq w(t) e^{-B(t-a)} \geq \phi(t) e^{-B(t-a)}$$

$\Rightarrow \phi(t) \leq A e^{B(t-a)}$ ■

Dimostrazione di V.

1. Dimostriamo per assurdo. Supponiamo che $\forall \varepsilon > 0, \exists \mathbf{x}_\varepsilon \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ tale per cui la soluzione massimale $\mathbf{u}_\varepsilon(t) := \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_\varepsilon)}(t)$ di

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}_\varepsilon \end{cases}$$

non è definita su tutto $[a, b]$.

Per semplicità prendo $t_0 = a$ e “lavoro a destra”.

Prendiamo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo e

$$k_\delta = \{(t, \mathbf{x}) \in \Omega : t \in [a, b], \|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{x}\| < \delta\}$$

Sia $[a, b_\varepsilon)$ con $b_\varepsilon < b$ l'intervallo massimale dietro di \mathbf{u}_ε .

Necessariamente \mathbf{u}_ε deve uscire dal compatto k_δ prima di b_ε :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_\varepsilon \in (a, b_\varepsilon) : \begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(t_\varepsilon) - \mathbf{u}_0(t_\varepsilon)\| = \delta \\ &\|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}_0(t)\| < \delta \quad \forall t \in [a, t_\varepsilon] \end{aligned}$$

Sfruttiamo il fatto che \mathbf{u}_0 e \mathbf{u}_ε siano le soluzioni di problemi di Cauchy e usiamo le loro equazioni di Volterra.

$$\mathbf{u}_\varepsilon(t) = \mathbf{u}_\varepsilon(a) + \int_a^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_\varepsilon(s)) \, ds$$

Definiamo ora, per ogni $t \in [a, t_\varepsilon]$, la funzione

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \|\mathbf{u}_\varepsilon(t) - \mathbf{u}_0(t)\| \\ &= \left\| \mathbf{u}_\varepsilon(a) + \int_a^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_\varepsilon(s)) \, ds - \mathbf{u}_0 - \int_a^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_0(s)) \, ds \right\| \\ &\leq \|\mathbf{u}_\varepsilon(a) - \mathbf{u}_0(a)\| + \int_a^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{u}_\varepsilon(s)) - \mathbf{f}(s, \mathbf{u}_0(s))\| \, ds \\ &\stackrel{\dagger}{\leq} \underbrace{\|\mathbf{x}_\varepsilon - \mathbf{x}_0\|}_{A_\varepsilon} + L \int_0^t \|\mathbf{u}_\varepsilon(s) - \mathbf{u}_0(s)\| \, ds. \end{aligned}$$

Dunque, per il lemma di Gronwall, $\phi(t) \leq A_\varepsilon e^{L(t-a)}$. Inoltre, avendo $\phi(t_\varepsilon) = \delta$, si ha che

$$0 < \delta \leq A_\varepsilon e^{L(t_\varepsilon - a)} \longrightarrow 0$$

che è assurdo.

[†] dove L è la costante di lipschitzianità di f su k_δ

2. Consideriamo $\bar{x}_0 \in N$ e $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq N$ tale che $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{x}_0$. Definiamo inoltre $\bar{\mathbf{u}}(t) := \mathbf{u}_{(t_0, \bar{x}_0)}(t)$ e $\mathbf{u}_k(t) := \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_k)}(t)$.

- Sia \bar{K}_δ il δ -intorno compatto di $\bar{\mathbf{u}}$;
- per k sufficientemente grandi, il grafico di \mathbf{u}_k rimane in \bar{K}_δ (ragionando come il punto precedente);
- uso il lemma di Gronwall sulla

$$\phi(t) := \|\mathbf{u}_k(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\|$$

e ottengo, sempre utilizzando l'equazione di Volterra

$$\|\mathbf{u}_k(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| \leq \underbrace{\|\mathbf{x}_k - \bar{x}_0\|}_{\rightarrow 0} e^{L(b-a)}$$

dove L è la costante di Lipschitz di \mathbf{f} su \bar{K}_δ . Così facendo:

$$\|\mathbf{u}_k - \bar{\mathbf{u}}\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} \|\mathbf{u}_k(t) - \bar{\mathbf{u}}(t)\| \leq \|\mathbf{x}_k - \bar{x}_0\| e^{L(b-a)} \rightarrow 0$$

■

Osservazione. (2.5) Questo teorema si chiama di “dipendenza continua” perché la funzione:

$$\begin{aligned} N &\longrightarrow \mathcal{C}([a, b]; \|\cdot\|_\infty) \\ \mathbf{x} &\longmapsto \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t) \end{aligned}$$

è continua! Infatti, per $\mathbf{x}_k \rightarrow \bar{x}_0 \in N$ le soluzioni corrispondenti convergono uniformemente.

2.2 Equazione alle variazioni

Domanda. (2.6) Ci chiediamo ora se la funzione $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t)$ ha regolarità maggiore rispetto a \mathbf{x} ? Se sì, come si comporta la funzione $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{u}_{(t, \mathbf{x})}(t)$?

Equazione alle variazioni. (2.7)

$$\begin{cases} u'(t) = t u^2 \\ u(0) = x \end{cases} \quad u_{(0, x)}(t) = \frac{2x}{2 - t^2 x}, \quad t \in \left(-\sqrt{\frac{2}{x}}, \sqrt{\frac{2}{x}}\right)$$

$u_{(0,x)}(t)$ la interpretiamo come funzione di due variabili t e x .

$$\partial_t u_{(0,x)}(t) = \frac{\partial}{\partial t} u_{(0,x)}(t) = \cdots = t u_{(0,x)}^2(t)$$

$$\begin{aligned} \partial_x u_{(0,x)}(t) &= \frac{\partial}{\partial x} u_{(0,x)}(t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2x}{2 - t^2 x} \right) \\ &= \frac{4 - 2t^2 x - 2x(-t^2)}{(2 - t^2 x)^2} = \frac{4}{(2 - t^2 x)^2} \end{aligned}$$

Notando che la soluzione è C^2 possiamo permetterci di calcolare le derivate parziali seconde:

$$\partial_t \partial_x u_{(0,x)}(t) = \partial_x \partial_t u_{(0,x)}(t) = t \cdot 2u_{(0,x)}(t) \cdot \partial_x u_{(0,x)}(t)$$

Valutiamo tutto in $x = x_0$, ponendo $v(t) := \partial_x u_{(0,x_0)}(t)$. Si ha che

$$\frac{d}{dt} v(t) = 2t u_{(0,x_0)}(t) v(t)$$

ovvero

$$v'(t) = g(t) v(t), \quad g(t) = 2t u_{(0,x_0)}(t)$$

La funzione $v(t)$ risolve un'equazione lineare che si chiama equazione alle variazioni dove

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial u} [f(t, u)]_{u=u_{(0,x_0)}(t)}.$$

Generalizzazione. (2.8)

- Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(\Omega)$.
- Sia $(t_0, x_0) \in \Omega$ e $u_{(t_0, x_0)}(t)$ soluzione di

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e sia $[a, b] \subseteq I_{\max}$, dove I_{\max} è l'intervallo massimale di $u_{(t_0, x_0)}(t)$

- Se N è intorno di x_0 : $\forall x \in N$, l'unica soluzione $u_{(t_0, x)}(t)$ di

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = x \end{cases}$$

è definita su tutto $[a, b]$

Sono nella situazione in cui vale:

$$\partial_t u_{(t_0, x)}(t) = f(t, u_{(t_0, x)}(t)) \quad \text{perché è soluzione} \quad (2.1)$$

$$u_{(t_0, x)}(t_0) = x \quad \text{è il dato iniziale} \quad (2.2)$$

(2.1): Interpretando la soluzione come funzione anche del dato iniziale x , supponiamo che $u_{(t_0, x)}(t)$ sia derivabile in x (e questa cosa non è stata dimostrata).

Allora il secondo membro di (2.1) è derivabile in x , e dunque anche il primo. Derivando a sinistra e a destra in x otteniamo:

$$\partial_t \partial_x u_{(t_0, x)}(t) = \partial_x f(t, u_{(t_0, x)}(t)) = \partial_u f(t, u_{(t_0, x)}(t)) \cdot \partial_x u_{(t_0, x)}(t) \quad (2.3)$$

(2.2): Derivando ambo i membri rispetto a x , ottengo

$$\partial_x u_{(t_0, x)}(t_0) = 1 \quad (2.4)$$

Sia $v(t) = \partial_x u_{(t_0, x)}(t)$, allora da (2.3)

$$v'(t) = \frac{d}{dt} v(t) = \partial_u f(t, u_{(t_0, x)}(t)) \cdot \partial_x u_{(t_0, x)}(t) = \underbrace{\partial_u f(t, u_{(t_0, x)}(t))}_{g(t) :=} \cdot v(t),$$

mentre da (2.4) ottengo $v(t_0) = 1$.

Abbiamo trovato che v risolve il problema di Cauchy lineare:

$$\begin{cases} v'(t) = g(t) v(t) \\ v(t_0) = 1 \end{cases}$$

2.3 Flusso associato ad una equazione differenziale

Definizione del flusso. (2.9) Sia $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $C^1(\Omega)$.

Sia $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \Omega$, e sia

$$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : (t_0, \mathbf{x}) \in \Omega\}$$

e sia $I(\mathbf{x})$ l'intervallo massimale della soluzione $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x} \end{cases}$$

Considero ora l'insieme

$$E = \{(t, \mathbf{x}) \in \Omega : t \in I(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_0\}.$$

La funzione Ψ definita sotto si chiama flusso, e indica dove si trova al tempo t la soluzione con dato iniziale $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} \Psi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x})}(t) \end{aligned} \quad \Psi_{\mathbf{x}}(t) := \Psi(t, \mathbf{x})$$

Teorema VII.

Se $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, allora la funzione Ψ è di classe $C^1(E)$.

Sistemi autonomi. (2.10) Cosa succede nei sistemi autonomi? Considero

$$\begin{cases} \mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{x} \in \Omega' \end{cases}$$

con $\mathbf{f} : \Omega = \mathbb{R} \times \Omega' \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$:

- Ω è una “striscia” di \mathbb{R}^{n+1} ,
- mentre Ω' è il dominio di \mathbf{f} .

$\implies \Omega_0$ non dipende da t_0

\implies fissiamo $t_0 = 0$.

Se $I(\mathbf{x})$ è l'intervallo massimale per la soluzione con $\mathbf{u}_{(0, \mathbf{x})}$ ed E è l'insieme:

$$E = \{(t, \mathbf{x}) : t \in I(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega'\}$$

allora definisco la funzione

$$\begin{aligned} \Psi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}) &\longmapsto \mathbf{u}_{(0, \mathbf{x})}(t) \end{aligned}$$

e $\Psi_{\mathbf{x}}(t) := \Psi(t, \mathbf{x})$ è soluzione con $\mathbf{u}(0) = \mathbf{x}$.

Esempio. (2.11)

$$\begin{cases} u' = u(1-x) \\ u(0) = x \end{cases}$$

Si ha che

- se $x > 1$: $I(x) = (\alpha_x, +\infty)$ con $\alpha_x > -\infty$;
- se $x \in [0, 1 :]$ $I(x) = \mathbb{R}$;
- se $x < 0$: $I(x) = (-\infty, \omega_x)$ con $\omega_x < +\infty$

Capitolo 3

Equazioni autonome

3.1 Equazioni autonome in una dimensione

3.1.1 Equazione logistica

Studio delle soluzioni. (3.1) Sia $p'(t) = (k - hp(t)) \cdot p(t)$, dove $p(t)$ è il numero di individui in una popolazione al tempo t , con $k, h > 0$ e $p(t) \geq 0$.

Supponiamo che $p(0) = p_0 \geq 0$. Ci chiediamo l'evoluzione di $p(t)$ per $t > 0$.

1. Prima di tutto cerchiamo le soluzioni costanti, ovvero quelle tali che $f(p) = 0$. Queste sono due soluzioni costanti per ogni tempo t : $p(t) \equiv 0$ e $p(t) \equiv (k/h)$.
2. Studiamo adesso, invece, la monotonia delle soluzioni:

$$p'(t) \geq 0 \iff (k - hp(t)) \cdot \underbrace{p(t)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Dunque $p'(t) \geq 0 \iff p(t) \leq k/h$.

Concludiamo così che: se $p(t) \in (0, k/h)$ la soluzione cresce, mentre se $p(t) \in (k/h, +\infty)$ la soluzione decresce.

Per stabilire il comportamento finale della soluzione dobbiamo analizzare i possibili dati iniziali p_0 del sistema:

- $p_0 \in (0, k/h)$: la soluzione è crescente, e si troverà sempre nella striscia $[0, +\infty) \times (0, k/h)$ (per \exists e ! locale)

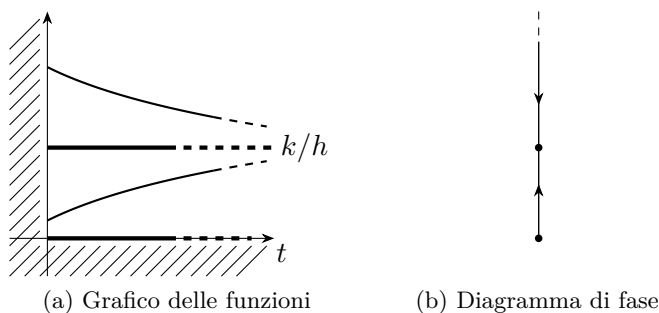


Figura 3.1: Equazione Logistica (**da finire**)

\implies la soluzione si mantiene limitata, e in particolare

$$\|p\| \leq k/h.$$

È soddisfatto il corollario (1.8), e quindi $T_{\max} = +\infty$

- $p_0 > k/h$: la soluzione è sempre monotona decrescente, e si troverà sempre nel semispazio $p > k/h$. Anche in questo caso si applica il corollario (1.8) $\implies T_{\max} = +\infty$.

Osservo infine che il teorema dell'asintoto ci garantisce che tutte le soluzioni non costanti abbiano come limite a $+\infty$ la soluzione costante k/h .

Diagramma di fase. (3.2) Poiché $p(t) \in \mathbb{R}$, si dice che \mathbb{R} è lo spazio delle fasi o degli stati.

Osservando la figura 3.1, il grafico (b) prende il nome di diagramma di fase.

Osservazione. (3.3) Tra due zeri consecutivi di f , la monotonia della soluzione (nel caso autonomo) non cambia.

3.1.2 Diagramma di fase

Definizione. (3.4) Se u è una soluzione massimale[†] di $y' = f(y)$, l'insieme

$$\gamma_u = \{u(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\}$$

è detta orbita di u .

[†] Ovvero il suo dominio di definizione è massimale.

Nota. (3.5) Le soluzioni stazionarie di $y' = f(y)$ hanno come orbita un singolo punto.

Definizione. (3.6) *L'insieme delle orbite con il loro verso di percorrenza costituisce il ritratto di fase di $y' = f(y)$.*

Esempio. (3.7) L'equazione logistica, presa come equazione differenziale in s , ha 5 orbite: due semirette, due punti e un segmento.

(3.8) Dimosteremo in \mathbb{R}^n che per ogni punto dello spazio delle fasi passa una ed una sola orbita. Nel caso 1-dimensionale, si può notare che se $u_{(0,x_0)}(t)$ è soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

allora la funzione $w(t) := u_{(0,x_0)}(t + \tau)$ risolve

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = u_{(0,x_0)}(\tau) \end{cases}$$

\Rightarrow la soluzione di

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

è $u_{(0,x_0)}(t - \tau)$

Esercizio. (3.9) Fare il diagramma di fase dell'equazione differenziale

$$y' = y(2 - y) e^{\sin y}$$

3.2 Risultati e definizioni sui sistemi autonomi

Definizione. (3.10) Si dice sistema autonomo un'equazione differenziale della forma

$$x' = f(x), \quad f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ipotesi. (3.11) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \Omega \end{cases}$$

$\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ localmente lipschitziana[†], vale il teorema di esistenza e unicità locale della soluzione, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$.

Definizione. (3.12) Ω si dice spazio delle fasi o degli stati.

Definizione. (3.13) Se \mathbf{u} è una soluzione massimale di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, l'insieme

$$\gamma := \{u(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\}$$

è detta orbita per $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e la soluzione \mathbf{u} è una parametrizzazione di γ .

