

Analisi numerica e applicazioni

Davide Peccioli

Classe 5^a H

Indice

Analisi numerica e applicazioni	ii
1 Studio di funzione	1
1.1 Scelta del parametro	1
1.2 Studio di funzione	2
2 Algoritmo analisi numerica	8
2.1 Metodo di bisezione	8
2.2 Metodo di Newton	10
2.3 Considerazioni finali	11
3 Applicazioni analisi numerica	13
3.1 Interpolazione di Lagrange	13
3.2 Interpolazione di Newton	14
3.3 Considerazioni finali	18
4 Problema di fisica	19
Allegato I	23
Allegato II	24
Figure e tabelle	25
Bibliografia	26

Analisi numerica e applicazioni

Consegna

L'analisi numerica si occupa della ricerca delle procedure di calcolo per la determinazione di soluzioni approssimate di problemi ambientati in un insieme numerico continuo.

Il candidato esponga le principali metodologie utilizzate in un ambito scelto (ricerca soluzioni di equazioni, integrazione, etc.) e, in particolare, è richiesto di:

1. studiare una funzione del tipo $y = x^5 + kx + 1$, avendo scelto un parametro k ($k < 2$), commentando in modo puntuale gli aspetti teorici utilizzati;
2. fornire indicazioni per lo sviluppo di un algoritmo che permetta di individuare gli zeri della funzione scelta;
3. esporre un'applicazioni matematica o fisica (es. calcolo aree, interpolazioni...).
4. Una forza \vec{F} nella direzione dell'asse x agisce su un oggetto in moto lungo l'asse x . Se l'intensità della forza è data da $F = 10e^{-x/2,0}$ N trovare il lavoro svolto da \vec{F} mentre l'oggetto si sposta da $x = 0$ a $x = 2,0$ m
 - (a) tracciando la curva $F(x)$ e valutando per via grafica l'area sottesa dalla curva e
 - (b) per via analitica, calcolando l'integrale.

Studio di funzione

Si studi la funzione

$$y = f(x) = x^5 + kx + 1 \quad (1.1)$$

1.1 Scelta del parametro

Prima di studiare la funzione in questione è necessario assegnare al parametro k un valore reale ($k < 2$), tale per cui la funzione presenti uno zero doppio. Questa scelta è dettata dalle considerazioni che si possono fare proprio in merito a tale punto.

Utilizzando il **teorema fondamentale dell'algebra** [3, pp. 148–150], posso scrivere il polinomio $f(x)$ come:

$$f(x) = (x - \alpha) \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma) \cdot (x - \delta) \cdot (x - \varepsilon)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sono le radici, reali o complesse, del polinomio.

Dal momento che si ricerca un polinomio con uno zero doppio, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} f(x) &= \\ &= (x - \alpha)^2 \cdot (x - \beta) \cdot (x - \gamma) \cdot (x - \delta) = \\ &= (x - \alpha)^2 \cdot p(x) \end{aligned}$$

da cui

$$p(x) = \frac{f(x)}{(x - \alpha)^2}$$

Per il **teorema di Ruffini** [2, vol. 1, p. 415] posso quindi affermare che la divisione $\frac{f(x)}{(x - \alpha)^2}$ non deve avere restoⁱ. Questa sarà proprio la condizione

ⁱ Il teorema di Ruffini afferma che

Un polinomio $P(X)$ è divisibile per $(x - a)$ se e solo se $P(a) = 0$.

Dal momento che per ipotesi α è radice doppia del polinomio, $f(x)$ è divisibile doppiamente per $(x - \alpha)$

che permetterà di trovare un valore di k adeguato. Espandendo $(x - \alpha)^2$ come $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$ si svolge la divisione polinomiale:

x^5	$+0x^4$	$+0x^3$	$+0x^2$	$+kx$	$+1$	$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2$
x^5	$-2\alpha x^4$	$+\alpha^2 x^3$				$x^3 + 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + 4\alpha^3$
$2\alpha x^4$	$-\alpha^2 x^3$					
$2\alpha x^4$	$-4\alpha^2 x^3$	$+2\alpha^3 x^2$				
	$3\alpha^2 x^3$	$-2\alpha^3 x^2$	$+kx$			
	$3\alpha^2 x^3$	$+6\alpha^3 x^2$	$+3\alpha^4 x$			
		$4\alpha^3 x^2$	$(k - 3\alpha^4)x$	$+1$		
		$4\alpha^3 x^2$	$-8\alpha^4 x$	$+4\alpha^5$		
			$(k + 5\alpha^4)x$	$-4\alpha^5 + 1$		

Il cui resto $r(x)$ è

$$r(x) = (k + 5\alpha^4)x - 4\alpha^5 + 1$$

Per le condizioni esposte precedentemente

$$r(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

da cui

$$\begin{cases} k + 5\alpha^4 = 0 \\ -4\alpha^5 + 1 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono

$$\alpha = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$$

$$k = -\frac{5}{2\sqrt[5]{8}}$$

La funzione da studiare diventa quindi

$$y = f(x) = x^5 - \frac{5}{2\sqrt[5]{8}} \cdot x + 1 \quad (1.2)$$

1.2 Studio di funzione

$$y = f(x) = x^5 - \frac{5}{2\sqrt[5]{8}} \cdot x + 1$$

Campo di esistenza

Come per tutte le funzioni polinomiali, il campo di esistenza della funzione è

$$x \in \mathbb{R}$$

Limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^5 - \frac{5}{2\sqrt[5]{8}} \cdot x + 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^5 - \frac{5}{2\sqrt[5]{8}} \cdot x + 1 \right) = -\infty$$

Essendo una funzione polinomiale di quinto grado, sicuramente non presenta asintoti obliqui.

Zeri

Abbiamo definito in precedenza $f(x) = (x - \alpha)^2 \cdot (x^3 + 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + 4\alpha^3)$, con $\alpha = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$. Pertanto

$$f(x) = 0 \iff (x - \alpha) = 0 \vee (x^3 + 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + 4\alpha^3) = 0$$

La prima equazione:

$$x - \alpha = 0 \implies x = \alpha$$

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$$

La seconda è una equazione di terzo grado, la cui risoluzione è ben illustrata in Equazioni di terzo e quarto grado [5, pp. 1-4]:

$$x^3 + 2\alpha x^2 + 3\alpha^2 x + 4\alpha^3 = 0$$

Applicando il secondo principio di equivalenza per le equazioni, si moltiplichino per 27 entrambi i membri:

$$27x^3 + 54\alpha x^2 + 81\alpha^2 x + 108\alpha^3 = 0$$

Sia $t = 3x + 2\alpha$, da cui $x = (t - 2\alpha)/3$

$$27\left(\frac{t - 2\alpha}{3}\right)^3 + 54\alpha\left(\frac{t - 2\alpha}{3}\right)^2 + 81\alpha^2\left(\frac{t - 2\alpha}{3}\right) + 108\alpha^3 = 0$$

