

Geometria 2

Davide Peccioli

Anno accademico 2022-2023

Università degli studi di Torino

Indice

I	Topologia generale	1
1	Spazi topologici	3
1.1	Definizione di Topologia	3
1.2	Spazi Metrici	5
1.3	Esempi di topologie su X	10
1.4	Alcune definizioni	11
1.5	Basi di uno spazio topologico	12
1.5.1	Topologia a partire da una base	14
1.6	Intorni e chiusura in uno spazio topologico	16
1.7	Funzioni continue	18
1.8	Spazi topologici a meno di omeomorfismo	21
2	Operazioni con spazi topologici	25
2.1	Sottospazio	25
2.1.1	Immersioni	28
2.2	Prodotti	29
3	Proprietà degli spazi topologici	35
3.1	Spazi topologici di Hausdorff	35
3.2	Connessione	40
3.3	Compattezza	53
4	Gruppi topologici	65
5	Topologia Quoziente	75
6	Azioni di Gruppo	83
6.1	Azioni di Gruppo su un insieme qualsiasi	83

6.2	Azioni di Gruppo su spazi topologici	87
6.2.1	Spazio Proiettivo Reale	91
7	Proprietà di numerabilità	93
8	Successioni	99
8.1	Compattezza e successioni	105
8.2	Spazi metrici completi	110
II	Omotopia e gruppo fondamentale	113
9	Alcuni richiami	115
9.1	Componenti connesse	115
9.2	Cammini	116
9.3	Componenti connesse per archi	118
10	Omotopia tra funzioni continue	121
10.1	Equivalenza omotopica	125
10.1.1	Spazi contraibili e stellati	126
10.2	Retratti e retratti di deformazione	128
11	Gruppo Fondamentale	133
11.1	Omotopia di cammini	133
11.2	Gruppo Fondamentale	137
11.3	Teorema di Van Kampen	147
11.4	Gruppo fondamentale di S^1	151
11.5	Gruppo fondamentale del prodotto	165
11.6	Esempi di Gruppi Fondamentali	166
11.6.1	Spazi proiettivi reali	168
III	Classificazione delle superfici topologiche	171
12	Varietà topologiche	173
12.1	Varietà topologiche di dimensione $n = 1$	174
13	Varietà topologiche di dimensione $n = 2$	175
13.1	Somma connessa di superfici compatte	180
13.2	Rappresentazione della somma connessa tramite modelli piani	183

13.3	Enunciato del teorema di classificazione delle superfici compatte	188
13.4	Dimostrazione del teorema di classificazione, prima parte . .	188
13.5	Dimostrazione del teorema di classificazione, seconda parte .	196
13.5.1	Orientabilità	196
13.5.2	Caratteristica di Eulero	197
IV	Geometria Proiettiva	203
14	Geometria Proiettiva	205
14.1	Sottospazi vettoriali	207
14.2	Sistema di riferimento proiettivo	208
14.2.1	Descrizione dei sottospazi proiettivi in coordinate . . .	210
14.3	Operazioni sui sottospazi	211
14.4	Lineare indipendenza	214
14.5	Rappresentazione parametrica di un sottospazio proiettivo . .	215
14.6	Coordinate proiettive e punti in posizione generale	216
14.7	Trasformazioni proiettive	219
14.8	Geometria affine e geometria proiettiva	228
14.8.1	Chiusura proiettiva di un sottospazio affine	231
14.9	Spazi proiettivi complessi	234
14.10	Birapporto	238
15	Coniche in \mathbb{P}^2 (e in \mathbb{K}^2)	247
15.1	Coniche Proiettive	249
15.2	Coniche Affini	252
15.3	Polinomi omogenei in due variabili	253
15.4	Fasce di coniche proiettive	255
15.4.1	Punti base e fasce di coniche in \mathbb{P}^5	257
15.5	Intersezione tra una retta e una curva in \mathbb{P}^2	259
15.6	Intersezione tra una retta e una curva in \mathbb{K}^2	265
15.7	Punti singolari in \mathbb{P}^2	268
15.8	Altre proprietà dei fasci di coniche proiettive	272
V	Appendici	275
	Categorie e Funtori	277
	Numero di Lebesgue	283

Esercitazioni	287
C.1 Esercitazione 4	287
C.2 Esercitazione 5	288
C.3 Esercitazione 7	289

Parte I

Topologia generale

Capitolo 1

Spazi topologici

1.1 Definizione di Topologia

(1.1) La topologia è la “scienza dei nomi”, anche se storicamente il nome latino è “analysis situs”.

La topologia si occupa di studiare la continuità. L’idea fondamentale è che la funzione continua non “strappa” lo spazio: punti che erano “aderenti” a qualcosa restano aderenti.

Definizione. (1.2) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. x è di accumulazione per A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \{A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} \setminus x \neq \emptyset$$

Definizione. (1.3) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. x è aderente ad A se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \neq \emptyset$$

(1.4) Le definizioni più corrette sono quelle che utilizzano gli interni.

(1.5) I punti isolati sono aderenti ma non di accumulazione. La chiusura di un insieme è l'insieme dei suoi punti aderenti.

In generale si può dire che, per $A \subseteq \mathbb{R}$:

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\} \subseteq A : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

La proprietà fondamentale delle funzioni continue è che commutino con l'operazione di limite.

Teorema I.

Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_n \rightarrow x$, vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$$

$$\begin{aligned} \{x_n\} \subseteq A &\implies x \in \overline{A} \\ \{f(x_n)\} \subseteq f(A) &\implies f(x) \in \overline{f(A)} \end{aligned}$$

Si ha quindi che, se f continua $\implies f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Quindi punti aderenti di A finiscono in punti aderenti di $f(A)$

Nel caso di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} , questa condizione è equivalente al limite della funzione uguale alla funzione del limite.

Esercizio. (1.6) Dimostrare che

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}, \quad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \implies f \text{ continua}$$

Ci sono tre modi assolutamente equivalenti di descrivere una topologia:

1. tramite il linguaggio degli intorni: quali sono i punti vicini a x ?
2. tramite l'operatore di chiusura: quali sono i punti aderenti ad A ?
3. tramite il linguaggio degli aperti: quali insiemi “avvolgono” i loro punti?

Oggigiorno si preferisce prendere il concetto di insieme aperto come primitivo, e definire il concetto di intorno e di chiusura in relazione agli aperti, in quanto definizioni e assiomi sono più semplici, nonostante non sia la strada più intuitiva.

Definizione. (1.7) *Sia X un insieme. Una topologia \mathcal{T} su X è una famiglia di sottoinsiemi di X , cioè $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ tali che*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;
2. $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \implies A = \bigcup_{i \in I} A_i, A \in \mathcal{T}$;
3. $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}, I \text{ finito} \implies B = \bigcap_{i \in I} B_i, B \in \mathcal{T}$

Notiamo come il primo assioma potrebbe essere omesso, in quanto considerando l'insieme $I = \emptyset$, allora $A = \emptyset$ e $B = X$.

Un generico $A \in \mathcal{T}$ si dice insieme aperto.

Osservazione. (1.8)

$$\bigcap_{n \geq 1} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = (0, 1]$$

1.2 Spazi Metrici

Esempio. (1.9) Consideriamo \mathbb{R}^n come insieme di partenza. La topologia standard di \mathbb{R}^n (o topologia euclidea) è \mathcal{E} :

$$A \in \mathcal{E} \iff \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A$$

Verifichiamo ora che i tre assiomi siano verificati.

1. Banalmente dimostrato.
2. Verifico che $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \implies A = \bigcup_{i \in I} A_i, A \in \mathcal{T}$.

Sia $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$

$$\implies \exists i_0 : x \in A_{i_0}$$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon \subseteq A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$$

3. Verifico che per I finito: $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} \implies A = \bigcap_{i \in I} A_i, A \in \mathcal{T}$.

Sia $x \in A$

$$\implies \forall i \in I, \exists \varepsilon_i > 0 \text{ tale che } B_{\varepsilon_i}(x) \subseteq A_i.$$

Dunque se considero $\varepsilon = \min(\varepsilon_i) > 0$

$$\implies B_\varepsilon \subseteq A.$$

Notiamo che è fondamentale che l'insieme I sia finito per garantire l'esistenza di un minimo positivo: se l'insieme fosse infinito, si potrebbe dover utilizzare l'estremo inferiore dei valori di ε_i , che non necessariamente è strettamente positivo.

Definizione. (1.10) Dato X insieme, una distanza su X è una funzione $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$1. \forall x, y \in X, d(x, y) > 0, d(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$2. \forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x);$$

$$3. \forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Un insieme è uno spazio metrico se è definita una distanza: (X, d) spazio metrico.

Esempio. (1.11) Dato (X, d) spazio metrico, la topologia \mathcal{T} indotta dalla metrica è

$$A \in \mathcal{T} \iff \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq A$$

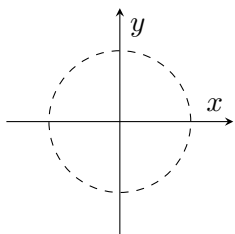
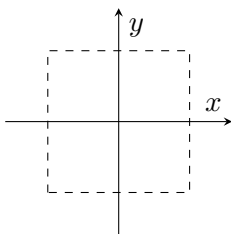
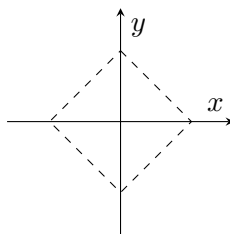
con

$$B_\varepsilon(x) := \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$$

Notiamo che se un insieme possiede più di una metrica (diverse tra di loro), le diverse topologie indotte non necessariamente sono distinte.

Esempio. (1.12) Su \mathbb{R}^n , con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, sono distanze:

$$\bullet d_\infty(x, y) = \max_i \{|x_i - y_i|\};$$

Figura 1.1: d_2 su \mathbb{R}^2 Figura 1.2: d_∞ su \mathbb{R}^2 Figura 1.3: d_1 su \mathbb{R}^2

- $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$
- $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, p \in \mathbb{R}$

Esercizio. (1.13) Dimostrare che $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y)$$

Notiamo che sulle distanze d_2 e d_∞ di \mathbb{R}^n , le topologie indotte dalla metrica sono identiche: è sufficiente variare gli ε affinché

$$B_{\varepsilon', 2}(0) \subseteq B_{\varepsilon, \infty}(0)$$

Nelle figure 1.1, 1.2 e 1.3 sono illustrate le palle centrate nell'origine con alcune delle diverse distanze definite su \mathbb{R}^2 .

Proposizione. (1.14) Su \mathbb{R}^n tutte le distanze d_p danno la stessa topologia.

Notiamo che, dato $I_n = \{1, \dots, n\}$, posso vedere

$$\mathbb{R}^n = \{f : I_n \rightarrow \mathbb{R}\}$$

È normale quindi chiedersi quali possano essere le distanze, per un insieme

$$X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}\}$$

- $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]} \{|f(x) - g(x)|\};$

$$\bullet \quad d_p(f, g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Per questo insieme ciascuna distanza induce una topologia differente.

Definizione. (1.15) Dato uno spazio metrico (X, d) , si definisce palla aperta l'insieme

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

Definizione. (1.16) Dato uno spazio metrico (X, d) , si definisce palla chiusa l'insieme

$$D_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$$

È ovvio che $B_\varepsilon(x) \subseteq D_\varepsilon(x)$. Notiamo che ci sono dei casi in cui palle aperte e palle chiuse.

- Nel caso in cui si definisca

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

si ha che $B_{1/2}(x) = D_{1/2}(x) = \{x\}$

- Consideriamo ora un insieme $X = (0, 4)$, con la distanza euclidea. Si ottiene che, ad esempio

$$B_7(1) = D_7(1) = (0, 4)$$

Su X c'è una topologia \mathcal{T} indotta: gli insiemi di \mathcal{T} si dicono aperti della topologia.

Diciamo che A è aperto $\iff \forall x \in A \quad \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

Notiamo che sullo spazio metrico (X, d) , con X qualunque e

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

si ha che la topologia indotta $\mathcal{T} = P(X)$, cioè tutti i sottoinsiemi sono aperti. Infatti, dato $A = \{x\}$

$$\implies B_{1/2}(x) = \{x\} \subseteq A$$

dunque $\{x\}$ è aperto, e ogni altro insieme (unione di punti di X) è aperto.

Definizione. (1.17) Si definisce topologia discreta su un insieme X una topologia \mathcal{T} in cui

$$\mathcal{T} = P(X)$$

Esempio. (1.18) Dato X , definisco una topologia $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Noto che è la topologia più semplice possibile, e che è topologia in quanto rispetta banalmente tutti gli assiomi.

Definizione. (1.19) Si definisce topologia banale su un insieme X una topologia \mathcal{T} in cui

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$$

Definizione. (1.20) Dato X spazio topologico, $C \subseteq X$ è chiuso se $A = X \setminus C$ è aperto.

Esercizio. (1.21) Dato (X, d) spazio metrico, dimostrare che

- $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon$ è aperto;
- $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \quad D_\varepsilon$ è chiuso.

Teorema II.

Dato X insieme, d_1 e d_2 distanze su X . Siano quindi \mathcal{T}_1 la topologia indotta da d_1 e \mathcal{T}_2 la topologia indotta da d_2 . Se esistono due costanti $a, b > 0$, tali che

$$\forall x, y \in X : \quad \begin{cases} d_1(x, y) < a d_2(x, y) \\ d_2(x, y) < b d_1(x, y) \end{cases}$$

$$\implies \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$$

Dimostrare che le due topologie sono la stessa ($\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$) significa dimostrare che

$$A \in \mathcal{T}_1 \iff A \in \mathcal{T}_2$$

Dimostrazione di II.

“ \subseteq ” Dimostro che $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, ovvero che

$$\forall A \subseteq X, \quad A \in \mathcal{T}_1 \implies A \in \mathcal{T}_2$$

Se $A \in \mathcal{T}_1 \implies \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^1(x) \subseteq A$.

Se trovo $\delta(\varepsilon)$ tale che

$$\forall x \in A, B_{\delta(\varepsilon)}^2(x) \subseteq B_\varepsilon^1(x)$$

$$\implies \forall x \in A, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tale che } B_{\delta(\varepsilon)}^2(X) \subseteq A$$

$$\implies A \in \mathcal{T}_2$$

Noto che

$$\begin{aligned} B_{\delta(\varepsilon)}^2(x) &\subseteq B_\varepsilon^1(x) \\ \iff \forall y \in X, \quad (d_2(x, y) < \delta(\varepsilon) &\implies d_1(x, y) < \varepsilon) \end{aligned}$$

Se pongo $\delta = \varepsilon/a$, allora vale che

$$\begin{aligned} d_2(x, y) < \delta(\varepsilon) &= \varepsilon/a \\ \implies d_1(x, y) &< a d_2(x, y) < \varepsilon \\ &\implies d_1(x, y) < \varepsilon \end{aligned}$$

“ \supseteq ” Per dimostrare l’implicazione inversa si sfrutta la simmetria del sistema, applicando la stessa dimostrazione ma con la seconda ipotesi. ■

1.3 Esempi di topologie su X

Esempio. (1.22) Fissato $a \in X$, sia \mathcal{T} tale che

$$A \in \mathcal{T} \iff a \in A \vee A = \emptyset$$

Esempio. (1.23) Fissato $a \in X$, sia \mathcal{T}' tale che

$$A \in \mathcal{T}' \iff a \notin A \vee A = X$$

Osservazione. (1.24) Dato X spazio topologico si ha che

1. \emptyset, X sono chiusi;
2. $\{C_i\}_{i \in I}$ chiusi, I finito $\implies \bigcup_{i \in I} C_i$ chiuso;
3. $\{C_i\}_{i \in I}$ chiusi $\implies \bigcap_{i \in I} C_i$ chiuso

Notiamo quindi che dato un insieme, è completamente equivalente identificarne tutti gli aperti o identificarne tutti i chiusi.

Esempio. (1.25) $C \subseteq X$, C è chiuso $\iff C$ è finito oppure $C = X$: topologia dei complementari finiti. Si avrà quindi la topologia \mathcal{T} tale che

$$A \in \mathcal{T} \iff X \setminus A \text{ è finito} \vee A = \emptyset$$

Su un insieme finito questa topologia corrisponde alla topologia discreta, e quindi è una topologia metrica (i.e. indotto da una metrica).

Su un insieme infinito, invece, dati A, B aperti non vuoti

$$\implies A \cap B \neq \emptyset.$$

Infatti, affinché due insiemi abbiano intersezione vuota, ciascun insieme deve essere compreso nel complementare dell'altro. A e B però sono insiemi infiniti, e per la topologia i loro complementari devono essere insiemi finiti. Pertanto, questa non può essere una topologia metrica (infatti, in una topologia metrica esistono sempre degli aperti con nessun punto in comune).

1.4 Alcune definizioni

Dato (X, \mathcal{T}) spazio topologico, $B \subseteq X$ sottoinsieme:

Definizione. (1.26) Si definisce chiusura di B l'insieme

$$\overline{B} = \bigcap_I C$$

con $I = \{C : B \subseteq C, C \text{ chiuso}\}$.

\overline{B} è un insieme chiuso, e pertanto è il più piccolo insieme chiuso che contiene B .

Definizione. (1.27) Si definisce interno di B l'insieme

$$(B)^o = \bigcup_J A$$

con $J = A : A \subseteq B, A$ aperto. $(B)^o$ è un aperto.

Vale che

$$(B)^o \subseteq B \subseteq \overline{B}$$

e inoltre

- B aperto $\iff B = (B)^o$;
- B chiuso $\iff B = \overline{B}$

Definizione. (1.28) Si definisce frontiera di B l'insieme

$$\partial B = \overline{B} \cap \overline{(X \setminus B)}$$

Definizione. (1.29) Dato X insieme, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologie su X , si dice che

- \mathcal{T}_1 è meno fine di \mathcal{T}_2 ;
- \mathcal{T}_2 è più fine di \mathcal{T}_1

se vale $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$

Proposizione. (1.30) Dato X insieme, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologie su X

$\implies \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ è topologie, mentre $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ non necessariamente è topologia.

1.5 Basi di uno spazio topologico

Definizione. (1.31) Dato (X, \mathcal{T}) spazio topologico, si dice che $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ è una base per \mathcal{T} se

$$\forall A \in \mathcal{T} \quad \exists \{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} \text{ t.c. } A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

Esempio. (1.32) Consideriamo \mathbb{R} con la topologia euclidea. Dimostro che

$$\mathcal{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

è una base

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto,

$$\begin{aligned} x \in A &\implies \exists \varepsilon_x > 0 : (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq A \implies \\ &\implies A = \bigcup_{x \in A} (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \end{aligned}$$

Su \mathbb{R} è base anche

$$\mathcal{B}' = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Posso dimostrarlo mostrando che è possibile scrivere (a, b) con $a, b \in \mathbb{R}$ come unione di intervalli con estremi razionali.

Infatti, considero due successioni:

- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ decrescente, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ che converge ad a ;
- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ crescente, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathbb{Q}$ che converge ad b ;

Quindi

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)$$

Esempio. (1.33) Su (X, d) spazio metrico, per la topologia \mathcal{T} indotta dalla distanza l'insieme \mathcal{B} è una base:

$$\mathcal{B} = \{B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0\}$$

In questo caso basta prendere

- $B_\varepsilon(x)$ con ε razionale;
- $B_\varepsilon(x)$ con $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \dots$

Esercizio. (1.34) Consideriamo \mathbb{R} con la topologia euclidea. Dimostrare che ogni aperto è unione di intervalli aperti disgiunti

Soluzione (1.34). Se A è aperto

$$\Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i).$$

Per $i \neq j$, se

$$(a_i, b_i) \cap (a_j, b_j) \neq \emptyset$$

\Rightarrow l'unione tra i due intervalli è un intervallo aperto: dunque sostituisco nell'unione $(a_i, b_i), (a_j, b_j)$ con (a, b) , dati

$$a = \min\{a_i, a_j\}$$

$$b = \max\{b_i, b_j\}$$

Esercizio. (1.35) Dimostrare se su \mathbb{R}^2 è possibile scrivere ogni aperto come unione di palle disgiunte.

Esempio. (1.36) Considerato X con la topologia discreta, ogni base deve contenere almeno tutti gli insiemi della forma $\{x\}, x \in X$

Una condizione necessaria affinché un insieme sia base dello spazio è che l'unione di tutti gli elementi della base sia esattamente lo spazio (la definizione assiomatica della topologia impone che lo spazio stesso sia un aperto).

1.5.1 Topologia a partire da una base

Sia X un insieme, e sia $\mathcal{B} \subseteq P(X)$:

(a) Esiste una topologia di cui \mathcal{B} è base? Dipende

(b) Ne possono esistere più di una? No

Se c'è una topologia di cui \mathcal{B} è base, allora questa topologia è unica[†]

[†] La dimostrazione di questo fatto è banale, ed è lasciata per esercizio.

Teorema III.

Sia X insieme, $\mathcal{B} \in P(X)$.

\mathcal{B} è la base di una topologia \iff

1. Ipotesi \clubsuit : $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
2. Ipotesi \star : $\forall A, B \in \mathcal{B}$
 - $A \cap B$ è unione di elementi di \mathcal{B} o, equivalentemente
 - $\forall x \in A \cap B, \exists C \in \mathcal{B}$ tale che $x \in C \subseteq A \cap B$

Dimostrazione di III. “ \Leftarrow ” Definiamo \mathcal{T} come

$$A \in \mathcal{T} \iff A \text{ è unione di elementi di } \mathcal{B}$$

e dimostriamo che \mathcal{T} è una topologia.

1. Vale che $\underbrace{\emptyset \in \mathcal{T}}_{\text{banale}}, \underbrace{X \in \mathcal{T}}_{\text{per } \clubsuit}$
2. Dimostro che $A_i \in \mathcal{T} \implies \bigcup_i A_i \in \mathcal{T}$

Poiché $\forall i \ A_i = \bigcup_j B_{ij}$ con $B_{ij} \in \mathcal{B}$

$$\implies \bigcup_i A_i = \bigcup_{i,j} B_{ij} \in \mathcal{T}$$

3. Dimostro che $A, B \in \mathcal{T} \implies A \cap B \in \mathcal{T}$

$$A = \bigcup_i A_i, \quad A_i \in \mathcal{B}$$

$$B = \bigcup_j B_j, \quad B_j \in \mathcal{B}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \left(\bigcup_i A_i \right) \cap \left(\bigcup_j B_j \right) = \\ &= \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j) \stackrel{\star}{=} \bigcup_{i,j,k} C_{i,j,k} \end{aligned}$$

dove \star vale poiché

$$A_i \cap B_j \stackrel{\dagger}{=} \bigcup_k C_k \quad C_k \in \mathcal{B}$$

Esempio. (1.37) Sia $X = \mathbb{R}$, e consideriamo l'insieme

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Verifichiamo le condizioni:

1. La prima è ovvia, in quanto

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n)$$

2. La seconda ipotesi è altrettanto ovvia: infatti

$$[a, b) \cup [c, d) = \begin{cases} \emptyset & \text{aperto} \\ [\alpha, \beta) & \in \mathcal{B} \end{cases}$$

con

$$\alpha = \max\{a, c\}, \quad \beta = \min\{b, d\}$$

\Rightarrow esiste una topologia su \mathbb{R} che ha \mathcal{B} come base, che prende il nome di retta di Sorgenfry.

Osservazione. (1.38) L'intervallo (a, b) è

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[a + \frac{1}{n}, b \right)$$

e quindi è aperto sia rispetto alla topologia euclidea che rispetto a quella di Sorgenfry. Pertanto, ogni aperto euclideo è aperto per la topologia di Sorgenfry, ma il contrario non è vero. Quindi, la topologia euclidea è strettamente meno fine della topologia di Sorgenfry.

Allo stesso tempo, però, la topologia di Sorgenfry non è la topologia discreta, in quanto $\{a\}$ con $a \in \mathbb{R}$ non è insieme aperto per Sorgenfry.

1.6 Intorni e chiusura in uno spazio topologico

Definizione. (1.39) Sia X spazio topologico, $x \in X$. U è un intorno di x se $\exists A$ aperto tale che

$$x \in A \subseteq U$$

Equivalentemente, $U \subseteq X$ è intorno di $x \in X$ se $x \in (U)^\circ$

[†] per l'ipotesi ★

Proprietà degli interni. (1.40) Sia $I(x)$ l'insieme di tutti gli interni di x . Valgono:

1. $\forall x \in X, X \in I(x)$;
2. $\forall x \in X, \forall U \in I(x)$, si ha $x \in U$
3. Se $U \in I(x)$ e $U \subseteq V \implies V \in I(x)^\dagger$
4. Se $U, V \in I(x) \implies U \cap V \in I(x)^\ddagger$
5. Aggiungere punto cinque dal manetti, e dimostrarlo/capirlo.

Vedere il file su moodle per passare dalla definizione con gli aperti della topologia e viceversa e etc

Lemma. (1.41) $x \in \overline{B}$

$$\iff \forall U \in I(x) \text{ vale } U \cap B \neq \emptyset$$

Dimostrazione di (1.41) Dimostro che $x \notin \overline{B}$

$$\iff x \in (X \setminus B)^\circ$$

$$\iff \exists V \text{ aperto tale che } x \in V \subseteq X \setminus B, \text{ ma } V \in I(x), V \cap B \neq \emptyset \quad \blacksquare$$

Esempio. (1.42) Sia $E \subseteq X$, E si dice denso in X se $\overline{E} = X$

Osservazione. (1.43) E denso in $X \iff E \cap A \neq \emptyset, \forall$ aperto $A \neq \emptyset$

Definizione. (1.44) Dato X spazio topologico, $x \in X$, si ha che $J(x) \subseteq I(x)$ è un sistema fondamentale (o base locale, o base di interni) se

$$\forall U \in I(x), \exists V \in J(x) : V \subseteq U$$

[†] Punto primo de (lemma 3.20, [Man14])

[‡] Punto secondo de (lemma 3.20, [Man14])

1.7 Funzioni continue

Funzione continua. (1.45) Dati X, Y spazi topologici, f funzione:

$$f : X \rightarrow Y$$

f è continua $\iff \forall A \subseteq Y, A$ aperto in $Y, f^{-1}(A)$ è aperto in X .

Ovvero la controimmagine di ogni aperto è un aperto.

Osservazione. (1.46)

- $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$:
 f continua $\iff \forall C \in Y, C$ chiuso, $f^{-1}(C)$ chiuso in X ;
- $f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$:
 f continua $\iff \mathcal{B}$ base di $Y, \forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B)$ è aperto di X .

Teorema IV.

Siano X, Y, Z spazi topologici, $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z, f, g$ funzione continua.

Allora $g \circ f$ è continua,

La composizione di funzione continue è continua

Dimostrazione di IV. Notiamo che lo schema è

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

Se $A \subseteq Z, A$ aperto

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(A)}_{\text{aperto}}\right)$$

$\implies (g \circ f)^{-1}(A)$ aperto poiché f continua. ■

Lemma. (1.47) X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ funzione, vale

f continua $\iff \forall A \subseteq X, f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

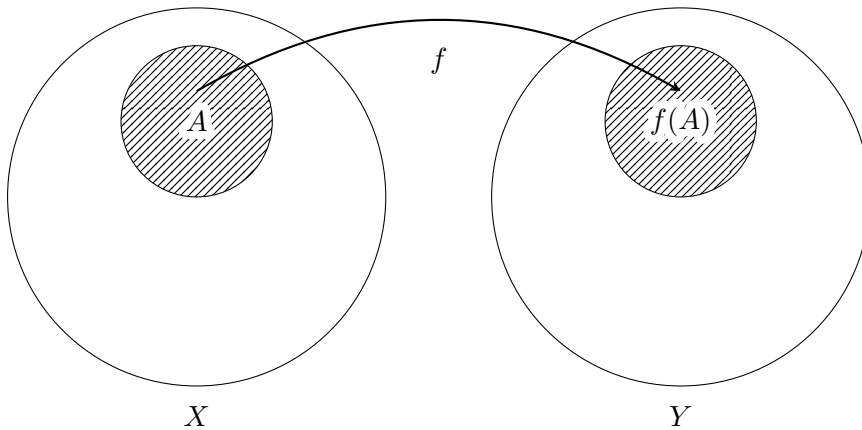


Figura 1.4: Teorema di caratterizzazione per una funzione continua

Dimostrazione di (1.47)

“ \Rightarrow ” Facendo riferimento alla figura 1.4, noto che $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$ quindi

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq \underbrace{f^{-1}(\overline{f(A)})}_{\text{chiuso}^\dagger}$$

$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$$

$$\Rightarrow f(\overline{A}) \subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subseteq \overline{f(A)}$$

“ \Leftarrow ” Sia $C \in Y$, C chiuso, devo dimostrare che $f^{-1}(C)$ chiuso in X . Poniamo $A = f^{-1}(C)$. Facciamo riferimento alla figura 1.5

Per ipotesi $f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$

$$\Rightarrow f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq C$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(C)})) \subseteq f^{-1}(C)$$

$$\Rightarrow \overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$$

[†] è l'unico punto in cui si utilizza la continuità.

