Funzioni infinitamente oscillanti al finito

Marcello Colozzo – http://www.extrabyte.info

1 La funzione $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$

Sia data la funzione:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \tag{1}$$

definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$. Per determinarne il comportamento in un intorno di x_0, occorre eseguire l'operazione di passaggio al limite:

$$\lim_{x \to x_0} \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \tag{2}$$

Effettuando il cambio di variabile:

$$x - x_0 = \frac{1}{t},$$

il limite (2) si scrive:

$$\lim_{|t| \to +\infty} \sin t, \tag{3}$$

che come è noto, non esiste. Ne consegue che la funzione (1) ha una singolarità in x_0. A una conclusione analoga si giunge per le funzioni:

$$\cos\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \ \tan\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \ \cot\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \ldots$$

Mostriamo ora che non è possibile tracciare il grafico di f in un intorno della singolarità x_0. A tale scopo, denotiamo con $\mathcal{Z}_f$ l'insieme degli zeri di f:

$$\mathcal{Z}_f = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \tag{4}$$

Deve essere

$$\sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x-x_0} = k\pi, \ \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

cioè

$$x_k = x_0 + \frac{1}{k\pi}, \ \ \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\} \tag{5}$$

Quindi

$$\mathcal{Z}_f = \left\{x_k = x_0 + \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\} \tag{6}$$

È facile persuadersi che risulta $x_0 \in D(\mathcal{Z}_f)$ dove la notazione $D(.)$ denota il derivato di un insieme, i.e. l'insieme dei punti di accumulazione al finito di un insieme assegnato Ne consegue che la singolarità x_0 oltre a essere un punto di accumulazione per X, lo è anche per $\mathcal{Z}_f$. Ciò implica che in ogni intorno di x_0 cadono infiniti zeri di f:

$$\forall I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ \ \exists x_k, x_{k'}, ..., x_{k^{(\infty)}} \in \mathcal{Z}_f \cap I_\delta(x_0) - \{x_0\}$$

A una conclusione analoga si perviene per ciò che riguarda gli estremi relativi. Più precisamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_f &= \{x \in X \mid x \text{ è punto di massimo relativo per } f\} \\ \mathcal{M}''_f &= \{x \in X \mid x \text{ è punto di minimo relativo per } f\} \end{aligned} \tag{7}$$

Esplicitiamo tali insiemi:

$$x \in \mathcal{M}'_f \Longleftrightarrow \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) = +1$$

Cioè:

$$\mathcal{M}'_f = \left\{x'_k = x_0 + \frac{2}{\pi(1+4k)} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{8}$$

Inoltre

$$x \in \mathcal{M}''_f \Longleftrightarrow \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) = -1,$$

onde

$$\mathcal{M}''_f = \left\{x'_k = x_0 + \frac{2}{\pi(3+4k)} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \tag{9}$$

Quindi:

$$x_0 \in D(\mathcal{Z}_f), \ x_0 \in D(\mathcal{M}'_f), \ x_0 \in D(\mathcal{M}''_f) \tag{10}$$

In ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti in cui la funzione vale 0, altri in cui assume il valore $+1$ e altri ancora in cui assume il valore -1. Ed è proprio tale circostanza a determinare la non esistenza del limite (2), come è mostrato nel grafico di fig. 1.

