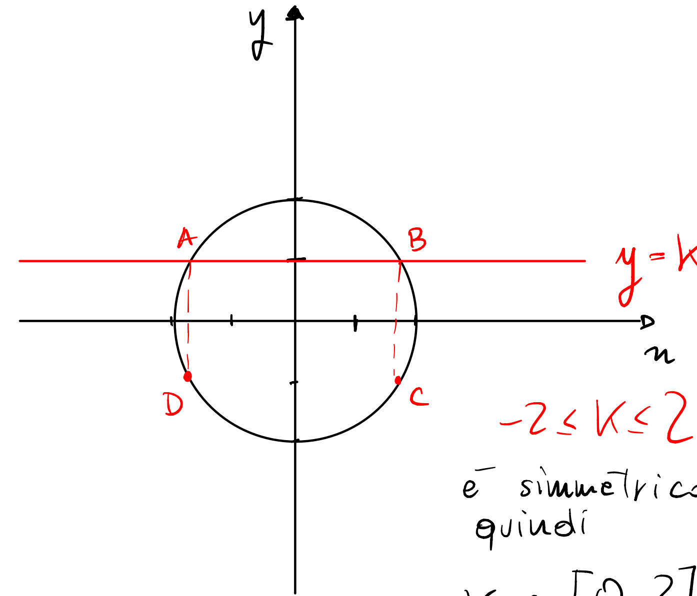
PROBLEMI OTTIMIZZAZIONE

22 feb '21

417 Fra tutti i rettangoli inscritti nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$, determina quello di area massima. [il quadrato di lato $2\sqrt{2}$]



$-2 \le k \le 2$

è simmetrico, quindi

$k \in [0; 2]$

$\mathcal{A} = A(ABCD)$ max

$A = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$

- $\overline{AD} = 2k$
- $\overline{AB} = ?$

$A, B \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = k \end{cases} \qquad x^2 + k^2 = 4$

$x^2 = 4 - k^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{4 - k^2}$

$A\left(-\sqrt{4-k^2}; k\right) \qquad B\left(\sqrt{4-k^2}; k\right)$

$$\overline{AB} = \left| -\sqrt{4-k^2} - \sqrt{4-k^2} \right| = 2\sqrt{4-k^2}$$

$$\mathcal{A} = 4k\sqrt{4-k^2} \leadsto \text{devo massimizzarla}$$

→ prendo $\mathcal{A}^* = k\sqrt{4-k^2}$, in quanto il 4 non influisce sul massimo

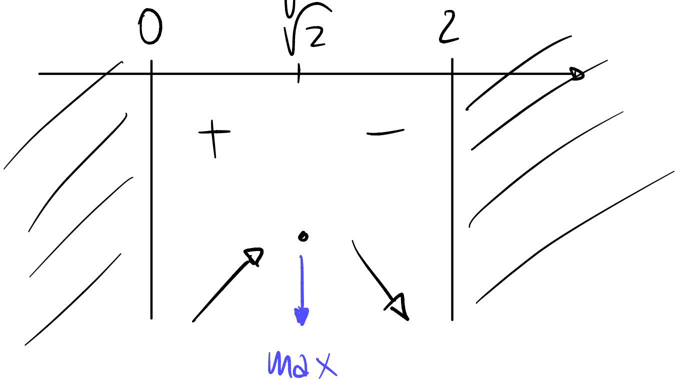
$$\mathcal{A}^{*\prime} = \sqrt{4-k^2} - \frac{\cancel{2}k^2}{\cancel{2}\sqrt{4-k^2}} = \frac{4-k^2-k^2}{\sqrt{4-k^2}} = \frac{4-2k^2}{\sqrt{4-k^2}}$$

