25 mar '21

Appunti di analisi matematica:

Integrale Definito

Il concetto d'integrale nasce per risolvere due classi di problemi:

Integrale Definito

$\int_a^{b} f(x)\,dx$ — estremi di integrazioni

- Calcolo delle aree di fig. delimitate da curve
- calcolo di volumi
- calcolo del lavoro di una forza
- calcolo dello spazio percorso …..

Integrale Indefinito

$\int x\,dx = \ldots.$

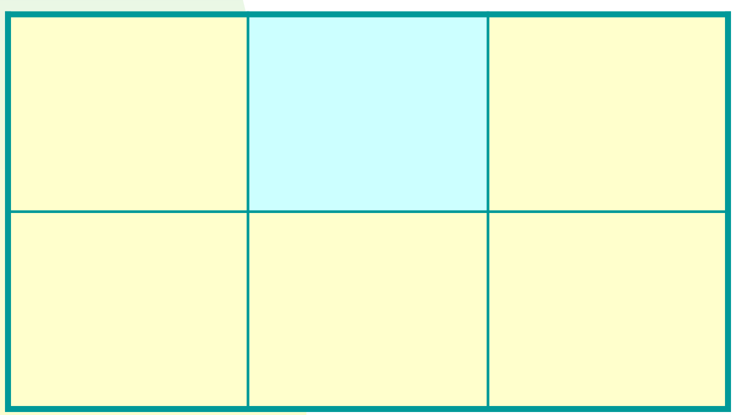
- ~~Problema~~ OPERAZIONE inverso del calcolo della derivata:
  nota la derivata di una funzione calcolare la funzione stessa.

Calcolo delle Aree

- <u>Area dei poligoni:</u>

È la situazione più semplice in quanto qualunque poligono può essere scomposto in triangoli e la sua area ricondotta all'area di un rettangolo equivalente.

Area del Rettangolo



$A = b \bullet h$

Basta ricoprire la superficie del rettangolo con quadratini di area unitaria

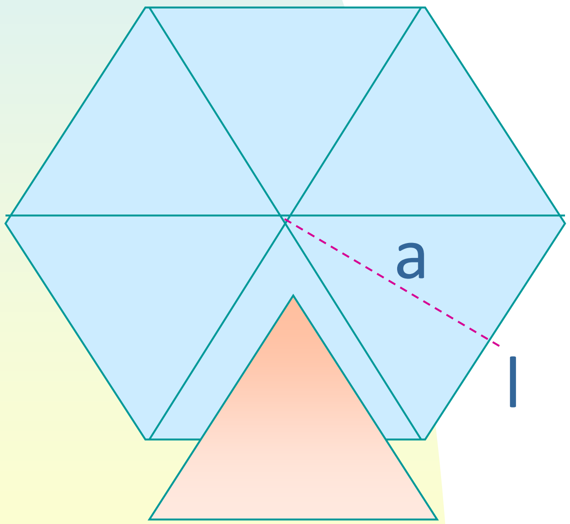
- <u>Poligoni regolari</u>

Scomponendoli in triangoli congruenti è facile calcolare l'area

→ somma di aree semplici

Area di un Esagono

$$A_{triangolo} = \frac{l \cdot a}{2}$$

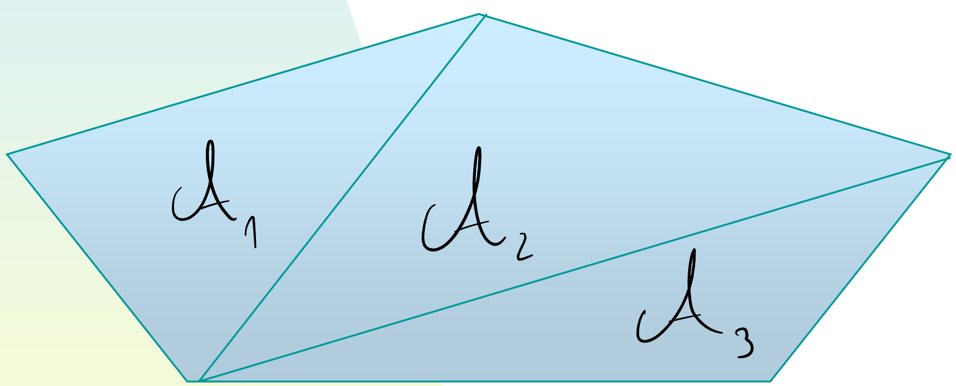


$$A_{poligono} = \frac{a \cdot l}{2} \cdot n = \frac{a \cdot l \cdot n}{2} = \frac{a \cdot (l \cdot n)}{2} = \frac{a \cdot p}{2}$$