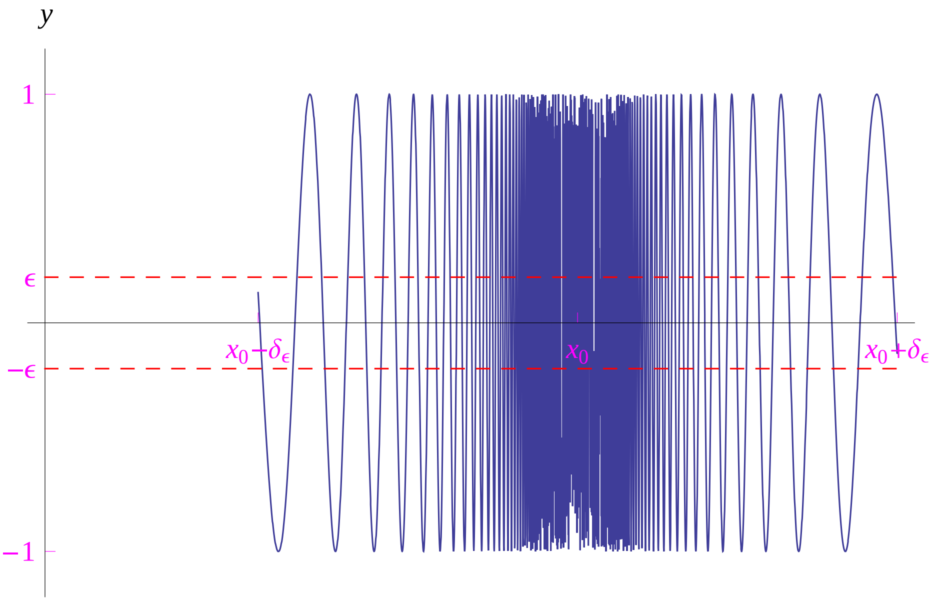

Figura 1: $\forall J_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon), \exists I_{\delta_\varepsilon}(x_0) = (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) \mid x \in X \cap I_{\delta_\varepsilon}(0) - \{x_0\} \Longrightarrow \sin\frac{1}{x}$ assume infinite volte tutti i valori tra -1 e $+1$. Non è possibile disegnare il grafico della funzione nelle immediate vicinanze della singolarità.

Dal grafico di fig. 1 vediamo che in ogni intorno di x_0 la funzione (1) compie infinite oscillazioni. Sussiste, dunque, la seguente definizione:

Definizione 1

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ è } \textbf{\textit{infinitamente oscillante al finito}} \Longleftrightarrow \exists x_0 \in D(X) \cap D(\mathcal{M}_f),$$

essendo $\mathcal{M}_f$ l'insieme dei punti di estremo relativo di f:

$$\mathcal{M}_f = \mathcal{M}'_f \cup \mathcal{M}''_f$$

2 Le funzioni $f(x) = \phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$

Nella definizione 1 rientrano le funzioni:

$$f(x) = \phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \tag{11}$$

dove $\phi(x)$ è l'*inviluppo di modulazione*, ed è una funzione non necessariamente regolare in x_0. Riesce:

$$|f(x)| = |\phi(x)| \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|}_{\leq 1} \leq |\phi(x)|,$$

da cui:

$$-\phi(x) \leq f(x) \leq \phi(x), \tag{12}$$

cioè il grafico Γ_f della funzione (11) è contenuto nella regione:

$$\mathcal{R}_f = \left\{(x,y) \in R^2 \mid x \in X, \ \ -\phi(x) \leq f(x) \leq \phi(x)\right\}$$

o ciò che è lo stesso, compie infinite oscillazione tra le curve $\gamma_\pm : y = \pm\phi(x)$.

Esempio 2 *Ad esempio:*

$$f(x) = \ln|x-x_0| \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \tag{13}$$

che è infinitamente oscillante. Il suo grafico è riportato in fig. 2.

