Continuità di funzioni

Annalisa Cesaroni, Paola Mannucci e Alvise Sommariva

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica

2 novembre 2015

Continuità.

Definizione (Continua in c)

Sia I un intervallo aperto, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$. La funzione f è continua in c *se esiste*

$$\lim_{x \to c} f(x)$$

e vale $f(c)$.

Definizione (Continua in I aperto)

Sia I un intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$. La funzione f è continua in I *se e solo se è continua in ogni $c \in I$.*

Definizione (Continua in I chiuso)

Sia $I = [a, b]$ un intervallo chiuso, $f : I \to \mathbb{R}$. La funzione f è continua in I *se e solo se è continua in ogni $c \in I$ interno, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.*

Continuità.

Definizione

Si parla di continuità in c se e solo se è definita in c.

Esempio

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è definita in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e quindi non si può parlare di continuità in 0.

Esempio

La funzione $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ è definita in $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e quindi non si può parlare di continuità in 0.

Continuità: esempio

Esempio

Si consideri la funzione $f(x) = segno(x)$ *dove*

$$segno(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che

- *Da* $\lim_{x \to 3} f(x) = 1 = f(3)$, *la funzione è continua in* 3.
- *Da* $\lim_{x \to -3} f(x) = -1 = f(-3)$, *la funzione è continua in* -3.
- *Da* $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \neq f(0) = 0$, *la funzione non è continua in* 0.

Continuità: esempio

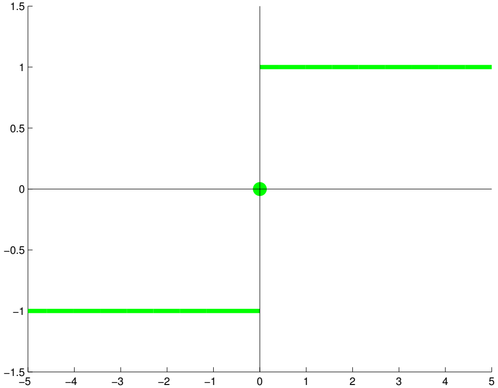

Figura : La funzione segno in $[-5, 5]$.

Continuità: salti.

Definizione (Discontinuità di salto)

Sia f definita in $x^* = c$. Se

- $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_-$,
- $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_+$,
- $L_- \neq L_+$,

allora si dice che f ha una discontinuità di salto in $x = c$, e salto uguale a

$$L_+ - L_- = \lim_{x \to c^+} f(x) - \lim_{x \to c^-} f(x).$$

Continuità: salti.

Esempio

La funzione segno ha in $x = 0$ *una discontinuità di salto, con salto di valore* 2.

Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ha in $x = 0$ *una discontinuità di salto in quanto* $L_+ = 1, L_- = 0$, *con salto di valore* 1.

Osserviamo che f *non è continua in* $x = 0$ *ma è continua da sinistra in quanto*

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0).$$

Continuità: discontinuità.

Nota.

Siano $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, e X sia un intervallo. La discontinuità può essere di tre tipi

- *f ha una discontinuità eliminabile in x_0 se esiste finito* $\lim_{x \to x_0} f(x)$ *ma*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$
- *f ha una discontinuità di salto (o prima specie) in x_0 se esistono finiti* $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *ma sono diversi.*
- *f ha una discontinuità di seconda specie in tutti gli altri casi.*

Continuità: discontinuità (eliminabile).

Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$.

Svolgimento.

Essendo

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq f(0) = 10.$$

la funzione ha una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$. *La si può rendere continua ponendo* $f(0) = 1$.

Continuità: discontinuità (eliminabile).

Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità eliminabile in $x_0 = 0$

Svolgimento.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 3.$$

La si può rendere continua ponendo $f(0) = 0$.

Continuità: discontinuità (seconda specie).

Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$$

ha una discontinuità di seconda specie.

Svolgimento.

