Analisi Matematica 1B

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

Indice

Capitolo 1

Integrali

1.1 Integrale di Riemann

Introduzione. (1.1) Ci sono diverse definizioni di integrale, ma in questo corso ci si baserà su quella data da Riemann.

È una tecnica che fa parte del calcolo infinitesimale:

- limite;
- derivata;
- integrale.

L'integrale non è definito né tramite limite, né tramite derivata, ma è un concetto strettamente legato ad entrambi.

Il processo storico però è stato probabilmente inverso: l'integrazione ha uno stretto legame con l'area, ed è uno dei primi concetti studiati dai matematici; la derivata, invece, è arrivata molto dopo (c.a. 1700, con Newton e Leibniz).

Integrale come calcolo delle aree. (1.2) Un problema a cui è legata la definizione di integrale è proprio il calcolo di aree. Noi sappiamo come calcolare aree di una figura con una certa regolarità, ma se la figura è molto irregolare?

Se ho una funzione $y = f(x)$, il suo grafico può descrivere (come in figura 1.1) una regione di piano A. Come trovo l'area A?

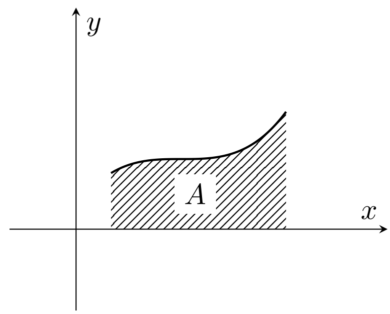


Figura 1.1: Regione di piano delimitata dalla funzione

Consideriamo una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, i.e. $\exists\, m, M$, $m < M$ tali che

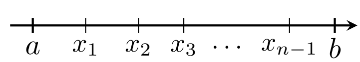
$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in [a, b]$$

Definizione. (1.3) *Sia $[a, b]$ un intervallo, $a < b$, e siano $x_0, \cdots, x_n$ tali che*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

L'insieme di questi punti $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ si chiama suddivisione di $[a, b]$.

Indichiamo tale suddivisione con $\mathfrak{D}$, o $\mathfrak{D}(x_0, \cdots, x_n)$



Definizione. (1.4) *Date due suddivisioni $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$, diciamo che $\mathfrak{D}_1$ è meno fine di $\mathfrak{D}_2$ se $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}_2$*

Osservazione. (1.5) Date due suddivisioni $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$, esiste sempre almeno una suddivisione $\mathfrak{D}_3$ più fine di $\mathfrak{D}_1$ e di $\mathfrak{D}_2$; per esempio

$$\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$$

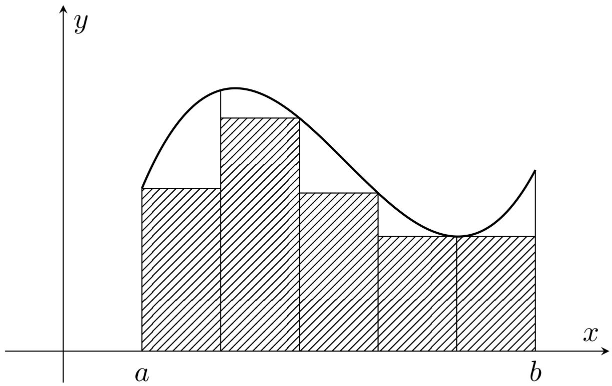


Figura 1.2: Somma inferiore

Somme superiori e inferiori. (1.6) Sia f limitata, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(x_0, \cdots, x_n)$ una suddivisione di $[a, b]$; allora per $i = 1, \cdots, n$ consideriamo

$$m_i = \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f \qquad M_i = \sup_{(x_{i-1}, x_i)} f$$

e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Poniamo inoltre

$$s = s(\mathfrak{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \qquad S = S(\mathfrak{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{1.1}$$

s si dice somma inferiore mentre S si dice somma superiore (figure 1.2 e 1.3).

Integrale come area. (1.7) Facendo $m_i \Delta x_i$ o $M_i \Delta x_i$ non sto calcolando un'area: questo è vero soltanto se la funzione è positiva. Se così non fosse, non è detto che m_i e M_i siano positivi, e quindi il valore ottenuto (non positivo) non può essere un'area.

Osservazione. (1.8) Si noti come la funzione è presa limitata, così si evitano i casi infiniti per $m_i \Delta x_i$ e $M_i \Delta x_i$; infatti, se la funzione è limitata allora necessariamente m_i e M_i sono finiti.

Attenzione. (1.9) s e S non sono aree in generale; lo sono se la funzione è positiva.

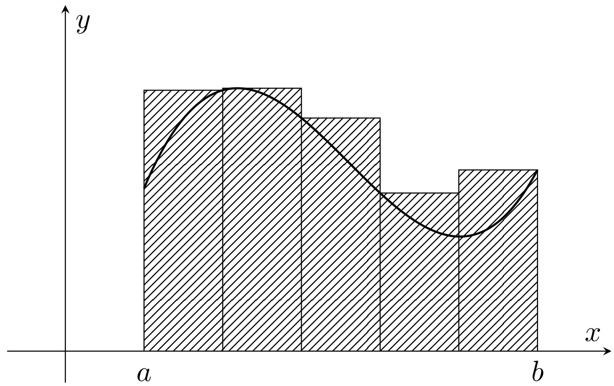


Figura 1.3: Somma superiore

Osservazione. (1.10) Poiché la funzione è limitata (i.e. $m \leq f(x) \leq M$), prendendo una qualsiasi suddivisione si ha che

$$s(\mathfrak{D}, f) \geq \sum_{i=1}^{n} m \Delta x_i = m(b-a)$$

$$\underbrace{m(b-a)}_{\in \mathbb{R}} \leq s(\mathfrak{D}, f) \leq S(\mathfrak{D}, f) \leq \underbrace{M(b-a)}_{\in \mathbb{R}}$$

$\implies \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) \in \mathbb{R}$ e $\inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) \in \mathbb{R}$

Lemma. (1.11) Siano $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ due suddivisioni di $[a, b]$, con $\mathfrak{D}_1 \subseteq \mathfrak{D}_2$. Allora, per $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si ha

$$s(\mathfrak{D}_1, f) \leq s(\mathfrak{D}_2, f) \tag{1.2}$$
$$S(\mathfrak{D}_1, f) \geq S(\mathfrak{D}_2, f) \tag{1.3}$$

Dimostrazione. (1.11) Supponiamo che $\mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1 \cup \{\overline{x}\}$, $\overline{x} \notin \mathfrak{D}_1$

Si ha che $\exists i$ tale che $x_{i-1} < \overline{x} < x_i$.

$$m_i = \inf_{(x_{i-1}, x_i)} f; \qquad \mu_1 = \inf_{(x_{i-1}, \overline{x})} f; \qquad \mu_2 = \inf_{(\overline{x}, x_i)} f$$

Si ha che $\mu_1 \geq m_i$ e $\mu_2 \geq m_i$, in quanto, dato un intervallo su cui la funzione è limitata inferiormente, in ogni suo sottointervallo la funzione non potrà avere limite inferiore più piccolo.

Calcolando ora

$$s(\mathfrak{D}_2, f) - s(\mathfrak{D}_1, f) \underset{\dagger}{=} \mu_1(\overline{x} - x_{i-1}) + \mu_2(x_i - \overline{x}) - m_i \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{=(x_i - \overline{x}) + (\overline{x} - x_{i-1})}$$

$$= \underbrace{(\overline{x} - x_{i-1})}_{>0} \underbrace{(\mu_1 - m_i)}_{\geq 0} + \underbrace{(x_i - \overline{x})}_{>0} \underbrace{(\mu_2 - m_i)}_{\geq 0} \geq 0$$

Iterando il ragionamento un numero finito di volte si ha la tesi. Lo stesso processo è applicabile per gli S. ■

Corollario. (1.12) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, e siano $\mathfrak{D}_1$ e $\mathfrak{D}_2$ due suddivisioni di $[a, b]$. Allora

1. $s(\mathfrak{D}_1, f) \leq S(\mathfrak{D}_2, f)$
2. $\sup\limits_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) \leq \inf\limits_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f)$

Dimostrazione. (1.12)

1. Sia $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$ vale
$$s(\mathfrak{D}_1, f) \underset{*}{\leq} s(\mathfrak{D}_3, f) \leq S(\mathfrak{D}_3, f) \underset{*}{\leq} S(\mathfrak{D}_2, f)$$
dove $*$ è per il lemma.
2. Proprietà standard di inf e sup ■

Definizione di Integrale di Riemann. (1.13) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Diciamo che f è <u>integrabile secondo Riemann</u> in $[a, b]$ se*

$$\sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) = \inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) \tag{1.4}$$

In questo caso, scriviamo $f \in R(a, b)$ e chiamiamo <u>integrale di Riemann</u> di f su $[a, b]$ il numero reale

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) = \inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) \tag{1.5}$$

I numeri a, b sono detti <u>estremi di integrazione</u>.

† In quanto per il resto le due somme sono uguali

Osservazione. (1.14) $\int_a^b f(x)\,dx$ dipende da f, a, b ma non dipende da x, ovvero non è una funzione.

Notazioni alternative. (1.15) Dato $I = [a, b]$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f = \int\limits_I f = \mathcal{I}(I, f) = \mathcal{I}([a, b], f)$$

Esempi. (1.16)

1. Sia $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}\ \forall x \in [a, b]$. Consideriamo $\mathfrak{D} = \{x_0, \cdots, x_n\}$ di $[a, b]$.

$$m_i = \inf_{(x_{i-1},x_i)} f = c \qquad M_i = \sup_{(x_{i-1},x_i)} f = c$$

$$s(\mathfrak{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = c(b-a)$$

$$S(\mathfrak{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = c(b-a)$$

$\Longrightarrow$ $\sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) = \inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) = c(b-a)$

$\Longrightarrow$ f è integrabile secondo Riemann e

$$\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$$

2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Consideriamo $\mathfrak{D} = \{x_0, \cdots, x_n\}$ di $[a, b]$. Considerato l'intervallo non degenere (x_{i-1}, x_i) c'è sempre almeno un razione e un irrazionale, ovvero almeno un punto in cui la funzione vale 1 e uno in cui la funzione vale 0. Vale quindi

$$m_i = \inf_{(x_{i-1},x_i)} f = 0 \qquad M_i = \sup_{(x_{i-1},x_i)} f = 1$$

Calcoliamo quindi gli s e S

$$s(\mathfrak{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} 0\,\Delta x_i = 0$$
$$S(\mathfrak{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} 1\,\Delta x_i = (b-a)$$

$\implies \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) = 0 \neq \inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) = b - a$

$\implies$ la funzione di Dirichlet su $[a, b]$ non è integrabile secondo Riemann.

Entrambi gli esempi sono funzioni limitate, ma il primo è integrabile mentre il secondo no. Inoltre, il primo esempio ci da garanzia che esistono funzioni integrabili. Riassumendo:

$$\begin{cases} R(a,b) \neq \emptyset \\ R(a,b) \subsetneq \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \,|\, f \text{ limitata}\}. \end{cases}$$

1.2 Interpretazione geometrica dell'integrale di Riemann

(1.17) Presa $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabile su $[a, b]$, $f(x) \geq 0\ \forall\, x \in [a, b]$

L'integrale di Riemann rappresenta l'area del trapezoide T relativo ad f (come in figura 1.4) e all'intervallo [a,b].

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } a \leq z \leq b, 0 \leq t \leq f(x)\}$$

Definizione. (1.18) *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, f integrabile su $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ $\forall\, x \in [a, b]$*

$$\textit{area}(T) := \int_a^b f(x)\,dx$$

Questa definizione si tratta di un'estensione della definizione di area "tradizionale", ovvero definita a prescindere dagli integrali.

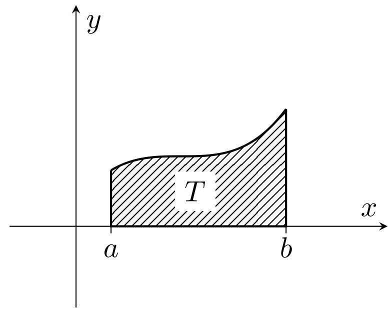


Figura 1.4: Trapezoide relativo ad f.

1.3 Funzioni integrabili secondo Riemann

Teorema I.

Primo teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata. Si ha che

$$f \in R(a, b)$$
$$\iff$$
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \mathfrak{D}_\varepsilon \text{ di } [a, b] :\ S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Dimostrazione I.

"$\Longleftarrow$" Consideriamo

$$\inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) - \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f)$$

Vale che $\inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) \leq S(\mathfrak{D}_\varepsilon)$ e che $\sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) \geq s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f)$ ovvero

$$0 \leq \inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) - \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) \leq S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

$\forall\, \varepsilon > 0$

$\implies$ $\inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) - \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) = 0$

$\implies$ $f \in R(a, b)$.

" $\implies$ " $f \in R(a,b) \implies$

$$\inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) = \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Per $\varepsilon > 0$, $\exists\, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ tali che

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < s(\mathfrak{D}_1, f)$$
$$\int_a^b f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} > S(\mathfrak{D}_2, f)$$

Sia $\mathfrak{D}_3 = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$. Si ha

$$S(\mathfrak{D}_3, f) - s(\mathfrak{D}_3, f) \leq S(\mathfrak{D}_2, f) - s(\mathfrak{D}_1, f) <$$
$$< \left(\cancel{\int_a^b f(x)\,dx} + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\cancel{\int_a^b f(x)\,dx} - \frac{\varepsilon}{2} \right) = \varepsilon \quad \blacksquare$$

Teorema II.

Secondo teorema di caratterizzazione delle funzioni integrabili

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata. Si ha che $f \in R(a,b)$

$\iff \exists\, \{\mathfrak{D}_n\}_{n=0}^{\infty}$ successione di suddivisioni di $[a,b]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \left[S(\mathfrak{D}_n, f) - s(\mathfrak{D}_n, f) \right] = 0 \tag{1.6}$$

Inoltre si ha che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}_n, f) = \lim_{n\to\infty} s(\mathfrak{D}_n, f)$$

Dimostrazione II.

" $\Longrightarrow$ " Dal teorema I si ha che $\forall\, \varepsilon > 0$ esiste $\mathfrak{D}_\varepsilon$ tale che

$$S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Sia $\varepsilon = \frac{1}{n}$, e troviamo una $\mathfrak{D}_n$ tale che

$$S(\mathfrak{D}_n, f) - s(\mathfrak{D}_n, f) < \frac{1}{n}$$

Fissato un $\widetilde{\varepsilon} > 0$, e $\overline{n} : \frac{1}{\overline{n}} < \widetilde{\varepsilon}$. Vale che

$$\forall\, \widetilde{\varepsilon} \quad \exists\, \overline{n} : \; \forall\, n > \overline{n} \qquad S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) < \frac{1}{n} < \frac{1}{\overline{n}} < \widetilde{\varepsilon}$$

ovvero

$$\lim_{n\to\infty} \big[S(\mathfrak{D}_n, f) - s(\mathfrak{D}_n, f)\big] = 0$$

" $\Longleftarrow$ " Sia $\varepsilon > 0$: allora

$$\exists\, \overline{n} : \; \forall\, n > \overline{n} \quad S(\mathfrak{D}_n, f) - s(\mathfrak{D}_n, f) < \varepsilon$$

Si applica il teorema I

$\Longrightarrow \; f \in R(a, b)$

Si deve ora verificare che

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}_n, f) = \lim_{n\to\infty} s(\mathfrak{D}_n, f)$$

Dimostriamo che

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathfrak{D}_n, f)$$

sapendo che $f \in D(a, b)$.

Sappiamo che

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \overline{n} :\ \forall\, n > \overline{n} \qquad S(\mathfrak{D}_n, f) - s(\mathfrak{D}_n, f) < \varepsilon \tag{1.7}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \inf_{\mathfrak{D}} S(\mathfrak{D}, f) \leq S(\mathfrak{D}_n, f) \tag{1.8}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sup_{\mathfrak{D}} s(\mathfrak{D}, f) \geq s(\mathfrak{D}_n, f) \tag{1.9}$$

Si studi la seguente quantità

$$\int_a^b f(x)\, dx - \varepsilon \underset{\dagger}{\leq} S(\mathfrak{D}_n, f) - \varepsilon \underset{\ddagger}{<} s(\mathfrak{D}_n, f) \underset{\S}{<} \int_a^b f(x)\, dx \underset{\|}{\leq} \int_a^b f(x)\, dx + \varepsilon$$

Vale quindi che

$$-\varepsilon < s(\mathfrak{D}_n, f) - \int_a^b f(x)\, dx < +\varepsilon$$

ovvero

$$\left| s(\mathfrak{D}_n, f) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

Quindi

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \overline{n} :\ \forall\, n > \overline{n} \qquad \left| s(\mathfrak{D}_n, f) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \varepsilon$$

ovvero

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} s(\mathfrak{D}_n, f) \qquad \blacksquare$$

† Per (1.8)
‡ Per (1.7)
§ Per (1.9)
‖ Poiché $\varepsilon > 0$

1.4 Classi di funzioni integrabili secondo Riemann

Teorema III.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Se f è continua in $[a, b]$ allora $f \in R(a, b)$.
2. Se f è limitata e continua su $[a, b]$ tranne al più un numero finito di punti, allora $f \in R(a, b)$.

Dimostrazione III.

1. Si ha f uniformemente continua su $[a, b]$ (poiché continua su un insieme compatto), ovvero

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [a, b]$$
$$|x' - x''| < \delta \implies \big|f(x') - f(x'')\big| < \frac{\varepsilon}{b - a} \tag{1.10}$$

Sia $\mathfrak{D}_\varepsilon = \{x_0, \cdots, x_n\}$ tale che $x_i - x_{i-1} < \delta \ \forall\, i = 1, \cdots, n$

Si ha che

$$m_i = \min f\big([x_{i-1}, x_i]\big) \qquad M_i = \max f\big([x_{i-1}, x_i]\big)$$

Ma poiché f continua, per il teorema di Weierstrass vale che

$$\exists x_i', x_i'' : f(x_i') = M_i \quad f(x_i'') = m_i$$

Noto che $x_i', x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, ovvero, per costruzione, $|x_i' - x_i''| < \delta$

Quindi

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\big[f(x_i') - f(x_i'')\big]}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}} \Delta x_i \\ &< \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{i=1}^{n} \Delta x = \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Vale quindi che $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \mathfrak{D}_\varepsilon$ tale che

$$S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

Per il teorema I, $f \in R(a,b)$ ■

Teorema IV.

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora $f \in R(a,b)$

Dimostrazione IV.

- $f(a) = f(b) \implies f$ è costante, e pertanto $f \in R(a,b)$
- $f(a) < f(b)$. Si ha che $f(x) \in \big[f(a), f(b)\big]\ \forall\, x \in [a,b]$. Si definiscono $m \coloneqq f(a)$ e $M \coloneqq f(b)$.