...

$$t^3 + (27\alpha^2 - 12\alpha^2)t + 108\alpha^3 - 54\alpha^3 + 16\alpha^3 = 0$$

$$t^3 + 15\alpha^2 t + 70\alpha^3 = 0$$

Si cerca t nella forma $t = u + v$

$$(u + v)^3 + 15\alpha^2(u + v) + 70\alpha^3 = 0$$

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 - 3u^2v + 3uv^2 + 15\alpha^2(u + v) + 70\alpha^3 &= \\ = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 15\alpha^2(u + v) + 70\alpha^3 &= \\ = u^3 + v^3 + (3uv + 15\alpha^2)(u + v) + 70\alpha^3 &= 0 \end{aligned}$$

Liceo Classico Scientifico Musicale “Isaac Newton”
via Paleologi 22, Chivasso (TO)

Siccome esistono tanti modi per scrivere t come $t = u + v$ è possibile imporre un'ulteriore condizione. Per semplicità di calcolo, sia

$$3uv + 15\alpha^2 = 0$$

da cui

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -70\alpha^3 \\ 3uv = -15\alpha^2 \end{cases} \implies \begin{cases} u^3 + v^3 = -70\alpha^3 \\ 27u^3v^3 = -3375\alpha^6 \end{cases}$$

Siano $s_1 = u^3$ e $s_2 = v^3$

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = -70\alpha^3 \\ s_1 \cdot s_2 = -125\alpha^6 \end{cases}$$

Risolvere questo sistema significa risolvere l'equazione di secondo grado

$$\begin{aligned} s^2 + (70\alpha^3)s - 125\alpha^6 &= 0 \\ s_{1,2} &= -\frac{70\alpha^3}{2} \pm \sqrt{\frac{4900\alpha^6}{4} + 125\alpha^6} \\ s_{1,2} &= -35\alpha^3 \pm \sqrt{1350\alpha^6} \\ \begin{cases} s_1 = (-35 + 15\sqrt{6})\alpha^3 \\ s_2 = -(35 + 15\sqrt{6})\alpha^3 \end{cases} \end{aligned}$$

Riprendendo le equazioni precedenti

$$\begin{aligned} t = u + v &= \\ &= \sqrt[3]{s_1} + \sqrt[3]{s_2} = \alpha \sqrt[3]{-35 + 15\sqrt{6}} - \alpha \sqrt[3]{35 + 15\sqrt{6}} = \\ &\quad \alpha \left[\sqrt[3]{-35 + 15\sqrt{6}} - \sqrt[3]{35 + 15\sqrt{6}} \right] \end{aligned}$$

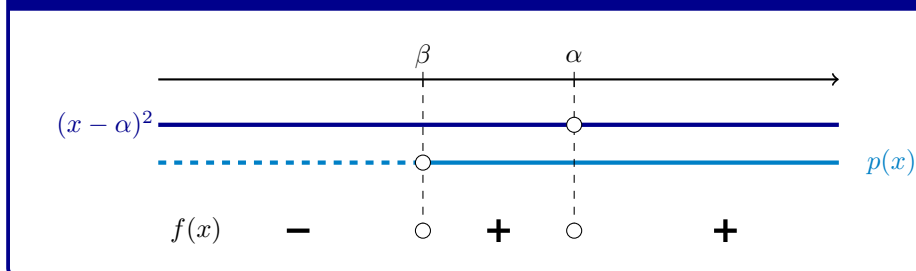
da cui, dato che $x = t/3 - 2a/3$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha}{3} \cdot \left[\sqrt[3]{-35 + 15\sqrt{6}} - \sqrt[3]{35 + 15\sqrt{6}} - 2 \right] = \\ &= \frac{\sqrt[3]{-35 + 15\sqrt{6}} - \sqrt[3]{35 + 15\sqrt{6}} - 2}{3\sqrt[5]{4}} \approx \\ &\quad \approx -1,2509430053151 \end{aligned}$$

$x \approx -1,2509430053151$

Sia questo numero β .

Figura 1.1: Studio del segno della funzione (2)



Segno

$$y = (x - \alpha)^2 \cdot p(x)$$

$p(x)$ è un polinomio di terzo grado, con un'unica intersezione con l'asse delle x (in $x = \beta$, vedasi dimostrazione precedente). Essendo una funzione continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$, è possibile affermare che tutte le immagini dei punti nell'intervallo $(-\infty; \beta)$ avranno segno concorde; allo stesso modo per le immagini dei punti nell'intervallo $(\beta; +\infty)$ ⁱⁱ.

Considerato che $(x - \alpha)^2 > 0 \forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$, la funzione $p(x)$ sarà avrà segno concorde a $f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$. Per $x = \alpha$, essendo $\alpha \neq \beta$ e $\alpha > \beta$, $p(\alpha)$ avrà lo stesso segno di tutti gli altri punti nell'intervallo $(\beta; +\infty)$. Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) < 0 \implies p(x) < 0 \forall x \in (-\infty; \beta)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) > 0 \implies p(x) > 0 \forall x \in (\beta; +\infty)$$

È possibile ora studiare il segno della funzione $y = f(x)$, come mostrato alla figura 1.1

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in (\beta; \alpha) \cup (\alpha; +\infty)$$

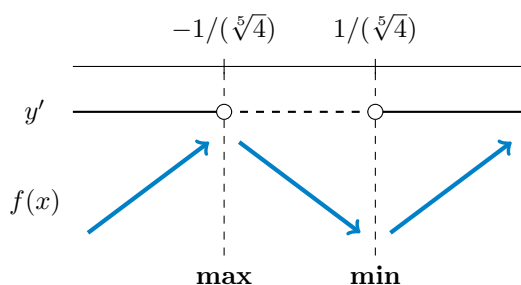
Derivata prima

$$y' = 5x^4 - \frac{5}{2\sqrt[5]{8}}$$

Il segno della derivata prima rappresenta se la funzione stia crescendo o decrescendo; quando la derivata prima si annulla la funzione avrà un **punto stazionario**.

ⁱⁱ Ragionando per assurdo, si ammetta che nell'intervallo $(-\infty; \beta)$ esistano due punti la cui immagine abbia segno discorde. Siano questi punti a e b . Si consideri l'intervallo $[a; b]$: è possibile applicare il **teorema dell'esistenza degli zeri**, che afferma che nell'intervallo considerato esiste almeno uno zero. Questo va contro l'ipotesi iniziale che β sia l'unico zero della funzione. Si ragioni allo stesso modo per l'intervallo $(\beta; +\infty)$.