Osserviamo che $\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$. *Essendo il limite sinistro di* f *infinito non può essere di prima specie (salto), e neppure eliminabile, perche' in* $x_0 = 0$ *i limiti sinistro e destro non coincidono e quindi non esiste il limite in* $x_0 = 0$.

Continuità: discontinuità (seconda specie).

Esempio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

una discontinuità di seconda specie. Perchè?

Continuità: esempio

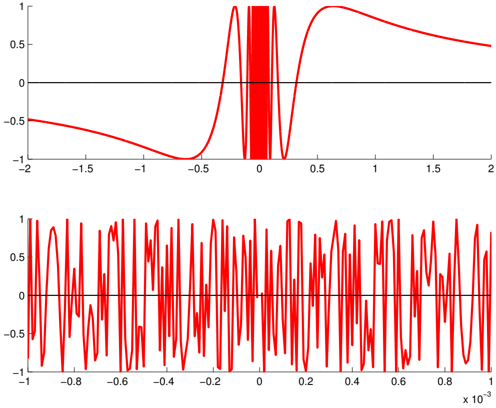

Figura : La funzione $\sin(1/x)$ in due scale diverse.

Continuità: discontinuità

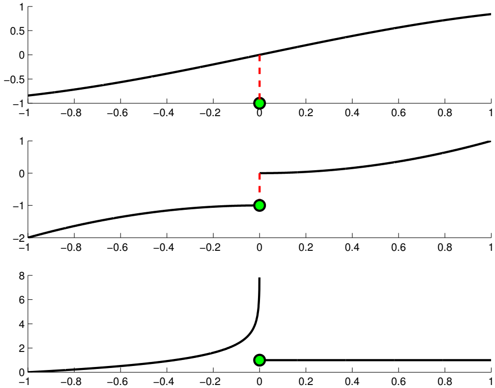

Figura : I tre tipi di discontinuità , dall'alto nell'ordine, eliminabile, salto (prima specie), seconda specie.

Continuità: esempi.

Teorema

Supponiamo f sia continua in $x^* = c$. Allora, per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$, la funzione $k \cdot f$ è continua in $x^* = c$

Teorema

Supponiamo f e g siano continue in $x^* = c$. Allora sono continue in $x^* = c$ pure

- $f + g$, $f - g$,
- $f \cdot g$,
- $\frac{f}{g}$ *(se $g(c) \neq 0$).*

Traccia.

Utilizzare le definizioni e l'algebra dei limiti.

Continuità: esempi.

Teorema

Le funzioni elementari:

- *polinomi,*
- *potenze (ad esempio* x^α *con* $\alpha > 0$*),*
- *esponenziali (ad esempio* a^x *con* $a > 0$*),*
- *logaritmi,*
- *funzioni trigonometriche (ad esempio* $\sin(x)$, $\cos(x)$*),*
- *funzioni iperboliche (ad esempio* $\sinh(x)$, $\cosh(x)$*),*

sono continue nel loro insieme di definizione.

Continuità: esempi.

Lemma

Le scritture

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

e

$$\lim_{k \to 0} f(c + k) = L$$

sono equivalenti.

Dimostrazione.

Applicare la sostituzione $x = c + k$.

Continuità: esempi.

Teorema (Formule di addizione)

Valgono le seguenti formula di addizione

$$\sin(c+k) = \sin(c)\cdot\cos(k) + \cos(c)\cdot\sin(k)$$

$$\cos(c+k) = \cos(c)\cdot\cos(k) - \sin(c)\cdot\sin(k).$$

Teorema

Per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Continuità: esempi.

Teorema

Le funzioni $\sin(x)$ *e* $\cos(x)$ *sono continue per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione.

Per prima cosa, mostriamo la continuità in $x = 0$ *per entrambe. Da*

$$-x \leq \sin(x) \leq x, \ \ x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

deduciamo che per il teorema del confronto

$$\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0 = \sin(0)$$

e quindi la funzione $\sin(x)$ *è continua in* 0.