Osservazione. (3.14)

$$\begin{cases} (T_{\min}, T_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \mapsto \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

è una curva in \mathbb{R}^n con sostegno γ .

Definizione. (3.15) Lo spazio delle fasi in cui vengono disegnate le orbite con il loro verso di percorrenza (indotto dalle soluzioni) si dice ritratto di fase.

Definizione. (3.16) I punti $\mathbf{p} \in \Omega$ tali che $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ si chiamano equilibri o punti singolari

Esempio. (3.17)

$$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = x^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} \mathbf{f}(x, y) &= (-y^2, x^2) \\ \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Chi sono gli equilibri? Cerco $(x_0, y_0) : \mathbf{f}(x_0, y_0) = \mathbf{0}$

$$(-y^2, x^2) = \mathbf{0} \iff (x, y) = \mathbf{0}$$

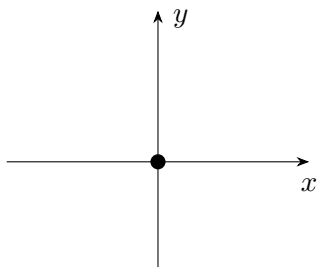


Figura 3.2: Punti di equilibrio per l'esempio (3.17)

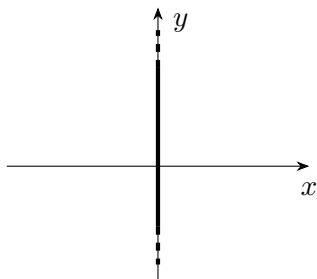


Figura 3.3: Punti di equilibrio per l'esempio (3.18)

Dunque l'unico punto di equilibrio è l'origine, come mostrato in figura ??.

Esempio. (3.18)

$$\begin{cases} x' = -y^2 x \\ y' = x^2 \end{cases} \quad \mathbf{f}(x, y) = (-y^2 x, x^2)$$

Gli equilibri sono tutti punti nella forma $(0, y_0)$, come mostrato in figura ??.

Teorema VIII.

Sotto le ipotesi di (3.11), per ogni punto dello spazio delle fasi, Ω , passa una e una sola orbita.

[†] Si ricordi che: $C^1 \Rightarrow$ localmente lipschitziana

Dimostrazione di VIII. Sia $\mathbf{p} \in \Omega$, e consideriamo il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p} \end{cases} \quad (PC_{\mathbf{p}})$$

- (\exists) Il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione \mathbf{u} (per il teorema di Cauchy-Lipschitz) e l'orbita associata a \mathbf{u} passa per \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} \in \gamma = \{\mathbf{u}(t) : t \in (T_{\min}, T_{\max})\}$$

- (!) Intuitivamente, l'unicità è giustificata dal fatto che il sistema è autonomo, e quindi dal fatto che le traslate in t delle soluzioni sono ancora soluzioni.

Sappiamo che $\mathbf{p} \in \gamma$. Supponiamo che esista un'altra orbita $\tilde{\gamma}$ tale che $\mathbf{p} \in \tilde{\gamma}$. Allora $\tilde{\gamma}$ è orbita di $\tilde{\mathbf{u}}$, soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(\tilde{t}_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

Siano I e \tilde{I} gli intervalli massimali, rispettivamente, di \mathbf{u} e $\tilde{\mathbf{u}}$. Siano

$$\begin{aligned} T &:= \tilde{t}_0 - t_0 \\ \mathbf{v}(t) &:= \tilde{\mathbf{u}}(t + \tilde{t}_0 - t_0) = \tilde{\mathbf{u}}(t + T). \end{aligned}$$

Si ha che

- l'orbita di \mathbf{v} è $\tilde{\gamma}$;
- \mathbf{v} è massimale, in quanto lo è $\tilde{\mathbf{u}}$;
- \mathbf{v} soddisfa

$$\begin{cases} \mathbf{v}'(t) = \tilde{\mathbf{u}}'(t + T) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(t + T)) = \mathbf{f}(\mathbf{v}(t)) \\ \mathbf{v}(t_0) = \tilde{\mathbf{u}}(t_0 + T) = \tilde{\mathbf{u}}(\tilde{t}_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

e quindi \mathbf{v} è soluzione massimale di

$$\begin{cases} \mathbf{v}' = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \\ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

\Rightarrow \mathbf{u} e \mathbf{v} sono la stessa soluzione (massimale) di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

\Rightarrow I e \tilde{I} sono uno traslato dell'altro, e γ e $\tilde{\gamma}$ coincidono. ■

Osservazione. (3.19) La mappa:

$$\begin{array}{ccc} \text{soluzione di} & & \\ \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) & \longmapsto & \text{orbita} \end{array}$$

è ben definita, ma non è iniettiva (è suriettiva!).

Infatti, se γ è orbita

$$\gamma = \{u(t) : t \in (a, b)\} = \{u_\tau(t) = u(t + \tau) : t \in (a - \tau, b - \tau)\}.$$

Dunque ogni orbita di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ha infinite parametrizzazioni.

Teorema IX.

Sotto le ipotesi di (3.11), sia γ^* un'orbita di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Allora:

$$\gamma^* = \{\mathbf{p}\} \iff \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}.$$

Dimostrazione di IX.

(\Leftarrow) Se $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{p} \forall t \in \mathbb{R}$ è soluzione, e

$$\gamma^* = \{\mathbf{u}(t) : t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{p}\}.$$

(\Rightarrow) Se $\gamma^* = \{\mathbf{p}\}$ allora esiste una soluzione \mathbf{u} di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ tale che $\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}$ per ogni $t \in (T_{\min}, T_{\max})$. Allora $\mathbf{u}(t)$ è costante, e dunque

$$\mathbf{0} = \mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{p}). \quad \blacksquare$$

[†] $\forall \tau \in \mathbb{R}$

Definizione. (3.20) Una soluzione \mathbf{u} di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se

- \mathbf{u} è definita su \mathbb{R} ;
- $\mathbf{u}(t + T) = \mathbf{u}(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$
- $T = \inf \{ \tau > 0 : \mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t) \forall t \in \mathbb{R} \}$

Definizione. (3.21) L'orbita corrispondente ad una soluzione periodica si chiama orbita periodica e i suoi punti si chiamano punti periodici.

Teorema X.

Sotto le ipotesi di (3.11), se \mathbf{u} è una soluzione non costante di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con intervallo massimale J e

$$\exists t_1, t_2 \in J : t_1 \neq t_2, \quad \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_2)$$

allora \mathbf{u} è una soluzione periodica.

Osservazione. (3.22) Le orbite periodiche si chiamano anche orbite chiuse. Infatti, il teorema X ci dice che se un'orbita si autointerseca, allora è periodica.

Corollario. (3.23) Le orbite di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ possono essere:

1. punti di equilibrio, $\{\mathbf{p}\}$;
2. periodiche/chiuse;
3. orbite senza autointersezioni e contenenti più di un solo punto.

Caso particolare. (3.24) Per $n = 1$ non esistono orbite periodiche non costanti, perché dovrebbero cambiare la monotonia e non è possibile perché $x' = f(x)$, e la cambierebbero su punti di equilibrio.

Dimostrazione di X. È analoga al teorema VIII.

Sia $\mathbf{p} := \mathbf{u}(t_1) = \mathbf{u}(t_2)$. Allora \mathbf{u} risolve due problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{p} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{p} \end{cases}$$

entrambi risolti su J .

Gli intervalli massimali di questi due problemi di Cauchy devono essere uno traslato dell'altro, dunque $J = \mathbb{R}$.

Inoltre, supponendo $t_2 > t_1$, si ha che

$$\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}(t + (t_2 - t_1))$$

risolvono entrambe

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{p} \end{cases}$$

e per esistenza e unicità della soluzione si ha che

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}, T = t_2 - t_1 \quad \blacksquare$$

Definizione. (3.25) Un'orbita si dice singolare se si riduce ad un punto solo. Altrimenti si dice regolare.

Teorema XI.

Sia γ un'orbita non singolare di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana.

Allora γ è una curva orientata in Ω tangente in ogni punto al campo \mathbf{f} .

Dimostrazione di XI. Sia \mathbf{u} soluzione di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ tale che $\gamma = \gamma_{\mathbf{u}}$. Sia $\mathbf{p}_0 \in \gamma$ e t_0 tale che $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{p}_0$.

γ non è singolare, quindi $\mathbf{f}(\mathbf{p}_0) \neq \mathbf{0}$ (altrimenti $\gamma = \{\mathbf{p}_0\}$ per il teorema precedente.)

La funzione $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ parametrizza γ . Quindi il vettore:

$$\mathbf{v} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t_0 + h) - \mathbf{u}(t_0)}{h}$$

è il vettore tangente a γ nel punto \mathbf{p}_0 , ammesso che esista.

La funzione \mathbf{u} è di classe C^1 , quindi il limite esiste ed è $\mathbf{u}'(t_0)$. Essendo

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$$

si ha che

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}'(t_0) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t_0)) = \mathbf{f}(\mathbf{p}_0) \quad \blacksquare$$

3.3 Stabilità dei punti di equilibrio

Obiettivo. (3.26) Vogliamo classificare i punti di equilibrio in base a come le altre soluzioni si comportano in loro prossimità.

Definizione. (3.27) Sotto le ipotesi (3.11), sia \mathbf{p} tale che $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. \mathbf{p} si dice stabile se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \hat{\mathbf{x}} \in \Omega, \|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{p}\| < \delta$

\implies la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \hat{\mathbf{x}} \end{cases}$$

è definita su $(t_0, +\infty)$ e dista da \mathbf{p} al più ε .

Definizione. (3.28) Sotto le ipotesi (3.11), sia \mathbf{p} tale che $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. \mathbf{p} si dice instabile se non è stabile.

Intuitivamente, se \mathbf{p} è un equilibrio, pur di partire sufficientemente vicino, riusciamo a far rimanere quanto vogliamo la soluzione *vicina* a \mathbf{p} .

Al contrario, invece, essere instabile significa che $\exists \varepsilon$ e una successione $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega, \mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{p}$ tale che $\forall n$

$$\exists t_n : \mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_n)}(t_n) > \varepsilon$$

dove $\mathbf{u}_{(t_0, \mathbf{x}_n)}$ è soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_n \end{cases}$$

Definizione. (3.29) Sotto le ipotesi (3.11), sia \mathbf{p} tale che $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$. \mathbf{p} si dice asintoticamente stabile se:

- è stabile;
- $\exists \delta > 0$ tale che $\forall \bar{\mathbf{x}} \in B_\delta(\mathbf{p}), \bar{\mathbf{x}} \in \Omega$ si ha che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{u}_{(t_0, \bar{\mathbf{x}})}(t) = \mathbf{p}$$

3.4 Equazioni autonome in due dimensioni

Orbite non singolari. (3.30) Consideriamo l'equazione

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases}$$

Supponiamo $\mathbf{p} : \mathbf{f}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Com'è fatta l'orbita per \mathbf{p} ?

Se $\mathbf{f}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, allora almeno una delle sue componenti è non nulla.

Considerata $f_1(\mathbf{p}) \neq 0 \rightsquigarrow$ il vettore tangente all'orbita per \mathbf{p} non è verticale.

Sia allora il sistema:

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \\ (x(0), y(0)) = \mathbf{p} \end{cases}$$

e \mathbf{u} una soluzione massimale, tale che $\mathbf{u}(0) = \mathbf{p}$.

Sapendo che $\mathbf{u}'(0)$ non è un vettore verticale possiamo esprimere localmente la seconda componente dell'orbita per \mathbf{p} in funzione della prima. Ovvero:

$$\exists! \begin{cases} \varphi : I_{p_1} \longrightarrow I_{p_2} \\ x \longmapsto \varphi(x) \end{cases}$$

e questa funzione descrive l'orbita

$$\begin{cases} x = u_1(t) \\ y = u_2(t) = \varphi(x) = \varphi(u_1(t)) \end{cases}$$

Si ha che

$$f_2(\mathbf{u}(t)) = u_2'(t) = \varphi'(u_1(t)) \cdot u_1'(t)$$

da cui $f_2(x, y) = \varphi'(x) f_1(x, y)$

$$\varphi'(x) = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)} = \frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))}.$$

Stiamo dicendo che se $f_1(\mathbf{p}) \neq 0$, l'orbita che passa per \mathbf{p} è rappresentabile mediante una funzione $y = \varphi(x)$ che soddisfa

$$\begin{cases} \varphi'(x) = \frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases}$$

ovvero un problema di Cauchy monodimensionale non autonomo.

Teorema XII.

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \\ (x(0), y(0)) = \mathbf{p} \end{cases} \quad (\text{PC})$$

con $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ di classe C^1 . Supponiamo che $f_1(\mathbf{p}) \neq 0$ (campo non verticale in \mathbf{p}). Allora per degli opportuni intornoi I_{p_1}, I_{p_2} :

$$\begin{array}{l} \varphi : I_{p_1} \longrightarrow I_{p_2} \\ \text{è una rappresentazione} \\ \text{locale dell'orbita della} \\ \text{soluzione di (PC)} \end{array} \iff \varphi \text{ è soluzione di } \begin{cases} \varphi'(x) = \frac{f_2(x, \varphi(x))}{f_1(x, \varphi(x))} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases} \quad (\text{PC})_\varphi$$

Dimostrazione di XII.

(\implies) Vedi: (3.30)

(\impliedby) Hp: φ è soluzione di $(\text{PC})_\varphi$. Per ipotesi sappiamo che $f_1(x, \varphi(x)) \neq 0$ in un opportuno intorno di p_1 , I_{p_1} (poiché f è C^1).

Allora, $\forall x \in I_{p_1}$ sia

$$\omega(x) := \int_{p_1}^x \frac{d\xi}{f_1(\xi, \varphi(\xi))}.$$

Poiché f_1 è continua e non nulla

$\implies \omega$ è derivabile e

$$\begin{cases} \omega'(x) = \frac{1}{f_1(x, \varphi(x))} \\ \omega(p_1) = 0 \end{cases}$$

Poiché ω' ha segno costante

$\implies \omega$ è strettamente monotona

$\implies \omega$ è invertibile.

$$\begin{aligned} \omega : I_{p_1} \rightarrow I \ni 0 &\rightsquigarrow \omega^{-1} = v : I \longrightarrow I_{p_1} \\ v(0) &= p_1 \\ v'(t) &= \frac{1}{\omega'(v(t))} \end{aligned}$$

$$\implies v'(t) = f_1(v(t), \varphi(v(t))).$$

Definendo

$$\mathbf{u}(t) := \begin{pmatrix} v(t) \\ \varphi(v(t)) \end{pmatrix}$$

abbiamo che

$$\begin{cases} u_1'(t) = v'(t) = f_1(v(t), \varphi(v(t))) = f_1(u_1(t), u_2(t)) \\ u_2'(t) = \varphi'(v(t)) v'(t) = \frac{f_2}{f_1} f_1 = f_2 \end{cases}$$

e inoltre $\mathbf{u}(0) = \mathbf{p}$. ■

Esempio. (3.31)

$$\begin{cases} x' = -y^2 \\ y' = x^2 \end{cases}$$

1. Equilibri.

$$\mathbf{f}(x, y) = (-y^2, x^2) = (0, 0)$$

\implies vi è un solo punto di equilibrio: $\mathbf{0}$

2. Punti con tangente orizzontale o verticale.

Il vettore tangente ad una soluzione in (x, y) è $\mathbf{f}(x, y)$, dunque:

- *Tangente verticale:* $x' = 0 \iff y^2 = 0$

\implies l'asse x viene intersecato verticalmente dalle orbite;

- *Tangente orizzontale:* $y' = 0 \iff x^2 = 0$

\implies l'asse y viene intersecato orizzontalmente dalle orbite.

In $(x, 0)$ il vettore tangente alla soluzione che passa per quel punto è $(0, x^2)$, dunque tutte le orbite che passano per l'asse delle x sono percorse verso l'alto.

In $(0, y)$ il vettore tangente alla soluzione che passa per quel punto è $(-y^2, 0)$, dunque tutte le orbite che passano per l'asse delle y sono percorse verso sinistra.

