ISBN 978-88-08-18778-9

Energia di reazione. In un sistema che subisce una reazione chimica o nucleare, la variazione di energia di massa totale del sistema è chiamata *energia di reazione* e indicata col simbolo Q. La si ottiene dalla relazione

$$E_{0,i} = E_{0,f} + Q, \tag{38.49}$$

ove i pedici «i» e «f» si riferiscono rispettivamente alle energie di massa iniziale e finale dell'intero sistema.

Possiamo riscrivere la (38.49) introducendovi l'espressione dell'energia di massa *totale* data dalla (38.43), con lo stesso significato dei pedici:

$$M_i c^2 = M_f c^2 + Q,$$

ovvero

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M c^2, \tag{38.50}$$

in cui $\Delta M = M_f - M_i$ rappresenta la variazione di massa totale conseguente alla reazione.

Se la reazione dà luogo a un trasferimento di energia da energia di massa a energia cinetica dei prodotti di reazione, l'energia di massa totale del sistema E_0 diminuisce e Q risulta positivo. Se, al contrario, una reazione richiede che dell'energia venga convertita in energia di massa, l'energia di massa totale del sistema E_0 (e quindi la massa totale M) aumenta e l'energia di reazione Q sarà quindi negativa.

Supponiamo ad esempio che due nuclei di idrogeno subiscano una *fusione nucleare*, in cui si uniscono a formare un singolo nucleo liberando due particelle.

$${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu,$$

ove ${}^2\text{H}$ rappresenta un nucleo di idrogeno di tipo diverso (il deuterio, contenente un neutrone oltre al protone), e^+ è un positrone e ν è un neutrino.

L'energia di massa totale (e quindi la massa totale) del nucleo risultante e delle due particelle è minore dell'energia di massa totale (e quindi della massa totale) dei due nuclei d'idrogeno originari. L'energia di reazione Q è dunque positiva e si dice che la reazione ha *liberato* energia (proveniente dall'energia di massa). Questa conversione energetica è vitale per noi, perché l'energia che ci proviene dal Sole (e quindi la nostra stessa vita) si basa fondamentalmente sulla fusione di nuclei d'idrogeno.

Energia cinetica

Nel capitolo 7 abbiamo definito l'energia cinetica di un corpo di massa m animato da velocità v (ben inferiore a quella della luce) come

$$K = \tfrac{1}{2} m v^2. \tag{38.51}$$

Questa relazione classica però è solo un'approssimazione, peraltro ottima quando si tratti di velocità lontane dal valore limite c.

Cerchiamo ora un'espressione dell'energia cinetica valida per *tutte* le velocità fisicamente possibili, comprese dunque quelle molto vicine a c. Esplicitando K nell'equazione 38.47 e sostituendovi la (38.48), si ottiene

$$K = E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(energia cinetica)}, \tag{38.52}$$

ove γ è il fattore di Lorentz per il corpo in movimento.

Il grafico di figura 38.13 descrive l'andamento dell'energia cinetica di un elettrone in funzione del parametro di velocità v/c, calcolata con la formula relativistica (eq. 38.52) e con quella classica (eq. 38.51). Nella parte sinistra le due curve coincidono: è il dominio delle basse velocità, quelle che avevamo considerato finora nel nostro testo e cui abbiamo sempre applicato l'equazione 38.51. Nella parte destra del grafico, invece, quando la velocità si approssima a c, le due curve si discostano notevolmente: quando il parametro di velocità tende al valore 1, la formula classica dà un'energia cinetica in moderata ascesa, mentre la formula relativistica fa tendere K verso l'infinito. Se dunque siamo in presenza di un corpo dotato di velocità v significativamente comparabile con quella della luce, *dobbiamo* ricorrere all'equazione 38.52 per calcolarne l'energia cinetica.

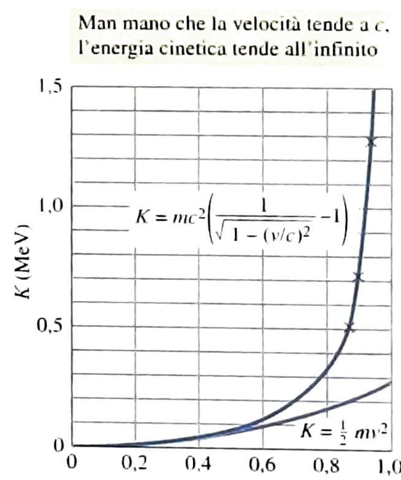

Figura 38.13 Sono messi a confronto i grafici dell'espressione relativistica (eq. 38.52) e di quella classica (eq. 38.51) per l'energia cinetica di un elettrone, tracciati in funzione di v/c, dove v è la velocità dell'elettrone e c è la velocità della luce. Si vede che a basse velocità le due curve si confondono, mentre alle alte velocità divergono sensibilmente. Le crocette segnano valori determinati sperimentalmente, confermando che alle altissime velocità la curva relativistica corrisponde ai risultati sperimentali, mentre quella classica non è affidabile.

