INTEGRALI

29 mar '21

282 $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}dx = \int -1 + \frac{2}{x^2+1}\,dx = -\int dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$

$= 2\arctan x - x + K$

286 $\int \frac{4^{1+2x}}{8^x}dx = \int \frac{4\cdot 16^x}{8^x}\,dx = 4\int 2^x\,dx = 4\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + K$

Integrazione per parti

$$D[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g(x)$$

voglio passare all'integrale

$$\int D[f(x)\,g(x)]\,dx = \int [f'(x)\cdot g(x) + f(x)\,g'(x)]\,dx$$

$$f(x)\,g(x) + K = \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx$$

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

questa formula funziona se posso risolvere in maniera semplice il secondo

↳ integrale del prodotto tra due funzioni

$f(x)$ è detto fattore finito, $g'(x)$ fattore differenziale ex

$$\int x \ln x \, dx =$$

→ non sono uno la derivata dell'altro

$$\frac{1}{2}x^2 \ln x - \int \frac{x^2}{2}\,\frac{1}{x}\,dx = \dots$$

F	D
$\ln x$	$1/x$
$\frac{x^2}{2}$	x

non so integrarla

è la più facile

$$\int x \cdot \ln x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) + k =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 + k}_{F(x)}$$

COMPLETARE

ex $\int x \operatorname{sen} x \, dx =$

$= -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx =$

$= -x \cos x + \operatorname{sen} x + K$

F	D
x	1
$-\cos x$	$\operatorname{sen} x$

Anche se sono entrambe facili da integrare, la derivata di x è 1, quindi mi semplifico la vita

ex $\int \ln x = \int 1 \cdot \ln x =$

$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx =$

$= x \ln x - x + K$

F	D
x	1
$\ln x$	$1/x$

ex

$$\int \operatorname{arcsen} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arcsen} x =$$

F	D
$\operatorname{arcsen} x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
x	1

$$= x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2} \int (-2x)(1-x^2)^{-1/2} \, dx =$$

$$= x \operatorname{arcsen} x + 2\sqrt{1-x^2} + K$$

ex

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{x^2+1} \, dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-1} \cdot 2x \, dx =$$

$$= x \arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + K$$

ex $\int x e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} =$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + K =$

$= -e^{-x}(x+1) + K$

F	D
x	1
$-e^{-x}$	e^{-x}

ex $\int e^{x} \cdot \operatorname{sen} x \, dx =$

$= e^{x}\operatorname{sen} x - \int e^{x} \cos x \, dx$ ⊛ $=$

$= e^{x}\operatorname{sen} x - \left[e^{x}\cos x - \int e^{x}(-\operatorname{sen} x)\,dx \right] =$

$= e^{x}(\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^{x}\operatorname{sen} x \, dx \,;$

F	D
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
e^{x}	e^{x}

⊛

F	D
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
e^{x}	e^{x}

$$\int e^x \cdot \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + K$$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + K \qquad \square$$

Integrali definiti

$$\rightarrow \int_0^4 \sqrt{4-x} \, dx = \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3} \right]_0^4 =$$

$$= +\frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3} > 0$$

$$\int \sqrt{4-x} \, dx =$$

$$= \int (4-x)^{1/2} \, dx =$$

$$= -\int (4-x)^{1/2} \cdot (-1) \, dx =$$

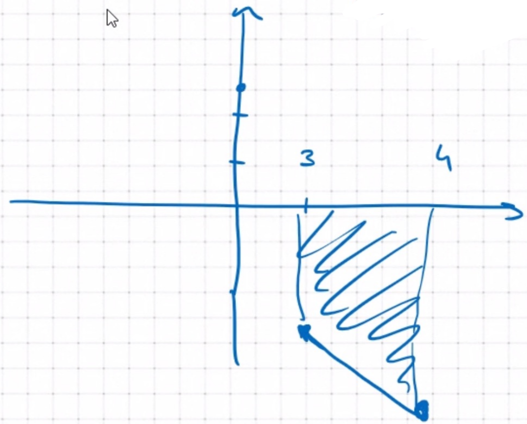
$$= -\frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3}$$

$$\int_3^4 (5-6x)\,dx =$$

$y = 5-6x$

$f(3) = -18+5 = -13$

$f(4) = 5-24 = -19$



facendo il calcolo viene <u>negativo</u>

$\downarrow$

l'integrale definito rappresenta l'area solo se $f(x) \geq 0$ su tutto l'intervallo

Quando la funzione è negativa posso vederla come l'asse delle x meno la funzione stessa, e quindi l'area viene negativa

$$\int_a^b (0-r)\,dx = -\int_a^b r\,dx$$

$$\to \int_{-1}^{1} \frac{1}{x-2}\,dx \rightsquigarrow A = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-2}\,dx = -\Big[\ln|x-2|\Big]_{-1}^{1} =$$

$= -(\ln 1 - \ln 3) = \ln 3$

Aggiungere

grafico