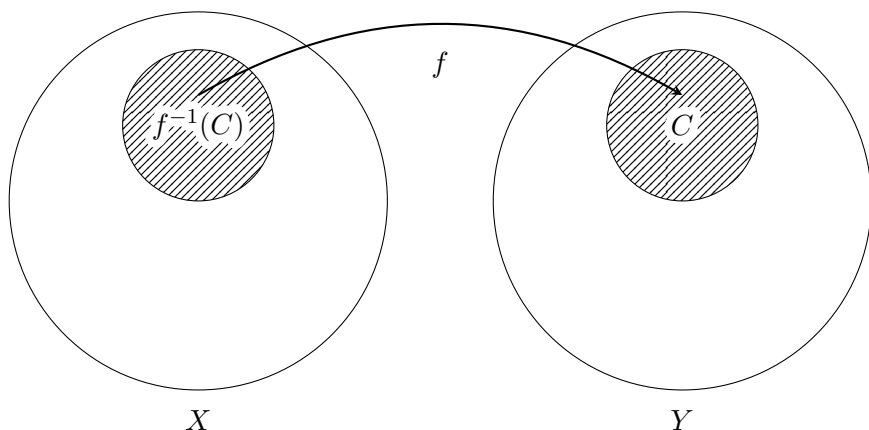


Figura 1.5: Teorema di caratterizzazione per una funzione continua

$$\implies f^{-1}(C) = \overline{f^{-1}(C)}$$

$$\implies f^{-1}(C) \text{ chiuso.} \quad \blacksquare$$

Definizione. (1.48) Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$, $x \in X$, diciamo che f è continua in x :

$$\forall U \in I(f(x)), \exists V \in I(x) : f(V) \subseteq U$$

Teorema V.

X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$:

f continua $\iff \forall x \in X, f$ è continua in x .

Dimostrazione di V.

“ \implies ” Sia $x \in X$, $f(x) \in Y$, sia $U \in I(f(x))$

$\implies \exists A$ aperto di Y tale che

$$f(x) \in A \subseteq U$$

$\implies f^{-1}(A)$ aperto in X (per ipotesi che f sia continua)

$$\implies x \in f^{-1}(A)$$

$$\implies f^{-1}(A) \in I(x), \text{ ponendo } V = f^{-1}(A).$$

“ \Leftarrow ” Sia $A \in Y$, A aperto. Devo dimostrare che $f^{-1}(A)$ è aperto in X , ovvero che $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto.

Quindi sia $x \in f^{-1}(A)$

$$\implies f(x) \in A, A \text{ aperto}$$

$$\implies A \in I(f(x))$$

$\implies \exists V \in I(x)$ tale che $f(V) \in A$ (per definizione di continuità in un punto)

$$\implies V \subseteq f^{-1}(A)$$

$$\implies f^{-1}(A) \text{ è intorno di } x. \quad \blacksquare$$

1.8 Spazi topologici a meno di omeomorfismo

Definizione. (1.49) Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$. f si dice omeomorfismo se

1. f è biunivoca;
2. f è continua;
3. f^{-1} è continua.

Esempio. (1.50) Sia $\text{Id}_X : (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ con \mathcal{T}_1 topologia discreta e \mathcal{T}_2 topologia banale. Questa funzione è biunivoca, continua, ma la sua inversa non è continua.

In generale, considerando \mathcal{T}_1 e \mathcal{T}_2 come topologie generiche, vale che

- Id_X è continua $\iff \mathcal{T}_2$ è meno fine di \mathcal{T}_1
- Id_X^{-1} è continua $\iff \mathcal{T}_1$ è meno fine di \mathcal{T}_2

Esercizio. (1.51) Dimostrare che data la relazione $X \sim Y$ se esiste $f : X \rightarrow Y$ omeomorfismo, \sim è relazione di equivalenza

Esempio. (1.52) Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, $Y = (0, 1)$ con la topologia euclidea. Un omeomorfismo potrebbe essere

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\rightarrow (-\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{L} (0, 1) \\ x &\mapsto \arctan x\end{aligned}$$

con L lineare.

Notiamo quindi che $\forall a < b, c < d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, vale

$$(a, b) \sim (c, d)$$

Esempio. (1.53) Possiamo dire che $[0, 1] \sim (0, 1)$? No, non sono omeomorfe; il modo per dimostrarlo è trovare una proprietà che uno dei due ha e l'altro no.

Esercizio. (1.54) Sia

$$\begin{aligned}f : [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos t, \sin t)\end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{cases} X &= [0, 2\pi) \\ Y &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

entrambi con la topologia euclidea.

La funzione è sicuramente biunivoca e continua, ma la sua inversa non lo è, in quanto “srotolando” la circonferenza si crea uno strappo.

Dimostrare che f^{-1} non è continua nel punto $(1, 0)$

Notiamo che nell'esercizio precedente, restringendo f al dominio $(0, 2\pi)$, allora si ottiene un omeomorfismo.

Definizione. (1.55) Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$.

- f si dice aperta se $\forall A \subseteq X$, A aperto, vale $f(A)$ aperto in Y ;
- f si dice chiusa se $\forall C \subseteq X$, C chiusa, vale $f(C)$ chiuso in Y .

Osservazione. (1.56) Se f è biunivoca vale

$$f \text{ aperta} \iff f \text{ chiuso} \iff f^{-1} \text{ continua}$$

Esempio. (1.57) Sia $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$. È facilmente verificabile, tramite una base degli aperti di \mathbb{R} , che la funzione è continua. Inoltre p è aperta, ma non è biunivoca. p non è chiusa. Infatti preso

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$$

che è insieme chiuso, in quanto data

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

vale che $C = f^{-1}(\{1\})$, si ha che $p(C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che non è chiuso.

Capitolo 2

Operazioni con spazi topologici

2.1 Sottospazio

Dato uno spazio metrico, un qualsiasi sottoinsieme continua ad essere uno spazio metrico: è sufficiente restringere la funzione distanza al sottoinsieme preso in considerazione. Vi è quindi una topologia indotta dalla restrizione della metrica sul sottospazio.

Definizione. (2.1) *Sia X spazio topologico, e $Y \subseteq X$, con la funzione*

$$i : Y \hookrightarrow X$$

la funzione inclusione. La topologia di sottospazio su Y è: $U \subseteq Y$ è aperto se esiste V aperto in X tale che

$$U = Y \cap V$$

Che la topologia di sottospazio è realmente una topologia è di verifica immediata.

Esempio. (2.2) Sia $X = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea. Sia $Y = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, per la topologia di sottospazio si ha che, per esempio $[0, 1/2)$ è aperto in Y , poiché

$$\left[0, \frac{1}{2}\right) = [0, 1] \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Esempio. (2.3) Dato $X = \mathbb{R}^2$, $Y = S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ con la topologia euclidea: gli aperti su Y sono l'unione di archi di circonferenza.

Esercizio. (2.4) Sia X spazio metrico: X ha una topologia indotta. Dato $Y \subseteq X$, Y è metrico, e pertanto c'è una topologia indotta dalla metrica; inoltre $Y \subseteq X$ possiede la topologia di sottospazio. Dimostrare che queste topologie coincidono

Osservazione. (2.5) Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con la topologia di sottospazio. Vale

- $C \subseteq Y$ è chiuso $\iff \exists B$ chiuso in X tale che $C = Y \cap B$. Infatti

$$\begin{aligned} C \text{ chiuso in } Y &\iff Y \setminus C \text{ aperto in } Y \iff \\ &\iff \exists V \text{ aperto in } X : Y \setminus C = Y \cap V \iff \end{aligned}$$

$$C = Y \setminus (Y \setminus C) = Y \setminus (Y \cap V) = Y \cap (X \setminus V)^\dagger.$$

- Se $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ è una base per la topologia di X
 $\implies \mathcal{B}' = \{B_i \cap Y\}_{i \in I}$ è una base per la topologia di sottospazio.
 Infatti, se $A \subseteq Y$ aperto

$$\begin{aligned} \implies \exists B : A &= Y \cap B \\ &= Y \cap \bigcup_i B_i \\ &= \bigcup_i (Y \cap B_i). \end{aligned}$$

- Se $i : Y \hookrightarrow X$ è l'inclusione, allora i è continua.

Infatti dato $A \subseteq X$, $i^{-1}(A) = Y \cap A$.

[†] Convincersene tramite un diagramma di Venn.

Proposizione. (2.6) Dato X spazio topologico, $Y \subseteq X$ e i la funzione inclusione

$$i : Y \hookrightarrow X$$

Allora la topologia di sottospazio è la meno fine tra tutte le topologie di Y che rendono i continua.

Dimostrazione di (2.6) Se i è continua e $A \subseteq X$ è aperto

\implies tutti gli insiemi della forma $i^{-1}(A)$ sono aperti

\implies tutti gli insiemi della forma $Y \cap A$ sono aperti

\implies ogni topologia che rende i continua, contiene tutti gli aperti della topologia di sottospazio.

Esempio. (2.7) Sia $Y = (0, 1) \subseteq \mathbb{R} = X$ con la topologia euclidea (e la relativa topologia di sottospazio). Dato

$$A = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subseteq Y$$

vale che

$$\text{cl}_X(A) = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad \text{cl}_Y(A) = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

e $\text{cl}_Y(A) \subseteq \text{cl}_X(A)$. Notiamo che cl è una notazione alternativa per indicare la chiusura di un insieme in un dato spazio topologico.

Lemma. (2.8) Dato X spazio topologico, $Y \subseteq X$ con la topologia di spazio topologico, e $A \subseteq Y \subseteq X$, allora

$$\text{cl}_Y(A) = \text{cl}_X(A) \cap Y$$

Dimostrazione di (2.8) Sia

$$\mathcal{C} = \{C \subseteq X : C \text{ chiuso in } X, A \subseteq C\}$$

vale che

$$\text{cl}_X(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C.$$

Definiamo ora

$$\mathcal{C}' = \{C \cap Y : C \in \mathcal{C}\}$$

ovvero l'insieme di tutti i chiusi di Y che contengono A :

$$\text{cl}_Y(A) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} (C \cap Y) = \left(\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap Y = \text{cl}_X(A) \cap Y \quad \blacksquare$$

2.1.1 Immersioni

Definizione. (2.9) Siano Y, X spazi topologici, e sia

$$f : Y \rightarrow X$$

f si dice immersione se

- f è iniettiva;
- f è continua;
- f è omeomorfismo fra Y e $f(Y) \subseteq X$ con la topologia di sottospazio, i.e. A è aperto in $Y \iff \exists B$ aperto in X^\dagger tale che

$$A = f^{-1}(B).$$

Esempio. (2.10) Sia $Y = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^2$, entrambi con la topologia euclidea. Sia f tale che

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (x, 0) \end{aligned}$$

f è sicuramente iniettiva e continua, e inoltre un qualsiasi aperto di \mathbb{R} è rappresentabile come intersezione di una palla aperta in \mathbb{R}^2 con un'asse.

Esempio. (2.11) Sia $Y = [0, 2\pi]$, $X = \mathbb{R}^2$. Sia

$$f(t) = (\cos t, \sin t), \quad f(Y) = S' = \{x^2 + y^2 = 1\}$$

f è iniettiva e continua, ma non è immersione, in quanto l'inversa non è continua. L'insieme $A = [0, \pi)$ è aperto in Y , ma $f(A)$ non è aperto.

[†] Notiamo che questa condizione è equivalente a chiedere che $\exists B$ aperto in $f(Y)$

Definizione. (2.12) Dati Y, X spazi topologici, sia $f : Y \rightarrow X$ *immersione*.

- Se f è chiusa, si chiama immersione chiusa.
- Se f è aperta, si chiama immersione aperta.

Lemma. (2.13) Siano Y, X spazi topologici, f iniettiva e continua.

1. Se f è chiusa, allora è una immersione chiusa.
2. Se f è aperta, allora è una immersione aperta.

Dimostrazione di (2.13)

1. Sia $C \subseteq Y$ chiuso. $f(C) \subseteq f(Y) \subseteq X$, e $f(C)$ chiuso in X per ipotesi.
 $\implies f(C) = f(C) \cap f(Y)$ è chiuso in $f(Y)$.
 $\implies f$ è omeomorfismo fra Y e $f(Y)$.
2. Sia $A \subseteq Y$ aperta. $f(A) \subseteq f(Y) \subseteq X$, e $f(A)$ aperto in X per ipotesi.
 $\implies f(A) = f(A) \cap f(Y)$ è aperto in $f(Y)$.
 $\implies f$ è omeomorfismo fra Y e $f(Y)$.

2.2 Prodotti

Siano P e Q spazi topologici, e consideriamo $P \times Q$ insieme prodotto. Consideriamo le proiezioni

$$p : P \times Q \rightarrow P \quad q : P \times Q \rightarrow Q$$

Definizione. (2.14) La topologia prodotto \mathcal{P} su $P \times Q$ è la topologia meno fine che rende continue le proiezioni p e q .

Prodotto tra insiemi

Notiamo che il prodotto cartesiano tra due insiemi è

$$\begin{aligned} P \times Q &= \{(p, q) \mid p \in P, q \in Q\} = \\ &= \{f : \{1, 2\} \rightarrow P \cup Q \mid f(1) \in P, f(2) \in Q\} \end{aligned}$$

Possiamo quindi estendere questa definizione al prodotto di $\{A_i\}_{i \in I}$:

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid f(i) \in A_i \right\}$$

Domanda: se $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$ è vero che $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$? Sì, lo è per l'assioma della scelta.

Teorema VI.

Sotto le stesse ipotesi, vale

1. $\mathcal{B} = \left\{ U \times V \mid \begin{array}{l} U \text{ aperto in } P \\ V \text{ aperto in } Q \end{array} \right\}$ è una base per \mathcal{P} ;
2. p, q sono aperte; inoltre:
 - $\forall q_0 \in Q, p|_{P \times \{q_0\}} : P \times \{q_0\} \rightarrow P$ è omeomorfismo;
 - $\forall p_0 \in P, q|_{\{p_0\} \times Q} : \{p_0\} \times Q \rightarrow Q$ è omeomorfismo;
3. dato X spazio topologico, e $f : X \rightarrow P \times Q$
 f è continua $\iff p \circ f$ e $q \circ f$ sono continue.

Dimostrazione di VI.

1. (a) Dimostriamo che \mathcal{B} è la base per una qualche topologia \mathcal{T} . Verifico le condizioni:

- i. $\bigcup (U \times V) = P \times Q$? Sì, prendendo $U = P, V = Q$;

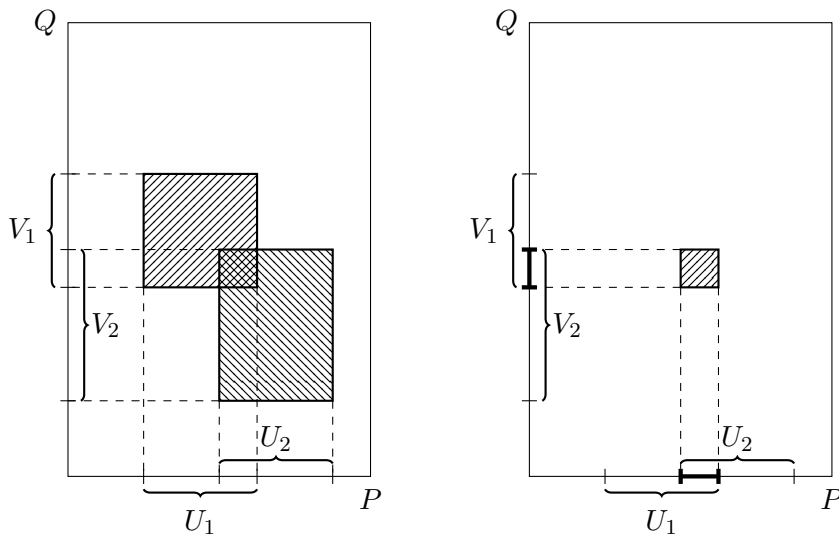


Figura 2.1: Intersezione di prodotti

$$\text{ii. } (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)^\dagger.$$

Entrambe le condizioni sono verificate, quindi \mathcal{B} è la base per una qualche topologia \mathcal{T}

(b) Dimostro ora che $\mathcal{P} = \mathcal{T}$

“ \subseteq ” $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$: dimostro che \mathcal{P} è meno fine di \mathcal{T} : per dimostrarlo, verifichiamo che p, q sono continue rispetto alla topologia \mathcal{T} .

Sia $U \subseteq P$ aperto: $p^{-1}(U) = U \times Q$ aperto in \mathcal{T} .

Sia $V \subseteq Q$ aperto: $q^{-1}(V) = P \times V$ aperto in \mathcal{T} .

“ \supseteq ” $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$: $\forall A \in \mathcal{T} \implies A \in \mathcal{P}$: mi basta farlo per gli aperti nella base \mathcal{B} di \mathcal{T} .

Sia $U \times V \in \mathcal{B}$. Osservo che

$$U \times V = \underbrace{p^{-1}(U)}_{\text{aperto in } \mathcal{P}} \cap \underbrace{q^{-1}(V)}_{\text{aperto in } \mathcal{P}}$$

[†] Utilizzare la figura 2.1

$\implies U \times V$ aperto in \mathcal{P} .

2. Dimostro che p, q sono aperte: per ovvia simmetria, lo dimostro solo per p , e varrà ugualmente per q . È sufficiente dimostrare questo fatto per una base di $P \times Q$: dato $U \times V \in \mathcal{B}$ base di $P \times Q$, i.e. U aperto in P , V aperto in Q

$$p(U \times V) = U \text{ aperto in } P$$

Dimostro quindi che $\forall q \in Q$,

$$p|_{P \times \{q\}} : P \times \{q\} \rightarrow P$$

è omeomorfismo. Sia $A \subseteq P \times \{q\}$ un aperto nella topologia di sottospazio.

$$\begin{aligned} \implies A &= \left[\bigcup_i U_i \times V_i \right] \cap [P \times \{q\}] = \\ &= \bigcup_i [(U_i \times V_i) \cap (P \times \{q\})] = \bigcup_j (U_j \times \{q\}) \end{aligned}$$

con j tale che $q \in V_j$. Quindi

$$p(A) = \bigcup_{j: q \in V_j} U_j$$

è aperta, e quindi omeomorfismo (in quanto è anche biiettiva).

3. Dimostro che f è continua $\iff f_1, f_2$ continue, con $f_1 = p \circ f$, $f_2 = q \circ f$.

“ \implies ” Implicazione ovvia.

“ \impliedby ” Dimostro che $\forall A \subseteq P \times Q$ aperto, $f^{-1}(A)$ è aperto in X . Basta farlo per un elemento della base di \mathcal{P} , ponendo

$$A = U \times V = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

Quindi

$$\begin{aligned} f^{-1}(A) &= f^{-1} [p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)] = \\ &= f^{-1} (p^{-1}(U)) \cap f^{-1} (q^{-1}(V)) = \\ &= f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V) \end{aligned}$$

Entrambi gli insiemi sono aperti per la continuità di f_1 e f_2

$\implies f^{-1}(A)$ è aperto ■

Osservazione. (2.15) Siano P, Q spazi topologici, e $P \times Q$ con la topologia prodotto.

- Il prodotto di aperti è aperto, mentre non vale il viceversa: non tutti gli aperti sono prodotto di aperti.
- Anche il prodotto di chiusi è chiuso, ed è vero di più: dati $A \subseteq P$, $B \subseteq Q$ allora[†]

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

- Il prodotto di basi è una base: dati \mathcal{B} base di P , \mathcal{C} base di Q , allora

$$\mathcal{D} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{B}, V \in \mathcal{C}\}$$

\mathcal{D} è una base per la topologia prodotto. Infatti, se $A \subseteq P$ è un aperto, $B \subseteq Q$ è un aperto, allora

$$A \times B = \left(\bigcup_i U_i \right) \times \left(\bigcup_j V_j \right) = \bigcup_{i,j} (U_i \times V_j)$$

con $U_i \times V_j \in \mathcal{D}$.

- Il prodotto di sistemi fondamentali di interni è un sistema fondamentale di interni[‡]. Dato $(x, y) \in P \times Q$, e $\mathcal{U}(x)$ sistema fondamentale di interni di $x \in P$, $\mathcal{V}(y)$ sistema fondamentale di interni di $y \in Q$, allora

$$\mathcal{W}(x, y) = \left\{ U_i \times V_j \mid \begin{array}{l} U_i \in \mathcal{U}(x) \\ V_j \in \mathcal{V}(y) \end{array} \right\}$$

$\mathcal{W}(x, y)$ è un sistema fondamentali di interni di $(x, y) \in P \times Q$.

[†] La dimostrazione di questo fatto è lasciata per esercizio nel secondo foglio di tutorato.

[‡] La dimostrazione di questo fatto è lasciata per esercizio nel secondo foglio di tutorato

Capitolo 3

Proprietà degli spazi topologici

3.1 Spazi topologici di Hausdorff

Definizione. (3.1) Uno spazio topologico X si dice di Hausdorff (o spazio T_2) se:

$$\forall x, y \in X, x \neq y \implies \begin{matrix} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) \end{matrix} : U \cap V = \emptyset$$

Osservazione. (3.2) È ovvio che per (X, d) spazio metrico

$\implies X$ è di Hausdorff. Infatti, dati x, y ,

$$x \neq y \implies d(x, y) =: d > 0$$

dunque preso $\varepsilon = d/2$ si ha

$$B_\varepsilon(x) \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Esempio. (3.3) Se X è lo spazio topologico con la topologia banale, si ha che, tranne nel caso in cui X possiede un unico punto, non è di Hausdorff.

Esempio. (3.4) Se X è lo spazio topologico con la topologia dei complementari finiti,

- dato U intorno di x si ha che $X \setminus U$ è finito;
- dato V intorno di y si ha che $X \setminus V$ è finito.

Se X è infinito necessariamente $U \cap V \neq \emptyset$. Infatti

$$U \cap V = \emptyset \iff X \setminus (U \cap V) = X \\ \iff (X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$$

impossibile a sinistra dell'uguale vi è unione di insiemi finiti, mentre a sinistra vi è un insieme infinito.

Definizione. (3.5) X spazio topologico si dice T_1 se i punti sono chiusi (\iff gli insiemi finiti sono chiusi).

Osservazione. (3.6) Vale che $T_2 \implies T_1$ (mentre non è vero il viceversa). Infatti, sia $x \in X$. Devo dimostrare che $\{x\}$ è chiuso,

$$\implies X \setminus \{x\} \text{ è aperto,}$$

$$\implies X \setminus \{x\} \text{ è intorno di ogni suo punto.}$$

Sia $y \in X \setminus \{x\}$:

$$\implies x \neq y. \text{ Vale quindi l'ipotesi di Hausdorff, ovvero}$$

$$\begin{aligned} \exists U \in I(x) \\ \exists V \in I(y) : U \cap V = \emptyset \end{aligned}$$

Quindi $x \in U$

$$\implies x \notin V \text{ cioè } V \subseteq X \setminus \{x\}$$

$$\implies X \setminus \{x\} \text{ intorno di } y. \quad \blacksquare$$

Osservazione. (3.7) Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.

Infatti, sia X spazio topologico di Hausdorff e $Y \subseteq X$ un sottospazio. Prendiamo $x, y \in Y$ punti distinti. Poiché X è di Hausdorff, esistono due

aperti disgiunti[†] $U, V \subseteq X$ tali che $x \in U$ e $y \in V$. Per la definizione di topologia sottospazio, gli insiemi $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono aperti in Y , e sono distinti: pertanto è verificata la condizione di Hausdorff.

Inoltre, siano X, Y spazi di Hausdorff, e siano $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ due punti distinti. Supponiamo per semplicità che $x \neq z$. Esistono quindi due aperti disgiunti $U, V \subseteq X$ tali che $x \in U$ e $z \in V$. Risulta quindi che

$$(x, y) \in U \times Y, \quad (z, w) \in V \times Y.$$

Notiamo quindi che

$$(U \times Y) \cap (V \times Y) = (U \cap V) \times Y = \emptyset$$

Teorema VII.

Sia X spazio topologico.

X è di Hausdorff \iff la diagonale Δ è chiusa in $X \times X$, con

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

Dimostrazione di VII.

“ \implies ” Δ chiuso

$$\iff (X \times X) \setminus \Delta \text{ è aperto}$$

$$\iff (X \times X) \setminus \Delta \text{ è intorno di ogni suo punto.}$$

Sia $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$, $x \neq y$

$$\implies \exists U \in I(x), V \in I(y) \text{ tale che } U \cap V = \emptyset$$

$$\implies (U \times V) \cap \Delta = \emptyset$$

[‡]

[†] L'essere di Hausdorff ci garantisce che esistano due intorni disgiunti, ma un intorno per definizione è un insieme che contiene un aperto.

[‡] Noto che $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset \iff U \cap V = \emptyset$, in quanto se l'intersezione tra prodotto cartesiano e Δ è vuota, allora tutti i punti in $U \times V$ non sono della forma (x, x) , e quindi sono $U \cap V = \emptyset$.

Viceversa, se l'intersezione è vuota, allora $\nexists x$ tale che $x \in U$ e $x \in V$, quindi $\nexists (x, x) \in U \times V$.

$$\implies (U \times V) \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$$

“ \Leftarrow ” Siano $x, y \in X$ tali che $x \neq y$

$$\implies (x, y) \notin \Delta$$

$$\implies (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta \text{ aperto}$$

$$\implies (x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta = \bigcup_i U_i \times V_i \text{ con } U_i, V_i \text{ aperti di } X$$

$$\implies \exists i_0 \text{ tale che } (x, y) \in U_{i_0} \times V_{i_0}$$

$$\implies \exists U \subseteq X \text{ aperto, } V \subseteq X \text{ aperto tale che}$$

$$(x, y) \in U \times V \subseteq (X \times X) \setminus \Delta$$

$$\implies x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset$$

$$\implies \text{abbiamo trovato gli intorni disgiunti.} \quad \blacksquare$$

Proprietà. (3.8) Siano $f, g : X \rightarrow Y$, f, g continue e Y di Hausdorff.

- $C = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ è un chiuso, infatti, sia h

$$\begin{aligned} h : X &\rightarrow Y \times Y \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

h continua in quanto ha le componenti continue, vale

$$C = h^{-1}(\Delta)$$

ma Y è di Hausdorff

$$\implies \Delta \text{ è chiuso}$$

$$\implies C \text{ chiuso.}$$

- Caso speciale: data $f : X \rightarrow X$, X di Hausdorff, allora l'insieme C_f dei punti fissi di f è chiuso in X , in quanto

$$C_f = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

ponendo $g(x) = \text{Id}_X$ sempre continua.

- Data $E \subseteq X$, E denso, se $f(x) = g(x)$

$$\implies f(x) = g(x) \quad \forall x \in X.$$

Infatti, per ipotesi $E \subseteq C$ chiuso e

$$X = \overline{E} \subseteq \overline{C} = C \implies C = X$$

- Il grafico $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ è chiuso in $X \times Y$. Infatti, data

$$\begin{aligned} h : X \times Y &\rightarrow Y \times Y \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y) \end{aligned}$$

si ha $\Gamma_f = h^{-1}(\Delta)$, ma Y è di Hausdorff

$$\implies \Delta \text{ è chiuso}$$

$$\implies \Gamma_f \text{ chiuso.}$$

Definizione. (3.9) Una proprietà P è topologica se

$$X \text{ omeomorfo a } Y \implies [X \text{ ha } P \iff Y \text{ ha } P]$$

Proposizione. (3.10) Essere di Hausdorff è una proprietà topologica.

Esercizio. (3.11) Dimostrare che data $f : X \rightarrow Y$, f iniettiva e continua, Y Hausdorff $\implies X$ Hausdorff.

Soluzione. (3.11) Siano $x, y \in X$, $x \neq y$, f iniettiva per ipotesi

$$\implies f(x) \neq f(y); Y \text{ è di Hausdorff}$$

$$\implies \exists U \in I(f(x)), \exists V \in I(f(y)) \text{ tali che } U \cap V = \emptyset$$

Noto che f continua implica $\begin{aligned} &\exists U' \in I(x) : f(U') \subseteq U \\ &\exists V' \in I(y) : f(V') \subseteq V \end{aligned}$

$$\implies U' \cap V' = \emptyset$$

$$\implies X \text{ è di Hausdorff}$$

Dimostrazione di (3.10) Devo dimostrare che

$$X \text{ omeomorfo a } Y \implies [X \text{ è di Hausdorff} \iff Y \text{ è di Hausdorff}]$$

Poiché X è omeomorfo a Y esiste $f : X \rightarrow Y$ omeomorfismo:

- in particolare f è iniettiva e continua, per l'esercizio precedente si ha $[Y \text{ Hausdorff} \implies X \text{ Hausdorff}]$;
- in particolare f^{-1} è iniettiva e continua, per l'esercizio precedente si ha $[X \text{ Hausdorff} \implies Y \text{ Hausdorff}]$. ■

Conseguenza. (3.12) X, Y di Hausdorff $\iff X \times Y$ è di Hausdorff.

Dimostrazione di (3.12) La prima implicazione è già stata fatta, mentre per l'implicazione inversa, si ha $p : X \times \{y\} \rightarrow X$ omeomorfismo.

$X \times Y$ è di Hausdorff

$$\implies X \times \{y\} \text{ è di Hausdorff}$$

$$\implies X \text{ è di Hausdorff.} \quad \blacksquare$$

3.2 Connessione

Definizione. (3.13) X spazio topologico. X è connesso se gli unici sottoinsiemi contemporaneamente aperti e chiusi sono \emptyset, X .

X si dice sconnesso se non è connesso.

Proposizione. (3.14) Sono fatti equivalenti:

1. X sconnesso;
2. $\exists A, B$ aperti, non vuoti, disgiunti tali che $X = A \cup B$;
3. $\exists C, D$ chiusi, non vuoti, disgiunti tali che $X = C \cup D$.