3. Orbite non singolari

Consideriamo i punti in cui $f_1(x, y) \neq 0$, ovvero i punti con $y \neq 0$. Cerchiamo l'equazione delle orbite dei punti che non sono sull'asse x .

$$\begin{cases} \varphi'(x) = -\frac{x^2}{\varphi^2(x)} \\ \varphi(p_1) = p_2 \end{cases} \quad (\text{PC})_\varphi$$

che è a variabili separabili:

$$\begin{aligned} \varphi^2(x) \varphi'(x) &= -x^2 \\ \int \varphi^2(x) \varphi'(x) dx &= \int -x^2 dx \rightsquigarrow \int \varphi^2 d\varphi = -\int x^2 dx \\ &\rightsquigarrow \frac{1}{3} \varphi^3(x) = -\frac{1}{3} x^3 + c \end{aligned}$$

Imponendo il passaggio per \mathbf{p} , otteniamo che $c = \frac{1}{3} p_2^3$.

Dunque

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{p_2^3 - x^3}$$

e le orbite sono quelle mostrate in figura 3.4

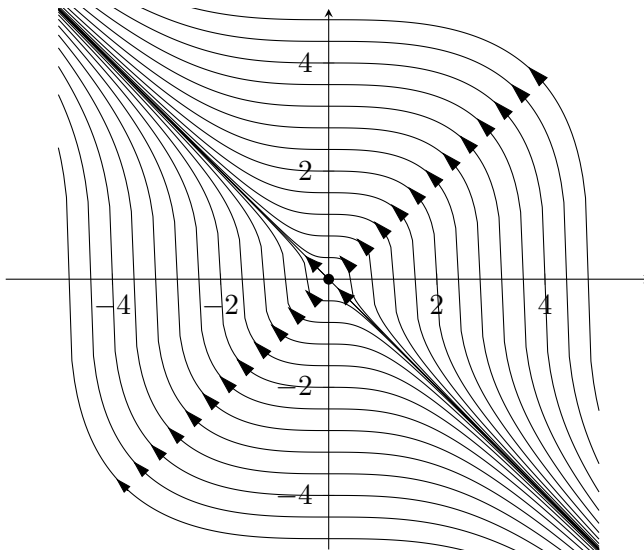


Figura 3.4: Orbite per il problema di Cauchy

Esempio. (3.32)

$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = -xy \end{cases}$$

1. Equilibri

Tutti i punti $(x, 0)$ sono equilibri.

2. Tangente orizzontale e verticale

Tutta l'asse delle y è composta da punti a tangente orizzontale.

3. Orbite non singolari

Consideriamo $f_1(x, y) \neq 0$, ovvero quelli per i quali $y \neq 0$: troviamo tutte le orbite, infatti i punti $(x, 0)$ sono equilibri. Calcolando:

$$\varphi'(x) = -\frac{x \varphi(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{x}{\varphi(x)}$$

Da qui, possiamo dire

$$\varphi(x) \varphi'(x) = -x \quad \implies \quad \varphi^2(x) = -x^2 + c$$

$c > 0$, e $\varphi(x) = \pm(c - x^2)^{1/2}$.

Inoltre $x' = y^2 > 0$ lungo le orbite. Dunque il diagramma di fase è quello illustrato in figura 3.5.

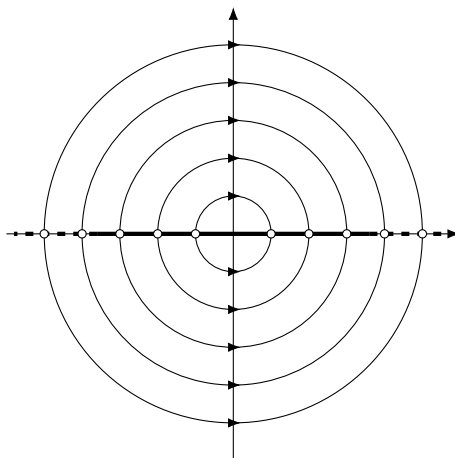


Figura 3.5: Diagramma di fase per l'esempio (3.32)

Esempio. (3.33)

$$\begin{cases} x' = y^2 - xy^2 \\ y' = -xy^3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (y^2 - xy^2, -xy^3) \end{array}$$

1. Equilibri:

$$\begin{cases} y^2(1 - x) = 0 \\ xy^3 = 0 \end{cases}$$

la prima equazione è soddisfatta per $x = 1 \vee y = 0$, mentre la seconda è soddisfatta per $x = 0 \vee y = 0$. Quindi:

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{0} \iff y = 0$$

$\Rightarrow \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ è composto da equilibri.

2. Punti con tangente verticale $[x' = 0]$:

Oltre ai punti di equilibrio, sono tutti i punti sulla retta verticale $x = 1$. Questa quindi è una retta invariante, composta da orbite.

Se $x = 1$ abbiamo

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = -y^3 \end{cases}$$

3. Punti con tangente orizzontale [$y' = 0$]:

Oltre ai punti di equilibrio, sono tutti i punti sulla retta verticale $x = 0$.

Se $x = 0$ abbiamo

$$\begin{cases} x' = y^2 > 0 \\ y' = 0 \end{cases}$$

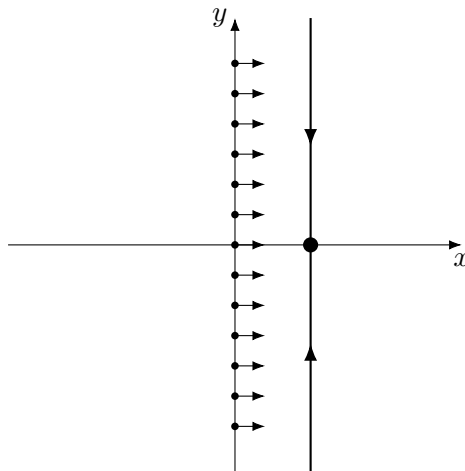


Figura 3.6: Punti con tangenti verticali e orizzontali per l'esempio (3.33)

4. Equazioni delle orbite: per $y \neq 0$ e $x \neq 1$ abbiamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy^3}{y^2(1-x)} \rightsquigarrow \begin{cases} y'(x) = \frac{-x}{1-x} y(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

e integrando si ottiene

$$\log \frac{|y|}{|y_0|} = x - x_0 + \log \frac{|x-1|}{|x_0-1|}$$

Notiamo che, poiché le orbite non intersecano l'asse x (poiché sono altre orbite), $y(x)$ e y_0 hanno lo stesso segno, dunque posso “eliminare”

i valori assoluti. Con lo stesso ragionamento è lecito “eliminare” anche il secondo valore assoluto. Così facendo abbiamo:

$$\log \frac{y}{y_0} = x - x_0 + \log \frac{x-1}{x_0-1}$$

Facendo l’esponenziale da ambo le parti otteniamo

$$y(x) = y_0 \frac{x-1}{x_0-1} e^{x-x_0}$$

Alcune osservazioni:

- (a) Le orbite con dato iniziale (x_0, y_0) e $(x_0, -y_0)$ sono simmetriche rispetto all’asse orizzontale

\implies consideriamo solo $y_0 > 0$.

Dividiamo ancora i due casi:

$$\bullet \quad x_0 > 1 \implies y_0 \frac{x-1}{x_0-1} > 0$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$$

e guardando l’equazione differenziale delle orbite (3.1)

$$y'(x) = \frac{x}{x-1} y(x) > 0$$

e quindi y come funzione di x è monotona crescente.

Notiamo inoltre che per $x_0 > 1$, $x' = y^2(1-x) < 0$, dunque le frecce delle orbite sono rivolte verso $x = 1$.

$$\bullet \quad x_0 < 1 \implies \frac{y_0}{x_0-1} > 0, \quad x-1 < 0:$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0^+$$

e inoltre la funzione è sempre positiva.

Poichè $x' > 0 \rightsquigarrow$ le frecce sono rivolte verso $x = 1$ (vedi 3.7).

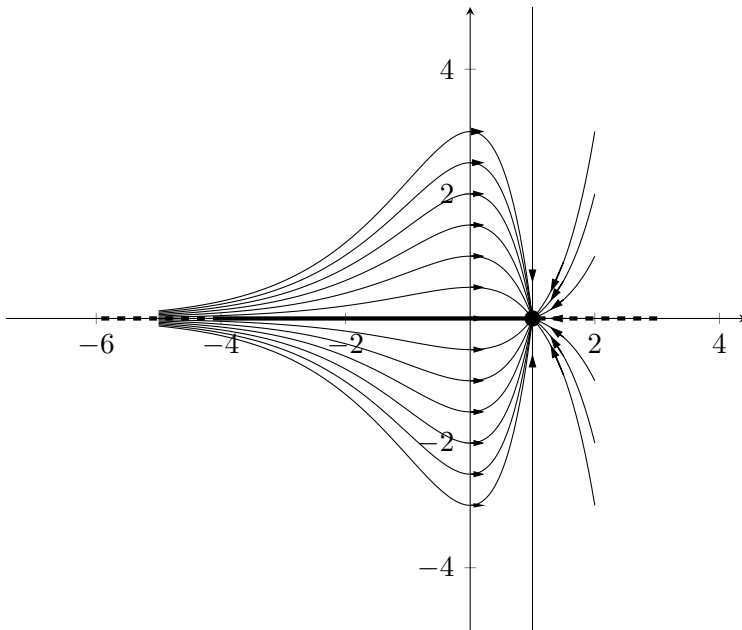


Figura 3.7: Orbite per l'esempio (3.33).

Pendolo Piano Senza Attrito. (3.34) Consideriamo un pendolo piano senza attrito, e sia θ l'angolo rispetto alla verticale. La legge che regola il moto è

$$\theta''(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$

Se $\alpha = \sqrt{\frac{g}{l}}$, definendo $x(t) = \theta(\alpha t)$, l'equazione del moto diventa:

$$x''(t) = -\sin x(t)$$

equazione non lineare del secondo ordine.

La possiamo tramutare, tramite la trasformazione $x'(t) = y(t)$, in un sistema di equazioni del primo ordine:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\sin x(t) \end{cases}$$

Così facendo possiamo applicargli il nostro solito studio:

1. Equilibri: sono i punti che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

ovvero tutti quelli nella forma $(k\pi, 0)$, per $k \in \mathbb{Z}$.

2. Punti con tangente orizzontale: $x' = 0 \rightsquigarrow y = 0$;

Noto inoltre che $y' > 0$ quando $x \in [\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$.

3. Punti con tangente verticale: $y' = 0 \rightsquigarrow \sin x = 0$

$\implies x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

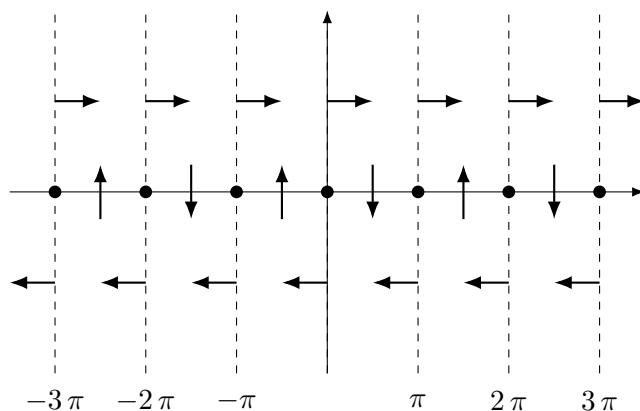


Figura 3.8: Punti di equilibrio e a tangente orizzontale/verticale per il pendolo senza attrito

4. Equazione delle orbite: quando $y \neq 0$, si ha che

$$y'(x) = \frac{-\sin x}{y(x)} \rightsquigarrow y(x) y'(x) = -\sin x$$

E integrando, otteniamo:

$$y_c(x) = \pm \sqrt{2(\cos x + c)}$$

Le orbite cambiano al variare di c :

- $c < -1$: non ci sono soluzioni;

- $c = -1$: ottengo i valori per cui $\cos x = 1$, ovvero i punti di equilibrio $(2n\pi, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $c \in (-1, 1)$: ottengo soluzioni definite sull'intervallo $[-x_c, x_c]$ modulo 2π , dove

$$x_c = \arccos(-c);$$

- $c \geq 1$: si creano infinite eterocline.

In definitiva, le orbite sono quelle illustrate nella figura 3.9

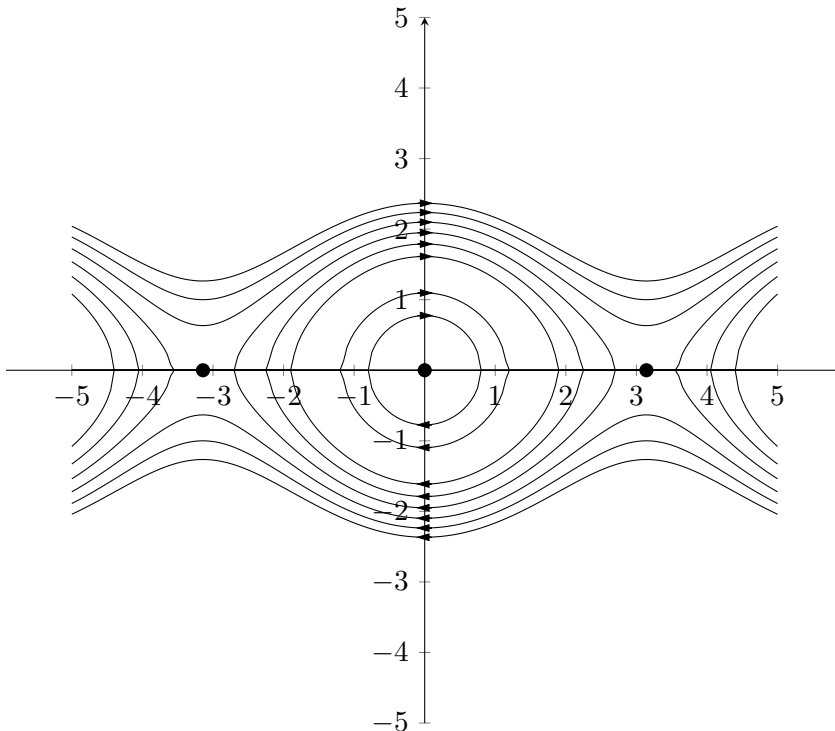


Figura 3.9: Orbite per il pendolo piano senza attrito

Per una comprensione più profonda, si rimanda alle dispense del corso, [1], pp. 27-31.

Osservazione. (3.35) L'equazione caratterizzante del pendolo piano

$$\ddot{x} = -\sin x$$

può essere considerata come un sistema conservativo in dimensione 1. Moltiplicando da entrambe le parti per \dot{x} , infatti, otteniamo:

$$\dot{x} \ddot{x} = -(\sin x) \dot{x}$$

Riconoscendone delle derivate e manipolando l'equazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} (\cos x) \rightsquigarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x \right) = 0$$

E infine integrando:

$$\frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos x = c$$

Abbiamo trovato una costante del moto, pari alla somma tra energia cinetica ed energia potenziale: l'energia totale è conservata.

Capitolo 4

Sistemi di E.D.O. lineari

Perché è utile studiarli. (4.1) Sia data l'equazione autonoma $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$; sia \mathbf{x}^* tale che $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

$\implies \{\mathbf{x}^*\}$ è orbita, e può essere stabile, instabile,...

Consideriamo ora $\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}$ e di conseguenza $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta})$.

Sviluppiamo ora $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ al primo ordine:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)}_{=\mathbf{0}} + J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta} + o(\|\boldsymbol{\eta}\|), \quad \|\boldsymbol{\eta}\| \rightarrow \mathbf{0}$$

Dunque

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \boldsymbol{\eta}(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'(t) = \boldsymbol{\eta}'(t)$$

Sostituisco e ottengo

$$\boldsymbol{\eta}'(t) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*) \boldsymbol{\eta}(t) + o(\|\boldsymbol{\eta}(t)\|)$$

dove $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*)$ è una matrice costante.

Ripasso. (4.2) Un sistema lineare di equazioni differenziali ordinarie è un sistema della forma

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

dove

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}.$$

e tutte le funzioni sono continue su un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Se b_1, \dots, b_n sono tutte nulle, il sistema si dice omogeneo.

Caso monodimensionale. (4.3) Sia $f(t, x) = A(t)x + b(t)$, $f \in C^1(I \times \mathbb{R})$. Per ogni condizione iniziale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$, il problema di Cauchy associato al sistema ammette un'unica soluzione locale.

Essendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = A(t)$$

continua su I , abbiamo che su ogni striscia $[a, b] \times \mathbb{R} \subseteq I \times \mathbb{R}$ tale funzione è limitata. Questo ci garantisce che ogni problema di Cauchy associato al sistema ammette un'unica soluzione definita sull'intero intervallo I .

Alcuni Risultati. (4.4) Posto

$$S_b := \{\text{soluzioni di } \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)\}$$

valgono i seguenti risultati.

- Principio di Sovrapposizione. Se $\mathbf{x}_1 \in S_{b_1}$ e $\mathbf{x}_2 \in S_{b_2}$, allora

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in S_{b_1+b_2}$$

- Soluzioni di un sistema omogeneo. S_0 è isomorfo a \mathbb{R}^n .
- Soluzioni di un sistema non omogeneo. Se \mathbf{x}_P risolve $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, allora

$$S_b = \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_P : \mathbf{x}_0 \in S_0\}$$

- Lemma. Siano $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ delle n soluzioni del problema omogeneo $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Allora $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ sono funzioni linearmente indipendenti se e solo se $\exists t_0 \in I$ tale che i vettori

$$\mathbf{y}_1(t_0), \dots, \mathbf{y}_n(t_0)$$

siano linearmente indipendenti in \mathbb{R}^n .

Matrice Wronskiana. (4.5) Se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono n soluzioni linearmente indipendenti del sistema omogeneo $\mathbf{x}' = A(t) \mathbf{x}$, allora $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ si dice insieme fondamentale.

La matrice

$$W(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{bmatrix}$$

si dice matrice wronskiana.

Avendo che $S_0 = \{W(t) \mathbf{c} : \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\}$, cerchiamo come selezionare in S_0 la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t) \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Imponiamo $W(t_0) \mathbf{c} = \mathbf{x}_0$. Essendo le colonne di $W(t_0)$ linearmente indipendenti, $W(t_0)$ è invertibile e $\mathbf{c} = [W(t_0)]^{-1} \mathbf{x}_0$.

La soluzione dunque è

$$\mathbf{x}(t) = W(t) [W(t_0)]^{-1} \mathbf{x}_0$$

Matrice risolvente. (4.6) Se W è una matrice wronskiana e se, per qualche $t_0 \in I$, si ha $W(t_0) = \text{Id}_n$, allora W viene detta matrice risolvente o di transizione o di monodromia.

Se $W(t)$ è una matrice wronskiana per

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A(t) \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

allora

$$\Phi(t) = W(t) [W(t_0)]^{-1}$$

è di monodromia.

Equazioni differenziali lineari di grado n . (4.7) Consideriamo l'equazione differenziale lineare

$$y^{(n)}(t) = a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + a_{n-2}(t) y^{(n-2)}(t) + \dots + a_0(t) y(t) + b(t).$$

Supponendo che tutte le a_i e b siano continue su $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Definiamo

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = y'(t), \quad \dots, \quad x_n(t) = y^{(n-1)}(t)$$

Otteniamo così il sistema lineare del primo ordine $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)$ con

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Obiettivo. (4.8) L'obiettivo è risolvere l'equazione

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A \in \mathbb{R}^{n,n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

L'esistenza delle soluzioni è garantita su tutto \mathbb{R} .

Analizzeremo e affronteremo diverse casistiche:

1. A diagonale;
2. A diagonalizzabile;
3. A con autovalori in \mathbb{C} , tutti autovalori regolari[†];
4. caso generale.

Osservazione. (4.9) Per un'equazione della forma $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ è sempre soluzione (e quindi è equilibrio).

E' facile osservare che ogni punto di $\ker A$ è un punto di equilibrio.

4.1 Matrice diagonale

Risoluzione generica. (4.10) Il caso in cui A è una matrice diagonale è abbastanza semplice. Infatti, sia il sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, con

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

[†] Un autovalore è regolare se la molteplicità algebrica e geometrica coincidono

Questo è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t) \\ \vdots \end{cases}$$

Integrando otteniamo che $x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$ per ogni $i = 1, \dots, m$, dove c_i è una costante arbitraria. Abbiamo così costruito la nostra soluzione:

$$\Rightarrow \mathbf{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & & \\ & e^{t\lambda_2} & & \\ & & e^{t\lambda_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}}_{W(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

In questo caso $W(t)$ è anche di monodromia.

Ritratto di fase per $n = 2$. (4.11) Siamo nel caso

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

- Supponiamo che $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$. L'equazione delle orbite è

$$x_2 = c x_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

- Se $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, allora le orbite sono di equazione $x_2 = c x_1$: sono tutte rette. In particolare, tutte le rette passanti per l'origine sono orbite, anche gli assi.

Per stabilire il verso di percorrenza delle orbite, si studia nuovamente il sistema

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ x_2(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

si ha che

- * se $\lambda > 0$, $\|\mathbf{x}(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} +\infty$, e quindi le semirette vengono percorse verso l'esterno;

- * se $\lambda < 0$, $\|\mathbf{x}(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$, e quindi le semirette vengono percorse verso l'interno.
- Consideriamo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ma di segno concorde $\rightsquigarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.
 - * Se $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ e sono entrambe positive, le orbite sono uscenti e tangenti a x_1 ;
 - * Se $\lambda_2/\lambda_1 > 1$ e sono entrambe negative, le orbite sono entranti e tangenti a x_1 ;
 - * se $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ e sono entrambe positive, le orbite sono uscenti e tangenti a x_2
 - * se $\lambda_2/\lambda_1 < 1$ e sono entrambe negative, le orbite sono entranti e tangenti a x_2
- Consideriamo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ma di segno discorde $\rightsquigarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

In questo caso l'origine si chiama sella, e si ha che

$$x_2 = c x_1^{\lambda_2/\lambda_1}.$$

Essendo $\lambda_2/\lambda_1 < 0$, le orbite sono quelle di equazione $y = c x^\beta$, eventualmente simmetrizzate rispetto all'asse delle y .

- Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, suppongo che uno $\lambda_1 \neq 0$ (se fossero entrambi nulli, allora tutti i punti di \mathbb{R}^2 sarebbero di equilibrio)

$$\begin{cases} x'_1 = \lambda x_1 \\ x'_2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ x_2 \equiv c_2 \end{cases}$$

Dunque, quando $c_1 = 0$ ottengo infiniti punti di equilibrio, in quanto

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha come nucleo tutto l'asse x_2 .

Inoltre, si ha che se

- $\lambda_1 > 0$: tutti gli equilibri sono instabili;
- $\lambda_1 < 0$: tutti gli equilibri sono stabili, non asintotici.

4.2 Matrice diagonalizzabile

Manca un pezzo

4.3 Matrice esponenziale[†]

Definizione. (4.12) Data $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, definiamo

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Ripasso. (4.13)

- Si definisce la norma euclidea matriciale come:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

e vale la disuguaglianza: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

- Criterio di Weierstrass:

$$\sum_k \|B_k\| < \infty \implies \sum_k B_k$$

Buona definizione. (4.14) Dunque, affinché e^A sia ben definita, vogliamo che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$$

sia convergente, e in effetti si ha:

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

e la serie di numeri reali converge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} \in \mathbb{R}$$

dunque la matrice esponenziale è sempre ben definita.

[†] Dal [2]

Proprietà. (4.15) e^A soddisfa queste proprietà:

- i. $e^{0_n} = \mathbb{1}_n$
- ii. $e^{A+B} = e^A e^B$;
- iii. $A e^A = e^A A$

Teorema XIII.

La matrice e^{tA} , $t \in \mathbb{R}$, è la matrice di monodromia (risolvente) per

$$\mathbf{x}' = A \mathbf{x}.$$

In particolare, l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

è $\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0$.

Osservazione. (4.16) Nella risoluzione dei sistemi lineari per matrici diagonali e diagonalizzabili, è stata calcolata esplicitamente la matrice risolvente. Per l'unicità della soluzione, segue che:

1. per A diagonale,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. per A diagonalizzabile, $A = Q D Q^{-1}$, Q matrice degli autovettori,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = Q e^{tD} Q^{-1}$$

Dimostrazione di XIII. Dimostro che la soluzione è

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA} \mathbf{x}_0.$$

La condizione iniziale è soddisfatta, devo verificare che $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(t+h)A} \mathbf{x}_0 - e^{tA} \mathbf{x}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} e^{tA} \mathbf{x}_0 - e^{tA} \mathbf{x}_0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} e^{tA} \mathbf{x}_0 \end{aligned}$$

La tesi da dimostrare, ora, è che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} = A$$

ovvero che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} - A \right) = 0$$

Svolgendo i passaggi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n}{h} - A \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{1}_n - hA}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \cdot \frac{1}{h} = 0$$

Mostriamo l'ultima uguaglianza evidenziando che la norma di quel termine tende a 0.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(hA)^k}{k!} \right\| &\leq \frac{1}{|h|} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^k \|A\|^k}{k!} \\ &= \frac{1}{|h|} \left(e^{|h|\|A\|} - 1 - |h|\|A\| \right) \\ &= \frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h|} - \|A\| \\ &= \|A\| \underbrace{\frac{e^{|h|\|A\|} - 1}{|h|\|A\|}}_{\xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 1} - \|A\| \xrightarrow{|h| \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

■

4.4 Matrice con autovalori in \mathbb{C}

Caso 2×2 base. (4.17) Consideriamo $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ in forma canonica

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$$

I due autovalori sono

$$\mu = a + i b \quad \bar{\mu} = a - i b$$

Il sistema $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$ diventa:

$$\begin{cases} x_1' = a x_1 - b x_2 \\ x_2' = b x_1 + a x_2 \end{cases}$$

Definiamo la funzione complessa

$$z(t) := x_1(t) + i x_2(t)$$

e deriviamola:

$$\begin{aligned} z'(t) &= x_1'(t) + i x_2'(t) \\ &= a x_1(t) - b x_2(t) + i b x_1(t) + i a x_2(t) \\ &= \mu x_1(t) + i \mu x_2(t) = \mu z(t) \end{aligned}$$

Dunque si ha che

$$z(t) = c e^{\mu t}, \quad c = c_1 + i c_2 \in \mathbb{C}$$

Esplicitando ora la funzione:

$$\begin{aligned} z(t) &= (c_1 + i c_2) e^{(a+ib)t} = (c_1 + i c_2) e^{at} e^{ibt} \\ &= (c_1 + i c_2) e^{at} (\cos(bt) + i \sin(bt)) \\ &= e^{at} [c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt)] + i e^{at} [c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)] \end{aligned}$$

Da qui, ricordando la definizione di $z(t)$:

$$\begin{cases} x_1 = e^{at} [c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt)] \\ x_2 = e^{at} [c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)] \end{cases}$$

Siamo ora in grado di scrivere la soluzione dell'equazione differenziale iniziale:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{at} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}}_{R_{bt}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}(0)}$$

Dunque le orbite sono contraddistinte da:

- una dilatazione se $a > 0$ (e in questo caso l'origine si chiama sorgente);
- una contrazione se $a < 0$ (e in questo caso l'origine si chiama sink, o pozzo);

mentre per quanto riguarda la rotazione, questa sarà:

- antioraria se $b > 0$;
- oraria se $b < 0$.

Figura 4.1: Diagramma di fase per (4.17)

Teorema XIV.

Le soluzioni di $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$ con $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori complessi

$$\mu, \bar{\mu} = a \pm i b$$

e autovettori $\mathbf{z}_\mu = \mathbf{w} + i \mathbf{v}$, definita la matrice $Q = [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ sono

$$\mathbf{x}(t) = e^{at} Q R_{bt} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$$

In particolare, l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

$$\text{è } \mathbf{x}(t) = e^{at} Q R_{bt} Q^{-1} \mathbf{x}_0$$

Osservazione. (4.18) Per il teorema precedente, se $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori complessi, allora

$$e^{tA} = e^{at} Q R_{bt} Q^{-1}$$

4.5 Matrice con autovalori regolari in \mathbb{R} o in \mathbb{C}

Ipotesi. (4.19) Consideriamo $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, con

- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$ autovalori reali con autovettori $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h\}$;

• $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_k, \bar{\mu}_k\}$ autovalori complessi con autovettori $\{z_1, \dots, z_k\}$ tali per cui $h + 2k = n$. Scrivo

$$\begin{aligned}\mu_j &= a_j + i b_j \\ z_j &= \mathbf{w}_j + i \mathbf{v}_j\end{aligned}$$

Costruisco la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_h & \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_1 & \dots & \mathbf{v}_k & \mathbf{w}_k \end{pmatrix}$$

e la matrice pseudo diagonale:

$$\widetilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_h & & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \begin{bmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

e dunque si ha che

$$\widetilde{R} = e^{t\widetilde{D}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & e^{\lambda_h t} & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} e^{a_1 t} R_{b_1 t} \end{bmatrix} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} e^{a_k t} R_{b_k t} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

dove $R_{b_j t}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix}$$

Teorema XV.

Nelle ipotesi precedenti, le soluzioni di $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$ sono: $\mathbf{x}(t) = Q e^{t\tilde{D}} \mathbf{c}$, al variare di $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. In particolare, la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

è $\mathbf{x}(t) = Q e^{t\tilde{D}} Q^{-1} \mathbf{x}_0$

Osservazione. (4.20) Per il teorema XIII, nelle ipotesi precedenti si ha che

$$e^{tA} = Q e^{t\tilde{D}} Q^{-1}$$

Esercizio. (4.21) Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A \mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{p} \end{cases}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.6 Matrice generica

Matrice 2×2 in forma canonica. (4.22) Consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori non regolari, scritta in forma canonica:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

con $\lambda_1 = \lambda_2$ e $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Risolviamo il sistema associato: $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$

$$\begin{cases} x' = \lambda x + y \\ y' = \lambda y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = \lambda x + c_2 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

Lo si vuole scrivere in forma matriciale come

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}}_{\Phi(t):=} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Poiché $\Phi(0) = \mathbb{1}_2$, allora Φ è la risolvante, e posso scrivere:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Manca il diagramma di fase

Teorema XVI.

Sia $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ con autovalori non regolari qualsiasi e polinomio caratteristico $p_A(t) = (t - \lambda)^2$. Sia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ l'unico autovettore di A , e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che

- $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$
- $(A - \lambda \mathbb{1}) \mathbf{v} = \mathbf{u}$.

Allora, le soluzioni di $\mathbf{x}' = A \mathbf{x}$ sono nella forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} (c_1 + c_2 t) \mathbf{u} + e^{\lambda t} c_2 \mathbf{v}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione di XVI. Si ha che $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ sono una base di \mathbb{R}^2 , dunque necessariamente una qualsiasi funzione deve essere nella forma

$$\mathbf{x}(t) = y_1(t) \mathbf{u} + y_2(t) \mathbf{v}$$

Imponiamo che $\mathbf{x}(t)$ risolva $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}$, e determiniamo y_1 e y_2 .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= y_1'(t) \mathbf{u} + y_2'(t) \mathbf{v} \\ A \mathbf{x}(t) &= y_1(t) A \mathbf{u} + y_2(t) A \mathbf{v} \end{aligned}$$

ma $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, e $A\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = \mathbf{u}$, e quindi $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mathbf{u}$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= A\mathbf{x}(t) = y_1(t)\lambda\mathbf{u} + y_2(t)(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{u}) \\ &= (\lambda y_1(t) + y_2(t))\mathbf{u} + \lambda y_2(t)\mathbf{v}\end{aligned}$$

Imponendo l'uguaglianza con $\mathbf{x}'(t)$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y_1' = \lambda y_1 + y_2 \\ y_2' = \lambda y_2 \end{cases}$$

che ha proprio come soluzione

$$\begin{cases} y_1 = e^{\lambda t}(c_1 + c_2 t) \\ y_2 = e^{\lambda t}c_2 \end{cases}$$

■

Teorema XVII.

Considero il sistema $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, con $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Siano

- $\{\lambda_1, \dots, \lambda_h\}$ autovalori reali, di molteplicità algebrica, rispettivamente m_1, \dots, m_k ;
- $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_k, \bar{\mu}_k\}$ autovalori complessi, $\mu_j, \bar{\mu}_j = a_j \pm b_j i$, di molteplicità algebrica, rispettivamente n_1, \dots, n_k

tali per cui

$$\sum_{i=1}^h m_i + 2 \sum_{i=1}^k n_i = n$$

Per ciascun autovalore, sia F l'insieme:

$$\begin{aligned}F_{\lambda_i} &= \{t^j e^{\lambda_i t} : j = 0, \dots, m_i - 1\} \\ F_{\mu_i} &= \{t^j e^{a_i t} \cos(b_i t), t^j e^{a_i t} \sin(b_i t) : j = 0, \dots, n_i - 1\}\end{aligned}$$

e definiamo $F_A = \bigcup_j F_{\lambda_j} \cup \bigcup_j F_{\mu_j}$.