Continuità: esempi.

Mostriamo ora che $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 = \cos(0)$ *cioè* $\cos(x)$ *è continua in* $x = 0$. *Infatti, essendo* $\cos(x)$, $\sin(x)$ *cateti di un triangolo rettangolo avente ipotenusa lunga* 1

$$\sin(x) + \cos(x) \geq 1, \;\; x \in [0, \pi/2]$$

$$|\sin(x)| + \cos(x) \geq 1, \;\; x \in [-\pi/2, 0]$$

e quindi per $x \in [-\pi/2, +\pi/2]$ *abbiamo*

$$1 - |\sin(x)| \leq \cos(x) \leq 1$$

da cui per il teorema del confronto, $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ *in quanto* $\lim_{x\to 0} |\sin(x)| = 0$.

Continuità: esempi.

Dimostriamo che sin (x) *è continua in un punto arbitrario. Basta mostrare, in virtù del teorema di addizione di* $\sin(x)$

$$\lim_{k \to 0} \sin(c+k) = \sin(c).$$

In effetti, dal secondo Lemma si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{k \to 0} \sin(c+k) &= \lim_{k \to 0} \sin(c) \cdot \cos(k) + \cos(c) \cdot \sin(k) \\
&= \sin(c) \lim_{k \to 0} \cos(k) + \cos(c) \cdot \lim_{k \to 0} \sin(k) \\
&= \sin(c).
\end{aligned}$$

Continuità: esempi.

Dimostriamo che $\cos(x)$ *è continua in un punto arbitrario. Basta mostrare, in virtù della formula* $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$

$$\lim_{x \to c} \cos(x) = \cos(c).$$

In effetti, dalla continuità di $\sin(x)$ *in un punto arbitrario* $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c} \cos(x) &= \lim_{x \to c} \sin(\pi/2 - x) \\ &= \sin(\pi/2 - c) = \cos(c). \end{aligned}$$

Continuità: monotonia.

Teorema

Sia I un intervallo aperto, $x_0 \in I$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ monotona crescente. Allora

$$\lim_{x - x_0^-} f(x) = \sup_{\{x \in I : x < x_0\}} f(x) \leq f(x_0)$$

e

$$\lim_{x - x_0^+} f(x) = \inf_{\{x \in I : x > x_0\}} f(x) \geq f(x_0)$$

Continuità: monotonia.

Teorema

Sia I un intervallo aperto, $x_0 \in I$, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ monotona decrescente. Allora

$$\lim_{x - x_0^-} f(x) = \inf_{\{x \in I : x < x_0\}} f(x) \geq f(x_0)$$

e

$$\lim_{x - x_0^+} f(x) = \sup_{\{x \in I : x > x_0\}} f(x) \leq f(x_0)$$

Nota.

Dai teoremi precedenti si può dimostrare che

- *le funzioni monotone hanno al più un insieme numerabile di punti di discontinuità.*
- *le possibili discontinuità sono solo di salto (o eliminabili se all'estremo dell'intervallo).*

Continuità: permanenza del segno.

Teorema (Permanenza del segno)

Sia I un intervallo aperto, e $x_0 \in I$, e sia

- *f continua in x_0 e definita in I;*
- *$f(x_0) > 0$.*

Allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in U$.

Teorema

Sia I un intervallo apert, e $x_0 \in I$, e sia

- *f continua in x_0 e definita in I;*
- *$f(x_0) < 0$.*

Allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in U$.

Continuità: funzione composta.

Teorema (Continuità funzione composta)

Siano X, Y *due intervalli aperti di* $\mathbb{R}$.

- $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *continua in* $x_0 \in X$ *con* $Im(f) \subseteq Y$;
- $g : Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *continua in* $f(x_0) \in Y$.

Allora $g \circ f$ *è continua in* $x_0 \in X$.

Continuità: teorema degli zeri.