Dimostrazione di (3.14) Dimostrarlo formalmente per esercizio.

Esempio. (3.15) L'insieme $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso: infatti, dati $A = \{x < 0\}$, $B = \{x > 0\}$, ottengo che

- A e B sono sia aperti che chiusi contemporaneamente;
- $\mathbb{R} \setminus \{0\} = A \cup B$, entrambi aperti e entrambi chiusi.

Esempio. (3.16) Intuitivamente, $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è uno spazio connesso.

Teorema VIII.

L'intervallo $[0, 1]$ con la topologia euclidea è connesso.

Dimostrazione di VIII. Dimostriamo che se $[0, 1] = C \cup D$, C, D chiusi non vuoti, allora $C \cap D \neq \emptyset$.

Diciamo che $0 \in C$.

Poniamo $d := \inf D$. Il fatto che D sia chiuso implica che $d \in D$: ci sono due possibilità:

- $d = 0 \implies d \in C$;
 - $d > 0$: $D \subseteq [d, 1] \implies [0, d) \subseteq C \implies [0, d] \subseteq \overline{C} = C \implies d \in C$
- $\implies C \cap D \neq \emptyset$. ■

Teorema IX.

Data $f : X \rightarrow Y$ continua, allora

X connesso $\implies f(X)$ connesso.

Dimostrazione di IX. Sia $Z \subseteq f(X)$, Z aperto e chiuso, $Z \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \implies \exists A \text{ aperto di } Y \mid Z &= A \cap f(X) \\ \implies \exists C \text{ chiuso di } Y \mid Z &= C \cap f(X) \end{aligned}$$

Si ha quindi che

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(Z) &= f^{-1}(A) \text{ aperto in } X \\ f^{-1}(Z) &= f^{-1}(C) \text{ chiuso in } X \end{aligned} \right\} \implies f^{-1}(Z) \text{ aperto e chiuso}$$

e inoltre $f^{-1}(Z)$ non vuoto poiché $\emptyset \neq Z \subseteq f(X)$.

X connesso

$$\implies f^{-1}(Z) = X$$

$$\implies Z = f(X) \quad \blacksquare$$

Conseguenza. (3.17) La connessione è una proprietà topologica

$$X \sim Y \implies \begin{array}{l} f : X \rightarrow Y \text{ omeomorfismo} \\ f^{-1} : Y \rightarrow X \text{ omeomorfismo} \end{array}$$

Definizione. (3.18) X è connesso per archi (o cpa) se:

$$\forall x, y \in X \quad \exists \alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua}$$

tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.

α si dice *arco continuo*, *cammino continuo*, etc...

Lemma. (3.19) Se X è connesso per archi, allora X è connesso.

Dimostrazione di (3.19) Suppongo che $X = A \cup B$, con A, B aperti non vuoti.

Sia $a \in A, b \in B$.

$$\implies \exists \alpha : [0, 1] \rightarrow X \text{ continua, } \alpha(0) = a, \alpha(1) = b$$

$$\alpha^{-1}(A \cup B) = \alpha^{-1}(A) \cup \alpha^{-1}(B) = [0, 1]$$

con $\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)$ aperti non vuoti. Inoltre, poiché $[0, 1]$ è connesso

$$\implies \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B) \neq \emptyset.$$

Sia $t_0 \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)$

$$\implies \alpha(t_0) \in A \cap B \neq \emptyset \quad \blacksquare$$

Esempio. (3.20) Gli insiemi \mathbb{R} e (a, b) sono connessi, in quanto sono connessi per archi.

Esempio. (3.21) $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ è cpa, e quindi è anche connesso.

Esempio. (3.22) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. X convesso \implies cpa \implies connesso.

Esempio. (3.23) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$. X stellato[†] \implies cpa \implies connesso. Infatti, dati $x, y \in X$, esistono sicuramente i cammini continui

$$\alpha : [0, 1] \rightarrow X, \quad \beta : [0, 1] \rightarrow X$$

tali che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = \beta(0) = p$, e $\beta(1) = y$. Si definisce quindi

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

È ovvio verificare che $\gamma(0) = \alpha(0) = x$ e $\gamma(1) = \beta(1) = y$; l'ultima ipotesi per verificare che γ sia un cammino è che γ sia continua: è una funzione definita a tratti, e le funzioni α e β sono continue negli intervalli $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$. Noto inoltre che $\alpha(1) = \beta(0)$. La funzione γ è continua poiché è su \mathbb{R}^n .

Definizione. (3.24) Si definisce *giunzione* tra due cammini α, β tali che $\alpha(1) = \beta(0)$, il cammino $\gamma = \alpha * \beta$ definito come

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow X, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se α e β sono continue, allora γ è continua per ogni spazio topologico arbitrario, per il Lemma di Incollamento.

Lemma di Incollamento. (3.25) Siano X, Y spazio topologico, $Y = A \cup B$, e siano continue le funzioni

$$f : A \rightarrow X, \quad g : B \rightarrow X$$

e supponiamo che $\forall x \in A \cap B, f(x) = g(x)$.

Definiamo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in B \end{cases}$$

Se A, B sono entrambi aperti o A, B sono entrambi chiusi, allora h è continua.

[†] Un insieme X è stellato se esiste un punto p tale che $\forall q \in X$, il segmento $pq \subseteq X$

Dimostrazione di (3.25) Sia $C \subseteq X$ chiuso. Devo dimostrare che $h^{-1}(C)$ è chiuso in Y

$$h^{-1}(C) = \underbrace{f^{-1}(C)}_{\dagger} \cup \underbrace{g^{-1}(C)}_{\ddagger}$$

$$f^{-1}(C) = D \cap A, \quad g^{-1}(C) = E \cap B$$

per certi D, E chiusi in Y . A, B chiusi per ipotesi

$\implies h^{-1}(C)$ chiuso in Y . ■

Lemma. (3.26) Siano $A, B \subseteq X$ spazi topologico qualunque; se A, B sono connessi per archi e $A \cap B \neq \emptyset$

$\implies A \cup B$ sono connessi per archi.

Dimostrazione di (3.26) Siano $x, y \in A \cup B$, $x \in A$, $y \in B$. Sia $\gamma \in A \cup B$, e siano

$$\begin{aligned} \alpha : [0, 1] &\rightarrow A \subseteq X & \beta : [0, 1] &\rightarrow B \subseteq X \\ \alpha(0) &= x, \quad \alpha(1) = z & \beta(0) &= z, \quad \beta(1) = y \end{aligned}$$

allora $\gamma = \alpha * \beta$ è il cammino cercato

$\implies A \cup B$ è connesso per archi. ■

Osservazione. (3.27) Data $f : X \rightarrow Y$ continua, se X è connesso per archi

$\implies f(X)$ è connesso per archi.

Infatti, dati $a, b \in f(X)$,

$$\begin{aligned} \implies \exists x : f(x) &= a \\ \exists y : f(y) &= b. \end{aligned}$$

Poiché X è cpa $\implies \exists \alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$;

si prenda $\beta : [0, 1] \rightarrow f(X) \subseteq Y$, con $\beta = f \circ \alpha$; β è un cammino tra a e b .

[†] chiuso in A

[‡] chiuso in B

Esempio. (3.28) Data

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

si ha che S^n è cpa se $n \geq 1$.

Infatti, siano

$$A = S^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$$

$$B = S^n \cap \{x_{n+1} \leq 0\}$$

Noto che $A \cap B \neq \emptyset$, e che entrambi gli insiemi sono omeomorfi ad \mathbb{R}^n tramite

$$A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

Dunque $S^n = A \cup B$, con $A \cap B \neq \emptyset$ e A, B connessi per archi in quanto omeomorfi ad \mathbb{R}^n .

Osservazione. (3.29) In \mathbb{R} , si ha che gli insiemi convessi sono gli intervalli. I intervallo in \mathbb{R} significa

$$\forall a, b \in I, \quad a \leq x \leq b \implies x \in I$$

Lemma. (3.30) Dato $I \subseteq \mathbb{R}$, X connesso $\implies I$ intervallo

Dimostrazione di (3.30) Supponiamo sia $I \subseteq \mathbb{R}$, I non intervallo. Dunque

$$\exists a, b \in I, \quad \exists c : a < c < b \implies c \notin I$$

$$\implies I = \underbrace{[(-\infty, c) \cap I]}_{=:A} \cup \underbrace{[(c, +\infty) \cap I]}_{=:B}$$

$A \cup B = I$, aperti, non vuoti, disgiunti

$\implies I$ non connesso. ■

Teorema X.

Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

$$I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo} \implies f(I) \text{ è un intervallo}$$

Dimostrazione di X. I intervallo

$\implies I$ connesso

$\implies f(I)$ connesso

$\implies f(I)$ intervallo. ■

Questo teorema implica i teoremi di esistenza degli zeri e dei valori intermedi.

Esempio. (3.31) È vero che $[0, 1] \underset{\text{omeo}}{\sim} (0, 1)$?

Se esistesse $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ omeomorfismo, sia $c = f(0)$, e consideriamo $\tilde{f} : (0, 1) \rightarrow (0, 1) \setminus \{c\}$, ancora omeomorfismo. Ma questo è impossibile, poiché $(0, 1)$ è connesso, mentre $(0, 1) \setminus \{c\}$ no; questo è un assurdo, quindi

$$[0, 1] \not\underset{\text{omeo}}{\sim} (0, 1)$$

Esempio. (3.32) Similmente $[0, 1] \not\underset{\text{omeo}}{\sim} [0, 1)$

Lemma. (3.33) Sia $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua[†], con $n \geq 1$

$\implies \exists \mathbf{x} \in S^n$ tale che $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$

Dimostrazione di (3.33) Sia $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(-\mathbf{x})$,

$$g : S^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

La tesi diventa che

$$\exists \mathbf{x}_0 \in S^n : g(\mathbf{x}_0) = 0$$

Sia $\mathbf{y} \in S^n$, $a = g(\mathbf{y})$, $b = g(-\mathbf{y})$.

Noto che S^n connesso

$\implies g(S^n) \subseteq \mathbb{R}$ connesso

$\implies g(S^n)$ intervallo. $a, b \in g(S^n)$

$\implies \frac{a+b}{2} \in g(S^n)$, ma $\frac{a+b}{2} = 0 \in g(S^n)$

$\implies \exists \mathbf{x}_0 : g(\mathbf{x}_0) = 0$ ■

[†] Notiamo che $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$

Conseguenza. (3.34) Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, A aperto; $B \subseteq \mathbb{R}^n$, B aperto, non vuoti, $n \geq 2$.

Allora A, B non sono omeomorfi.

Conseguenza. (3.35) Equivalentemente, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoti.

$$A \underset{\text{omeo}}{\sim} B \implies n = 1$$

Dimostrazione di (3.35) Per assurdo sia $f : B \rightarrow A$ omeomorfismo. Sia $\mathbf{x}_0 \in B$

$$\implies \exists B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subseteq B \text{ palla aperta,}$$

$$\implies \overline{B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0)} \subseteq B \text{ palla chiusa.}$$

Poiché siamo in \mathbb{R}^n , si ha che

$$\partial \overline{B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0)} = S^{n-1}$$

Noto che $n - 1 \geq 1$. Per il lemma (3.33), si ha che

$$f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}$$

f continua non è iniettiva. ■

Teorema XI.

Teorema di invarianza della dimensione

Dati $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoti,

$$A \underset{\text{omeo}}{\sim} B \implies n = m$$

Questo teorema afferma che “gli aperti vedano la dimensione”.

Lemma. (3.36) Dato X spazio topologico, $Y \subseteq X$ connesso, $A \subseteq X$ e A sia aperto che chiuso, allora:

$$Y \cap A = \begin{cases} \emptyset \\ Y \text{ cioè } Y \subseteq A \end{cases}$$

Lemma. (3.37) Sia X spazio topologico, $\{Z_i\}_{i \in I}$ sottospazi connessi (i.e. $\forall i \in I$ Z_i connesso).

Sia $\bigcap_{i \in I} Z_i \neq \emptyset$ e sia $x_0 \in \bigcap_{i \in I} Z_i$, allora

$$W = \bigcup_{i \in I} Z_i \text{ è connesso}$$

Dimostrazione di (3.37) Sia $A \subseteq W$, A aperto, chiuso e non vuoto.

$$\forall i \quad Z_i \cap A = \begin{cases} \emptyset \\ Z_i \end{cases}$$

$W = \bigcup_{i \in I} Z_i$, A non vuoto

$$\implies \exists i_0 : Z_{i_0} \cap A = Z_{i_0} \neq \emptyset. \quad x_0 \in Z_{i_0} \subseteq A$$

$$\implies x_0 \in A$$

$$\implies \forall i, x_0 \in A \cap Z_i \neq \emptyset$$

$$\implies \forall i, A \cap Z_i = Z_i$$

$$\implies \forall i, Z_i \subseteq A$$

$$\implies W = \bigcup_{i \in I} Z_i \subseteq A \text{ che è la tesi.} \quad \blacksquare$$

Teorema XII.

Siano X, Y spazi topologici. Allora vale:

1. X, Y connessi $\iff X \times Y$ connesso;
2. X, Y connessi per archi $\iff X \times Y$ connesso per archi.

Dimostrazione di XII.

1. “ \Leftarrow ” La dimostrazione è semplice utilizzando le proiezioni.

“ \implies ” Noto che in $X \times Y$ tutte le “linee orizzontali” e “verticali” sono connesse.

Definiamo ora Zy come, dato x_0 fissato:

$$Zy := \{x_0\} \times Y \cup X \times \{y\}$$

con $y \in Y$ arbitrario.

Vale allora

$$\left. \begin{array}{l} X \times Y = \bigcup_{y \in Y} Zy \\ \bigcap_{y \in Y} Zy = \{x_0\} \times Y \end{array} \right\} \implies X \times Y \text{ connesso}$$

2. “ \Leftarrow ” La dimostrazione è semplice utilizzando le proiezioni.

“ \implies ” Siano $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$.

Per ipotesi, esistono α, β continue tali che

$$\begin{array}{ll} \alpha : [0, 1] \rightarrow X, & \alpha(0) = x_0, \quad \alpha(1) = x_1, \\ \beta : [0, 1] \rightarrow Y, & \beta(0) = y_0, \quad \beta(1) = y_1. \end{array}$$

Se consideriamo

$$\begin{array}{l} \gamma : [0, 1] \rightarrow X \times Y \\ t \mapsto (\alpha(t), \beta(t)) \end{array}$$

abbiamo dimostrato che $X \times Y$ è connesso per archi. ■

Lemma. (3.38) Sia X spazio topologico, $Y \subseteq X$, Y connesso. Sia W tale che

$$Y \subseteq W \subseteq \overline{Y} = \text{cl}_X(Y)$$

Allora W è connesso.

Dimostrazione di (3.38) Sia $Z \subseteq W$, Z aperto, chiuso in W e non vuoto. Devo dimostrare che $Z = W$, ovvero $W \subseteq Z$.

- $Z \cap Y$ è aperto in X e chiuso in Y (cosa aperta e chiusa nel sottospazio, e vale $Y \subseteq W$);

- per ipotesi Y è connesso;
- $\text{cl}_W(Y) = \text{cl}_X(Y) \cap W = \bar{Y} \cap W = W$ poiché $W \subseteq \bar{Y}$
 $\implies Y$ è denso in W , perciò incontra tutti gli aperti non vuoti di W
 $\implies Y \cap Z \neq \emptyset$
- Y connesso
 $\implies Y \cap Z = Y$, cioè $Y \subseteq Z$
 $\implies \text{cl}_W(Y) \subseteq \text{cl}_W(Z)$, ma $\text{cl}_W(Y) = W \subseteq \text{cl}_W(Z) \stackrel{\dagger}{=} Z$
 \implies segue l'enunciato. ■

Osservazione. (3.39) Se Y è connesso, allora anche \bar{Y} è connesso.

Esempio. (3.40) Sia $X = \mathbb{R}^2$,

$$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{x}, x > 0 \right\}$$

Y è connesso per archi (presi due punti, il cammino è sul grafico)

$\implies Y$ è connesso.

Trovo \bar{Y} , che per il lemma è connesso:

$$\bar{Y} = Y \cup (\{0\} \times [-1, 1])$$

Questo è perché tutti i punti tra -1 e 1 sono di accumulazione (i.e. esiste una successione a valore in Y che converge a quel valore) ma questo insieme non è connesso per archi.

Ogni insieme contenuto nella chiusura è connesso.

Esempio. (3.41) Su $X = \mathbb{R}^2$, un insieme

$$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1, x \in \mathbb{Q} \end{array} \right\} \cup ([0, 1] \times \{0\})$$

è definito pettine.

Ho che $\bar{Y} = [0, 1] \times [0, 1]$. Prendo $P = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ pulce, si ha che:

[†] Perché Z chiuso.

- la pulce ed il pettine $Y \cup P$ è connesso, poiché $Y \cup P \subseteq \overline{P}$
- $Y \cup P$ non è cpa
- Y è cpa.

Osservazione. (3.42) In \mathbb{R}^n con la topologia euclidea un insieme aperto è connesso se e solo se è connesso per archi (mentre questo non è vero in generale per i chiusi).

Definizione. (3.43) Dato X spazio topologico, $C \subseteq X$, si dice che C è una componente connessa (anche per archi) se

- C è connesso;
- $C \subseteq D$, D connesso $\implies C = D$.

Esempio. (3.44) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ha due componenti connesse:

$$C_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

$$C_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Definizione. (3.45) Sia $x \in X$, definisco $C(x)$ componente connessa di x come

$$C(x) := \bigcup_{Y \in \mathcal{Y}} Y, \quad \mathcal{Y} := \{Y \mid x \in Y, Y \text{ connesso}\}$$

unione di tutti i connessi che contengono x .

Osservazione. (3.46)

1. $x \in C(x)$ perché $Y = \{x\}$ è connesso (uno spazio con un punto solo è connesso perché ha solo la topologia banale);
2. $C(x)$ è connesso perché unione di connessi con intersezione non vuota (x è all'intersezione);
3. $C(x) \subseteq D$, D connesso
 $\implies D$ è uno degli elementi dell'unione
 $\implies D = C(x)$.

Teorema XIII.

Sia X spazio topologico; allora

1. le componenti connesse sono chiuse (non è vero per le componenti connesse per archi);
2. le componenti connesse formano una partizione di X .

Dimostrazione di XIII.

1. Se C è una componente connessa

$$\implies C \subseteq \overline{C} \text{ ma } \overline{C} \text{ è connessa}$$

$$\implies C = \overline{C}$$

$\implies C$ chiusa. Notiamo che in generale non è vero che \overline{C} è cpa se C è cpa.

2. $\forall x \in X, x \in C(x)$, allora:

$$(a) \bigcup_{x \in X} C(x) = X;$$

- (b) siano C, D due componenti connesse, tali che $C \cap D \neq \emptyset$ (se la loro intersezione fosse vuota avrei già finito)

$$\implies \begin{aligned} C &\subseteq C \cup D \\ D &\subseteq C \cup D \end{aligned}$$

con $C \cup D$ connesso poiché unione di connessi non disgiunti

$$\implies C = C \cup D = D. \quad \blacksquare$$

Esempio. (3.47) $X = \mathbb{Q}$ con la topologia indotta da \mathbb{R} , allora sia $C \subseteq X$, $a, b \in C$, $a \neq b$

$$\implies \exists r \in (a, b), r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

$$\implies C = ((-\infty, r) \cap C) \cup ((r, +\infty) \cap C)$$

$$\implies C \text{ non è connesso}$$

$$\implies \text{le componenti connesse sono solo i singoli punti.}$$

\mathbb{Q} si dice totalmente sconnesso.

Definizione. (3.48) *Uno spazio topologico si dice totalmente sconnesso se le uniche componenti connesse sono i singoli punti.*

Esercizio. (3.49) Svolgere l'esercizio 4.16 di [Man14] (suggerimento: usare l'induzione).

Osservazione. (3.50) Un omeomorfismo manda componenti connesse in componenti connesse. Se due insiemi hanno diverse quantità di componenti connesse allora non sono omeomorfi.

Dunque il numero di componenti connesse è una proprietà topologica.

3.3 Compattezza

Osservazione. (3.51) La compattezza è diversa dalla compattezza per successioni studiata in analisi, e queste due caratteristiche non si implicano l'una con l'altra.

Definizione. (3.52) *Sia X spazio topologico. Un ricoprimento di X è una famiglia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ tale che*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = X \quad (3.1)$$

Un ricoprimento si dice aperto se $\forall i \in I$, A_i è aperto in X .

Un ricoprimento si dice finito se I è un insieme finito

Diciamo \mathcal{B} un sottoricoprimento di \mathcal{A} se, dato $J \subseteq I$

$$\mathcal{B} = \{A_j\}_{j \in J} \quad \text{t.c.} \quad \bigcup_{j \in J} A_j = X$$

Definizione. (3.53) *X si dice compatto se da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.*

Esempio. (3.54)

1. \mathbb{R} e \mathbb{R}^n non sono compatti con la topologia euclidea. Sia

$$A_i = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t. c. } \|x\| < i\}_{i \in \mathbb{N}}$$

Noto che $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathbb{R}^n$, poiché sono le palle aperte centrate nell'origine

\implies questo ricoprimento non ammette sottoricoprimenti finiti.

2. X topologia discreta,

$$X \text{ compatto} \iff X \text{ finito.}$$

3. X con la topologia dei complementari di finiti

$\implies X$ compatto, in quanto un aperto copre quasi tutto, eccetto una quantità finita di punti: $X = \bigcup_{i \in I} A_i$;

$$A_0 = X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$$

$\implies \forall j = 1, \dots, n \exists A_j$ tale che $x_j \in A_j$

$\implies X = A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_n$, ovvero esiste un sottoricoprimento finito con $n + 1$ elementi.

Teorema XIV.

Dati X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua, X compatto

$\implies f(X)$ è compatto

Questo teorema implica che la compattezza è una proprietà topologica.

Dimostrazione di XIV. Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ tale che

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

con A_i aperti di Y^\dagger .

Si ha che $\{f^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X

[†] B aperto in $f(X)$ se e solo se $\exists A \subseteq Y$ aperto tale che $B = Y \cap A$.

X compatto

$$\implies X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_n)$$

$$\implies f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$$

■

Teorema XV.

$[0, 1]$ con la topologia euclidea è compatto

Dimostrazione di XV. Supponiamo $[0, 1] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, A_i aperti di \mathbb{R} . Sia

$$X = \left\{ t \geq 0 \mid [0, t] \subseteq \bigcup_{\text{finita}} A_i \right\}$$

Questo non è sufficiente, perché è un caso specifico, e non vale per ogni ricoprimento.

- $0 \in X$, poiché $[0, 0] = \{0\}$

$$\implies \exists i_0 \text{ tale che } 0 \in A_{i_0}$$

$$[0, 0] \subseteq A_{i_0} \text{ unione finita } \implies 0 \in X \implies X \neq \emptyset.$$

- Poiché $X \neq \emptyset$

$$\implies \exists b := \sup X$$

– Se $b > 1$

$$\implies \exists t \in X \text{ tale che } 1 \leq t \leq b$$

$$\implies [0, 1] \subseteq [0, t] \subseteq \bigcup_{\text{finita}} A_i.$$

– Se $b \leq 1$ dimostriamo un assurdo.

$$\implies b \in [0, 1] \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$$

$\implies \exists A \in \mathcal{A}$ tale che $b \in A$, ma A aperto in \mathbb{R} con la topologia euclidea

$$\implies \exists \delta > 0 \text{ tale che}$$

$$(b - \delta, b + \delta) \subseteq A$$

$$\implies \exists t \in X \text{ tale che } b - \delta \leq t \leq b \text{ poiché } b = \sup X$$

$$\implies [0, t] \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$$

Sia $0 < h < \delta$

$$\implies [0, b+h] = [0, t] \cup [t, b+h] \text{ ma vale}$$

$$[0, t] \cup [t, b+h] \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A$$

$$\implies b+h \in X \text{ e } b+h > b$$

$$\implies b \neq \sup X. \text{ Contraddizione.} \quad \blacksquare$$

Teorema XVI.

Sia X spazio topologico, X compatto. $C \subseteq X$ chiuso.

Allora C è compatto

“Un chiuso in un compatto è compatto”

Dimostrazione di XVI. Sia $\mathcal{A} = A_i_{i \in I}$ ricoprimento aperto di C . La tesi è che

$$C \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \text{ aperti in } X$$

Sia $A = X \setminus C$ aperto

$$\implies \{A_i, A\} \text{ ricoprimento aperto di } X, \text{ ma } X \text{ è compatto}$$

$$\implies \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \text{ tale che}$$

$$X = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$\implies C \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n \text{ sottoricoprimento finito di } \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

Teorema XVII.

L'unione finita di compatti è compatta.

Attenzione. (3.55) In generale, l'intersezione di compatti non è compatta.

Teorema XVIII.

Dato X spazio topologico di Hausdorff, $Y \subseteq X$, Y compatto, allora Y è chiuso.

“Un compatto in un Hausdorff è chiuso.”

Dimostrazione di XVIII. Y chiuso $\iff A = X \setminus Y$ aperto. Dimostriamo che A è intorno di ogni suo punto.

Tesi: sia $x_0 \in A$, $\exists U \in I(x_0)$ tale che $U \subseteq A$ ovvero $U \cap Y = \emptyset$.

$\forall y \in Y, y \neq x_0$

\implies poiché X Hausdorff $\exists U_y \in I(x_0), \exists V_y \in I(y)$ tale che $U_y \cap V_y = \emptyset^\dagger$.

$$\bigcup_{y \in Y} V_y \supseteq Y$$

i.e. $\{V_y\}$ ricoprimento aperto di Y .

Ma Y è compatto

$\implies \exists y_1, \dots, y_n$ tali che

$$Y \subseteq V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$$

Poniamo $U = U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n}$

$\implies U \in I(x_0)$

$\implies U \cap (V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}) = \emptyset$

$\implies U \cap Y = \emptyset$. ■

Corollario. (3.56) Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

K compatto $\iff K$ chiuso e limitato.

[†] Non è detto che $U_y \cap Y = \emptyset$, e prendiamo U_y, V_y interni aperti

Dimostrazione di (3.56)

“ \implies ” \mathbb{R} Hausdorff

$\implies K$ chiuso.

Sia $A_n = K \cap (-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$

$$K \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{ricoprimento aperto}$$

K compatto

$\implies \exists$ sottoricoprimento finito, cioè

$$\exists \bar{n} : K \subseteq (-\bar{n}, \bar{n}) = B_{\bar{n}}(0) \text{ limitato}$$

$\bar{n} = \max\{n\}$ con $n \in$ sottoricoprimento finito.

“ \impliedby ” Viceversa K limitato

$\implies \exists n_0 : K \subseteq [-n_0, n_0]$ omeomorfo a $[0, 1]$ compatto

$\implies [-n_0, n_0]$ compatto, K chiuso contenuto nel compatto

$\implies K$ compatto. ■

Corollario. (3.57) Sia X spazio topologico compatto, e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua, \mathbb{R} con la topologia euclidea.

Allora f ammette massimo e minimo.

Dimostrazione di (3.57) $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ compatto

$\implies f(X)$ chiuso e limitato

$\implies \sup f(X), \inf f(X) \in \mathbb{R}$ (perché limitato),
 $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$ (perché chiuso)

$\implies f(X)$ ha massimo e minimo. ■

Tube Lemma. (3.58) Siano X, Y spazi topologici, Y compatto.

Sia $x_0 \in X$ e supponiamo $\exists A$ aperto tale che $\{x_0\} \times Y \subseteq A$.

Allora: $\exists U \subseteq X$, U aperto tale che

$$\{x_0\} \times Y \subseteq \underbrace{U \times Y}_\dagger \subseteq A.$$

Osservazione. (3.59) Poiché nel lemma precedente è richiesta la compattezza di Y , non si possono avere asintoti verticali, poiché non si può tendere all'infinito.

Dimostrazione di (3.58) A aperto in $X \times Y$ è unione di aperti della base, ovvero

$$A = \bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i), \quad \begin{array}{l} U_i \subseteq X \text{ aperto } \forall i \in I \\ V_i \subseteq Y \text{ aperto } \forall i \in I \end{array}$$

Allora $\{U_i \times V_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di $\{x_0\} \times Y$, che è omeomorfo a Y

$\Rightarrow \{x_0\} \times Y$ è compatto

$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito tale che

$$\{x_0\} \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \dots \cup (U_n \times V_n)$$

Poniamo $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$

$\Rightarrow U \times Y \subseteq (U_1 \times V_1) \cup \dots \cup (U_n \times V_n) \subseteq A.$ ■

Teorema XIX.

X, Y sono spazi topologici compatti $\iff X \times Y$ è spazio topologico compatto.

Dimostrazione di XIX.

“ \Leftarrow ” Questa implicazione è ovvia, basta usare le proiezioni.

“ \Rightarrow ” Sia \mathcal{A} un ricoprimento aperto di $X \times Y$.

$\forall x \in X$, consideriamo $\{x\} \times Y$, coperto da \mathcal{A} .