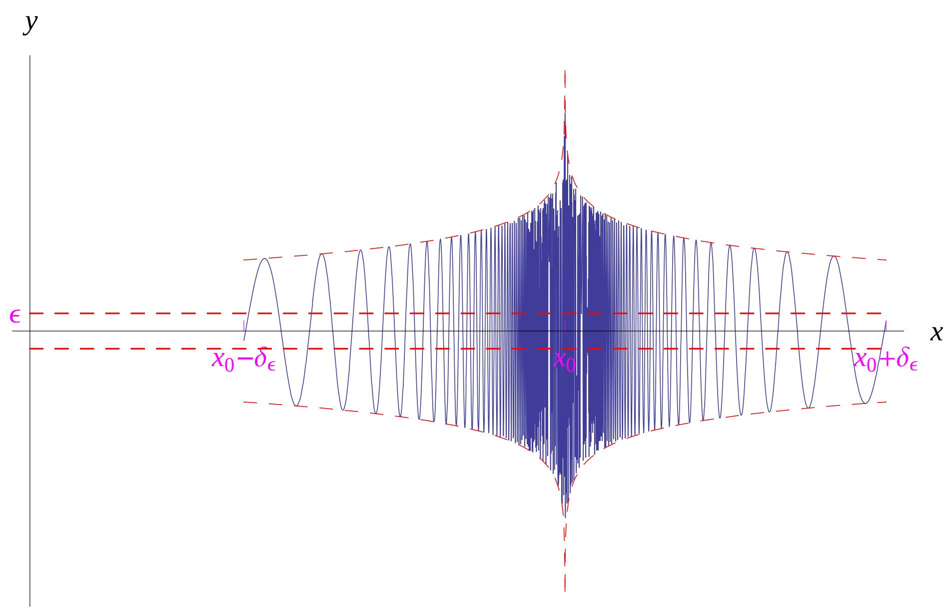

Figura 2: Grafico della funzione (13) da cui vediamo che in ogni intorno di x_0 compie infinite oscillazioni tra le due curve $\gamma_\pm : y = \pm \ln|x-x_0|$. L'ampiezza delle oscillazioni diverge per $x \to x_0$.

Consideriamo il caso particolare in cui $\phi(x)$ è infinitesima in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \phi(x) = 0,$$

per il teorema dei carabinieri si ha:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \tag{14}$$

Per definizione di limite:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \left| \phi(x) \sin\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right| < \varepsilon$$

In altri termini, la funzione (11) compie in ogni intorno di x_0, infinite oscillazioni che si smorzano per $x \to x_0$. Per quanto precede, la funzione $\sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ è non regolare in x_0. Per contro, qualunque inviluppo di modulazione $\phi(x)$ infinitesimo in x_0, *smorza* le oscillazioni forzando la convergenza di $\phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ a zero.

Dalla (14) segue che la funzione è prolungabile per continuità:

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & x \neq x_0 \\ 0, \ x = x_0 \end{cases} \tag{15}$$

La regolarità della derivata di (15) dipende ovviamente dalla funzione $\phi(x)$.

Proposizione 3

$$\left(\begin{array}{c} \textit{La funzione (15)} \\ \textit{è derivabile in } x_0 \end{array} \right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} \phi(x) \ \textit{è derivabile in } x_0 \\ \textit{e } \phi'(x_0) = 0 \end{array} \right)$$

Dimostrazione. Limitiamoci a dimostrare l'implicazione inversa, procedendo per assurdo:

$$\phi'(x_0) = \lambda_0 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Denotiamo con $s(P_0, P)$ la retta secante a $\gamma : y = f(x)$ per i punti

$$P_0(x_0, f(x_0)), \ P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$$

Dalla (12) segue che per $\Delta x \to 0$ i.e. per $P \to P_0$, $s(P_0, P)$ oscilla tra le rette tangenti a $\gamma_+ : y = \phi(x)$ e $\gamma_- : y = -\phi(x)$:

$$\begin{aligned} \tau_{+:} &: y = y_0 + \lambda_0 (x - x_0) \\ \tau_- &: y = y_0 - \lambda_0 (x - x_0) \end{aligned}$$

Abbiamo:

$$\lambda_0 \neq 0 \Longrightarrow \tau_+ \neq \tau_- \Longrightarrow \nexists \lim_{P \to P_0} s(P, P_0),$$

per cui il grafico di f è privo di retta tangente in P_0, giacchè oscilla indefinitamente tra τ_+ e τ_-, per cui f non è derivabile in x_0. Ma ciò è una negazione dell'ipotesi, onde l'asserto. ■

Esempio 4 *Consideriamo la funzione*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \textit{se } x \neq 0 \\ 0, \ \textit{se } x = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N} - \{0\} \tag{16}$$