Figura 1.2: Studio del segno della derivata prima della funzione (2)



$$y' = 0 \implies x^4 = \frac{1}{2\sqrt[5]{8}} \implies x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2\sqrt[5]{8}}} = \pm \frac{1}{\sqrt[5]{4}}$$

Questi sono i punti stazionari della funzione. Studiando il segno della derivata sarà possibile stabilire se siano anche massimi o minimi.

$$y' > 0 \implies 5x^4 - \frac{5}{2\sqrt[5]{8}} > 0 \implies (x^2)^2 > \frac{1}{2\sqrt[5]{8}}$$

$$x^2 > \sqrt{\frac{1}{2\sqrt[5]{8}}}$$

∨

$$x^2 < -\sqrt{\frac{1}{2\sqrt[5]{8}}} \quad \text{mai}$$

$$x^2 > \sqrt{\frac{1}{2\sqrt[5]{8}}} \implies x > \frac{1}{\sqrt[5]{4}} \vee x < -\frac{1}{\sqrt[5]{4}}$$

Pertanto

$$y' > 0 \quad \forall x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt[5]{4}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[5]{4}}; +\infty\right)$$

Come si può vedere dal grafico riportato alla figura 1.2, il punto

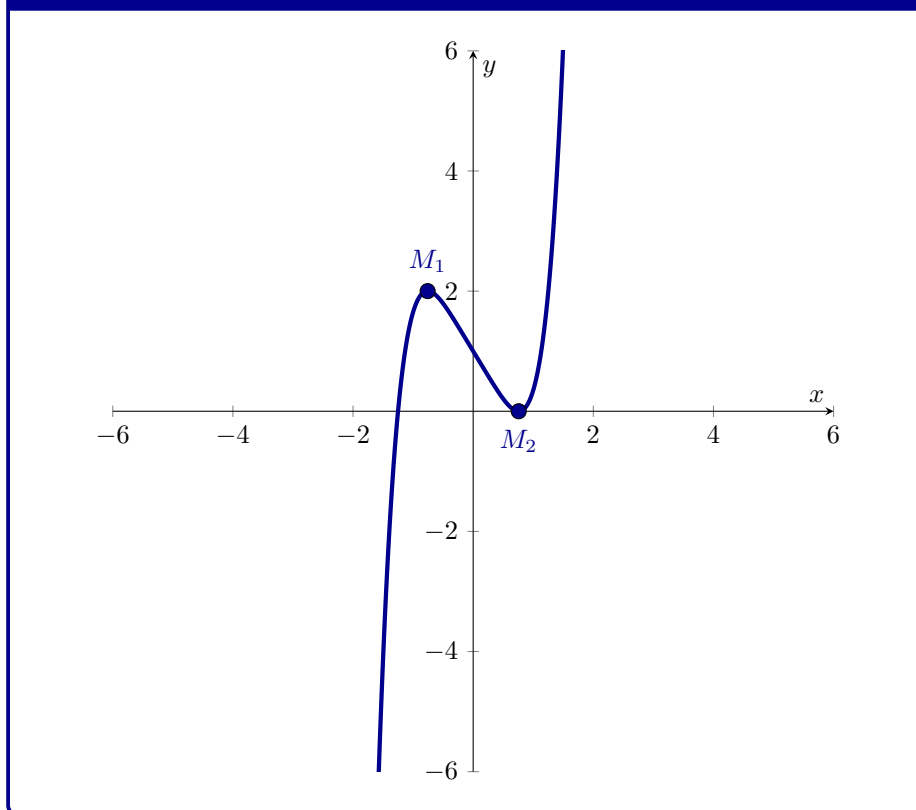
$$M_1\left(-\frac{1}{\sqrt[5]{4}}; 2\right)$$

è punto di **massimo**, mentre il punto

$$M_2\left(\frac{1}{\sqrt[5]{4}}; 0\right)$$

è punto di **minimo**, nonché zero della funzione.

Figura 1.3: Grafico della funzione (2)



Derivata seconda

$$y'' = 20x^3$$

Lo studio del segno della derivata seconda fornisce informazioni sulla concavità di una funzione: quando la derivata seconda è positiva, la concavità della funzione è rivolta verso l'alto, quando la derivata seconda è negativa la concavità della funzione è rivolta verso il basso, e quando la derivata seconda si annulla la funzione ha un **flesso obliquo**, punto in cui la funzione cambia concavità.

$$\begin{aligned} y'' &= 0 && \iff x = 0 \\ y'' &> 0 && \forall x \in (0; +\infty) \\ y'' &< 0 && \forall x \in (-\infty; 0) \end{aligned}$$

Ora è possibile disegnare la funzione su un piano cartesiano, come mostrato nella figura 1.3

Algoritmo analisi numerica

Dal momento che la funzione è stata scelta appositamente (variando k) per avere uno zero doppio, è stato possibile ricavare entrambi gli zeri analiticamente, con precisione assoluta.

Ciò nonostante non è sempre possibile ricavare analiticamente (per radicali) gli zeri di una funzione di quinto grado. La teoria di Evariste Galois, dimostrata poi in seguito, era proprio che non potesse esistere una formula risolutiva per radicali per equazioni generali dal quinto grado in su [5, p. 12].

Ci sono diversi algoritmi che permettono di trovare “empiricamente” gli zeri delle funzioni: il risultato non sarà mai perfetto, ma solo una approssimazione, arbitrariamente buona, dello zero reale. Proprio questo è l’ambito di studio dell’**analisi numerica**:

l’analisi numerica è una branca della matematica che si occupa di individuare, analizzare e implementare algoritmi per la risoluzione approssimata di problemi matematici in genere, che possono scaturire da pure speculazioni, da reali esigenze di ricerca, o da simulazioni in campo tecnologico finalizzate alla progettazione di dispositivi complessiⁱ.

Iniziando con delle osservazioni di carattere generale (precedentemente dimostrate) sulla funzione si noti che $y = f(x)$ è una funzione continua e derivabile lungo tutto il suo dominio.

Si analizzino ora distintamente gli zeri della funzione $f(x)$. L’obiettivo è di ricavare analiticamente i valori di α e di β , ovvero i valori tali per cui la funzione si annulli.

2.1 Metodo di bisezione

Per ricavare il valore di β è possibile utilizzare il metodo di bisezione, che si basa interamente sul teorema di Bolzano: l’intervallo su cui è possibile applicare l’algoritmo deve rispettare le stesse ipotesi proprio di questo teorema:

- la funzione deve essere continua nell’intervallo;
- i due estremi dell’intervallo devono avere immagini di segno discorde.

ⁱ [1] ANALISI NUMERICA. URL: https://www.treccani.it/enciclopedia/analisi-numerica_%28Enciclopedia-Italiana%29/

Liceo Classico Scientifico Musicale “**Isaac Newton**”
via Paleologi 22, Chivasso (TO)

Proprio in virtù del sovracitato **teorema di Bolzano** [2, vol. 4B, p. 1436] è assicurato che nell’intervallo prescelto vi sia almeno uno zero. Per semplicità si richiede che nell’intervallo considerato ve ne sia al più uno. Ne consegue che nell’intervallo vi sia una ed una sola radice della funzione, β .