Per la compattezza di Y , poiché $Y \sim \{x\} \times Y$

$$\implies \{x\} \times Y \subseteq A_{x,1} \cup A_{x,2} \cup \dots \cup A_{x,n_x}^\dagger \text{ con } A_{x,i} \in \mathcal{A} \forall x, i.$$

Poniamo $A_x := A_{x,1} \cup A_{x,2} \cup \dots \cup A_{x,n_x}$

$\implies \{x\} \times Y \subseteq A_x$, allora, per il *tube lemma*, $\exists U_x$ aperto in X tale che

$$\{x\} \times Y \subseteq U_x \times Y \subseteq A_x$$

Al variare di $x \in X$ trovo gli aperti U_x :

$\{U_x\}_{x \in X}$ è ricoprimento aperto di X

Poiché X è compatto

$$\implies X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}.$$

$X \times Y = p^{-1}(X)$, con p proiezione su X

$$\begin{aligned} p^{-1}(X) &= p^{-1}(U_{x_1}) \cup \dots \cup p^{-1}(U_{x_m}) \\ &= (U_{x_1} \times Y) \cup \dots \cup (U_{x_m} \times Y) \\ &\subseteq A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \dots \cup A_{x_m} \\ &= (A_{x_1,1} \cup \dots \cup A_{x_1,n_{x_1}}) \cup \dots \end{aligned}$$

che è un sottoricoprimento finito. ■

Osservazione. (3.60)

1. Per induzione, il prodotto finito di compatti è compatto.
2. Vediamo ora il caso dei prodotti infiniti. Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici:

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i : f(i) \in X_i, \forall i \in I \right\}$$

la proiezione è data da

$$\begin{aligned} p_i : X &\rightarrow X_i \\ f &\mapsto f(i) \end{aligned}$$

Su X la topologia prodotto è la meno fine che rende continue tutte le proiezioni.

[†] Notiamo che n_x dipende dal punto x iniziale.

Teorema XX.

Teorema di Tychonoff

Il prodotto^a di compatti è compatto.

^a Si considera anche il prodotto infinito, con la topologia sopra citata.
Vedi [Man14, parr. 7.1, 7.2]

Il teorema di Tychonoff è equivalente all'assioma di scelta.

Teorema XXI.

Siano X, Y spazi topologici, Y compatto.

Allora $p : X \times Y \rightarrow X$ proiezione è chiusa.

Dimostrazione di XXI. Sappiamo che le proiezioni sono chiuse. La tesi è che:

$$C \subseteq X \times Y \text{ chiuso} \implies p(C) \text{ chiuso in } Y$$

- Caso 1: $p(C) = X$ chiuso.
- Caso 2: $p(C) \neq X$.

$p(C)$ è chiuso

$$\iff X \setminus p(C) \text{ è aperto}$$

$$\iff \text{è intorno di ogni suo punto.}$$

Sia $x_0 \in X \setminus p(C)$

$$\implies (\{x_0\} \times Y) \cap C = \emptyset \text{ (due rette disgiunte)}$$

$$\implies \{x_0\} \times Y \subseteq (X \times Y) \setminus C = A \text{ aperto.}$$

Ma Y è compatto

$$\implies \text{per il tube lemma } \exists U \subseteq X \text{ aperto tale che}$$

$$\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq A$$

$$\implies U \subseteq X \setminus p(C) \text{ e } U \in \mathcal{I}(x_0).$$

■

Teorema XXII.**Teorema di Kuratowski - Mrówka**

Y spazio topologico è compatto

$\iff \forall X$ spazio topologico, la proiezione

$$p : X \times Y \rightarrow X \quad \text{è chiusa.}$$

Teorema XXIII.

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto

$\iff K$ è chiuso e limitato.

Dimostrazione di XXIII.

“ \implies ” Come nel caso per $n = 1$.

“ \impliedby ” Viceversa, se K è limitato

$\implies \exists a \geq 0$ tale che $K \subseteq [-a, a]^n$ (se sta in una palla allora sicuramente sta nel cubo)

$$[-a, a]^n = \underbrace{[-a, a] \times \cdots \times [-a, a]}_{n \text{ volte}}$$

Poiché $[-a, a]$ è compatto (chiuso e limitato in \mathbb{R})

$\implies [-a, a]^n$ è compatto perché prodotto di compatti

$\implies K$ compatto (poiché K chiuso). ■

Attenzione. (3.61) Se X spazio metrico, l'affermazione

$$K \subseteq X \text{ è compatto} \iff K \text{ è chiuso e limitato}$$

“ \implies ” è sempre vera;

“ \impliedby ” tende ad essere falsa.

Esempio. (3.62) Sia X un insieme infinito con una metrica discreta, i.e.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Si ha che X non è compatto, ma X è chiuso e X è limitato (poiché $X \subseteq D_1(x)$).

Teorema XXIV.

Sia $f : X \rightarrow Y$ continua, X compatto, U di Hausdorff

$\implies f$ è chiusa.

Dimostrazione di XXIV. Sia C chiuso in X . La tesi è che $f(C)$ sia chiuso in Y .

- C chiuso, X compatto $\implies C$ compatto.
- C compatto, f continua $\implies f(C)$ compatto.
- $f(C)$ compatto, Y Hausdorff $\implies f(C)$ è chiuso. ■

Capitolo 4

Gruppi topologici

Definizione. (4.1) G è un gruppo topologico se:

- G è un gruppo;
- G è uno spazio topologico;
- le funzioni

$$\begin{array}{ll} \cdot : G \times G \rightarrow G & (\)^{-1} : G \rightarrow G \\ (x, y) \mapsto xy & x \mapsto x^{-1} \end{array}$$

sono continue.

Esempi. (4.2)

- $(\mathbb{R}^n, +)$ e $(\mathbb{C}^n, +)$ con la topologia euclidea;
- (\mathbb{R}^*, \cdot) e $(\mathbb{C}^*, \cdot)^\dagger$ con la topologia euclidea. Volendo generalizzare questo concetto in più dimensioni:
 - (T^n, \cdot) con la moltiplicazione definita come

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = \\ &= (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n) \end{aligned}$$

[†] Definiamo $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$

definendo[†] T^n come

$$T^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \neq 0\}$$

Esempi di gruppi topologici. (4.3) Consideriamo $GL(n, \mathbb{R})$ gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili.

Notiamo che $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n^2}$, quindi se consideriamo \mathbb{R}^{n^2} con la topologia euclidea, associamo a $GL(n, \mathbb{R})$ la topologia di sottospazio. Vale che

$$\mathbb{R}^* = GL(1, \mathbb{R})$$

Se consideriamo la funzione $\det : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua; si ha che

$$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

$\implies GL(n, \mathbb{R})$ è un aperto di $\mathbb{R}^{n,n}$, in quanto \mathbb{R}^* è aperto in \mathbb{R} .

Inoltre, si ha che

$$SL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$$

$\implies SL(n, \mathbb{R})$ è chiuso in $\mathbb{R}^{n,n}$

Riprendendo alcune notazioni, si ha $O(n)$ il gruppo ortogonale

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A \times {}^t A = \text{Id}\}$$

e $U(n)$ gruppo unitario

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A \cdot {}^t \overline{A} = \text{Id}\}$$

e inoltre

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$$

$$SU(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$$

Tutti questi gruppi sono considerati con la topologia di sottospazio.

Esercizio. (4.4) Stabilire le compattezza dei gruppi dell'esempio (4.3)

[†] Questo è un toro n -dimensionale

Soluzione (4.4).

- $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ non sono compatti, in quanto non sono chiusi.
- $SL(n, \mathbb{R})$ e $SL(n, \mathbb{C})$:
 - se $n = 1$ è compatto (infatti $SL(1, \mathbb{R}) = \{1\}$);
 - se $n \geq 2$ non è compatto, infatti non è limitato:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \text{per } x \rightarrow \infty \text{ non è limitato.}$$

- $O(n)$ è compatto: infatti, per $A \in O(n)$, deve valere $A^t A = \text{Id}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero n^2 equazioni nelle incognite a_{ij}

$\implies O(n)$ è chiuso in quanto luogo di soluzioni di equazioni nelle variabili a_{ij} .

Poiché $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n^2}$ possiamo valutare la distanza di due matrici in $O(n)$. In particolare

$$\forall i \quad a_{1i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = 1 \implies \sum_{i,j} a_{ij}^2 = n$$

e dunque $\forall A \in O(n)$ vale $d(\underline{0}, A) = \sqrt{n}$

$\implies \forall k > \sqrt{n}$ si ha che $O(n) \subseteq B_k(\underline{0})$, e quindi $O(n)$ è limitato, e quindi compatto[†].

- $U(n)$ è compatto.
- $SO(n) \subseteq O(n)$ è compatto in quanto chiuso in un compatto.

[†] Notiamo che vale la stessa cosa per $U(n)$, in quanto nel campo dei complessi il quadrato della norma di z si ottiene moltiplicando z con il suo complesso coniugato.

Proprietà di qualunque gruppo topologico. (4.5) Sia G gruppo topologico.

1. Fissato $a \in G$, consideriamo

$$\begin{array}{ll} L_a : G \rightarrow G & R_a : G \rightarrow G \\ b \mapsto ab & b \mapsto ba. \end{array}$$

Queste funzioni sono chiamate rispettivamente left e right translation.

L_a, R_a sono omeomorfismi. Infatti:

- L_a è biunivoco, perché $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$;
- L_a è continua perché G è gruppo topologico (quindi l'operazione è continua per ipotesi);
- $(L_a)^{-1}$ è continua perché è una traslazione come L_a .

2. Sia $e \in G$ l'elemento neutro di G ; si ha che

$$G \text{ è di Hausdorff } \iff \{e\} \text{ è chiuso}$$

Infatti:

“ \implies ” Ovvio in quanto Hausdorff implica T_1 .

“ \impliedby ” Consideriamo

$$\begin{array}{l} h : G \times G \rightarrow G \\ (a, b) \mapsto ab^{-1} \end{array}$$

funzione continua.

$$h^{-1}(\{e\}) = \{(a, b) \in G : a = b\} = \Delta \subseteq G \times G$$

Poiché per ipotesi $\{e\}$ è chiuso, $h^{-1}(\{e\})$ è chiuso, e quindi la diagonale è chiusa. ■

Lemma. (4.6) Sia $f : X \rightarrow Y$; se

- f continua e suriettiva;
- Y connesso;
- $\forall y \in Y, f^{-1}(y)$ connesso;

- f aperta, oppure f chiusa;

allora X è connesso.

Dimostrazione di (4.6) Sia $X = A_1 \cup A_2$, A_1, A_2 aperti[†] non vuoti.

Dimostriamo che $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

- $Y = f(X) = f(A_1) \cup f(A_2)$;
- f aperta $\implies f(A_1), f(A_2)$ aperti non vuoti in Y ;
- Y connesso

$$\implies f(A_1) \cap f(A_2) \neq \emptyset$$

$$\implies \text{sia } y_0 \in f(A_1) \cap f(A_2)$$

$$\begin{aligned} & f^{-1}(y_0) \cap A_1 \neq \emptyset, \text{ aperto di } f^{-1}(y_0) \\ \implies & f^{-1}(y_0) \cap A_2 \neq \emptyset, \text{ aperto di } f^{-1}(y_0) \end{aligned}$$

- $X = A_1 \cup A_2$

$$\implies [f^{-1}(y_0) \cap A_1] \cup [f^{-1}(y_0) \cap A_2] = f^{-1}(y_0)$$

- $f^{-1}(y_0)$ connesso

$$\implies [f^{-1}(y_0) \cap A_1] \cap [f^{-1}(y_0) \cap A_2] \neq \emptyset$$

$$\implies f^{-1}(y_0) \cap [A_1 \cap A_2] \neq \emptyset$$

$$\implies A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \quad \blacksquare$$

Esercizio. (4.7) Stabilire le connessioni dei gruppi dell'esempio (4.3)

Soluzione (4.7).

- $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ non è connesso, poiché unione di aperti con intersezione vuota:

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}((-\infty, 0)) \cup \det^{-1}((0, \infty))$$

e scriviamo

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \text{GL}^-(n, \mathbb{R}) \cup \text{GL}^+(n, \mathbb{R})$$

[†] Dimostriamo il caso in cui f aperta: il caso con f chiusa è identico, sostituendo ad insiemi aperti insiemi chiusi.

- $O(n)$ non è connesso, poiché unione di aperti con intersezione vuota:

$$O(n) = O^+(n) \cup O^-(n)$$

con

$$O^+(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$$

$$O^-(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = -1\}$$

Teorema XXV.

L'insieme

$$\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det A > 0\}$$

è connesso.

Dimostrazione di XXV. Dimostrazione per induzione su n .

Passo iniziale $n = 1$: $\mathrm{GL}^+(1, \mathbb{R}) = (0, +\infty)$ è connesso.

Passo induttivo per $n \geq 2$: supponiamo $\mathrm{GL}^+(n-1, \mathbb{R})$ connesso.

- Sia $\mathbf{p} : \mathbb{R}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che per A così definita:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & \end{pmatrix} \implies \mathbf{p}(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Posso quindi vedere $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n,n-1}$: \mathbf{p} è la proiezione sul primo fattore

$\implies \mathbf{p}$ aperta.

- Considero ora quindi $\mathbf{p} : \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ restrizione di \mathbf{p} a $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$.
- Verifichiamo quindi le ipotesi del lemma (4.6)
 - \mathbf{p} è continua;
 - \mathbf{p} è aperta: sì, in quanto restrizione di una funzione aperta ad un sottospazio aperto;

- \mathbf{p} è suriettiva per il teorema di completamento della base (modificando opportunamente il segno del determinante);
- $\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ è connesso, poiché è connesso per archi (solo perché $n \geq 2$).
- Bisogna ora dimostrare che $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ vale $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{v})$ è connesso;

$$\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{v}) = \{\text{matrici invertibili con prima colonna } \mathbf{v}\}$$

1. Sia $\mathbf{v} = (1, 0, \dots, 0)$;

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{-1}((1, 0, \dots, 0)) &=_{\dagger} \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \left[& & & \right] \\ \vdots & & A' & & \\ 0 & \left[& & & \right] \end{array} \right) \\ &=_{\text{omeo}} \mathbb{R}^{n-1} \times \text{GL}^+(n-1, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

connesso perché prodotto di connessi.

2. È noto[‡] che dati $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ si ha che

$$\mathbf{p}(AB) = A\mathbf{p}(B)$$

Sia $\mathbf{v} \neq \underline{0}$ arbitrario. Fissiamo $A \in \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{v})$.

Allora

$$L_A(\mathbf{p}^{-1}(1, 0, \dots, 0)) = \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{v}).$$

Infatti:

“ \subseteq ” Sia $B \in \mathbf{p}^{-1}((1, 0, \dots, 0))$

$$\Rightarrow B = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & & \\ 0 & & * & & \\ \vdots & & & & \end{array} \right)$$

[†] con $\det A' > 0$

[‡] dimostrarlo da soli.

$$\implies L_A(B) = AB, \text{ ma } \mathbf{p}(AB) = A\mathbf{p}(B) \text{ e}$$

$$A\mathbf{p}(B) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{p}(A) = \mathbf{v}$$

“ \supseteq ” Sia $C \subseteq \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{v})$.

Poniamo $B = A^{-1}C$; è chiaro che $L_A(B) = AA^{-1}C = C$.
Vale quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(B) &= \mathbf{p}(A^{-1}C) = A^{-1} \underbrace{\mathbf{p}(C)}_{=\mathbf{v}} = A^{-1} \underbrace{\mathbf{p}(A)}_{=\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{p}(A^{-1}A) = \mathbf{p}(I) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Poiché L_A è omeomorfismo allora $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{v})$ è omeomorfo ad uno spazio connesso, e quindi è connesso. ■

Osservazione. (4.8) Il gruppo topologico $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ è connesso. Infatti, data

$$\begin{aligned} f : \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \\ A &\mapsto A' \end{aligned}$$

dove A' è la matrice ottenuta da A riscalando la prima colonna di A per $\frac{1}{\det(A)}$, lasciando le altre colonne invariate:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \implies A' = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\det(A)} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{a_{21}}{\det(A)} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{a_{n1}}{\det(A)} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Osservo che $f(A) \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$.

- f è continua, in quanto stiamo dividendo per una quantità non nulla;
- f è suriettiva, perché $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ e vale $f|_{\mathrm{SL}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{SL}}$

$\Rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ è immagine del connesso $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ è connesso.

Inoltre, $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ è aperto in $\mathbb{R}^{n,n} = \mathbb{R}^{n^2}$ e $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ è connesso

$\Rightarrow \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ è connesso per archi

$\Rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ è connesso per archi (in quanto immagine di un cpa).

Osservazione. (4.9) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è connesso per archi (e quindi connesso). Questo si dimostra in maniera molto simile a quanto fatto per $\mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$, usando la forma canonica di Jordan[†].

Osservazione. (4.10) $\mathrm{SO}(n)$ è connesso, infatti consideriamo

$$\begin{aligned} \mathbf{p} : \mathrm{SO}(n) &\rightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} \\ A &\mapsto \mathbf{a} \end{aligned}$$

con \mathbf{a} la prima colonna di A (di norma 1, quindi $\in S^{n-1}$). Ragioniamo per induzione su n :

$n = 1$: $\mathrm{SO}(1) = \{1\}$ che è connesso;

[†] Un approfondimento è disponibile al seguente link: https://github.com/DavideP02/approfondimenti_geo2/blob/c80481cd802d7a352df950a41ccbc15c0146b7a2/Forma%20Di%20Jordan.pdf

- $n \geq 2$:
- \mathbf{p} è continua (poiché è restrizione di una proiezione);
 - \mathbf{p} è chiusa, infatti $SO(n)$ è compatto e S^n è di Hausdorff;
 - S^{n-1} è connesso poiché $n \geq 2$ (vedi esempio (3.28));
 - \mathbf{p} è suriettiva: completamento della base + Gram-Schmit
 - $\forall \mathbf{v} \in S^{n-1}$, si ha che $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{v})$ è connesso, infatti le controimmagini sono omeomorfe (come nel caso GL^+).
- Consideriamo $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots) \implies$

$$\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{e}_1) = \left(\begin{array}{c} 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \left[\begin{array}{c} \\ \\ A' \\ \end{array} \right] \right)$$

$$\det(A) = 1 \cdot \det(A') \implies A' \in SO(n-1)$$

noto che $SO(n-1)$ è connesso per ipotesi induttiva, quindi $\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{e}_1)$ è connesso poiché

$$\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{e}_1) = SO(n-1) \quad \blacksquare$$

Capitolo 5

Topologia Quoziente

Definizione. (5.1) Sia X spazio topologico, Y insieme, $f : X \rightarrow Y$ funzione suriettiva[†].

La topologia quoziente è la topologia più fine che rende f continua.

Teorema XXVI.

La topologia quoziente su Y è \mathcal{T} tale che

$$A \subseteq Y, \quad A \in \mathcal{T} \iff f^{-1}(A) \text{ aperto in } X$$

Dimostrazione di XXVI.

1. Dimostrare per esercizio che \mathcal{T} è una topologia.
2. f è continua rispetto a \mathcal{T} per la definizione stessa di \mathcal{T} (verso “ \implies ”).
3. \mathcal{T} è la topologia più fine che rende f continua: infatti, sia $B \notin \mathcal{T}$, B aperto in una certa topologia più fine di \mathcal{T}
 $\implies f^{-1}(B)$ non è aperto in X (per l’implicazione “ \impliedby ”)

[†] Consideriamo la relazione di equivalenza

$$\forall a, b \in X, \quad a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

e chiamiamo Y insieme quoziente. Dalla relazione di equivalenza si costruisce sempre una funzione suriettiva, cioè la proiezione sul quoziente $X/\sim = Y$

$\implies f$ non è continua con quella topologia. ■

Esempio. (5.2) Ho \sim una relazione di equivalenza su X spazio topologico, considero

$$\pi : X \rightarrow X/\sim$$

la proiezione al quoziente. Su X/\sim pongo la topologia quoziente.

(5.3) Notiamo che ciascuna relazione di equivalenza è associata univocamente ad una funzione suriettiva sull'insieme quoziente.

Esempio: contrazione ad un punto. (5.4) Sia X spazio topologico, $A \subseteq X$ sottoinsieme.

$$\forall a, b \in X, \quad a \sim b \iff \begin{cases} a = b \\ a, b \in A \end{cases}$$

Osservazione. (5.5)

- Quozienti di Hausdorff non sono necessariamente Hausdorff.
- Quozienti di connessi sono connessi (vale per la connessione per archi).
- Quozienti di compatti sono compatti.

Esempio. (5.6) Consideriamo \sim la relazione di equivalenza di contrazione ad un punto.

- Sia $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1)$, e considero X/\sim .

Poiché \mathbb{R} è connesso, X/\sim è connesso. Inoltre, notiamo che $X/\sim \neq \mathbb{R}$, poiché non è Hausdorff.

- Sia $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$. $X/A \underset{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{R}$.
- Se $X = [0, 1]$, $A = \{0, 1\}$, allora $X/A \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow h & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Figura 5.1: Questo è un diagramma commutativo: tutti i modi di andare da un punto ad un altro sono uguali. Le frecce continue sono ipotesi, mentre quella tratteggiata è la tesi.

Osservazione. (5.7) Siano X, Y insiemi, f suriettiva; sia \sim una relazione di equivalenza su X e sia π la proiezione sul quoziente.

Ci chiediamo se

$$\exists h : X/\sim \rightarrow Y, \text{ tale che } h \circ \pi = f$$

come si vede dal diagramma commutativo di figura 5.1.

Osserviamo che \sim non è quella indotta da f .

Allora: h esiste $\iff f$ è costante sulle fibre di π , ovvero

$$\pi(a) = \pi(b) \implies f(a) = f(b)$$

- h è suriettiva poiché f è suriettiva ($h \circ \pi = f$ suriettiva);
- h è iniettiva: deve essere che

$$h([a]) = h([b]) \implies [a] = [b]$$

Noto che $h([a]) = f(a)$

$$f(a) = f(b) \implies a \sim b \iff \pi(a) = \pi(b)$$

(viceversa del passaggio al quoziente).

Perciò h esiste ed è biunivoca $\iff \forall a, b \in X$

$$a \sim b \iff f(a) = f(b)$$

Definizione. (5.8) Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua e suriettiva. Diciamo che f è una identificazione se Y ha la topologia quoziente rispetto a f , cioè

$$A \subseteq Y \text{ è aperto} \iff f^{-1}(A) \subseteq X \text{ è aperto.}$$

Esercizio. (5.9) Scrivere un esempio di $f : X \rightarrow Y$ continua e suriettiva che non sia un'identificazione.

Osservazione. (5.10) f è identificazione \iff

data la relazione di equivalenze $a \sim b \iff f(a) = f(b)$ vale

$$X / \underset{\text{omeo}}{\sim} Y$$

Lemma. (5.11) Data $f : X \rightarrow Y$ continua e suriettiva, se f è chiusa (oppure f è aperta)

$\implies f$ è una identificazione (aperta o chiusa).

Dimostrazione di (5.11) Supponiamo che f sia chiusa. La tesi è che $C \subseteq Y$ chiuso in $Y \iff f^{-1}(C)$ è chiuso nella topologia quoziente di X .

“ \implies ” Ovvio, poiché f continua.

“ \impliedby ” f suriettiva

$$\implies f(f^{-1}(C)) = C, f \text{ chiusa}$$

$$\implies C \text{ chiuso, infatti è immagine di un chiuso}^\dagger.$$

■

Proprietà universale della topologia quoziente. (5.12) Sia

$$f : X \rightarrow Y$$

un'identificazione. Sia $g : X \rightarrow Z$ continua (con Z spazio topologico).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow f & \\ & & Y \end{array}$$

Ci chiediamo se $\exists h : Y \rightarrow Z$ continua tale che

$$g = h \circ f$$

$^\dagger f^{-1}(C)$ è chiuso per ipotesi.

(e in tal caso si dice che g passa al quoziente.)

La condizione necessaria (insiemistica) è che g deve essere costante sulle fibre di f (ovvero sulle classi di equivalenze in X .)

Quindi

$$\begin{aligned} \exists h : Y \rightarrow Z \text{ continua} : g &= h \circ f \\ \iff g &\text{ è costante sulle fibre di } f \end{aligned}$$

Dimostrazione di (5.12)

“ \implies ” Siano $x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$. Allora

$$g(x_1) = h(f(x_1)) = h(f(x_2)) = g(x_2)$$

“ \impliedby ” Definiamo $h : Y \rightarrow Z$; sia $y \in Y$, f suriettiva

$$\implies \exists x \in X \text{ tale che } f(x) = y.$$

Poniamo $h(y) := g(x)$; h è ben definita perché per ipotesi h è costante in $f^{-1}(y)$.

Abbiamo $h : Y \rightarrow Z$ tale che $g = h \circ f$. Mostriamo ora che h è continua.

Sia $A \subseteq Z$ aperto. Vogliamo che $h^{-1}(A)$ aperto in Y .

$$f^{-1}(h^{-1}(A)) = g^{-1}(A)$$

aperto in X perché g è continua. Poiché Y ha la topologia quoziente

$$\implies h^{-1}(A) \text{ è aperto in } Y. \quad \blacksquare$$

Teorema XXVII.

Corollario 4.52, [Man14] e

Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff, e $f : X \rightarrow Y$ un'identificazione. Allora

$$Y \text{ è di Hausdorff} \iff f \text{ è chiusa.}$$

Esempio. (5.13)

- $X = [0, 1], A = \{0, 1\} \implies X/A \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1 (= Y).$

Consideriamo

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

f è continua, suriettiva e chiusa[†].

$\implies S^1$ è un qualche quoziente, ma bisogna capire se è effettivamente quello della relazione.

Notiamo che gli estremi hanno la stessa immagine, mentre il resto ha immagine unica

\implies il quoziente è lo stesso della relazione.

- $X = \mathbb{R}, A = [0, 1] \implies X/A \underset{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{R} (= Y).$

Consideriamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con

$$f(t) = \begin{cases} t & t < 0 \\ 0 & 0 \leq t \leq 1 \\ t - 1 & t > 1 \end{cases}$$

f è continua, suriettiva. f è chiusa, infatti, dato $C \subseteq \mathbb{R}$ chiuso

$$\implies C = (C \cap (-\infty, 0]) \cup (C \cap [0, 1]) \cup (C \cap [1, +\infty))$$

$$\implies f(C) = \{C \cap (-\infty, 0]\} \cup \begin{cases} \{0\} \\ \vee \\ \emptyset \end{cases} \cup \{C \cap [1, +\infty) - 1\}.$$

- Considero $D^1 = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ palla chiusa, $A = \{-1, 1\} = S^0 \subseteq \mathbb{R}$ sfera;
 $\implies D^1/S^0 = S^1.$

Studiamo il caso $D^2/S^1 = S^2$. Sia

$$\begin{aligned} f : D^2 &\rightarrow S^2 \\ (r, \theta) &\mapsto (a \cos \theta, a \sin \theta, 1 - 2r), \end{aligned}$$

[†] Poiché è un compatto in Hausdorff.

poiché deve valere che

$$a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + (1 - 2r)^2 = 1$$

$$\implies a = 2\sqrt{r(1-r)} \text{ con } r \in (0, 1).$$

In generale vale[†] $D^n/S^{n-1} = S^n$.

[†] Vedi esempio 5.7, [Man14].

Capitolo 6

Azioni di Gruppo[†]

6.1 Azioni di Gruppo su un insieme qualsiasi

Definizione. (6.1) *Un'azione del gruppo[‡] G sull'insieme X è una applicazione*

$$\begin{aligned}\varphi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

tale che

1. $1_G \cdot x = x \ \forall x \in X$;
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ \forall g, h \in G, \forall x \in X$.

Esempi. (6.2)

1. $X = \mathbb{R}^n$, $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, l'applicazione φ definita come segue è una azione:

$$\varphi(A, \mathbf{v}) = A\mathbf{v}.$$

2. $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$; G agisce su \mathbb{R} per traslazione:

$$\varphi(m, x) = x + m \in \mathbb{R}$$

[†] Questa parte è trattata basandosi sul Kosniowski, [Kos88]

[‡] Questa in particolare è una azione sinistra.

Osservazione. (6.3) Data un'azione di G su X , $\forall g \in G$ definiamo

$$\begin{aligned}\theta_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

con le proprietà (mutuate dalla definizione di azioni di gruppo):

1. $\theta_{1_G} = \text{Id}_X$;
2. $\theta_{gh} = \theta_g \circ \theta_h$.

In particolare vale

$$\theta_g \circ \theta_{g^{-1}} = \theta_{gg^{-1}} = \text{Id}_X = \theta_{g^{-1}} \circ \theta_g$$

dunque θ_g è biunivoca con inversa $\theta_{g^{-1}}$.

Se denoto $S(X)$ come il gruppo simmetrico dell'insieme X^\dagger , allora l'azione determina un'applicazione

$$\begin{aligned}\theta : G &\rightarrow S(X) \\ g &\mapsto \theta_g\end{aligned}$$

che è un omomorfismo di gruppi.

Esercizio. (6.4) Mostrare che dare un'azione di G su X è equivalente a dare un omomorfismo di gruppi $\theta : G \rightarrow S(X)$.

Osservazione. (6.5) Data un'azione di G su X abbiamo una relazione di equivalenza su X associata all'azione:

$$x \sim y \iff \exists g \in G : y = g \cdot x$$

Verifichiamo che è una relazione di equivalenza.

- Riflessiva: $x \sim x$ perché $x = 1_G \cdot x$.
- Simmetrica: sia $x \sim y$.