Qui è $\phi(x) = x^n$*, per cui*

$$\phi'(x) = nx^{n-1} \Longrightarrow \phi'(0) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1 \\ 0, & se\ n > 1 \end{cases} \tag{17}$$

Per la proposizione (3) segue che $f_{n=1}(x)$ *non è derivabile in* $x = 0$*, mentre riesce* $f'_{n>1}(0) = 0$*. Vale comunque la pena controllare tale risultato applicando la definizione di derivata. A tale scopo scriviamo il rapporto incrementale:*

$$\begin{aligned} \left.\frac{\Delta f_n}{\Delta x}\right|_{x=0} &= \frac{f_n(\Delta x) - f_n(0)}{\Delta x} \\ &= \frac{(\Delta x)^n \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) - 0}{\Delta x} \\ &= (\Delta x)^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right), \end{aligned}$$

onde

$$f'_n(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta f_n}{\Delta x}\right|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x)^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\Delta x}\right) = \begin{cases} non\ esiste, & n = 1 \\ 0, & n > 2 \end{cases},$$

in accordo con il risultato precedente. Applichiamo ora le regole di derivazione:

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

che risulta non regolare in $x = 0$ *per* $n = 1, 2$*, diversamente dal risultato precedente. Infatti, per* $n = 2$*:*

$$f'_{n=2}(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Tuttavia, l'andamento della retta secante riportato nel grafico di fig. 3 giustifica il risultato $f'_{n=2}(0) = 0$.

Il processo di smorzamento delle oscillazioni rientra in un noto teorema sulle funzioni continue, il cui enunciato richiede la seguente definizione:

Definizione 5 *Assegnata la funzione* $f : X \to \mathbb{R}$*, il numero reale non negativo:*

$$\Omega(f, X) = \sup_X f - \inf_X f, \tag{18}$$

si dice ***oscillazione della funzione****. Nella (18)* $\sup_X f$ *e* $\inf_X f$ *denotano rispettivamente l'estremo superiore e l'estremo inferiore di* f *in* X*. È facile mostrare che:*

$$\Omega(f, X) = \sup_{x', x'' \in X} |f(x') - f(x'')|$$

Sussiste il seguente teorema, la cui dimostrazione è riportata in questa dispensa.

Teorema 6

$$\left.\begin{array}{c} f\ \text{è continua} \\ \text{in } x_0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \forall I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \quad \lim_{\delta \to 0} \Omega(f, X \cap I_\delta(x_0)) = 0,$$

dove $\Omega(f, X \cap I_\delta(x_0))$ *è l'oscillazione della funzione in* $X \cap I_\delta(x_0)$*.*

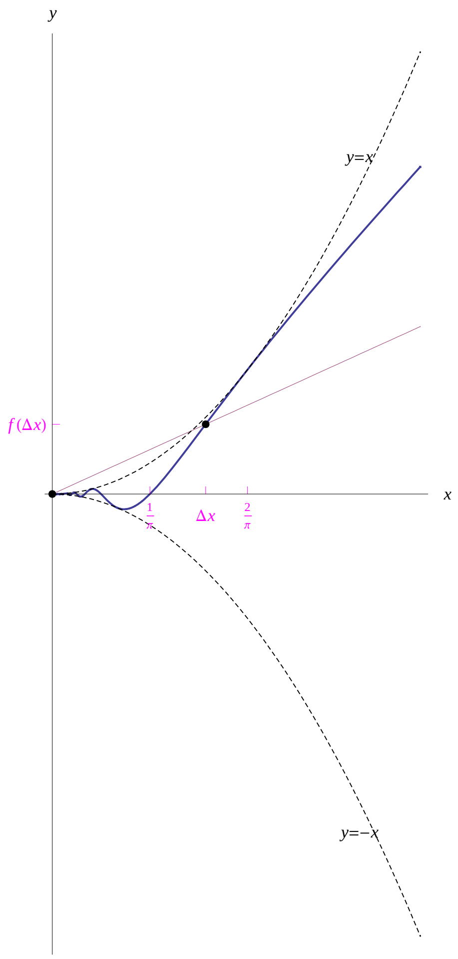

Figura 3: Per $P\left(\Delta x, (\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}\right) \to O(0,0)$, la retta secante a $\Gamma_f : y = x^2 \sin \frac{1}{x}$ per O e P, tende all'asse x, per cui è $f'_{n=2}(0) = 0$.