  Sia $\varepsilon > 0$ e $\mathfrak{D}_\varepsilon = \{x_0, \cdots, x_n\}$ tale che $x_i - x_{i-1} < \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ $\forall\, i = 1, \cdots, n$. Si ha che

$$\begin{aligned} m_i &= \inf f\big((x_{i-1} - x_i)\big) \geq f(x_{i-1}) \\ M_i &= \sup f\big((x_{i-1} - x_i)\big) \leq f(x_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\big[f(x_i) - f(x_{i-1})\big]}_{\geq 0} \underbrace{\Delta x_i}_{< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}} \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \Big[\big(f(x_1) - f(x_0)\big) + \cdots + \big(f(x_n) - f(x_{n-1})\big)\Big] \tag{1.11}$$

I termini si annullano tutti, perciò la (1.11) diventa uguale a

$$\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \big[f(b) - f(a)\big] = \varepsilon$$

Pertanto, preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste $\mathfrak{D}_\varepsilon$ tale che

$$S(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) - s(\mathfrak{D}_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

e per il teorema I la funzione $f \in R(a, b)$ ■

Teorema V.

Siano $f, g \in R(a, b)$. Si ha:

1. (additività rispetto alla funzione integranda)

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

2. (omogeneità) $\forall\, c \in \mathbb{R}$, vale $cf \in R(a, b)$ e

$$\int_a^b cf = c \int_a^b f$$

3. (monotonia)
   (a) se $f(x) \geq g(x)\ \forall\, x \in [a, b]$ allora

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g$$

   (b) $|f| \in R(a, b)$, e

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

   (c) se $M = \sup \left| f\left([a, b]\right) \right|$ si ha

$$\left| \int_a^b f \right| \leq M(b - a)$$

4. (additività rispetto all'intervallo di integrazione) se $c \in (a, b)$, si ha $f \in R(a, c)$, $f \in R(c, b)$ e

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Inoltre vale anche il viceversa: se $f \in R(a, c)$, e $f \in R(c, b)$, allora $f \in R(a, b)$ e

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dimostrazione V.

1. $f, g \in R(a, b)$

$$\exists \{\mathfrak{D}'_n\} \text{ di } [a, b] : \int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}'_n, f) = \lim_{n\to\infty} s(\mathfrak{D}'_n, f)$$

$$\exists \{\mathfrak{D}''_n\} \text{ di } [a, b] : \int_a^b g = \lim_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}''_n, g) = \lim_{n\to\infty} s(\mathfrak{D}''_n, g)$$

Sia $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}'_n \cup \mathfrak{D}''_n$: è più fine di $\mathfrak{D}'_n$ e di $\mathfrak{D}''_n$

$$\underbrace{s(\mathfrak{D}'_n, f)}_{\to\int_a^b f} \leq s(\mathfrak{D}_n, f) \leq S(\mathfrak{D}_n, f) \leq \underbrace{S(\mathfrak{D}'_n, f)}_{\to\int_a^b f}$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} s(\mathfrak{D}_n, f) = \lim_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}_n, f) = \int_a^b f$$

$$\lim_{n\to\infty} s(\mathfrak{D}_n, g) = \lim_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}_n, g) = \int_a^b g$$

Osserviamo che $\forall\, I \subseteq [a,b]$ si ha che $\forall\, x \in I$

$$f(x) + g(x) \geq \inf_I f + \inf_I g$$

$$\implies \inf_I (f+g) \geq \inf_I f + \inf_I g$$

$$\sup_I (f+g) \leq \sup_I f + \sup_I g \implies$$

$$\underbrace{s(\mathfrak{D}_n, f) + s(\mathfrak{D}_n, g)}_{\to \int_a^b f + \int_a^b g} \leq$$

$$\leq s(\mathfrak{D}_n, f+g) \leq S(\mathfrak{D}_n, f+g) \leq$$

$$\leq \underbrace{S(\mathfrak{D}_n, f) + S(\mathfrak{D}_n, g)}_{\to \int_a^b f + \int_a^b g}$$

Si ha ora che

$$S(\mathfrak{D}_n, f+g) - s(\mathfrak{D}_n, f+g) \leq$$

$$\leq S(\mathfrak{D}_n, f) + S(\mathfrak{D}_n, g) - s(\mathfrak{D}_n, f) - s(\mathfrak{D}_n, g) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\implies f + g \in R(a,b)$$

$$\int_a^b (f+g) = \lim_{n\to\infty} S(\mathfrak{D}_n, f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \blacksquare$$

Osservazione. (1.19) Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, e i c_j sono tali che

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_k = b$$

allora

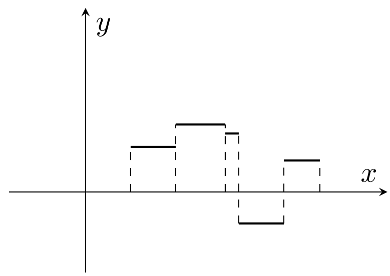
$$f \in R(a,b) \iff f \in R(c_{j-1}, c_j) \quad \forall\, j = 1, \cdots, k$$

e inoltre

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^{k} \left[\int_{c_{j-1}}^{c_j} f \right].$$

Esempio. (1.20) Sia f costante a tratti, cioè:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$$
$$\exists\, D_j \in \mathbb{R}, j = 1, \cdots, k \quad \text{t. c.} \quad f(x) = D_j \quad \forall\, x \in [x_{j-1}, x_j]$$



Si ha:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{k} \int_{x_{j-1}}^{x_j} D_j\, dx = \sum_{j=1}^{k} D_j(x_j - x_{j-1})$$

Osservazione. (1.21) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ salvo al più un numero finito di punti. Allora $f \in R(a,b)$ e $\int_a^b f = 0$

$f \in R(a,b)$ perché ha un numero finito di discontinuità. Si verifica ora per induzione sul numero k di punti in cui $f \neq 0$.

$$k = 0 \implies f = 0 \text{ in } [a,b] \implies \int_a^b f = 0$$

Supponiamo l'osservazione vera per tutti gli interi da 0 a k e sia f con $k+1$ punti in cui $f \neq 0$.

Sia $c : f(c) \neq 0$, e supponiamo $c \in (a,b)$. Sia $n > 0$ tale che

$$\left[c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right] \subset (a,b)$$

In $\left[a, c-\frac{1}{n}\right]$ e in $\left[c+\frac{1}{n}, b\right]$, f ha al più k punti in cui $f \neq 0$: dunque

$$\int_a^b f = \underbrace{\int_a^{c-\frac{1}{n}} f}_{=0} + \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f + \underbrace{\int_{c+\frac{1}{n}}^b f}_{=0}$$

Sia $M = \sup\left|f\left([a,b]\right)\right|$; si ha:

$$0 \leq \left|\int_a^b f\right| = \left|\int_{c-1/n}^{c+1/n} f\right| \leq \underbrace{M \cdot \frac{2}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b f = 0$$

Osservazione. (1.22) Sia $f \in R(a,b)$ e sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x)$ in $[a,b]$ tranne al più un numero finito di punti.

Allora $g \in R(a,b)$ e $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Questa è conseguenza immediata dell'osservazione precedente, infatti considerata

$$F(x) = f(x) - g(x)$$

si ha che $\displaystyle\int_a^b F = 0$

$$\Longrightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$$

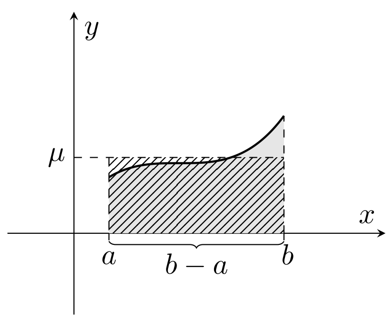
1.5 Media integrale

Definizione. (1.23) *Data $f \in R(a,b)$, chiamiamo media integrale di f in $[a,b]$ la quantità*

$$\mu = \mu(f,a,b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f \tag{1.12}$$

Osservazione. (1.24)

$$\int_a^b f = \mu\,(b-a)$$



Teorema VI.

Teorema della media integrale

Sia $f \in R(a,b)$, e siano

$$m = \inf f\big([a,b]\big)\,; \qquad M = \sup f\big([a,b]\big)$$

Allora:

1. $m \leq \mu(f,a,b) \leq M$;
2. se f è continua in $[a,b]$, allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \mu$

Dimostrazione VI.

1. Vale $\forall\, x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M \implies$

$$\underbrace{\int_a^b m\, dx}_{=m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \underbrace{\int_a^b M\, dx}_{=M(b-a)}$$

   Dividendo per $(b-a)$: $m \leq \mu \leq M$.

2. Se f è continua, allora per il teorema dei valori intermedi $\forall\, y_0 \in [m,M]$ $\exists\, x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

   In particolare, lo si applichi per $\mu \in [m,M]$:

   $\implies \exists\, c \in [a,b]$ tale che $f(c) = \mu$ ■

1.6 Integrale orientato

Definizione. (1.25) *Si è definito*

$$\int_a^b f$$

con $a < b$.

Se $a > b$, si pone

$$\int_a^b f := -\int_b^a f \tag{1.13}$$

Se $a = b$, si pone

$$\int_a^b f := 0 \tag{1.14}$$

Osservazione. (1.26) Per l'integrale orientato valgono i punti 1. 2. e 4. del teorema V; ad esempio, posta $f \in R(\alpha,\beta)$ e $a,b,c \in [\alpha,\beta]$, si ha

$$\int_a^b f = \int_c^a f + \int_c^b f$$

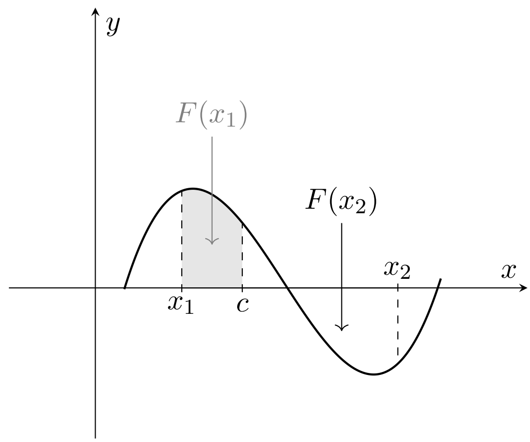


Figura 1.5: La funzione integrale $F(x)$

sia che $c \in [a, b]$ che $c \notin [a, b]$ (come $c < a < b$).

Il punto 3. del teorema non vale più: data $f \geq g$ in $[b, a]$, con $a > b$, si ha che

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

in quanto vale

$$\int_b^a f \geq \int_b^a g \implies -\int_a^b f \geq -\int_a^b g$$

1.7 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Definizione. (1.27) *Sia $f \in R(a, b)$ e $c \in [a, b]$. Chiamiamo funzione integrale di f la funzione*

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad x \in [a, b] \tag{1.15}$$

mostrata in figura 1.5

Osservazione. (1.28) $F(x)$ è ben definita $\forall\, x \in [a, b]$, e $F : [a, b] \to \mathbb{R}$

Definizione. (1.29) *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Diciamo che f è localmente integrabile in I, e scriviamo $f \in R_{loc}(I)$ se $\forall\, a, b \in I$, $a < b$, si ha $f \in R(a, b)$.*

Osservazione. (1.30) Questa definizione permette di ampliare il concetto di integrabilità anche ad intervalli aperti.

Teorema VII.

Sia $f \in R_{\text{loc}}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, e $c \in I$. Allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

è continua in I.

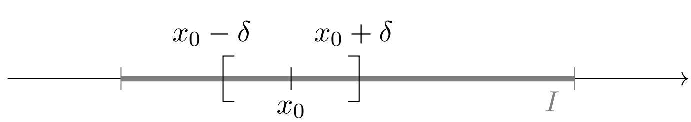
Dimostrazione VII. Sia $x_0 \in I$ e dimostriamo che F è continua in x_0. L'arbitrarietà di x_0 ci dimostrerà la continuità su tutto l'intervallo. In particolare supponiamo $x_0 \in \mathring{I}$ per comodità, e sia $\delta > 0$ tale che

$$I_{x_0}(\delta) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq I$$

Si ha $f \in R\left(I_{x_0}(\delta)\right)$

$\implies \exists\, M = M(x_0, \delta)$ tale che

$$|f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in I_{x_0}(\delta)$$



Se $x \in I_{x_0}(\delta)$ si ha

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_c^x f(t)\,dt \underbrace{- \int_c^{x_0} f(t)\,dt}_{+\int_{x_0}^c f(t)\,dt} \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x \underbrace{|f(t)|}_{\leq M} dt \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dt \right| = M\,|x - x_0|$$

$\implies \lim\limits_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$ per il teorema del confronto.

$\implies \lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$ cioè F continua in x_0 e di conseguenza su I ∎

Teorema VIII.

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in R_{\text{loc}}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$ e

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

1. Se f è continua in $x_0 \in \mathring{I}$, allora F è derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.
2. Se f è continua in $\mathring{I}$, allora $F \in C^1(\mathring{I})$ e vale $F'(x) = f(x)$ $\forall\, x \in \mathring{I}$.

Dimostrazione VIII. 2. discende direttamente da 1.

1. $F'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} &= \frac{\int_c^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_c^{x_0} f(t)\,dt}{h} \\
&= \frac{\left(\int_c^{x_0} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\right) - \int_c^{x_0} f(t)\,dt}{h} \\
&= \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h}
\end{aligned}$$

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} = f(x_0)$.

Considerando quindi $h > 0$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0) \cdot \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} dt}{h} \right| \\
&= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \big[f(t) - f(x_0) \big]\, dt \right| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \underbrace{\big| f(t) - f(x_0) \big|}_{\dagger}\, dt \\
&\leq \frac{1}{\cancel{h}} \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)| \cancel{\int_{x_0}^{x_0+h} dt} \\
&= \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)|
\end{aligned}$$

f è continua in x_0, ovvero

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : t \in [x_0, x_0 + \delta] \implies \big| f(t) - f(x_0) \big| < \varepsilon$$

Scegliamo $h < \delta$

† $\leq \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} |f(t) - f(x_0)|$

$$\implies \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} |f(t)-f(x_0)| \le \sup_{t\in[x_0,x_0+\delta]} |f(t)-f(x_0)| \le \varepsilon$$

$$\implies \forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta>0 \text{ tale che se } 0<h<\delta \implies$$

$$\left| \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - f(x_0)\right| \le \sup_{t\in[x_0,x_0+h]} |f(t)-f(x_0)| \le \varepsilon$$

cioè

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(x_0).$$

Se $h<0$ funziona allo stesso modo, e si ha che

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt = f(x_0)$$

ovvero

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0). \qquad \blacksquare$$

Osservazione. (1.31) Se $f \in R_{\text{loc}}(I)$ e ha un punto di discontinuità di prima specie (di salto) in un certo punto x_0, cioè tale che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_{0+}), \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_{0-})$$

ripercorrendo la dimostrazione, si ha che F ammette derivata destra e sinistra in x_0 e

$$F'_+(x_0) = f(x_{0+}), \qquad F'_-(x_0) = f(x_{0-})$$

Quindi se in x_0 f ha una discontinuità di prima specie, F ha in x_0 un punto angoloso.

Osservazione. (1.32) Se f in x_0 ha una discontinuità eliminabile, cioè

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \ne f(x_0), \quad l\in\mathbb{R}$$

allora per l'osservazione precedente

$$F'_+(x_0) = l = F'_-(x_0)$$

e dunque F è derivabile in x_0 e $F'(x_0)=l$

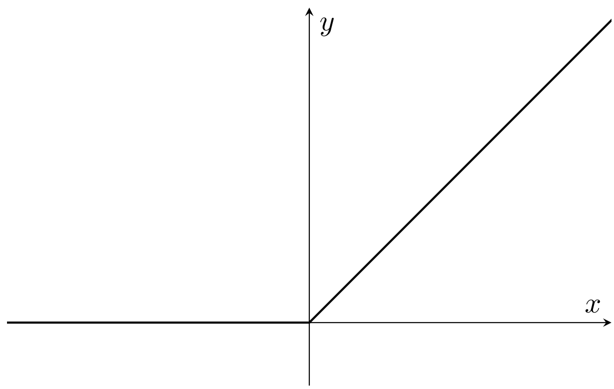


Figura 1.6: La funzione F

1.8 Primitive di una funzione e integrali di Riemann

Definizione. (1.33) *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Diciamo che, data $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, F è una primitiva di f se F è derivabile in (a,b) e*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in (a,b)$$

Osservazione. (1.34) Non tutte le funzioni ammettono primitiva. Per esempio la funzione $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

non ammette primitiva in $\mathbb{R}$.

Infatti, presa F come nel grafico della figura 1.6 si ha che F non è derivabile in tutto l'intervallo scelto, dunque F non è primitiva di H, poiché non è derivabile in 0.

Osservazione. (1.35) Una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua ammette sempre primitiva! Una sua primitiva è

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt, \quad c \in (a,b)$$

per il teorema del calcolo integrale. Inoltre, le primitive trovate in questo modo sono infinite, al variare di $c \in (a, b)$

Proprietà. (1.36) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, e sia F una sua primitiva in (a, b). Allora G è una primitiva di f su (a, b)

$\iff \exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + k$

Dimostrazione. (1.36) L'implicazione "$\Longleftarrow$" è ovvia, in quanto

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

cioè G è primitiva di f.

"$\Longrightarrow$" Consideriamo $G(x) - F(x)$.

$$D\big[G(x) - F(x)\big] = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) - F(x) = k$.

Esempio. (1.37) Sia $f(x) = |x|$ funzione continua (vedi figura 1.7): deve esserci una primitiva. Si prenda ad esempio

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & x < 0 \end{cases}$$

Sono primitive anche tutte le sue traslate (vedi figura 1.8). L'insieme delle primitive di $f(x)$ è

$$\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

Teorema IX.

Sia f continua in $[a, b]$, e G una sua primitiva. Si ha

$$\int_a^b f(t)\, dt = G(b) - G(a)$$

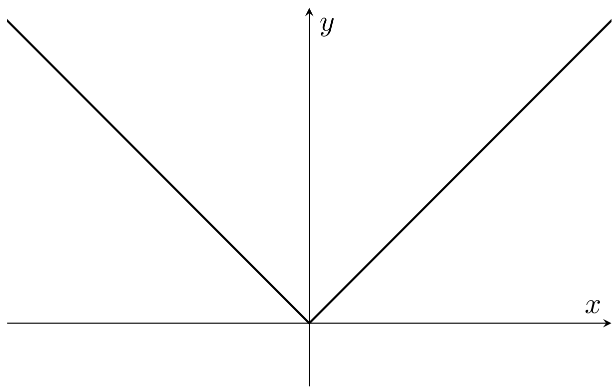


Figura 1.7: $f(x) = |x|$

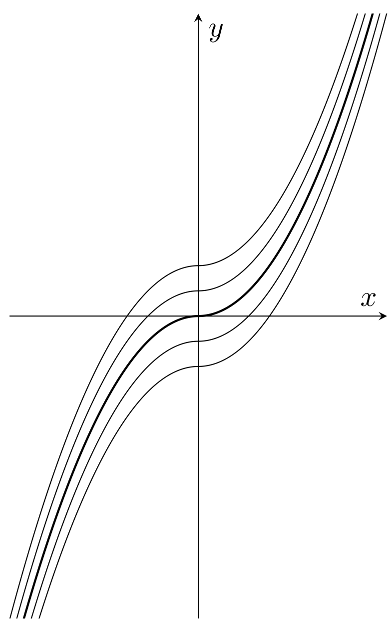


Figura 1.8: Insieme delle primitive di $f(x) = |x|$

Dimostrazione IX. Dal teorema fondamentale del calcolo integrale (VIII) sappiamo che

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è una primitiva di f.