Teorema (Degli zeri)

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Siano*

- f *continua in* $[a, b]$;
- $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Allora esiste $\xi \in (a, b)$ *tale che* $f(\xi) = 0$.

Nota.

Si noti che $f(a) \cdot f(b) < 0$ *significa che il segno di* $f(a)$ *è opposto a quello di* $f(b)$ *e che nessuna delle due valutazioni è nulla.*

Continuità: teorema degli zeri.

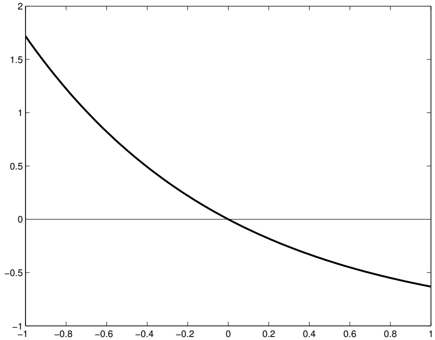

Figura : Grafico di $f(x) = e^{-x} - 1$ in $[-1, 1]$. Si noti che f è continua e $f(1) \approx -0.632$, $f(-1) \approx 3.7183$ e quindi f si annulla in almeno un punto. In effetti $f(0) = 1$.

Continuità: teorema degli zeri (applicazione).

Esercizio

Mostrare che il grafico della funzione $g(x) = x^2$ *interseca quello della funzione* $h(x) = x^3$ *in almeno un punto di* $[-2, 2]$*.*

Svolgimento.

Il grafico della funzione $g(x) = x^2$ *interseca quello della funzione* $h(x) = x^3$ *in almeno un punto di* $[-2, 2]$*, se e solo se esiste un punto per cui* $g(x) = h(x)$ *ovvero per cui* $g(x) - h(x) = 0$*. La funzione continua* $F(x) = g(x) - h(x)$ *(sottrazione di funzioni continue!) è tale che*

$$F(-2) = g(-2) - h(-2) = 4 - (-8) = 12,$$
$$F(2) = g(2) - h(2) = 4 - 8 = -4,$$

e quindi per il teorema degli zeri, ha almeno un zero in $[-2, 2]$*.*
In effetti $x^2 - x^3 = x^2(1 - x)$ *e quindi ha i soli zeri in* 0 *(doppio, cioè il grafico è tangente all'asse* x*) e* $x = 1$*.*

Continuità: teorema di Bolzano-Weierstrass.

Teorema (Bolzano-Weierstrass (1830-1860))

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* f *continua in* $[a, b]$. *Allora*

- *esiste* $M = \max_{[a,b]} f(x)$;
- *esiste* $m = \max_{[a,b]} f(x)$

Continuità: teorema di Bolzano-Weierstrass.

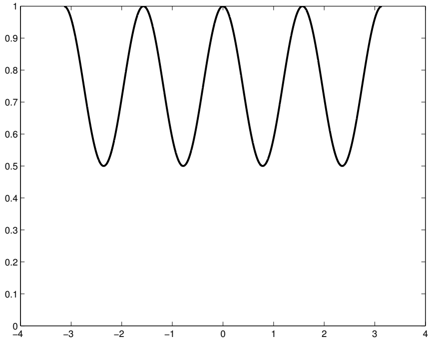

Figura : Grafico della funzione continua $f(x) = \sin^4(x) + \cos^4(x)$ in $[-\pi, \pi]$. Si noti che f ha almeno un massimo e almeno un minimo in $[-\pi, \pi]$.

Continuità: esempio

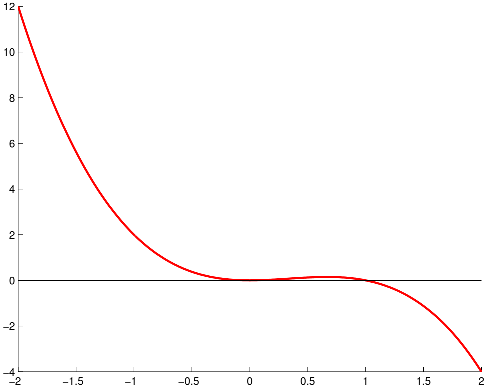

Figura : Grafico di $x^2 - x^3$ in $[-2, 2]$.