Allora ogni componente di $\mathbf{x}(t)$ è combinazione lineare di elementi di F_A .

Corollario sulla stabilità dell'origine. (4.23) Considero il sistema $\mathbf{x}'(t) = A \mathbf{x}(t)$.

- Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale < 0
 $\implies \mathbf{0}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.
- Se esiste almeno un autovalore di A con parte reale > 0
 $\implies \mathbf{0}$ è un punto di equilibrio instabile.
- Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale ≤ 0
 $\implies \mathbf{0}$ è un punto di equilibrio stabile.

Esercizio. (4.24) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni del seguente sistema si mantengono limitate.

$$\begin{cases} x'_1 = a x_2 + x_4 \\ x'_2 = -x_1 \\ x'_3 = x_4 \\ x'_4 = -a x_1 - x_3 \end{cases}$$

Soluzione (4.24). Scriviamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo le soluzioni combinazioni lineari di elementi di F_A , le uniche funzioni ammesse per avere limitatezza sono seni e coseni.

\implies imponiamo che gli autovalori di A siano tutti in $i\mathbb{R}$, e che siano semplici (ovvero con molteplicità algebrica 1).

Calcolo il polinomio caratteristico:

$$p_A(t) = \cdots = t^4 + (2a + 1)t^2 + a$$

da cui ricavo che, per λ autovalore:

$$\lambda_{\pm}^2 = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{(2a + 1)^2 - 4a}}{2} = \frac{-(2a + 1) \pm \sqrt{4a^2 + 1}}{2}$$

Per avere autovalori immaginari puri, voglio che siano entrambi strettamente minori di 0.

Noto che $\lambda_-^2 < \lambda_+^2$, dunque impongo soltanto $\lambda_+^2 < 0 \iff$

$$\begin{aligned} -(2a+1) + \sqrt{4a^2+1} &< 0 \\ \sqrt{4a^2+1} &< 0 \end{aligned}$$

da cui ricavo il sistema:

$$\begin{cases} 2a+1 > 0 \\ 4a^2+1 < (2a+1)^2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a > -1/2 \\ a > 0 \end{cases}$$

\implies se $a > 0$ ho quattro (e sono certo essere distinti, poiché la radice quadrata è iniettiva) autovalori in $i\mathbb{R}$.

4.7 Metodo di linearizzazione

Classificazione di un punto di equilibrio per un sistema lineare.

(4.25) Per il sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, l'origine è un punto di equilibrio:

- iperbolico:
 - attrattore: se $\operatorname{Re} \lambda < 0$ per ogni autovalore λ di A ;
 - repulsore: se $\operatorname{Re} \lambda > 0$ per ogni autovalore λ di A ;
 - sella: se tutti gli autovalori di A hanno $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ e c'è almeno una coppia di autovalori di segno opposto;
- centro: se esiste almeno un autovalore λ di A nullo o con $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Teorema XVIII.

Teorema di Hartman-Grobman

Se \mathbf{x}^* è un equilibrio dell'equazione autonoma $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e nel sistema linearizzato

$$\mathbf{x}' = \underbrace{J_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}^*)}_{A} \mathbf{x}$$

l'origine è iperbolica, allora la stabilità di \mathbf{x}^* come equilibrio di $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è la stessa di quella dell'origine per il sistema linearizzato.

Esempio. (4.26) Considero il sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + x^3 \\ y' = -2y \end{cases}$$

i cui equilibri sono

$$(0, 0), (1, 0), (-1, 0)$$

Calcoliamo la matrice Jacobiana in un punto generico:

$$J_{\mathbf{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

e quindi:

- $J_{\mathbf{f}}(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ che ha due autovalori reali negativi
 \implies per il teorema di Hartman-Grobman $(0, 0)$ è asintoticamente stabile;
- $J_{\mathbf{f}}(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ il cui punto di equilibrio è sella
 \implies per il teorema di Hartman-Grobman $(\pm 1, 0)$ sono instabili.

Osservazione. (4.27) Il metodo di linearizzazione:

- è un metodo locale e non globale;
- fornisce la stabilità senza conoscere un ritratto di fase;
- non funziona quando la parte reale degli autovalori è nulla.

Capitolo 5

Metodo diretto di Lyapunov per lo studio della stabilità degli equilibri

Ipotesi. (5.1)

- Sia $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.
- $\mathbf{p} \in \Omega$: $\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$ (equilibrio).
- $V: B_r(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{R}$, con $r > 0$ e $B_r(\mathbf{p}) \subseteq \Omega$, $V \in C^1(B_r(\mathbf{p}))$.

Idea di base. (5.2) Sotto le ipotesi (5.1), se troviamo una funzione V tale che

- V sia positiva in un intorno di \mathbf{p} e nulla in \mathbf{p} ;
- V sia decrescente lungo le traiettorie vicino a \mathbf{p} .

Allora \mathbf{p} è stabile o asintoticamente stabile.

Monotonia di V . (5.3) Sotto le ipotesi (5.1), supponiamo che $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ è una soluzione dell'equazione differenziale.

- Valutiamo V lungo $\mathbf{x}(t)$, ovvero $V(\mathbf{x}(t))$.

- Ne calcoliamo la monotonia in t , definendo:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) := \frac{d}{dt}V(\mathbf{x}(t))$$

Dunque:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \langle \nabla V(\mathbf{x}(t)), \mathbf{x}'(t) \rangle = \langle \nabla V(\mathbf{x}(t)), \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \rangle$$

e quindi

$$\begin{aligned} \dot{V} : B_r(\mathbf{p}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto \langle \nabla V(\xi), \mathbf{f}(\xi) \rangle \end{aligned}$$

Poiché sia V che \mathbf{f} sono di classe $C^1 \rightsquigarrow \nabla V$ è continua $\rightsquigarrow \dot{V}$ è continua.

\dot{V} è detta la derivata totale di V rispetto al campo \mathbf{f} .

Teorema XIX.

Teorema di Lyapunov

Supponiamo le ipotesi (5.1).

$$(H_1): \quad \begin{aligned} &\bullet V \text{ è definita positiva in } \mathbf{p}; \\ &\bullet \dot{V} \text{ è semi definita negativa in } \mathbf{p} \end{aligned} \quad \implies \mathbf{p} \text{ è stabile.}$$

$$(H_2): \quad \begin{aligned} &\bullet V \text{ è definita positiva in } \mathbf{p}; \\ &\bullet \dot{V} \text{ è definita negativa in } \mathbf{p}. \end{aligned} \quad \implies \mathbf{p} \text{ è asintoticamente stabile.}$$

$$(H_3) \quad \begin{aligned} &\bullet V(\mathbf{p}) = 0; \\ &\bullet \forall \varepsilon \in (0, r), \\ &\quad \exists \mathbf{x}_\varepsilon \in B_\varepsilon(\mathbf{p}) \text{ tale che } V(\mathbf{x}_\varepsilon) > 0; \\ &\bullet \dot{V} \text{ è definita positiva in } \mathbf{p}. \end{aligned} \quad \implies \mathbf{p} \text{ è instabile.}$$

Osservazione. (5.4) Questo metodo:

- è locale;
- determina la stabilità semplice;
- non stabilisce come determinare la funzione V ;

- non determina necessariamente l'asintotica stabilità di alcuni punti di equilibrio stabili.

Definizione. (5.5) *Una funzione V che soddisfa (H_1) o (H_2) o (H_3) si dice funzione di Lyapunov.*

Dimostrazione di XIX. Dimostriamo solo la prima parte. La tesi è la stabilità di \mathbf{p} , ovvero: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $\mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p})$, la soluzione $\psi_q(t)$ del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q} \end{cases}$$

soddisfi:

- $T_{\max} = +\infty$;
- $\exists T \geq 0$ tale che $\forall t > T$

$$\psi_q(t) \in B_\varepsilon(\mathbf{p})$$

Fisso $\varepsilon < r$, in modo che V sia definita su $B_\varepsilon(\mathbf{p})$, e definisco

$$m_\varepsilon = \min_{x \in \partial B_\varepsilon(\mathbf{p})} V(x) > 0$$

poiché V è definita positiva.

Avendo $V(\mathbf{p}) = 0$ e V continua $\implies \exists \delta \in (0, \varepsilon): V(x) < \frac{1}{2}m_\varepsilon, \forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{p})$

Dimostro che questo δ soddisfa la condizione di stabilità.

Per assurdo, supponiamo che $\exists \mathbf{q} \in B_\delta(\mathbf{p})$ tale che la soluzione $\psi_q(t)$ di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q} \end{cases}$$

per qualche τ sia

$$\|\psi_q(\tau) - \mathbf{p}\| = \varepsilon \quad \|\psi_q(\tau) - \mathbf{p}\| < \varepsilon, \forall t \in [0, \tau)$$

Per ipotesi $\dot{V}(\mathbf{x})$ è semidefinita negativa, cioè V decresce lungo le soluzioni:

$$m_\varepsilon \leq V(\psi_q(\tau)) \leq V(\mathbf{q}) = V(\psi_q(0)) < \frac{m_\varepsilon}{2}$$

Assurdo! ■

Corollario - Applicazione ai sistemi $\ddot{x} = -\nabla U(x)$. (5.6) Sia $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto e $\mathbf{p} \in \Omega$

- $U \in C^1(\Omega)$;
- \mathbf{p} sia un minimo stretto di U .

Allora $(\mathbf{p}, 0)$ è un punto di equilibrio stabile per

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{y} \\ \mathbf{y}' = -\nabla U(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Dimostrazione di (5.6) Considero $V(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2 + U(\mathbf{x}) - U(\mathbf{p})$$

Si ha che

- $V(\mathbf{p}, 0) = 0$;
- $V(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0$ in un intorno di $(\mathbf{p}, 0)$, poiché $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{p})$ per ipotesi;
- $\dot{V}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

$\implies V$ soddisfa le ipotesi (H_1)

$\implies (\mathbf{p}, 0)$ è stabile. ■

5.1 Applicazione del metodo di Lyapunov

Come trovare V . (5.7) Per applicare il teorema di Lyapunov è necessario trovare la funzione V . Alcuni candidati possono essere:

- la funzione distanza, ad una potenza pari

$$V(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|^{2k}$$

- combinazioni lineari di potenze pari; ad esempio, in \mathbb{R}^2 , una espressione nella forma:

$$V(x, y) = \alpha x^{2k} + \beta y^{2l}$$

Esempio. (5.8) Consideriamo

$$\begin{cases} x' = -y - 3x^3 \\ y' = x^5 - 2y^3 \end{cases}$$

Mostrare che $(0, 0)$ è l'unico equilibrio e che è asintoticamente stabile, sfruttando un'opportuna funzione di Lyapunov della forma

$$V(x, y) = \alpha x^{2m} + \beta y^{2n}$$

- Equilibri:

$$\begin{cases} -y - 3x^3 = 0 \\ x^5 - 2y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x^3 \\ x^5 - 2(-3x^3)^3 = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ottengo $x^5 (1 + 54x^4) = 0$, ovvero $x = 0$

$$\implies y = 0$$

Dunque l'unico equilibrio è $(0, 0)$.

- Vogliamo che V sia definita positiva in $(0, 0)$ e che \dot{V} sia definita negativa.

$$- V(x, y) = \alpha x^{2m} + \beta y^{2n} \text{ è definita positiva } \iff \alpha, \beta > 0.$$

$$- \dot{V}(x, y) = \frac{\partial V}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} y'(t):$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \alpha 2m x^{2m-1} (-y - 3x^3) + \beta 2n y^{2n-1} (x^5 - 2y^3) \\ &= -2\alpha m x^{2m-1} y - \underline{6\alpha m x^{2n+2}} \\ &\quad + 2\beta n x^5 y^{2n-1} - \underline{4\beta x y^{2n+2}} \end{aligned}$$

La parte sottolineata, poiché $m, n, \alpha, \beta > 0$, è già definita negativa in $(0, 0)$. Richiediamo ora, per esempio, che l'altro pezzo di \dot{V} sia nullo. In particolare, vorremmo che fossero monomi simili:

$$\begin{cases} 2m - 1 = 5 \\ 2n - 1 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \end{cases}$$

e dunque

$$-6\alpha x^5 y + 2\beta x^5 y = (-6\alpha + 2\beta) x^5 y = 0.$$

Dunque, scegliendo $m = 3, n = 1, \beta = 3\alpha$ si ottiene una funzione che soddisfa tutte le ipotesi.

Esempio. (5.9) Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x' = -x + y - (x + y)(x^2 + y^2) \\ y' = -x + y + (x + y)(x^2 + y^2) \end{cases}$$

- Equilibri:

$$\begin{cases} 0 = -x + y - (x + y)(x^2 + y^2) \\ 0 = -x + y + (x + y)(x^2 + y^2) \end{cases} \implies \begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = y - x \\ (x + y)(x^2 + y^2) = x - y \end{cases}$$

$$\implies y - x = 0 \text{ e } x = y.$$

Sostituendo nella prima equazione, $(2x)(2x^2) = 0$

$$\implies x = 0$$

$$\implies (0, 0) \text{ è l'unico equilibrio.}$$

- Linearizzazione: la matrice associata al sistema linearizzato è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha entrambi gli autovalori nulli: il metodo non funziona.

- Lyapunov[†]: osservo che la funzione $V(x, y)$ suggerita ha una sella in $(0, 0)$, dunque se il metodo di Lyapunov funziona dimostrerà l'instabilità.

Il segno di V su \mathbb{R}^2 è mostrato in figura 5.1

[†] Suggerimento: utilizzare $V(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

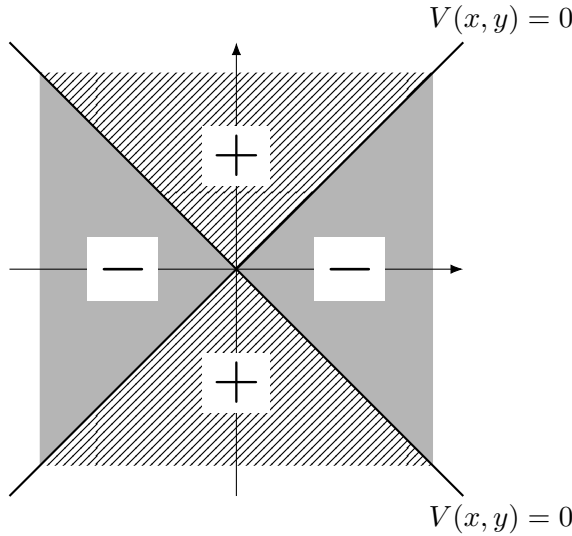


Figura 5.1: Segno su \mathbb{R}^2 di $V(x, y) = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$

In ogni intorno di $(0, 0)$ la funzione V cambia di segno

$\implies \exists \{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\begin{aligned} (x_n, y_n) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbf{0} \\ (x_n, y_n) &\geq 0, \quad \forall n \end{aligned}$$

Verifico ora il segno di \dot{V} :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' \\ &= -x(-x + y) + y(-x + y) \\ &\quad + x(x + y)(x^2 + y^2) + y(x + y)(x^2 + y^2) \\ &= x^2 - xy - xy + y^2 + (x + y)^2(x^2 + y^2) \geq 0 \end{aligned}$$

e si annulla solo nell'origine.

\implies sono soddisfatte le ipotesi (H_3) del teorema di Lyapunov.

Esercizio. (5.10) Considero il sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases}$$

e le funzioni

$$\begin{aligned} V_1(x, y) &= x^2 + y^2 \\ V_2(x, y) &= \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} \\ V_3(x, y) &= \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} + x^3 y \end{aligned}$$

Stabilire se V_1, V_2 e V_3 sono funzioni di Lyapunov per il sistema.

Soluzione (5.10).