Allora dalla proprietà precedente $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + k$. Quindi

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + \cancel{k} - \big(F(a) + \cancel{k}\big) = \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \cancel{\int_a^a f(t)\,dt} = \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Notazione. (1.38) Si scrive anche

$$G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b = \big[G(x)\big]_a^b$$

Osservazione. (1.39) Il teorema precedente ci da un metodo di calcolo per l'integrale di Riemann (anche detto <u>integrale definito</u>):

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big|_a^b$$

Notazione. (1.40) L'insieme delle primitive di una funzione f si indica con

$$\int f(x)\,dx$$

chiamato <u>integrale indefinito</u> di f.

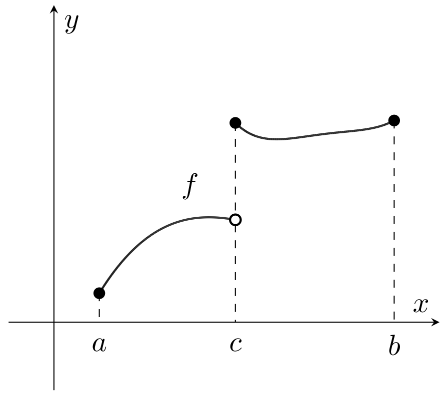


Figura 1.9: Funzione integrabile secondo Riemann: f

Osservazione. (1.41) $\int f(x)\,dx$ può solo essere $\emptyset$ oppure

$$\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$$

mentre $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero reale.

Osservazione. (1.42) Il metodo di calcolo si può generalizzare.

La funzione rappresentata in figura 1.9 è integrabile secondo Riemann, ma il metodo di calcolo sopra mostrato non è applicabile: f non è continua su $[a, b]$. Se f è integrabile secondo Riemann

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \text{ (vedi figura 1.10).}$$

Nonostante questa divisione, l'integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ continua a non essere calcolabile: sull'intervallo $[a, c]$ la funzione non soddisfa le ipotesi di questo metodo di calcolo: c'è un punto di salto.

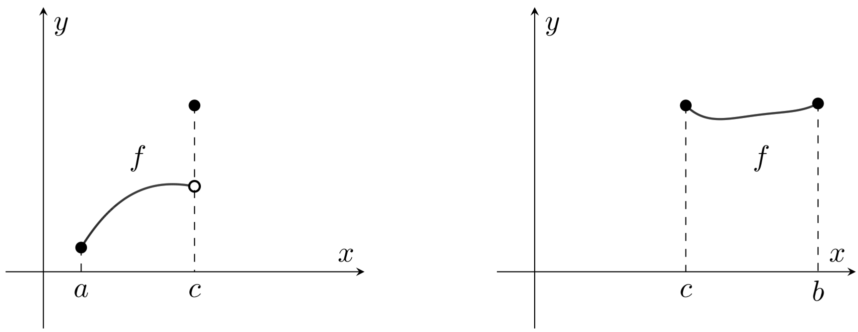


Figura 1.10: Suddivisione della funzione: f

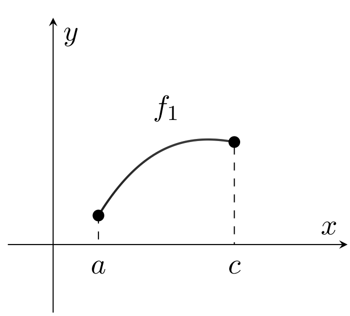


Figura 1.11: Prolungamento per continuità: f_1

Prendendo però la funzione f_1 (figura 1.11) sull'intervallo $[a, c]$, ovvero il prolungamento per continuità di f, vale

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx$$

in quanto si è modificato il valore della funzione in un unico punto.

f_1 però è continua su tutto $[a, c]$, quindi è possibile utilizzare il metodo classico di integrazione. In definitiva

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Esempi. (1.43)

1. $f(x) = x$ e $I = \mathbb{R}$

   Una primitiva di $f(x)$ è $G(x) = \dfrac{x^2}{2}$ [infatti, $G'(x) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$].

   $$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

   $$\int_{-2}^{3} x\,dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{-2}^{3} = \cdots = \frac{5}{2}$$

2. $f(x) = |x|$ e $I = \mathbb{R}$

   $$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

   Una primitiva di f:

   $$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c_1 & x > 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c_2 & x < 0 \end{cases}$$

   La funzione G deve essere derivabile, quindi necessariamente G deve essere continua. Ne deriva che $c_2 = c_1$, e che il valore in 0 deve essere il prolungamento di G come definita sopra. Pertanto

   $$G(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + c & x < 0 \end{cases}$$

Si noti che $G(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$, e $G'(x) = |x|$ in $\mathbb{R}$

3. $G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

   G è derivabile in $\mathbb{R}$, e

$$f(x) = G'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   Si noti che $\displaystyle\int f(x)\, dx = G(x) + c$, ovvero esistono funzioni non continue ma integrabili.

Osservazione. (1.44) Preso $y = \log |x|$ definito per $x \neq 0$ si ha che

$$y' = \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$$

Questo non è un intervallo, ma poiché è molto comodo si utilizza un abuso di notazione e si scrive

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log |x| + c$$

per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1.9 Integrali indefiniti di funzioni elementari

1. $\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

   Se $\alpha \in \mathbb{R}$ generico, allora deve valere $x > 0$, mentre se $\alpha \in \mathbb{N}$ o α è un caso particolare, si ha $x \in \mathbb{R}$.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \log |x| + c$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. $\displaystyle\int \sin x\, dx = -\cos x + c$ in $\mathbb{R}$.

4. $\displaystyle\int \cos x\, dx = \sin x + c$ in $\mathbb{R}$.

5. $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + c$ in $\mathbb{R}$.

6. $\frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$ in $\mathbb{R}$.

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$ in $(-1, 1)$.

1.10 Regole di integrazione

1.10.1 Linearità

Se f, g ammettono primitive in I, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $\alpha f + \beta g$ ammette primitiva in I

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\; dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \tag{1.16}$$

1.10.2 Integrazione per parti

: $f, g \in C^1\big([a, b]\big)$. Sappiamo che

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$
$$\underbrace{\int\limits_a^b (f \cdot g)'}_{(fg)\big|_a^b} = \int\limits_a^b f'g + \int\limits_a^b fg'$$

Si ha quindi

$$\int\limits_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \big[f(x)\,g(x)\big]_a^b - \int\limits_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

Questo vale anche per le primitive:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \tag{1.17}$$

Non vi è necessità di costante arbitraria nella seconda parte dell'equazione, poiché vi è sempre un integrale indefinito con la sua costante arbitraria.

Esempio. (1.45) $\displaystyle\int_2^3 \log x\, dx = \int_2^3 1 \cdot \log x\, dx =$

$$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$$

$$= x \log x \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dx = x \log x \Big|_2^3 - x\Big|_2^3 =$$
$$= 3\log 3 - 2\log 2 - (3-2) = \log \frac{27}{4} - 1$$

1.10.3 Integrazione per sostituzione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e F una primitiva di f in $[a,b]$. Allora $F \in C^1\big([a,b]\big)$.

Consideriamo $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$, $\varphi \in C^1\big([\alpha,\beta]\big)$ con φ suriettiva (ovvero $\varphi\big([\alpha,\beta]\big) = [a,b]$).

Sappiamo che

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$$

Osserviamo che

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Siano γ, δ tali che $\varphi(\gamma) = a$, $\varphi(\delta) = b$ (e non è detto che siano unici). Si ha

$$\int_\gamma^\delta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_\gamma^\delta (F \circ \varphi)'(t)\, dt =$$
$$= (F \circ \varphi)\Big|_\gamma^\delta = F\big(\varphi(\delta)\big) - F\big(\varphi(\gamma)\big) =$$
$$= F(b) - F(a)$$

Quindi

$$\int_{\gamma}^{\delta} f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{a}^{b} f(x)\, dx \tag{1.18}$$

con $\varphi(\gamma) = a$ e $\varphi(\delta) = b$

Vale inoltre

$$\int f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx$$

Osservazione. (1.46) Se φ è invertibile, allora $\gamma = \varphi^{-1}(a)$, $\delta = \varphi^{-1}(b)$ e quindi

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(t)\right) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

Osservazione. (1.47) Formalmente pongo $x = \varphi(t)$:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\, dt$$

e modifico di conseguenza gli estremi di integrazione.

Questa è una giustificazione della simbologia che si utilizza, ma in realtà nel simbolo di integrale non si moltiplica $f(x)$ per il dx.

Esempio. (1.48) $\displaystyle\int x^2 \sin(x^3)\, dx$; pongo $x^3 = t$, con $x = \sqrt[3]{(t)}$.

$$3x^2\, dx = dt \implies x^2\, dx = \frac{1}{3}\, dt$$

$$\implies \int x^2 \sin(x^3)\, dx = \frac{1}{3} \int \sin t\, dt = -\frac{1}{3} \cos t + c$$

$$\implies \int x^2 \sin(x^3)\, dx = -\frac{1}{3} \cos(x^3) + c$$

1.10.4 Integrazione delle funzioni razionali

Calcolare

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_k(x)}\,dx$$

con P_n e Q_k polinomi rispettivamente di grado n e k.

Casi fondamentali:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-a)^m}\,dx$ con m intero positivo e $a \in \mathbb{R}$.

   Pongo $x - a = t$, vale $dx = dt$, quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-a)^m}\,dx &= \int t^{-m}\,dt \\ &= \begin{cases} \log|t| + c & m = 1 \\ \dfrac{t^{-m+1}}{1-m} & m > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \log|x-a| + c & m = 1 \\ \dfrac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + c & m > 1 \end{cases}\end{aligned}$$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^m}\,dx$ con m intero positivo. Posto $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$ si ha

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int \frac{1}{(1+t)^m}\,dt}_{\text{vedi 1}}$$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx =: I_n$ con $n \in \mathbb{N}$

   (a) se $n = 0$, allora $I_0 = \displaystyle\int dx = x + c$

   (b) se $n = 1$, allora $I_1 = \displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

(c) se $n \geq 2$:

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx =$$

$$= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^n}\,dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx =$$

$$= I_{n-1} - \underbrace{\int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx}_{\star} \tag{1.19}$$

Calcolo ora $\star$ utilizzando l'integrazione per parti: integro $\frac{x}{(1+x^2)^2}$ e derivo x.

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx \underset{\dagger}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^n}\,dt =$$

$$= \frac{-1}{2(n-1)t^{n-1}} + c = \frac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + c$$

Vale dunque che

$$\star = \frac{-1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} \cdot x + \int \frac{1}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}\,dx =$$

$$= -\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} + c$$

Sostituendo in (1.19):

$$I_n = I_{n-1} - \left[-\frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} + c \right] =$$

$$= \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}}$$

Caso generale ($n < k$)

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_k(x)}\,dx \qquad n < k$$

† pongo $t = x^2 + 1$, $dt = 2x\,dx$

con $n < k$.

Sappiamo che è sempre possibile scrivere

$$\begin{aligned} Q_k(x) = q(x-c_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x-c_h)^{m_h} \cdot \\ \cdot (x^2 + p_1\, x + q_1)^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_l\, x + q_l)^{\mu_l} \end{aligned}$$

con $p_j^2 - 4q_j < 0 \;\forall\, j = 1, \cdots, l$

Allora $\exists\,!$ rappresentazione di $\frac{P_n(x)}{Q_k(x)}$ della forma:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} = \left(\frac{c_{11}}{x-c_1} + \frac{c_{12}}{(x-c_1)^2} + \dots + \frac{c_{1m_1}}{(x-c_1)^{m_1}} \right) + \cdots \\ \cdots + \left(\frac{c_{h1}}{x-c_h} + \dots + \frac{c_{hm_h}}{(x-c_h)^{m_h}} \right) + \\ + \left(\frac{p_{11}x + q_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{p_{1\mu_1}x + q_{1\mu_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}} \right) + \cdots \\ + \dots + \left(\frac{p_{l1}x + q_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \dots + \frac{p_{l\mu_l}x + q_{l\mu_l}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}} \right) \end{aligned}$$

Questa scrittura è detta <u>decomposizione in fratti semplici</u>.

Ad ogni fattore del polinomio $Q_k(x)$ corrisponde una somma (delimitata da parentesi).

Osservazione. (1.49) Dobbiamo calcolare una somma di integrali del tipo

$$\int \frac{c}{(x-a)^m}\, dx \tag{1.20}$$

ovvero un integrale di tipo 1, oppure

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} \qquad p^2 - 4q < 0$$

Questo è possibile risolverlo completando il quadrato a denominatore:

$$(x^2+px+q) = \Big(x + \underbrace{\frac{p}{2}}_{:=\alpha}\Big)^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{:=\beta>0} = (x+\alpha)^2 + \beta$$

L'integrale diventa quindi

$$(1.20) = \int \frac{Mx+N}{\big((x+\alpha)^2+\beta\big)^m}\,dx \tag{1.21}$$

Posto ora $x = \sqrt{\beta}t - \alpha$, $x+\alpha = \sqrt{\beta}t$ e $dx = \sqrt{\beta}\,dt$

$$(1.21) = \sqrt{\beta}\int \frac{M(\sqrt{\beta}t-\alpha)+N}{(\beta t^2+\beta)^m}\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\beta}}{\beta^m}M\sqrt{\beta}\underbrace{\int \frac{t}{(1+t^2)^m}\,dt}_{\dagger} + \frac{\sqrt{\beta}}{\beta^m}(N-M\alpha)\underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^m}\,dt}_{\ddagger}$$

Caso generale:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_k(x)} \qquad n, k \text{ qualsiasi}$$

Se $n < k$ si va al caso precedente.

Se $n \geq k$ si svolge una divisione polinomiale, trovando quoziente $D_{n-k}(x)$ (polinomio di grando $n-k$) e resto $R_q(x)$ (polinomio di grado $q < k$).

$$\frac{P_n(x)}{Q_k(x)} = D_{n-k}(x) + \underbrace{\frac{R_q(x)}{Q_k(x)}}_{\S}$$

Esempio. (1.50) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+3}{x^3-3x^3+x}\,dx$, poiché $2<3$ procediamo con la scomposizione in fratti semplici.

$$x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$$

† integrale di tipo 2
‡ integrale di tipo 3
§ caso precedente

Vogliamo scrivere il rapporto come

$$\frac{x^2-3x+3}{x^3-3x^3+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (-2A-B+C)x + A}{x(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B+C=-3 \\ A=3 \end{cases} \iff \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \\ C=1 \end{cases}$$

quindi:

$$\int \frac{x^2-3x+3}{x^3-3x^3+x}\,dx = 3\int \frac{1}{x}\,dx - 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx =$$
$$= 3\log|x| - 2\log|x-1| - \frac{1}{x-1} + c =$$
$$= \log\frac{|x|}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

1.11 Integrali dipendenti da un parametro

$$\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx$$

Sia

$$\begin{aligned} f : [a,b] \times [c,d] &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

e supponiamo che $\forall\, y \in [c,d]$ la funzione

$$\begin{aligned} \varphi_y : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi_y(x) = f(x,y) \end{aligned}$$

sia integrabile su $[a, b]$.

Allora, $\forall\, y \in [c, d]$ possiamo considerare

$$\phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$$

e $\phi : [c, d] \to \mathbb{R}$.

Più in generale, siano $\alpha, \beta \in [a, b]$ e consideriamo

$$\Psi(\alpha, \beta, y) = \int\limits_\alpha^\beta f(x, y)\, dx$$

Si ha che $\Psi : [a, b] \times [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$.

Teorema X.

Sia f continua in $[a, b] \times [c, d]$. Allora Ψ è continua su $[a, b] \times [a, b] \times [c, d]$.

Corollario. (1.51) Sia f continua in $[a, b] \times [c, d]$. Allora la funzione

$$\phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y)\, dx$$

è continua in $[c, d]$ e $\forall\, y_0 \in [c, d]$ vale

$$\lim_{y \to y_0} \phi(y) = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx$$

Dimostrazione. (1.51) $\phi = \Psi\Big|_{\substack{\alpha = a \\ \beta = b}}$ e per il teorema X Ψ è continua.

$\implies \lim\limits_{y \to y_0} \phi(y) = \phi(y_0)$ poiché ϕ è continua;

$$\phi(y_0) = \int\limits_a^b f(x, y_0)\, dx = \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x, y)\, dx$$

poiché f è continua. ■

Esempio. (1.52) Calcolare

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{e^{x^2y}}{x^2+y^2+1}\,dx \tag{1.22}$$

Notiamo che $\frac{e^{x^2y}}{x^2+y^2+1}$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi

$$(1.22) = \int_{-1}^{1}\lim_{y\to 0}\frac{e^{x^2y}}{x^2+y^2+1}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x\Big|_{-1}^{1} = \cdots = \frac{\pi}{2}$$

1.12 Funzioni non integrabili elementarmente

Osservazione. (1.53) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua ammette sempre una primitiva in (a,b), che è la funzione

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

In generale non è detto che F si possa esprimere tramite funzioni elementari.

Per esempio, $f(x) = e^{ax^2}$, $a \neq 0$, ha primitiva, che però non si può esprimere tramite funzioni elementari.

Tutte le funzioni non integrabili elementarmente sono dette funzioni speciali. Ad esempio

$$\frac{\sin x}{x},\quad \frac{\cos x}{x},\quad \frac{1}{\log x},\qquad e^{ax^2}\ (a\neq 0),\qquad \frac{e^{ax}}{x}\ (x\neq 0)$$

1.13 Integrali impropri

Per l'integrale di Riemann abbiamo considerato $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata (ovvero $|f(x)| \leq M\ \forall\, x \in [a,b]$)

Vogliamo analizzare situazioni tipo le figure 1.12 e 1.13

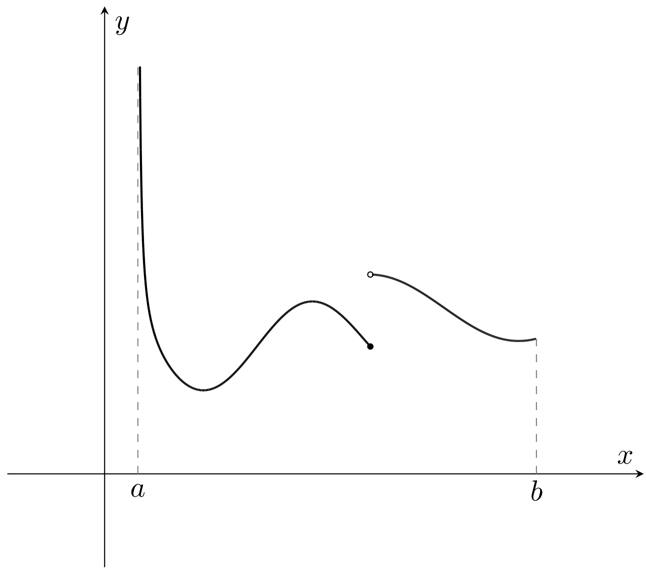


Figura 1.12: Funzione non limitata: $\int_a^b f(x)\,dx$

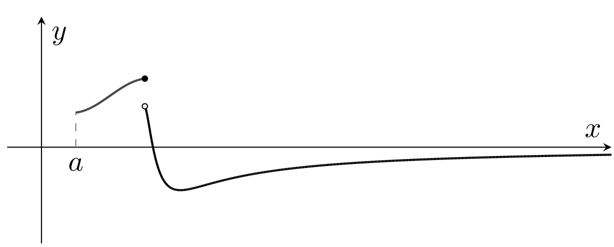


Figura 1.13: Funzione su intervallo non limitato: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

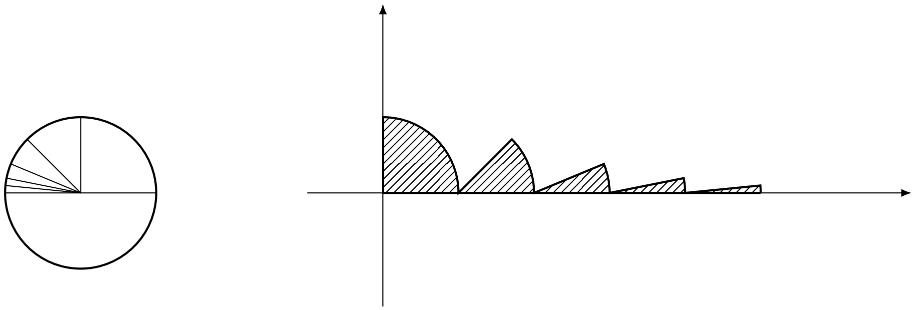


Figura 1.14: Un cerchio di raggio 1

Osservazione. (1.54) Per $f \geq 0$, l'integrale assume il significato di area, ma se gli intervalli non sono limitati, si sta prendendo in considerazione l'area di un insieme non limitato.