$\implies \exists g \in G$ tale che $y = g \cdot x$. Quindi

$$g^{-1} \cdot y = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = 1_G \cdot x = x.$$

[†] ovvero il gruppo delle $f : X \rightarrow X$ biunivoche

- Transitiva: sia $x \sim y$ e $y \sim z$

$$\implies \exists g, h \in G \text{ tali che } \begin{array}{l} y = g \cdot x \\ z = h \cdot y \end{array}$$

$$\implies z = h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x$$

$$\implies x \sim z.$$

Le classi di equivalenza in X si chiamano orbite. Dato $x \in X$,

$$[x] = O(x) = G \cdot x = \{y \in X : \exists g \in G, y = g \cdot x\}$$

L'insieme quoziente si indica con X/G detto spazio delle orbite.

Esempi. (6.6)

1. $X = \mathbb{R}^n$, $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, con $\varphi(A, \mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Si hanno solo due orbite, infatti

- se $\mathbf{v} = \underline{0}$, $A \cdot \underline{0} = \underline{0}$

$$\implies [\underline{0}] = \{\underline{0}\};$$

- se $\mathbf{v} \neq \underline{0}$:

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \setminus \underline{0} \exists A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$$

tale che $\mathbf{w} = A\mathbf{v}$

$$\implies [\mathbf{v}] = \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\};$$

$$\implies \mathbb{R}^n/G = \{[\underline{0}], [\mathbf{v}]\}.$$

2. $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, $\varphi(m, x) = x + m$. Si ha che

$$[0] = \mathbb{Z}, \quad [a] = a + \mathbb{Z}$$

quindi \mathbb{R}/\mathbb{Z} è in corrispondenza biunivoca con $[0, 1)$.

Definizione. (6.7) Dato $x \in X$, lo stabilizzatore[†] di x è

$$H_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

Noto che H_x è un sottogruppo di G , infatti:

[†] anche detto sottogruppo di isotropia di x .

- se $g_1, g_2 \in H_x$ allora

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$$

$$\implies g_1 g_2 \in H_x;$$

- se $g \in H_x$, si ha che $x = g \cdot x$, quindi

$$g^{-1} \cdot x = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1} g) \cdot x$$

$$\implies g^{-1} \in H_x.$$

Osservazione. (6.8) L'orbita $O(x)$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei laterali sinistri di H_x in G . Infatti, sia

$$\alpha : \underbrace{G/H_x}_{\dagger} \rightarrow O(x)$$

la funzione che a gH_x associa $g \cdot x \in O(x)$, con $g \in G$.

- α è ben definita: se $gH_x = \tilde{g}H_x$ allora $\exists h \in H_x$ tale che $\tilde{g} = gh$
 $\implies \tilde{g} \cdot x = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x;$
- α è suriettiva per definizione di orbita.

Esercizio. (6.9)

1. Mostrare che α è iniettiva;
2. mostrare che se $x, y \in X$ sono nella stessa orbita, allora H_x e H_y sono sottogruppi coniugati[‡] di G .

[†] insieme dei laterali sinistri

[‡] Sia G gruppo, $h \in G$,

$$\begin{aligned} \varphi_h : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto h^{-1}hg \end{aligned}$$

φ_h è un automorfismo di G detto coniugio per h .

Due sottogruppi K_1, K_2 si dicono coniugati se $\exists h \in G$ tale che

$$K_2 = \varphi_h(K_1)$$

Da quest'ultimo esercizio deriva che la cardinalità di $O(x)$ è pari all'indice di H_x in G .

Esempi. (6.10)

1. $X = \mathbb{R}^n$, $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$, con $\varphi(A, \mathbf{v}) = A\mathbf{v}$.

Si ha che:

- se $\mathbf{v} = \underline{0}$, $H_{\underline{0}} = G$;
- se $\mathbf{v} \neq \underline{0}$, $H_{\mathbf{v}} = \{A : A\mathbf{v} = \mathbf{v}\}$.

2. $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, $\varphi(m, x) = x + m$.

Se $x \in \mathbb{R}$, allora $H_x = \{0\}$, ovvero ogni elemento di X ha stabilizzatore banale.

Tutte le orbite sono in corrispondenza biunivoca con $G = \mathbb{Z}$.

6.2 Azioni di Gruppo su spazi topologici

Sia X uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X .

Definizione. (6.11) Diciamo che G agisce per omeomorfismi se $\forall g \in G$ l'applicazione

$$\begin{aligned}\theta_g : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto g \cdot x\end{aligned}$$

è un omeomorfismo.

Osservazione. (6.12)

1. θ_g è sempre biunivoca con inversa $\theta_{g^{-1}}$, quindi

G agisce per omeomorfismi

$$\iff \theta_g \text{ è continua } \forall g \in G.$$

2. L'azione può essere sempre data tramite un omomorfismo di gruppi $\theta : G \rightarrow S(X)$.[†]

[†] Si ha che, detto $\text{Omeo}(X)$ il gruppo degli omeomorfismi da X in X , $\text{Omeo}(X)$ è sottogruppo di $S(X)$

Pertanto G agisce per omeomorfismi

$$\iff \theta(G) \subseteq \text{Omeo}(X).$$

Proposizione. (6.13) Siano X uno spazio topologico e G un gruppo che agisce su X per omeomorfismi.

Sia $\pi : X \rightarrow X/G$ la proiezione al quoziente (X/G ha la topologia quoziente).

Allora π è un'applicazione aperta e, se G è finito, è anche chiusa.

Dimostrazione di (6.13)

- Sia $A \subseteq X$ aperto. Vogliamo che $\pi(A)$ aperto in X/G .

Si ha che $\pi^{-1}(\pi(A))$ è l'unione di tutte le classi di equivalenza in X che intersecano A , ovvero l'unione di tutte le orbite che intersecano A , quindi:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{\substack{g \in G \\ a \in A}} g \cdot a = \bigcup_{g \in G} \left(\bigcup_{a \in A} g \cdot a \right) = \bigcup_{g \in G} \underbrace{\theta_g(A)}_{\dagger}$$

$$\implies \pi^{-1}(\pi(A)) \text{ è aperto in } X$$

$$\implies \pi(A) \text{ aperto in } X/G.$$

- Sia $A \subseteq X$ chiuso. Vogliamo che $\pi(A)$ chiuso in X/G .

Si ha che $\pi^{-1}(\pi(A))$ è l'unione di tutte le classi di equivalenza in X che intersecano A , ovvero l'unione di tutte le orbite che intersecano A , quindi:

$$\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{\substack{g \in G \\ a \in A}} g \cdot a = \bigcup_{g \in G} \left(\bigcup_{a \in A} g \cdot a \right) = \bigcup_{g \in G} \underbrace{\theta_g(A)}_{\ddagger}$$

$$\implies \pi^{-1}(\pi(A)) \text{ chiuso in } X \text{ (lo posso dire solo se } G \text{ è finito, perché l'unione } \underline{\text{finita}} \text{ di chiusi è chiusa)}$$

$$\implies \pi(A) \text{ chiuso in } X/G. \quad \blacksquare$$

[†] aperto in X perché X è aperto e θ_g omeo

[‡] chiuso in X perché X è chiuso e θ_g omeo

Esempi. (6.14)

1. Sia $X = \mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea, $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$.

Sia $A \cdot v = Av$ azione per omeomorfismo. Si ha che $\forall A \in G$

$$\begin{aligned}\theta_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\mapsto Av\end{aligned}$$

θ_A è continua. $X/G = \{a, b\}$, con $a = [0]$ e $b = [v]$.

$\{a\}$ è chiuso, in quanto se considero la proiezione

$$\begin{aligned}\pi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n/G \\ v &\mapsto [v]\end{aligned}$$

$\pi^{-1}(\{a\}) = \{0\}$ chiuso ma non aperto in \mathbb{R}^n

$\implies \{a\}$ è chiuso ma non aperto in X/G

$\implies \pi^{-1}(\{b\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ aperto ma non chiuso

$\implies \{b\}$ è aperto ma non chiuso in X/G .

2. Considero $G = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}$, con $\varphi(m, x) = x + m \in \mathbb{R}$.

Mostriamo che $X/G = S^1$. Sia $Y := X/G$ e $\pi : X \rightarrow Y$ la proiezione.

- Y è compatto, poiché $\pi([0, 1]) = Y$.
- Sia

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\end{aligned}$$

continua, suriettiva e le fibre di f sono le orbite.

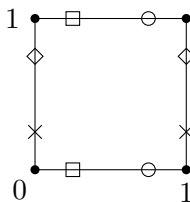
Usiamo la proprietà universale della topologia quoziente: la f passa al quoziente, e otteniamo $\bar{f} : Y \rightarrow S^1$ continua.

- \bar{f} è continua perché f e π hanno le stesse fibre;
- Y è compatto, S^1 è Hausdorff

$\implies \bar{f}$ è chiusa

$\implies \bar{f}$ è omeomorfismo.

$\implies Y \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1$ (notiamo anche che f è aperta.)

Figura 6.1: Relazione di equivalenza su Q

Esempio. (6.15) Sia $X = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^\dagger$.

G agisce su \mathbb{R}^2 per traslazione:

$$(m, n) \cdot (x, y) = (x + m, y + n)$$

azione per omeomorfismi:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1 \times S^1$$

Sia $Q := [0, 1] \times [0, 1]$,

$$\pi(Q) = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2, \quad \pi|_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = S^1 \times S^1$$

$\pi|_Q$ è continua, iniettiva.

Poiché Q è compatto, $S^1 \times S^1$ è Hausdorff

$\implies \pi|_Q$ è chiusa

$\implies \pi|_Q$ è un'identificazione

$\implies S^1 \times S^1$ è anche quoziente di Q , con la relazione di equivalenza mostrata in figura 6.1.

Visualizzando geometricamente il quoziente, come in figura 6.2, incolliamo prima i lati verticali, ottenendo un cilindro $S^1 \times [0, 1]$. Incollando le due circonferenze, otteniamo il toro, $S^1 \times S^1$.

[†] La somma diretta “ \oplus ” è la struttura di gruppo data al prodotto cartesiano con le operazioni componente per componente.

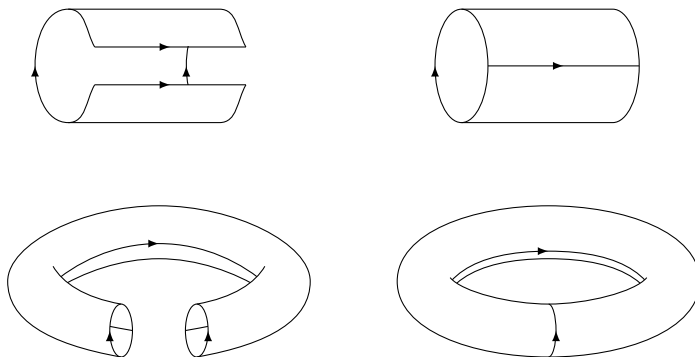


Figura 6.2: Intepretazione geometrica del quoziente

6.2.1 Spazio Proiettivo Reale

Esempio. (6.16) Sia $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ con la topologia euclidea, e come gruppo $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (col prodotto).

L'azione è per moltiplicazione per uno scalare: $\lambda \cdot v = \lambda v$, è un'azione per omeomorfismi.

La relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ è, per $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$$

Definizione. (6.17) Considerando la relazione dell'esempio (6.16) si definisce lo spazio proiettivo reale (di dimensione n):

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / G$$

Osservazione. (6.18) Su $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ le orbite sono le rette vettoriali in \mathbb{R}^{n+1} (a cui togliamo l'origine).

Osservazione. (6.19) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di Hausdorff; infatti, siano $p, q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $p \neq q$,

$$p = [\mathbf{v}], \quad q = [\mathbf{w}]$$

con $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nulli, linearmente indipendenti.

Consideriamo V e U coni aperti, senza l'origine, su due dischetti aperti centrati rispettivamente in \mathbf{v} e \mathbf{w} : possiamo scegliere dischetti abbastanza piccoli da avere $U \cap V = \emptyset$.

Data π proiezione, si ha

$$\left. \begin{array}{l} \pi^{-1}(\pi(U)) = U \\ \pi^{-1}(\pi(V)) = V \end{array} \right\} \implies p \in \pi(U), q \in \pi(V)$$

aperti disgiunti.

Osservazione. (6.20) Se consideriamo $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, ogni orbita interseca S^n in due punti antipodali;

$$\pi|_{S^n} : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

continua, suriettiva.

Poiché S^n compatto, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è di Hausdorff

$\implies \pi|_{S^n}$ è chiuso

$\implies \pi|_{S^n}$ è ancora una identificazione

$\implies \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ si può realizzare come quoziente della sfera S^n , rispetto alla relazione di equivalenza che identifica i punti antipodali.

Esercizio. (6.21) Mostrare che $\pi|_{S^n}$ è un quoziente per un'azione di gruppo con $G = \{\pm 1\}$ con il prodotto.

Capitolo 7

Proprietà di numerabilità[†]

Definizione. (7.1) *Uno spazio topologico X si dice a base numerabile se $\exists \mathcal{B}$ base della topologia di X tale che \mathcal{B} sia di cardinalità numerabile.*

Si dice anche che X soddisfa il secondo assioma di numerabilità.

Definizione. (7.2) *Uno spazio topologico X si dice primo numerabile se ogni punto ammette un insieme fondamentale di intorno numerabile.*

Si dice anche che X soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Esempio. (7.3) Se X è finito, X soddisfa entrambi gli assiomi

Osservazione. (7.4) Se X è uno spazio metrico, allora X è sempre primo numerabile. Infatti, sia $x \in X$, allora

$$\left\{ B_{\frac{1}{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è un sistema fondamentale di intorno di x ed è numerabile.

Esempio. (7.5) \mathbb{R} con la topologia euclidea è a base numerabile:

$$\mathcal{B} = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b \}$$

è una base numerabile.

[†] Questa parte è trattata basandosi sul Manetti, [Man14]

Infatti se $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$

$$(x, y) = \bigcup_{\substack{x < a < b < y \\ a, b \in \mathbb{Q}}} (a, b)$$

Osservazione. (7.6) Se X, Y sono spazi topologici a base numerabile, allora $X \times Y$ è a base numerabile. Infatti, siano $\mathcal{B}_X, \mathcal{B}_Y$ basi numerabili per le topologie di X e Y rispettivamente.

Allora

$$\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U \times V : U \in \mathcal{B}_X, V \in \mathcal{B}_Y\}$$

è una base numerabile per $X \times Y$

Esempio. (7.7) \mathbb{R}^n con la topologia euclidea è a base numerabile.

Osservazione. (7.8) Se X è a base numerabile, ogni sottospazio $Y \subseteq X$ è a base numerabile. Infatti, se \mathcal{B} è una base numerabile per X , allora

$$\{U \cap Y\}_{U \in \mathcal{B}}$$

è una base numerabile per Y .

Osservazione. (7.9) Non è vero, in generale, che un quoziente di uno spazio a base numerabile sia ancora a base numerabile.

Osservazione. (7.10) Il secondo assioma di numerabilità implica il primo: infatti, se \mathcal{B} è una base numerabile e x un punto, allora

$$\{U : U \in \mathcal{B}, x \in U\}$$

è un sistema fondamentale di intorni numerabile del punto x .

Proposizione. (7.11) Sia X spazio topologico a base numerabile. Allora ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento numerabile.

Dimostrazione di (7.11) Sia \mathcal{A} un ricoprimento aperto di X . Sia \mathcal{B} una base numerabile. Sia $x \in X$

$$\implies \exists U_x \in \mathcal{A} \text{ tale che } x \in U_x$$

$$\implies \exists B_x \in \mathcal{B} \text{ tale che } x \in B_x \subseteq U_x.$$

Al variare di $x \in X$, otteniamo un sottoinsieme della base \mathcal{B} ,

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B_x : x \in X\}.$$

$$\implies \exists E \subseteq X, E \text{ numerabile tale che}^\dagger$$

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{B_x : x \in E\}$$

Poniamo $\widetilde{\mathcal{A}} := \{U_x : x \in E\} \subseteq \mathcal{A}$, numerabile poiché E è numerabile.

$\widetilde{\mathcal{A}}$ è ancora un ricoprimento di X , infatti

$$\bigcup_{x \in E} U_x \supseteq \bigcup_{x \in E} B_x = \bigcup_{x \in X} B_x = X$$

$$\implies \widetilde{\mathcal{A}} \text{ è un ricoprimento numerabile di } \mathcal{A}. \quad \blacksquare$$

Definizione. (7.12) Uno spazio topologico X si dice separabile se contiene un sottoinsieme E denso e di cardinalità numerabile.

Esempio. (7.13) Se X è numerabile, allora è separabile.

Esempio. (7.14) \mathbb{R}^n è separabile, infatti $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ è denso e numerabile.

Lemma. (7.15) Se X è a base numerabile, allora è separabile.

[†] Questo equivale a dire che $\forall x \in X$,

$$\exists x' \in E : B_x = B_{x'}$$

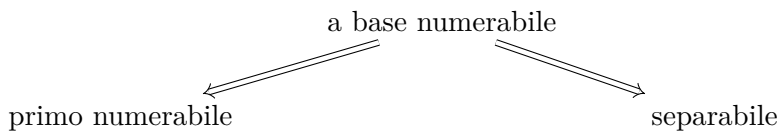


Figura 7.1: Riassunto delle proprietà di numerabilità

Dimostrazione di (7.15) Sia \mathcal{B} una base numerabile e per ogni $U \in \mathcal{B}$, con $U \neq \emptyset$, sia $x_u \in U$.

Sia $E := \{x_u : U \in \mathcal{B}\}$

$\implies E$ è numerabile.

Mostriamo che E è denso. Sia A un aperto non vuoto di X ,

$\implies A$ è unione di aperti non vuoti di \mathcal{B}

$\implies \exists U \in \mathcal{B}, U \neq \emptyset, U \subseteq A$

$\implies x_u \in A$

$\implies A \cap E \neq \emptyset.$ ■

Proposizione. (7.16) Sia X uno spazio metrico separabile.

Allora X è a base numerabile.

Dimostrazione di (7.16) Sia $E \subset X$ un sottoinsieme denso e numerabile. Sia

$$\mathcal{B} := \left\{ B_{\frac{1}{n}}(e) : e \in E, n \in \mathbb{N} \right\}$$

- \mathcal{B} è numerabile (poiché è in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N}^2).
- Mostriamo che \mathcal{B} è una base.

Sia U aperto di X e $x \in U$. Dobbiamo trovare un elemento di \mathcal{B} contenente x e contenuto in U .

Siccome U è aperto

$\implies \exists m \in \mathbb{N}$ tale che $B_{\frac{1}{m}} \subseteq U$.

Consideriamo $B_{\frac{1}{2m}}(x)$ aperto non vuoto di X . Siccome E denso

$$\implies \exists e \in E \cap B_{\frac{1}{2m}}(x)$$

$$\implies d(x, e) < \frac{1}{2m}$$

$$\implies x \in B_{\frac{1}{2m}}(e) \in \mathcal{B}$$

Mostriamo che $B_{\frac{1}{2m}}(e) \subseteq B_{\frac{1}{m}}(x)$: sia $y \in B_{\frac{1}{2m}}(e)$, allora

$$d(y, x) \leq d(y, e) + d(e, x) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$$

$$\implies y \in B_{\frac{1}{m}}(x). \quad \blacksquare$$

Riassunto. (7.17) Se X è uno spazio metrico, allora X è sempre primo numerabile, e inoltre vale

$$X \text{ è separabile} \iff X \text{ è a base numerabile.}$$

Esempio. (7.18) Sia X con la topologia discreta.

- X è metrico.
- X è primo numerabile (ogni $x \in X$ ha come sistema fondamentale di intorni $\{\{x\}\}$).
- X è a base numerabile $\iff X$ è numerabile.

Infatti, nella topologia discreta, $\forall x \in X$, $\{x\}$ deve appartenere ad ogni base.

- X è a base numerabile $\iff X$ è separabile.

Infatti l'unico sottoinsieme denso è X .

\implies Se X non è numerabile, X è metrico ma non a base numerabile.

Esempio: retta di Sorgenfrey. (7.19) Sia $X = \mathbb{R}$, con la topologia avente come base

$$\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b\}$$

Mostriamo che X è separabile, primo numerabile, ma non a base numerabile. Questo implica che X non è metrico.

- X è separabile, infatti $E = \mathbb{Q}$ è denso, perché

$$\forall [a, b) \in \mathcal{B}, \quad [a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$

- X è primo numerabile, infatti se $x \in X$, consideriamo la collezione numerabile

$$\left\{ \left[x, x + \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

che è una collezione numerabile di intorni di x ; inoltre è un sistema fondamentale di intorni di x : se U è un intorno di $x \implies$

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b : \quad x \in [a, b) \subseteq U$$

$$x < b \implies \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x + 1/n < b \implies$$

$$\left[x, x + \frac{1}{n} \right) \subseteq [a, b) \subseteq U$$

- Mostriamo che X non è a base numerabile.

Sia $\widetilde{\mathcal{B}}$ una base per la topologia di X , e $x \in X$.

L'intervallo $[x, +\infty)$ è aperto e contiene x .

$$\implies \exists U_x \in \widetilde{\mathcal{B}} \text{ tale che } x \in U_x \subseteq [x, +\infty)$$

\implies abbiamo costruito un'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow \widetilde{\mathcal{B}} \\ x &\mapsto U_x. \end{aligned}$$

Mostriamo che ϕ è iniettiva.

Siano $x, y \in X$, $x \neq y$; supponiamo $y < x$.

Siccome $y < x$ e $U_x \subseteq [x, +\infty)$

$$\implies y \notin U_x$$

$$\implies U_y \neq U_x \text{ perché } y \in U_y$$

$$\implies \text{la base } \widetilde{\mathcal{B}} \text{ non è numerabile.}$$

Capitolo 8

Successioni

Definizione. (8.1) Sia X uno spazio topologico. Una successione in X è una funzione

$$\begin{aligned} a : \mathbb{N} &\rightarrow X \\ n &\mapsto a_n \end{aligned}$$

che indichiamo con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_n\}$.

Definizione. (8.2) Sia $\{a_n\}$ una successione in X e $p \in X$. Diciamo che a_n converge a p se

$$\forall U \in I(p), \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in U, \forall n \geq n_0$$

Diciamo che $\{a_n\}$ è convergente se $\exists p \in X$ tale che a_n converge a p .

Osservazione. (8.3) Se X è di Hausdorff, allora una successione convergente ha un unico limite.

Infatti, supponiamo che a_n converga a p e a q . Siano $U \in I(p)$ e $V \in I(q)$.

Allora

- $\exists n_0$ tale che $a_n \in U, \forall n \geq n_0$;
- $\exists n_1$ tale che $a_n \in V, \forall n \geq n_1$

$$\Rightarrow a_n \in U \cap V, \forall n \geq \max\{n_0, n_1\}$$

$$\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset, \forall U, V. \text{ Poiché } X \text{ è Hausdorff}$$

$$\Rightarrow p = q.$$

Osservazione. (8.4) Se X è Hausdorff, e $\{a_n\}$ è convergente, ha senso parlare del suo limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = p$$

Se X non è di Hausdorff, una successione può convergere a più punti distinti, e quindi non ha senso parlare del limite.

Esempio. (8.5) X con la topologia banale, $\{\emptyset, X\}$. Sia $\{a_n\}$ successione e $p \in X$. Allora $\{a_n\}$ converge a p

\Rightarrow ogni successione converge a ogni punto.

Esempio. (8.6) Sia X con la topologia discreta. Sia $\{a_n\}$ successione e $p \in X$. Allora $\{a_n\}$ converge a $p \iff$

$$\exists n_0 : a_n = p, \forall n \geq n_0,$$

infatti $\{p\}$ è intorno di p .

Osservazione. (8.7) Se X è uno spazio metrico, allora $\{a_n\}$ converge a $p \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) :$

$$d(a_n, p) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0(\varepsilon)$$

Infatti

“ \Rightarrow ” Consideriamo $B_\varepsilon(p)$ intorno di p .

“ \Leftarrow ” Sia U un intorno di p . Allora $\exists \varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(p) \subseteq U$. Allora $\exists n_0$ tale che $\forall n \geq n_0, a_n \in B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

Definizione. (8.8) Sia X uno spazio topologico. Diciamo che $p \in X$ è un punto di accumulazione per la successione $\{a_n\}$ se

$$\forall U \in I(p), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : \quad a_n \in U.$$

Esempio. (8.9) Se X è metrico, allora p è di accumulazione per $\{a_n\}$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : \quad d(a_n, p) < \varepsilon.$$

Definizione. (8.10) Una sottosuccessione di a_n è la composizione di $a : \mathbb{N} \rightarrow X$ con una funzione strettamente crescente $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ n & \longmapsto & k(n) & \longmapsto & a_{k(n)} \end{array}$$

Lemma ▲. (8.11) Sia $\{a_n\}$ una successione in X e $p \in X$. Abbiamo le implicazioni:

$\{a_n\}$ converge a p

$\implies \{a_n\}$ ha una sottosuccessione convergente a p

$\implies_* p$ è di accumulazione per $\{a_n\}$

$\implies_{**} p \in \overline{A}$ dove

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = a(\mathbb{N}) \subseteq X$$

Dimostrazione di (8.11)

(*) Siano $U \in I(p)$, e $N \in \mathbb{N}$.

Sia $\{a_{k(n)}\}$ una sottosuccessione convergente a p . Allora $\exists n_0$ tale che $a_{k(n)} \in U, \forall n \geq n_0$.

Siccome $k(n)$ è crescente, $\exists n_1$ tale che $k(n) \geq N, \forall n \geq n_1$

\implies se $n = \max\{n_0, n_1\}$ abbiamo $k(n) \geq N$ e $a_{k(n)} \in U$.

(**) Sia $U \in I(p)$. Dobbiamo mostrare che $U \cap A \neq \emptyset$. Ma p è di accumulazione per $\{a_n\}$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$

$\implies U \cap A \neq \emptyset$

$\implies p \in \overline{A}$. ■

Osservazione. (8.12) Sia X primo numerabile. Allora ogni $p \in X$ ha un sistema fondamentale di intorno numerabile $\{U_n\}$ tale che

$$U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$$

Infatti, sia $\{\widetilde{U}_n\}$ un sistema fondamentale di intorno numerabile, per p . Poniamo

$$\begin{aligned} U_1 &:= \widetilde{U}_1 \\ U_2 &:= \widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 \\ &\vdots \\ U_n &:= \widetilde{U}_1 \cap \dots \cap \widetilde{U}_n \end{aligned}$$

Si ha che

- $U_n \supseteq U_{n+1}$;
- U_n è intorno di p ;
- $\{U_n\}$ è ancora un sistema fondamentale di intorno di p : infatti, se V è un intorno di p , siccome $\{\widetilde{U}_n\}$ è sistema fondamentale di intorno
 $\implies \exists n$ tale che $U_n \subseteq \widetilde{U}_n \subseteq V$.

Lemma. (8.13) Sia X primo numerabile. Sia $\{a_n\}$ una successione in X , e $p \in X$. Allora:

$\{a_n\}$ ha una sottosuccessione convergente a p

$$\iff$$

p è di accumulazione per $\{a_n\}$.

Dimostrazione di (8.13)

“ \implies ” Segue dal lemma \blacktriangle (8.11).

“ \impliedby ” Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorno di p tali che $U_n \supseteq U_{n+1}$, $\forall n$.

U_1 è intorno di $p \implies \exists k(1) \in \mathbb{N}$ tale che $a_{k(1)} \in U_1$,

U_2 è intorno di $p \implies \exists k(2) > k(1) \in \mathbb{N}$ tale che $a_{k(2)} \in U_2$

e così via:

$$\forall n, \exists k(n) > k(n-1) : a_{k(n)} \in U_n$$

e otteniamo una sottosuccessione $\{a_{k(n)}\}$ di $\{a_n\}$. Mostriamo che la sottosuccessione converge a p .

Sia V un intorno di p . Siccome $\{U_n\}$ è sistema fondamentale di intorni

$$\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } U_{n_0} \subseteq V.$$

Se $n \geq n_0$ abbiamo

$$a_{k(n)} \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq V. \quad \blacksquare$$

Proposizione: Caratterizzazione della chiusura in termini di successioni. (8.14) Sia X uno spazio topologico primo numerabile[†]. Siano $Y \subseteq X$ e $p \in X$. Sono equivalenti

1. \exists una successione in Y convergente a p ;
2. p è punto di accumulazione per una successione in Y ;
3. $p \in \overline{Y}$.

Dimostrazione di (8.14)

“1. \implies 2.” Segue immediatamente dal lemma \blacktriangle (8.11).

“2. \implies 3.” Anche questo segue dal lemma \blacktriangle : sia $\{a_n\}$ una successione in Y tale che p è di accumulazione per $\{a_n\}$. Sia

$$A := a(\mathbb{N}) \subseteq Y \subseteq X.$$

Dal lemma $p \in \overline{A} \subseteq \overline{Y}$.

“3. \implies 1.” Sia $p \in \overline{Y}$. Sia $\{U_n\}$ un sistema fondamentale di intorni di p tali che $U_n \supseteq U_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall n$ si ha che $U_n \cap Y \neq \emptyset$

[†] Notiamo che l'ipotesi che X sia primo numerabile viene utilizzata soltanto per l'implicazione 3. \implies 1.

