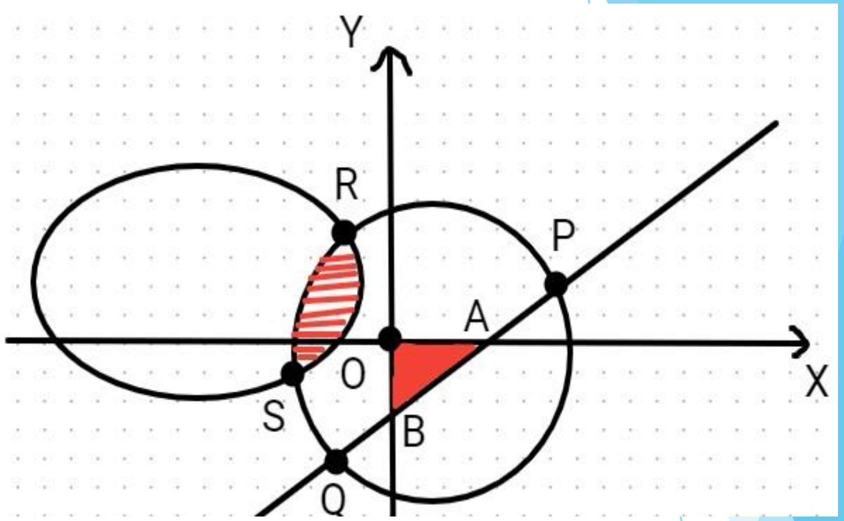
Analisi infinitesimale

Percorso storico

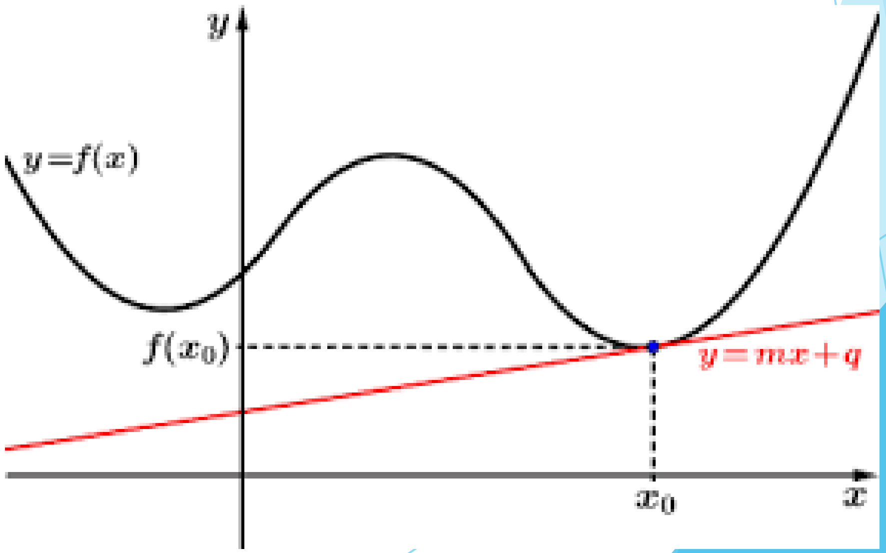
René Descartes

- Cartesio, all'inizio del Seicento rivoluzionò la matematica mostrando come la retta e le curve geometriche come circonferenza, parabola, ellissi potevano essere rappresentate da equazioni algebriche.
- Fino allora calcolo algebrico e geometria erano stati rami ben distinti della matematica., quello La geometria si occupava di logica e di dimostrazioni, l’algebra si occupava del calcolo. Cartesio mostrò che anche la Geometria poteva essere ridotta in buona parte a calcolo.

Da questa idea nasce la geometria analitica.



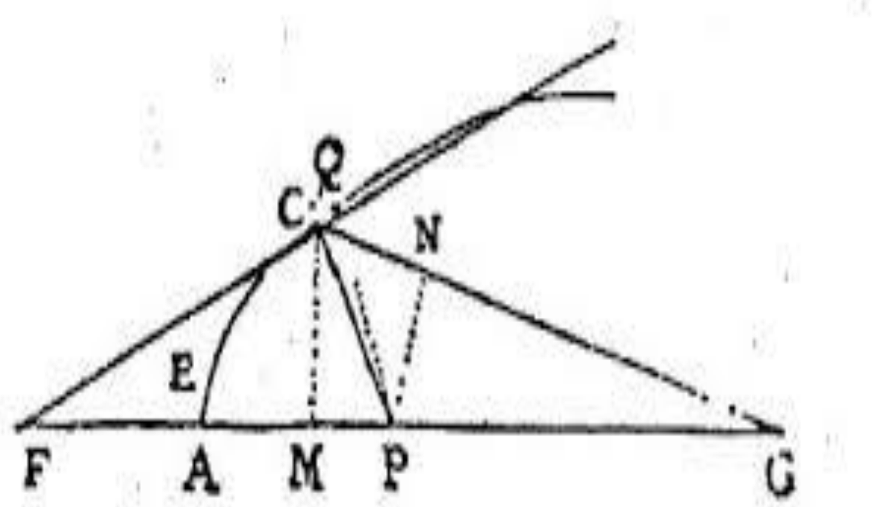
Il metodo algebrico si dimostrò molto potente per risolvere molti problemi, ad esempio l'intersezione tra due curve si riduce a un sistema di equazioni, l'interpolazione della curva per n punti si riduce ugualmente a un sistema di equazioni.

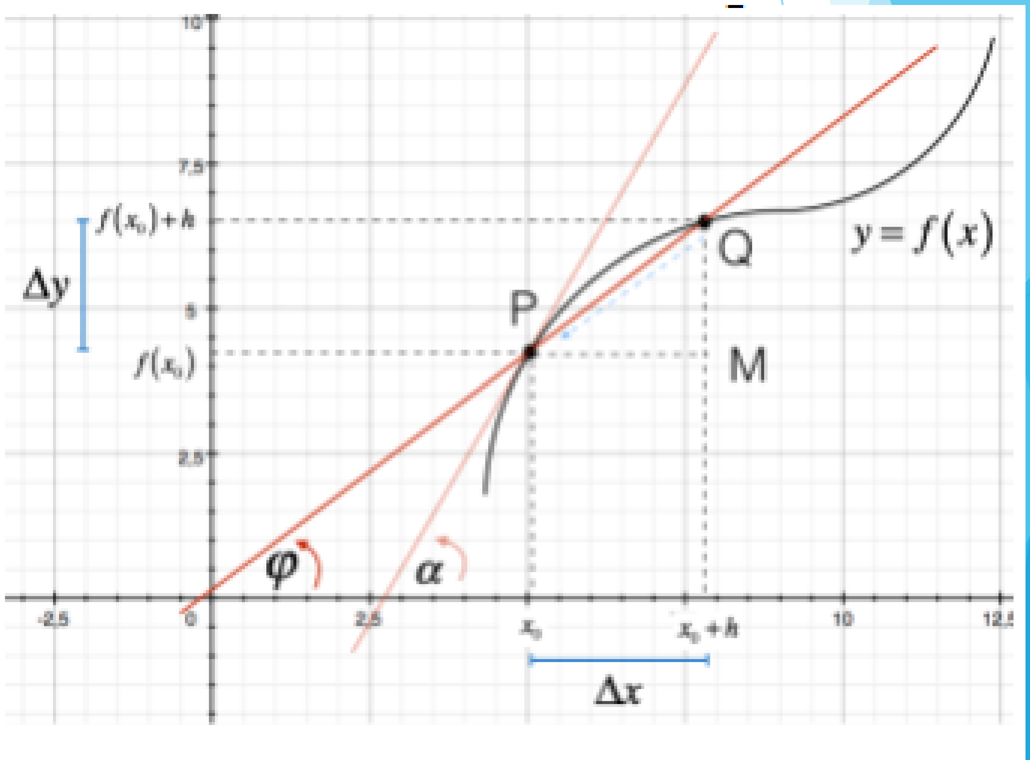


Molto più difficile si rivelò il problema di trovare
 l'equazione della tangente a una curva
e ancor più quello di trovare un metodo generale
per questo problema.

Furono escogitati diversi metodi, tutti piuttosto macchinosi e laboriosi.
I più generali furono quelli proposti dall'inglese **Barrow** e dal francese **Sluse** che diedero regole empiriche per trovare la tangente di una qualsiasi curva algebrica piana, della forma P(x, y) = 0, dove P(x, y) è un polinomio nelle due variabili x e y.

I metodi di Barrow e Sluse implicavano già l'uso di quantità infinitamente piccole o infinitesimi. L'idea era che la tangente è quella retta che ha in comune con la curva due punti infinitamente vicini, tali cioè che la loro distanza sia infinitesima.



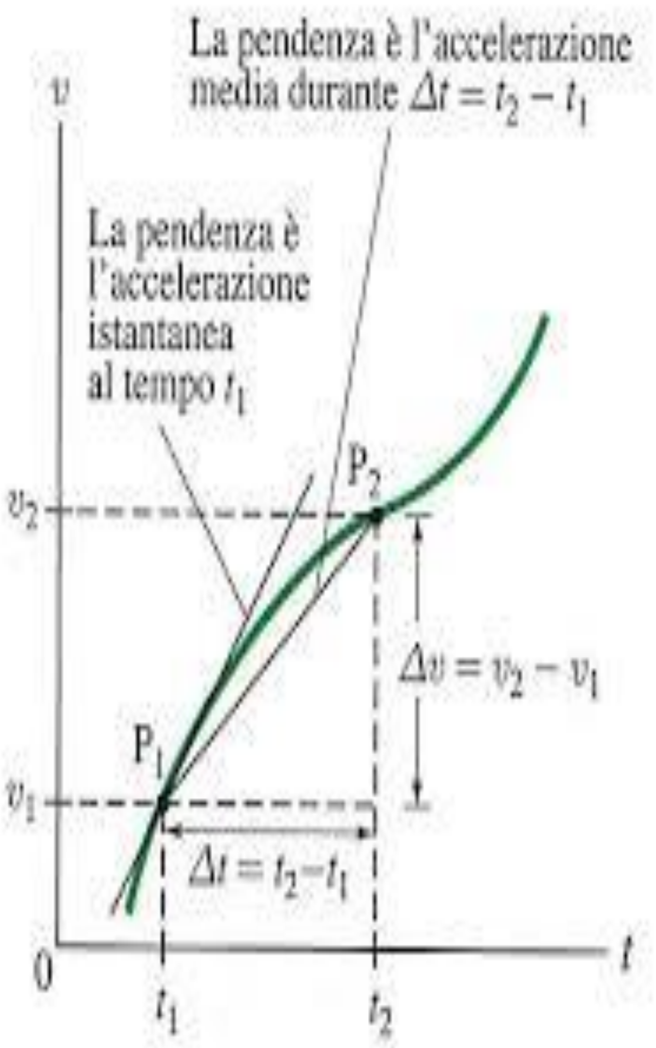


Quali problemi si pongono nel XVII secolo?