Questo algoritmo iterativo suddivide l’intervallo in due, e ad ogni passaggio individua quale metà contiene lo zero. Si veda [9, pp. 48–53] per un’analisi più approfondita.

Si inizi ponendo $a_1 = a$ e $b_1 = b$, e sia β_1 il punto medio di $[a; b]$

$$\beta_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

- Se $f(\beta_1) = 0$ allora $\beta = m_1$;
- se $f(\beta_1) \neq 0$ allora avrà necessariamente lo stesso segno di uno tra $f(a_1)$ e $f(b_1)$
 - se $f(\beta_1)$ e $f(a_1)$ hanno lo stesso segno allora $\beta \in [\beta_1; b_1]$; siano $a_2 = \beta_1$ e $b_2 = b_1$;
 - se $f(\beta_1)$ e $f(b_1)$ hanno lo stesso segno allora $\beta \in [a_1; \beta_1]$; siano $a_2 = a_1$ e $b_2 = \beta_1$;

Si riapplichino lo stesso processo per l’intervallo $[a_2; b_2]$, ed in generale ad ogni generico intervallo $[a_n; b_n]$ ottenuto dall’iterazione dell’algoritmo, fino a giungere ad una condizione che soddisfi il criterio di arresto prescelto. In particolar modo, nel programma scritto per eseguire questo algoritmo, si utilizza come criterio d’arresto il raggiungimento di una precisione di soglia; l’algoritmo di fermerà quando

$$|f(\beta_n)| < 1 \cdot 10^{-15}$$

Calando questo algoritmo nel caso specifico, si noti ad esempio che

$$\begin{aligned} f(-2) &\approx -27,701 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

L’intervallo $[-2; 0]$ permette di applicare l’algoritmo di bisezione per trovare il valore di β . Nella tabella 2.1 sono mostrate dieci iterazioni dell’algoritmo.

L’**allegato I** mostra il codice necessario, commentato, scritto in **Octave**, per eseguire l’algoritmo nell’intervallo prescelto. Il valore di β trovato empiricamente è quindi

$$\beta = -1.250943005315172$$

Si noti come questo valore sia corretto almeno fino alla quattordicesima cifra significativa, in quanto il valore di β calcolato per via analitica è

$$\beta = -1,2509430053151\dots$$

Table 2.1: Algoritmo di bisezione applicato a $f(x)$

a_n	b_n	β_n	$f(a_n)$	$f(\beta_n)$	$f(b_n)$
-2	0	-1	-27,701	1,649	1
-2	-1	-1,5	-27,701	-4,119	1,649
-1,5	-1	-1,25	-4,119	0,009	1,649
-1,5	-1,25	-1,375	-4,119	-1,646	0,009
-1,375	-1,25	-1,312	-1,646	-0,730	0,009
-1,312	-1,25	-1,281	-0,730	-0,339	0,009
-1,281	-1,25	-1,265	-0,339	-0,159	0,009
-1,265	-1,25	-1,257	-0,159	-0,073	0,009
-1,257	-1,25	-1,253	-0,073	-0,031	0,009

2.2 Metodo di Newton

Si noti come il metodo di bisezione non sia applicabile alla funzione per individuare lo zero in $x = \alpha$, in quanto $f(x) \geq 0 \forall x \in (\beta; +\infty)$, con $\alpha > \beta$: non è possibile individuare un intervallo con un solo zero tale per cui gli estremi presentino immagini di segno discorde.ⁱⁱ

È necessario quindi un altro algoritmo che permetta di calcolare lo zero doppio della funzione. Si presta a tale scopo l'algoritmo di **Newton**, o delle tangenti. Si rimanda a [9, pp. 67–71] per un ulteriore approfondimento.

Sia α_0 una iniziale approssimazione dello zero α di $f(x)$, e si calcolino i primi due termini della serie di Taylorⁱⁱⁱ per $f(x)$ in un intorno di α_0 :

$$f(x) = f(\alpha_0) + (x - \alpha_0) \cdot f'(\alpha_0)$$

In particolare

$$f(\alpha) = f(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) \cdot f'(\alpha_0)$$

Noto che $f(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} f(\alpha_0) + (\alpha - \alpha_0) \cdot f'(\alpha_0) &= 0 \\ \alpha &= \alpha_0 - \frac{f(\alpha_0)}{f'(\alpha_0)} \end{aligned}$$

ⁱⁱ Ogni punto con immagine negativa è minore di β , mentre ogni punto con immagine positiva è maggiore di β : necessariamente un generico intervallo I che rispetti le ipotesi del teorema di Bolzano e tale per cui $\alpha \in I$, deve contenere il punto $x = \beta$, contraddicendo l'ipotesi che vi sia un unico zero della funzione in I

ⁱⁱⁱ Per approfondimenti si rimanda a [4, pp. 128–130]

Liceo Classico Scientifico Musicale “Isaac Newton”
via Paleologi 22, Chivasso (TO)

Questo pone le basi per l'algoritmo di Newton: essendo il polinomio di Taylor una approssimazione della funzione, il valore di α valutato con questo metodo non sarà preciso. Si definisce quindi una successione che permette di calcolare un'approssimazione sempre più precisa del valore di α :

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{f(\alpha_{n-1})}{f'(\alpha_{n-1})} \quad (2.1)$$

Sostituendo con l'espressione analitica di $f(x)$ e $f'(x)$:

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} - \frac{(\alpha_{n-1})^5 - 5/(2\sqrt[5]{8}) \cdot (\alpha_{n-1}) + 1}{5 \cdot (\alpha_{n-1})^4 - 5/(2\sqrt[5]{8})}$$

È chiaro dall'equazione (2.1) che il metodo di Newton non possa essere continuato se per un certo α_{n-1} vale $f'(\alpha_{n-1}) = 0$. Si noti come la derivata prima della funzione si annulli proprio nello zero, per $x = \alpha$: dal momento che l'algoritmo di Newton ricava un'approssimazione dello zero, non si raggiungerà mai il caso in cui non si possa calcolare il valore successivo α_n .

Vedendo le cose da un altro punto di vista, iniziando con l'approssimazione α_0 , l'approssimazione α_1 è l'intercetta con l'asse delle x della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto $(\alpha_0; f(\alpha_0))$. L'approssimazione α_2 è l'intercetta con l'asse delle x della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto $(\alpha_1; f(\alpha_1))$, e così via, come mostrato dalla figura 2.2.