- Poligoni Irregolari

  Basta scomporli opportunamente in triangoli

Area di un Poligono qualsiasi



$$A_{poligono} = \sum_{1}^{n} \underline{A_{triangoli}}$$

aree semplici!

Area del Cerchio

Il calcolo dell'area è molto più complesso in quanto non è possibile scomporre il cerchio in triangoli.

E' possibile però calcolare l'area per approssimazioni successive:

Indichiamo con A la classe dei poligoni regolari inscritti nel cerchio,
di 3, 4, 5, 6, n lati rispettivamente
e con a_3, a_4, a_5, … a_n le relative aree;

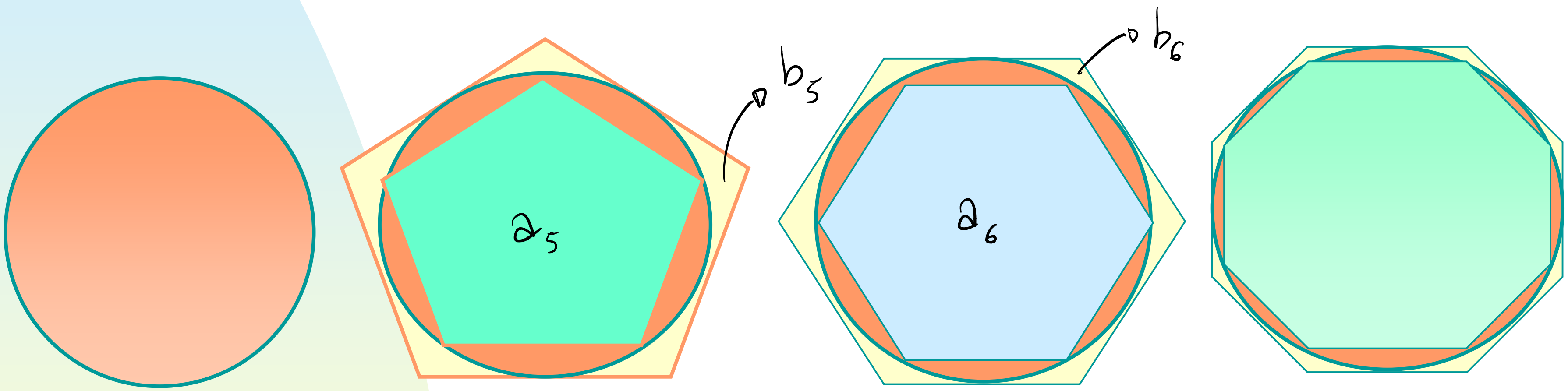
e con B la classe dei poligoni regolari circoscritti al cerchio
di 3, 4, 5, 6, …n lati
e con b_3, b_4, b_5, b_n le rispettive aree.

Se S è l'area del cerchio (incognita) sarà sempre:

$$a_n \leq S \leq b_n$$

e passando al limite di infiniti lati :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = S = Area\,Cerchio$$