Un insieme S non limitato può avere area finita? Sì, è possibile.

Esempio. (1.55) Sia S un cerchio di raggio 1. L'area di S è π.

Si consideri la figura costruita come nel grafico di figura 1.14: la figura costruta non è limitata, ma ha area π.

1.13.1 Funzione non limitata su $[a, b]$

Sia $f \in R_{\text{loc}}\big((a, b]\big)$; in particolare, $\forall\, \delta > 0$ si ha che $f \in R\big([a+\delta, b]\big)$ e possiamo considerare

$$\int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx \qquad \forall\, 0 < \delta < b - a$$

Definizione. (1.56) *Se esiste finito*

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(x)\, dx$$

diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a, b]$; il limite precedente si chiama <u>*integrale improprio*</u> *di f su $[a, b]$ e si indica ancora con*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

Definizione. (1.57) *Se $\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, f è integrabile in senso improprio, e diciamo che*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è convergente.

Se invece $\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx = \pm\infty$, f non è integrabile in senso improprio, e diciamo che

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è divergente.

Se $\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^b f(x)\,dx = \nexists$, f non è integrabile in senso improprio e diciamo che

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è oscillante (o indeterminato).

Osservazione. (1.58) Nel caso in cui $f \in R_{\text{loc}}\big([a, b)\big)$ la situazione è analoga alla precedente:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$$

Nel caso in cui invece entrambi gli estremi siano "impropri", come in figura 1.15, l'integrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ è interpretato, dal punto di vista degli integrali

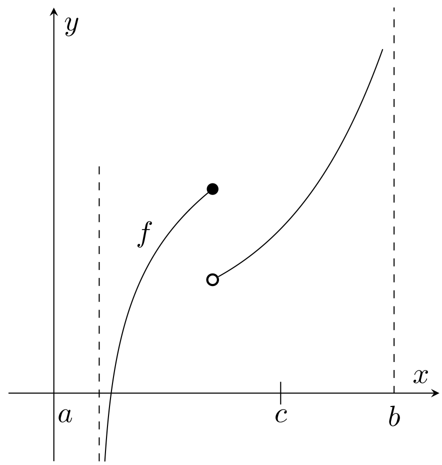


Figura 1.15: Integrale improprio di una funzione

impropri, come due integrali:

$$\int_a^b f x \, dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\, dx}_{\dagger} + \underbrace{\int_c^b f(x)\, dx}_{\ddagger}$$

Esempio. (1.59) Data la funzione rappresentata in figura 1.16, $\int_a^b f(x)\, dx$ sono in realtà due integrali impropri, entrambi impropri in x_0:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{x_0} f(x)\, dx + \int_{x_0}^b f(x)\, dx$$

† Integrale improprio in a
‡ Integrale improprio in b

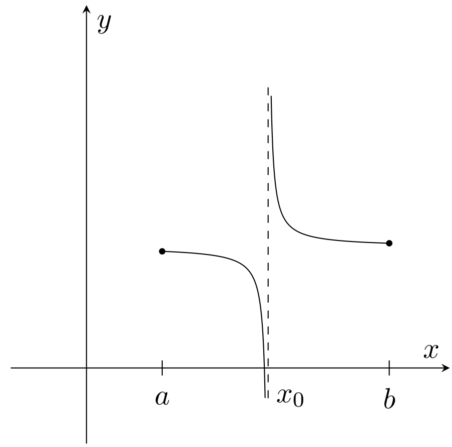


Figura 1.16: Integrale improprio di una funzione

Esempio. (1.60) Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $x \in (0,1]$ e $\alpha > 0$. Si calcola $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

Per $\delta > 0$

$$\int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \log|x|\Big|_\delta^1 = -\log\delta & \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_\delta^1 = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\delta^{1-\alpha}\right) & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Si ha quindi che

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Quindi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ è convergente per $0 < \alpha < 1$ ed è divergente per $\alpha \geq 1$.

1.13.2 Funzione su intervallo non limitato

Sia $f \in R_{\text{loc}}\big([a,+\infty)\big)$; allora, $\forall\,\omega \geq a$, possiamo considerare

$$\int_a^\omega f(x)\,dx$$

Definizione. (1.61) *Se esiste finito*

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)\,dx$$

diciamo che f è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$; in questo caso il limite precedente si chiama integrale improprio di f in $[a,+\infty)$, e si denota con

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\omega\to\infty}\int_a^\omega f(x)\,dx$$

La terminologia è la stessa per gli integrali impropri di funzioni non limitate.

Osservazione. (1.62) Analogamente si definisce

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to-\infty}\int_\eta^b f(x)\,dx$$

Esempio. (1.63) Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $x \in [1, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si calcola

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

$$\int_1^\omega \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \log|x| \Big|_1^\omega = \log\omega & \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^\omega = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\omega^{1-\alpha} - 1\right) & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_1^\omega \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Si ha quindi che $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ è convergente se $\alpha > 1$ e divergente se $\alpha \leq 1$.

Esempio. (1.64)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx}_{\text{divergente}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx}_{\text{convergente}}$$

Questo integrale rappresenta un integrale improprio divergente ed un integrale improprio convergente, ma con un po' di abuso di linguaggio comunemente si dice che questo sia <u>un</u> integrale improprio <u>divergente</u>.

Osservazione. (1.65) Per gli integrali impropri valgono proprietà molto simili a quelle degli integrali di Rieman; in particolare

- linearità;
- additività rispetto all'intervallo di integrazione;
- una versione del teorema fondamentale.[†]

[†] cf. esercizio 3 pag 465 Pagani Salsa

1.13.3 Criteri di convergenza

Ci interessa stabilire il carattere di un integrale improprio (i.e. sapere se converge, diverge o oscilla).

Teorema XI.

Criterio del confronto

Siano $f, g \in R_{\text{loc}}\big([a, +\infty)\big)$. Supponiamo che $\exists\, M > 0$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq M\, g(x)$$

definitivamente per $x \to +\infty$.

Allora

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge $\implies \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge;
2. $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge a $+\infty \implies \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge a $+\infty$.

Teorema XII.

Criterio del confronto

Siano $f, g \in R_{\text{loc}}\big((a, b]\big)$. Supponiamo che $\exists\, M > 0$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq M\, g(x)$$

definitivamente per $x \to a^+$.

Allora

1. $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ converge $\implies \displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ converge;
2. $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ diverge a $+\infty \implies \displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ diverge a $+\infty$.

Dimostrazione XI.

1. $\exists\, x_0 \geq a$ tale che

$$0 \leq f(x) \leq M\, g(x) \quad \forall\, x \geq x_0$$

Sia $F(\omega) = \int_a^\omega f(x)\, dx$.

Osservazione. (1.66) Se $\omega \geq x_0$, $F(\omega)$ è crescente, in quanto per $x > x_0$ $f(x) \geq 0$, quindi il suo integrale è necessariamente crescente.

Si ha che $\lim_{\omega \to +\infty} F(\omega)$ esiste, in quanto è il limite di una funzione monotona.

In generale, l'integrale improprio di una funzione ≥ 0 può solo convergere o divergere.

È sufficiente dimostrare che $F(\omega)$ è definitivamente limitata. Se $\omega \geq x_0$, allora

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_a^{x_0} f(x)\, dx + \underbrace{\int_{x_0}^{\omega} f(x)\, dx}_{\leq M\, g(x)} \leq \\ &\leq \int_a^{x_0} f(x)\, dx + M \underbrace{\int_{x_0}^{\omega} g(x)\, dx}_{\text{crescente in } \omega} \leq \\ &\leq \int_a^{x_0} f(x)\, dx + M \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\, dx \underset{\dagger}{<} +\infty \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\omega \to +\infty} F(\omega) = l \in \mathbb{R}.$$

† poiché per ipotesi $\int_{x_0}^{+\infty} g(x)\, dx$ è convergente.

2. La seconda parte della tesi è equivalente al primo punto: dal momento che gli integrali non possono essere indeterminati, negare la convergenza significa affermare la divergenza, pertanto:
$$A \implies B \quad \equiv \quad \neg B \implies \neg A$$
■

Esempio. (1.67) Studiare la convergenza di

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2}\, dx$$

Questo è un integrale improprio per $x \to \infty$.

Osserviamo che $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$,

$\implies \forall\, x \in [+, +\infty)$ si ha

$$0 \leq \frac{1 + \sin x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

ma $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^2}\, dx$ converge, dunque, per il teorema XI,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2}\, dx$$

converge.

Proposizione. (1.68) Siano $f, g \in R_{\text{loc}}\big([a, +\infty)\big)$ con $f, g \geq 0$ definitivamente per $x \to +\infty$ e supponiamo che $f \asymp g$ per $x \to +\infty$; allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge } \iff \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \text{ converge}$$

Proposizione. (1.69) Siano

$$f, g \in R_{\text{loc}}\big((a, b]\big)$$

con $f, g \geq 0$ definitivamente per $x \to a^+$ e supponiamo che $f \asymp g$ per $x \to a^+$; allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^b g(x)\,dx \text{ converge}$$

Dimostrazione. (1.68) $f \asymp g$ per $x \to +\infty$ vuol dire che

$$\exists\, 0 < m \leq M : m\,\big|g(x)\big| \leq \big|f(x)\big| \leq M\,\big|g(x)\big|$$

definitivamente per $x \to +\infty$.

$\Longrightarrow$ $m\,g(x) \leq f(x) \leq M\,g(x)$ definitivamente per $x \to +\infty$, in quanto $f, g \geq 0$ ■

Osservazione. (1.70) In particolare la conclusione della proposizione vale se $f \sim g$ per $x \to +\infty$ o se $f \sim g$ per $x \to a^+$.

Funzioni di riferimento

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$
$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Teorema XIII.

Criterio di convergenza assoluta

Sia $f \in R_{\text{loc}}\big([a,+\infty)\big)$; sia $|f|$ integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$. Allora anche f è integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$, e vale
$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx$$

Teorema XIV.

Criterio di convergenza assoluta

Sia $f \in R_{\text{loc}}\big((a,b]\big)$; sia $|f|$ integrabile in senso improprio su $(a,b]$. Allora anche f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$, e vale

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx$$

Osservazione. (1.71) Non vale il viceversa

Capitolo 2

Serie numeriche

Le serie numeriche sono una estensione del concetto della somma tra numeri ad un numero infinito di addendi.

Si prenda un cerchio C, con $\text{Area}(C) = 1$, come in figura 2.1. Dividendo a metà il cerchio infinite volte ottengo $C_1, C_2, C_3, \cdots$

Vale

$$\text{Area}(C_1) = \frac{1}{2}; \quad \text{Area}(C_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}; \quad \text{Area}(C_2) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}; \quad \cdots$$

Dovrebbe valere che $C_1 + C_2 + \cdots = 1$, che sembrerebbe significare

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 \tag{2.1}$$

Ma cosa significa uguagliare una somma infinita ad un numero?

Osservazione. (2.1) Nella caratterizzazione dell'integrabilità secondo Riemann con una successione di suddivisioni:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S(\mathfrak{D}_n, f) = \lim_{n\to+\infty} s(\mathfrak{D}_n, f)$$

dove $\mathfrak{D}_n$ sono delle suddivisioni che si “infittiscono” al crescere di n.

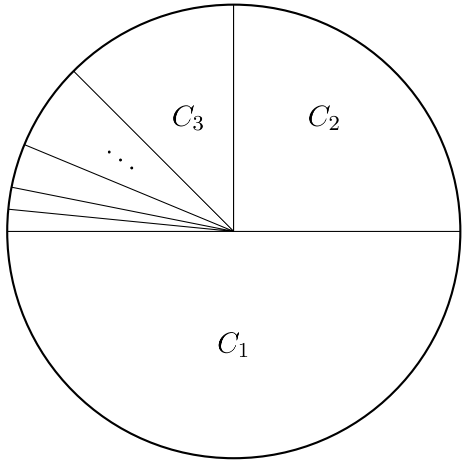


Figura 2.1: Un cerchio di area 1

In questo caso, quindi, l'integrale è definito come la somma di un numero di termini finito, ma di cui faccio il limite; questo in qualche modo ha a che fare con una somma di infiniti termini.

Quindi, il modo più naturale per dare senso ad una operazione come (2.1) è tramite il concetto di limite.

Sia data una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$. Costruiamo una nuova successione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ definita come segue:

$$s_0 = a_0; \qquad s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \,\forall\, n \in \mathbb{N}$$

In particolare

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0;\\
&s_1 = s_0 + a_1 = a_0 + a_1;\\
&s_2 = s_1 + a_2 = a_0 + a_1 + a_2;\\
&\ \vdots\\
&s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Definizione. (2.2) *Data una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{C}$, si chiama serie di termini a_k la successione $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$.*

L'elemento s_n si chiama somma parziale n-esima o ridotta n-esima della serie.

Diciamo che una serie è convergente, divergente o indeterminata a seconda che $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ sia convergente, divergente o indeterminata.

Se la serie è convergente, il limite $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ è detto somma della serie.

Notazione. (2.3) La serie di termini $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ si indica con:

- $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$;
- $a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$;
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ (notazione più comune).

Se la serie converge ad $A \in \mathbb{C}$, scriviamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$$

con un piccolo abuso di notazione: infatti con il termine a sinistra si indica una successione, mentre con quello a destra si indica il limite di quella successione.

Osservazione. (2.4) L'indice n in $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ è muto. Infatti scrivere $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ è come $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$

Osservazione. (2.5) Può capitare che n parta da n_0 al posto che da 0. Scriveremo

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

Osservazione. (2.6) Si scrive

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = s_n + R_n$$

con $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ mentre $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge } \implies \lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

Esempi. (2.7)

1. Serie geometrica di ragione $q \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$

Sia

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \underbrace{1 + q + \cdots + q^n}_{\dagger} = \begin{cases} n+1 & q = 1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

Osservazione. (2.8) Per $q \neq 1$, si calcola $s_n \cdot (1-q)$:

$$\begin{aligned}(1 + q + q^2 + \cdots + q^n)(1-q) &= \\ &= 1 - \cancel{q} + \cancel{q} - \cancel{q^2} + \cancel{q^2} - \cancel{q^3} + \cdots + \cancel{q^n} - q^{n+1} = \\ &\qquad 1 - q^{n+1}\end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & q = 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & |q| < 1 \\ +\infty & q > 1 \\ \nexists & q \leq -1 \end{cases}$$

† $n+1$ addendi

Pertanto

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \begin{cases} \text{divergente se } q \geq 1 \\ \text{convergente a } \dfrac{1}{1-q} \text{ se } |q| < 1 \\ \text{indeterminata se } q \leq -1 \end{cases}$$

L'intervallo di convergenza è simmetrico rispetto allo 0.

Osservazione. (2.9) Se $q = -1$, allora $\{s_n\} = \{1, 0, 1, 0, \cdots\}$, in quanto $\{a_n\} = \{1, -1, 1, -1, \cdots\}$; questa successione è limitata, ma non ha limite.

Se $q < -1$, $\{s_n\}$ non è limitata, e vale

$$\lim_{n \to +\infty} |s_n| = +\infty$$

mentre $\lim_{n \to +\infty} s_n = \nexists$

Osservazione. (2.10) Sia $q = \frac{1}{2}$, $|q| < 1$

$\implies \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge a $\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$

$\implies \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

$\implies 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots = 2$ che è una riscrittura di (2.1)

2. Serie di Mengoli:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$$

Posso scomporre $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{A}{n} + \dfrac{B}{n+1}$; si ha che $A = 1$ e $B = -1$ (utilizzando la scomposizione in fratti semplici). Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Si ha quindi che

$$s_n = \left(1 - \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\right) + \left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{3}}\right) + \left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{4}}\right) + \dots + \left(\frac{\cancel{1}}{\cancel{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Pertanto $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1$. Allora la serie di Mengoli è convergente e ha come somma 1.

3. Serie telescopiche. Sono serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$$

per una certa successione $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_{n+1}$$

Vale che $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = b_0 - \lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1}$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ converge $\iff b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ e in questo caso

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+1}) = b_0 - l$$

Osservazione. (2.11) Se una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ soddisfa $a_n \geq 0 \ \forall\, n$ (ovvero è una serie a termini non negativi), allora $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ è crescente, infatti

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

$\implies \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ esiste (finito o $+\infty$).

Quindi una serie a termini non negativi può solo essere convergente o divergente, ma non indeterminata. Inoltre, è sufficiente che i termini siano <u>definitivamente</u> non negativi affinché valga questa stessa proprietà.

2.1 Condizione di Cauchy

Vogliamo riscrivere la condizione necessaria e sufficiente di Cauchy per la convergenza.

$\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge $\iff$ $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ è di Cauchy, cioè

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) \text{ tale che } \forall\, n, m \geq N : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Se $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ è la successione delle somme parziali di $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, si ha (supponiamo $n > m$)

$$\begin{aligned} &|s_n - s_m| = \\ &\quad = \big|(a_0 + a_1 + \cdots + a_m + a_{m+1} \cdots + a_n) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_m)\big| = \\ &\qquad\qquad = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon \end{aligned}$$

Questa condizione vuol dire che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero N tale per cui, sommati arbitrariamente un numero qualsiasi di termini consecutivi della successione a_n (con $n < N$), questa somma è minore di ε.

Teorema XV.

Criterio di Cauchy

Data $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si ha che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è convergente $\iff$

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N = N(\varepsilon) : \\ &\qquad \forall\, p \geq N, \quad \forall\, q \geq 0 \implies |a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{p+q}| < \varepsilon \end{aligned}$$

Osservazione. (2.12) La condizione di Cauchy per le serie, nel caso in cui $q = 0$, è la definizione di

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

Corollario. (2.13) Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(cioè la condizione $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ è necessaria per la convergenza; non è sufficiente!)

Osservazione. (2.14) Se $a_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non è convergente.

Esempio. (2.15)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} n \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\sim 1/n} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = 1 \neq 0$$

$\implies$ la serie non converge; inoltre $n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0\ \forall\, n$

$\implies$ la serie diverge.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$;

$$\lim_{n\to\infty} \sin n \quad \text{non esiste}$$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} \sin n$ non converge.

