25/01/2021

# Teorema di Fermat

$y = f(x) \rightarrow f'(x) = 0$ pti staz   min, max, pto flesso

$y' = f'(x)$

$f(x)$ derivabile $\rightarrow$ continua

$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

P 1710

$x_0$ max $\rightarrow f'(x) = 0$ ?

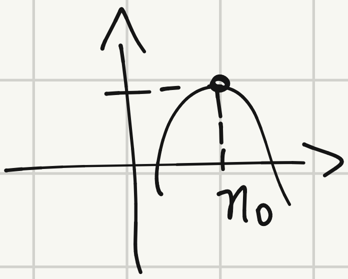
**Ipotesi**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \text{ definita } [a,b] \\ f(x) \text{ derivabile } (a,b) \\ x_0 \in (a,b)\ x_0 \text{ pto max, min} \end{array}\right\} f'(x_0) = 0$$

$\hookrightarrow$ Non è condizione necessaria sufficiente, è solo necessaria

**Dimostrazione**

Se hai un punto di massimo ed è derivabile, la derivata=0




Ip $x_0$ è pto massimo

$\forall x \in I_{x_0}$   $f(x) \leq f(x_0)$   $x_0-h$   $x_0$   $x_0+h$

$f(x_0+h) \leq f(x_0)$

$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$

se $h>0$   $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$   negativo   +

se $h<0$   $\frac{f(x_0+h) + f(x_0)}{h} \geq 0$   − −   − −

la stessa quantità prima del valore è positiva, dopo il valore negativa

Cosa succede nel punto?

$x = x_0$ ?   $h<0$   $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0) \geq 0$

$h>0$   $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \leq 0$

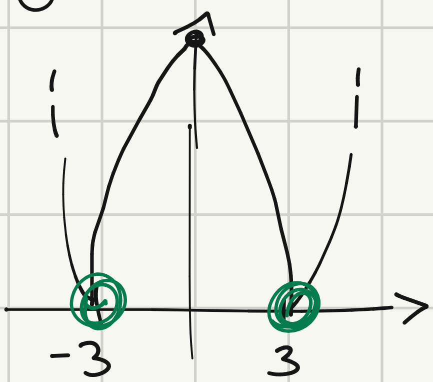
$f(x)$ derivabile in $x_0 \rightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0 \rightarrow \boxed{f'(x_0) = 0}$   ↓tesi

## $f(x)$ in $x_0$ non derivabile

punti angolosi $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ finiti
cuspidi $f'_+, f'_-$ ✓
pto flesso tg vert

$\Big\}$ pti non deriv

**$y = |x^2-9|$**



$f(x)$ continua?

$\lim_{x \to 3} |x^2-9| = 0 \quad f(3) = 0 \rightarrow$ continua $x=3$

### Derivabile?

### Metodo 1

$$y = \begin{cases} x^2-9 & x^2-9 \geq 0 & x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ -x^2+9 & x^2-9 < 0 & -3 < x < 3 \end{cases}$$

$f'_-(3) = -2(3) = -6$ finiti
$f'_+(3) = 2(3) = 6$

$\rightarrow$ pto angoloso NON DERIVABILE

$$y' = \begin{cases} 2x & x \leq -3 \vee x \geq 3 \\ -2x & -3 < x < 3 \end{cases}$$

- non derivabilità ma di minimo
  $\rightarrow$ valore assoluto $\rightarrow$ costr. pti angolosi

pti angolosi massimo $\rightarrow -|f(x)|$

### Metodo 2

$y = |x^2-9| \qquad y' = \dfrac{|f(x)|}{f(x)} f'(x_0)$

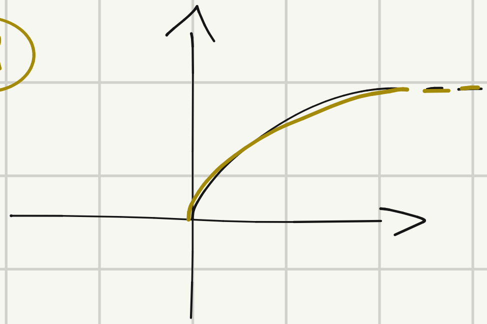
CE $f(x) \neq$ CE $f'(x) \rightarrow x$ cambia
$\rightarrow$ pti non derivabilità

$$y' = \underbrace{\frac{|x^2-9|}{x^2-9}}_{\pm 1} 2x \rightarrow = \pm 2x \qquad y' \begin{cases} -2x & x < -3 \\ 2x & x > 3 \end{cases}$$

$x = 0 \rightarrow$ pto angoloso

p. 1713-1715

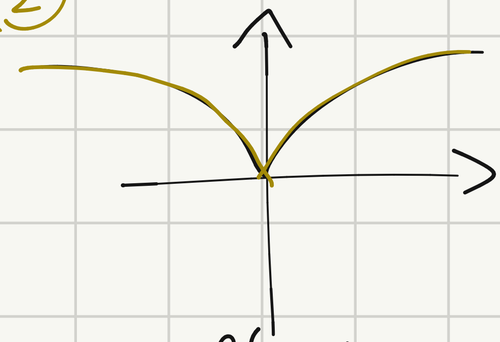
① 



$x=0$ pto non der

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty \Rightarrow \text{tg vert}$$