1. **Determinare velocità e accelerazione istantanea**

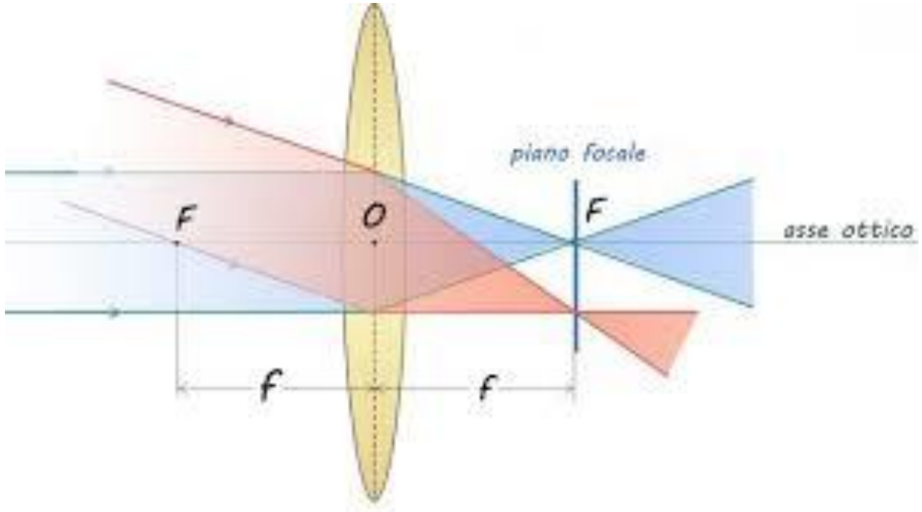
Data la formula che fornisce lo spazio percorso da un corpo in funzione del tempo, trovare la **velocità e l'accelerazione istantanea** e viceversa.

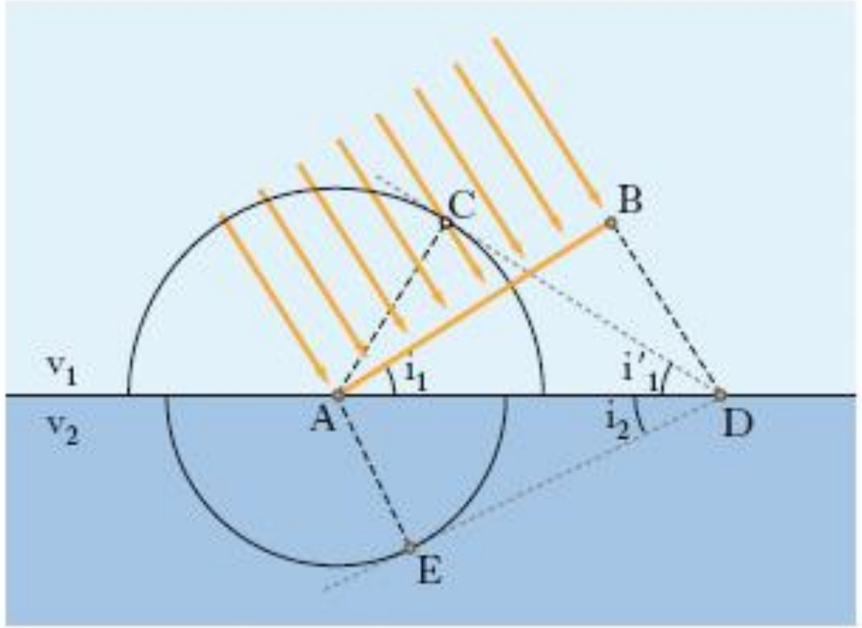
Il problema nasce dallo studio del moto e dal fatto che velocità ed accelerazione variano da un istante all'altro.



2. Determinare la tangente ad una curva

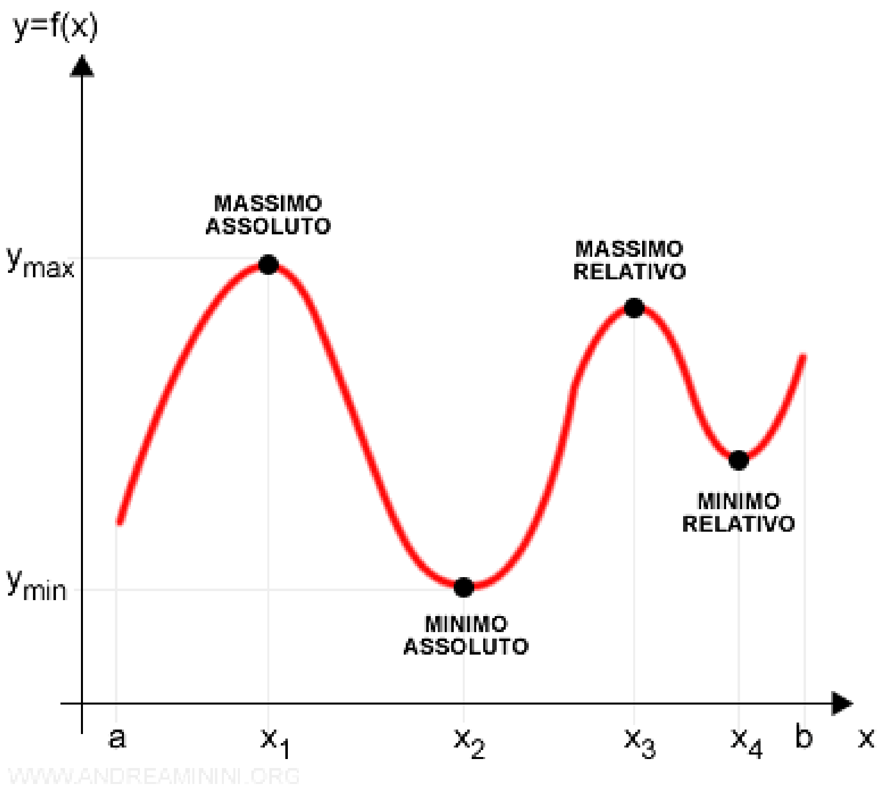
Problema che ha molte applicazioni scientifiche, quali la progettazione di lenti in ottica (Descartes, Fermat, Huygens, Newton) oppure trovare la direzione del moto di un corpo mobile che è la direzione della tangente nell’istante considerato

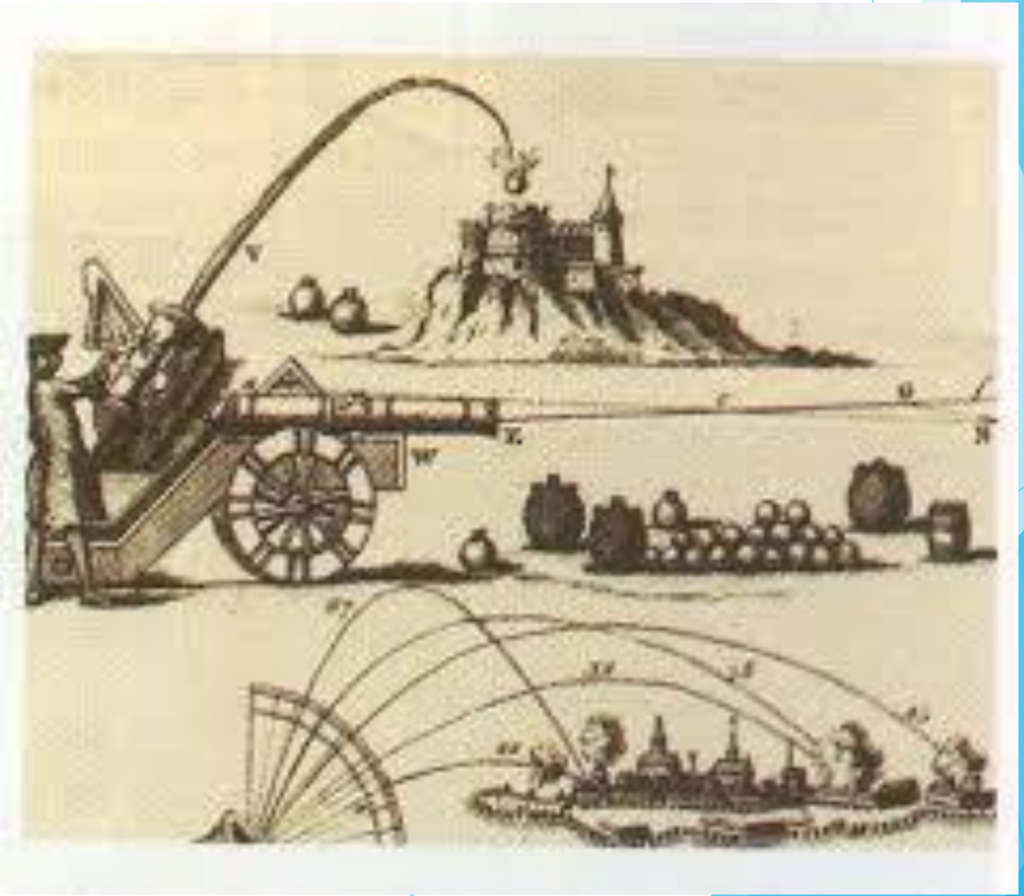




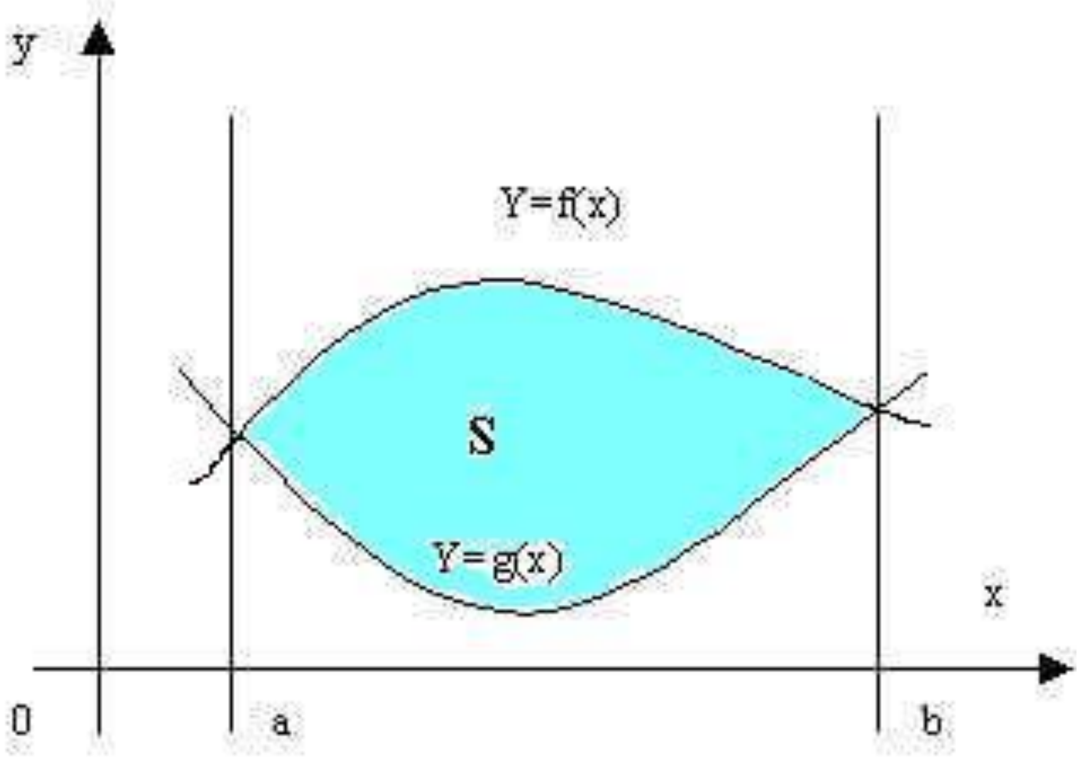
3. Determinare il valore massimo e minimo di una funzione