$\sin n$ assume segni diversi infinite volte; si dimostra che è indeterminata.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: questa è una serie armonica.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{non possiamo concludere nulla.}$$

Fissato $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\underbrace{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}_{n \text{ addendi}} = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$\exists\, \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} : \quad \forall\, N \quad \exists\, p \geq N,\, q \geq 0$$

tali che

$$|a_p + \cdots + a_{p+q}| = a_{n+1} + \cdots + a_{2n} \geq \frac{1}{2} = \bar{\varepsilon}$$

quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ non è di Cauchy

$\Longrightarrow$ non converge.

Osservazione. (2.16) Il carattere di una serie non cambia se aggiungo, tolgo o modifico un numero finito di termini.

Se la serie è convergente, resta convergente ma cambia la somma.

Osservazione. (2.17) Dato $c_n \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ è convergente

$\Longleftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Re(c_n)$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Im(c_n)$ convergono, e in questo caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Re(c_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \Im(c_n)$$

2.2 Serie a termini non negativi

Osservazione. (2.18) Una serie a termini non negativi soddisfa $\{s_n\}_n$ crescente, quindi può solo convergere o divergere, e in particolare

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \sup\{s_n\}$$

quindi una serie a termini non negativi converge

$\iff \{s_n\}$ è limitata.

Teorema XVI.

Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, con

$$a_n, b_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Supponiamo che $a_n \leq b_n \; \forall\, n \in \mathbb{N}$

Allora:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge;
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione XVI.

1. Siano $A_n = a_0 + \cdots + a_n$ e $B_n = b_0 + \cdots + b_n$

   $\sum b_n$ converge $\implies \{B_n\}$ è limitata. Ma

   $$A_n \leq B_n \quad \forall\, n$$

   $$\implies \{A_n\} \text{ è limitata} \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

2. Equivalente alle negazioni del primo punto. ∎

Osservazione. (2.19) Vale ancora con ipotesi valide definitivamente per $n \to \infty$.

Esempio. (2.20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$: <u>serie armonica generalizzata</u>.

La serie è a termini positivi.

- $\alpha \leq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases} \neq 0$$

$\implies$ non converge $\implies$ diverge.

- $\alpha < 1$

$$\implies n^\alpha \leq n \implies \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$$\implies \text{per confronto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge.}$$

- $\alpha = 2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \qquad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n\,(n-1)} \qquad \forall\, n \geq 2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \underset{\dagger}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \quad \text{convergente (serie di Mengoli)}$$

$$\implies \text{per confronto } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

- $\alpha \geq 2$

$\implies n^\alpha \geq n^2\ \forall\, n$

$$\implies \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \text{ e } \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

$$\implies \text{per confronto, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \forall\, \alpha \geq 2.$$

Quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge} & \alpha \geq 2 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

† $n - 1 = k$

Corollario. (2.21) Siano

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

tali che $a_n, b_n \geq 0 \; \forall\, n$.

Supponiamo che

$$a_n \asymp b_n \quad \text{per } n \to \infty^{\dagger}$$

Allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\iff \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.

Osservazione. (2.22) Le conclusioni valgono in particolare se $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$

Esempio. (2.23)

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \qquad n \to \infty$$

   e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

   $\implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ diverge.

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \log n + 1}{n^4 + n - 1}$

$$\frac{n^2 + \log n + 1}{n^4 + n - 1} \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \qquad n \to \infty$$

   $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

   $\implies$ per confronto asintotico, la serie data converge.

† $\exists\, m, M > 0 : \quad m\, b_n \leq a_n \leq M\, b_n$ definitivamente per $n \to \infty$

Teorema XVII.

Criterio della radice

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n \geq 0 \; \forall\, n$. Se $\exists\, 0 \leq l < 1$ tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq l \quad \text{definitivamente per}\, n \to \infty$$

allora la serie è convergente.

Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti valori di n, allora la serie è divergente.

Dimostrazione XVII. Se $\sqrt[n]{a_n} \leq l$

$\implies a_n \leq l^n$ definitivamente per $n \to \infty$.

$\sum_{n=0}^{\infty} l^n$ converge (è una serie geometrica con $l \in [0, 1]$)

$\implies$ per confronto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Se $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti n

$\implies a_n \geq 1$ per infiniti $n \implies \lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge $\implies$ diverge $(a_n \geq 1)$. ∎

Corollario. (2.24) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini non negativi. Supponiamo che esista

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora:

i. $L < 1 \implies$ la serie converge;

ii. $L > 1 \implies$ la serie diverge.

Osservazione. (2.25) Se $L = 1$ non possiamo dire nulla in merito alla convergenza della serie.

Osservazione. (2.26) Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1^+$ allora $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ per infiniti n

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è divergente.

Osservazione. (2.27) Il corollario precedente vale sostituendo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

con

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Esempio. (2.28) Data $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ (ovvero una serie a termini non negativi):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^\alpha} = a$$

Quindi, per il criterio della radice

$$a > 1 \implies \text{la serie diverge,}$$
$$0 < a < 1 \implies \text{la serie converge;}$$

Se $a = 1$ allora il criterio della radice non da informazioni: la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge} & \alpha \geq 2 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Teorema XVIII.

Criterio del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$ definitivamente per $n \to \infty$. Se $\exists\, 0 < l < 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l \quad \text{definitivamente per } n \to \infty$$

allora la serie è convergente.

Se $a_{n+1} \geq a_n$ definitivamente per $n \to \infty$, allora la serie diverge

Corollario. (2.29) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a termini positivi, e supponiamo che esista

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \overline{\mathbb{R}} \quad \big(= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\big)$$

Allora

(i) $L < 1 \implies$ la serie è convergente;

(ii) $L > 1 \implies$ la serie è divergente.

Osservazione. (2.30) Se $L = 1$ non si può dire nulla. Però se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1^+$$

allora la serie diverge.

Osservazione. (2.31) Se non esiste $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$:

- se $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ la serie converge;
- se $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ la serie diverge.

Esempio. (2.32) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{n^3} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Dal momento che $a_n \leq \dfrac{1}{n^2}\ \forall\, n$

$\implies \sum a_n$ converge per il criterio del confronto (in quanto $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge).

Inoltre vale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{n^2}{(n+1)^3} & n \text{ pari} \\ \frac{n^3}{(n+1)^2} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Allora

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

Esempio. (2.33) Si consideri $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = 0 < 1$$

$\implies$ la serie converge.

Teorema XIX.

Criterio di condensazione

Sia $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una successione a termini non negativi e decrescenti, cioè

$$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq 0$$

Allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge $\iff \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.

Dimostrazione XIX. Chiamiamo

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$
$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$$

le ridotte n-esime delle due serie.

$$\begin{aligned}
&a_0 \leq a_0 \\
&a_1 \leq a_1 \\
&a_2 + a_3 \leq 2a_2 \\
&a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 4a_4 \\
&a_8 + \cdots\cdots\cdots + a_{15} \leq 8a_8 \\
&\quad\vdots \\
&a_{2^n} + \cdots\cdots\cdots + a_{2^{n+1}-1} \leq 2^n a_{2^n}
\end{aligned}$$

Sommando, si ha:

$$s_n \leq a_0 + \sigma_n$$

"$\Longleftarrow$" $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge

$\Longrightarrow$ $\{\sigma_n\}$ è limitata

$\Longrightarrow$ $\{s_n\}$ è limitata

$\Longrightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

" $\Longrightarrow$ " Notiamo che

$$\begin{aligned}
&a_0 = a_0\\
&a_1 \geq \frac{1}{2}\, a_1\\
&a_2 \geq \frac{1}{2} \cdot 2\, a_2\\
&a_3 + a_4 \geq 2a_4 = \frac{1}{2} \cdot 4a_4\\
&a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 4a_8 = \frac{1}{2} \cdot 8a_8\\
&a_9 + \cdots\cdots\cdots + a_{16} \geq 8a_{16} = \frac{1}{2} \cdot 16a_{16}\\
&\vdots\\
&a_{2^{n-1}+1} + \cdots\cdots\cdots + a_{2^n} \geq 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2} \cdot 2^n a_{2^n}
\end{aligned}$$

Sommando:

$$s_n \geq a_0 + \frac{1}{2}\, \sigma_n$$

$\sum a_n$ converge

$\Longrightarrow$ $\{s_n\}$ limitata

$\Longrightarrow$ $\{\sigma_n\}$ limitata

$\Longrightarrow$ $\sum 2^n a_{2^n}$ converge. ∎

Esempio. (2.34) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Sappiamo già che converge se $\alpha \geq 2$ diverge se $\alpha \leq 1$.

Consideriamo $\alpha > 0$: se $\alpha \leq 0 \implies \dfrac{1}{n^\alpha} \nrightarrow 0$ per $n \to \infty$, quindi la serie $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

$\displaystyle\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è non negativa e decrescente. Quindi per il criterio di condensazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Sapendo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$$

serie geometrica, che

- converge se $2^{1-\alpha} < 1 \iff \alpha > 1$
- diverge se $2^{1-\alpha} \geq \iff \alpha \leq 1$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

2.3 Serie qualsiasi (anche a termini in $\mathbb{C}$)

Definizione. (2.35) *Data una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *con* $\{a_n\} \subseteq \mathbb{C}$ *diciamo che* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge assolutamente se* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

Teorema XX.

Criterio di convergenza assoluta

Se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge

$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Dimostrazione XX. Osserviamo che $\forall\, p, q \geq 0$,

$$\underbrace{\left|a_p + a_{p+1} + \cdots + a_{p+q}\right|}_{\boxed{1}} \leq \underbrace{\left|a_p\right| + \left|a_{p+1}\right| + \cdots + \left|a_{p+q}\right|}_{\boxed{2}}$$

Quindi se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge

$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N$ tale che

$$\forall\, p \geq N, q \geq 0 \qquad \boxed{2} < \varepsilon$$

$\Longrightarrow \boxed{1} < \varepsilon$

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. ■

Osservazione. (2.36) Nel teorema XX non vale il viceversa.

Esempio. (2.37) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, con $z \in \mathbb{C}$.

Studiamo la convergenza assoluta: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$, attraverso il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{\cancel{n}+1}}{(n+1)\cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{|z|^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1 \quad \forall\, z$$

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge assolutamente

$\Longrightarrow$ converge $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

Facciamo ora lo sviluppo di McLaurin di e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad n \to \infty$$

Sappiamo quindi che è corretto scrivere

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Definiamo ora quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} := e^z \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

2.4 Serie reale a termini di segno alternato

Sono serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

con $a_n \geq 0 \; \forall \, n$

Teorema XXI.

Criterio di Leibnitz

Sia data $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0 \; \forall \, n$, e supponiamo:

(i) $\{a_n\}$ decrescente;

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

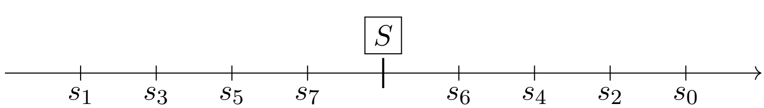
Allora la serie converge. Detta S la sua somma e $\{s_n\}$ la successione delle ridotte, si ha:

$$\lim_{n \to \infty} s_{2n} = S^+; \qquad \lim_{n \to \infty} s_{2n+1} = S^-$$

e

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_n$$

Dimostrazione XXI.



Si ha che:

- $\{s_{2n}\}$ decrescente;
- $\{s_{2n+1}\}$ crescente;

$\forall \, n, m \in \mathbb{N}$ vale $s_{2n} \geq s_{2m+1}$

- $\{s_{2n}\}$
$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} \underbrace{-a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq s_{2n}$$
decrescente;
- $\{s_{2n+1}\}$
$$s_{2(n+1)+1} = s_{2n+3} = s_{2n+1} + \underbrace{a_{2n+2} - a_{2n+3}}_{\geq 0} \geq s_{2n+1}$$
crescente;
- $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, $s_{2n} \geq s_{2m+1}$
  - $n = m$: $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{n+1} \leq s_{2n}$
  - $n < m$: $s_{2n} \geq s_{2m} \geq s_{2m+1}$
  - $n > m$: $s_{2n} \geq s_{2n+1} \geq s_{2m+1}$

Quindi:

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_{2n} \leq \cdots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

Allora: $\{s_{2n}\}$ decrescente e limitata dal basso (da s_1)

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = S^+ \in \mathbb{R}$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \Big(\underbrace{s_{2n}}_{\to S} - \underbrace{a_{n+1}}_{\to 0}\Big) = S^-$

$\implies \lim\limits_{n\to\infty} s_n = S$, cioè $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ converge.

Inoltre

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k a_k\right| = |S - s_{n-1}| =$$
$$= \begin{cases} S - s_{n-1} \leq s_n - s_{n-1} = a_n & n \text{ pari} \\ s_{n-1} - S \leq s_{n-1} - s_n = a_n & n \text{ dispari} \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Esempio. (2.38) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n};$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0: \qquad \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ decrescente}$$

$\Longrightarrow$ per Leibnitz $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ converge.

Osservazione. (2.39) La serie precedente non è assolutamente convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} \quad \text{diverge.}$$

Quindi la convergenza assoluta implica la convergenza, ma la convergenza non implica la convergenza assoluta.

2.5 Serie e integrali impropri

Osservazione. (2.40) Una serie può sempre essere vista come un integrale improprio.

Data $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $a_n\in\mathbb{R}$, si definisca

$$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

tale che $f(x)=a_k\ \forall\, x\in[k,k+1)$, come mostrato in figura 2.2

Osservazione. (2.41) Notiamo che

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx=a_k \implies \int_0^{n+1} f(x)\,dx=a_0+a_1+\cdots+a_n=s_n$$

Si ha: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ converge $\iff \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

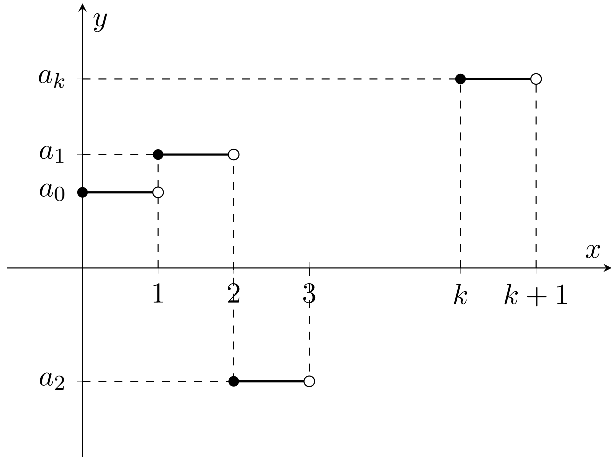


Figura 2.2: La funzione f creata da una successione $\{a_n\}$

Teorema XXII.

Sia data $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{C}$. Supponiamo che

$$\exists\, f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

tale che

(i) $f(x) \geq 0 \ \forall\, x \geq 0$;

(ii) $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ converge;

(iii) $|a_n| \leq f(x) \ \forall\, x \in [n, n+1], \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente.

Dimostrazione XXII. Chiamiamo $c_n = \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx = \int\limits_0^{n+1} f(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

$\implies \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ converge.

D'altra parte

$$|a_n| = \int\limits_n^{n+1} |a_n|\,dx \leq \int\limits_n^{n+1} f(x)\,dx = c_n$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$

$\implies$ per confronto tra serie si ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. ■

Corollario. (2.42) Sia $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tale che:

(i) $f(x) \geq 0\ \forall\, x \in [0,+\infty)$;

(ii) $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ convergente;

(iii) f decrescente.

Allora $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge.

Dimostrazione. (2.42) Osserviamo che $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)$ converge $\iff \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n+1)$ converge. Quindi:

$$|f(n+1)| = f(n+1) \leq f(x) \quad \forall\, x \in [n, n+1]$$

La disuguaglianza vale poiché la funzione è decrescente.

Possiamo applicare il teorema precedente, con $a_n = f(n+1)$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1) \text{ converge}$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ converge.} \qquad \blacksquare$$

Osservazione. (2.43) Vale il viceversa, cioé: se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ è non negativa e decrescente, allora

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ converge.}$$

Esempio. (2.44) Sia $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$ decvrescente e non negativa.

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx \text{ converge} \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge.}$$

e quindi entrambi convergono se $\alpha > 1$ e divergono se $0 < \alpha \leq 1$

Osservazione. (2.45) L'ipotesi f decrescente è essenziale. Consideriamo la funzione f mostrata in figura 2.3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \notin \mathbb{N} \\ 1 & x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ converge, ma } \sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \text{ diverge.}$$

Posso fare in modo che $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, ma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(x)$ diverge.

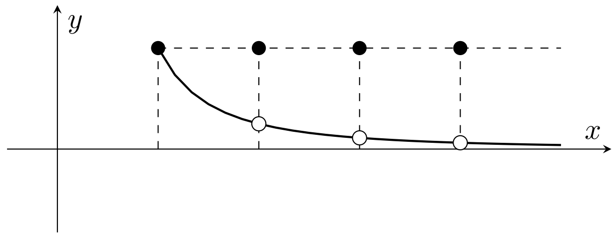


Figura 2.3: La funzione f

Teorema XXIII.

Criterio di Abel-Dirichlet

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, e sia $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ la ridotta n-esima di $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Supponiamo che:

(i) $\exists\, M > 0$: $|A_n| \leq M \;\forall\, n \geq 0$.

(ii) $b_n \geq 0$, $b_{n+1} \leq b_n \;\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, b_n$ converge.

Osservazione. (2.46) Nel caso $a_n = (-1)^n$ riotteniamo il criterio di Leibnitz, infatti

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$\implies |A_n| \leq 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$, cioè vale (i)

Esempio. (2.47) Consideriamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$.

Ricordiamo che $e^{in} = \cos n + i\, \sin n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{in}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|e^{in}|}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ non converge assolutamente.

Consideriamo ora $a_n = e^{in}$, $b_n = 1/n$.

(i) $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = \sum_{k=0}^{n} (e^i)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}$

$$|A_n| = \frac{|1 - e^{i(n+1)}|}{|1 - e^i|} \leq \frac{|1| + |e^{i(n+1)}|}{|1 - e^i|} = \frac{2}{|1 - e^i|} =: M$$

(ii) $b_n \geq 0$, decrescente infinitesimo

$\Longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ converge.

Osservazione. (2.48) $e^{in} = \cos n + i\, \sin n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n} + i\, \frac{\sin n}{n} \right) \text{ converge } \Longleftrightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \text{ convergono.}$$

2.6 Operazioni sulle serie

2.6.1 Somma tra due serie

Definizione. (2.49) *Siano* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *due serie, e* $c \in \mathbb{R}$*, con* $a_n, b_n \in \mathbb{R}$*. Definiamo*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$
$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n := \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$$

Proprietà. (2.50)

1. Se $c \neq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; in particolare, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad A, allora $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$ converge ad $(c \cdot A)$.

2. Se $c = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n$ converge a 0 qualsiasi sia $\{a_n\}$.

3. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad A e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge a B, allora $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge ad $A + B$.

Osservazione. (2.51) In 3. non vale l'implicazione inversa, infatti, dati:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = -\frac{1}{n}$$

Sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergono, ma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \text{ converge a } 0$$

2.6.2 Prodotto di due serie

Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} a_0 \cdot b_0 &= a_0 b_0 \\ (a_0 + a_1) \cdot (b_0 + b_1) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + a_1 b_1 \\ (a_0 + a_1 + a_2) \cdot (b_0 + b_1 + b_2) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \\ &+ (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \\ &+ [a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2] \end{aligned}$$

Definizione. (2.52) *Poniamo*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

dove

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Viene chiamato "prodotto secondo Cauchy".