Se ne deduce che in un qualsiasi spazio topologico, si ha che

$$1. \implies 2. \implies 3.$$

$$\implies \exists y_n \in U_n \cap Y$$

$$\implies \text{otteniamo } \{y_n\} \text{ successione in } Y.$$

Mostriamo che $\{y_n\}$ converge a p : sia V un intorno di p .

$\exists n_0$ tale che $U_{n_0} \subseteq V$.

Allora se $n \geq n_0$ si ha

$$y_n \in U_n \subseteq U_{n_0} \subseteq V$$

$$\implies \{y_n\} \text{ converge a } p. \quad \blacksquare$$

Proposizione. (8.15) Sia X uno spazio topologico e $\forall n \in \mathbb{N}$ sia $K_n \subseteq X$ sottospazio chiuso e compatto e non vuoto tale che

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots$$

cioè $\forall n, K_n \supseteq K_{n+1}$.

Allora

$$\bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset.$$

Esempio. (8.16) Sia $X = (0, 1]$ con la topologia euclidea. $U_n = (0, 1/n]$ non vuoto, chiuso in X .

$$U_n \supseteq U_{n+1}, \forall n, \quad \bigcap_{n \geq 1} U_n = \emptyset$$

Questo esempio mostra come l'ipotesi di compattezza sia necessaria.

Dimostrazione di (8.15) Lavoriamo in K_1 . Sia $A_n := K_1 \setminus K_n, \forall n \geq 2$.

- K_n chiuso in $X, K_n \subseteq K_1$

$$\implies K_n \text{ chiuso in } K_1$$

$$\implies A_n \text{ è aperto in } K_1.$$

- $K_n \supseteq K_{n+1}$

$$\implies A_n \subseteq A_{n+1}.$$

Sia $N \in \mathbb{N}$. Allora

$$\bigcup_{n=1}^N A_n = A_N = K_1 \setminus K_n \stackrel{\dagger}{\subsetneq} K_1$$

$\Rightarrow \{A_N\}$ è una collezione di aperti di K_1 tali che nessuna unione finita ricopre K_1 .

Siccome K_1 è compatto, $\{A_N\}$ non può essere un ricoprimento di K_1 , e cioè

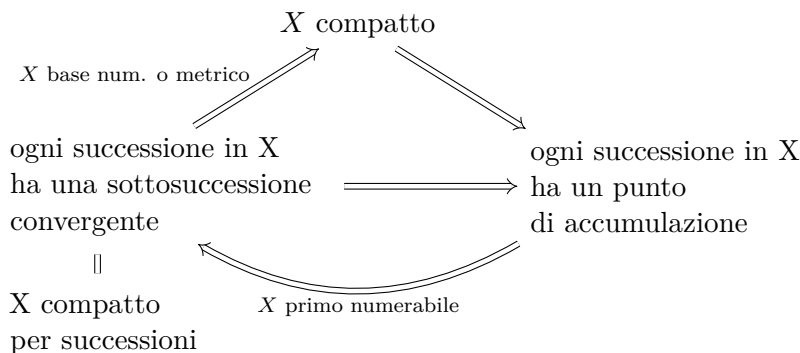
$$K_1 \setminus \bigcap_{n \geq 1} K_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n \subsetneq K_1$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} K_n \neq \emptyset.$$

■

8.1 Compattezza e successioni

(8.17) Lo scopo di questa sezione sarà quella di capire le implicazioni in questo schema:



Lemma. (8.18) Sia X uno spazio topologico compatto. Allora, ogni successione in X ha un punto di accumulazione.

[†] $K_n \neq \emptyset$

Dimostrazione di (8.18) Sia $\{a_n\}$ una successione e $p \in X$.

p è di accumulazione per $\{a_n\}$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall U \in I(p), \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N : a_n \in U.$$

Sia $N \in \mathbb{N}$ e sia

$$\begin{aligned} A_n &:= \{a_n : n \geq N\} \subseteq X \\ &= a(\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}). \end{aligned}$$

Da qui:

p è di accumulazione per $\{a_n\}$

$$\Longleftrightarrow \forall U \in I(p), \forall N \in \mathbb{N}, \text{ si ha } U \cap A_N \neq \emptyset.$$

$$\Longleftrightarrow \forall N \in \mathbb{N} \text{ si ha } p \in \overline{A_N} =: C_N$$

$$\Longleftrightarrow p \in \bigcap_{N \geq 1} C_N$$

$$\Rightarrow \bigcap_{N \geq 1} C_N \text{ sono i punti di accumulazione per } \{a_n\}.$$

Vogliamo mostrare quindi che $\bigcap_{N \geq 1} C_N \neq \emptyset$

- C_N è chiuso in X compatto
 $\Rightarrow C_N$ è chiuso e compatto in X ;
- $A_N \neq \emptyset \Rightarrow C_N \neq \emptyset$;
- $A_N \supseteq A_{N+1} \Rightarrow C_N \supseteq C_{N+1}$.

Dalla proposizione (8.15)

$$\bigcap_{N \geq 1} C_N \neq \emptyset$$

■

Definizione. (8.19) Uno spazio topologico X si dice compatto per successioni se ogni successione in X ha una sottosuccessione convergente.

Osservazione. (8.20) Quando X è compatto per successioni, allora ogni successione in X ha un punto di accumulazione. (segue dal lemma ▲ (8.11))

Osservazione. (8.21) Se X è primo numerabile, allora:

- i.* X compatto per successioni \iff ogni successione in X ha punti di accumulazione.
- ii.* X compatto $\implies X$ compatto per successioni.

Proposizione: caratterizzazione della compattezza in termini di successioni. (8.22) Sia X uno spazio topologico a base numerabile, allora sono fatti equivalenti:

- i.* X è compatto;
- ii.* X è compatto per successioni;
- iii.* ogni successione in X ha punti di accumulazione.

Dimostrazione di (8.22) Sppiamo già che

$$(ii) \iff (iii), \quad (i) \implies (ii),$$

dobbiamo mostrare che $(ii) \implies (i)$.

Mostriamo che se X non è compatto, allora non è compatto per successioni.

X non compatto

$\implies \exists$ un ricoprimento aperto $\tilde{\mathcal{A}}$ che non ha sottoricoprimenti finiti. Siccome X è a base numerabile,

\implies il ricoprimento $\tilde{\mathcal{A}}$ ammette un sottoricoprimento $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ numerabile.

$\implies \mathcal{A}$ non ha sottoricoprimenti finiti.

$$\implies \forall n \geq 1, \bigcup_{j=1}^n A_j \subsetneq X$$

$$\implies \exists x_n \in X \setminus \bigcup_{j=1}^n A_j, \text{ cioè } x_n \notin A_j, \forall j \leq n.$$

Otteniamo una successione $\{x_n\}$ in X . Mostriamo che non ha sottosuccessioni convergenti.

Sia $p \in X$

$$\implies \exists N \text{ tale che } p \in A_N, \text{ ma } x_n \notin A_N, \forall n \geq N.$$

Allora nessuna sottosuccessione di $\{x_n\}$ può convergere a p . Infatti, se $\{x_{k(n)}\}$ fosse una sottosuccessione convergente a p ,

$$\implies A_N \text{ intorno di } p$$

$$\implies \exists n_0 \text{ tale che } x_{k(n)} \in A_N, \forall n \geq n_0, \text{ ma inoltre}$$

$$\exists n_1 : k(n) \geq N, \forall n \geq n_1.$$

Contraddizione. ■

Proposizione. (8.23) Sia X uno spazio metrico compatto per successioni. Allora X è sempre a base numerabile, e quindi è compatto.

Dimostrazione di (8.23)

1. Mostriamo che $\forall r > 0$,

$$\exists x_1, \dots, x_N \in X : X = \bigcup_{i=1}^N B_r(x_i)$$

ovvero che X è totalmente limitato.

Per assurdo supponiamo che non sia vero, e costruiamo una successione che non ha sottosuccessioni convergenti.

Sia r tale che X non è coperto da un numero finito di palle aperte di raggio r . Scegliamo $x_1 \in X$ qualsiasi;

$$B_r(x_1) \subsetneq X \implies \exists x_2 \in X \setminus B_r(x_1)$$

e così via: dati $x_1, \dots, x_{n-1} \in X$,

$$\bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i) \subsetneq X \implies \exists x_n \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_r(x_i)$$

Se $n > m$, allora $x_n \notin B_r(x_m)$

$$\implies d(x_n, x_m) \geq r^\dagger$$

\implies otteniamo una successione $\{x_n\}$ in X che non ha sottosuccessioni convergenti.

2. Mostriamo che X è separabile.

Sia $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Allora, poiché X è totalmente limitato, $\exists E_n \subseteq X$ finito tale che

$$X = \bigcup_{x \in E_n} B_{1/n}(x).$$

Sia

$$E := \bigcup_{n \geq 1} E_n \subseteq X,$$

E è numerabile.

Mostriamo che E è denso. Sia $U \subseteq X$ un aperto non vuoto, e sia $x_0 \in U$.

Poiché U aperto

$\implies \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $B_{1/n_0}(x_0) \subseteq U$. Abbiamo

$$x \in X = \bigcup_{x \in E_{n_0}} B_{1/n_0}(x)$$

$\implies \exists x_1 \in E_{n_0} \subseteq E$ tale che $x_0 \in B_{1/n_0}(x_1)$, cioè $d(x_0, x_1) < 1/n$

$\implies x_1 \in B_{1/n_0}(x_0) \subseteq U$

$\implies x_1 \in E$, e $x_1 \in U$

$\implies U \cap E \neq \emptyset$.

Allora X è uno spazio metrico separabile

\implies è a base numerabile. ■

[†] **Esercizio.** Mostrare che questa implicazione implica che $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti.

8.2 Spazi metrici completi

Definizione. (8.24) Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ si dice successione di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Osservazione. (8.25)

1. Una successione convergente è di Cauchy, infatti, se $a_n \rightarrow p$ per $n \rightarrow \infty$, allora $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$d(a_n, p) < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0$$

Se $n, m \geq n_0$

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, p) + d(a_m, p) \leq 2\varepsilon$$

\implies la successione è di Cauchy.

2. Una successione di Cauchy è convergente \iff ha punti di accumulazione.

“ \implies ” sempre vera per il lemma \blacktriangle (8.11);

“ \impliedby ” Sia $p \in X$ un punto di accumulazione per $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy.

Sia $\varepsilon > 0$. Allora $\exists n_0$ tale che

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq n_0$$

Poiché p punto di accumulazione

$$\implies \exists n_1 \geq n_0 \text{ tale che } d(a_{n_1}, p) < \varepsilon.$$

Se $n \geq n_0$ abbiamo

$$d(a_n, p) \leq d(a_n, a_{n_1}) + d(a_{n_1}, p) < 2\varepsilon$$

$$\implies \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge a } p.$$

3. Una successione di Cauchy è convergente \iff ha una sottosuccessione convergente.

4. Se X è compatto, allora ogni successione di Cauchy è convergente.[†]

[†] Infatti, X compatto \implies ogni successione ha punti di accumulazione.

Definizione. (8.26) Uno spazio metrico si dice completo se ogni successione di Cauchy è convergente.

Osservazione. (8.27) Se X è uno spazio metrico compatto, allora X è uno spazio metrico completo.[†] Il viceversa non vale.

Proposizione. (8.28) \mathbb{R}^n con la metrica Euclidea, è completa.

Dimostrazione di (8.28) Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy.

$\Rightarrow \exists n_0$ tale che $\forall n, m \geq n_0$

$$\|a_n - a_m\| < 1$$

Sia $M := \max_{n=1, \dots, n_0} \|a_n\|$

$\Rightarrow \|a_n\| \leq M, \forall n \leq n_0.$

Se $n \geq n_0$:

$$\|a_n\| = \|a_n - a_{n_0} + a_{n_0}\| \leq \|a_n - a_{n_0}\| + \|a_{n_0}\| \leq 1 + M;$$

$\Rightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_{1+M}(0)$ compatto in \mathbb{R}^n è ancora spazio metrico

\Rightarrow è completo

$\Rightarrow \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Osservazione. (8.29) La completezza non è una proprietà topologica.

Esempio. (8.30) Consideriamo \mathbb{R} e $(0, 1)$, entrambi con la metrica euclidea.

- Sono omeomorfi;
- \mathbb{R} è uno spazio metrico completo;
- $(0, 1)$ non è uno spazio metrico completo.[‡]

[†] Dalla proprietà 4. dell'osservazione precedente.

[‡] **Esercizio.** Mostrare che $(0, 1)$ non è uno spazio metrico completo.

Parte II

Omotopia e gruppo fondamentale

Capitolo 9

Alcuni richiami

Lemma di Incollamento. (9.1) Siano X, Y spazi topologici, e $X = A \cup B$, A, B entrambi chiusi o entrambi aperti.

Siano $g : A \rightarrow Y$ e $h : B \rightarrow Y$ continue, tali che

$$g|_{A \cap B} = h|_{A \cap B}.$$

$\implies f : X \rightarrow Y$ data da

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) & x \in B \end{cases}$$

9.1 Componenti connesse

Definizione. (9.2) X spazio topologico, $C \subseteq X$. C è una componente connessa di X se

1. C è connesso;
2. se $D \subseteq X$ è connesso e $D \supseteq C$, allora $D = C$.

Le componenti connesse formano una partizione di X .

Le componenti connesse possono essere viste come le classi di equivalenza di una relazione di equivalenza \sim_c su X data da:

$$x \sim_c y \iff \exists A \subseteq X \text{ connesso} : x, y \in A$$

\sim_c è relazione di equivalenza, in quanto è

1. riflessiva: $x \sim_c x$ perché x è connesso;
2. simmetrica: ovvio per definizione;
3. transitiva: se $x \sim_c y$ e $y \sim_c z$

$\implies \exists A, B \subseteq X$ connessi tali che

$$x, y \in A, \quad y, z \in B;$$

siccome $y \in A \cap B$

$$\implies A \cap B \neq \emptyset$$

$$\implies x, y, z \in A \cup B \text{ connesso}$$

$$\implies x \sim_c z$$

Mostriamo che le componenti connesse di X sono le classi di equivalenza per \sim_c .

Sia C una componente connessa. C connessa

$$\implies \text{tutti i punti di } C \text{ sono equivalenza}$$

$$\implies \exists C_0 \text{ classe di equivalenza per } \sim_c \text{ tale che } C \subseteq C_0.$$

Mostriamo che $C = C_0$. Sia $z \in C_0$, e sia $x \in C$, allora $z \sim_c x$

$$\implies \exists A \text{ connesso tale che } x, z \in A$$

$$\implies x \in A \cap C, A \cap C \neq \emptyset$$

$$\implies A \cup C \text{ connesso}$$

$$\implies C = A \cup C \text{ poiché } C \text{ è componente connessa}$$

$$\implies A \subseteq C$$

$$\implies z \in C$$

$$\implies C = C_0.$$

9.2 Cammini

Notazione. (9.3) Per il resto del corso chiameremo I lo spazio topologico $[0, 1]$ con la topologia euclidea.

Definizione. (9.4) Un cammino tra a, b , o arco, in X è una funzione continua

$$\alpha : I \rightarrow X$$

tale che

$$\alpha(0) = a, \quad \alpha(1) = b$$

$\alpha(I) \subseteq X$ è il supporto del cammino.

α si dice cammino chiuso, o cappio, se $\alpha(0) = \alpha(1)$

Definizione. (9.5) Sia $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ tali che $\alpha(1) = \beta(0)$. Si definisce il prodotto di cammino come

$$\alpha * \beta : I \rightarrow X$$

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Definizione. (9.6) Dato $\alpha : I \rightarrow X$ cammino, definiamo il cammino inverso di α come

$$\bar{\alpha} : I \rightarrow X$$

$$t \mapsto \alpha(1 - t)$$

$\bar{\alpha}$ è la composizione

$$I \longrightarrow I \xrightarrow{\alpha} X$$

$$t \longmapsto 1 - t \longmapsto \alpha(1 - t)$$

$\implies \bar{\alpha}$ è continua perché composizione delle funzioni continue, con

$$\bar{\alpha}(0) = \alpha(1), \quad \bar{\alpha}(1) = \alpha(0)$$

Notazione. (9.7) Il cammino costante in $x_0 \in X$ si indica con

$$c_{x_0} : I \rightarrow X$$

$$t \mapsto x_0$$

funzione continua

9.3 Componenti connesse per archi

Definiamo un'altra relazione di equivalenza su X :

$$x \sim y, \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha : I \rightarrow X$$

con α arco tale che $\alpha(0) = x$, $\alpha(1) = y$.

Mostriamo che \sim è una relazione di equivalenza: infatti \sim è

- riflessiva: $x \sim x$, consideriamo c_x il cammino costante;
- simmetrica: se $x \sim y$
 - $\implies \exists \alpha$ cammino tra x e y ; considero il cammino inverso, e ottengo $y \sim x$;
- se $x \sim y$, $y \sim z$
 - $\implies \exists \alpha, \beta$, con α cammino tra x e y , β cammino tra y e z ;
 - $\implies \alpha * \beta$ è un cammino tale che $x \sim z$.

Definizione. (9.8) Una componente connessa per archi di X è una classe di equivalenza per \sim .

Osservazione. (9.9)

1. Le componenti connesse per archi formano una partizione di X (in quanto classi di equivalenza per una relazione su X).
2. In generale le componenti connesse per archi non sono né chiuse né aperte in X .
3. Un sottospazio $C \subseteq X$ è una componente connessa per archi \Longleftrightarrow
 - C è connesso per archi;
 - se $D \subseteq X$ è connesso per archi e $D \supseteq C$, allora $D = C$.[†]
4. Se C è una componente c.p.a, in particolare è c.p.a
 - $\implies C$ è connesso
 - $\implies C$ è interamente contenuta in una componente connessa di X .

[†] La dimostrazione è lasciata per **esercizio**.

Ogni componente connessa è unione di componenti connesse per archi.

Esempio: la pulce e il pettine. (9.10) Sia $X = Y \cup \{p\} \subseteq \mathbb{R}$, con

$$Y = (I \times \{0\}) \cup \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \{r\} \times I$$

e $p = (\sqrt{2}/2, 1) \notin Y$.

C è connesso ma non cpa:

- X è l'unica sua componente connessa,
- Y e $\{p\}$ sono le componenti connesse di X .

Capitolo 10

Omotopia tra funzioni continue

Siano X, Y spazi topologici, $f, g : X \rightarrow Y$ continue.

Vogliamo dire che f e g sono omotope se possono essere deformate con continuità l'una nell'altra. Consideriamo $\{f_t\}_{t \in I}$,

$$f_t : X \rightarrow Y$$

con $f_0 = f$, $f_1 = g$ con continua la mappa:

$$\begin{aligned} X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f_t(x). \end{aligned}$$

Definizione. (10.1) *Siano X, Y spazi topologici e $f, g : X \rightarrow Y$ continue. Diciamo che f, g sono omotope se $\exists F$,*

$$F : X \times I \rightarrow Y$$

continua tale che

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X$$

F si dice omotopia tra f e g .

Osservazione. (10.2) Se $A, B \in \mathbb{R}^n$, $\overline{AB} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$(1-t)A + tB$$

al variare di $t \in I$ descrive il segmento \overline{AB} ; la funzione

$$\begin{aligned} I &\rightarrow \overline{AB} \\ t &\mapsto (1-t)A + tB \end{aligned}$$

è un omeomorfismo

Esempio. (10.3) Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, cioè

$$\forall p, q \in Y, \quad \overline{pq} \in Y.$$

Sia X spazio topologico qualsiasi, e siano $f, g : X \rightarrow Y$ continue. Allora f e g sono omotope, con omotopia[†] F :

$$\begin{aligned} F : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

Notiamo che $\forall x \in X$, $f(x), g(x) \in Y$ e poiché Y è convesso

$$\implies \overline{f(x)g(x)} \subseteq Y$$

$$\implies F(x, t) \in Y \quad \forall x, t$$

$$\implies F \text{ è ben definita.}$$

F è continua perché composizione di funzioni continue:

- $X \times I \rightarrow Y \times Y \times I$
 $(x, y) \rightarrow (f(x), g(x), t)$
- $\mathbb{R}^{2n+1} \supseteq Y \times Y \times I \rightarrow Y \subseteq \mathbb{R}^n$
 $(x, y) \rightarrow (f(x), g(x), t)$

Inoltre

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

[†] Si dice “omotopia lineare”

Esempio. (10.4) Dato X spazio topologico, due funzioni continue

$$f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono sempre omotope.

Osservazione. (10.5) Siano $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f, g : X \rightarrow Y$ continue.

Supponiamo che $\overline{f(x)g(x)} \subseteq Y, \forall x \in X$.

Allora f, g sono omotope tramite la stessa omotopia lineare

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

Lemma. (10.6) L'omotopia è una relazione di equivalenza delle applicazioni continue da X a Y , dove X e Y sono due spazi topologici.

Dimostrazione di (10.6)

- Riflessiva: sia $f : X \rightarrow Y$ continua. Sia

$$\begin{aligned} F : X \times I &\rightarrow Y \\ (x, t) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

continua perché lo è f .

- Simetrica: siano $f, g : X \rightarrow Y$ continue, e $F : X \times I \rightarrow Y$ continua tale che

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x), \quad \forall x \in X.$$

Sia $G : X \times I \rightarrow Y$, con

$$G(x, t) = F(x, 1 - t).$$

Allora G è continua perché composizione di funzioni continue, e

$$G(x, 0) = g(x), \quad G(x, 1) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

- Transitiva: siano $f, g, h : X \rightarrow Y$ continue, con

$$f \sim g, \quad g \sim h$$

$\implies \exists F, G : X \times I \rightarrow Y$ continue tali che

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= f(x), & G(x, 0) &= g(x), \\ F(x, 1) &= g(x), & G(x, 1) &= h(x), \end{aligned} \quad \forall x \in X$$

Sia $H : X \times I \rightarrow Y$ data da

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

H è definita separatamente sui due chiusi

$$X \times \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

e se $t = 1/2$

$$F(x, 1) = g(x) = G(x, 0)$$

$\implies H$ è ben definita e continua per il lemma di incollamento.

H è l'omotopia cercata, perché

$$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$$

$\implies f \sim h.$

■

Lemma. (10.7) Siano X, Y, Z spazi topologici,

$$\begin{aligned} f_1, f_2 : X &\rightarrow Y, & \text{continue e omotope,} \\ g_1, g_2 : Y &\rightarrow Z, & \text{continue e omotope.} \end{aligned}$$

$\implies g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2.$

Dimostrazione di (10.7) Consideriamole due omotopie continue e tali che $\forall x \in X$:

$$\begin{array}{ll} F : X \times I \rightarrow Y & G : X \times I \rightarrow Y \\ F(x, 0) = f_1(x) & G(x, 0) = g_1(x) \\ F(x, 1) = f_2(x) & G(x, 1) = g_2(x). \end{array}$$

Consideriamo $H : X \times I \rightarrow Z$ data da

$$H(x, t) = G(F(x, t), t)$$

H è continua perché composizione di applicazioni continue.

$$\begin{aligned} X \times I &\longrightarrow Y \times I \xrightarrow{G} Z \\ (x, t) &\longmapsto (F(x, t), t) \end{aligned}$$

Inoltre

$$H(x, 0) = G(F(x, 0), 0) = G(f_1(x), 0) = g_1(f_1(x)), \forall x \in X$$

$$\implies g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2. \quad \blacksquare$$

10.1 Equivalenza omotopica

Definizione. (10.8) Siano X, Y spazi topologici. Diciamo che X e Y sono omotopicamente equivalenti (o che hanno lo stesso tipo di omotopia) se esistono $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ continue tali che

$$g \circ f \sim \text{Id}_X, \quad f \circ g \sim \text{Id}_Y.$$

In tal caso f e g si dicono equivalenze omotopiche.

Osservazione. (10.9) Se X, Y sono omeomorfi, allora X, Y sono omotopicamente equivalenti. Infatti, $\exists f, g$ continue,

$$\left. \begin{aligned} g \circ f &= \text{Id}_X \\ f \circ g &= \text{Id}_Y \end{aligned} \right\} \implies \begin{aligned} g \circ f &\sim \text{Id}_X \\ f \circ g &\sim \text{Id}_Y \end{aligned}$$

Osservazione. (10.10) Consideriamo $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \{y_0\}$. Mostriamo che sono omotopicamente equivalenti ma non sono omeomorfi (non c'è biiezione).

Sia $f : X \rightarrow Y$, con $f \equiv y_0$, e $g : Y \rightarrow X$, con $g \equiv \underline{0}$.

$$\begin{aligned} f \circ g &= \text{Id}_Y, & h &:= g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ & & x &\mapsto \underline{0} \end{aligned}$$

f e g sono equivalenze omotopiche se $h \sim \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$, ma lo sono sicuramente[†]
 $\implies \mathbb{R}^n$ ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

Esercizio. (10.11) Mostrare che l'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza sull'insieme degli spazi topologici.

10.1.1 Spazi contraibili e stellati

Definizione. (10.12) Uno spazio topologico X si dice contraibile se ha lo stesso tipo di omotopia di un punto.

Esempio. (10.13) Ogni sottospazio convesso di \mathbb{R}^n è contraibile.

Definizione. (10.14) Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice stellato rispetto ad un suo punto $x_0 \in X$ se

$$\forall x \in X, \quad \overline{x_0 x} \subseteq X$$

Esempio. (10.15) L'unione degli assi in \mathbb{R}^2 è stellato rispetto all'origine.

Osservazione. (10.17)

Osservazione. (10.17) Sia X un sottospazio stellato di \mathbb{R}^n . Allora X è contraibile.

Dimostrazione di (10.17) Consideriamo $Y = \{y_0\}$ l'insieme con un solo punto.

Sia x_0 il punto rispetto al quale X è stellato, e definiamo f costante, e $g(y_0) = x_0$

$$f \circ g = \text{Id}_Y, \quad h := g \circ f : X \rightarrow X$$

$$x \mapsto \underline{0}$$

[†] Vedi esempio (10.4).

Vogliamo $h \sim \text{Id}_X$. Poniamo

$$H : X \times I \rightarrow X$$

$$(x, t) \mapsto tx + (1 - t)x_0$$

- H è ben definita, perché $\overline{x_0x} \subseteq X$
- $\implies H(x, t) \in X$;
- H è continua,
- $H(x, 0) = x_0 = h(x)$, $H(x, 1) = x = \text{Id}_X(x)$

$\implies H$ è omotopia lineare tra h e Id_X .

Lemma. (10.18) Se X è contraibile, allora è connesso per archi.

Dimostrazione di (10.18) Siano f, g le equivalenze omotopiche e sia

$$h := g \circ f : X \rightarrow X$$

$\implies h \sim \text{Id}_X$, con h costante in un certo punto x_0 .

$\implies \exists F : X \times I \rightarrow X$ continua, tale che

$$F(x, 0) = x_0, \quad F(x, 1) = x, \quad \forall x \in X$$

Sia $x_1 \in X$. Consideriamo $\alpha : I \rightarrow X$, data da

$$\alpha(t) = F(x_1, t)$$

α è continua ed è un arco in X da x_0 a x_1 .

Questo vale $\forall x_1 \in X$

$\implies X$ connesso per archi. ■

Lemma. (10.19) Siano X, Y spazi topologici omotopicamente equivalenti. Allora:

$$X \text{ è cpa} \iff Y \text{ è cpa}$$

$$X \text{ è connesso} \iff Y \text{ è connesso}$$

Dimostrazione di (10.19) Supponiamo Y connesso per archi.

Siano f, g le equivalenze omotopiche, $g \circ f \sim \text{Id}_X$

$\implies \exists F : X \times I \rightarrow X$ continua tale che

$$F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = g(f(x)), \quad \forall x \in X.$$

$\implies \forall x_1 \in X, F(x_1, \cdot)$ è un arco in X da x_1 a $g(f(x)) \in g(Y)$.

Poiché Y cpa, g continua

$\implies g(Y) \subseteq X$ connessa per archi.

Quindi ogni punto di X è connesso da un arco ad un punto di $g(Y)$ cpa

$\implies X$ è cpa. ■

Esercizio. (10.20) Mostrare allo stesso modo che

$$Y \text{ connesso} \implies X \text{ connesso}$$

usando \sim_c

10.2 Retratti e retratti di deformazione[†]

Sia X uno spazio topologico e $A \subseteq X$ un sottospazio.

Definizione. (10.21) Diciamo che A è un retrato di X se $\exists r : X \rightarrow A$ tale che $r(a) = a, \forall a \in A$, cioè

$$r|_A = \text{Id}_A$$

In tal caso r si dice retrazione di X su A .

Esempio. (10.22) Per ogni spazio topologico X , e $\forall x_0 \in X$, $A = \{x_0\}$ è un retratto di X con la retrazione costante.

[†] Terminologia presa dal Kosniowski, [Kos88]

Esempio. (10.23) Sia $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $A = S^1$. S^1 è un retratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, definendo

$$r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$$

come la proiezione radiale:

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

Allo stesso modo questo vale per $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ sempre con proiezione radiale.

Osservazione. (10.24) Se $r : X \rightarrow A$ è una retrazione, allora r è suriettiva.

\implies Tutte le proprietà topologiche che si trasmettono per mappa continua e suriettiva passano da X a A .

Esempio. (10.25) Se $X = [0, 1]$, allora

- $A_1 = \{0, 1/2\}$ non può essere un retratto (non è connesso);
- $A_2 = [0, 1/2)$ non può essere retratto (non è compatto).