La tabella 2.3 mostra il calcolo dei successivi valori di α_n partendo da una approssimazione $\alpha_0 = 1$. L'allegato II mostra il codice, scritto in Octave, che fa svolgere al computer le iterazioni necessarie a calcolare il valore di α . Il valore di α trovato empiricamente è quindi

$$\alpha = 0.757858292385600$$

Si noti come questo valore sia corretto almeno fino alla settima cifra significativa, in quanto il valore di α calcolato per via analitica è

$$\alpha = 0.757858283255199 \dots$$

2.3 Considerazioni finali

L'algoritmo di bisezione ha trovato il valore dello zero con 52 iterazioni, mentre quello di Newton con 25, a parità di condizioni di arresto. Ciò nonostante, l'algoritmo di bisezione ha calcolato il risultato con una precisione ben maggiore rispetto a quello di Newton (14 cifre significative rispetto alle 7).

Per l'algoritmo delle tangenti 25 iterazioni sono molte: questo è legato al fatto che $f'(\alpha) = 0$: questo rallenta parecchio l'avvicinarsi di α_n al valore reale α . Inoltre, data questa caratteristica della funzione, non è possibile dimostrare la convergenza della serie; pertanto, prima di applicare effettivamente il metodo di Newton non si poteva avere la certezza di ottenere un risultato.

Figura 2.2: Interpretazione grafica del metodo di Newton

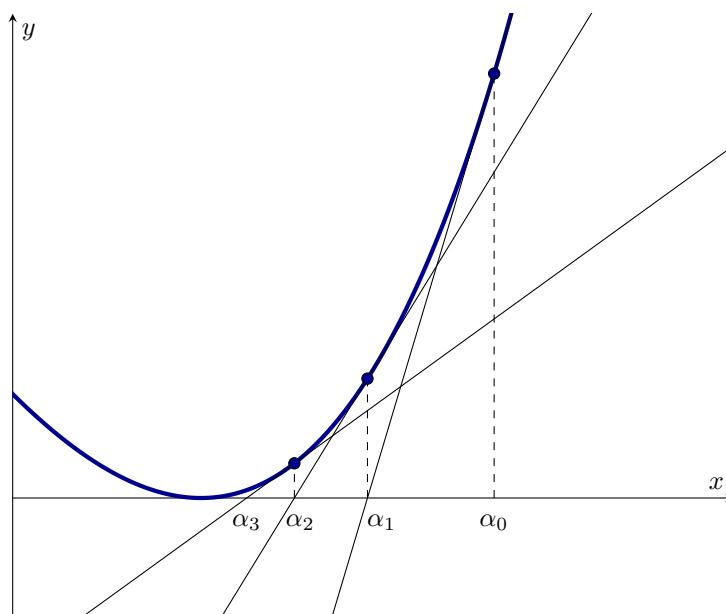


Table 2.3: Algoritmo di Newton applicato a $f(x)$

	α_n	$f(\alpha_n)$	$f'(\alpha_n)$
α_0	1	0,350 615	3,350 615
α_1	0,895 358	0,098 628	1,563 956
α_2	0,832 295	0,026 605	0,749 882
α_3	0,796 816	0,006 954	0,366 202
α_4	0,777 825	0,001 782	0,180 809
α_5	0,767 971	0,000 451	0,089 817
α_6	0,762 948	0,000 114	0,044 760
α_7	0,760 412	0,000 028	0,022 342
α_8	0,759 137	0,000 007	0,011 162

Applicazioni analisi numerica

Una interessante applicazione matematica dell’analisi numerica, oltre al mero calcolo degli zeri di una funzione, è l’interpolazione di una funzione:

Interpolazione: in matematica, procedimento più o meno rigoroso mediante il quale, partendo da alcuni valori noti di una grandezza o funzione in un certo intervallo, si stimano altri valori dello stesso intervalloⁱ.

Il problema di determinare un polinomio che passi attraverso gli $n + 1$ punti distinti è appunto detta **interpolazione**.

3.1 Interpolazione di Lagrange

La principale fonte per la trattazione di questo argomento è [9, pp. 106–114]. Consideriamo la costruzione di un polinomio di grado al più n che passi attraverso gli $n + 1$ punti

$$(x_0; y_0); (x_1; y_1); \dots; (x_n; y_n);$$

Si costruisca, per ogni $\lambda = 0; 1; \dots; n$, una funzione $L_{n,\lambda}(x)$ con le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} L_{n,\lambda}(x_i) = 0 & \text{quando } i \neq \lambda \\ L_{n,\lambda}(x_\lambda) = 1 \end{cases}$$

Per soddisfare che $L_{n,\lambda}(x_i) = 0$ quando $i \neq \lambda$, è necessario che il numeratore di $L_{n,\lambda}(x)$ contenga il termine

$$(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{\lambda-1})(x - x_{\lambda+1}) \cdots (x - x_n)$$

Per soddisfare che $L_{n,\lambda}(x_\lambda) = 1$, il denominatore di $L_{n,\lambda}(x)$ deve essere questo stesso termine ma calcolato quando $x = x_\lambda$. Quindi

$$L_{n,\lambda}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{\lambda-1})(x - x_{\lambda+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_\lambda - x_0)(x_\lambda - x_1) \cdots (x_\lambda - x_{\lambda-1})(x_\lambda - x_{\lambda+1}) \cdots (x_\lambda - x_n)} \quad (3.1)$$

ⁱ [8] interpolazione. URL: <https://www.treccani.it/vocabolario/interpolazione/>, seconda definizione

Il polinomio interpolante di **Lagrange** è dato da:

$$P(x) = \sum_{\lambda=0}^n y_{\lambda} \cdot L_{n,\lambda}(x) \quad (3.2)$$

Quando il valore x assumerà una qualunque valore x_j tra x_0, x_1, \dots, x_n , l'unico polinomio $L_{n,\lambda}$ che varrà 1 sarà quello per $\lambda = j$, mentre tutti gli altri $L_{n,\lambda}$ con $\lambda \neq j$ varranno 0. Ne consegue che $P(x_j) = 1 \cdot y_j = y_j$

La figura 3.1 mostra il polinomio $P(x)$ di Lagrange passante per tre punti

$$\begin{aligned} P_1(0; 1) \\ P_2(1/2; \sqrt{e}) \\ P_3(1; e) \end{aligned}$$

appartenenti ad una stessa curva $y = e^x$ (presente anch'essa sul grafico).

$$\begin{aligned} L_{3;1} &= \frac{(x - 1/2)(x - 1)}{(0 - 1/2)(0 - 1)} = (2x - 1)(x - 1) \\ L_{3;2} &= \frac{(x - 0)(x - 1)}{(1/2 - 0)(1/2 - 1)} = -4x(x - 1) \\ L_{3;3} &= \frac{(x - 0)(x - 1/2)}{(1 - 0)(1 - 1/2)} = x(2x - 1) \end{aligned}$$

Da qui è possibile calcolare $P(x)$:

$$\begin{aligned} P(x) &= \\ &= (2x - 1)(x - 1) - 4x(x - 1) \cdot \sqrt{e} + x(2x - 1) \cdot e \\ &= 2x^2 - x - 2x + 1 - 4x^2 \cdot \sqrt{e} + 4x \cdot \sqrt{e} + 2x^2 \cdot e - xe = \\ &= 2x^2 \cdot (1 - 2\sqrt{e} + e) - x \cdot (e - 4\sqrt{e} + 3) + 1 \end{aligned}$$

Come si può notare da ambo i grafici (3.1 e 3.2), nell'intervallo compreso tra P_1 e P_3 l'interpolazione da una buona approssimazione della curva effettiva, sebbene non sia lo scopo esatto di questo strumento matematico.