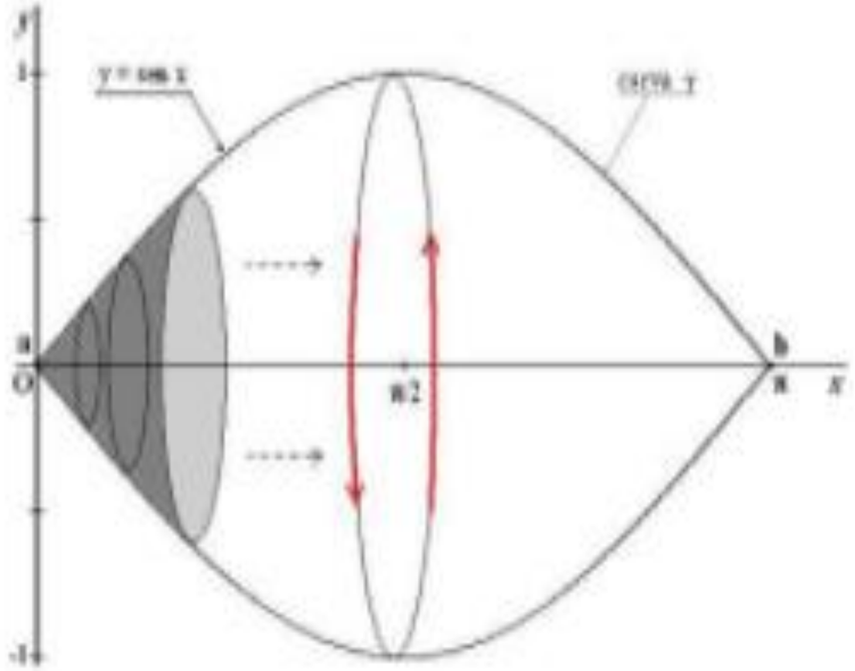
Determinare l'angolo che avrebbe massimizzato la gittata di un cannone (Galileo) o studiare, nel moto dei pianeti, la massima e minima distanza di n pianeta dal Sole.





4. **Determinare le lunghezze delle curve (da utilizzarsi nel calcolo dello spazio percorso dai pianeti), aree limitate dalle curve, volumi limitati da superfici**



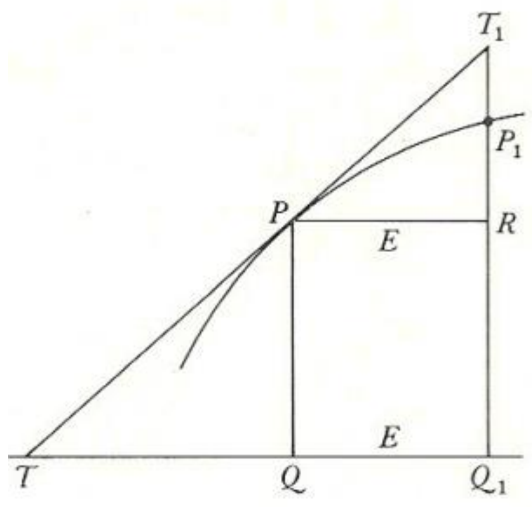


Il problema clou è trovare un metodo per la determinazione delle tangenti

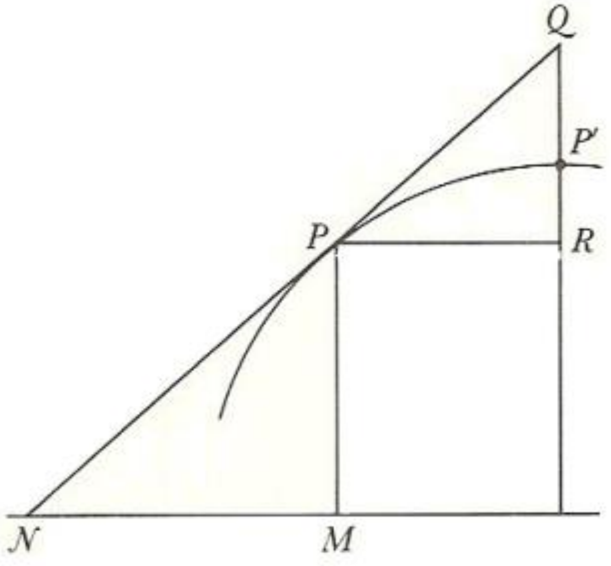
- Il **problema della tangente era** interessante non solo per pura speculazione geometrica, ma anche per alcune applicazioni della fisica. In particolare l’Ottica, a cui nel Seicento si dedicarono, tra gli altri, Huygens, Fermat, Descartes e Newton, necessita della conoscenza dell’angolo tra il raggio di luce e la normale alla curva (costituita dal bordo di una lente) nel punto di incidenza, per poter applicare la legge di rifrazione; ma determinare la normale è ovviamente equivalente a trovare la tangente alla curva, vista la perpendicolarità tra le due rette.
  Nel 1634 il francese Gilles Personne de Roberval (1602-75), nel suo «Traité des indivisibles», presentò un metodo per determinare le tangenti, che generalizzava le riflessioni anticamente presentate da Archimede per trovare la tangente alla spirale che da lui prende nome.

- **Pierre Fermat** (1601-1665) propose, nel manoscritto «Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam «(1637), un metodo diverso, sostanzialmente affine a quello ancora oggi usato in analisi, seppur con profonde differenze concettuali.

- Il metodo di tipo geometrico proposto dall'inglese **Isaac Barrow** (1630-1677) nella sua opera principale, «Lectiones Geometricae» del 1669 è di particolare interesse, perché influenzò non poco il lavoro del più famoso allievo di Barrow, Isaac Newton.
  Il ragionamento di Barrow faceva uso del cosiddetto triangolo caratteristico, il triangolo rettangolo avente per cateti gli incrementi considerati dell'ascissa e dell'ordinata della curva.



: Metodo per ricavare la tangente di Fermat



Metodo per ricavare la tangente di Barrow

Massimi e minimi delle funzioni

- Il problema dei massimi e dei minimi nasceva dalla generalizzazione di problemi geometrici, come quello di determinare la forma del parallelepipedo a base quadrata con il volume massimo tra quelli inscritti in una sfera (già Kepler si era dedicato a questo problema, per ragioni pratiche: la misurazione del volume delle botti, nell'opera «Stereometria Doliorum»).

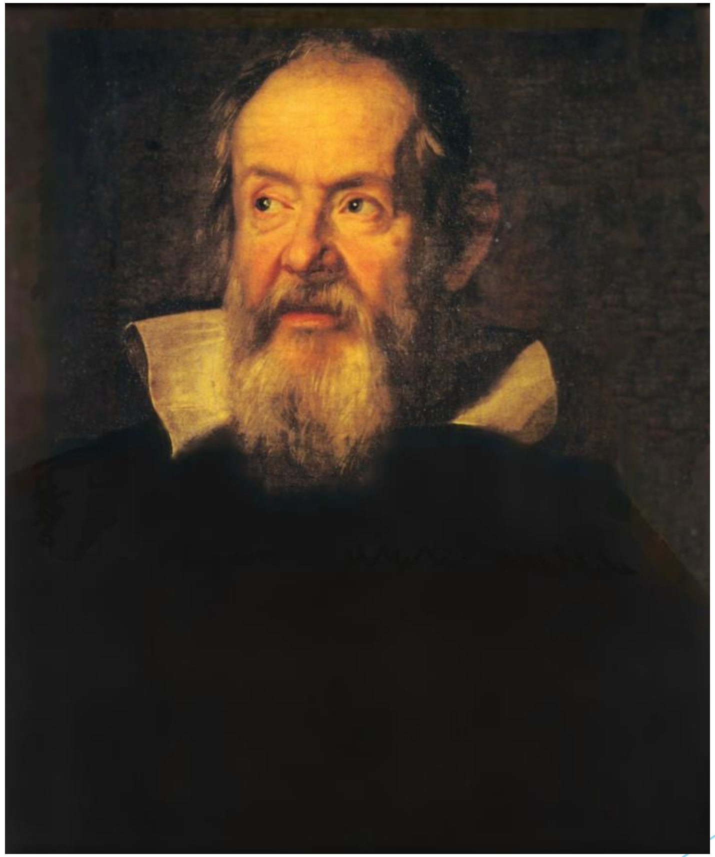
  Anche questo problema, come quello trattato in precedenza, condurrà allo sviluppo del calcolo differenziale. **Fermat** adottò, nel «Methodus ad Disquirendam», un approccio simile a quello con cui aveva affrontato il problema delle tangenti.