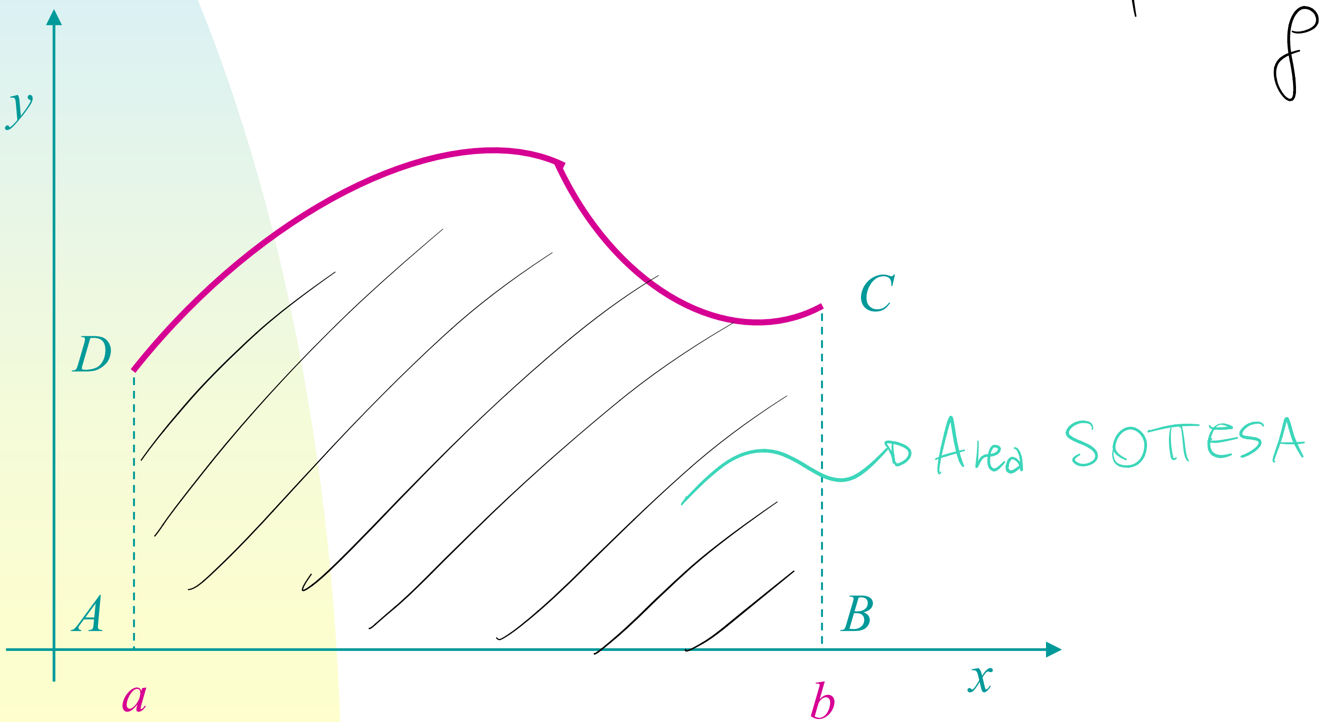
Allora: L'area del cerchio è uguale al limite comune, *quando il numero lati* → ∞, al quale tendono le successioni formate dalle aree dei poligoni inscritti e circoscritti al cerchio