Definizione. (10.26) Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottospazio. Diciamo che A è un retratto di deformazione di X se $\exists r : X \rightarrow A$ retrazione tale che, definita l'inclusione

$$i : A \hookrightarrow X$$

vale

$$i \circ r \sim \text{Id}_X$$

ovvero che $i \circ r$ sia omotopa a Id_X .

Esempio. (10.27) S^1 è un retratto di deformazione di $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Considero $\tilde{r} : i \circ r$,

$$\tilde{r} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Noto che $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$, il segmento $\overline{\mathbf{x}r(\mathbf{x})} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}$

\Rightarrow posso usare l'omotopia lineare:

$$F : (\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\}) \times I \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{\underline{0}\})$$

$$(\mathbf{x}, t) \mapsto (1-t)\mathbf{x} + t \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \left(1-t + \frac{t}{\|\mathbf{x}\|}\right) \mathbf{x}$$

Osservazione. (10.28) Se A è un retratto di deformazione di X , allora A e X sono omotopicamente equivalenti, infatti, considerando i l'inclusione e r la retrazione:

$$i \circ r \sim \text{Id}_X^\dagger, \quad r \circ i = \text{Id}_A$$

Esempio. (10.29) $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$ è un retratto di deformazione[†]

$\Rightarrow S^n$ ha lo stesso tipo di omotopia di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\underline{0}\}$.

Esempio. (10.30) Consideriamo $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$, considero R la distanza tra \mathbf{p} e \mathbf{q} , e definisco A come l'unione delle due circonferenze di raggio $R/2$ e centri \mathbf{p}, \mathbf{q} .

Dimostro che A è un retratto di $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$, tramite la retrazione \mathbf{r} di figura .

Inoltre A è anche un retratto di deformazione, infatti, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ il segmento da (x, y) a $\mathbf{r}(x, y)$ non passa per \mathbf{p} e \mathbf{q}

\Rightarrow è contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$

$\Rightarrow \tilde{\mathbf{r}} = i \circ \mathbf{r}$ e $\text{Id}_{\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}}$ sono omotope tramite l'omotopia lineare.

Notazione. (10.31) Un bouquet di n circonferenze X è uno spazio topologico dato da n circonferenze[§] che si toccano in un punto.

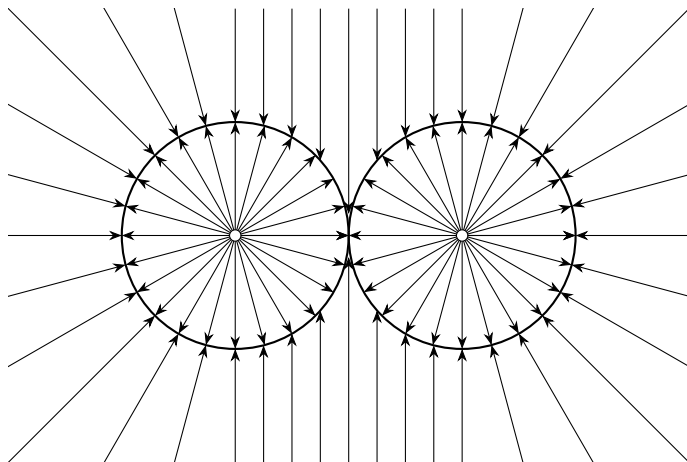
Questo può essere visto come

$$X = S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 / \sim$$

[†] Definizione di retratto di deformazione.

[‡] tramite la stessa funzione utilizzata per S^1

[§] spazi omeomorfi a S^1

Figura 10.1: Retrazione per $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$

10.2

dove \sim identifica un punto su ogni coppia di S^1 .

Esempio. (10.32) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^2$ il sottospazio

$$X = S^1 \cup \{(x, 0) : x \leq -1 \vee x \geq 1\}$$

si ha che $A = S^1 \subseteq X$ è un retratto di deformazione di X .

Capitolo 11

Gruppo Fondamentale

11.1 Omotopia di cammini

Sia X uno spazio topologico e $\alpha : I \rightarrow X$ un arco da $a = \alpha(0)$ a $b = \alpha(1)$. Allora α è omotopo alla funzione c_a ; infatti, sia

$$F : I_t \times I_s \rightarrow X$$

data da $F(t, s) = \alpha(t \cdot s)$;

- F è ben definita è continua;
- $F(t, 0) = \alpha(0) = a = c_a(t)$, $F(t, 1) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$.

Definiamo allora per i cammini una relazione di omotopia più forte, detta omotopia di cammini o omotopia a estremi fissi.

Definizione. (11.1) *Siano $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ due cammini avente gli stessi estremi a, b . Diciamo che α e β sono cammini omotopi se esiste*

$$F : I \times I \rightarrow X$$

continua tale che

i. F omotopia:

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t) \\ F(t, 1) &= \beta(t) \end{aligned} \quad \forall t \in I;$$

ii. F ad estremi fissi:

$$\begin{aligned} F(0, s) &= a \\ F(1, s) &= b \end{aligned} \quad \forall s \in I.$$

F è detta omotopia di cammini o omotopia a estremi fissi.

Notazione. (11.2) Scriviamo $\Omega(X; a, b)$ come l'insieme degli archi da a a b in X .

Osservazione. (11.3) L'omotopia di cammini è una relazione di equivalenza su $\Omega(X; a, b)^\dagger$.

Osservazione. (11.4)

- Il prodotto di cammini dà un'applicazione

$$\begin{aligned} \Omega(X; a, b) \times \Omega(X; b, c) &\rightarrow \Omega(X; a, c) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha * \beta \end{aligned}$$

- Il cammino inverso dà un'applicazione[‡]

$$\begin{aligned} \Omega(X; a, b) &\rightarrow \Omega(X; b, a) \\ \alpha &\mapsto \bar{\alpha} \end{aligned}$$

Lemma. (11.5) Dati $\alpha, \alpha' \in \Omega(X; a, b)$ e $\beta, \beta' \in \Omega(X; b, c)$ se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$

$$\implies \alpha * \beta \sim \alpha' * \beta.^\S$$

[†] Verificare per esercizio.

[‡] Nota: $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$, infatti

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(t) &= \alpha(1-t) \\ \bar{\bar{\alpha}}(t) &= \bar{\alpha}(1-t) = \alpha(t) \end{aligned}$$

[§] Per tutto questo lemma consideriamo \sim come la relazione di equivalenza data dai cammini omotopi.

Dimostrazione di (11.5) Esistono $F, G : I \times I \rightarrow X$ continue tali che,
 $\forall t, s \in I$

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= \alpha(t) & G(t, 0) &= \beta(t) \\ F(t, 1) &= \alpha'(t) & G(t, 1) &= \beta'(t) \\ F(0, s) &= a & G(0, s) &= b \\ F(1, s) &= b & G(1, s) &= c \end{aligned}$$

Definiamo $H : I \times I \rightarrow X$ come

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t - 1, s) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

H è definita e continua separatamente su $[0, \frac{1}{2}] \times I$ e $[\frac{1}{2}, 1] \times I$ chiusi in $I \times I$, e le due definizioni si incollano, poiché per $t = 1/2$

$$F(1, s) = b = G(0, s)$$

$\implies H$ è ben definita e continua per il lemma di incollamento.

$$H(t, 0) = \begin{cases} F(2t, 0) = \alpha(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2t - 1, 0) = \beta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \implies H(t, 0) = (\alpha * \beta)(t)$$

Allo stesso modo $H(t, 1) = (\alpha' * \beta')(t)$. Vale inoltre

$$\begin{aligned} H(0, s) &= F(0, s) = a & \forall s \in I \\ H(1, s) &= G(1, s) = c & \forall s \in I \end{aligned}$$

$\implies H$ è un'omotopia a estremi fissi tra $\alpha * \beta$ e $\alpha' * \beta'$. ■

Lemma. (11.6) Sia $\alpha : I \rightarrow X$ cammino e $\phi : I \rightarrow I$ continua, tale che $\phi(0) = 0$ e $\phi(1) = 1$. Allora

$$\alpha \circ \phi \underset{\dagger}{\sim} \alpha$$

[†] Per tutto questo lemma consideriamo \sim come la relazione di equivalenza data dai cammini omotopi.

Dimostrazione di (11.6) Definiamo $F : I \times I \rightarrow X$ come[†]

$$F(t, s) = \alpha(s\phi(t) + (1-s)t)$$

$\Rightarrow F$ è ben definita. Inoltre F è continua perché composizione di applicazioni continue[‡]. Si ha che, $\forall s, t \in I$

$$F(t, 0) = \alpha(t)$$

$$F(t, 1) = \alpha(\phi(t))$$

$$F(0, s) = \alpha(0)$$

$$F(1, s) = \alpha(\cancel{s\phi(1)} + 1 - \cancel{s}) = \alpha(1)$$

$\Rightarrow F$ è omotopia a estremi fissi tra α e $\alpha \circ \phi$.

Proposizione. (11.7) Sia X uno spazio topologico e siano

$$\alpha \in \Omega(X; a, b), \quad \beta \in \Omega(X; b, c), \quad \gamma \in \Omega(X; c, d)$$

si ha[§]

1. $(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$;
2. $c_a \sim \alpha \sim \alpha \sim \alpha * c_a$;
3. $\alpha \sim \bar{\alpha} \sim c_a, \quad \bar{\alpha} * \alpha \sim c_b$.

Dimostrazione di (11.7)

1. Noto che, definiti $\delta := (\alpha * \beta) * \gamma$ e $\tilde{\delta} := \alpha * (\beta * \gamma)$

$$\delta(t) = \begin{cases} \alpha(4t) & t \in [0, 1/4] \\ \beta(4t - 1) & t \in [1/4, 1/2] \\ \gamma(2t - 1) & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$\tilde{\delta}(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, 1/2] \\ \beta(4s - 2) & s \in [1/2, 3/4] \\ \gamma(4s - 3) & s \in [3/4, 1] \end{cases}$$

[†] Nota: per t fissato, $s\phi(t) + (1-s)t$ descrive il segmento $\overline{t\phi(t)} \subseteq I$ al variare di $s \in I$.

[‡] **Esercizio:** scrivere esplicitamente la composizione.

[§] Per tutto questa proposizione consideriamo \sim come la relazione di equivalenza data dai cammini omotopi.

Vogliamo scrivere $\phi : I \rightarrow I$ continuo tale che $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ e

$$\tilde{\delta}(\phi(t)) = \delta(t),$$

ovvero $s = \phi(t)$. Si ottiene quindi

$$\phi(t) = \begin{cases} 2t & t \in [0, 1/4] \\ t + 1/4 & t \in [1/4, 1/2] \\ t/2 + 1/2 & t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$\Rightarrow \phi$ è continua per il lemma di incollamento, e soddisfa $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ e

$$\tilde{\delta} \circ \phi = \delta$$

\Rightarrow per il lemma del cambiamento di parametro abbiamo $\delta \circ \tilde{\delta}$.

2. Lasciato per esercizio al lettore.

3. Vogliamo costruire l'omotopia di cammini $F : I \times I \rightarrow X^\dagger$.

Per s_0 fissato, percorro α a velocità doppia tra 0 e $s_0/2$; resto fermo in $\alpha(2t_0)$ e poi percorro α al contrario a velocità doppia da $1 - t_0$ a 1. Formalizzando:

$$F(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & s \geq 2t \\ \alpha(s) & s \leq 2t \wedge s \leq 2 - 2t \\ \alpha(2 - 2t) & s \geq 2 - 2t \end{cases}$$

Verificare per esercizio che

(a) F è ben definita e continua per il lemma di incollamento;

(b) F è omotopia a estremi fissi tra c_a e $\alpha * \bar{\alpha}$. ■

11.2 Gruppo Fondamentale

(11.8) Sia X uno spazio topologico, e fissiamo $x_0 \in X$ (punto base).

Considero $\Omega(X, x_0, x_0)$ l'insieme dei cammini chiusi in X con punto base x_0 .

Se $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_0)$, allora

[†] Riscrivere questo pezzo durante lo studio (dal Manualozzo)

- $\alpha * \beta \in \Omega(X, x_0, x_0)$;
- $\bar{\alpha} \in \Omega(X, x_0, x_0)$;
- $c_{x_0} \in \Omega(X, x_0, x_0)$.

\sim (omotopia di cammini) è una relazione di equivalenza su $\Omega(X, x_0, x_0)$.

(11.9) Sia quindi

$$\Pi(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0) / \sim$$

l'insieme quoziente. Definiamo un'operazione su $\Pi(X, x_0)$ ponendo, $\forall [\alpha], [\beta] \in \Pi(X, x_0)$

$$[\alpha] [\beta] = [\alpha * \beta]$$

che è ben definita per il lemma (11.5).

Proposizione. (11.10) $\Pi(X, x_0)$ è un gruppo rispetto all'operazione appena definita.

Dimostrazione di (11.10)

- Proprietà associativa: dalla proposizione (11.7) è noto che

$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, x_0, x_0)$$

$$\implies ([\alpha] [\beta]) [\gamma] = [\alpha] ([\beta] [\gamma]).$$

- Elemento neutro: $[c_{x_0}]$.

Infatti, dalla proposizione (11.7)

$$\alpha * c_{x_0} \sim \alpha \sim c_{x_0} * \alpha, \quad \forall \alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$$

$$\implies [\alpha] [c_{x_0}] = [\alpha] = [c_{x_0}] [\alpha].$$

- Elemento inverso: $[\bar{\alpha}]$.

Infatti, dalla proposizione (11.7)

$$\alpha * \bar{\alpha} \sim \bar{\alpha} * \alpha \sim c_{x_0}, \quad \forall \alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$$

$$\implies [\alpha] [\bar{\alpha}] = [\bar{\alpha}] [\alpha] = [c_{x_0}]$$

$$\implies [\bar{\alpha}] = [\alpha]^{-1}.$$

Definizione. (11.11) *Il gruppo $\Pi(X, x_0)$ si dice gruppo fondamentale di X con punto base x_0 (oppure primo gruppo di omotopia).*

Dipendenza dal punto base. (11.12) Sia C la componente connessa per archi contenente x_0 .

Allora $\Omega(C, x_0, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0)$. Infatti:

“ \subseteq ” se $\alpha : I \rightarrow C$ è un cammino chiuso con punto base x_0 e $i : C \hookrightarrow X$ è l’inclusione, allora

$$i \circ \alpha : I \rightarrow X$$

è un elemento di $\Omega(X, x_0, x_0)$;

“ \supseteq ” viceversa, se $\tilde{\alpha} : I \rightarrow X$ abbiamo che $\tilde{\alpha}(I)$ è cpa (perché $[0, 1]$ è cpa), $x_0 \in \tilde{\alpha}(I)$

$\implies \tilde{\alpha}(I) \subseteq C$ e dunque $\exists \alpha : I \rightarrow C$ tale che

$$\tilde{\alpha} = i \circ \alpha.$$

Anche la relazione di omotopia di cammini su $\Omega(X, x_0, x_0)$ e $\Omega(C, x_0, x_0)$ è la stessa.

Dunque

$$\Pi(C, x_0) \underset{\dagger}{\cong} \Pi(X, x_0)$$

(11.13) Diciamo che $\Pi(X, x_0)$ “vede” solo la componente cpa C di x_0 , mentre il resto dello spazio topologico non lo vede.

Proposizione. (11.14) Se $x_0, y_0 \in X$ sono nella stessa componente cpa, allora

$$\Pi(X, x_0) \underset{\ddagger}{\cong} \Pi(X, y_0).$$

[†] canonicamente isomorfi

[‡] isomorfo

Più precisamente, sia $p : I \rightarrow X$ un arco tale che $p(0) = x_0$ e $p(1) = y_0$. Definiamo ora

$$\begin{aligned} p_{\#} : \Pi(X, x_0) &\rightarrow \Pi(Y, y_0) \\ [\alpha] &\mapsto [\bar{p} * \alpha * p] \end{aligned}$$

Allora $p_{\#}$ è ben definito ed è un isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione di (11.14) Osserviamo che $p_{\#}$ è ben definito, perché se $\alpha \sim \alpha'$ abbiamo

$$(\bar{p} * \alpha) * p \sim (\bar{p} * \alpha') * p$$

Inoltre siano $[\alpha], [\beta] \in \Pi(X, x_0)$, allora

$$\begin{aligned} p_{\#}([\alpha][\beta]) &= p_{\#}([\alpha * \beta]) = [\bar{p} * \alpha * \beta * p] = [\bar{p} * \alpha * c_{x_0} * \beta * p] \\ &= [\underbrace{\bar{p} * \alpha * p}_{\dagger} * \underbrace{\bar{p} * \beta * p}_{\ddagger}] = [\bar{p} * \alpha * p] [\bar{p} * \beta * p] \\ &= p_{\#}([\alpha]) p_{\#}([\beta]) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che $p_{\#}$ è un morfismo.

Considero ora $\bar{p} : I \rightarrow X$, arco da y_0 a x_0 . Con la costruzione precedente otteniamo il morfismo tra gruppi

$$\bar{p}_{\#} : \Pi(X, y_0) \rightarrow \Pi(X, x_0).$$

È facile verificare che $\bar{p}_{\#}$ è l'inverso di $p_{\#}$

$\implies p_{\#}$ è isomorfismo. ■

Corollario. (11.15) Se X è cpa, il suo gruppo fondamentale è unico a meno di isomorfismi. Si scrive $\Pi(X)$.

Notazione. (11.16) Scrivendo $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ si intende $f : X \rightarrow Y$ continua tale che

$$f(x_0) = y_0$$

[†] Cammino chiuso con punto base y_0 .

[‡] Cammino chiuso con punto base y_0 .

(11.17) Data $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ continua, con $f(x_0) = y_0^\dagger$, vogliamo associare ad f un morfismo di gruppi:

$$f_\star : \Pi(X, x_0) \rightarrow \Pi(Y, y_0)$$

Osserviamo che $[\alpha] \in \Pi(X, x_0)$ e $\alpha : I \rightarrow X$ tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

\implies se definiamo $f_\star([\alpha]) := [f \circ \alpha]$ allora $f \circ \alpha \in \Omega(Y, y_0, y_0)$

$\implies f_\star([\alpha]) \in \Pi(Y, y_0)$.

Osservazione. (11.18) Dati $f : X \rightarrow Y$ continua e

$$\alpha \in \Omega(X, a, b), \quad \beta \in \Omega(X, b, c)$$

si ha

1. $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$;
2. $f \circ \bar{\alpha} = \overline{f \circ \alpha}$;
3. se $\alpha \sim \alpha'$ allora $f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$.

(11.19) Usiamo l'osservazione per verificare che f_\star è ben definita e omomorfismo[†] di gruppi.

- Ben definito: se $\alpha \sim \alpha'$ allora

$$f \circ \alpha \sim f \circ \alpha'$$

cioé f_\star è ben definita.

- f_\star è morfismo:

$$\begin{aligned} f_\star([\alpha][\beta]) &= f_\star([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] \\ &= [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \alpha][f \circ \beta] = f_\star([\alpha]) f_\star([\beta]) \end{aligned}$$

(11.20) È necessario fare una digressione sulle categorie e funtori: fare riferimento all'appendice V

[†] Si dice quindi che f rispetta i punti base.

[‡] Omomorfismo è sinonimo di morfismo.

Corollario. (11.21) Se $f : X \rightarrow Y$ è omeomorfismo, allora

$$f_* : \Pi(X, x_0) \rightarrow \Pi(Y, f(x_0))$$

è un isomorfismo di gruppi.

Osservazione. (11.22) Vedremo che il gruppo fondamentale è invariante non solo per omeomorfismi, ma anche per equivalenza omotopica.

Osservazione. (11.23) Se $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ è omeomorfismo

$$\implies f_* : \Pi(X, x_0) \rightarrow \Pi(Y, y_0) \text{ è isomorfismo.}$$

Ma in generale

$$\begin{aligned} f \text{ iniettiva} &\not\Rightarrow f_* \text{ iniettiva} \\ f \text{ suriettiva} &\not\Rightarrow f_* \text{ suriettiva.} \end{aligned}$$

Allo stesso modo, se $x_0 \in A \subseteq X$ è un sottospazio di X , $i : A \hookrightarrow X$ induce un omomorfismo

$$\begin{aligned} i_* : \Pi(A, x_0) &\rightarrow \Pi(X, x_0) \\ [\alpha] &\mapsto [i \circ \alpha] \end{aligned}$$

In generale i_* non è iniettiva, cioè $\Pi(A, x_0)$ non è un sottogruppo di $\Pi(X, x_0)$

Esempio. (11.24) $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, e in questo caso i_* non è iniettiva.

Notazione. (11.25) Se A è un sottospazio di X , $x_0 \in A$, denotiamo con G_A il sottogruppo di $\Pi(X, x_0)$ dato da

$$G_A := \Pi(\Pi(A, x_0))$$

e sono le classi di $\Pi(X, x_0)$ che ammettono un rappresentante α a valori in A .

Osservazione. (11.26) Supponiamo che A sia un retratto di X , e sia $x_0 \in A$.

Allora $i_* : \Pi(A, x_0) \rightarrow \Pi(X, x_0)$ è iniettivo e

$$r_* : \Pi(X, x_0) \rightarrow \Pi(A, x_0)$$

è suriettivo, dove r è la retrazione.

Infatti: $r \circ i = r|_A = \text{Id}_A$. Per funtorialità:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\text{Id}_A} & A & & \Pi(A, x_0) \xrightarrow{(\text{Id}_A)_*} \Pi(A, x_0) \\ & \searrow i & \nearrow r & \rightsquigarrow \text{funtorialità} & \searrow i_* \quad \nearrow r_* \\ & & X & & \Pi(X, x_0) \end{array}$$

$$\implies r_* \circ i_* = \text{Id}_{\Pi(A, x_0)}$$

$$\implies i_* \text{ iniettiva e } r_* \text{ suriettiva (poiché Id è biunivoca sempre).}$$

(11.27) Siano X, Y spazi topologici, $x_0 \in X$ e

$$\varphi, \psi : X \rightarrow Y$$

continue e omotope. Ci chiediamo che relazione ci sia tra φ_* e ψ_* .

$$\begin{array}{ccc} & \Pi(X, x_0) & \\ \varphi_* \swarrow & & \searrow \psi_* \\ \Pi(Y, \varphi(x_0)) & \xrightarrow{\sim} & \Pi(Y, \psi(x_0)) \end{array}$$

Esiste un isomorfismo di gruppi.

Teorema XXVIII.

Siano $\varphi, \psi : X \rightarrow Y$ mappe continue e omotope, e sia $x_0 \in X$.

Allora $\exists a : \Pi(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \Pi(Y, \psi(x_0))$ un isomorfismo di gruppi tale che $\psi_* = a \circ \varphi_*$.

Più precisamente, sia $F : X \times I \rightarrow Y$ un'omotopia tra ψ e φ . Allora

$$\gamma := F(x_0, \cdot) : I \rightarrow Y$$

è un cammino in Y da $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$:

$$\gamma(0) = F(x_0, 0) = \varphi(x_0)$$

$$\gamma(1) = F(x_0, 1) = \psi(x_0)$$

$\implies \gamma_{\#} : \Pi(Y, \varphi(x_0)) \rightarrow \Pi(Y, \psi(x_0))$ è un isomorfismo di gruppi
Allora

$$\psi_* = \gamma_{\#} \circ \varphi_*$$

Teorema XXIX.**Invarianza omotopica del gruppo fondamentale.**

Siano X, Y due spazi topologici, e $f : X \rightarrow Y$ una equivalenza omotopica.

Allora $\forall x_0 \in X$, si ha

$$f_* : \Pi(X, x_0) \rightarrow \Pi(Y, f(x_0))$$

è isomorfismo di gruppi.

Osservazione. (11.28) Siano

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

insiemi e applicazioni tra insiemi.

Se $g \circ f$ e $h \circ g$ sono biunivoche

$\implies f, g$ e h sono biunivoche.

Dimostrazione di (11.28)

$$\left. \begin{array}{l} g \circ f \text{ biunivoca} \implies g \text{ suriettiva} \\ h \circ g \text{ biunivoca} \implies g \text{ iniettiva} \end{array} \right] \implies g \text{ biunivoca}$$

$$\implies \exists g^{-1} : C \rightarrow B$$

$$\implies f = g^{-1} \circ (g \circ f)$$

$\implies f$ è composizione di mappe biunivoche e quindi è biunivoca.

Inoltre $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$

$\implies h$ è composizione di mappe biunivoche e quindi è biunivoca. ■

Dimostrazione di XXIX. Per ipotesi $\exists g$ tale che

$$g \circ f \sim \text{Id}_X, \quad f \circ g \sim \text{Id}_Y$$

Consideriamo:

$$\Pi(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \Pi(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \Pi(X, g \circ f(x_0)) \xrightarrow{\widetilde{f}_*} \Pi(Y, f \circ g \circ f(x_0))$$

Per mostrare che f_* è biunivoca, mostriamo che $g_* \circ f_*$ e $\widetilde{f}_* \circ g_*$ sono biunivoche.

Abbiamo che $g \circ f \sim \text{Id}_X$. Consideriamo le mappe indotte sui gruppi fondamentali:

$$\begin{array}{ccc} & \Pi(X, x_0) & \\ \varphi_* = (g \circ f)_* \swarrow & & \searrow (\text{Id}_X)_* = \psi_* \\ \Pi(Y, \varphi(x_0)) & & \Pi(X, x_0) \end{array}$$

Per il teorema XXVIII, $(g \circ f)_*$ e $(\text{Id}_X)_*$ differiscono per un isomorfismo di gruppi.

Per funtorialità,

$$(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\Pi(X, x_0)}, \quad (g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Concludiamo che $g_* \circ f_*$ è isomorfismo di gruppi (in quanto composizione di un isomorfismo e dell'identità).

Siccome $f \circ g \sim \text{Id}_Y$, allo stesso modo vediamo che $\widetilde{f}_* \circ g_*$ è anch'esso isomorfismo.

Dall'osservazione (11.28) concludiamo che f_* è isomorfismo. ■

Corollario. (11.29) Se X, Y sono spazi topologici cpa e omotopicamente equivalenti, allora X e Y hanno gruppi fondamentali isomorfi.

Corollario. (11.30) Sia X uno spazio topologico contraibile.

Allora il gruppo fondamentale di X è banale[†].

Dimostrazione di (11.30) X ha lo stesso tipo di omotopia di $Y = \{y_0\}$ e

$$\Pi(Y, y_0) = \{[c_{pt}]\}$$

ha un solo elemento. ■

Esempio. (11.31) \mathbb{R}^n ha gruppo fondamentale banale. Ogni sottospazio $X \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso o stellato rispetto ad un suo punto ha gruppo fondamentale banale.

Definizione. (11.32) Uno spazio topologico X si dice semplicemente connesso se è cpa e ha gruppo fondamentale banale.

(11.33) Notiamo quindi che X contraibile

$\implies X$ semplicemente connesso.

Corollario. (11.34) Sia $A \subseteq X$ un retrato di deformazione. Allora

$$i : A \hookrightarrow X, \quad r : X \rightarrow A$$

sono equivalenze omotopiche

$\implies \forall x_0 \in A$

$$i_* : \Pi(A, x_0) \rightarrow \Pi(X, x_0)$$

$$r_* : \Pi(X, x_0) \rightarrow \Pi(A, x_0)$$

sono isomorfismi di gruppo.s

[†] Ha solo l'elemento neutro.

11.3 Teorema di Van Kampen

(11.35) A questo punto è necessario fare una digressione sul numero di Lebesgue. Fare riferimento all'appendice V

Richiamo. (11.36) Se X è uno spazio topologico, $A \subseteq X$ sottospazio, $x_0 \in A$.

$$i : A \hookrightarrow X$$

induce

$$\begin{aligned} i_* : \Pi(A, x_0) &\rightarrow \Pi(X, x_0) \\ [\alpha] &\mapsto [i \circ \alpha] \end{aligned}$$

Definiamo $G_A = \text{Im}(i_*)$, che è l'insieme delle classi in $\Pi(X, x_0)$ che hanno un rappresentante a valori in A .

Teorema XXX.

Teorema di Van Kampen

Sia X uno spazio topologico, e $A, B \subseteq X$ aperti tali che

- $X = A \cup B$:
- A, B connessi per archi:
- $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap B$ connesso per archi.

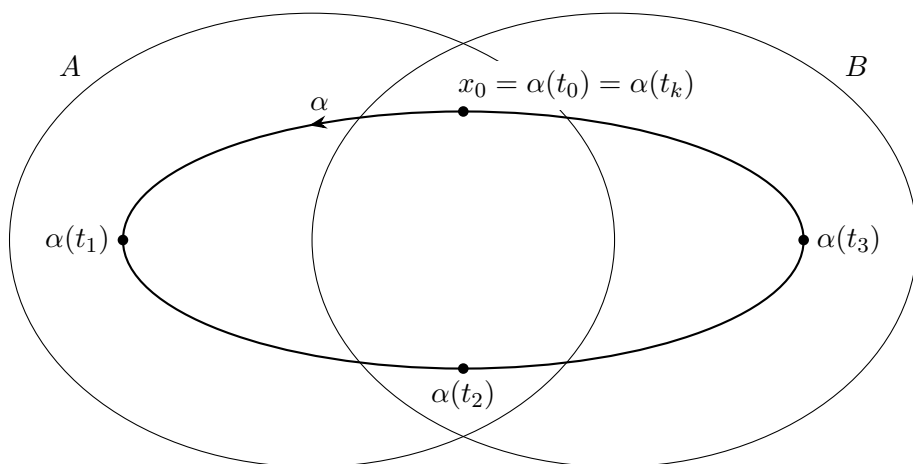
Sia $x_0 \in A \cap B$, e siano

$$G_A, G_B \in \Pi(X, x_0)$$

le immagini di $\Pi(A, x_0)$ e di $\Pi(B, x_0)$ tramite gli omomorfismi indotti dalle inclusioni.