Teorema XXIV.

Supponiamo che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono ad A e B rispettivamente, e che una delle due converga assolutamente.

Allora la serie prodotto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge ad $A \cdot B$.

Proprietà. (2.53) Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ una serie ottenuta raggruppando (in $\sum a_n$) un certo numero di termini consecutivi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \underbrace{(a_0 + a_1)}_{b_0} + \underbrace{(a_2)}_{b_2} + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5 + a_6)}_{b_2} + \cdots$$

Osserviamo che chiamando $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ e $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $\{B_n\}$ è una sottosuccessione di $\{A_n\}$.

Quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge} \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ diverge} \implies \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ diverge}$$

Non si può dire altro. Infatti, per esempio,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 1$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

Per quanto riguarda la proprietà associativa, consideriamo i seguenti teoremi.

Definizione. (2.54) *Diciamo che $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ è un riordinamento di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ se $\exists\, j$,*

$$\begin{aligned} j : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto j(n) \end{aligned}$$

biunivoca tale che $b_n = a_{j(n)}$.

Teorema XXV.

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie assolutamente convergente. Allora ogni suo riordinamento è assolutamente convergente e ha la sua stessa somma.

Teorema XXVI.

Teorema di Riemann-Dini

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini reali, convergente ma non assolutamente convergente.

Allora $\forall\, S \in \mathbb{R}$, $\exists$ un suo riordinamento convergente ad S. Inoltre, esistono riordinamenti divergenti (a $+\infty$ e a $-\infty$) ed esistono riordinamenti indeterminati.

Se $\sum a_n$ converge ma non assolutamente $\implies$

1. devono esserci infiniti a_n positivi e infiniti a_n negativi;
2. la serie degli a_n positivi e degli a_n negativi devono divergere.

Capitolo 3

Funzioni a più variabili

Notazione. (3.1) Per tutta questa sezione, per indicare un generico punto di $\mathbb{R}^n$ useremo il grassetto: ad esempio $\boldsymbol{x}$.

Consideriamo

$$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Definizione. (3.2) *Sia* $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *e* $\boldsymbol{x}_0 \in \dot{\mathbb{R}}^n (= \mathbb{R}^n \cup \{\infty\})$ *un punto di accumulazione per* X. *Sia* $l \in \mathbb{R}^* (= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$.

Diciamo che

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l$$

se $\forall V$ *intorno di* l, $\exists U$ *intorno di* $\boldsymbol{x}_0$ *tale che*

$$\forall \boldsymbol{x} \in U \cap X, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0, \quad f(\boldsymbol{x}) \in V$$

Possiamo introdurre quindi, intuitivamente, il concetto di uniformità rispetto alle direzioni in $\mathbb{R}^n$:

- stesso comportamento in tutte le "direzioni";
- si comporta in modo uniforme rispetto alle "direzioni".

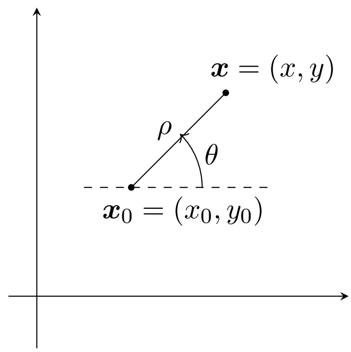


Figura 3.1: $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x}_0$ in $\mathbb{R}^2$

Osservazione. (3.3) Se trovo due "direzioni" γ_1 e γ_2 che si avvicinano ad $\boldsymbol{x}_0$ e lungo le quali la funzione f ha due limiti diversi, allora $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x})$ non esiste.

Per verificare che un limite in più variabili esiste:

1. Criterio del confronto: se $g(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq h(\boldsymbol{x})$ definitivamente per $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, e
$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} g(\boldsymbol{x}) = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} h(\boldsymbol{x}) = l$$
$\implies \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = l.$

2. Se $n = 2$, consideriamo $\boldsymbol{x} = (x, y)$ e $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$ come mostrati in figura 3.1

   Vale che
$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos\theta \\ y = y_0 + \rho \sin\theta \end{cases}$$

   Si ha
$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = l$$
$$\iff$$
$$f(x_0 + \rho \cos\theta, y_0 + \rho \sin\theta) \to l$$

per $\rho \to 0^+$, "uniformemente rispetto a θ"; questo si può esprimere dicendo che $\exists\, \Phi$ tale che $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$

$$\left| f(x_0 + \rho \cos\theta, y_0 + \rho \sin\theta) - l \right| \le \Phi(\rho) \xrightarrow[\rho \to 0^+]{} 0$$

3.1 Calcolo differenziale per funzioni a più varibili

Sia data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto.

Cerchiamo le derivate. Una prima idea è quella di prendere una direzione derivare "lungo quella direzione".

Sia $\boldsymbol{x} \in A$ (il punto in cui calcolerò la derivata "direzionale"). Sia $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ un versore ($|\boldsymbol{v}| = 1$) (che individua una direzione e un verso).

Consideriamo $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}$, con $t \in \mathbb{R}$ tale che $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v} \in A$.

Osservazione. (3.4) $|t|$ è la distanza tra $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}$. Dato $\boldsymbol{x} \in A$, $\exists\, B_r(\boldsymbol{x}) \subseteq A$

$\implies \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v} \in A \;\forall\, |t| < r$.

Consideriamo quindi il rapporto incrementale nella direzione $\boldsymbol{v}$:

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t}$$

Definizione. (3.5) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\boldsymbol{x} \in A$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ con $|\boldsymbol{v}| = 1$. Diciamo che f è derivabile in $\boldsymbol{x}$ nella direzione $\boldsymbol{v}$ se esiste finito*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t}$$

Tale limite si chiama <u>derivata direzionale</u> di f nella direzione $\boldsymbol{v}$ e si indica con $D_{\boldsymbol{v}} f(x)$

Osservazione. (3.6) Notiamo che $t \in \mathbb{R}$.

Osservazione. (3.7) Sia $\varphi(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{v}$ finiti.

Allora

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \varphi'(0)$$

Esempio. (3.8) Consideriamo f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x} &\mapsto |\boldsymbol{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \end{aligned}$$

$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, dato $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n)$, $|\boldsymbol{v}| = 1$, e calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{x}|^2}{t} &= \lim_{t \to 0} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k + t\, v_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\, t\, x_k\, v_k + \sum_{k=1}^{n} t^2 v_k^2 - \cancel{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2}}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \left[2 \sum_{k=1}^{n} x_k\, v_k + \underbrace{t \sum_{k=1}^{n} |v_k|^2}_{\to 0} \right] = 2 \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \right\rangle \end{aligned}$$

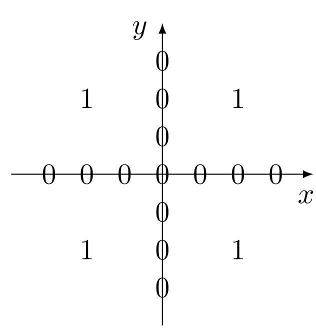
Quindi f è derivabile lungo $\boldsymbol{v}$, per ogni $\boldsymbol{v}$, in ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, e

$$D_{\boldsymbol{v}}\, f(x) = 2 \left\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \right\rangle$$

Osservazione. (3.9) La derivabilità rispetto ad alcune direzioni di una funzione non mi da alcuna informazione, mentre risulta più utile derivare rispetto ad altre direzioni.

Esempio. (3.10) Studiare la derivabilità direzionale in $(0, 0)$ di f in $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy = 0 \\ 1 & xy \neq 0 \end{cases}$$



Vale che, dato $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$:

$$D_{\boldsymbol{v}}\, f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - \overbrace{f(0,0)}^{0}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t}$$

- Valutiamo il caso in cui

$$\boldsymbol{v} \in \{\pm \boldsymbol{e}_1, \pm \boldsymbol{e}_2\} = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$$

$$\implies f(tv_1, tv_2) = 0 \;\forall\, t$$

$$\implies D_{\boldsymbol{v}}\, f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

- Nel caso in cui $\boldsymbol{v} \notin \{\pm \boldsymbol{e}_1, \pm \boldsymbol{e}_2\}$

$$\implies f(tv_1, tv_2) = 1 \;\forall\, t \neq 0$$

$$\implies \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} \quad \nexists.$$

Osservazione. (3.11) Se f è derivabile lungo $\boldsymbol{v}$, è derivabile anche lungo $-\boldsymbol{v}$, e si ha

$$D_{-\boldsymbol{v}}\, f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t} \underset{\dagger}{=} \lim_{s\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{-s} = -D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x})$$

Osservazione. (3.12) Sono importanti le derivate direzionali di f: $D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x})$ quando $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$, con $\boldsymbol{e}_j$ j-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Definizione. (3.13) *La derivata $D_{\boldsymbol{e}_j}\, f(\boldsymbol{x})$ si chiama "derivata parziale" di f rispetto a x_j nel punto $\boldsymbol{x}$, e si indica con*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}); \qquad f_{x_j}(\boldsymbol{x}); \qquad \partial_{x_j} f(\boldsymbol{x}); \qquad D_j\, f(\boldsymbol{x})$$

† Pongo $t = -s$

Osservazione. (3.14)

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_j)-f(\boldsymbol{x})}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_{j-1},x_j+t,x_{j+1},\cdots,x_n)-f(\boldsymbol{x})}{t}$$

Questo è il motivo per cui si dice che "derivo rispetto ad una variabile": si trattano tutte le altre come costanti, in quanto non sono modificate.

Esempio. (3.15) Sia $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_3^3$, $x\in\mathbb{R}^3$. Calcoliamone la derivata rispetto a x_1.

Sia $\varphi(t)=f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{e}_1)$, con $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)$:

$$\varphi(t)=f(x_1+t,x_2,x_3)=(x_1+t)^2x_2+x_3^3$$

Pertanto
$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x})=\varphi'(0)=\big[2(x_1+t)\,x_2\big]\,|_{t=0}=2x_1x_2$$

Vale anche che
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})=x_1^2;\qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})=3x_3^2$$

Definizione. (3.16) *Se $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to R$, A aperto, ammette n derivate parziali in $\boldsymbol{x}\in A$, chiamiamo gradiente di f in $\boldsymbol{x}$ il vettore*

$$\nabla f(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right)$$

$\nabla f(\boldsymbol{x})$ *si indica anche con* $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})$

3.1.1 Significato geometrico delle derivate direzionali

Fare la derivata direzionale di una funzione, nel caso in cui sia

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

significa fare la derivata unidirezionale della funzione intersecata con il piano verticale su cui giace il vettore v, come mostrato in figura 3.2. In particolare, $D_{\boldsymbol{v}}\,f(\boldsymbol{x})$ è il coefficente angolare della retta t.

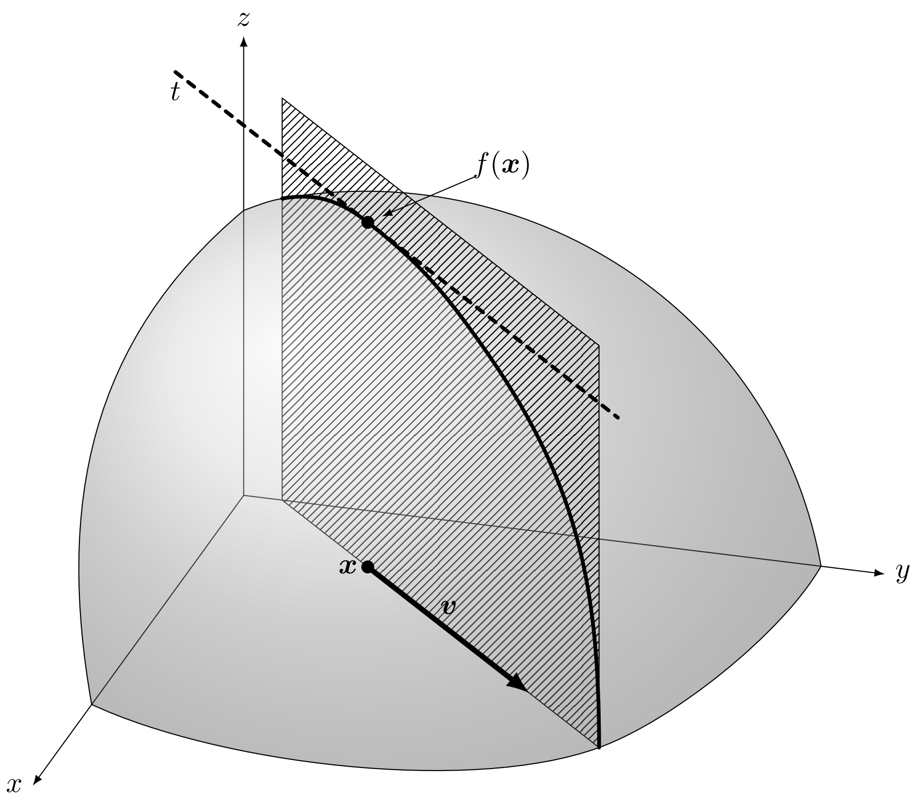


Figura 3.2: Derivata direzionale di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

3.1.2 Relazioni tra derivabilità direzionale e continuità

- Se $n = 1$: f derivabile in $x \implies f$ continua in x.
- Se $n \geq 2$: f derivabile in $\boldsymbol{x}$ lungo ogni direzione $\not\Longrightarrow$ f continua in $\boldsymbol{x}$.

Esercizio. (3.17) Consideriamo la segeuente funzione in $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si dimostri

(i) f non è continua in $(0,0)$;

(ii) f è derivabile lungo ogni direzione in $(0,0)$.

Soluzione (3.17).

(i) Consideriamo la direzione $y = x^3$: restringiamo f (considerando $x \neq 0$):

$$f|_{y=x^3} = f(x,x^3) = \frac{x^3 x^3}{x^6 + \left(x^3\right)^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \neq f(0,0)$$

$$\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \begin{cases} \nexists \\ \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

In entrambi i casi la funzione non è continua, in quanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$$

e quindi f non è continua in $(0,0)$.

(ii) Sia $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$

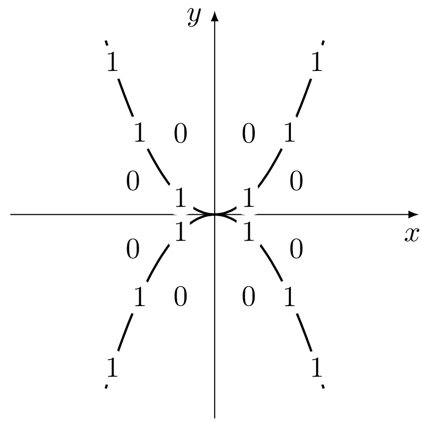
$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \, \frac{t^4 v_1^3 v_2}{t^6 v_1^6 + t^2 v_2^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t v_1^3 v_2}{t^4 v_1^6 + v_2^2} = \begin{cases} 0 & v_2 \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^4 v_1^6} = 0 & v_2 = 0 \end{cases}$$

$\implies$ f è derivabile lungo ogni direzione in $(0,0)$, e $D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = 0 \;\forall\, \boldsymbol{v}$.

Esempio. (3.18) Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & y = \pm x^2, (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



f sicuramente non è continua in $(0,0)$. Nello stesso tempo, in ogni direzione rettilinea trovo un intorno in cui la funzione è identicamente nulla, e pertanto nell'origine la derivata in quella direzione è 0.

$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{v}$$

3.2 Differenziabilità

Se la derivata direzionale significa incrementare $\boldsymbol{x}$ di $t\,\boldsymbol{v}$, per $\boldsymbol{v}$ fissato, con $t \in \mathbb{R}$, per $t \to 0$, la differenziabilità significa incrementare $\boldsymbol{x}$ di $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ per $\boldsymbol{h} \to 0$.

Definizione. (3.19) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\boldsymbol{x} \in A$. Diciamo che f è differenziabile in $\boldsymbol{x}$ se $\exists\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h} \rangle + o(|\boldsymbol{h}|) \quad \boldsymbol{h} \to 0$$

per ogni $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in A$

Osservazione. (3.20) A aperto $\implies \exists\, r$: $B_r(\boldsymbol{x}) \subseteq A$

$\implies$ se $|\boldsymbol{h}| < r$ allora $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h} \in A$

Notazione. (3.21) L'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{h} &\mapsto \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h} \rangle^{\dagger} \end{aligned}$$

si chiama differenziale di f in $\boldsymbol{x}$ e si indica con $d\,f(\boldsymbol{x})$

Osservazione. (3.22) $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineare (cioè $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ si ha $l(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha\, l(\boldsymbol{x}) + \beta\, l(\boldsymbol{y})$)

$\implies \exists\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che $l(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle$

Osservazione. (3.23) Se $n = 1$, si ha

$$\begin{aligned} d\,f(x) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto ah \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{R}$.

Ricordando che f differenziabile in $x \iff f$ derivabile in x, in questo caso $a = f'(x)$.

Teorema XXVII.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, $\boldsymbol{x} \in A$, e supponiamo f differenziabile in $\boldsymbol{x}$. Allora:

1. f è continua in $\boldsymbol{x}$;
2. f è derivabile lungo ogni direzione in $\boldsymbol{x}$ (in particolare esistono tutte le derivate parziali), e $\forall\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ versore si ha

$$D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle \qquad \text{Formula del gradiente}$$

Dimostrazione XXVII.

1. Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to 0} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}).$$

† $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h} \rangle := \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot h_j$

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \big[f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x})\big] = \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \big[\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{h}\rangle + o(|\boldsymbol{h}|)\big] = $$

$$= \lim_{\boldsymbol{h}\to 0} \Bigg[\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j h_j}_{\to 0} + \underbrace{o(|\boldsymbol{h}|)}_{\to 0}\Bigg] = 0$$

quindi f continua in $\boldsymbol{x}$.

2. Svolgiamo un semplice calcolo:

$$\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t} \\
&\underset{\dagger}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\langle \boldsymbol{a}, t\boldsymbol{v}\rangle + o(|t\boldsymbol{v}|)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j\, t v_j + o(|t|\, \overset{=1}{|\boldsymbol{v}|})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \Bigg[\sum_{j=1}^{n} a_j\, v_j + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\to 0}\Bigg] = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\rangle
\end{aligned}$$

Allora $\forall\, \boldsymbol{v}$ si ha

$$D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}\rangle$$

Ma se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$

$$\implies D_{\boldsymbol{e}_j} f(\boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}_j\rangle = a_j$$

$$\implies a = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\right) = \nabla f(\boldsymbol{x})$$

$$\implies D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v}\rangle.$$

■

Osservazione. (3.24)

- f non continua in $\boldsymbol{x} \implies f$ non differenziabile in $\boldsymbol{x}$;
- f non ammette derivata direzionale lungo certe direzioni $\implies f$ non differenziabile in $\boldsymbol{x}$;

† per definizione di differenziabilità

- f non soddisfa la formula del gradiente in $\boldsymbol{x} \implies f$ non differenziabile in $\boldsymbol{x}$.

Osservazione. (3.25) Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}$, vale

$$D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle = |\nabla f(\boldsymbol{x})|\, |\boldsymbol{v}|\, \cos\beta = |\nabla f(\boldsymbol{x})|\, \cos\beta$$

$\implies D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x})$ è massima quando $\beta = 0$, cioè quando $\boldsymbol{v}$ ha direzione e verso di $\nabla f(\boldsymbol{x})$. Si dice quindi che $\nabla f(\boldsymbol{x})$ è la direzione di massima crescita di $f(\boldsymbol{x})$.