Continuità: teorema dei valori intermedi.

Teorema (Dei valori intermedi)

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* f *continua in* $[a, b]$. *Siano*

- $Im(f) = \{f(x), x \in [a, b]\}$
- $m = \min(Im(f))$;
- $M = \max(Im(f))$;

Allora per ogni $y \in (m, M)$, *esiste* $c \in [a, b]$ *tale che* $f(c) = y$.

Continuità: teorema dei valori intermedi, esempio.

Esempio

Mostrare che la funzione $f(x) = x + e^x$ *assume in* $[0, 1]$ *tutti i valori tra* $(1, 2)$.

Svolgimento.

La funzione $x + e^x$ *essendo somma di due monotone crescenti continue è monotona crescente e continua. Quindi*

- $m = f(0) = 1$;
- $M = f(1) = 1 + e > 2$;

L'asserto deriva dal teorema dei valori intermedi, essendo

$$(1, 2) \subset [1, 1 + e].$$

Continuità: alcuni teoremi.

Teorema (Connessione)

Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* f *continua in* $[a, b]$. *Allora*

$$Im(f) := \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), \text{ per qualche } x \in [a, b]\}$$

è un intervallo.

Teorema (Funzione inversa)

Siano $f : X \to \mathbb{R}$, f *continua in* X *e invertibile. Se*

- X *è un intervallo oppure,*
- X *è un insieme chiuso e limitato,*

allora $f^{-1} : f(X) \to X$ *è continua.*

Nota.

Conseguenza del teorema della funzione inversa è che arcsin, arccos *e* arctan *sono continue nel loro dominio, essendoli* sin, cos *e* tan.

Continuità: esempio

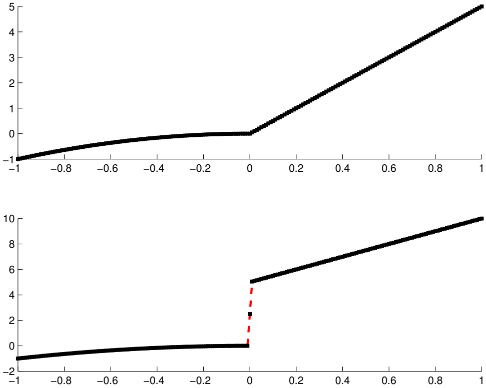

Figura : Una funzione continua e una discontinua in $[-1, 1]$. Si vede che nel primo caso $f([-1, 1])$ è un intervallo, mentre nel secondo caso è un insieme non connesso.

Continuità: esempio 1.

Esercizio

Determinare per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

il dominio naturale e dove risulta continua.

Svolgimento.

La funzione ha per dominio naturale l'insieme

$$dom(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

In tale insieme sono soddisfatte le ipotesi del teorema dell'algebra delle funzioni continua, in quanto

- 1 *è continua,*
- x *è continua (ma non nulla!).*

Quindi f *è continua in* $dom(f) = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Continuità: esempio 2.

Esercizio

Determinare per la funzione

$$f(x) = \frac{x^5 + 3x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$$

il dominio naturale e dove risulta continua.

Svolgimento.

La funzione ha per dominio l'insieme

$$dom(f) = \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$$

in quanto $x^4 - 1 = 0$ *esclusivamente per* $x = \pm 1$.
In tale insieme sono soddisfatte le ipotesi del teorema dell'algebra delle funzioni continua, in quanto

- $x^5 + 3x^2 + x - 1$ *è continua,*
- $x^4 - 1$ *è continua (ma non nulla!).*

Quindi f *è continua in* $dom(f) = \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$.