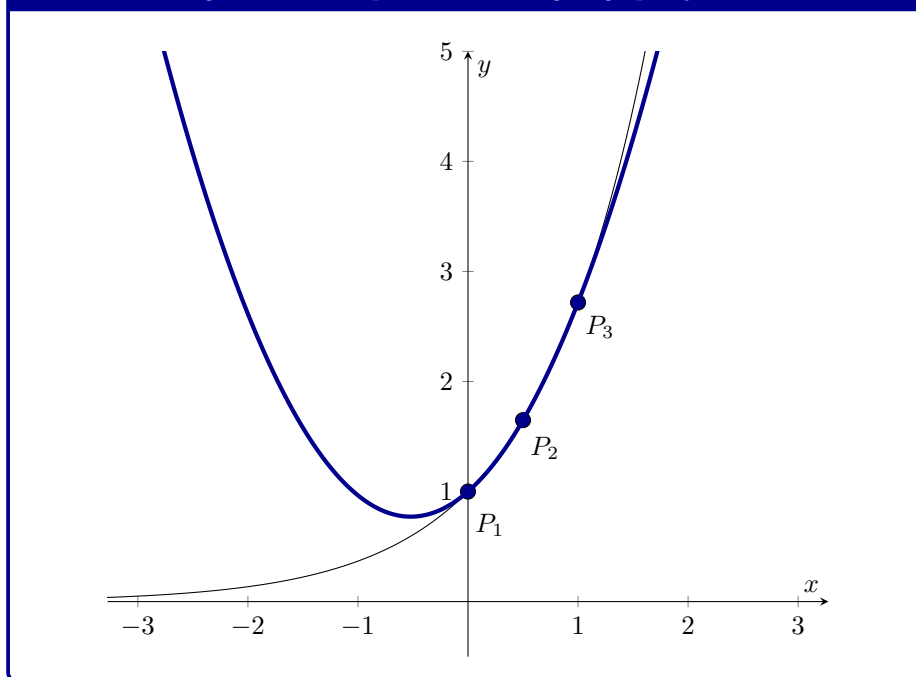
Il principale problema del metodo di interpolazione di Lagrange, oltre alla generazione di polinomi di grado molto elevato, è la non scalabilità: se, dato un polinomio di Lagrange generato a partire da n punti, si vuole ottenere il polinomio di Lagrange che includa, oltre a quegli stessi n punti, un punto ulteriore, sarà necessario ricalcolare completamente il polinomio. Questo problema è risolto dal **polinomio di interpolazione di Newton**.

3.2 Interpolazione di Newton

Per tutte le informazioni sull'interpolazione di Newton si faccia riferimento a [6, p. 85]. Dato un insieme di punti

$$(x_0; y_0); (x_1; y_1); \dots; (x_n; y_n);$$

Figura 3.1: Interpolazione di Lagrange per $y = e^x$



si definisce polinomio di Newton:

$$N(x) = \sum_{\lambda=0}^n a(\lambda) \cdot \omega_{\lambda-1}(x) \quad (3.3)$$

i cui coefficienti $a(\lambda)$, chiamati **differenze divise** sono definite come:

$$a(\lambda) = \begin{cases} y_0 & \text{se } \lambda = 0 \\ \sum_{j=0}^{\lambda} \frac{y_j}{\prod_{i=0; i \neq j}^{\lambda} (x_j - x_i)} & \text{se } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

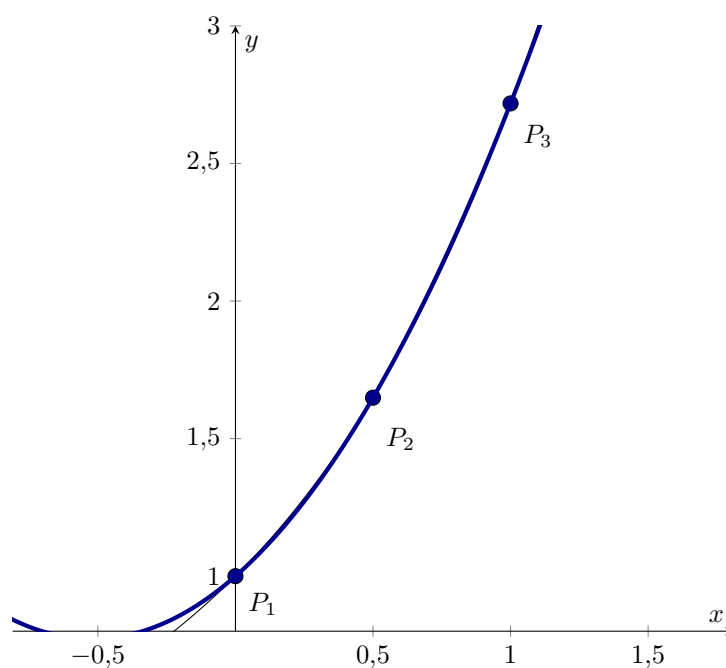
mentre $\omega_{\lambda-1}(x)$, chiamato **polinomio nodale**, è definito come

$$\omega_{\lambda-1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \lambda = 0 \\ \prod_{i=0}^{\lambda-1} (x - x_i) & \text{se } \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Procediamo ora a calcolare il polinomio di Newton passante per due punti: $(x_0; y_0)$ e $(x_1; y_1)$. È necessario calcolare $a(0)$, ω_{0-1} , $a(1)$ e ω_{1-1} .

$$\begin{aligned} a(0) &= y_0 \\ \omega_{0-1} &= 1 \end{aligned}$$

Figura 3.2: Interpolazione di Lagrange per $y = e^x$, ingrandimento



$$\begin{aligned}
 a(1) &= \sum_{j=0}^1 \frac{y_j}{\prod_{i=0; i \neq j}^1 (x_j - x_i)} = \\
 &= \frac{y_0}{\prod_{i=0; i \neq 0}^1 (x_0 - x_i)} + \frac{y_1}{\prod_{i=0; i \neq 1}^1 (x_1 - x_i)} = \\
 &\qquad \qquad \qquad \frac{y_0}{(x_0 - x_1)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)}
 \end{aligned}$$

$$\omega_{1-1} = \prod_{i=0}^0 (x - x_i) = (x - x_0)$$

Il polinomio di Newton passante per questi due punti sarà quindi:

$$N(x) = \left[y_0 \cdot 1 + \left(\frac{y_0}{(x_0 - x_1)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \right) \cdot (x - x_0) \right]$$