Inoltre $D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x})$ è minima quando $\beta = \pi$, cioè quando $\boldsymbol{v}$ ha la direzione di $\nabla f(\boldsymbol{x})$ e verso opposto.

$D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x})$ è nulla quando $\beta = \frac{\pi}{2}$, cioè quando $\boldsymbol{v}$ è perpendicolare a $\nabla f(\boldsymbol{x})$; si dice che $\nabla f(\boldsymbol{x})$ è perpendicolare alle curve di livello della funzione.

Osservazione. (3.26) Riscriviamo la condizione di differenziabilità, scrivendo $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}$.

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x_0}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x_0}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \rangle + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|) \qquad \text{per } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x_0} \tag{3.1}$$

La funzione di partenza è una funzione funzione affine (polinomio di primo grado) sommato ad un resto (di ordine > 1). Un polinomio di primo grado rappresenta un <u>iperpiano</u>: la funzione è approssimata, a meno di un resto di ordine > 1, da un iperpiano, che chiameremo <u>iperpiano tangente</u>.

Definizione. (3.27) *Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x_0}$, l'iperpiano*

$$z = f(\boldsymbol{x_0}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{x_0}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \rangle$$

si dice <u>iperpiano tangente</u> al grafico di f nel punto $\big(\boldsymbol{x_0}, f(\boldsymbol{x_0})\big)$

In particolare, in dimensione 2:

$$\boldsymbol{x_0} = (x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Il piano tangente è

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle \\ z &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

Esercizio. (3.28) Consideriamo la seguente funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha e^{-x^2/y^2} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

Studiare la differenziabilità di f in $(0,0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Soluzione (3.28).

1. Continuità:

   - $\alpha > 0 \implies 0 \leq |y|^\alpha \underbrace{e^{-x^2/y^2}}_{\leq 1} \leq |y|^\alpha \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

     $\implies f$ continua in $(0,0)$ se $\alpha > 0$

   - $\alpha \leq 0$:

     $$f\,|_{y=0} = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
     $$f\,|_{x=0,\,y\neq 0} = |y|^\alpha \xrightarrow[y\to 0]{} \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ +\infty & \alpha < 0 \end{cases}$$

     Analizzando due direzioni i limiti sono diversi, e pertanto, se $\alpha \leq 0$ non esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(\boldsymbol{x})$, e

     $\implies f$ non continua in $(0,0)$

     $\implies f$ non è differenziabile in $(0,0)$.

2. Derivabilità direzionale: $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ versore.

   - $\boldsymbol{v} = \pm\boldsymbol{e}_1 = (\pm 1, 0)$

     $$\lim_{t\to 0} \frac{f\big((0,0) + t\boldsymbol{v}\big) - f(0,0)}{t} = \cdots = 0$$

     $\implies D_{\pm\boldsymbol{e}_1} f(0,0) = 0$

- $\boldsymbol{v} \neq \pm \boldsymbol{e}_1$: i punti considerati sicuramente non sono lungo l'asse x

$$
\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \cdots = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(tv_1 - tv_2\right)}{t} &= \\
= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left|tv_2\right|^{\alpha} e^{-\cancel{t^2} v_1^2 / \cancel{t^2} v_2^2} &= \\
= e^{-v_1^2/v_2^2} \left|v_2\right|^{\alpha} \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha}}{t} &= \begin{cases} \nexists & \alpha \leq 1 \\ 0 & \alpha > 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\implies f \text{ è derivabile lungo } v \iff \alpha > 1, \text{ e in questo caso}
$$

$$
D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = 0 \quad \forall\, v
$$

Quindi se $\alpha \leq 1$ vale che f non è differenziabile.

3. Differenziabilità: solo per $\alpha > 1$

$$
f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}) = \left\langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \right\rangle + o(|\boldsymbol{h}|), \qquad \boldsymbol{h} \to 0
$$

Sappiamo che $\boldsymbol{x} = (0,0)$, e posto $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ si ha che

$$
\nabla f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(0,0) = \big(D_{\boldsymbol{e}_1} f(0,0), D_{\boldsymbol{e}_1} f(0,0)\big) = (0,0)
$$

Tornando alla formula della differenziabilità:

$$
f(h_1, h_1) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} = \underbrace{\langle (0,0), \boldsymbol{h} \rangle}_{=0} + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right), \qquad (h_1, h_2) \to (0,0)
$$

Dobbiamo calcolare

$$
\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \underset{\dagger}{=} \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|h_2|^{\alpha}\, e^{-h_1^2/h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}
$$

Consideriamo

$$
0 \leq \frac{|h_2|^{\alpha}\, \overbrace{e^{-h_1^2/h_2^2}}^{\leq 1}}{\underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\geq \sqrt{h_2^2} = |h_2|}} \leq \frac{|h_2|^{\alpha}}{|h_2|} = |h_2|^{\overbrace{\alpha - 1}^{>0}} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0
$$

† solo quando $h_2 \neq 0$, vedi dopo.

Tutto questo è vero quando $h_2 \neq 0$. Se $h_2 = 0$, la funzione $f(h_1, 0) = 0$, e pertanto è vero che il limite è nullo.

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

Questa è la definizione di differenziabilità,

$\implies$ f differenziabile in $(0,0)$ $\iff$ $\alpha > 1$

Teorema XXVIII.

Condizione sufficiente per la differenziabilità

Sia f,

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con A aperto, $\boldsymbol{x} \in A$. Supponiamo che $\exists\, U(\boldsymbol{x})$ intorno di $\boldsymbol{x}$ tale che tutte le derivate parziali di f esistano in $U(\boldsymbol{x})$ e siano continue in $\boldsymbol{x}$.

Allora f è differenziabile in $\boldsymbol{x}$.

Osservazione. (3.29) Questa condizione non è necessaria: infatti, per esempio, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

è derivabile ($\iff$ differenziabile) in 0, ma la derivata non è continua in 0.

Definizione. (3.30) $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A *aperto. Si indica*

$$C^0(A) = \{f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ continue in } A\}$$

$$C^1(A) = \left\{f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\; \begin{matrix} \textit{che ammettono tutte le deri-} \\ \textit{vate parziali continue in} \end{matrix} \;\; A\right\}$$

Osservazione. (3.31) $f \in C^1(A)$

$\implies$ f è differenziabile in ogni punto di A

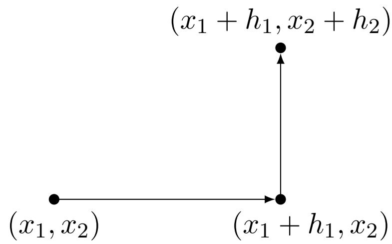


Figura 3.3: Spostamento infinitesimo

$\implies$ f continua in A

$\implies$ $C^1(A) \subseteq C^0(A)$.

Dimostrazione XXVIII. Si dimostra in dimensione 2 ($n = 2$).

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2), \qquad \boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$$

Consideriamo lo spostamento infinitesimo da (x_1, x_2) a $(x_1 + h_1, x_2 + h_2)$ come uno spostamento in due dimensioni, come mostrato nella figura 3.3.

$$\begin{aligned} &f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = \\ &= \big[f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2)\big] + \big[f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)\big] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Consideriamo in prima battuta

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2)$$

La variabile $x_1 + h_1$ è fissata, e pertanto possono considerarla quasi come una funzione ad una sola variabile. Posso applicare il teorema del valor medio (rispetto alla seconda variabile):

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) \cdot h_2 \tag{3.3}$$

con $\theta_2 \in (0, 1)$.

Sappiamo che $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ è continua in (x_1, x_2), quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1 + h_1, x_2 + \theta_2 h_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \varepsilon(h_1, h_2)$$

con $\varepsilon(h_1, h_2) \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0$.

Riprendendo (3.3)

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1 + h_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\, h_2 + h_2\, \varepsilon(h_1, h_2) \quad (3.4)$$

Ora

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) \underset{\dagger}{=} \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{h_1} =$$

quindi

$$\frac{f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \eta(h_1)$$

con $\eta(h_1) \xrightarrow[h_1\to 0]{} 0$. Quindi

$$f(x_1 + h_1, x_2) - f(x_1, x_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\, h_1 + h_1\, \eta(h_1) \qquad (3.5)$$

Adesso sostituiamo (3.4) e (3.5) in (3.2):

$$\begin{aligned} &f(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - f(x_1, x_2) = \\ &\qquad = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)\, h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)\, h_2}_{= \langle \nabla f(x_1, x_2), \boldsymbol{h} \rangle} + \big[h_1\, \eta(h_1) + h_2\, \varepsilon(h_1, h_2)\big] \end{aligned}$$

Quindi, per dimostrare che f sia differenziabile in $\boldsymbol{x}$, ci è necessario dimostrare che

$$h_1\, \eta(h_1) + h_2\, \varepsilon(h_1, h_2) = o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right), \qquad (h_1, h_2) \to (0, 0)$$

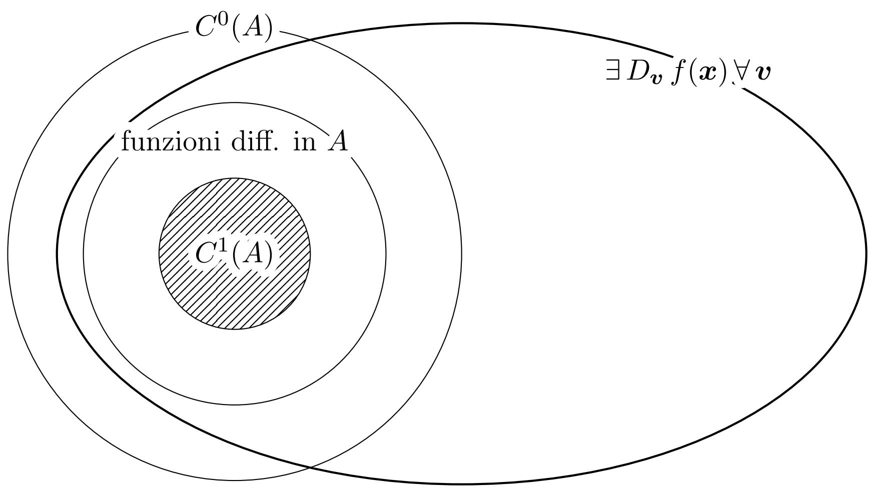
† per definizione

$$
\begin{aligned}
0 \le \left| \frac{h_1\,\eta(h_1) + h_2\,\varepsilon(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| &\le \\
\le \left| \frac{h_1\,\eta(h_1)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| + \left| \frac{h_2\,\varepsilon(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \right| &= \frac{|h_1|\,|\eta(h_1)|}{\underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\ge\sqrt{h_1^2}=|h_1|}} + \frac{|h_1|\,|\varepsilon(h_1,h_2)|}{\underbrace{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}_{\ge\sqrt{h_2^2}=|h_2|}} \le \\
&\le |\eta(h_1)| + |\varepsilon(h_1,h_2)| \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ f differenziabile in $\boldsymbol{x}$. ■

Osservazione. (3.32) Nel teorema XXVIII si può richiedere che tutte le derivate parziali esclusa una siano continue in $\boldsymbol{x}$.

Osservazione. (3.33)



3.2.1 Algebra delle funzioni differenziabili

Osservazione. (3.34) Se f è differenziabile

$\Longrightarrow$ $d\,f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{h} \mapsto \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle$

Si ha che se f e g sono differenziabili, con $(g \neq 0)$, vale

- $d\,(f+g)(\boldsymbol{x}) = d\,f(\boldsymbol{x}) + d\,g(\boldsymbol{x})$;

- $d\,(f \cdot g)(\boldsymbol{x}) = d\,f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x}) \cdot d\,g(\boldsymbol{x})$;
- $d\left(\dfrac{f}{g}\right)(\boldsymbol{x}) = \dfrac{d\,f(\boldsymbol{x}) \cdot g(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) \cdot d\,g(\boldsymbol{x})}{\big(g(\boldsymbol{x})\big)^2}$.

Notiamo che in tutto questo consideriamo $\boldsymbol{x}$ fissato, e i vari $d\,f(\boldsymbol{x})$ come funzioni in $\boldsymbol{h}$.

3.3 Derivate di ordine superiore

Consideriamo

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

con A aperto.

Supponiamo che data $\boldsymbol{x} \in A$ e $\boldsymbol{v}$ versore, $\exists\, D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x})$.

Dato $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ ci si può chiedere se esiste

$$D_{\boldsymbol{w}}\,(D_{\boldsymbol{v}})\; f(\boldsymbol{x})$$

che spesso si indica con $D^2_{\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}}\, f(x)$: derivo rispetto a $\boldsymbol{v}$ e poi rispetto a $\boldsymbol{w}$.

In particolare se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{e}_k$

$$D^2_{\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_j}\, f(\boldsymbol{x})$$

questa scrittura prende il nome di derivata parziale seconda, che ha diverse notazioni:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_j}(\boldsymbol{x}); \qquad \partial^2_{x_k x_j}\,(\boldsymbol{x}); \qquad \cdots$$

Nel caso in cui $k = j$, si utilizza

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

e prendono il nome di derivate parziali seconde pure. In caso contrario si chiamano derivate parziali seconde miste.

Esempio. (3.35) Consideriamo $f(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$.

$$f(\boldsymbol{x}) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Sappiamo che

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{2\, x_j}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}}$$

Volendo calcolare ora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_j}{|\boldsymbol{x}|}\right) =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial}{\partial x_k}(x_j) \cdot |\boldsymbol{x}| - x_j \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_k}(|\boldsymbol{x}|)}{|\boldsymbol{x}|^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{|\boldsymbol{x}| - x_j \cdot \dfrac{x_j}{|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|^2} = \dfrac{|\boldsymbol{x}|^2 - x_j^2}{|\boldsymbol{x}|^3} & k = j \\[2ex] \dfrac{-x_j \cdot \dfrac{x_k}{|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|^2} = -\dfrac{x_j x_k}{|\boldsymbol{x}|^3} & k \neq j \end{cases}$$

Osservazione. (3.36) Notiamo che

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\big(|\boldsymbol{x}|\big) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\big(|\boldsymbol{x}|\big)$$

Questa proprietà però non è vera sempre, come si può vedere dal prossimo esempio.

Esempio. (3.37) Consideriamo

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)(0,0)$$

Calcoliamo $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x\cancel{h}\cdot\dfrac{x^2-h^2}{x^2+h^2}-0}{\cancel{h}}=x$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,0)=1$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=1.$$

Guardiamo ora l'altro caso

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)(0,0)$$

Calcoliamo ora $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}y\cdot\dfrac{h^2-y^2}{h^2+y^2}-0}{\cancel{h}}=-y$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,y)=-1$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=-1.$$

$$\implies \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$$

Teorema XXIX.

Teorema di Schwarz

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto e $\boldsymbol{x} \in A$. Supponiamo che $\exists U(\boldsymbol{x})$ intorno di $\boldsymbol{x}$ tale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$$

esistano in $U(\boldsymbol{x})$ e siano continue in $\boldsymbol{x}$.

Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\boldsymbol{x})$$

Il teorema si estende a derivate direzionali:

$$D^2_{\boldsymbol{vw}} f(\boldsymbol{x}), \quad D^2_{\boldsymbol{wv}} f(\boldsymbol{x})$$

Allo stesso modo, si possono fare derivate di ordine successivo:

$$D^3_{\boldsymbol{uvw}} f(\boldsymbol{x}) = \Big(D_{\boldsymbol{u}} \big(D_{\boldsymbol{v}} \left(D_{\boldsymbol{w}} f\right)\big)\Big) (\boldsymbol{x})$$

3.4 Differenziali di ordine successivo

Il differenziale è, dato $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ fissato:

$$d\, f(\boldsymbol{x}) : h \mapsto \langle \nabla f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle$$

Sappiamo quindi che

$$d\, f(\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{h}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \cdot h_j \tag{3.6}$$

Osservazione. (3.38) Se $g(\boldsymbol{x}) = x_j$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$d\, g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h} \mapsto \langle \nabla g(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{h} \rangle = \langle (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0), \boldsymbol{h} \rangle = h_j$$

Quindi

$$d\, g(\boldsymbol{x}) = d\, x_j : \boldsymbol{h} \mapsto h_j$$

Allora sappiamo che (3.6) si può scrivere come uguaglianza tra funzioni:

$$d\,f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\, d\,x_j$$

Notazione. (3.39) Si scrive

$$d\,f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n\right) f(\boldsymbol{x})$$

Definizione. (3.40) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in A. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ è differenziabile in $\boldsymbol{x} \in A$ per ogni $j = 1, \cdots, n$, allora diciamo che f è <u>due volte differenziabile</u> in $\boldsymbol{x}$, e chiamiamo <u>differenziale secondo</u> di f in $\boldsymbol{x}$ la forma quadratica definita in questo modo:*

$$d^2 f(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{h} \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) \cdot h_i h_j$$

Con la stessa notazione di prima scriviamo

$$d^2 f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) dx_i\, dx_j$$

Osservazione. (3.41) Possiamo scrivere

$$d^2 f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n\right)^2 f(\boldsymbol{x})$$

nel senso che

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\, dx_i\, \frac{\partial}{\partial x_j}\, dx_j\right) f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) dx_i\, dx_j\right) f$$

Notizia Vale una generalizzazione del teorema di Schwarz: se f è differenziabile due volte in $\boldsymbol{x} \in A$, allora $\forall\, i, j = 1, \cdots, n$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

Definizione. (3.42) *Se f ammette tutte le derivate parziali di ordine $k-1$ in un intorno di $\boldsymbol{x}$, e tutte queste derivate sono differenziabili in $\boldsymbol{x}$, diciamo che f è differenziabile k volte in $\boldsymbol{x}$, e chiamiamo differenziale k-esimo di f in $\boldsymbol{x}$ la funzione*

$$d^k f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}}(\boldsymbol{x})\, dx_{i_1}\cdots dx_{i_k}$$

o come

$$d^k f(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n\right)^k f(\boldsymbol{x})$$

Osservazione. (3.43) $d^2 f$ è una forma quadratica, la cui matrice associata è la seguente

$$Hf(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1x_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_1x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_nx_2}(\boldsymbol{x}) & \cdots & f_{x_nx_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Hf si chiama matrice Hessiana di f in $\boldsymbol{x}$

Osservazione. (3.44)

$$d^2 f(\boldsymbol{x}) = \langle Hf(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{x}\rangle$$

dove

$$d\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Notizia Se f è differenziabile due volte in $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ sono versori, si ha

$$D^2_{\boldsymbol{vw}} f(\boldsymbol{x}) = \langle Hf(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}\rangle$$

3.4.1 Classi di funzione derivabili

Consideriamo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, k naturale:

$$C^k(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} : f \quad \begin{array}{l} \text{ammette derivate fino all'ordine} \\ k \text{ continue in } A \end{array} \right\}$$

Un caso specifico è

$$C^\infty(A) = \left\{ f : A \to \mathbb{R} : f \quad \begin{array}{l} \text{ammette derivate di ogni ordine} \\ \text{continue in } A \end{array} \right\}$$

3.5 Formula di Taylor

In dimensione uno, la formula di Taylor è

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + \frac{1}{2!} f''(x) h^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^k + o(h^k), \quad h \to 0 \end{aligned}$$

Con un piccolo abuso di notazione al posto di h scriviamo dx (con $x \in \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} f(x+dx) = f(x) + f'(x)\,dx + \frac{1}{2!}\, f''(x)(dx)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x)(dx)^k + o\Big((dx)^k\Big), \quad dx \to 0 \end{aligned}$$

Notiamo che $f'(x)\,dx = d\,f(x)$, e così via: riscriviamo quindi la formula come

$$\begin{aligned} f(x+dx) = f(x) + d\,f(x) + \frac{1}{2!}\, d^2\,f(x) + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{k!}\, d^k\,f(x) + o\Big((dx)^k\Big), \quad dx \to 0 \end{aligned}$$

Teorema XXX.