- $(0, 0)$ è l'unico equilibrio.
- $V_1(x, y) = x^2 + y^2$ è definita positiva in $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x, y) &= \frac{\partial V_1}{\partial x} x' + \frac{\partial V_1}{\partial y} y' \\ &= \end{aligned}$$

Manca la fine dell'esercizio

Osservazione. (5.11) Il sistema precedente può essere visto come

$$x'' = -x^3 - x'$$

Se considero solo $x'' = -x^3$, posso vederlo nella forma

$$x'' = -\nabla U(x), \quad U(x) = \frac{1}{4}x^4$$

Quindi il termine $-x'$ è dissipativo

Teorema XX.

Teorema di La Salle-Krasovskii

Sia \mathbf{p} un punto di equilibrio stabile per $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, e V una funzione di Lyapunov che soddisfa le ipotesi (H_1) .

Sia

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in B_r(\mathbf{p}) : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Se \mathcal{E} non contiene orbite complete distinte da $\{\mathbf{p}\}$, allora \mathbf{p} è asintoticamente stabile.

Esempio. (5.12) Se consideriamo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases} \quad \begin{aligned} V_2(x, y) &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 \\ \dot{V}_2(x, y) &= -y^2 \end{aligned}$$

l'insieme

$$\mathcal{E} = \{(x, y) : -y^2 = 0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

Ci chiediamo se questo insieme contiene orbite distinte da \mathbf{p} .

Sostituisco $y = 0$ nel sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x^3 - y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -x^3 \end{cases}$$

\implies l'asse x non contiene orbite distinte da \mathbf{p} , poiché in ogni punto tranne l'origine l'orbita passante per quel punto è perpendicolare all'asse x .

Modello preda-predatore Lodka-Volterra. (5.13) Siano:

- $C(t)$ il numero di prede al tempo t (dove c sta per coniglio);
- $L(t)$ il numero di predatori al tempo t (dove l sta per lupo).

Supponiamo che entrambe queste popolazioni crescano proporzionalmente a sé stesse:

$$\begin{aligned} C'(t) &= c C(t) \\ L'(t) &= l L(t) \end{aligned}$$

dove c, l sono tassi di crescita.

Consideriamo però dei tassi di crescita sifatti:

$$x = \gamma - \delta L(t), \quad l = -\alpha + \beta C(t)$$

dove $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$.

Ottengo il modello

$$\begin{cases} C'(t) = (\gamma - \delta L(t)) C(t) \\ L'(t) = (-\alpha + \beta C(t)) L(t) \end{cases} \quad \alpha, \beta, \delta, \gamma > 0.$$

Riscaliamo le variabili, o equivalentemente supponiamo $\alpha = \beta = \delta = \gamma = 1$:

$$\begin{cases} C' = (1 - L) C \\ L' = (C - 1) L \end{cases}$$

Ha senso supporre che $C(t), L(t) > 0$, poiché sono numeri di individui.

- Equilibri: facilmente si nota che i punti di equilibri sono $(0, 0), (1, 1)$.

È interessante notare che due specie in competizione trovano sempre un equilibrio, che non prevede l'annichilimento di ambo le specie.

- Rette invarianti: sono presenti due rette invarianti:

- $L = 0$, orbita uscente dall'origine;
- $C = 0$, orbita entrante nell'origine.

- Equazioni delle orbite: le soluzioni si trovano sugli insiemi di livello della funzione

$$g(C, L) = (C - \log C) + (L - \log L)$$

5.2 Alcuni risultati teorici

Osservazione. (5.14) Consideriamo $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{p} \in \Omega$ punto di equilibrio asintoticamente stabile, $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Nei sistemi lineari, se $\operatorname{Re} \lambda < 0$ per tutti gli autovalori λ

$\implies \mathbf{p}$ attrae tutte le orbite.

Definizione. (5.15) Consideriamo $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{p} \in \Omega$ punto di equilibrio, $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

\mathbf{p} si dice attrattore globale se

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_t(\mathbf{q}) = \mathbf{p}, \quad \forall \mathbf{q} \in \Omega$$

dove $\phi_t(\mathbf{q})$ è soluzione di

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q}. \end{cases}$$

Teorema XXI.

Teorema di Barbashin-Krasovskii

Se $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Lyapunov che soddisfa (H_2) e

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow +\infty, \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow +\infty$$

allora \mathbf{p} è un attrattore globale.

Osservazione. (5.16) Se $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ammette più di un punto di equilibrio, allora nessuno dei due può essere attrattore globale.

Manca un esempio

Esempio. (5.17)

In questo sistema l'orbita periodica di raggio 1 è un ciclo limite.

Definizione. (5.18) Un ciclo limite è un'orbita chiusa che ammette un'intorno che non contiene altre orbite chiuse.

Definizione. (5.19) Se γ è un ciclo limite che ammette un intorno I_γ tale che

$$\forall \mathbf{q} \in I_\gamma, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\varphi_t(\mathbf{q}), \gamma) = 0$$

allora γ si dice stabile. Altrimenti γ è instabile.

Teorema XXII.

Teorema di Poincaré-Bendixon

Sia $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, Ω aperto e $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$. Supponiamo che

- $K \subseteq \Omega$ compatto;
- $\forall \mathbf{p} \in K, \mathbf{f}(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$;
- $\exists \mathbf{q} \in K$ tale che $\phi_t(\mathbf{q}) \in K, \forall t \geq 0$.

Allora K contiene un ciclo limite.

Definizione. (5.20) *Il compatto K che soddisfa questo teorema si chiama trapping region.*

Esempio. (5.21) Torniamo all'esempio di prima, scritto direttamente in forma polare:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2) \\ \theta = 1 \end{cases}$$

Per un compatto nella forma $\{r \in [r_1, r_2]\}$, con $r_1 < 1 < r_2$, questo teorema garantisce l'esistenza di un ciclo limite, come trovato “a mano”.

Osservazione. (5.22) Questo teorema è peculiare per la dimensione due.

Capitolo 6

Campi di vettori e forme differenziali su spazi affini

Definizione. (6.1) Si chiama spazio affine la terna (A, E, δ) , dove:

- A è un insieme di elementi che chiamiamo punti
- E è uno spazio vettoriale
- $\delta: A \times A \rightarrow E$ applicazione tale che:

$$1. \forall (P, Q) \in A \times E, \exists! Q \in A: \delta(P, Q) = \mathbf{v}$$

$$2. \forall P, Q, R \in A, \delta(P, Q) + \delta(Q, R) = \delta(P, R)$$

La dimensione dello spazio affine A è la dimensione dello spazio vettoriale soggiacente E .

Notazione. (6.2) Uno spazio affine (A, E, δ) è indicato più brevemente con A , mentre il vettore $\delta(P, Q)$ è indicato semplicemente con PQ .

Definizione. (6.3) Un vettore $\mathbf{v} \in E$ è chiamato vettore libero, mentre con la coppia (P, \mathbf{v}) indicheremo il vettore \mathbf{v} applicato nel punto P .

Definizione. (6.4) Sia A uno spazio affine. Un riferimento cartesiano è una coppia (O, \mathbf{c}_α) , dove:

- O è l'origine

- $(\mathbf{c}_\alpha) = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ è una base di E

Un riferimento cartesiano stabilisce una corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned}\Phi: A &\leftrightarrow \mathbb{R}^n \\ P &\leftrightarrow (x^\alpha)\end{aligned}$$

dove ad ogni punto $P \in A$ si fa corrispondere l'ennupla reale (x^α) costituita dalle componenti secondo la base (\mathbf{c}_α) del vettore OP :

$$OP = \mathbf{x} = x^\alpha \mathbf{c}_\alpha$$

Risultano così definite anche delle mappe $x^\alpha: A \rightarrow \mathbb{R}$ dette coordinate cartesiane o affini, tali che $x^\alpha(P)\mathbf{c}_\alpha = OP$

Osservazione. (6.5) Questa corrispondenza biunivoca istituisce anche una topologia di A indotta dalla topologia di \mathbb{R}^n .

Trasformazioni affini. (6.6) Se si considerano due riferimenti affini (O, \mathbf{c}_α) e $(O', \mathbf{c}_{\alpha'})$, allora vi è un legame tra i due sistemi di coordinate indotti (x^α) e $(x^{\alpha'})$, ovvero:

$$x^\alpha = a_{\alpha'}^\alpha x^{\alpha'} + b^\alpha \qquad x^{\alpha'} = a_\alpha^{\alpha'} x^\alpha + b^{\alpha'}$$

Dove $a_{\alpha'}^\alpha$ e $a_\alpha^{\alpha'}$ compongono le matrici dei cambiamenti di base:

$$\mathbf{c}_{\alpha'} = a_{\alpha'}^\alpha \mathbf{c}_\alpha \qquad \mathbf{c}_\alpha = a_\alpha^{\alpha'} \mathbf{c}_{\alpha'}$$

Mentre (b^α) $(b^{\alpha'})$ sono le componenti rispettivamente del vettore OO' e $O'O$.

Definizione. (6.7) Sia A uno spazio affine. Una funzione f del tipo:

$$\begin{aligned}f: A &\rightarrow \mathbb{R} \\ P &\mapsto f(P)\end{aligned}$$

è detta campo scalare.

Definizione. (6.8) Possiamo vedere $f = g \circ \Phi$ con:

$$\begin{aligned}A &\xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ P &\xrightarrow{\Phi} (x^\alpha) \xrightarrow{g} g(x^\alpha)\end{aligned}$$

Dove $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è detta rappresentazione del campo f .

Proprietà. (6.9) L'insieme dei campi scalari su A ha una struttura di anello commutativo ed algebra associativa e commutativa.

Siano f, g due campi scalari e $P \in A$, allora vale:

1. *Somma di campi:* $(f + g)(P) = f(P) + g(P)$
2. *Prodotto numerico:* $(fg)(P) = f(P)g(P)$
3. *Prodotto per uno scalare:* $(af)(P) = af(P), a \in \mathbb{R}$

Denoteremo con $\mathcal{F}(A)$ l'anello dei campi scalari sullo spazio affine A .

Definizione. (6.10) Un campo vettoriale è una mappa:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}: A &\rightarrow A \times E \\ P &\mapsto (P, \mathbf{X}(P))\end{aligned}$$

ovvero ad un punto P associa un vettore $\mathbf{X}(P)$ applicato in P .

Definizione. (6.11) Fissato un riferimento cartesiano, ogni campo vettoriale \mathbf{X} risulta rappresentato da un insieme di n funzioni reali $X^\alpha: A \rightarrow \mathbb{R}$, dette componenti cartesiane, tali che:

$$\mathbf{X}(P) = X^\alpha(P)\mathbf{c}_\alpha$$

Queste componenti in quanto campi scalari hanno anche loro una funzione rappresentativa, tale per cui si possono anche denotare come $X^\alpha(x^\beta)$.

Proprietà. (6.12) Siano \mathbf{X} e \mathbf{Y} due campi vettoriali. Sono definite le operazioni di:

1. *Somma:* $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})(P) = \mathbf{X}(P) + \mathbf{Y}(P)$
2. *Prodotto per un numero reale:* $(a\mathbf{X})(P) = a(\mathbf{X}(P)), a \in \mathbb{R}$

Con queste due operazioni l'insieme dei campi vettoriali su A , che denoteremo con $\mathcal{X}(A)$, ha una struttura di modulo.

Definizione. (6.13) Sia $f \in \mathcal{F}(A)$ e $X \in \mathcal{X}(A)$. La derivata di un campo scalare f rispetto ad un campo vettoriale \mathbf{X} è il campo scalare:

$$\hat{\mathbf{X}}(f) = \mathbf{X}^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

Dove con:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

s'intende la derivata parziale rispetto alla x^α della funzione rappresentativa $f(x^1, \dots, x^n)$ in un qualunque sistema di coordinate cartesiane.

Osservazione. (6.14) Dunque è una mappa che, una volta fissato un $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$, lavora:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}: \mathcal{F}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ f &\mapsto \hat{\mathbf{X}}(f) = \mathbf{X}^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\end{aligned}$$

Proprietà. (6.15) Siano $f, g \in \mathcal{F}(A)$. Si verifica facilmente che $\hat{\mathbf{X}}$ soddisfa:

- \mathbb{R} -lineare: $\hat{\mathbf{X}}(af + bg) = a\hat{\mathbf{X}}(f) + b\hat{\mathbf{X}}(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$
- Regola di Leibnitz: $\hat{\mathbf{X}}(f \cdot g) = \hat{\mathbf{X}}(f) \cdot g + f \cdot \hat{\mathbf{X}}(g)$

Una funzione che soddisfa queste due proprietà è per l'appunto chiamata derivazione.

Invarianza per cambiamenti di coordinate affini. (6.16) Un'altro fatto interessante in merito alla derivazione di un campo scalare f rispetto ad un campo vettoriale \mathbf{X} è la sua indipendenza dalle coordinate affini stabilite. Sia $X \in \mathcal{X}(A)$ e siano (\mathbf{c}_α) e $(\mathbf{c}_{\alpha'})$ due basi. Si consideri la rappresentazione del campo secondo le due basi:

$$\mathbf{X} = X^\alpha \mathbf{c}_\alpha = X^{\alpha'} \mathbf{c}_{\alpha'}$$

Tenuto conto delle relazioni tra le basi, si ha la relazione:

$$X^\alpha = a_{\alpha'}^\alpha X^{\alpha'}$$

D'altra parte, interpretando la f come funzione delle (x^α) per il tramite delle $(x^{\alpha'})$ dalle relazioni precedenti tra le basi si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} a_{\alpha'}^\alpha$$

Si ha quindi:

$$X^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = X^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}} a_\alpha^{\alpha'} = X^{\alpha'} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha'}}$$

Ciò mostra l'indipendenza della definizione dalla scelta delle coordinate cartesiane.

Definizione. (6.17) Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(A)$. Definiamo il commutatore di \mathbf{X} e \mathbf{Y} come il campo vettoriale:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot]: \mathcal{X}(A) \times \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{X}(A) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_f = \hat{\mathbf{X}}(\hat{\mathbf{Y}}(f)) - \hat{\mathbf{Y}}(\hat{\mathbf{X}}(f)) \quad f \in \mathcal{F}(A) \end{aligned}$$

Proprietà. (6.18) Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \mathcal{X}(A)$. Il commutatore è un'operazione binaria interna $[\cdot, \cdot]$:

- *Anticommutativa*: $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$
- *Bilineare*: $[a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = a[\mathbf{X}, \mathbf{Z}] + b[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]$
- Soddisfa l'*Identità di Jacobi*:

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] = 0$$

Ovvero $(\mathcal{X}(A), [\cdot, \cdot])$ è un'algebra di Lie.

Definizione. (6.19) Sia $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$. La divergenza di \mathbf{X} è una funzione:

$$\begin{aligned} \text{div}: \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ X &\mapsto \text{div}(X) \end{aligned}$$

$$\text{Dove } \text{div}(X) = \frac{\partial X^1}{\partial x^1} + \cdots + \frac{\partial X^n}{\partial x^n} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha}.$$

Proprietà. (6.20) Siano $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(A)$. La divergenza gode delle seguenti proprietà:

- *Somma*: $\text{div}(X + Y) = \text{div}(X) + \text{div}(Y)$

- Prodotto per campo scalare: $\operatorname{div}(fX) = f\operatorname{div}(V) + X(f)$, $f \in \mathcal{F}(A)$
- $X = \text{costante}^\dagger \Rightarrow \operatorname{div}(X) = 0$

Definizione. (6.21) Una carta di dimensione n su un insieme A è una coppia (U, φ) , dove

- $U \subseteq A$
- φ è una mappa biettiva:

$$\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

la cui immagine $\varphi(U)$ è un aperto di \mathbb{R}^n .

Definizione. (6.22) Possiamo definire le coordinate associate alla carta (U, φ) come le n funzioni:

$$q^i: U \rightarrow \mathbb{R} \qquad q^i = pr_i \circ \varphi$$

dove: $pr_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è la proiezione della i -esima coordinata.
 $(r^1, \dots, r^n) \mapsto r^i$

Osservazione. (6.23) Sia A uno spazio affine, siano (x^α) delle coordinate affini su A e sia (U, φ) una carta di dimensione n .