Aree e volumi

- Il problema di trovare aree di superfici, lunghezze di curve e volumi di solidi aveva anch’esso ovvie implicazioni di natura pratica.
  La misurazione dei campi o in generale di distanze è sempre stata un’esigenza molto forte.
- Già le prime civiltà riuscirono a trovare le misure di figure molto regolari, Archimede (287 a.C. - 212 a.C.) fu tra i primi a utilizzare metodi di natura ”infinitesimale” per il problema di quadratura.
  In una sua opera «Il Metodo», ritrovata nel 1906, fornisce una tecnica del tutto nuova e innovativa per il periodo in cui ha vissuto.
- Un successivo sviluppo alle idee di Archimede arriva circa 1800 anni dopo. **Galileo Galilei** (1564 -1642), nei «Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze» si occupò della questione da un punto di vista prettamente fisico, analizzando il grafico della velocità di un corpo in moto uniformemente accelerato in funzione del tempo: lo scienziato pisano si accorse infatti che l’area del triangolo sottostante la retta della velocità doveva rappresentare la distanza percorsa dal corpo nel tempo considerato

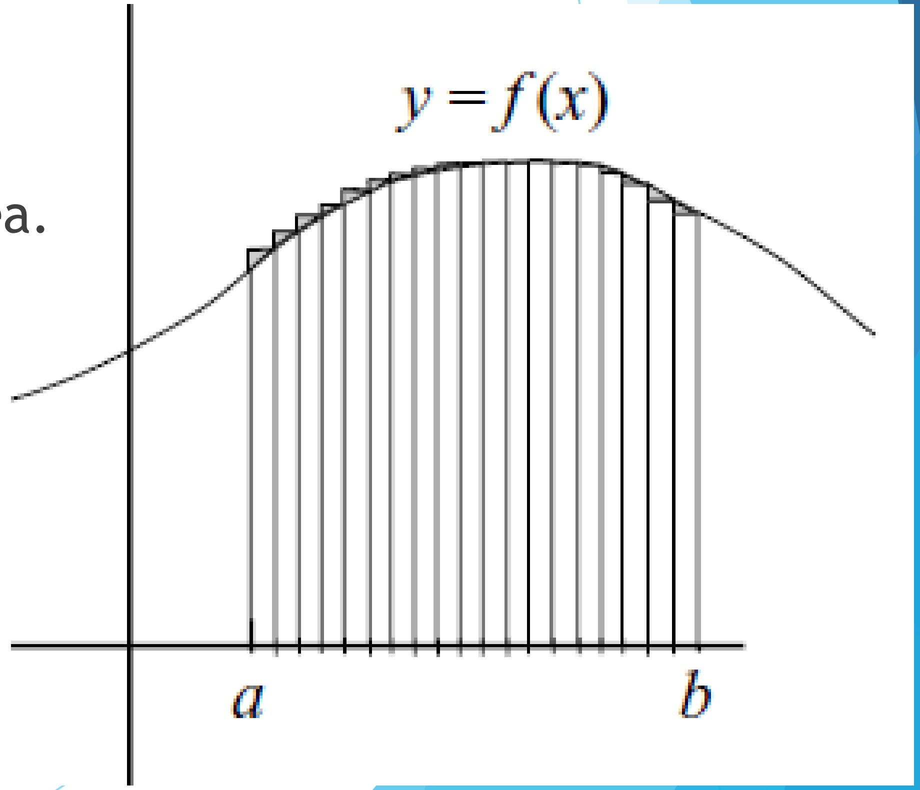

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue ſcienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.



- Il ragionamento di Galilei fu ripreso e sviluppato in un metodo puramente geometrico da un discepolo dello scienziato toscano, **Bonaventura Cavalieri** (1598 - 1647), nell'opera «Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota» del 1635.

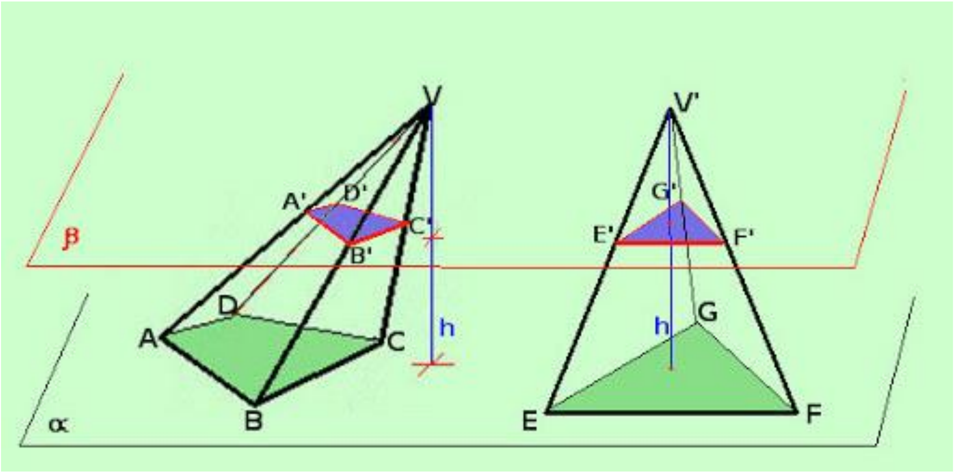
- Il metodo degli indivisibili di Cavalieri si basava proprio sul principio di considerare l'area di una superficie
come unione di infiniti segmenti paralleli,
gli indivisibili dell'area,
considerati come elementi infinitamente piccoli di area.

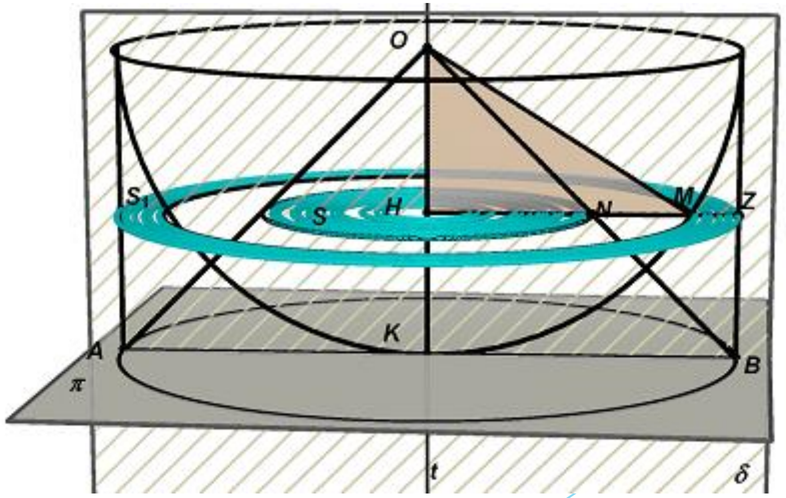


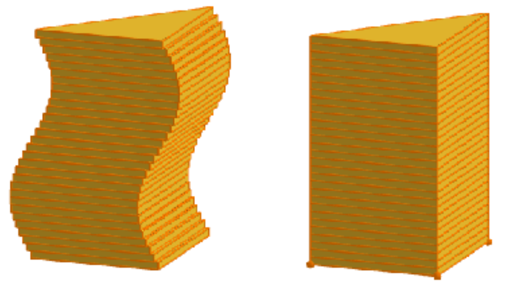
Analoga trattazione avevano i volumi (costituiti da infinite rette) e le curve (costituite da infiniti punti).

Il metodo degli indivisibili si può far derivare dal Principio di Cavalieri: ”Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi staranno in questo rapporto”.

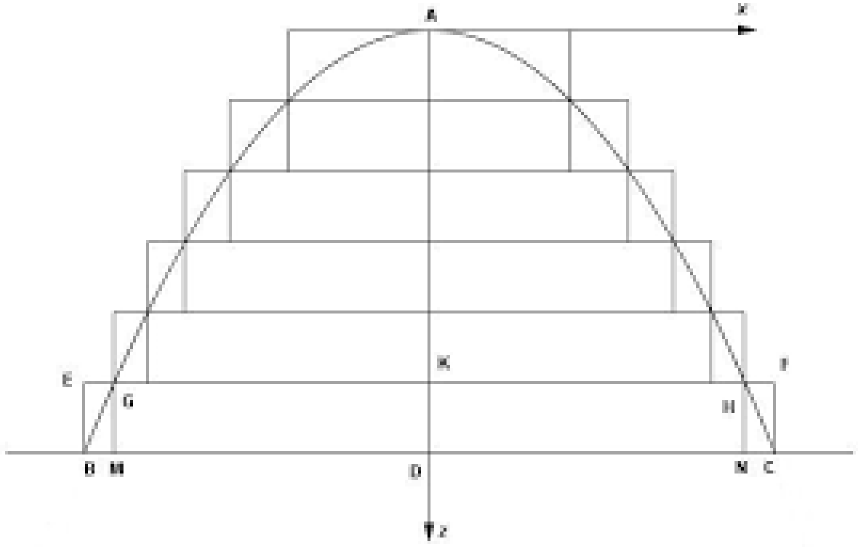
Questo enunciato, noto anche come Principio di Cavalieri degli indivisibili, contiene in sé elementi base del calcolo integrale.

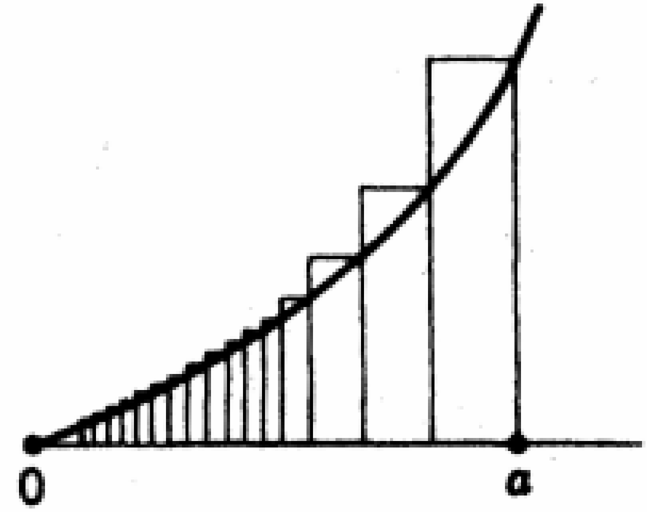


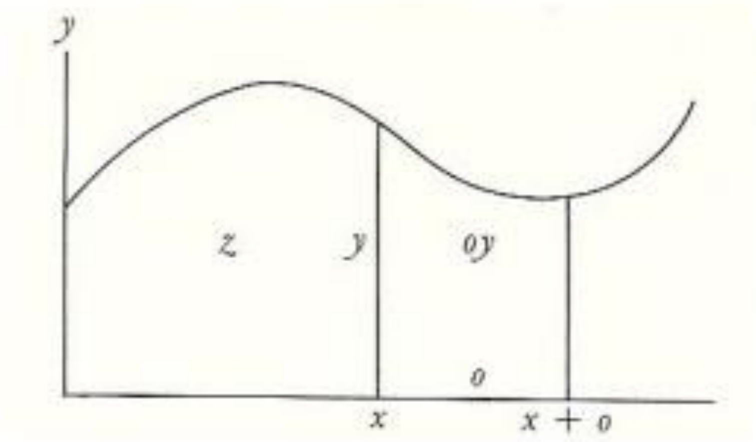




Nascita dell’analisi infinitesimale







Nascita dell'analisi infinitesimale

La soluzione più generale del problema della tangente (e quindi anche della velocità istantanea) è quella dovuta a **Gottfried Wilhelm Leibniz** che introduce due concetti nuovi, necessari alla risoluzione:

concetto di quantità infinitamente piccola o infinitesimo
concetto di derivata.