ISBN 978-88-08-18778-9

La figura aiuta a ricordare le relazioni tra le energie

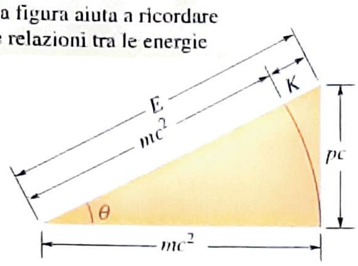

Figura 38.14 Un utile strumento mnemonico per le relazioni relativistiche dell'energia totale E, energia a riposo mc^2, energia cinetica K e quantità di moto p.

Lavoro. Dalla figura 38.13 si traggono anche informazioni sul lavoro necessario per incrementare la velocità di un corpo diciamo dell'1%. Il lavoro richiesto L è pari alla variazione di energia cinetica ΔK del corpo. Nel dominio delle basse velocità questa variazione, e quindi il lavoro richiesto, possono essere modesti. Al contrario, nel dominio delle alte velocità il lavoro potrebbe risultare enorme a causa del rapidissimo incremento dell'energia cinetica con la velocità v. Per accelerare il corpo fino alla velocità c si richiederebbe un lavoro infinito e quindi ciò risulta impossibile.

L'energia cinetica di protoni, elettroni e altre particelle è più spesso indicata con l'unità di misura elettronvolt o un suo multiplo. Per un elettrone, ad esempio, possedere energia cinetica di 20 MeV rappresenta un caso ordinario.

Quantità di moto ed energia cinetica

In meccanica classica la quantità di moto p di una particella è data da mv e l'energia cinetica K da $\frac{1}{2}mv^2$. Eliminando v tra queste due espressioni troviamo un legame diretto tra quantità di moto ed energia cinetica:

$$p^2 = 2Km \qquad \text{(classica)}. \tag{38.53}$$

Possiamo stabilire un analogo legame in ambito relativistico eliminando v tra le definizioni relativistiche della quantità di moto (eq. 38.41) e dell'energia cinetica (eq. 38.52). Così facendo, dopo qualche passaggio, si ottiene

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2. \tag{38.54}$$

Con l'aiuto della (38.47) possiamo trasformare l'equazione 38.54 in una relazione tra la quantità di moto p e l'energia totale E di una particella:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{38.55}$$

Il triangolo rettangolo della figura 38.14 aiuta a ricordare questa utile relazione. Si vede anche nel triangolo che

$$\sin\theta = \beta \qquad \text{e} \qquad \cos\theta = 1/\gamma. \tag{38.56}$$

Dalla (38.55) si riconosce come il prodotto pc abbia le dimensioni dell'energia E. Possiamo quindi esprimere la quantità di moto p come un'energia diviso c. Infatti nella fisica delle particelle si esprimono spesso i valori di quantità di moto in MeV/c o GeV/c.

VERIFICA 4

Stabilire se (a) l'energia cinetica e (b) l'energia totale di un elettrone avente energia cinetica di 1 GeV sono rispettivamente maggiore, minore o uguale a quella di un protone avente energia cinetica di 1 GeV.

PROBLEMA SVOLTO 38.6 Energia e quantità di moto di un elettrone relativistico

(a) Qual è l'energia totale E di un elettrone da 2,53 MeV? (Quando si dà l'energia di una particella in questo modo, ci si riferisce alla sua energia cinetica. Quindi K = 2,53 MeV.)

SOLUZIONE

L'idea chiave è considerare l'energia totale E come somma dell'energia di massa (o energia a riposo) dell'elettrone mc^2 e della sua energia cinetica, in base alla (38.47):

$$E = mc^2 + K. \tag{38.57}$$

L'energia di massa mc^2 dell'elettrone si può calcolare a partire dal valore della massa m dato nell'appendice B:

$$mc^2 = (9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg})(299\,792\,458\ \text{m/s})^2 = 8{,}187 \cdot 10^{-14}\ \text{J}.$$

Dividendo questo risultato per il fattore di conversione $1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J/MeV, si ottiene E_0 = 0,511 MeV, l'energia di massa dell'elettrone (come riportato d'altronde nella tabella 38.3); di modo che la (38.57) ci dà

$$E = 0{,}511\ \text{MeV} + 2{,}53\ \text{MeV} = 3{,}04\ \text{MeV}.$$

(b) Qual è la quantità di moto p dell'elettrone, espressa in unità MeV/c? (Si noti che c è la velocità della luce e non un'unità di misura in sé.)

SOLUZIONE

Idea chiave è ricavare p dall'energia totale E e dall'energia di massa $E_0 = mc^2$ in base all'equazione 38.55,

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

Risolvendo rispetto a pc otteniamo

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} =$$
$$= \sqrt{(3{,}04\ \text{MeV})^2 - (0{,}511\ \text{MeV})^2} = 3{,}00\ \text{MeV}.$$

Dividendo per c abbiamo infine

$$p = 3{,}00\ \text{MeV}/c.$$

PROBLEMA SVOLTO 38.7 Energia e sorprendente discrepanza nei tempi di percorrenza

Il più energetico protone mai rivelato sulla Terra proveniente dai raggi cosmici aveva la sbalorditiva energia cinetica di $3{,}0 \cdot 10^{20}$ eV (un'energia che innalzerebbe la temperatura di un cucchiaino d'acqua di qualche grado).