Da tale teorema segue che in un intorno di un punto di continuità, l'oscillazione di f deve necessariamente annullarsi. Ciò continua a valere anche per la convergenza, a patto di definire poi la funzione in quel punto attraverso il valore del limite.

Dalla definizione 1 segue che le funzioni modulate in ampiezza:

$$\phi(x) \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), \quad \phi(x) \cos\left(\frac{1}{x-x_0}\right),$$

sono infinitamente oscillanti al finito. Inoltre, la definizione 1 fornisce una caratterizzazione topologica per ciò che riguarda il comportamento di una funzione che compie infinite oscillazioni in ogni intorno di un punto assegnato. Si osservi che le funzioni circolari $\sin x$ e $\cos x$ sono infinitamente oscillanti in ogni intorno di $+\infty$ o di $-\infty$. Incidentalmente, le funzioni $\sin\frac{1}{x}$ e $\cos\frac{1}{x}$ si ottengono con la trasformazione di coordinate

$$x = \frac{1}{t}, \quad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\},$$

che *trasforma* il punto all'infinito nella coordinata x, nel punto zero nella coordinata t.

Esempio 7 *Sia data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(20x) \sin\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{5}}\right), & x \neq \frac{\pi}{5} \\ 0, \quad x = \frac{\pi}{5} \end{cases} \tag{19}$$

Per quanto precede, riesce:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{5}} f(x) = 0,$$

da cui la continuità di f in $x_0 = \frac{\pi}{5}$. Inoltre:

$$\left.\frac{d}{dx} \sin(20x)\right|_{x=\frac{\pi}{5}} = 20 \cos(20x)|_{x=\frac{\pi}{5}} = 20 \neq 0$$

Quindi per la proposizione **??** *la funzione (19) non è derivabile in $\frac{\pi}{5}$. In fig. 4 riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $[0,1]$.*

Esempio 8 *Sia data la funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(20x) \sin\left(\frac{1}{x-\frac{\pi}{5}}\right), & x \neq \frac{\pi}{5} \\ 0, \quad x = \frac{\pi}{5} \end{cases} \tag{20}$$

Per quanto precede, riesce:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{5}} f(x) = 0,$$

da cui la continuità di f in $x_0 = \frac{\pi}{5}$. Inoltre:

$$\left.\frac{d}{dx} \sin^2(20x)\right|_{x=\frac{\pi}{5}} = 20 \sin(40x)|_{x=\frac{\pi}{5}} = 0$$

Quindi per la proposizione **??** *la funzione (20) è derivabile in $\frac{\pi}{5}$, avendosi $f'\left(\frac{\pi}{5}\right) = 0$. In fig. 5 riportiamo il grafico della funzione nell'intervallo $\left[0, \frac{3\pi}{10}\right]$.*

Anche gli esempi visti nella sezione precedente riguardano funzioni inifinitamente oscillanti al finito. In particolare, la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} (x-x_0)^p \sin\left(\frac{1}{x-x_0}\right), & \text{se } x = x_0 \\ 0, \quad \text{se } x = x_0 \end{cases}, \quad p \in \mathbb{N} - \{0\},$$

è infinitamente oscillante, e riesce derivabile in x_0 se e solo se $p \geq 2$.