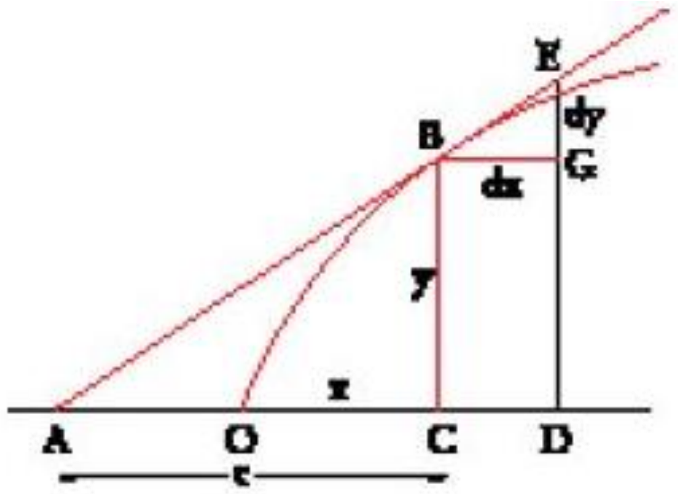
Ma cosa vuol dire distanza infinitesima o **numero infinitesimo**?

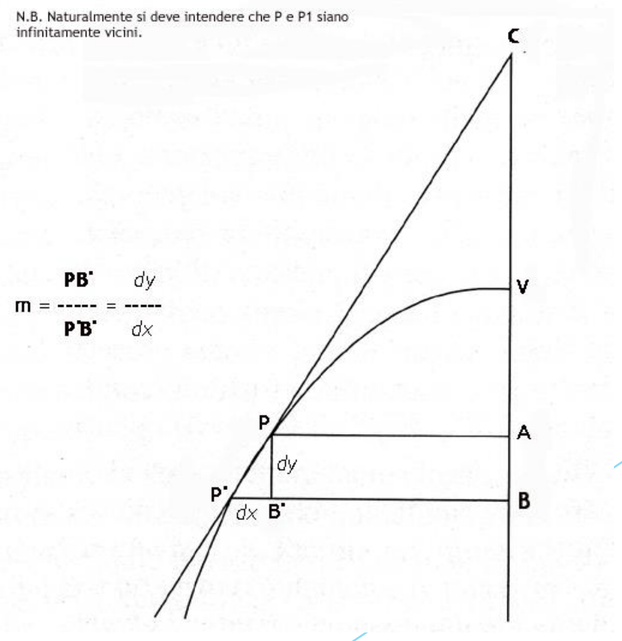
Per Leibniz si tratta di un numero diverso da zero e al tempo stesso minore di ogni numero reale 1/N. Tra i numeri reali non esiste alcun numero con queste caratteristiche; quindi Leibniz di fatto introduce un nuovo insieme di numeri, i numeri infinitesimi.

La definizione può apparire strana ma di fatto questi nuovi numeri permettono di risolvere il problema della tangente in un modo del tutto generale.

Contemporaneamente a Leibniz, Isaac **Newton** sviluppò un metodo del tutto equivalente basato sui concetti di **fluente** e di **flussione**.

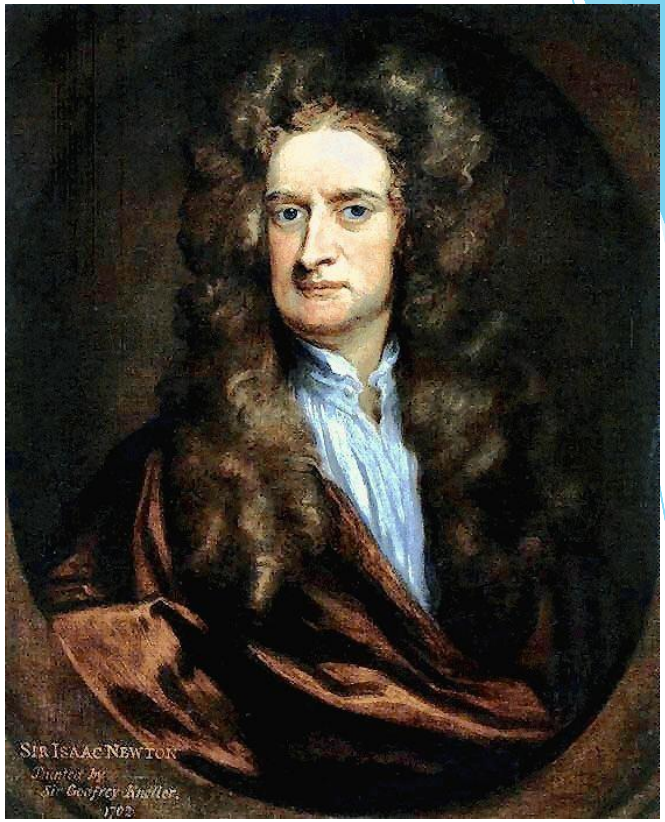
L'idea di fondo è quella di vedere la tangente non più come la retta che tocca una curva in un solo punto, ma come la retta che passa per due punti infinitamente vicini.
In questo modo la tangente viene ad essere simile alla secante; entrambe intersecano la curva in due punti, per la secante si tratta di due punti a distanza finita, per la tangente di due punti a distanza infinitesima.

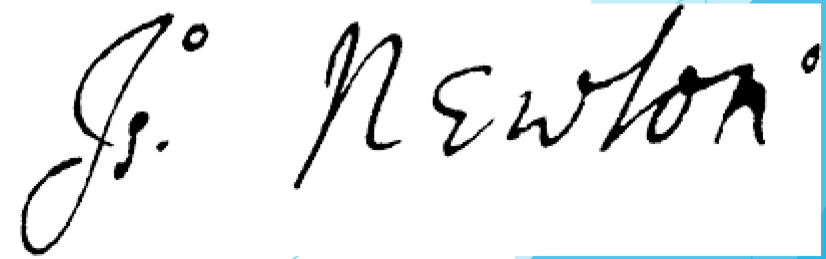




Isaac Newton

- Isaac Newton (1642-1727), nato nel paesino inglese di Woolsthorpe –by Colsterworth, è considerato il successore di Barrow, essendo stato anche suo allievo.
  Uno zio, che aveva studiato a Cambridge, notò le straordinarie doti intellettuali del nipote e persuase la madre di Isaac a mandare il figlio a Cambridge, dove, grazie alle opere dei grandi matematici del passato, si avvicinò e si appassionò alla matematica.
  Per gran parte dell'anno accademico 1665-1666, mentre Newton frequentava l'università, il suo college rimase chiuso a causa della peste e egli tornò a casa per evitare il contagio.
  Fu proprio in quei mesi che pose le basi per quattro delle sue principali scoperte:
- • la formula del binomio;
- • il calcolo infinitesimale;
- • la legge di gravitazione universale;
- • la natura dei colori.

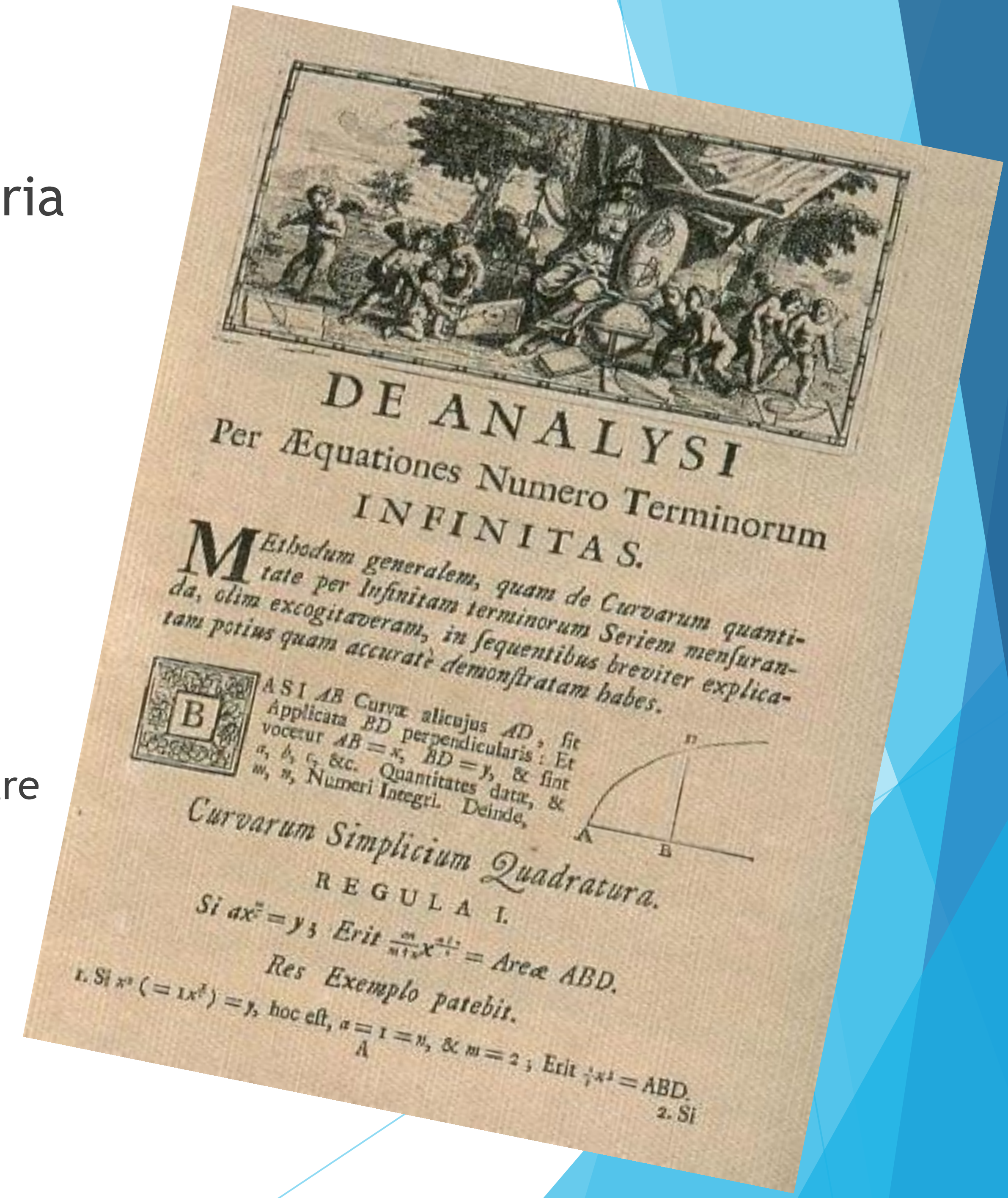




- Newton studiò ed elaborò la teoria del calcolo infinitesimale negli anni 1665-1666

nel corso del decennio successivo stese almeno tre esposizioni esaurienti della nuova analisi.