Formula di Taylor in dimensione n, con resto di Peano

Sia
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

A aperto, $\boldsymbol{x} \in A$, f differenziabile k volte in $\boldsymbol{x}$.

Allora

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + d\, f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}\, d^2\, f(\boldsymbol{x}) + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{k!}\, d^k\, f(\boldsymbol{x}) + o\left(|d\boldsymbol{x}|^k\right), \quad d\boldsymbol{x} \to 0 \end{aligned}$$

Teorema XXXI.

Formula di Taylor, con resto di Lagrange

Sia
$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

A aperto, $\boldsymbol{x} \in A$, e supponiamo che il segmento chiuso $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}]$ sia tutto contenuto in A, f differenziabile $k-1$ volte nei punti del segmento chiuso e k volte nei punti del segmento aperto.

Allora esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + d\, f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2!}\, d^2\, f(\boldsymbol{x}) + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\, d^{k-1}\, f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{k!}\, d^k f(\boldsymbol{x} + \theta\, d\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Corollario. (3.45) Se $f \in C^1(A)$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ sono tali che il segmento $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ è tutto contenuto in A, allora $\exists\, \theta \in (0, 1)$ tale che

$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \big(\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\big)\ (y_j - x_j)$$

Notiamo che la scrittura precedente nn è altro che una scrittura diversa della formula di Taylor con resto di Lagrange, fermandosi a scrivere solo $f(\boldsymbol{x})$ e il resto: infatti, se vediamo $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ ($\iff d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$), tutto il resto viene di conseguenza, in quanto

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \big(\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\big) \, (y_j - x_j) = \langle \nabla f \big(\boldsymbol{x} + \theta(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\big) , \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle$$

3.6 Derivazione delle funzioni composte

Proprietà. (3.46) Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to R$ differenziabile in $\boldsymbol{x}_0 \in A$; siano, per $j = 1, \cdots, n$

$$\begin{aligned} g_j : (a, b) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto g_j(t) \end{aligned}$$

differenziabili in (a, b) e tali che $\exists\, t_0 \in (a, b)$ tale che

$$g(t_0) \coloneqq \big(g_1(t_0), \cdots, g_n(t_0)\big) = \boldsymbol{x}_0$$

Allora la funzione composta

$$F(t) = f\big(g_1(t), \cdots, g_n(t)\big) \qquad (F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

è differenziabile in t_0, e vale

$$F'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdot g_1'(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}_0) \cdot g_n'(t_0)$$

3.7 Insiemi connessi in $\mathbb{R}^n$

Definizione. (3.47) *Dati $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, chiamiamo <u>segmento</u> (chiuso) congiungente $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ l'insieme*

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = \{\lambda\, \boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{y},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda, \mu \geq 0,\ \lambda + \mu = 1\}$$

Chiamiamo <u>spezzata poligonale</u> congiungente $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ l'unione di un numero finito di segmenti del tipo

$$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1],\ [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2],\ \cdots,\ [\boldsymbol{x}_{n-1}, \boldsymbol{y}]$$

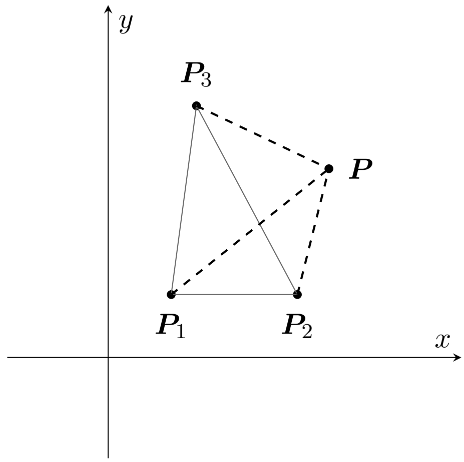


Figura 3.4: Esempio (3.50)

Definizione. **(3.48)** *Diciamo che $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso per segmenti se $\forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$, $\exists$ una spezzata poligonale che congiunge $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ tutta contenuta in A.*

Proprietà. **(3.49)** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con A aperto connesso per segmenti, f differenziabile in A.

Allora $d\,f(\boldsymbol{x}) = 0 \;\forall\, \boldsymbol{x} \in A \iff f$ costante in A.

L'implicazione " $\Longleftarrow$ " è banale; per quanto riguarda l'altra implicazione: per qualsiasi coppia di punti esiste un percorso formato da segmenti rettilinei, ciascuno identificato da una direzione ben precisa: poiché $d\,f(\boldsymbol{x}) = 0$, allora ciascuna derivata direzionale è nulla, e pertanto il valore della funzione in ciascun estremo dei segmenti è lo stesso; per l'arbitrarietà della coppia dei punti, deve valere che f costante in A. ■

3.8 Ottimizzazione

Esempio. **(3.50)** Dati $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$ punti del piano, che formano un triangolo acutangolo.

Dato $\boldsymbol{P}$, vogliamo collegare $\boldsymbol{P}$ agli altri punti con un filo, e ci chiediamo qual è la posizione di $\boldsymbol{P}$ che ci fa usare la minore quantità di filo.

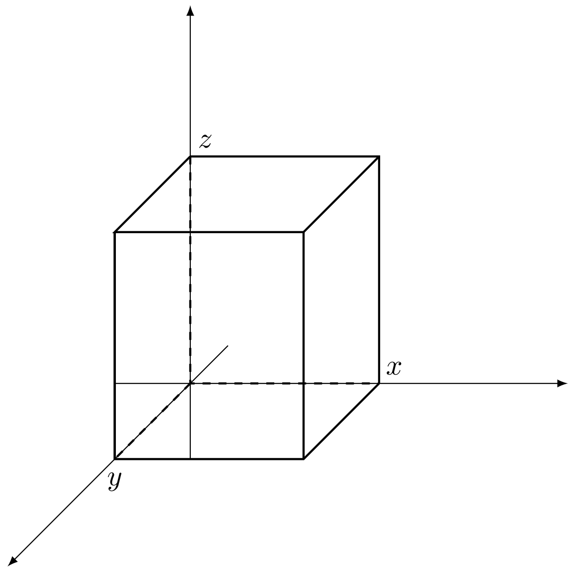


Figura 3.5: Esempio (3.51)

Considerato $\boldsymbol{P}_j = (x_j, y_j)$, e $\boldsymbol{P} = (x, y)$, la quantità totale di filo sarà

$$\sum_{j=1}^{3} \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2} =: f(x, y)$$

Dobbiamo trovare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y)$ è minima.

Questo è un problema di <u>ottimizzazione libera</u> (ovvero senza vincoli)

Esempio. (3.51) Tra tutti i parallelepipedi con superficie totale $2A$ vogliamo trovare quello di volume massimo.

Possiamo mettere il parallelepipedo nel primo ottante (così da avere le coordinate dei vertici tutte positive)

Il volume sarà $V = xyz$, e la superficie laterale:

$$S = 2xy + 2yz + 2xz$$

Il problema è trovare il punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tale che

$$f(x, y, z) = xyz$$

sia minima, sotto le condizioni

$$x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$
$$xy + yz + xz = A$$

La prima condizione è una sorta di "dominio" della funzione, in quanto ho definito il parallelepipedo (non degenere) nel primo ottante, mentre la seconda condizioone sono i vincoli imposti dal problema.

Questo è un problema di <u>ottimizzazione vincolata</u>.

Definizione. (3.52) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice <u>di massimo locale</u> se $\exists\, B_r(\boldsymbol{x}_0)$ intorno di $\boldsymbol{x}_0$ tale che*

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap X$$

Definizione. (3.53) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice <u>di minimo locale</u> se $\exists\, B_r(\boldsymbol{x}_0)$ intorno di $\boldsymbol{x}_0$ tale che*

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap X$$

Definizione. (3.54) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice <u>di massimo globale</u> se*

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in X$$

Definizione. (3.55) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice <u>di minimo globale</u> e*

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in X$$

Definizione. (3.56) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice <u>di massimo locale forte</u> se $\exists\, B_r(\boldsymbol{x}_0)$ intorno di $\boldsymbol{x}_0$ tale che*

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap X \land \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$$

Definizione. (3.57) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice di minimo locale forte se $\exists\, B_r(\boldsymbol{x}_0)$ intorno di $\boldsymbol{x}_0$ tale che*

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{x}_0) \cap X \wedge \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}_0$$

Definizione. (3.58) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice di massimo globale forte se*

$$f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$$

Definizione. (3.59) *Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Un punto $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si dice di minimo globale forte e*

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0) \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$$

Nel caso in cui l'insieme X è aperto, parliamo di massimi e minimi liberi.

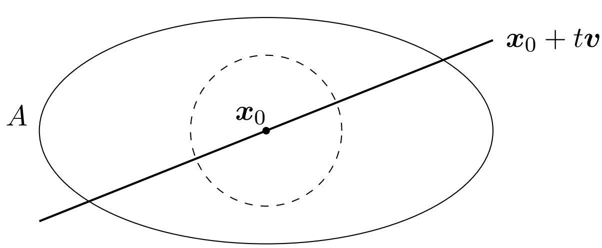
Teorema XXXII.

Teorema di Fermat

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto; sia $\boldsymbol{x}_0 \in A$ punto di estremo locale per f.

Se $\exists\, D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}_0)$ allora $D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}_0) = 0$

Dimostrazione XXXII.



Consideriamo la funzione

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{v})$$

Sappiamo che $t = 0$ è un punto di estremo locale per φ.

$\Longrightarrow$ Per il Teorema di Fermat in dimensione uno si ha che se $\varphi'(0)$ esiste

$\Longrightarrow$ $\varphi'(0) = 0$. Sappiamo che

$$\varphi'(0) = D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}_0)$$

$\Longrightarrow$ $D_{\boldsymbol{v}}\, f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ ■

Corollario. (3.60) Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}_0$ punto di estremo locale allora

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) = 0 \quad \forall\, j = 1, \cdots, n$$

cioè

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \underline{0}$$

Definizione. (3.61) *Data $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A aperto, f differenziabile in A, i punti tali che $\nabla f = \underline{0}$ si chiamano punti critici o stazionari.*

Esempio. (3.62) Sia $f(x, y) = x^2 - y^2$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$, f differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Calcolandone i punti critici: $\nabla f = (2x, -2y)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto critico, quindi, è $\boldsymbol{P}(0, 0)$. Inoltre $f(\boldsymbol{P}) = 0$

Notiamo che

$$f\,|_{x=0} = f(0, y) = -y^2$$
$$f\,|_{y=0} = f(x, 0) = x^2$$

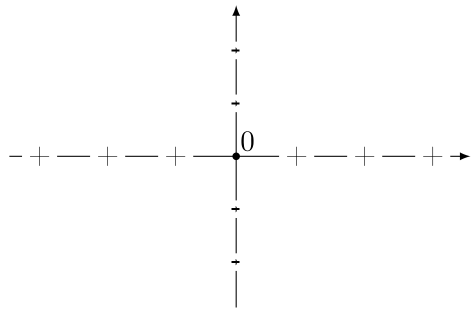


Figura 3.6: Segno di $f(x, y) = x^2 - y^2$

Risulta quindi chiaro, come espresso nella figura 3.6, che questo punto non può essere né di massimo né di minimo, in quanto per ogni intorno dell'origine ci saranno punti in cui f è più grande di $f(0, 0)$ e punti in cui f è più piccola di $f(0, 0)$.

Definizione. (3.63) *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenziabile in A e $\boldsymbol{x}_0 \in A$ punto critico per f; se $\boldsymbol{x}_0$ non è di massimo o minimo, si dice punto di sella o colle.*

Esempio. (3.64) Sia $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$.

$\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2$, f differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Calcolandone i punti critici $\nabla f = (-6xy + 8x^3, 2y - 2x^2)$

$$\implies \begin{cases} -6xy + 8x^3 = 0 \\ 2y - 2x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Notiamo che $f(0, 0) = 0$.

Vale che

$$\begin{aligned} f|_{x=0} &= f(0, y) = y^2 \\ f|_{y=0} &= f(x, 0) = 2x^4 \end{aligned}$$

Lungo queste due direzioni, l'origine è "di minimo". Posso allora calcolare

$$f|_{y=mx} = m^2x^2 - 3mx^3 + 2x^4 =: \varphi(x)$$

Consideriamo ora $\varphi'(x)$

$$\varphi'(x) = 2m^2x - 9mx^2 + 8x^3 \implies \varphi'(0) = 0$$
$$\varphi''(x) = 2m^2 - 18mx + 24x^2 \implies \varphi''(0) = 2m^2 > 0$$

$\implies$ 0 è di minimo per φ.

Possiamo ora fare questa restrizione

$$f|_{y=\frac{3}{2}x^2} = \frac{9}{4}x^4 - 3x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2 + 2x^4 = -\frac{1}{4}x^4$$

Avvicinandomi all'origine in questa direzione, mi sembra di avere un massimo.

Pertanto l'origine è un punto di sella.

Osservazione. (3.65) Nel precedente esempio la funzione

$$f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = (y - x^2)(y - 2x^2))$$

Pertanto, dato $f(0, 0) = 0$, sappiamo che $f(x, y) \geq 0 \iff$

$$\begin{cases} y - x^2 \geq 0 \\ y - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y - x^2 \leq 0 \\ y - 2x^2 \leq 0 \end{cases}$$

Questa condizione è equivalente a

$$y \leq 2x^2 \quad \vee \quad y \geq x^2$$

Si può vedere nella figura 3.7 lo studio del segno della funzione.

3.8.1 Studio della natura dei punti critici

In dimensione uno

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2), \quad h \to 0$$

Se x_0 è critico

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^2}{2}\left(f''(x_0) + \frac{o(h^2)}{h^2}\right), \quad h \to 0$$

Quindi se $f''(x_0) \neq 0$, il suo segno determina il segno di $f(x_0 + h) - f(x_0)$ per h sufficientemente piccolo. Quindi

$$f''(x_0) > 0 \implies x_0 \text{ minimo relativo}$$
$$f''(x_0) < 0 \implies x_0 \text{ massimo relativo}$$

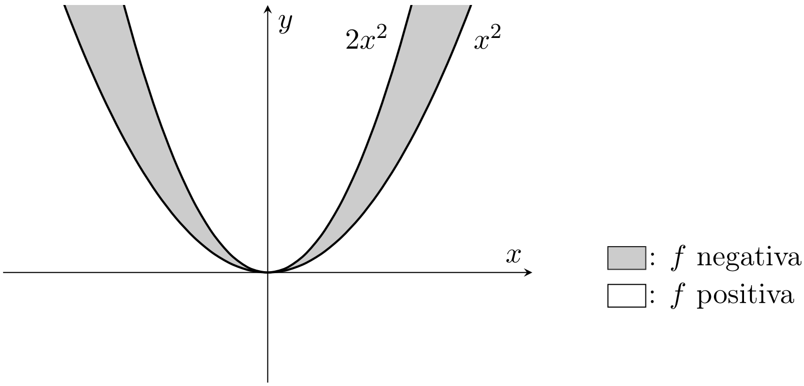


Figura 3.7: Studio del segno di $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$

In dimensione generica Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in A$. Consideriamo $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Vale

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = d\,f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{1}{2} \cdot d^2\,f(\boldsymbol{x}_0) + o(|\boldsymbol{h}|^2), \quad \boldsymbol{h} \to 0$$

Se $\boldsymbol{x}_0$ è un punto critico, si ha che $d\,f(\boldsymbol{x}_0) = 0 \implies$

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2} \cdot d^2\,f(\boldsymbol{x}_0) + o(|\boldsymbol{h}|^2), \quad \boldsymbol{h} \to 0$$

Intuitivamente l'incremento è dettato dal segno di $d^2\,f(\boldsymbol{x}_0)$.

Sappiamo che $d^2\,f(\boldsymbol{x}_0)$ è una forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0) h_i\,h_j$$

che ha come matrice associata

$$H f(\boldsymbol{x}_0)$$

Forme quadratiche

A matrice $n \times n$ simmetrica, $A = (a_{ij})$, e

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{h} &\mapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j \end{aligned}$$

si ha che

- q è <u>definita positiva</u> se $q(\boldsymbol{h}) > 0 \;\forall\, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{h} \neq \underline{0}$
- q è <u>definita negativa</u> se $q(\boldsymbol{h}) < 0 \;\forall\, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{h} \neq \underline{0}$
- q è <u>semidefinita positiva</u> se $q(\boldsymbol{h}) \geq 0 \;\forall\, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ ed $\exists\, \boldsymbol{h}_0$ tale che $q(\boldsymbol{h}_0) = 0$
- q è <u>semidefinita negativa</u> se $q(\boldsymbol{h}) \leq 0 \;\forall\, \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$ ed $\exists\, \boldsymbol{h}_0$ tale che $q(\boldsymbol{h}_0) = 0$
- q è <u>indefinita</u> se $\exists\, \boldsymbol{h_1}, \boldsymbol{h_2} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$q(\boldsymbol{h}_1) > 0 \quad \wedge \quad q(\boldsymbol{h}_2) < 0$$

Teorema XXXIII.

Condizioni sufficienti per estremi liberi

Sia
$f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\boldsymbol{x}_0 \in A$ punto critico per f.

(i) Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è definita positiva

$\implies$ $\boldsymbol{x}_0$ è di minimo locale forte;

(ii) Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è definita negativa

$\implies$ $\boldsymbol{x}_0$ è di massimo locale forte;

(iii) Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è indefinita

$\implies$ $\boldsymbol{x}_0$ è di sella.

Osservazione. (3.66) Non ci sono informazioni nel caso in cui $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è semidefinita.

Proposizione. (3.67) Sia $f \in C^2(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

(i) Se $\boldsymbol{x}_0 \in A$ è di minimo locale,

$\implies$ $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è definita positiva o semidefinita positiva;

(ii) se $\boldsymbol{x}_0 \in A$ è di massimo locale,

$\implies$ $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è definita negativa o semidefinita negativa.

Matrici

Test dei minori per matrici 2×2 Sia

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

matrice simmetrica e non singolare (i.e. $\det H \neq 0$). Allora:

(i) H è definita positiva $\iff$ $a > 0$ e $\det H > 0$;

(ii) H è definita negativa $\iff$ $a < 0$ e $\det H > 0$;

(iii) H è indefinita $\iff$ $\det H < 0$.

Criterio di Sylvester Sia

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matrice simmetrica non singolare. Definisco

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_{11}) \\ A_2 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\ A_3 &= H \end{aligned}$$

Allora:

(i) H è definita positiva $\iff$ $\det A_k > 0 \; \forall\, k = 1, 2, 3$;

(ii) H è definita negativa $\iff$ $(-1)^k \det A_k > 0 \; \forall\, k = 1, 2, 3$;

(iii) H è indefinita $\Longleftarrow$ non valgono (i) e (ii).