Esercizio Verifica

Davide Peccioli

11 gen 2021

Testo

i. Determinare i parametri $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la curva di equazione

$$y = f(x) = \frac{ax^3}{x^2 - b}$$

abbia nel punto $P\left(1; \frac{1}{3}\right)$ la tangente r perpendicolare alla retta

$$t : 18x + 22y + 99 = 0$$

ii. Posto $a = -1$ e $b = 4$

a. Calcolare la derivata della funzione

b. Studiare e tracciare il grafico probabile della funzione ottenuta

i.

Il testo impone le seguenti condizioni:

- il punto P appartiene alla curva;
- la retta tangente alla curva in P è perpendicolare alla retta t.

Poiché l'equazione generica di una retta tangente alla curva $f(x)$ in un suo punto di ascissa $x = x_0$ è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

posso scrivere queste condizioni come sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3} = \dfrac{a \cdot (1)^3}{(1)^2 - b} \\ y - 1/3 = f'(1)(x - 1) \perp 18x + 22y + 99 = 0 \end{cases}$$

Per risolvere la seconda condizione è necessario iniziare calcolando la derivata prima della funzione.

$$f'(x) = \frac{D[ax^3] \cdot (x^2 - b) - (ax^3) \cdot D[x^2 - b]}{(x^2 - b)^2} =$$

$$= \frac{3ax^2(x^2 - b) - 2ax^4}{(x^2 - b)^2} = ax^2 \cdot \frac{x^2 - 3b}{(x^2 - b)^2}$$

$$f'(1) = a \cdot \frac{1 - 3b}{(1 - b)^2}$$

Si noti inoltre che affinché le due rette siano perpendicolari, deve essere rispettata questa condizione

$$r \perp t \iff 18 \cdot f'(1) - 22 = 0 \implies f'(1) = 11/9$$

Il sistema da risolvere, in definitiva, si riduce a

$$\begin{cases} 1/3 = \dfrac{a}{1 - b} \\ \dfrac{a(1 - 3b)}{(1 - b)^2} = 11/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a = 1 - b \\ 11(1 - b)^2 = 9a(1 - 3b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = (1 - b)/3 \\ 11(1 - b)^2 = 3(1 - b)(1 - 3b) \end{cases}$$

$$(1 - b)[11(1 - b) - 3(1 - 3b)] = 0$$

$$b = 1 \quad \vee \quad 11 - 11b - 3 + 9b = 0 \implies b = 4$$

$$\boxed{(a, b) \in \{(0; 1); (-1; 4)\}}$$

ii.

$$y = -\frac{x^3}{x^2 - 4}$$

Derivata

$$y' = \frac{D[-x^3] \cdot (x^2 - 4) - (-x^3) \cdot D[x^2 - 4]}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{(-3x^2)(x^2 - 4) - (-x^3)(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-3x^4 + 12x^2 + 2x^4}{(x^2 - 4)^2} =$$

$$= \frac{12x^2 - x^4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$\boxed{y' = \frac{12x^2 - x^4}{(x^2 - 4)^2}}$$

Grafico probabile

CE $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

Zeri $f(x) = 0 \iff x = 0$

Limiti

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left[-\frac{x^3}{x^2 - 4} \right] &= \infty \\
\lim_{x \to -2^-} \left[-\frac{x^3}{x^2 - 4} \right] &= \frac{8}{0^+} = +\infty \\
\lim_{x \to -2^+} \left[-\frac{x^3}{x^2 - 4} \right] &= \frac{8}{0^-} = -\infty \\
\lim_{x \to 2^-} \left[-\frac{x^3}{x^2 - 4} \right] &= -\frac{8}{0^-} = +\infty \\
\lim_{x \to 2^+} \left[-\frac{x^3}{x^2 - 4} \right] &= -\frac{8}{0^+} = -\infty
\end{aligned}
$$

Le rette

$$\boxed{x = -2 \qquad x = 2}$$

sono **asintoti orizzontali completi**

Asintoti obliqui Gli asintoti obliqui, nella forma $y = mx + q$, si ricaveranno per mezzo dei seguenti passaggi.

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to \infty} \left[-\frac{x^3}{x^3 - 4x} \right] = -1 \\
q &= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{-x^3 + x^3 - 4x}{x^2 - 4} \right] = 0
\end{aligned}
$$

La seguente retta, quindi, è asintoto obliquo della funzione

$$\boxed{y = -x}$$

Piano