Il «De Analysi» fu fatto circolare tra gli amici, ma Newton non fece nessun passo per pubblicare in modo ufficiale i suoi risultati.


DE ANALYSI

Per Æquationes Numero Terminorum INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.

BASI AB Curvæ alicujus AD, sit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde,

Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ ABD.*

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 \; (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$, & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 = ABD$.

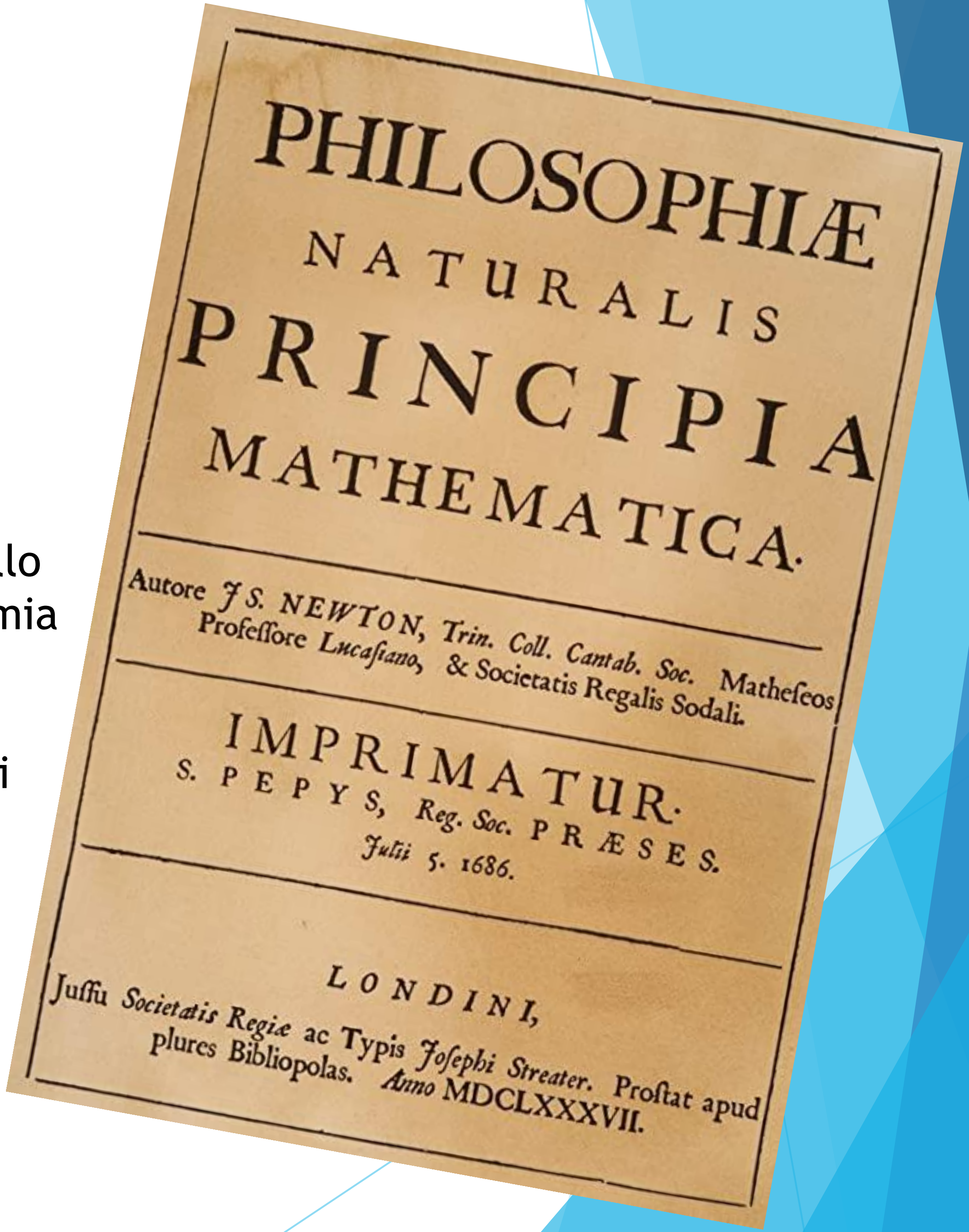
2. Si

La sua prima esposizione pubblicata del calcolo infinitesimale apparve nel testo

«**Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**»,

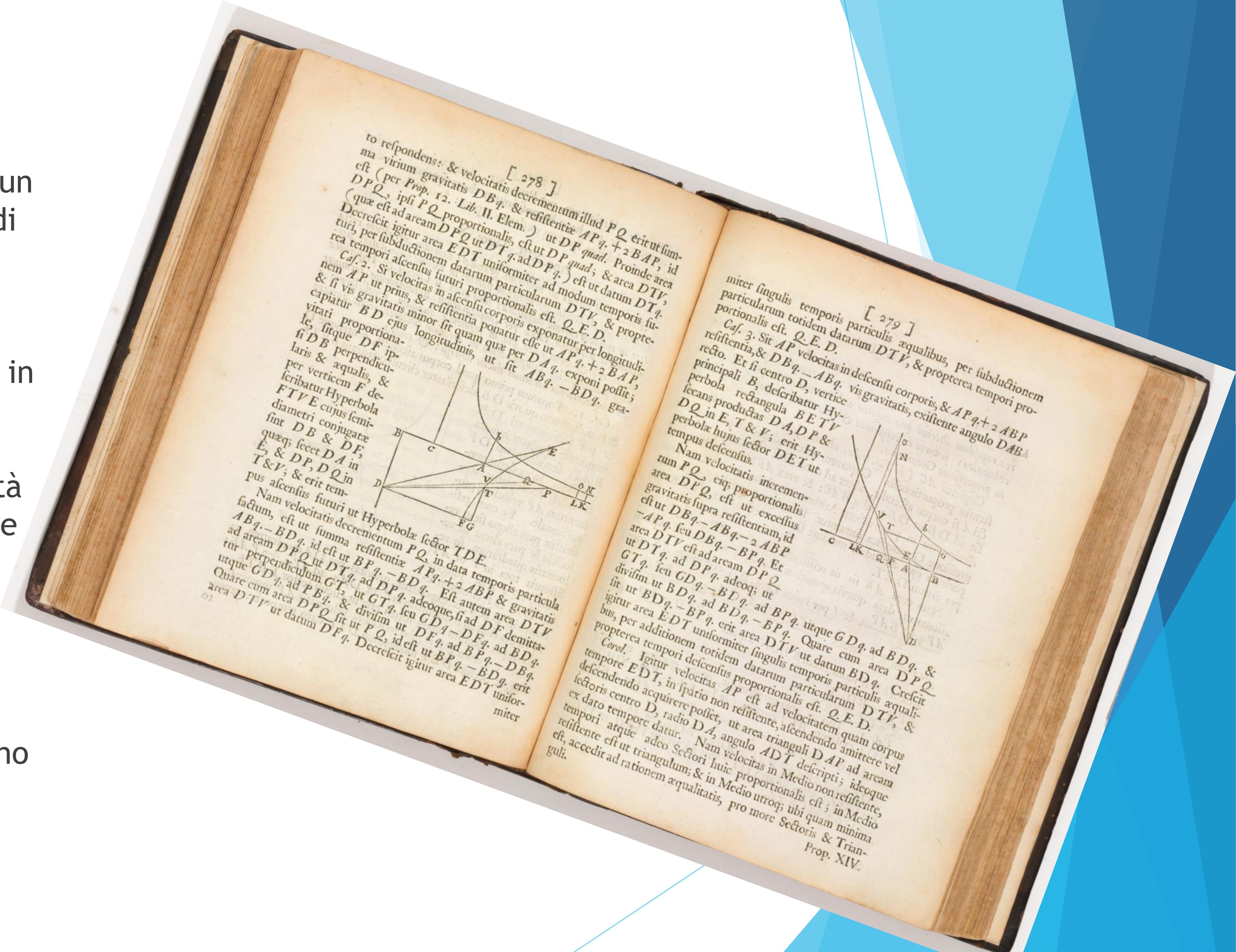
pubblicato nel 1687.

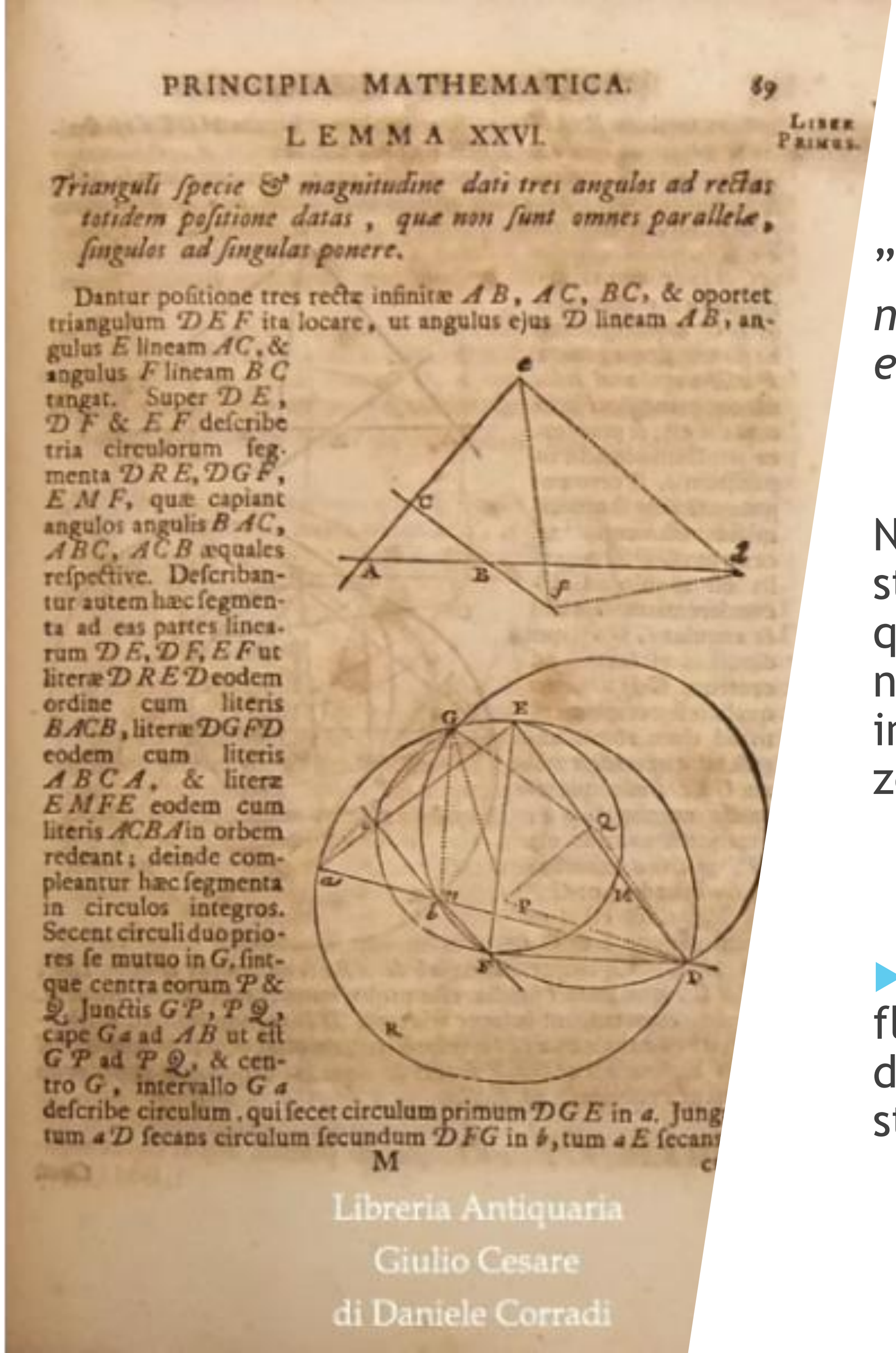
Questo libro viene generalmente descritto come quello che presenta i fondamenti della fisica e dell’astronomia utilizzando il linguaggio della geometria pura. Nonostante quest’opera presenti in larga parte un’esposizione in forma sintetica, vi sono alcuni passi che sono sviluppati in forma analitica.