→ cerco i punti stazionari

$$\mathcal{A}^{*\prime} = 0 \leadsto 2-k^2 = 0 \leadsto k = \pm\sqrt{2}$$

$$k = \sqrt{2}$$

→ studio il segno di $\mathcal{A}^{*\prime}$

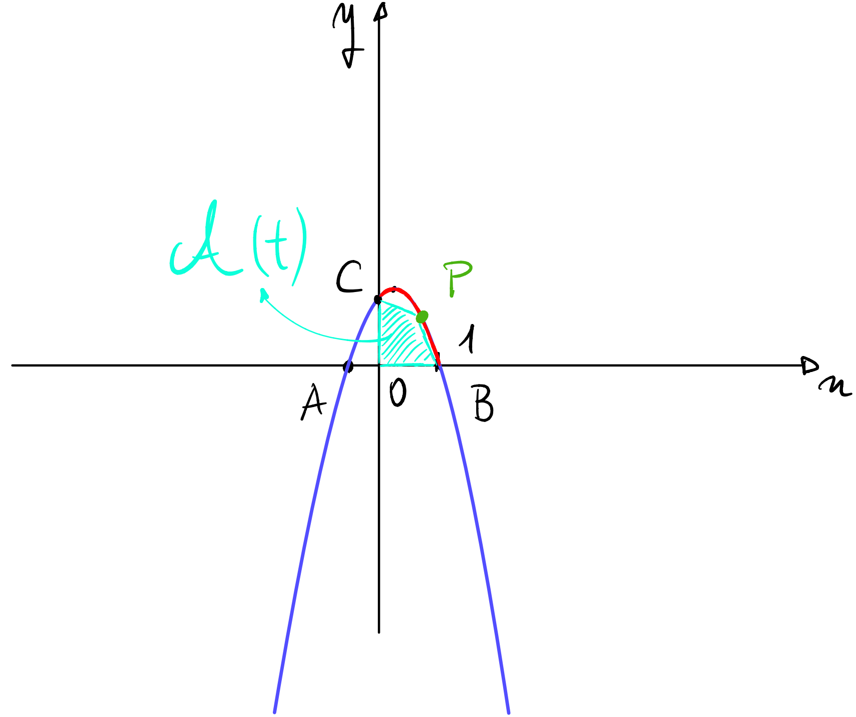


è la soluzione cercata.

I lati del rettangolo sono $2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ → **è un quadrato di lato $2\sqrt{2}$**

426 La parabola di equazione $y = -2x^2 + x + 1$ interseca l'asse y nel punto C e l'asse x nei punti A e B (A è il punto di ascissa negativa). Considera un punto P variabile sull'arco $\overset{\frown}{CB}$ della parabola e trova l'ascissa di P per la quale è massima l'area del quadrilatero $OCPB$.

$\left[x = \frac{1}{2}\right]$



$\mathcal{P}: \quad y = -2x^2 + x + 1$

$C(0; 1)$

$A(-1/2; 0)$

$B(1; 0)$

$P(t; -2t^2 + t + 1); \quad t \in [0; 1]$

massimizzare $\mathcal{A}(t)$

- lo si vede come due triangoli

metodo 1

$\mathcal{A}(t) = A(OCB) + A(PBC) = \dots$

- area con matrice o distanza p.to - retta

metodo 2

$$\mathcal{A}(t) = A(OCP) + A(OPB) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\left(-2t^2 + t + 1\right) =$$