(a) Qual era il fattore di Lorentz γ del protone? E la velocità v? Riferite entrambi i valori al sistema di riferimento terrestre.

SOLUZIONE

Una prima idea chiave è la relazione che sussiste tra il fattore di Lorentz e l'energia di massa mc^2, cioè l'equazione 38.48. Una seconda idea chiave sta nel considerare che l'energia totale del protone è la somma della sua energia di massa mc^2 e dell'energia cinetica K, che è data dal problema. Riunendo queste idee scriviamo

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + K}{mc^2} = 1 + \frac{K}{mc^2}. \tag{38.58}$$

Ricaviamo l'energia a riposo del protone $mc^2 = 938$ MeV dalla tabella 38.3. Sostituendo i termini noti nella (38.58) otteniamo

$$\gamma = 1 + \frac{(3{,}0 \cdot 10^{20}\ \text{eV})}{(938 \cdot 10^6\ \text{eV})} =$$
$$= 3{,}198 \cdot 10^{11} \approx 3{,}2 \cdot 10^{11}.$$

Questo valore di γ è così elevato che l'impiego della (38.8), definizione di γ, per trovare v ci porta a un ostacolo insormontabile. Provate: la calcolatrice vi informerà che β vale 1 e che quindi v praticamente eguaglia c. Difatti la velocità deve essere quasi c, ma noi desideriamo una risposta più precisa, che possiamo ottenere risolvendo la (38.8) rispetto a $1 - \beta$. Cominciamo scrivendo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}},$$

dove, essendo β molto vicino a 1, abbiamo posto $1 + \beta = 2$. (Possiamo arrotondare la somma di due numeri molto prossimi, non la loro differenza.) Risolvendo rispetto a $1 - \beta$ otteniamo

$$1 - \beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{(2)(3{,}198 \cdot 10^{11})^2} =$$
$$= 4{,}9 \cdot 10^{-24} \approx 5 \cdot 10^{-24}.$$

Di conseguenza

$$\beta = 1 - 5 \cdot 10^{-24}$$

e, poiché $v = \beta c$, si ha

$$v \approx 0{,}99999999999999999999999995c.$$

(b) Supponete che questo protone attraversi diametralmente la Via Lattea ($9{,}8 \cdot 10^4$ a.l.). Quanto tempo impiega nell'attraversamento se la misura viene effettuata nel sistema di riferimento comune della Terra e della Via Lattea?

SOLUZIONE

Abbiamo appena visto che questo protone «ultraveloce» viaggia a una velocità che praticamente coincide con quella della luce. L'idea chiave è dunque ricorrere alla definizione di anno-luce: la distanza che la luce nel vuoto percorre in un anno. La luce pertanto impiegherà $9{,}8 \cdot 10^4$ anni per attraversare la Via Lattea e il protone farà praticamente lo stesso. Quindi, misurato dal sistema Terra-Via Lattea, il tempo richiesto è

$$\Delta t = 9{,}8 \cdot 10^4\ \text{a}.$$

(c) Quanto dura questo attraversamento nel sistema di riferimento del protone?

SOLUZIONE

Ci servono quattro idee chiave:

1. In questo problema si contemplano misurazioni effettuate da due sistemi di riferimento (inerziali), uno solidale con la Terra e la Via Lattea, l'altro solidale con il protone.
2. Accadono due eventi: 1) l'ingresso del protone nella Via Lattea; 2) l'uscita del protone dalla parte opposta della Via Lattea.
3. L'intervallo di tempo misurato dal protone è il tempo proprio Δt_0 perché gli eventi in questo riferimento accadono nello stesso luogo.
4. L'intervallo di tempo proprio Δt_0 può essere ricavato dall'intervallo Δt misurato sulla Terra grazie all'equazione 38.9, l'espressione per la dilatazione del tempo. (Si osservi che l'impiego di tale equazione è lecito perché uno dei due tempi misurati *è* un tempo proprio. Otteniamo tuttavia la stessa relazione ricorrendo alle trasformazioni di Lorentz.)

Risolvendo l'equazione 38.9 rispetto a Δt_0 e introducendo i valori già trovati, otteniamo

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9{,}8 \cdot 10^4\ \text{a}}{3{,}198 \cdot 10^{11}} =$$
$$= 3{,}06 \cdot 10^{-7}\ \text{a} = 9{,}7\ \text{s}.$$

Secondo noi l'attraversamento della Via Lattea richiede 98 000 anni. Nel sistema di riferimento del protone il tempo richiesto è 9,7 s (e non si tratta di un protone ipotizzato fantasiosamente, ma di un protone realmente osservato)! Come avevamo annunciato all'inizio del capitolo, il moto relativo è in grado di alterare il ritmo del tempo. In questo esempio l'affermazione è portata alle estreme conseguenze.