Continuità: esempio 3.

Esempio

Siano P_n, Q_m *rispettivamente due polinomi di grado* n *e* m. *Sia*

$$Zero(Q_m) = \{x \in \mathbb{R} : Q_m(x) = 0\}.$$

Ricordiamo che i polinomi sono funzioni continue. La funzione

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

ha per dominio l'insieme $dom(f) = \mathbb{R} \backslash Zero(Q_m)$ *in quanto* $Q_m(x) = 0$ *esclusivamente per* $x \in Zero(Q_m)$.
In tale insieme sono soddisfatte le ipotesi del teorema dell'algebra delle funzioni continue, in quanto

- P_n *è continua,*
- Q_m *è continua (ma non nulla!).*

Continuità: esempio 4.

Esercizio

Determinare per la funzione

$$f(x) = \log(\cos^4(x) + \sin^4(x))$$

il dominio naturale e dove risulta continua.

Svolgimento.

Osserviamo che siccome non esiste x^* *per cui* $\cos(x^*) = \sin(x^*) = 0$, *necessariamente*

$$\cos^4(x) + \sin^4(x) > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ *e quindi* $dom(f) = \mathbb{R}$.
La funzione $f(x)$ *è la composta delle funzioni*

- $g(x) = \cos^4(x) + \sin^4(x)$ *continua con* $Im(g) \subseteq \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$.
- $h(x) = \log(x)$ *che ha per dominio* $\mathbb{R}^+ \backslash \{0\} = Im(g)$.

e quindi è pure continua in $dom(f) = \mathbb{R}$ *per il teorema delle composte di funzioni continue.*

Continuità: esempio 5.

Esercizio

Determinare per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, \ \text{se } x \leq 1 \\ x, \ \text{se } x > 1. \end{cases}$$

il dominio naturale e dove risulta continua.

Svolgimento.

Evidentemente il dominio corrisponde con $\mathbb{R}$. *Osserviamo inoltre che*

- *per* $x < 1$ *la funzione è continua in quanto localmente coincide col polinomio* $2 - x^2$;
- *per* $x > 1$ *la funzione è continua in quanto localmente coincide col polinomio* x;
- *per* $x = 1$ *si ha* $f(x) = 2 - 1^2 = 1$ *e*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 - x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

e quindi $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$ *e la funzione è continua in* 1.

Continuità: esempio 6.

Esercizio

Per $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$, *sia*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^2}, & se\ x < 0 \\ x^2 + \beta, & se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Determinare dove è continua, al variare di α, β.

Svolgimento.

Non è difficile vedere che la funzione è sicuramente continua in $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. *Inoltre*

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \beta.$$

Di conseguenza la funzione è continua in 0 *per* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \beta.$$

Continuità: esempio 6.

Ma

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(x^\alpha)}{x^{2\alpha}} \cdot \frac{x^{2\alpha}}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0^+} x^{2\alpha-2}.\end{aligned}$$

Ora

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^{2\alpha-2} = \begin{cases} 0, \ \textit{se}\ \alpha \in (1,+\infty) \\ 1, \ \textit{se}\ \alpha = 1 \\ +\infty, \ \textit{se}\ \alpha \in (0,1) \end{cases}$$

e quindi la funzione è continua quando $\beta = (1/2)L$ *ovvero per*

$$\begin{cases} \beta = 0 \ \textit{e}\ \alpha \in (1,+\infty), \\ \beta = 1/2, \ \textit{e}\ \alpha = 1, \end{cases}$$

altrimenti è discontinua in 0.

Continuità: esercizi.

Esercizio

Fissati $\alpha \in \mathbb{R}^+$, β, $\gamma \in \mathbb{R}$, *stabilire per*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x}-1}{x\sqrt{\alpha}}, \; se \; x > 0 \\ \beta + \gamma x + x^2, \; se \; x \leq 0 \end{cases}$$

la regione in cui la funzione risulta continua.