Sostituendo i valori, si può notare come effettivamente questo polinomio passi per ambo i punti:

$$N(x_0) = \left[y_0 \cdot 1 + \left(\frac{y_0}{(x_0 - x_1)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \right) \cdot (x_0 - x_0) \right] = y_0 \cdot 1 = y_0$$

$$\begin{aligned}
 N(x_1) &= \left[y_0 \cdot 1 + \left(\frac{y_0}{(x_0 - x_1)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \right) \cdot (x_1 - x_0) \right] = \\
 &= y_0 - \frac{y_0}{\cancel{(x_1 - x_0)}} \cdot \cancel{(x_1 - x_0)} + \frac{y_1}{\cancel{(x_1 - x_0)}} \cdot \cancel{(x_1 - x_0)} = \\
 &\qquad \qquad \qquad = y_0 - y_0 + y_1 = y_1
 \end{aligned}$$

Può essere fatta un'ulteriore riflessione in merito a $N(x)$: infatti, si noti come non sia altro che la formula per la retta passante per due punti, scritta in maniera “insolita”:

$$\begin{aligned}
 y &= \left[y_0 \cdot 1 + \left(\frac{y_0}{(x_0 - x_1)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \right) \cdot (x - x_0) \right] \\
 y - y_0 &= \left(-\frac{y_0}{(x_1 - x_0)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)} \right) \cdot (x - x_0) \\
 \frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Come per l'interpolazione di Lagrange, il grado del polinomio generato con l'interpolazione di Newton sarà proporzionale linearmente con il numero n di punti presi in considerazione. In particolar modo:

$$\deg(N(x)) \leq n - 1$$

3.3 Considerazioni finali

Nonostante questi due metodi siano sostanzialmente diversi nella forma, il loro risultato sarà necessariamente la stessa. Si dimostraⁱⁱ, infatti, l'unicità del polinomio interpolante

Teorema Esiste al più un polinomio $i(x)$ di grado al più n passante per qualsiasi insieme di $n + 1$ punti distinti.

Dimostrazione Si supponga esista un altro polinomio $q(x)$ di grado al più n che passi per tutti gli $n + 1$ punti. Si consideri il polinomio $r(x)$ tale che

$$r(x) = i(x) - q(x)$$

È noto che:

- $r(x)$ è anch'esso un polinomio;
- $r(x)$ ha grado al più n , poiché $i(x)$ e $q(x)$ hanno grado al più n ;
- in coincidenza degli $n + 1$ punti da interpolare,

$$r(x_\lambda) = i(x_\lambda) - q(x_\lambda) = y_\lambda - y_\lambda = 0$$

Ne consegue che $r(x)$ ha $n + 1$ radici.

Per il **teorema fondamentale dell'algebra**, un qualsiasi polinomio diverso da 0 deve poter essere scritto come

$$r(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Gli $n + 1$ termini si moltiplicano, ottenendo x^{n+1} , ovvero ottenendo un grado in più rispetto a quello richiesto. L'unico modo in cui $r(x)$ può esistere è che esso sia $r(x) = 0$. Quindi

$$\begin{aligned} r(x) &= i(x) - q(x) \\ 0 &= i(x) - q(x) \\ i(x) &= q(x) \end{aligned}$$

Qualsiasi altro polinomio interpolante $q(x)$, quindi, deve essere uguale a $i(x)$. \square

Una conseguenza diretta di questo teorema è che l'interpolazione di un insieme di $n + 1$ punti derivanti da un certo polinomio di n -esimo grado sia il polinomio stesso. Ecco spiegato il perché dell'equazione (3.4).

ⁱⁱ [7] Interpolazione. URL: http://www.mat.unimi.it/users/alzati/Geometria_Computazionale_98-99/apps/interpolanti/teoria.html, Esistenza e unicità del polinomio interpolante

Problema di fisica

La situazione descritta dal problema è quella rappresentata nella figura 4.1, con

$$F(x) = 10e^{x/2} \text{ N}$$

Sia L il lavoro della forza \vec{F} per uno spostamento che vada da $x_i = 0$ a $x_f = 2 \text{ m}$; questo lavoro, in un grafico $F - x$ è l'area sottesa alla curva $F = F(x)$ nell'intervallo $(0; 2)$;

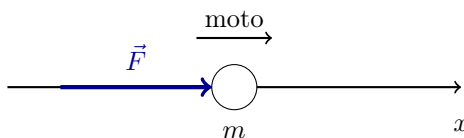
- (a) è possibile approssimare quest'area con un trapezio rettangolo $ABCD$ (come in figura 4.2):

$$\begin{aligned} L &= \frac{(B + b) \cdot h}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot [F(0) + F(2)](2 \text{ m} - 0 \text{ m}) = \\ &= [10 + 10e^{-1}] \text{ N} \cdot \text{m} \approx 13,68 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

- (b) utilizzando la definizione di **integrale definito** (vedasi figura 4.3):

$$L = \int_0^{2 \text{ m}} F(x) \, dx = \left[\int F(x) \, dx \right]_0^{2 \text{ m}}$$

Figura 4.1: Una forza \vec{F} che agisce nella direzione dell'asse delle x



$$\begin{aligned}\int F(x) dx &= \int 10e^{-x/2} dx = && \text{sia } t = -\frac{x}{2} \\ &= -20 \int e^t dt = -20e^t + k = && x = -2y \\ &= -20e^{-x/2} + k && dx = -2 dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L &= \left[\int F(x) dx \right]_0^{2m} = \\ &= \left[-20e^{-x/2} \right]_0^{2m} = \left[-20e^{-1} + 20 \right] \text{ N} \cdot \text{m} = \\ &= 20 \cdot \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{ N} \cdot \text{m} \approx 12,64 \text{ N} \cdot \text{m}\end{aligned}$$

Il lavoro compiuto dalla forza quindi è:

$$L = 20 \cdot \left(1 - \frac{1}{e} \right) \text{ N} \cdot \text{m} \approx 12,64 \text{ N} \cdot \text{m}$$

L'errore percentuale del metodo (a) rispetto al metodo (b) è di

$$\varepsilon_{\%} = \frac{|L_{(a)} - L_{(b)}|}{L_{(b)}} \cdot 100 = 7,58 \%$$

Figura 4.2: Lavoro della forza interpretato come trapezio (a)