E’ infine interessante notare che qui troviamo un tentativo di definizione di limite di una funzione:

“ delle quantità, o dei rapporti di quantità, che in un intervallo di tempo finito qualsiasi convergono con continuità verso l’uguaglianza, e che prima della fine di tale intervallo si avvicinano l’una all’altra così tanto che la loro differenza è inferiore a qualsiasi differenza data e finiscono per diventare uguali”.





LIBER PRIMUS.

LEMMA XXVI.

Trianguli specie & magnitudine dati tres angulos ad rectas totidem positione datas, quæ non sunt omnes parallelæ, singulos ad singulas ponere.

Dantur positione tres rectæ infinitæ *AB*, *AC*, *BC*, & oportet triangulum *DEF* ita locare, ut angulus ejus *D* lineam *AB*, angulus *E* lineam *AC*, & angulus *F* lineam *BC* tangat. Super *DE*, *DF* & *EF* describe tria circulorum segmenta *DRE*, *DGF*, *EMF*, quæ capiant angulos angulis *BAC*, *ABC*, *ACB* æquales respective. Describantur autem hæc segmenta ad eas partes linearum *DE*, *DF*, *EF* ut literæ *DRED* eodem ordine cum literis *BACB*, literæ *DGFD* eodem cum literis *ABCA*, & literæ *EMFE* eodem cum literis *ACBA* in orbem redeant; deinde compleantur hæc segmenta in circulos integros. Secent circuli duo priores se mutuo in *G*, sintque centra eorum *P* & *Q*. Junctis *GP*, *PQ*, cape *Ga* ad *AB* ut est *GP* ad *PQ*, & centro *G*, intervallo *Ga* describe circulum, qui secet circulum primum *DGE* in *a*. Jungatur tum *aD* secans circulum secundum *DFG* in *b*, tum *aE* secans

M

Il metodo da lui proposto era detto

"metodo dei primi rapporti delle quantità nascenti e degli ultimi rapporti delle quantità evanescenti".

Newton considerava non più gli incrementi a sé stanti, bensì i loro rapporti, sia nel caso di quantità inizialmente nulle, che poi crescevano nel tempo ("nascenti"), sia in quello di quantità inizialmente positive che decrescevano verso lo zero ("evanescenti").

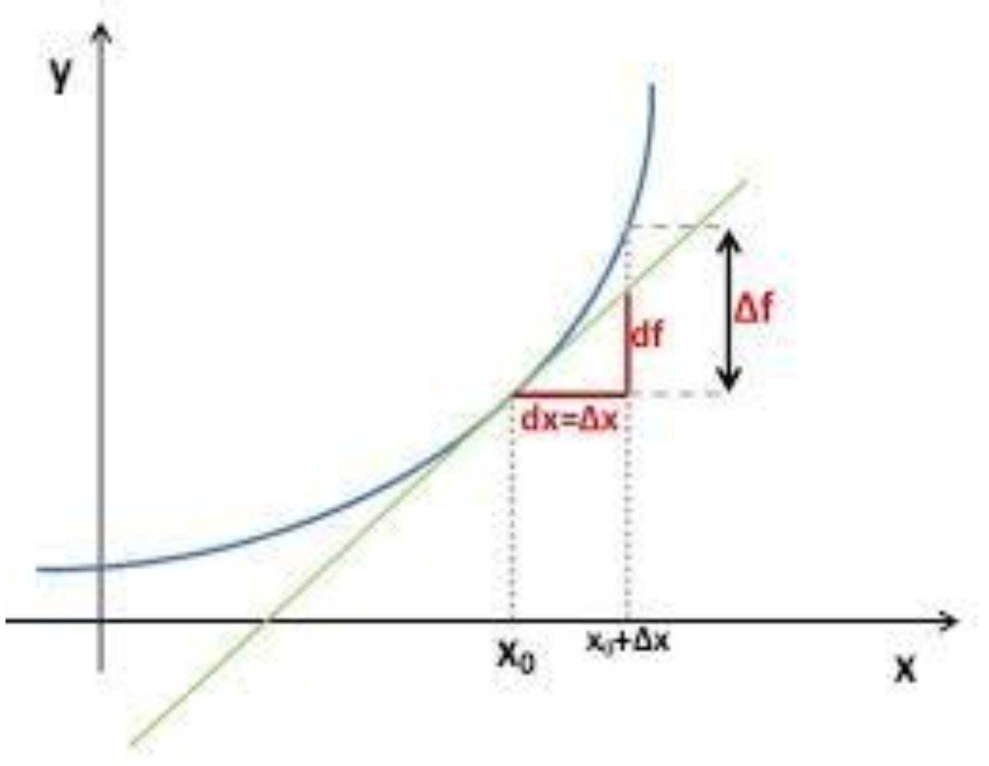
- Per Newton la funzione primitiva era detta fluente e indicata con una lettera mentre la derivata era detta flussione e indicata con la stessa lettera con un punto sopra.

Gottfried Wilhelm Leibniz

- Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), filosofo e matematico tedesco nato a Lipsia, è considerato, con Newton, il padre del moderno calcolo infinitesimale. Studiò teologia, legge, filosofia, matematica, ma i suoi interessi iniziali non furono prettamente matematici, infatti conseguì il dottorato in legge e poi prese servizio come diplomatico presso la famiglia degli Hannover. In qualità di influente rappresentante di uomini di Stato, Leibniz viaggiò molto e conobbe Huygens, grazie al quale ebbe origine il suo interesse per la matematica. Nonostante i suoi importanti contributi alla storia del pensiero matematico e filosofico, è da sottolineare come Leibniz avesse una predilezione per l'aspetto pratico delle scienze: al momento della fondazione dell'Accademia delle Scienze di Berlino, da lui promossa, si raccomandò che l'istituzione incoraggiasse particolarmente le invenzioni meccaniche e le scoperte in chimica e fisiologia che risultassero utili all'umanità. Preferì, inoltre, usare il tedesco anziché il latino, nelle proprie opere, affinché fossero maggiormente comprensibili anche ad un pubblico non strettamente accademico.

Durante uno dei suoi viaggi capitò anche a Londra e fu prevalentemente intorno a questa visita che si accentrò, più tardi, la polemica sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale, giacché pareva che Leibniz avesse visto una copia del «De Analysi» di Newton.
Non aveva ancora una buona preparazione in geometria e analisi quindi non è ipotizzabile il plagio, inoltre il calcolo differenziale da lui proposto nei due anni successivi è concettualmente differente, pur se giunge alle stesse conclusioni.

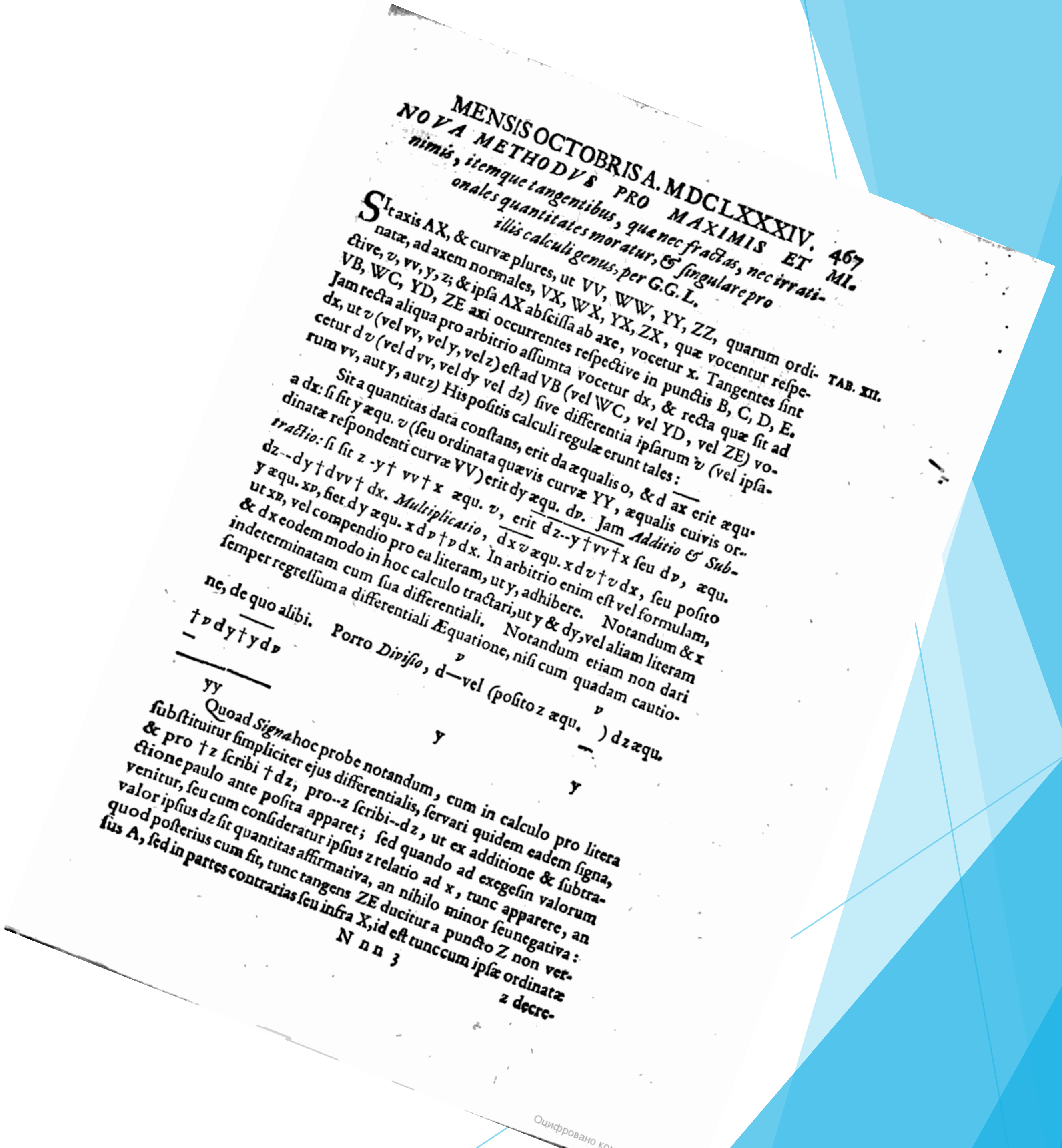
L'importanza di Leibniz risiede nell'aver introdotto un'operazione, la **differenziazione**, che opera non sulle funzioni, che quando Leibniz scriveva ancora non esistevano, ma sulle variabili e sulle loro combinazioni, e che corrisponde a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili.