Integrale Definito - Calcolo delle Aree

Stessa idea dell'area del cerchio

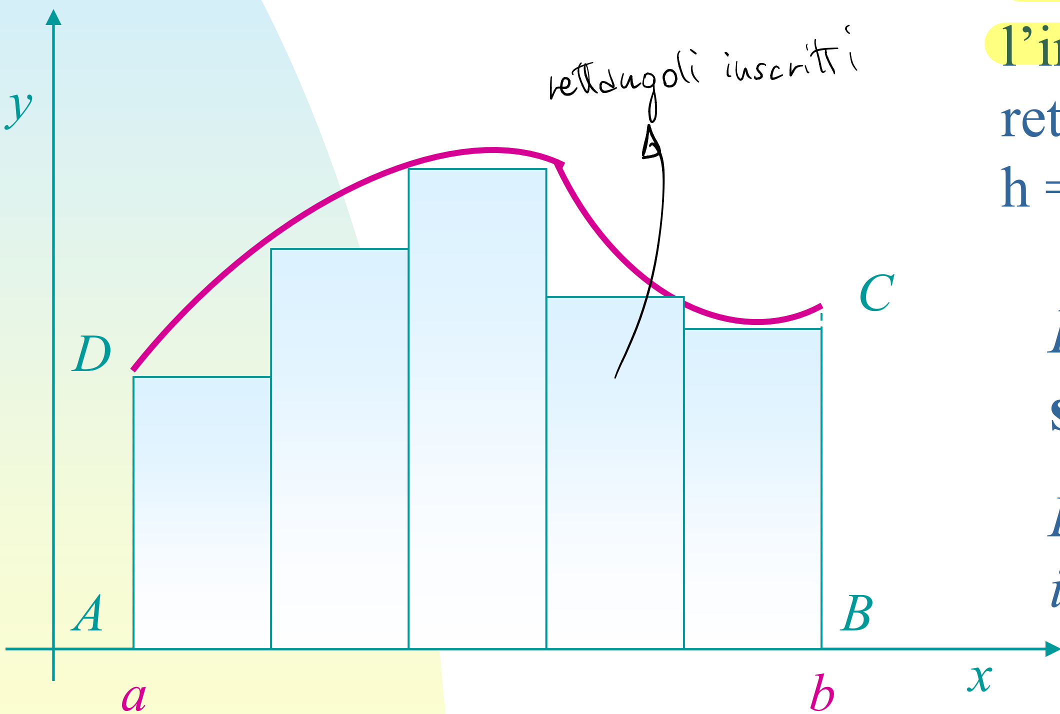
- <u>Area del Trapezoide</u>

Vogliamo calcolare l'area della figura mistilinea determinata dal diagramma di una funzione $y = f(x)$ definita e continua nell'intervallo $[a, b]$ → per ora anche $f(x) > 0$



Possiamo determinare l'area approssimandola con dei rettangoli inscritti e dei rettangoli circoscritti

Utilizzando lo stesso metodo usato per il cerchio.



maggiore è n più l'area è precisa

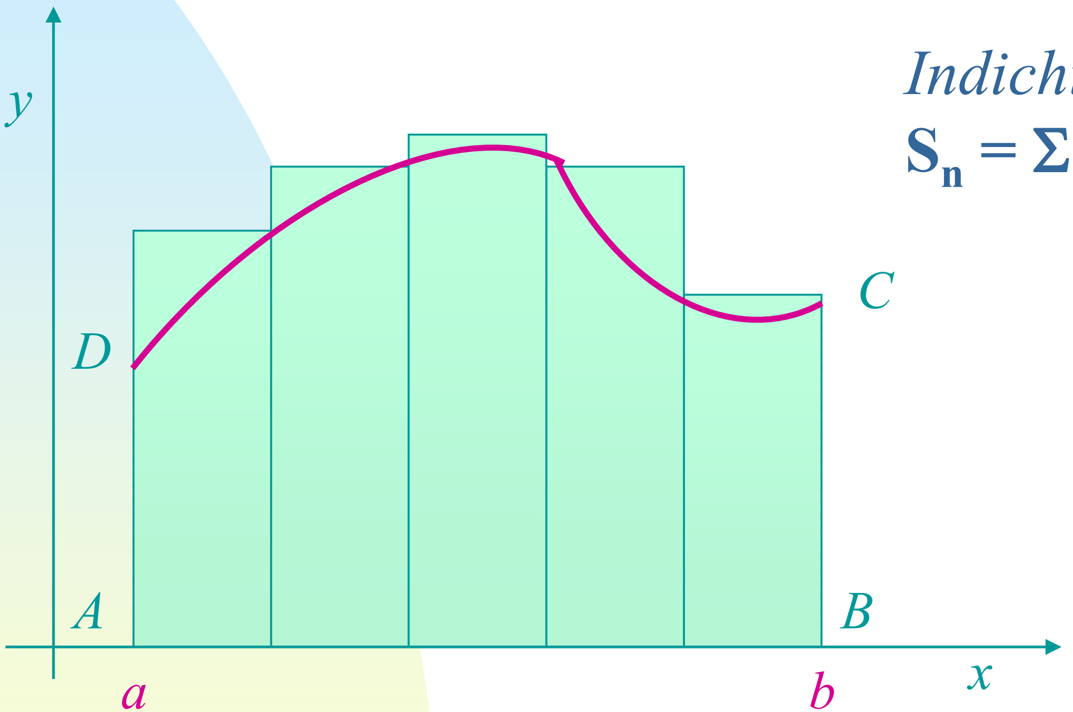
Dividendo in n parti l'intervallo [a, b], avremo n rettangoli di base
$h = (b - a)/n$