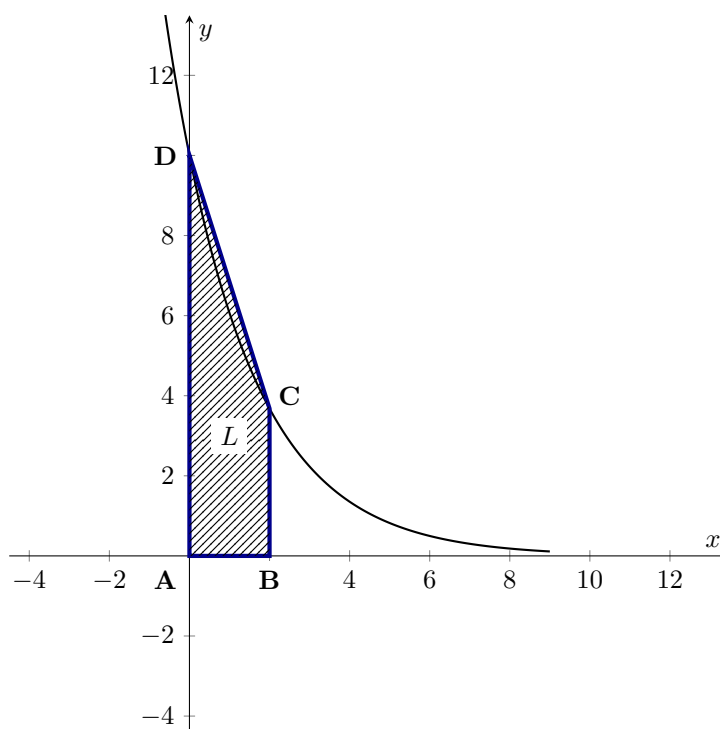
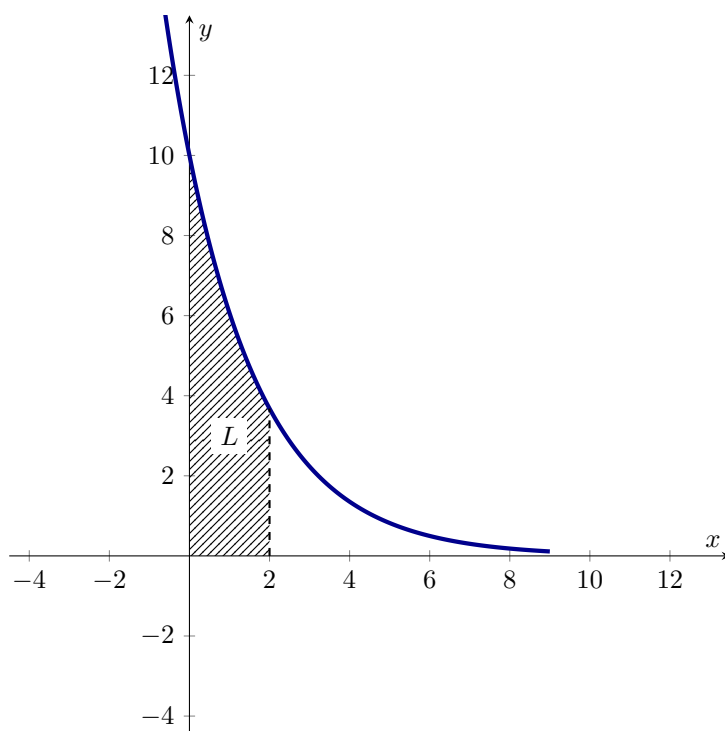


Figura 4.3: Lavoro della forza interpretato come integrale (b)



Allegato I

Codice

```
1 f = @(x) x^5 - 5*x/(2*8^(1/5)) + 1; % la funzione f(x)
2
3 a = -2; % estremo sinistro
4 b = 0; % estremo destro
5
6 i = 0; % numero di iterazioni eseguite
7
8 while abs(f((a+b)/2)) > 1E-15 % il ciclo continua fino al ...
    raggiungimento della condizione di arresto
9     p = (a+b)/2; % si calcola il punto medio
10    if f(a)*f(p) < 0
11        b = p;
12    elseif f(b)*f(p) < 0
13        a = p;
14    end
15    i = i + 1; % si incrementa il numero di iterazioni
16 end
17
18 disp("Il programma ha compiuto:") % stampa il numero di iterazioni
19 disp(i)
20 disp("iterazioni")
21 disp("")
22 disp("Lo zero trovato:") % stampa lo zero
23 format long
24 disp(p)
```

Output

```
1 Il programma ha compiuto:
2 52
3 iterazioni
4
5 Lo zero trovato:
6 -1.250943005315172
```

Allegato II

Codice

```
1 f = @(x) x^5 - 5*x/(2*8^(1/5)) + 1; % la funzione f(x)
2 df = @(x) 5*x^4 - 5/(2*8^(1/5)); % definizione della derivata prima
3
4 alpha = 1; % punto di partenza per l'algoritmo
5 i = 0; % numero di iterazioni eseguite
6
7 while abs(f(alpha)) > 1E-15
8     alpha = alpha - f(alpha)/df(alpha);
9     i = i+1;
10 end
11
12 disp ("Il programma ha compiuto:") % stampa il numero di iterazioni
13 disp(i)
14 disp("iterazioni")
15 disp("")
16 disp("Lo zero trovato:") % stampa lo zero
17 format long
18 disp(alpha)
```

Output

```
1 Il programma ha compiuto:
2 25
3 iterazioni
4
5 Lo zero trovato:
6 0.757858292385600
```

Figure e tabelle

1.1	Studio del segno della funzione	5
1.2	Studio del segno della derivata prima della funzione	6
1.3	Grafico della funzione	7
2.1	Algoritmo di bisezione applicato a $f(x)$	10
2.2	Interpretazione grafica del metodo di Newton	12
2.3	Algoritmo di Newton applicato a $f(x)$	12
3.1	Interpolazione di Lagrange per $y = e^x$	15
3.2	Interpolazione di Lagrange per $y = e^x$, ingrandimento	16
4.1	Una forza \vec{F} che agisce nella direzione dell’asse delle x	19
4.2	Lavoro della forza interpretato come trapezio	21
4.3	Lavoro della forza interpretato come integrale	22

Bibliografia

- [1] ANALISI NUMERICA. URL: https://www.treccani.it/enciclopedia/analisi-numerica_%28Enciclopedia-Italiana%29/.
- [2] Massimo Bergamini e Graziella Barozzi. Matematica multimediale. blu. 2014.
- [3] Richard Courant e Herbert Robbins. Che cos'è la matematica? 2000.
- [4] N. Doderò, P. Baroncini e R. Manfredi. Elementi di matematica 5. 1992.
- [5] Equazioni di terzo e quarto grado. URL: http://www.dmf.unicatt.it/~degiova/lincei/equazioni_di_terzo_e_quarto_grado.pdf.
- [6] Piero Gallo e Pasquale Sirsi. Informatica APP. 2018.
- [7] Interpolazione. URL: http://www.mat.unimi.it/users/alzati/Geometria_Computazionale_98-99/apps/interpolanti/teoria.html.
- [8] interpolazione. URL: <https://www.treccani.it/vocabolario/interpolazione/>.
- [9] Richard L. Burden e J. Douglas Faires. Numerical analysis. 2012.