$$= -t^2 + t + 1/2$$

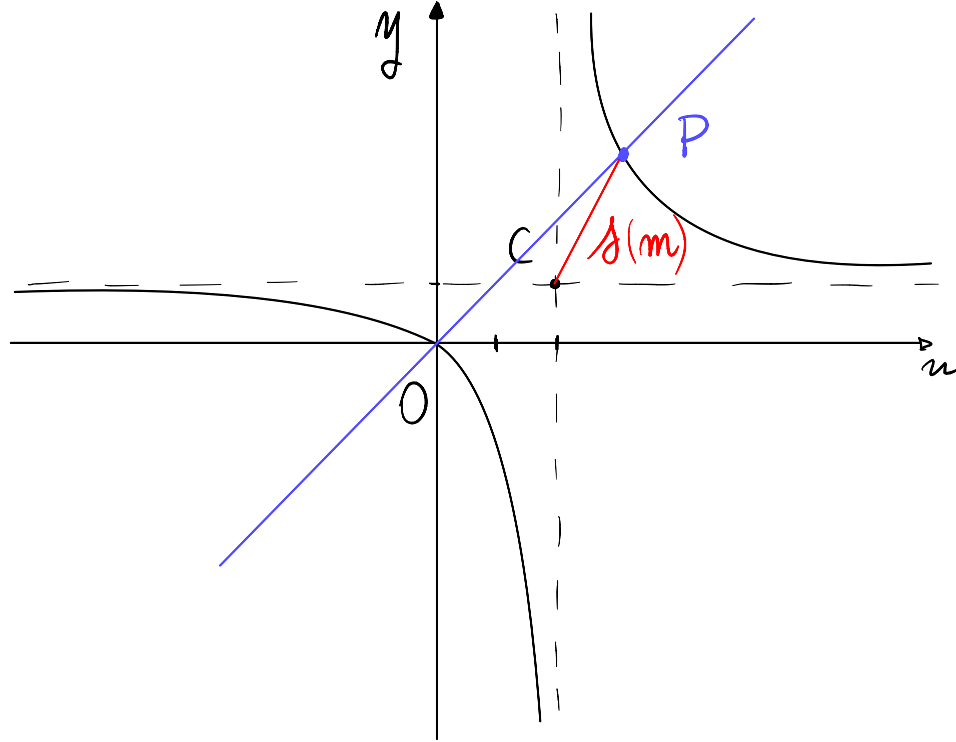
$$\mathcal{A}' = -2t + 1$$

$\mathcal{A}' = 0 \rightsquigarrow t = \frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ é massimo in quanto vertice di una parabola rivolta verso il basso

$t = 1/2$

456 Considera l'iperbole di equazione $y = \dfrac{x}{x-2}$, che ha centro di simmetria in C. Trova il coefficiente angolare della retta passante per l'origine, che, intersecando l'iperbole nel punto P, rende minima la distanza $\overline{PC}$.

$\left[\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$



$\mathcal{I}: \; y = \dfrac{x}{x-2}$ $\qquad C(2; 1)$

$P \begin{cases} \mathcal{I} \\ y = mx \end{cases}$

$$mx = \frac{x}{x-2}$$

$$mx(x-2) = x$$

$$x[mx - 2m - 1] = 0$$

$x = 0 \rightsquigarrow$ origine $\qquad x = \dfrac{2m+1}{m} \rightsquigarrow P$

$$P\left(\frac{2m+1}{m}; 2m+1\right)$$

$$d(m) = \sqrt{\left(\frac{2m+1}{m} - 2\right)^2 + \left(2m+1-1\right)^2}$$

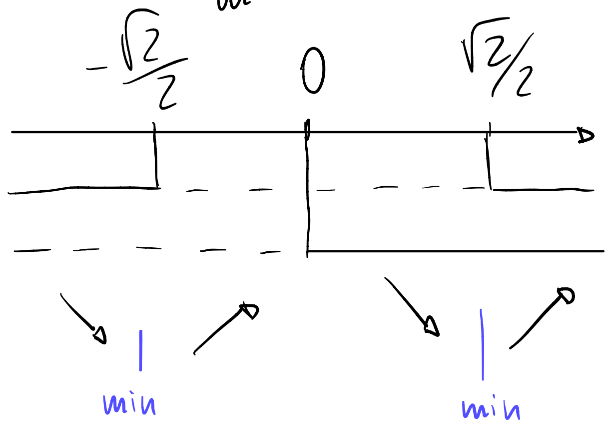
prendo $d^*(m)$ eliminando la radice, in quanto non cambiano i minimi

$$d^*(m) = \frac{1}{m^2} + 4m^2 = \frac{4m^4+1}{m^2}$$

$$d^{*\prime} = \frac{16m^5 - 8m^5 - 2m}{m^4} = \frac{8m^4 - 2}{m^3}$$

$$d^{*\prime} = 0 \rightarrow 4m^4 - 1 = 0 \quad m^4 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f^{*\prime} > 0 \qquad \dfrac{(2m^2-1)(2m^2+1)}{m^3} > 0$



$m = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ minimizzano la funzione

es. 467 p. 1759	es 508 p. 1762	es 542 p. 1765
es. 487 p. 1761	es 522 p. 1764	