Le coordinate q^i si possono rappresentare come funzioni delle n (x^α) :

$$q^i = q^i(x^\alpha)$$

Essendo tutte applicazioni biettive si può invertire su $\varphi(U)$, ovvero:

$$x^\alpha = x^\alpha(q^i)$$

Quindi ricapitolando

[†] Considerato $X = \text{costante}$ nelle coordinate cartesiane affini (x^α)

Definizione. (6.24) *Si possono definire i cambiamenti (o trasformazioni) di coordinate, come:*

$$q^i = q^i(x^\alpha) \qquad x^\alpha = x^\alpha(q^i)$$

Con le matrici Jacobiane delle trasformazioni, rispettivamente:

$$E_\alpha^i = \frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha}(x^\beta) \qquad E_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i}(q^j)$$

Queste sono regolari e una l'inversa dell'altra.

Coordinate non affini - Cerchio. (6.25) Si considerino le coordinate del piano affine (x, y) e le trasformazioni di queste in coordinate polari piane (r, θ) :

$$x^\alpha = x^\alpha(q^i): \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \qquad r > 0, -\pi < \theta < \pi$$

Queste hanno come trasformazione inversa di coordinate:

$$q^i = q^i(x^\alpha): \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x \geq 0 \\ \pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x < 0, y > 0 \\ -\pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & x < 0, y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

ESEMPIO coordinate non affini - Sfera. (6.26) Consideriamo le coordinate dello spazio affine $(O, (x, y, z))$ e la trasformazione in coordinate polari sferiche:

$$x^\alpha = x^\alpha(q^i): \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

Dove $(q^1, q^2, q^3) = (r, \varphi, \theta)$ sono definite sul dominio aperto U in \mathbb{R}^3 , asportando il semiasse positivo delle x e tutto l'asse z .

La carta è a valori nell'aperto $\varphi(V) = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : r > 0, 0 < \varphi < \pi, 0 < \theta < 2\pi\}$, dove:

$$\begin{cases} r \equiv \text{raggio} \\ \varphi \equiv \text{colatitudine} \\ \theta \equiv \text{longitudine} \end{cases}$$

Notazione. (6.27) In generale $x^\alpha = x^\alpha(q^i)$ si può anche scrivere come $\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^i)$ con \mathbf{x} un vettore in \mathbb{R}^3 che rappresenta il vettore posizione $OP = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$.

Definizione. (6.28) Si possono definire n campi vettoriali su $\varphi(U)$, come segue:

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}$$

Questi ovviamente hanno componenti rispetto alla base (\mathbf{c}_α) :

$$\mathbf{E}_i = E_i^\alpha \mathbf{c}_\alpha$$

E vengono chiamati riferimento naturale associato alle coordinate non affini (q^i) .

Le loro caratteristiche principali sono:

1. Non essere, in generale, costanti, a causa della loro dipendenza $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_i(q^j)$.
2. Essere tra loro indipendenti e costituire così una base dei campi di vettori su U .

Trasformazione di \mathbf{X} : coordinate affini \rightsquigarrow coordinate non affini. (6.29)

Sia $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$. Sappiamo sia che:

$$\mathbf{X} = X^i(q^j) \mathbf{E}_i = \underbrace{X^i \mathbf{E}_i}_{\text{base}} = X^i E_i^\alpha \mathbf{c}_\alpha = \underbrace{X^\alpha \mathbf{c}_\alpha}_{\text{base}}$$

Uguagliando così i due termini evidenziati abbiamo le relazioni tra i coefficienti delle due rappresentazioni del campo vettoriale \mathbf{X} :

$$\begin{aligned} X^i &= E_\alpha^i X^\alpha \\ X^\alpha &= E_i^\alpha X^i \end{aligned}$$

Interpretazione degli \mathbf{E}_i come derivazioni. (6.30) Consideriamo i campi vettoriale \mathbf{E}_i . Questi possiamo interpretarli come delle derivazioni del tipo:

$$\mathbf{E}_i(f) = \frac{\partial f}{\partial q^i}$$

Ovvero come la derivata della funzione rappresentativa f rispetto alle coordinate non affini (q^i). Per fare ciò, quello che sta accadendo è:

$$\begin{aligned} \varphi(U) &\xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ (q^i) &\mapsto \varphi^{-1}(q^i) \mapsto f(\varphi^{-1}(q^i)) \equiv f(q^i) \end{aligned}$$

Quindi procedendo con questa interpretazione:

$$\mathbf{E}_i(f) = \frac{\partial}{\partial q^i}(f) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f) = E_i^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f)$$

Concludendo, dunque, per un generico campo vettoriale \mathbf{X} :

$$\mathbf{X}(f) = X^i \frac{\partial}{\partial q^i}(f) = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f)$$

6.1 Simboli di Christoffel

Consideriamo i campi vettoriali \mathbf{E}_i . Visto che questi possono essere espressi in funzione delle coordinate q^i , ha senso considerarne le derivate parziali:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial q^j} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q^j \partial q^i}$$

Queste derivate parziali sono a loro volta dei campi vettoriali e quindi possiamo considerarne la rappresentazione secondo il riferimento (\mathbf{E}_i):

$$\partial_j \mathbf{E}_i = \partial_j \partial_i \mathbf{x} = \Gamma_{ji}^h \mathbf{E}_h$$

Definizione. (6.31) Le componenti Γ_{ji}^h , definite come precede, sono delle funzioni sopra il dominio U della carta, denominate simboli di Christoffel.

Proprietà. (6.32) I simboli di Christoffel hanno le seguenti proprietà:

- $\Gamma_{ji}^h = \Gamma_{ij}^h$: Questo vale per definizione stessa dei simboli di Christoffel. Essendo definiti tramite le derivate secondo di funzioni regolari, sono simmetrici rispetto agli indici in basso.
- $\Gamma_{ji}^h = 0 \iff$ le coordinate sono cartesiane: Dalla definizione si vede che sono identicamente nulli se e solo se i campi \mathbf{E}_i sono costanti e ciò accade se e solo se le coordinate sono cartesiane.

Osservazione. (6.33) Le componenti del commutatore sono le stesse in ogni sistema di coordinate:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial q^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial q^j}$$

Definizione. (6.34) La divergenza in coordinate non affini è il campo scalare:

$$\operatorname{div} \mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial q^i} X^i + \Gamma_{ji}^k X^j$$

Si verifica facilmente che soddisfa le condizioni precedentemente enunciate per la divergenza.

Osservazione. (6.35) Questa, euristicamente, può essere vista come:

- La traccia di un'opportuna matrice
- Un prodotto che *assomiglia* al prodotto scalare

6.2 Forme differenziali

Definizione. (6.36) Sia A uno spazio affine. Una forma lineare o 1-forma su A è un'applicazione:

$$\varphi: \mathcal{X}(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$$

tale che φ sia $\mathcal{F}(A)$ -lineare, ovvero:

$$\varphi(f\mathbf{X} + g\mathbf{Y}) = f\varphi(\mathbf{X}) + g\varphi(\mathbf{Y}) \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(A) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}(A)$$

Proprietà. (6.37) L'insieme delle forme lineari su A , $\Phi^1(A)$, è un modulo sull'anello $\mathcal{F}(A)$. Le operazioni sono così definite:

- *Somma di 1-forme:* $(\varphi + \psi)(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) + \psi(\mathbf{X})$, $\forall \varphi, \psi \in \Phi^1(A)$
- *Prodotto per un campo scalare:* $(f\varphi)(\mathbf{X}) = f \cdot \varphi(\mathbf{X})$, $\forall f \in \mathcal{F}(A)$

Notazione. (6.38) Denotiamo con $\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle$ il valore della forma lineare φ sul campo vettoriale \mathbf{X} . In tal modo

Definizione. (6.39) Definiamo un'applicazione lineare:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathcal{X}(A) \times \Phi^1(A) \rightarrow \mathcal{F}(A)$$

che prende il nome di valutazione tra una forma lineare e un campo vettoriale.

Osservazione. (6.40) Una forma lineare può anche essere interpretata come campo di covettori, cioè come un'applicazione:

$$\varphi: A \rightarrow A \times E^*$$

che associa ad ogni punto $P \in A$ un covettore applicato in P .

Il collegamento tra questa e la definizione precedente è dato dalla formula:

$$\langle \mathbf{X}, \varphi(P) \rangle = \langle \mathbf{X}(P), \varphi(P) \rangle$$

Assume così senso valutare una 1-forma φ su di un vettore applicato (P, \mathbf{v}) . Il risultato $\langle \mathbf{v}, \varphi(P) \rangle$ è un numero reale.

Il differenziale. (6.41) Un esempio fondamentale di 1-forma è il differenziale df di un campo scalare f .

Questo è definito dall'uguaglianza:

$$\langle \mathbf{X}, df \rangle = \hat{\mathbf{X}}(f)$$

La linearità dell'applicazione:

$$\begin{aligned} df: \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ \mathbf{X} &\mapsto \langle \mathbf{X}, df \rangle \end{aligned}$$

segue dal fatto che $\hat{\mathbf{X}}(f)$ è lineare rispetto al campo vettoriale \mathbf{X} , una volta fissato il campo scalare f . Inoltre dalla regola di Leibnitz per la derivata rispetto ad un campo vettoriale segue la regola di Leibnitz per il differenziale:

$$d(fg) = gdf + fdg$$

Differenziale di (q^i) Il nostro obiettivo adesso è quello di studiare il differenziale delle (q^i) , generiche coordinate su un aperto U .

Essendo delle funzioni reali su U possiamo considerarne i differenziali (dq^i) . Queste, come già visto, fanno corrispondere ad un campo \mathbf{X} le sue componenti X^i :

$$\langle \mathbf{X}, dq^i \rangle = X^i$$

E quindi in particolare:

$$\langle \mathbf{E}_k, dq^i \rangle = \delta_k^i$$

D'altra parte, nel dominio U , ogni forma lineare è combinazione lineare dei differenziali delle coordinate, ovvero ammette una rappresentazione locale:

$$\varphi = \varphi_i dq^i \tag{6.1}$$

Dove le (φ_i) sono funzioni reali su U dette componenti di φ nelle coordinate (q^i) , definite da:

$$\varphi_i = \langle \mathbf{E}_i, \varphi \rangle \tag{6.2}$$

Si noti come 6.1 \rightsquigarrow 6.2, infatti:

$$\langle \mathbf{E}_k, \varphi \rangle = \varphi_i \langle \mathbf{E}_k, dq^i \rangle = \varphi_i \delta_k^i = \varphi_k$$

Viceversa, 6.2 \rightsquigarrow 6.1:

$$\langle \mathbf{X}, \varphi_i dq^i \rangle = \varphi_i \langle \mathbf{X}, dq^i \rangle = \langle \mathbf{E}_i, \varphi \rangle X^i = \langle X^i \mathbf{E}_i, \varphi \rangle = \langle \mathbf{X}, \varphi \rangle$$

Dalle formule precedenti segue che la valutazione di una forma lineare sopra un campo vettoriale è data, *qualunque siano le coordinate scelte*, dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\boxed{\langle \mathbf{X}, \varphi \rangle = X^i \varphi_i}$$

Definizione. (6.42) *Una forma differenziale o p -forma su uno spazio affine A è un'applicazione p -lineare antisimmetrica dello spazio $\mathcal{X}(A)^p$ nello spazio $\mathcal{F}(A)$:*

$$\phi: \underbrace{\mathcal{X}(A) \times \mathcal{X}(A) \times \cdots \times \mathcal{X}(A)}_{p \text{ volte}} \rightarrow \mathcal{F}(A)$$

Notazione. (6.43) Indicheremo con:

$$\Phi^p(A) = \text{spazio delle } p \text{ forme sopra } A$$

definendo:

$$\Phi^0(A) := \mathcal{F}(A)$$

Prodotto esterno. (6.44) Sulle p -forme differenziali è definita l'operazione fondamentale chiamata prodotto esterno. Questa è una generalizzazione dell'operatore di differenziale applicabile sulle 0-forme alle p -forme e per questo è indicato con d .

$$d: \Phi^p(A) \rightarrow \Phi^{p+1}(A)$$

La sua proprietà fondamentale è $d^2 \equiv 0$.

Osservazione. (6.45) Per l'antisimmetria, se $p > n = \dim(A)$, allora $\Phi^p(A) \equiv 0$.

Invarianza della rappresentazione differenziale 1-forma. (6.46) Sia φ una 1-forma su A scritta in rappresentazione locale come:

$$\varphi = \varphi_i dq^i$$

Il contenuto di questo paragrafo sarà quello di dimostrare la rappresentazione del suo differenziale in coordinate locali:

$$d\varphi = d\varphi_i \wedge dq^i$$

e il fatto che questa non dipenda dalle coordinate scelte. Ovvero presa:

$$\varphi = \varphi_{i'} dq^{i'} \longrightarrow d\varphi = \varphi_{i'} dq^{i'}$$

Mostriamo questo secondo fatto.

Siano (q^i) e $(q^{i'})$ due sistemi di coordinate generiche. Ricordando che la matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate è:

$$E_{i'}^{i'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i}$$

Si noti come:

$$dq^{i'} = \frac{\partial q^{i'}}{\partial q^i} dq^i$$

E quindi:

$$\varphi_{i'} = E_{i'}^i \varphi_i$$

Iniziamo allora i calcoli. Tenendo a mente che:

$$d\varphi_{i'} = d(E_{i'}^i \varphi_i) = dE_{i'}^i \varphi_i + E_{i'}^i d\varphi_i$$

Studiamo il membro destro della tesi:

$$\begin{aligned} d\varphi_{i'} \wedge dq^{i'} &= \varphi_i \frac{\partial E_{i'}^i}{\partial q^k} dq^k \wedge dq^{i'} + E_{i'}^i d\varphi_i \wedge dq^{i'} = \\ &= \varphi_i \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial q^{i'} \partial q^{k'}}}_{\text{simmetrico in } i', k'} \overbrace{dq^{k'} \wedge dq^{i'}}^{\text{antisimmetrico in } i', k'} + d\varphi_i \wedge E_{i'}^i dq^{i'} = \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv 0} = d\varphi_i \wedge dq^i \end{aligned}$$

Capitolo 7

Curve negli spazi affini, rappresentazione in coordinate non affini, e sistemi dinamici

Definizione. (7.1) Chiamiamo curva parametrizzata in uno spazio affine A un'applicazione $\gamma: I \rightarrow A$ da un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ nello spazio affine.

Definizione. (7.2) Considerata un'origine $O \in A$, per la curva γ vi è una rappresentazione vettoriale:

$$\mathbf{x} = \gamma(t) \qquad \text{con } \mathbf{x} = OP$$

che dunque identifica i punti $P \in A$ con il loro vettore posizione rispetto al punto O .

Siano (x^α) delle coordinate cartesiane aventi origine in O . Si possono allora considerare le equazioni parametriche:

$$x^\alpha = \gamma^\alpha(t) \qquad \alpha = 1, \dots, n$$

Interpretazione cinematica. (7.3) Una curva può essere interpretata come moto di un punto P nello spazio affine, se il parametro t viene inteso

come tempo.

Nel caso in cui la curva rappresenti il moto di un punto nello spazio affine tridimensionale euclideo, il generico vettore $OP = \mathbf{x}$ è chiamato vettore posizione.

Definizione. (7.4) *L'immagine della curva, cioè l'insieme*

$$\gamma(I) = \{P \in A \mid \exists t \in I : \gamma(t) = P\}$$

è detta traiettoria o orbita[†].

Definizione. (7.5) *Il vettore tangente alla curva γ nel punto $\gamma(t)$ è il vettore denotato con $\dot{\gamma}(t)$ definito dal limite:*

$$\dot{\gamma}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

Questo nel contesto cinematico prende il nome di velocità istantanea e lo si denota con $\mathbf{v}(t)$.

Campo tangente come curva. (7.6) *Convien interpretare il vettore tangente $\dot{\gamma}(t) = \mathbf{v}(t)$ come vettore applicato nel punto $\gamma(t)$. Ovvero come un'applicazione:*

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}(t) &: I \rightarrow A \times E \\ t &\mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \end{aligned}$$

che viene detta curva tangente della curva $\gamma: I \rightarrow A$.

Definizione. (7.7) *Siano $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}$ una curva e $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ un campo scalare, entrambi almeno di classe C^1 . Definiamo la derivata del campo scalare F lungo la curva γ come:*

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = \langle \mathbf{v}(t), dF \rangle \quad \forall t \in I$$

Questa è la definizione naturale, infatti:

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} \frac{d\gamma^\alpha}{dt}(t) = \frac{\partial F}{\partial x^\alpha} v^\alpha(t) = \langle \mathbf{v}(t), dF \rangle$$

[†] In geometria è questa in realtà la vera e propria curva, ovvero il luogo dei punti definito da $n - 1$ equazioni.