Indichiamo con

$\mathbf{s_n = \Sigma}\ \boldsymbol{areaRett}_{\boldsymbol{.inscritti}}$

L'area del plurirettangolo inscritto

Analogamente possiamo determinare l'area $\mathbf{S_n}$ *del plurirettangolo circoscritto*



Indichiamo con

$$\mathbf{S_n = \Sigma\, \mathit{areaRett}_{.circoscritti}}$$

come per il cerchio

L'area S del trapezoide sarà sempre compresa tra $\mathbf{s_n}$ e $\mathbf{S_n}$

$$\Sigma\, \mathit{areaRett}_{.inscritti} \leq \quad S \quad \leq \Sigma\, \mathit{areaRett}_{.circoscritti}$$

Aumentando il numero dei rettangoli l'approssimazione di S sarà sempre più precisa.

Considerando un numero di rettangolini via via crescente avremo due successioni di aree di

plurirettangoli inscritti $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ e di

plurirettangoli circoscritti $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$

che convergono all'area del trapezoide ABCD

<u>Teorema 1</u>. Se y = f(x) è continua e positiva in [a, b], allora le successioni delle aree $s_1, s_2, \ldots s_n, \ldots$ e $S_1, S_2, \ldots S_n, \ldots$ convergono allo stesso limite S uguale all'area del trapezoide ABCD

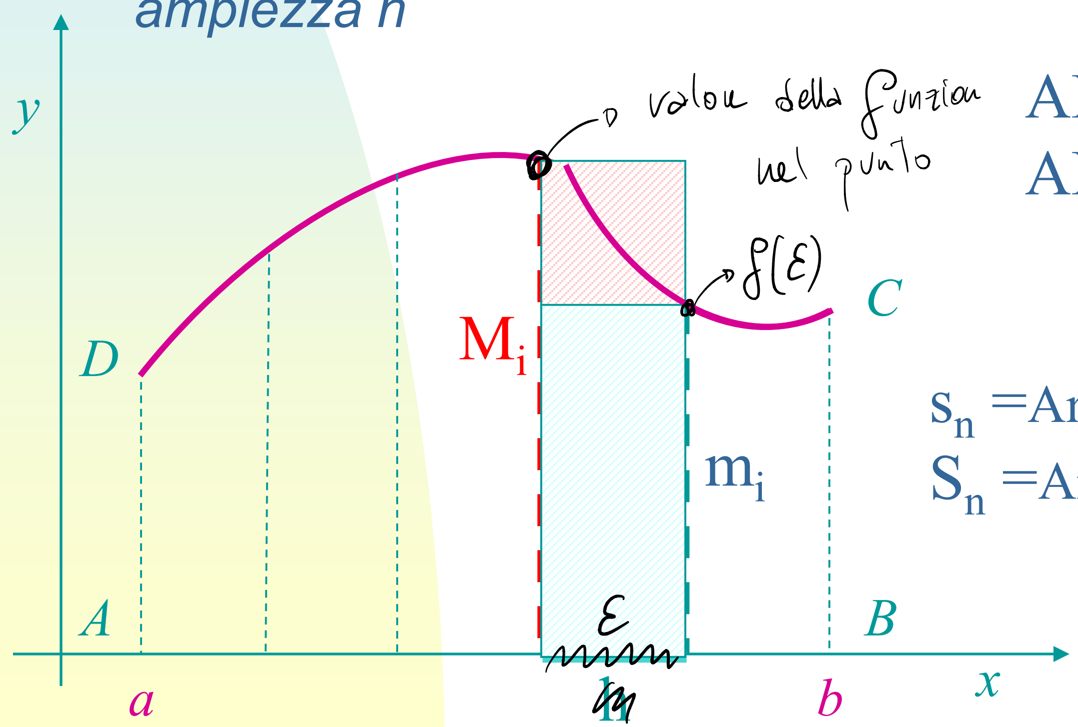
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \overset{\text{def}}{=} S}$$

