CONTINUITÁ

4 nov 2020

def. x_0 é un punto di accumulazione per $f(x)$ se $f(x)$ ha dei punti nel suo intorno

x_0 pt. acc. $f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \delta > 0 \ \exists x : 0 < |x - x_0| < \delta \wedge x \in D_f$

necessario per i limiti

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow x_0$ pt. acc.

continuitá → due scuole di pensiero
- $x_0 \in CE$
- $\forall x_0$

def. 1 se x_0 pt. acc; $x_0 \in CE \Rightarrow$

$f(x)$ è continua in $x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ossia $\lim_{x \to x_0} f(x) \longrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \\ \exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 \\ l_1 = l_2 \end{array}\right] \quad l_1 = l_2 = f(x_0)$$

def 2 se $x_0 \in CE$; x_0 p.to isolato $\overset{def}{\Longleftrightarrow} f(x)$ è continua in x_0

def 3 $f(x)$ continua in $(a;b)$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $f(x)$ continua in $\forall x \in (a;b)$

def 4 $f(x)$ continua in $[a;b]$

- $f(x)$ continua in $x=a$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
- $f(x)$ continua in $x=b$ $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$
- $f(x)$ continua in $(a;b)$

ex.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x<0 \\ 2x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$

i. $x<0$: e^x $\quad \lim\limits_{x \to x_0} e^x \overset{?}{=} e^{x_0}$ $\quad$ sì

ii. $x>0$: $2x+1$ $\quad \lim\limits_{x \to x_0} (2x+1) = 2x+1$ $\quad$ sì

iii. $x=0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x = e^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x+1) = 1$

$f(0) = 1$ $\quad$ $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$

ex.

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-2} & x<2 \\ \ln(2x-3) & x \geq 2 \end{cases}$$

CE $\mathbb{R}$

- $f(x)$ continua?

i. $x<2$: $y=\frac{x^2-1}{x-2}$ $(-\infty; 2)$ $f(x)$ continua

ii. $x>2$: $y=\ln(2x-3)$ $(2; +\infty)$ $f(x)$ continua

iii. $x=2$: $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

a) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-1}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$ $\rightarrow$ non è continua

...

$f(x)$ non è continua in $x=2$