② 



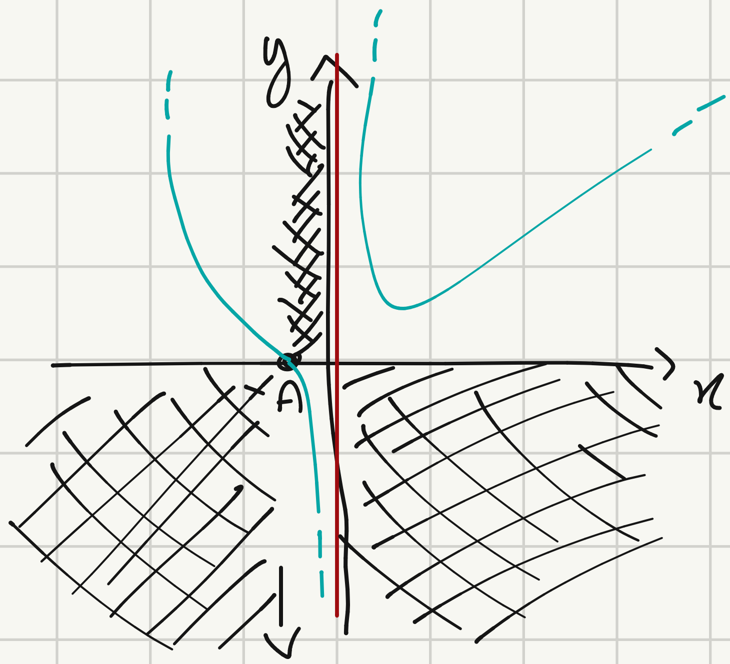
$$y=\sqrt{|x|} \qquad y=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ \sqrt{-x} & x<0\end{cases} \qquad y'=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}} & x>0\\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & x<0\end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right)=\frac{-1}{\sqrt{-0}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$f'_+(0)=+\infty$$

= cuspide → RADICALI

## PAG 1745 n 279




$y=x^2+\frac{1}{x}$ CE $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$y=\frac{x^3+1}{x}$ non è pari e non è dispari

$\lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty$ NO ASINTOTI ORIZZONTALI

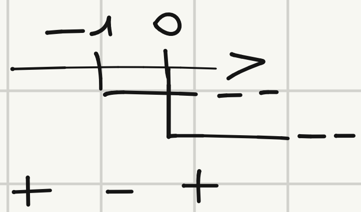
NO OBLIQUI

VERTICALI? $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ $x=0$ AS V

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

$A(-1,0)$

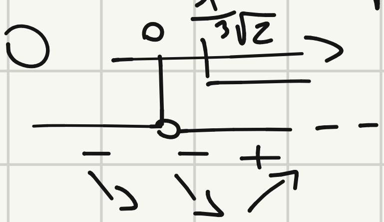
segno $\frac{x^3+1}{x}>0$




$$y'=\frac{3x^3-1-x^3}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}$$

$y'=0$ pti staz $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\approx 0,7$

$y'>0$



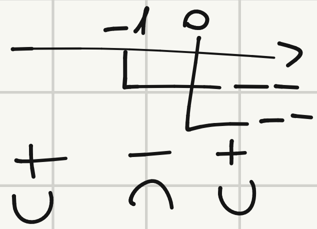

→ pto min

$$y' = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{6x^4-2x(2x^3-1)}{x^4} = \frac{6x^4-4x^4+2x}{x^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2x^3+2}{x^3}$$

$y''=0 \quad x^3+1=0 \quad x=-1$

$y''>0$




## Pag 1745

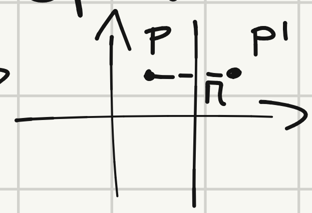
**N 282**

$$y = \frac{2x^2-x+2}{x^2+1}$$

simmetrica ? $y=2$ NO $\Rightarrow$ non sarebbe funz

? $x=0$ $\Rightarrow$ è pari?

? $x=2$ $\Rightarrow$




M pto medio

$$x_M = \frac{x'+x}{2}$$

$P(x,y)$

$P'(x',y')$

$$\begin{cases} x' = -x+4 \\ y' = \end{cases}$$

simmetria $A(0,2)$?

metodo diretto

A deve essere punto medio $\begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 0 \\ \frac{y+y'}{2} = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y+4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -x' \\ y = -y'+4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ nella funzione se trovo $f(x)$ SIMMETRICA

$$-y'+4 = \frac{2(-x')^2-(-x')+2}{(-x')^2+1} \qquad -y' = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1} - 4$$

$$y = \frac{4x^2+4-2x^2-x-2}{x^2+1} = \frac{2x^2-x+2}{x^2+1}$$

metodo 2

Traslazione $\Rightarrow$ porto A sull'origine $\begin{cases} x' = x \\ y' = y-2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = x' \\ y = y'+2 \end{cases}$ calcolo le coordinate vecchie

$$y+2 = \frac{2x^2-x+2}{x^2+1}$$

$$y = \frac{-x+2-2+2x^2-2x^2}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1}$$ è dispari