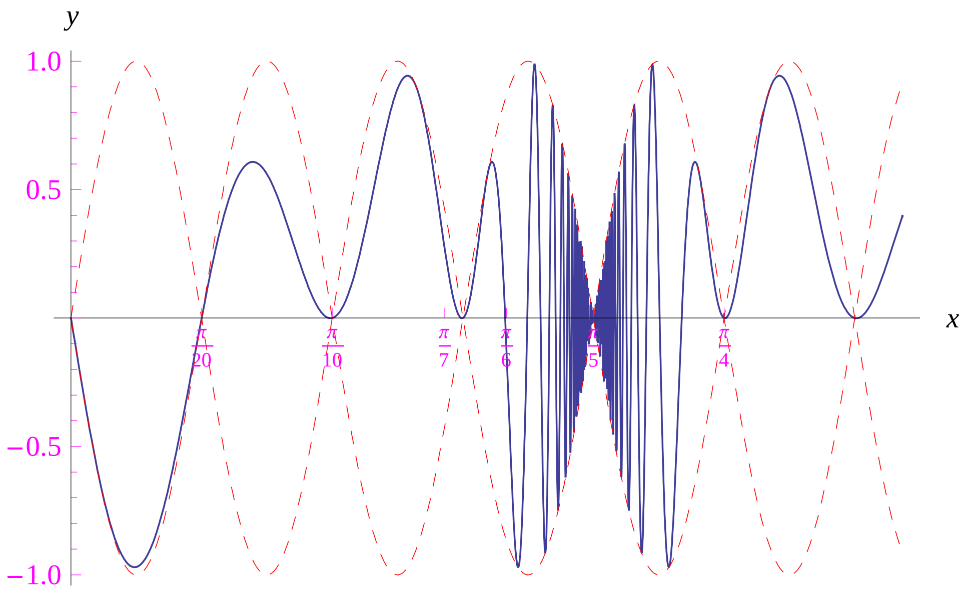

Figura 4: Grafico della funzione (19). La funzione è continua in $x_0 = \frac{\pi}{5}$, ma non è ivi derivabile.

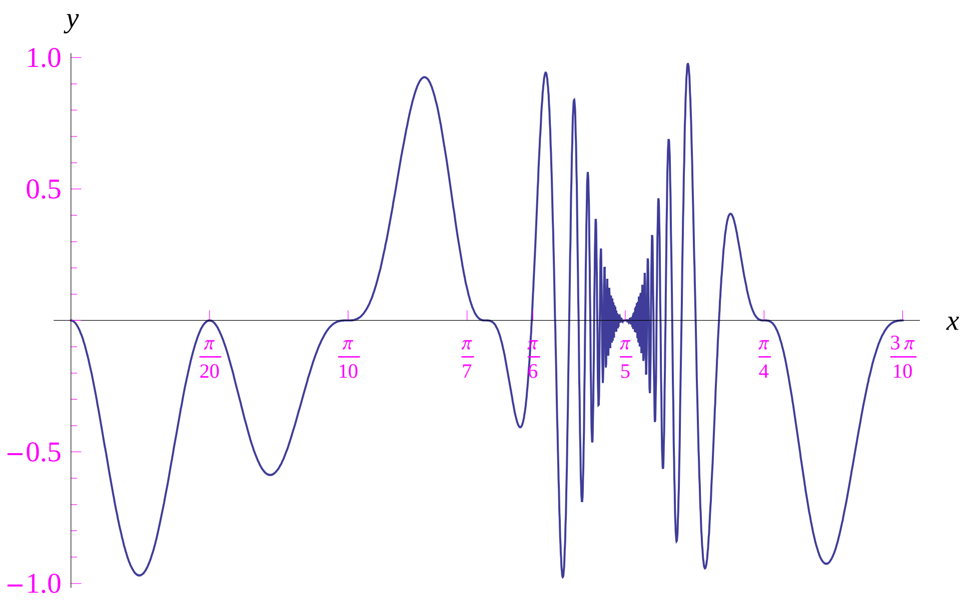

Figura 5: Grafico della funzione (20). La funzione è continua in $x_0 = \frac{\pi}{5}$ ed è ivi derivabile.