Possiamo finalmente giungere al concetto d'integrale definito

Integrale Definito

Data la funzione y=f(x) definita e continua in [a, b],

dopo aver diviso l'intervallo in n parti, indichiamo con
m_i = min f(x) *e con* ***M_i = max f(x)*** *nell'intervallino i-esimo di ampiezza h*



$ARett_{circo.} = M_i \bullet h$

$ARett_{inscr.} = m_i \bullet h$

$s_n = AreaPluriRett_{inscr.} = \Sigma\, m_i \bullet h$

$S_n = AreaPluriRett_{circo.} = \Sigma\, M_i \bullet h$

Allora, possiamo dare la seguente definizione:

Def. Data la funzione y=f(x) definita e continua in [a, b], si dice Integrale definito di f(x) relativo all'intervallo [a, b] il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum m_i\cdot h=\lim_{n\to+\infty}\sum M_i\cdot h=\lim_{n\to+\infty}\sum f(\varepsilon_i)\cdot h=S$$

e si indica con $\boxed{\int_a^b f(x)dx}$

Proprietà dell'Integrale definito

$$a)\quad \underbrace{\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx}_{\text{DOPO}}$$

$$b)\quad \boxed{\int_a^a f(x)dx = 0} \rightarrow \text{area di un segmento}$$

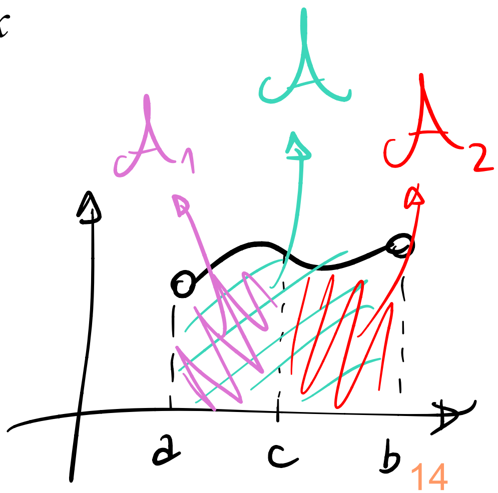
Proprietà di linearità

$$c)\quad \int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

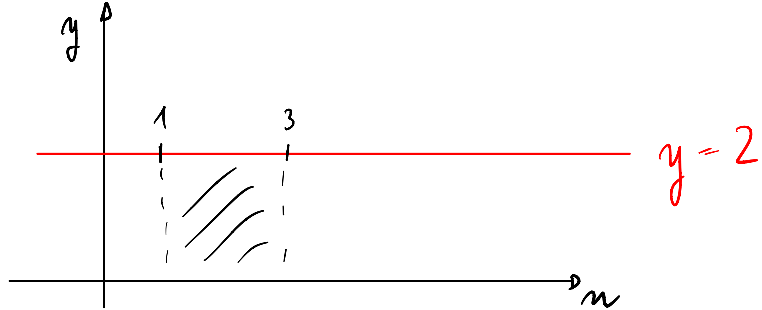
$$d)\quad \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Proprietà di additività

$$e)\quad \underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{A} = \underbrace{\int_a^c f(x)dx}_{A_1} + \underbrace{\int_c^b f(x)dx}_{A_2}$$



→ $\int_1^3 2\,dx = 4$



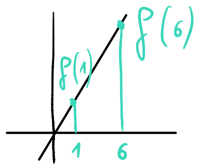
$$\int 2\,dx = 2x + K$$

$$\int_1^3 2\,dx = \Big[\underbrace{2x + K}_{F(x)}\Big]_1^3 = F(3) - F(1) = 6 + K - 2 - K = 4 \quad \square$$

→ $y = 3x$ ⇝ area in $[1;\ 6]$

$$\int_1^6 3x\,dx$$

posso vederlo come trapezio



$$A = \frac{(B+b)h}{2} = [f(6)+f(1)] \cdot \frac{6-1}{2} =$$

$$105/2$$

posso vederlo come integrale

$$\int_1^6 3x\,dx = \left[\frac{3}{2}x^2\right]_1^6 = \frac{3}{2}\left[6^2 - 1^2\right] = \frac{105}{2}$$