Il calcolo differenziale è presentato nell' opera del **1684** intitolata

«Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur»

(Nuovo metodo per trovare i massimi e i minimi e anche le tangenti, non ostacolato da quantità irrazionali).



MENSIS OCTOBRIS A. MDCLXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MI-
nimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrati-
onales quantitates moratur, & singulare pro
illis calculi genus, per G. G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordi- TAB. XII.
natæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respe-
ctive, v, vv, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint
VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E.
Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad
dx, ut v (vel vv, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vo-
cetur dv (vel dvv, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsa-
rum vv, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:
Sit a quantitas data constans, erit da æqualis o, & d ax erit æqu.
a dx: si sit y æqu. v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis or-
dinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Sub-
tractio*: si sit z -y † vv † x æqu. v, erit dz--y † vv † x seu dv, æqu.
dz--dy † dvv † dx. *Multiplicatio*, dx v æqu. x dv † v dx, seu posito
y æqu. xv, fiet dy æqu. x dv † v dx. In arbitrio enim est vel formulam,
ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x
& dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam
indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari
semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautio-
ne, de quo alibi. Porro *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (posito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu.
$\frac{† v dy † y dv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera
substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa,
& pro † z scribi † dz, pro--z scribi--dz, ut ex additione & subtra-
ctione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum
venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an
valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa:
quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non ver-
sus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ
z decre-

N n n 3

DISPUTA SULLA NASCITA DEL CALCOLO INFINITESIMALE

A partire dal 1695 si accese una disputa tra Newton e Leibniz a causa di un presunto plagio, ad opera di Leibniz, delle scoperte di Newton, poiché sembrava che questi avesse visto alcuni documenti privati (che però oggi sappiamo non aveva mai ricevuto) o addirittura una copia del «De Analysi» ma di certo all'epoca avrebbe capito poco di quello che leggeva. Oggi è dunque abbastanza chiaro che, nonostante la scoperta di Newton abbia preceduto quella di Leibniz di circa 10 anni, quest'ultimo raggiunse i suoi risultati indipendentemente da quelli del matematico inglese.

Inoltre a Leibniz va riconosciuta la priorità di pubblicazione: pubblicò infatti un'esposizione del suo calcolo nel 1684 in una sorta di periodico mensile scientifico. Newton, purtroppo, non comunicava volentieri le proprie idee ai suoi colleghi, di conseguenza il metodo delle flussioni non era molto conosciuto al di fuori dell'Inghilterra e le flussioni non vennero sviluppate e generalizzate. I principali allievi di Newton, **Maclaurin e Taylor**, si concentrarono principalmente sullo studio di serie infinite. Leibniz,al contrario, trovò devoti discepoli pronti a imparare il calcolo differenziale e integrale e a divulgarlo. Fra questi ci furono i due fratelli svizzeri **Bernoulli** e successivamente **Euler.**

APPROFONDIMENTO

I rapporti fra Newton e Leibniz non furono facili: un interessante articolo reperibile all'indirizzo
http://www.cittadellascienza.it/centrostudi/2016/11/le-vite-parallele-di-newton-e-leibniz/, oppure all'indirizzo
http://matematica.unibocconi.it/articoli/le-vite-parallele-di-newton-e-leibniz
scritto da Mauro Comoglio, analizza il periodo storico in cui si sono sviluppati questi concetti innovativi che hanno dato un forte impeto alla risoluzione dei problemi dibattuti in quei secoli.
Comoglio così descrive i differenti percorsi seguiti da Newton e Leibniz che hanno dato risultati equivalenti:

«In particolare Newton si rese conto che il tema centrale di quella che oggi chiamiamo analisi infinitesimale, si riduceva a risolvere due problemi: data una curva (Newton non conosceva, e quindi non usò mai, il termine funzione che venne introdotto per la prima volta da Leibniz nel 1694) determinare analiticamente la tangente ad essa in un suo punto e l'area sottesa dalla curva stessa. L'approccio di Newton fu di tipo cinematico e questo è da tenere presente per gli sviluppi della polemica che lo vide contrapposto a Leibniz.

In altre parole la curva venne concepita come generata da un moto continuo di un punto, e ad essa vennero associati i concetti di *fluenti* – in grado di descrivere la generazione dinamica di una curva – e di *flussione* – calcolata come tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla tangente geometrica della curva e l'asse delle ascisse: in pratica la velocità con cui la curva viene descritta da un punto materiale in movimento. Le fluenti vennero indicate con x, y, z e flussioni con $\dot{x}$, $\dot{y}$, ẓ.
L'area sottesa dalla curva fu concepita come generata dal moto del segmento associato alle ordinate. Anche in questo caso Newton ricorse al termine *flussione*, però questa volta dell'area. Si trattò, dunque, di un approccio fisico e dinamico».

Leibniz, invece:
«Il giovane tedesco (Leibniz) , tuttavia, non si limitò a studiare passivamente. In un tempo sorprendentemente breve gettò le basi del moderno calcolo differenziale e integrale, sicuramente dopo Newton, ma in modo del tutto indipendente. Il calcolo di Leibniz presentava alcune analogie con quello newtoniano, come il metodo della cancellazione degli infinitesimi in alcuni casi specifici oppure l'uso massiccio delle serie infinite, ma le analogie terminavano qui. L'approccio leibniziano fu del tutto avulso da considerazioni cinematiche e dinamiche e ben si inseriva nel quadro delle grandi ambizioni del filosofo di Lipsia: la creazione di una "caratteristica universale" ovvero di un linguaggio simbolico nel quale potesse essere espresso ogni ragionamento».

Le critiche all’analisi infinitesimale

Il vescovo e filosofo irlandese George Berkeley (1685-1753) propose una

critica radicale all’analisi infinitesimale (così come sviluppata al suo tempo) nell’opuscolo The Analyst, pubblicato nel 1734.
In particolare, Berkeley concentrò i propri appunti al procedimento adottato dai

principali matematici del Seicento, per calcolare i differenziali: apportare un

incremento alla variabile e successivamente dopo aver diviso alcuni termini

per esso porlo uguale a zero.

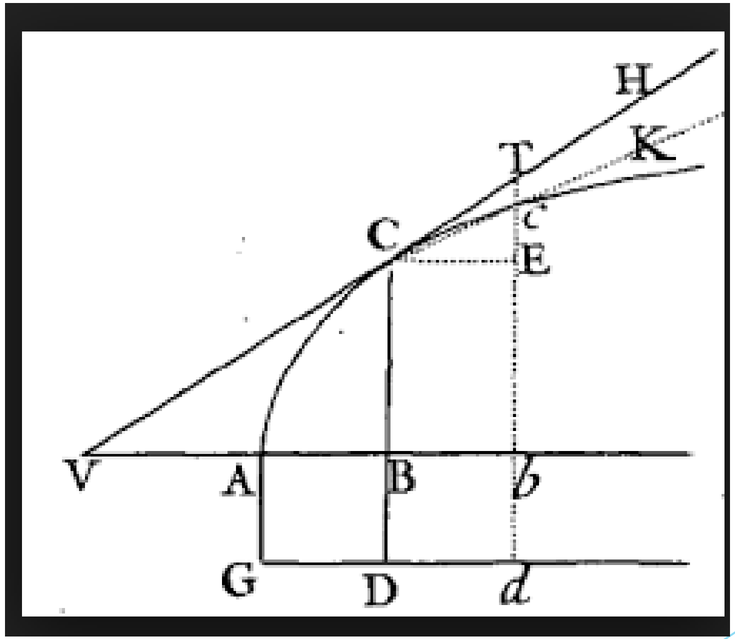
In particolare, in riferimento alle flussioni di Newton , Berkeley, in uno dei passaggi più celebri dell’Analyst, poneva la questione:

«Che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla.
Perché non chiamarli spiriti di quantità sparite (ghosts of departed quantities)?»

La risposta di Newton fu elegante:

«Si può obiettare che l’ultimo rapporto di due quantità evanescenti non è nulla, perché prima che esse svaniscono, il loro rapporto non è l’ultimo e allorché sono svanite non ne hanno più alcuno.

Ma è facile rispondere:[…] l’ultimo rapporto delle quantità evanescenti deve essere inteso come il rapporto fra dette quantità non prima che siano svanite e nemmeno dopo, ma nell’istante stesso in cui svaniscono."



Nomenclatura relativa alle derivate

Nome	Simbolo di derivata	Esempio $y = x^2$
Leibniz	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dx^2}{dx}=2x$
Eulero	$D_x f(x)$	$D_x x^2=2x$
Lagrange	y' $f'(x)$	$y'=f'(x)=2x$
Cauchy	$D f(x)$	$D x^2=2x$
Newton	$\dot{y}$	$\dot{y}=2x$

Bibliografia e sitografia

- Morris Kline Storia del pensiero matematico, vol I , Einaudi
- Carl Boyer Storia della matematica, Mondadori
- http://www.unipa.it/provenzano/index_file/support/Bonavoglia-Il_Calcolo_Infinitesimale.pdf
- https://matematichelementaripvs.files.wordpress.com/2012/12/analisi.pdf
- http://matematica.unibocconi.it/autore/mauro-comoglio