Definizione. (7.8) La curva integrale di un campo vettoriale \mathbf{X} è la curva:

$$\gamma: I \rightarrow A$$

tale che:

- $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$;
- $\forall \gamma(t) \in A$, il vettore tangente $\dot{\gamma}(t)$ coincide con il valore del campo \mathbf{X} in quel punto ovvero:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \mathbf{X} \circ \gamma = \mathbf{X}(\gamma(t)) \\ I &\xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\mathbf{X}} A \times E \\ \dot{\gamma}(t) &: I \rightarrow A \times E\end{aligned}$$

Definizione. (7.9) Diciamo inoltre che la curva integrale è basata nel punto P_0 se $\gamma(0) = P_0$.

Notazione. (7.10) In rappresentazione vettoriale sarebbe:

$$\mathbf{x} = \gamma(t) \text{ curva integrale} \iff \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

Le curve integrali rappresentano i moti delle particelle del fluido secondo l'interpretazione del campo \mathbf{X} come campo di velocità.

Definizione. (7.11) Un campo vettoriale interpretato come campo di velocità viene detto sistema dinamico.

Notazione. (7.12) Un sistema dinamico si può rappresentare dunque come un'equazione differenziale:

- vettoriale:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

- in coordinate affini:

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = X^\alpha(x^\beta)$$

- in coordinate generiche:

$$\frac{dq^i}{dt} = X^i(x^i)$$

In particolare sono n equazioni differenziali ordinarie in forma normale autonome.

7.1 Risoluzione sistemi dinamici

Integrare significa trovare tutte le soluzioni del sistema dinamico e queste costituiscono lo spazio delle soluzioni/spazio dei moti.

Definizione. (7.13) *Dato un sistema dinamico e un punto $P_0 \in A$, parliamo di curva integrale massimale $\gamma_{P_0}: I_{P_0} \rightarrow A$, quando presa un'altra curva integrale $\gamma: I \rightarrow A$, allora:*

$$I \subseteq I_{P_0} \qquad \gamma_{P_0|I} = \gamma$$

Una volta fissate le condizioni iniziali/dati iniziali riusciamo individuare un'unica soluzione del sistema dinamico grazie al

Teorema XXIII.

Teorema di Cauchy

Sia \mathbf{X} un campo vettoriale di classe $C^k (k \geq 1)$ su un dominio M . Fissato un punto $P_0 \in M$ esiste una e una sola curva integrale massimale basata in P_0

$$\gamma_{P_0}: I_{P_0} \rightarrow M$$

Se $I_{P_0} = \mathbb{R}$, \mathbf{X} si dice completo.

Definizione. (7.14) *Il flusso del campo di vettori \mathbf{X} descrive lo spazio delle soluzioni (o insieme di tutte le curve integrali del campo \mathbf{X}). Si definisce come la funzione:*

$$\begin{aligned} \varphi: D \subseteq \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, P_0) &\mapsto \gamma_{P_0}(t) \end{aligned}$$

Teorema XXIV.

Sia \mathbf{X} campo vettoriale di classe $C^k(k \geq 1)$ su un dominio M , allora:

1. Il dominio D del flusso φ è un aperto di $\mathbb{R} \times M$ e $\varphi \in C^k(D)$
2. Sia $V \subseteq M$ aperto, $\delta > 0$ e si consideri $(-\delta, \delta) \times V \subseteq D$. Allora $\forall t \in (-\delta, \delta)$:

$$\begin{aligned}\varphi_t &: V \rightarrow V_t \\ P &\mapsto \varphi(t, P)\end{aligned}$$

è un omomorfismo C^k di V su $V_t \subseteq M$ con $\varphi_t: P \mapsto \varphi(-t, P)$ omeomorfismo inverso

3. Vale:

$$\varphi(t, \varphi(s, P)) = \varphi(t + s, P)$$

$\forall t, s, P$ per cui i due membri hanno significato.

Osservazione. (7.15) Se \mathbf{X} è completo, allora:

- $D = \mathbb{R} \times M$
- $\varphi_t: M \rightarrow M, P \mapsto \varphi_t(P) = \gamma_P(t)$ è una trasformazione C^k di M .

Definizione. (7.16) *Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ i diversi flussi φ_t costituiscono un gruppo ad un parametro, ovvero un'insieme $\{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$ tale che valgono:*

- $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$
- $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_s \circ \varphi_t$
- $\varphi_0 = id_M$
- $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$

Osservazione. (7.17) Ad ogni gruppo ad un parametro si può associare il campo vettoriale \mathbf{X} corrispondente e viceversa. Ovvero questo sono condizioni

necessarie e sufficienti affinché un insieme di curve $\varphi(t, P)$ sia lo spazio delle soluzioni di un certo campo vettoriale.

Definizione. (7.18) Sia $\mathbf{X} \in \mathcal{X}(A)$. Definiamo l'integrale primo di \mathbf{X} come il campo scalare $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\forall \gamma: I \rightarrow A$ curva integrale, vale:

$$F \circ \gamma(t_1) = F \circ \gamma(t_2), \iff \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = 0, \forall t \in I \iff \langle \mathbf{X}, dF \rangle = 0 \\ \forall t_1, t_2 \in I$$

7.2 Velocità e accelerazione in coordinate non affini

Velocità in coordinate non affini. (7.19) Consideriamo una curva γ e delle coordinate non affini (q^i) . La curva è rappresentata da:

$$q^i(t) = \gamma^i(t)$$

Ricordando che $\mathbf{x} = x^i \mathbf{E}_i$, abbiamo che:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}}_{\mathbf{E}_i} \cdot \frac{dq^i}{dt} = v^i \mathbf{E}_i$$

Quindi la velocità in componenti rispetto alle coordinate (q^i) è data da

$$v^i(t) = \frac{dq^i(t)}{dt}$$

Osservazione. (7.20) Come già visto l'espressione del campo di vettori \mathbf{v} non cambia nei due sistemi (\mathbf{c}_α) e (\mathbf{E}_i) , ovvero:

$$\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{c}_\alpha = v^i \mathbf{E}_i$$

Accelerazione in coordinate non affini. (7.21) Nel riferimento affine (\mathbf{c}_α) , l'accelerazione è definita come:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^\alpha}{dt}(t) \mathbf{c}_\alpha = a^\alpha(t) \mathbf{c}_\alpha$$

Ora allora analizziamo $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ passando per le coordinate non affini:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{d}{dt} \mathbf{E}_i = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{\partial}{\partial q^j} (\mathbf{E}_i) \cdot \overbrace{\frac{dq^j}{dt}}^{v^j} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i v^j \Gamma_{ji}^k \mathbf{E}_k$$

Ora scambiano $i \leftrightarrow k$ e raccogliendo otteniamo:

$$\left(\frac{dv^i}{dt} + v^k v^j \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{E}_i = a^i \mathbf{E}_i$$

Quindi si noti che a meno che $\Gamma_{jk}^i = 0$, abbiamo:

$$a^i \neq \frac{dv^i}{dt}$$

Coordinate polari. (7.22) Consideriamo le coordinate polari. Per quanto riguarda la velocità abbiamo:

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{E}_r + \dot{\theta} \mathbf{E}_\theta = v^r \mathbf{E}_r + v^\theta \mathbf{E}_\theta$$

Ora analizziamo l'accelerazione sfruttando l'espressione ottenuta precedentemente:

$$\mathbf{a} = \left(\frac{dv^r}{dt} + v^r v^\theta \Gamma_{r\theta}^r + v^\theta v^\theta \Gamma_{\theta\theta}^r + v^\theta v^r \Gamma_{\theta r}^r + v^r v^r \Gamma_{rr}^r \right) \mathbf{E}_r + \left(\frac{dv^\theta}{dt} + v^r v^\theta \Gamma_{r\theta}^\theta + v^r v^r \Gamma_{rr}^\theta + v^\theta v^r \Gamma_{r\theta}^\theta \right) \mathbf{E}_\theta$$

Ricordando inoltre che $\Gamma_{\theta\theta}^r = -r$ e $\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv^r}{dt} - r v^\theta v^\theta \right) \mathbf{E}_r + \left(\frac{dv^\theta}{dt} + \frac{2}{r} v^\theta v^r \right) \mathbf{E}_\theta &= \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \mathbf{E}_r + \left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} \right) \mathbf{E}_\theta = \\ &= a^r \mathbf{E}_r + a^\theta \mathbf{E}_\theta \end{aligned}$$

Si osservi che ponendo $\mathbf{E}_r = \mathbf{u}$ e $\mathbf{E}_\theta = r\mathbf{v}$ con \mathbf{u} e \mathbf{v} versori nella rappresentazione radiale del moto si ottiene la classica scomposizione:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{radiale}} + \mathbf{a}_{\text{trasversale}}$$

Dalla traiettoria agli enti fondamentali della cinematica. (7.23)

Sia $\mathbf{r} = r(\theta)$. Da esso si possono scrivere tutti gli enti fondamentali della cinematica.

Sia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta(t))\mathbf{u}$ la nostra traiettoria del moto. Studiamo la velocità:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta}\mathbf{u} + r \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \left(\frac{dr}{d\theta} \mathbf{u} + r \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right)$$

Ora utilizzando la costante delle aree $c = r^2 \dot{\theta}$ otteniamo:

$$\frac{c}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \mathbf{u} + r \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right) = c \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \mathbf{u} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} \right)$$

e riconoscendo in $\frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = \boldsymbol{\tau}$, abbiamo che:

$$\mathbf{v} = c \left(-\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{u} + \frac{1}{r} \boldsymbol{\tau} \right)$$

Prendiamo adesso in esame l'accelerazione, sfruttando l'espressione appena ottenuta per la velocità:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = c \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \frac{1}{r} \right) \right) \mathbf{u}$$

Definizione. (7.24) *Uno spazio affine euclideo è una quaterna $(A, E, \delta, \mathbf{g})$, dove (A, E, δ) è uno spazio affine e \mathbf{g} è un tensore metrico su E (considerato come spazio vettoriale euclideo). Ovvero \mathbf{g} è una forma bilineare simmetrica:*

$$\begin{aligned} \mathbf{g}: \mathcal{X}(A) \times \mathcal{X}(A) &\rightarrow \mathcal{F}(A) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\mapsto \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

dove, considerata g come il prodotto scalare su E , $\forall P \in A$ l'immagine è definita come:

$$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y})(P) = g(\mathbf{X}(P), \mathbf{Y}(P))$$

Definizione. (7.25) Definiamo l'*ascissa euclidea* (o *ascissa curvilinea*) una funzione monotona crescente g tale che presa:

$$\begin{aligned} g: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto s(t) \end{aligned}$$

allora

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{g^{ij} \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt}}$$

7.3 Moti geodetici su una superficie

Sia Q una superficie regolare nello spazio tridimensionale con rappresentazione $OP = \mathbf{r}(q^i, q^2)$. Sia assegnata sulla superficie una curva γ di equazioni parametriche $q^i(t) = \gamma^i(t)$.

Il vettore $\mathbf{v}(t)$ tangente alla curva è banalmente tangente anche alla superficie. Se consideriamo invece il suo vettore derivata:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

questo in generale non è tangente alla superficie. Infatti:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{d\mathbf{E}_i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial q^j} \frac{dq^j}{dt} = \frac{dv^i}{dt} \mathbf{E}_i + v^i \frac{dq^j}{dt} (\Gamma_{ji}^k \mathbf{E}_k + B_{ji} \mathbf{N})$$

con \mathbf{N} il vettore normale alla superficie. Quindi:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dv^i}{dt} + v^k \frac{dq^i}{dt} \Gamma_{jk}^i \right) \mathbf{E}_i}_{\text{tangente a } Q} + v^i \frac{dq^j}{dt} B_{ji} \mathbf{N}$$

La componente tangente della derivata della velocità è chiamata derivata intrinseca della velocità/accelerazione intrinseca. Se volessimo scriverla però

rispetto alle coordinate non affini (q^i), essendo $v^i = \frac{dq^i}{dt}$:

$$\mathbf{a}_{\text{intrinseca}}^k = \frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt}$$

Abbiamo così scomposto l'accelerazione come:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{intrinseca}}^k + \mathbf{a}_{\mathbf{N}}$$

Una volta scissa l'accelerazione possiamo finalmente definire cos'è

Definizione. (7.26) Il moto geodetico o moto inerziale su una superficie è il moto in cui:

$$\mathbf{a}_{intrinseca} = 0, \quad \forall t \quad [\mathbf{a} = \mathbf{a}_N]$$

Questa condizione può essere anche rappresentata sotto forma di sistema di equazioni differenziali infatti:

$$\frac{d^2 q^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt} = 0 \longleftrightarrow \begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = v^i \\ \frac{dv^k}{dt} = -\Gamma_{ij}^k v^i v^j \end{cases}$$

Così facendo i moti geodetici diventano le curve integrali di questo sistema dinamico associato al campo vettoriale \mathbf{X} definito sui vettori dello spazio tangente alla superficie Q . Questo scritto come derivazione sarebbe:

$$\mathbf{X} = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} - \Gamma_{ij}^k v^i v^j \frac{\partial}{\partial v^k}$$

\mathbf{X} con un abuso di notazione prende il nome di flusso geodetico. Così facendo assegnato un $P_0 \in Q$ e \mathbf{v}_0 tangente a Q in P_0 , $\exists!$ una curva geodetica massimale basata in P_0 e avente come vettore tangente in $t = 0$ il vettore \mathbf{v}_0 .

Energia cinetica come integrale primo delle geodetiche

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \gamma(t)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = 0$$

$$\frac{d}{dv} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Poichè $\mathbf{a} = \mathbf{a}_N \perp \mathbf{v}$

Quindi l'energia cinetica è un integrale primo delle geodetiche. In particolare il moto è uniforme, ovvero il modulo della velocità è costante lungo le geodetiche.

Capitolo 8

Il modello della visione

8.1 Introduzione

Il modello della visione di Jean Petitot è un tentativo di rappresentare tramite la modellizzazione matematica come gli oggetti ed enti del mondo esterno vengano recepiti, codificati e rappresentati dalla corteccia visuale del nostro cervello, in particolare si sofferma su una modellizzazione del primo stadio di rappresentazione degli oggetti esterni, il cosiddetto *V1*. Ci si chiede appunto come enti geometrici esterni semplici come punti o anche più complessi come linee e forme possano essere interpretate e codificate dal nostro apparato neuro-visivo.

8.2 Il modello

Def La struttura geometrica più importante definita sulla mappa delle fibre che modella il funzionamento ottico di *V1* è chiamata struttura di contatto, denotata con \mathcal{C} .

Il modello geometrico della visione di Petitot rappresenta le connessioni neuronali retina-corteccia visiva nel seguente modo:

$$I \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{\mathbf{X}} A \times E \xrightarrow{\dot{\gamma}} A' \xrightarrow{\mathbf{X}} A' \times E'$$

Dove:

$$\begin{aligned}\gamma &: I \rightarrow A \\ t &\mapsto (x, y)\end{aligned}$$

che poi viene inviato tramite $\hat{\mathbf{X}}$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}}: A &\rightarrow A \times E \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \dot{x}, \dot{y})\end{aligned}$$

Successivamente:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}: A \times E &\rightarrow A' \\ (x, y, \dot{x}, \dot{y}) &\mapsto (x, y, p = \dot{y})\end{aligned}$$

E infine tramite $\mathbf{X} \in \ker \omega$, con $\omega = dy - p dx$:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}: A' &\rightarrow A' \times E' \\ (x, y, p = \dot{y}) &\mapsto (x, y, p = \dot{y}, \dot{x} = 1, \dot{y} = p, \dot{p} = \ddot{y})\end{aligned}$$

Dove Γ è la curva geodetica per g_C ed è definita come:

$$\Gamma = \dot{\gamma}|_{(\dot{x}=1, \dot{y}=p)} \quad \text{lift di Legendre}$$

e invece:

$$g_C(\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) = \delta_{ij} \quad i = 1, 2$$

e $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ che generano il $\ker \omega$.

Bibliografia

- [1] Vivina Barutello. *Modelli Differenziali*. 2023.
- [2] Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa. *Analisi matematica 2*. 2016.