Allora $\Pi(X, x_0)$ è generato da $G_A \cup G_B$

Dimostrazione di XXX. Sia $[\alpha] \in \Pi(X, x_0)$. Vogliamo mostrare che $[\alpha]$ si può scrivere come prodotto finito di elementi in G_A o G_B , cioè di classi di cacci con punto base x_0 e interamente contenuti in A o in B .

Figura 11.1: Partizione di X .

Siccome $\{A, B\}$ è ricoprimento aperto di X , e $\alpha : I \rightarrow X$, da un corollario[†] esiste una partizione di $[0, 1]$

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$$

tale che

$$\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq A \vee \alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq B$$

$\forall i = 1, \dots, k-1$, come mostrato in figura 11.1

Sia $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow X$, $\forall i = 1, \dots, k$.

A meno di riparametrizzazione, possiamo supporre

$$\alpha_i : [0, 1] \rightarrow X$$

$\implies \alpha_i$ è cammino a valori in A o B .

Dal lemma del cambio di parametro:

$$\alpha \sim ((\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3) * \dots * \alpha_k$$

Siccome $A, B, A \cap B$ sono connessi per archi,

$\implies \forall i = 1, \dots, k-1$, scegliamo:

[†] Vedi appendice V.

- se $\alpha(t_i) \in A \cap B$: un arco $\gamma_i : I \rightarrow A \cap B$ da x_0 a $\alpha(t_i)$;
- se $\alpha(t_i) \in A \setminus B$: un arco $\gamma_i : I \rightarrow A$ da x_0 a $\alpha(t_i)$;
- se $\alpha(t_i) \in B \setminus A$: un arco $\gamma_i : I \rightarrow B$ da x_0 a $\alpha(t_i)$;

Poniamo

$$\beta_1 := \alpha_1 * \overline{\gamma_1}$$

mentre $\forall i = 2, \dots, k-1$:

$$\beta_i := (\gamma_{i-1} * \alpha_i) * \overline{\gamma_i}$$

e

$$\beta_k := \gamma_{k-1} * \alpha_k$$

Ogni β_i è ben definito, ed è un cammino chiuso con punto base x_0 .

$$\implies [\beta_i] \in \Pi(X, x_0).$$

Verifichiamo che

$$\text{Im } \beta_i \subseteq A \vee \text{Im } \beta_i \subseteq B$$

fissiamo i , allora

$$\text{Im } \alpha_i \subseteq A \vee \text{Im } \alpha_i \subseteq B$$

Se $\text{Im}(\alpha_i) \subseteq A$, allora

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i(0) = \alpha(t_{i-1}) \\ \alpha_i(1) = \alpha(t_i) \end{array} \right] \in A$$

e vale

$$\text{Im}(\gamma_{i-1}), \text{Im } \gamma_i \subseteq A$$

$$\implies \text{Im } \beta_i = \text{Im } \gamma_{i-1} \cup \text{Im } \alpha_i \cup \text{Im } \gamma_i \subseteq A$$

$$\implies [\beta_i] \in G_A.$$

Allo stesso modo, se $\text{Im } \alpha_i \subseteq B$, allora $\text{Im } \beta_i \subseteq B$

$$\implies [\beta_i] \in G_B$$

Infine

$$\begin{aligned} [\beta_1] * \dots * [\beta_k] &= [\beta_1 * \dots * \beta_k] \\ &= [\alpha_1 * \underbrace{\overline{\gamma_1} * \gamma_1}_{\sim c_{\alpha(t_1)}} * \alpha_2 * \overline{\gamma_2} * \dots * \gamma_k * \alpha_k] \\ &= [\alpha_1 * \alpha_2 * \dots * \alpha_k] = [\alpha] \end{aligned}$$

■

Corollario. (11.37) Sia X uno spazio topologico, e siano $A, B \subseteq X$ aperti tali che

1. $X = A \cup B$;
2. A, B sono semplicemente connessi[†];
3. $A \cap B \neq \emptyset$ e $A \cap B$ è connesso per archi.

Allora X è semplicemente connesso.

Dimostrazione di (11.37) Osserviamo che X è connesso per archi, in quanto unione di due connessi per archi con intersezione non vuota.

Dal teorema di Van Kampen, se $x_0 \in A \cap B$, $\Pi(X, x_0)$ è generato da $G_A \cup G_B$. Però

$$\begin{aligned}\Pi(A, x_0) = \{1\} &\implies G_A = \{1\} \\ \Pi(B, x_0) = \{1\} &\implies G_B = \{1\}\end{aligned}$$

$$\implies \Pi(X, x_0) \text{ è generato da } \{1\}$$

$$\implies \Pi(X, x_0) = \{1\}. \quad \blacksquare$$

Corollario. (11.38) $\forall n \geq 2$, la sfera $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è semplicemente connessa.

Dimostrazione di (11.38) Consideriamo

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= (0, \dots, 0, 1) \in S^n \\ \mathbf{S} &= (0, \dots, 0, -1) \in S^n.\end{aligned}$$

Siano

$$\begin{aligned}A &:= S^n \setminus \{\mathbf{N}\} \\ B &:= S^n \setminus \{\mathbf{S}\}\end{aligned}$$

aperto di S^n . Ricordiamo che $S^n \setminus \{\mathbf{y}_0\}$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n

$$\implies \text{è contraibile}$$

[†] Nota: un insieme è semplicemente connesso se è connesso per archi e ha gruppo fondamentale banale.

$\implies A, B$ sono semplicemente connessi. Inoltre $A \cap B \neq \emptyset$ se $n \geq 1$, e

$$A \cap B = S^n \setminus \{N, S\}$$

è omeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{z_0\}$.

Inoltre per $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{z_0\}$ è connesso per archi

$\implies A \cap B$ è connesso per archi

$\implies S^n$ è semplicemente connesso. ■

Osservazione. (11.39) $\forall n \geq 2$, S^n è semplicemente connessa, ma non è contraibile.

11.4 Gruppo fondamentale di S^1

(11.40) Vogliamo vedere che $\Pi(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Suppongo di prendere $p_0 = (1, 0)$ come punto base.

Presa $[\alpha] \in \Pi(S^1, p_0)$ essa rappresenta il numero $n \in \mathbb{Z}$ di giri fatti da α attorno alla circonferenza (positivo in senso antiorario, e negativo in senso orario).

Per formalizzare il “numero di giri” usiamo la mappa esponenziale,

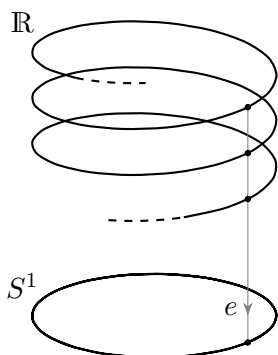
$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \end{aligned}$$

che equivale a

$$\begin{aligned} e : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{2\pi it} \end{aligned}$$

e è il quoziente di \mathbb{R} per l'azione di \mathbb{Z} su \mathbb{R} per traslazioni, come in figura 11.2

$\implies e$ è un'identificazione, è continua, iniettiva e aperta.

Figura 11.2: La funzione e

Lemma. (11.41) Sia $U \subsetneq S^1$ un aperto. Allora

$$e^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

con V_n aperto di \mathbb{R} e

$$e|_{V_n} : V_n \rightarrow \mathbb{R}$$

è omeomorfismo.

Definizione. (11.42) Diciamo che U , come definito per il lemma, è uniformemente rivestito.

Dimostrazione di (11.41) Supponiamo che $1 \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $1 \notin U$.

$$e^{-1}(1) = \mathbb{Z} = \{t : \cos 2\pi t = 1\}$$

$$\implies e^{-1}(U) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

Poniamo

$$\begin{aligned} V_0 &:= e^{-1}(U) \cap (0, 1) \\ &= e^{-1}(U) \cap [0, 1] \end{aligned}$$

- V_0 è aperto in \mathbb{R} ;
- $e|_{V_0}$ è iniettiva (e è iniettiva su $[0, 1]$);
- $e(V_0) = U$

e $e|_{V_0}$ è continua, aperta e biunivoca

\implies è omeomorfismo.

Poniamo $V_n := V_0 + n = e^{-1}(U) \cap (n, n+1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Allora

- $e^{-1}(U) = \cup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$;
- $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$
- $\forall n, e|_{V_n} : V_n \rightarrow U$ è omeomorfismo.

Definizione. (11.43) Un sollevamento di un cammino α di S^1 è un cammino

$$\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\alpha = e \circ \tilde{\alpha}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ & \tilde{\alpha} \nearrow & \downarrow e \\ I & \xrightarrow{\alpha} & S^1 \end{array}$$

(11.44) Allora $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} e(\tilde{\alpha}(t)) &= \alpha(t) \in S^1 \\ &= e^{2\pi i \tilde{\alpha}(t)} = \cos(2\pi \tilde{\alpha}(t)) + i \sin(2\pi \tilde{\alpha}(t)) \end{aligned}$$

$\implies 2\pi \tilde{\alpha}(t)$ è una determinazione dell'angolo per $\alpha(t) \in S^1$

$\implies 2\pi \tilde{\alpha}$ è una determinazione continua dell'angolo per α .

Esempio. (11.45) Sia $n \in \mathbb{Z}$, e consideriamo

$$\gamma : I \rightarrow S^1$$

dato da $\gamma(t) = e^{2\pi i n t}$.

- γ è un cammino in S^1 ;

- $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$

$\Rightarrow \gamma$ è un cappio con punto base 1.

Un sollevamento di γ è

$$\tilde{\gamma}(t) = nt, \quad \tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

e vale $e(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$

Teorema XXXI.

Teorema di sollevamento di cammini

Ogni cammino $\alpha : I \rightarrow S^1$ ammette un sollevamento

$$\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Inoltre, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $e(x_0) = \alpha(0) \in S^1$

$$\exists! \tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$$

sollevamento di α a partire da x_0 , cioè tale che $\tilde{\alpha}(0) = x_0$.

Dimostrazione di XXXI.

- Esistenza: $\forall p \in S^1$ sia U_p intorno aperto di p in S^1 che sia connesso e uniformemente rivestito (ovvero $U_p \subsetneq S^1$).

$$\{U_p\}_{p \in S^1} \text{ ricoprimento aperto di } S^1$$

Allora esiste una partizione finita

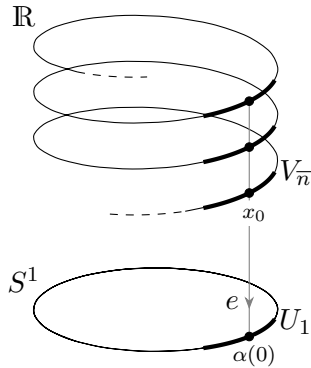
$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$$

di $[0, 1]$ tale che $\forall i = 0, \dots, k$,

$$\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_i^\dagger$$

Costruiamo il sollevamento $\tilde{\alpha}$ “a pezzi” ricorsivamente su $[0, t_i]$. Notiamo che $\tilde{\alpha}(0) = x_0$ assegnato.

[†] Aperto del ricoprimento.


 Figura 11.3: $x_0 \in V_{\bar{n}}$

Costruiamo $\tilde{\alpha}$ su $[0, t_1]$

$$\alpha([0, t_1]) \subseteq U_1 \text{ uniformemente rivestito.}$$

Inoltre

$$e^{-1}(U_1) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

con V_n aperto di \mathbb{R} , e $e|_{V_n} \rightarrow U$ è omeomorfismo.

In particolare, $\alpha(0) \in U_1$

$$\implies x_0 \in e^{-1}(\alpha(0)) \subseteq e^{-1}(U_1)$$

$$\implies \exists \bar{n} \text{ tale che } x_0 \in V_{\bar{n}}, \text{ come in figura 11.3}$$

$e|_{V_{\bar{n}}} : V_{\bar{n}} \rightarrow U_1$ è omeomorfismo

$$\implies \exists \varphi := (e|_{V_{\bar{n}}})^{-1} : U_1 \rightarrow V_{\bar{n}}$$

Poniamo

$$\tilde{\alpha}_1 := \varphi \circ \alpha|_{[0, t_1]}$$

$$\implies \tilde{\alpha}_1 : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua, sollevamento di } \alpha|_{[0, t_1]}.$$

Supponiamo di aver definito

$$\tilde{\alpha}_i : [0, t_i] \rightarrow \mathbb{R}$$

continua che solleva $\alpha|_{[0, t_i]}$.

$$\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_{i+1}$$

uniformemente rivestito

$$\implies e^{-1}(U_{i+1}) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} W_m, W_m \text{ aperti di } \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i(t_i) &\in \mathbb{R} \\ e(\tilde{\alpha}_i(t_i)) &= \alpha(t_i) \in U_{i+1} \end{aligned}$$

$$\implies \tilde{\alpha}_i(t_i) \in e^{-1}(U_{i+1})$$

$$\implies \exists! \bar{m} \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \tilde{\alpha}_i(t_i) \in W_{\bar{m}}. \text{ Si ha che}$$

$$e|_{W_{\bar{m}}} : W_{\bar{m}} \rightarrow U_{i+1}$$

è omeomorfismo.

Sia $\psi := (e|_{W_{\bar{m}}})^{-1} : U_{i+1} \rightarrow W_{\bar{m}}$ continua.

Definiamo

$$\tilde{\alpha}_{i+1} : [0, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$$

come

$$\tilde{\alpha}_{i+1}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}_i(t) & t \in [0, t_i] \\ \psi \circ \alpha(t) & t \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

continua per il lemma di incollamento, solleva $\alpha|_{[0, t_{i+1}]}$.

\implies In un numero finito di passi, costruiamo il sollevamento su tutto $[0, 1]$.

- Unicità: siano $\tilde{\alpha}, \hat{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ due sollevamenti di α a partire da x_0 . Sia

$$Y := \{t \in T : \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)\}$$

– Y è chiuso, (perché \mathbb{R} con la topologia euclidea è Hausdorff);

– $0 \in Y$, perché

$$\tilde{\alpha}(0) = x_0 = \hat{\alpha}(0)$$

$$\implies Y \neq \emptyset$$

Mostrando che Y è aperto, poiché I è connesso, necessariamente $Y = I$.

Sia $t_0 \in Y$, e consideriamo $\alpha(t_0) \in S^1$, e sia $U \subseteq S^1$ un intorno aperto di $\alpha(t_0)$ uniformemente rivestito

$$\implies e^{-1}(U) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n \text{ con}$$

$$\forall n, \quad e|_{V_n} : V_n \rightarrow U \text{ omeomorfismo.}$$

$$\text{Abbiamo } \tilde{\alpha}(t_0) = \hat{\alpha}(t_0) \in e^{-1}(\alpha(t_0)) \subseteq e^{-1}(U)$$

$$\implies \exists! \bar{n} \text{ tale che } \tilde{\alpha}(t_0) \in V_{\bar{n}} \subseteq \mathbb{R}.$$

Consideriamo

$$A := \tilde{\alpha}^{-1}(V_{\bar{n}}) \cap \hat{\alpha}^{-1}(V_{\bar{n}}) \subseteq I,$$

A intersezione di aperti che contengono t_0 .

Mostriamo che $A \subseteq Y$. Sia $t \in A$. Allora

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(t), \hat{\alpha}(t) &\in V_{\bar{n}} \\ e(\tilde{\alpha}(t)) &= \alpha(t) = e(\hat{\alpha}(t)) \end{aligned}$$

ma e è iniettiva su $V_{\bar{n}}$

$$\implies \tilde{\alpha}(t) = \hat{\alpha}(t)$$

$$\implies t \in Y$$

$$\implies t_0 \text{ è interno a } Y$$

$$\implies Y \text{ è aperto;}$$

$$\implies Y \text{ è aperto, chiuso e non vuoto, in } I \text{ connesso}$$

$$\implies Y = I$$

$$\implies \tilde{\alpha} = \hat{\alpha}. \quad \blacksquare$$

Definizione. (11.46) Sia $\alpha : I \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C}$ un cammino chiuso con punto base 1. Sia $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ il sollevamento di α a partire da $x_0 = 0 \in \mathbb{Z} = e^{-1}(1)$. Poniamo il grado di un cammino chiuso in S^1

$$\deg(\alpha) := \tilde{\alpha}(1)$$

Osservazione. (11.47) $\deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$, infatti $e(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = 1$
 $\implies \tilde{\alpha}(1) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Esempio. (11.48) Consideriamo il cammino

$$\alpha(t) = e^{2\pi it}$$

con sollevamento $\tilde{\alpha}(t) = t$, e

$$\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = 1.$$

Esempio. (11.49) Considero il cammino chiuso in S^1 :

$$\gamma_n(t) = e^{2\pi int}$$

con punto base 0. Il sollevamento a base di $x_0 = 0$ è

$$\widetilde{\gamma_n}(t) = nt$$

$$\implies \deg(\gamma_n) = \widetilde{\gamma_n}(1) = n \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione. (11.50) Sia $\alpha : I \rightarrow S^1$ un cammino con punto base $1 \in \mathbb{C}$. Sia $\tilde{\alpha}_0$ il sollevamento di α a partire da 0.

Sia $n \in \mathbb{Z}$, e sia

$$\tilde{\alpha}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$\tilde{\alpha}_n(t) := \tilde{\alpha}_0(t) + n$$

Allora $\tilde{\alpha}_n$ è continua ed è un sollevamento di α , infatti

$$\begin{aligned} e(\tilde{\alpha}_n(t)) &= e^{2\pi i \tilde{\alpha}_n(t)} = e^{2\pi i (\tilde{\alpha}_0(t) + n)} \\ &= e^{2\pi i \tilde{\alpha}_0(t)} \cdot e^{2\pi i n} = \alpha(t) \end{aligned}$$

$\implies \tilde{\alpha}_n$ è il sollevamento di α a partire da $x_0 = n$. Abbiamo

$$\tilde{\alpha}_n(1) - \tilde{\alpha}_n(0) = \tilde{\alpha}_0(1) = \deg(\alpha)$$

\implies possiamo definire, per $\hat{\alpha}$ un sollevamento qualsiasi di α ,

$$\deg \alpha = \hat{\alpha}(1) - \hat{\alpha}(0).$$

Osservazione. (11.51) Allo stesso modo, se $\beta : I \rightarrow S^1$ è un cammino chiuso (con punto base qualsiasi), si definisce il grado di β come

$$\deg \beta = \tilde{\beta}(1) - \tilde{\beta}(0)$$

dove $\tilde{\beta}$ è un sollevamento di β .

$\deg \beta \in \mathbb{Z}$ perché

$$e(\tilde{\beta}(1)) = \beta(1) = \beta(0) = e(\tilde{\beta}(0)).$$

Proposizione. (11.52) Siano α, β due cammini chiusi in S^1 con punto base 1. Allora

$$\deg(\alpha * \beta) = \deg \alpha + \deg \beta$$

Dimostrazione di (11.52) Sia $\tilde{\alpha}$ il sollevamento di α a partire da $x_0 = 0$

$$\implies \deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}.$$

Sia $\hat{\beta}$ il sollevamento di β a partire da $\tilde{\alpha}(1)$

$$\implies \deg \beta = \hat{\beta}(1) - \hat{\beta}(0) = \hat{\beta}(1) - \deg \alpha$$

$$\implies \hat{\beta}(1) = \deg \alpha + \deg \beta.$$

$\tilde{\alpha} * \hat{\beta}$ è un cammino in \mathbb{R} , ed è un sollevamento di $\alpha * \beta$.

$$\begin{aligned} e((\tilde{\alpha} * \hat{\beta})(t)) &= \begin{cases} e(\tilde{\alpha}(2t)) & t \in [0, 1/2] \\ e(\hat{\beta}(2t-1)) & t \in [1/2, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha(2t) & t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t-1) & t \in [1/2, 1] \end{cases} = (\alpha * \beta)(t). \end{aligned}$$

Notiamo che $(\tilde{\alpha} * \hat{\beta})(0) = \tilde{\alpha}(0) = 0$

$$\implies \deg(\alpha * \beta) = (\tilde{\alpha} * \hat{\beta})(1) = \tilde{\beta}(1) = \deg \alpha + \deg \beta. \quad \blacksquare$$

Teorema XXXII.

Teorema di monodromia

Siano $\alpha, \beta : I \rightarrow S^1$ cammini chiusi omotopi. Allora

$$\deg \alpha = \deg \beta.$$

Teorema XXXIII.

Gruppo fondamentale di S^1

Si ha che

$$\Pi(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$$

e più precisamente, l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : \Pi(S^1, p) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\alpha] &\mapsto \deg \alpha \end{aligned}$$

è ben definita ed è isomorfismo di gruppi.

Dimostrazione di XXXIII.

- ϕ è ben definito per il teorema di monodromia.

- ϕ è omomorfismo di gruppi, infatti

$$\begin{aligned}\phi([\alpha][\beta]) &= \phi([\alpha * \beta]) = \deg(\alpha * \beta) \\ &= \deg \alpha + \deg \beta = \phi([\alpha]) + \phi([\beta]).\end{aligned}$$

- ϕ è suriettiva, infatti $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\exists \gamma_n^\dagger$ cammino chiuso in S^1 con punto base 1 di grado n

$$\implies \phi([\gamma_n]) = n.$$

- Mostriamo ora che ϕ è iniettiva, mostrando che $\ker \phi = \{1\}$.

Sia $[\alpha] \in \ker \phi$, cioè $\alpha : I \rightarrow S^1$ ha grado 0.

Sia $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}$ il sollevamento di α a partire di $x_0 = 0$.

Allora $\tilde{\alpha}(1) = 0$, cioè $\tilde{\alpha}$ è chiuso,

$$\implies [\tilde{\alpha}] \in \Pi(\mathbb{R}, 0) = \{[c_0]\}, \text{ perché } \mathbb{R} \text{ è contraibile.}$$

$$\implies \tilde{\alpha} \text{ è omotopo al cammino costante}$$

$$\implies \exists F : I \times I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua tale che}$$

$$F(t, 0) = \tilde{\alpha}(t)$$

$$F(t, 1) = 0 \forall t$$

$$F(0, s) = F(1, s) = 0 \forall s$$

Sia $G := e \circ F : I \times I \rightarrow S^1$.

Allora G è continua e

$$G(t, 0) = e(F(t, 0)) = e(\tilde{\alpha}(t)) = \alpha(t)$$

$$G(t, 1) = e(F(t, 1)) = e(0) = 1 \text{ for all } t$$

$$G(0, s) = G(1, s) = 1 \forall s.$$

$$\implies G \text{ è un'omotopia di cammini tra } \alpha \text{ e } c_1$$

$$\implies [\alpha] = 1 \text{ in } \Pi(S^1, 1).$$

■

[†] Vedi esempio (11.49).

Esempio. (11.53) Se considero $e : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ è suriettiva, ma $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$e_* : \Pi(\mathbb{R}, x_0) \rightarrow \Pi(S^1, e(x_0))$$

non è suriettiva[†].

Corollario. (11.54) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ il disco unitario e $A = \partial D = S^1$. Allora A non è retracts di D .

Dimostrazione di (11.54) D è convesso in \mathbb{R}^2 ,

\implies è contraibile

\implies se $p \in A$ abbiamo

$$\Pi(A, p) \cong \mathbb{Z}, \quad \Pi(D, p) = \{1\}$$

Se A fosse retracts di D , l'inclusione $i : A \hookrightarrow D$ dovrebbe indurre

$$i_* : \Pi(A, p) \rightarrow \Pi(D, p)$$

iniettivo, che è assurdo. ■

Osservazione. (11.55) Allo stesso modo si vede che se X è semplicemente connesso e $A \subseteq X$ è un sottospazio omeomorfo a S^1 allora A non è retracts di X .

Corollario - Teorema del punto fisso di Brouwer. (11.56) Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ disco chiuso, e

$$f : D \rightarrow D$$

continua, allora f deve avere un punto fisso, cioè

$$\exists p \in D : f(p) = p$$

[†] Si ha che $\Pi(\mathbb{R}, x_0) \cong \{1\}$ e $\Pi(S^1, e(x_0)) \cong \mathbb{Z}$.

Dimostrazione di (11.56) Supponiamo per assurdo che

$$f(p) \neq p, \quad \forall p \in D$$

Usiamo f per costruire una retrazione

$$r : D \rightarrow \partial D$$

Sia s la semiretta aperta uscente da $f(p)$ e passante per p .

Poniamo $r(p) := s \cap \partial D^\dagger$.

Quindi $r|_{\partial D} = \text{Id}$

$\implies r$ è una retrazione, assurdo. ■

Corollario. (11.57) Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto con $n \geq 3$. Allora U non è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^2 .

Osservazione. (11.58) Sia $B \subseteq \mathbb{R}^n$, con $n \geq 3$ una palla aperta di centro p .

Scegliamo una sfera $S \subseteq B$ centrata in p .

$\implies S \underset{\text{omeo}}{\sim} S^{n-1}$, con $n-1 \geq 2$

$\implies S^{n-1}$ è semplicemente connessa.

Inoltre $S \subseteq B \setminus \{p\}$ è un retratto di deformazione tramite la proiezione radiale

$\implies S$ e $B \setminus \{p\}$ sono omotopicamente equivalenti

$\implies B \setminus \{p\}$ è semplicemente connessa.

Dimostrazione di (11.57) Supponiamo per assurdo che $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ sia un aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^2 .

Se $B \subseteq U$ è una palla aperta centrata in p , B sarà omeomorfa ad un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$\varphi : B \rightarrow A$$

omeomorfismo, con $p \in B$, $q := \varphi(p) \in A$

[†] Esercizio: scrivere r in coordinate e verificare che è continua

$$\implies B \setminus \{p\} \underset{\text{omeo}}{\sim} A \setminus \{q\}$$

$\implies A \setminus \{q\}$ è semplicemente connesso (perché B è semplicemente connesso per l'osservazione (11.58)).

A aperto, $q \in A$

$$\implies \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } B_\varepsilon(q) \subseteq A.$$

Sia S la circonferenza centrata in q di raggio $\varepsilon/2$

$$\implies S \subseteq A \setminus \{q\}.$$

Mostriamo che S è un retratto di $A \setminus \{q\}$.

Infatti sia $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{q\} \rightarrow S$ la retrazione radiale, r si restringe ad una retrazione

$$r : A \setminus \{q\} \rightarrow S$$

$$\implies i : S \hookrightarrow A \setminus \{q\}, \text{ con } x_0 \in S \text{ induce}$$

$$i_* : \Pi(S, x_0) \cong \mathbb{Z} \rightarrow \Pi(A \setminus \{q\}, x_0)$$

iniettivo

$$\implies A \setminus \{q\} \text{ non è semplicemente connesso. Assurdo.} \quad \blacksquare$$

Esempio. (11.59) Nel teorema di Van Kampen, l'ipotesi che A, B siano aperti è essenziale.

Sia $X = S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$A = X \cap \{y \geq 0\}$$

$$B = (X \cap \{y < 0\}) \cup \{(1, 0)\}.$$

A, B non sono aperti in X .

- $A \underset{\text{omeo}}{\sim} [0, 1]$ convesso

$$\implies A \text{ è contraibile e connesso per archi.}$$

- $B \underset{\text{omeo}}{\sim} (0, 1]$ convesso

$$\implies B \text{ è contraibile e connesso per archi.}$$

- $A \cup B = X$.
- $A \cap B = \{(1, 0) =: \mathbf{p}\}$ non vuoto, connesso per archi.

Se valesse l'asserto di Van Kampen, X dovrebbe essere semplicemente connesso (no, perché $X = S^1$).

11.5 Gruppo fondamentale del prodotto

Proposizione. (11.60) Siano X, Y spazi topologici e $x_0 \in X, y_0 \in Y$. Allora

$$\Pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \Pi(X, x_0) \oplus \Pi(Y, y_0)$$

Dimostrazione di (11.60) Data $\alpha : I \rightarrow X \times Y$, α ha due componenti, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$\alpha_1 : I \rightarrow X$$

$$\alpha_2 : I \rightarrow Y$$

L'isomorfismo è

$$[\alpha] \longleftrightarrow ([\alpha_1], [\alpha_2]) .$$

Allo stesso modo, una mappa[†] $F : I \times I \rightarrow X \times Y$ è determinata dalle sue componenti, (F_1, F_2)

$$F_1 : I \times I \rightarrow X$$

$$F_2 : I \times I \rightarrow Y$$

\implies c'è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi quozienti

$$\begin{aligned} \Pi(X \times Y, (x_0, y_0)) &\longleftrightarrow \Pi(X, x_0) \times \Pi(Y, y_0) \\ [\alpha] &\longleftrightarrow ([\alpha_1], [\alpha_2]) \end{aligned}$$

Questa biezione è isomorfismo di gruppi, infatti le componenti di $\alpha * \beta$ sono

$$(\alpha_1 * \beta_1, \alpha_2 * \beta_2)$$

■

[†] **Esercizio.** Verificare che F è una omotopia di cammini tra α e β

$$\iff F_i \text{ è un'omotopia di cammini tra } \alpha_i \text{ e } \beta_i, \text{ con } i \in \{1, 2\}$$

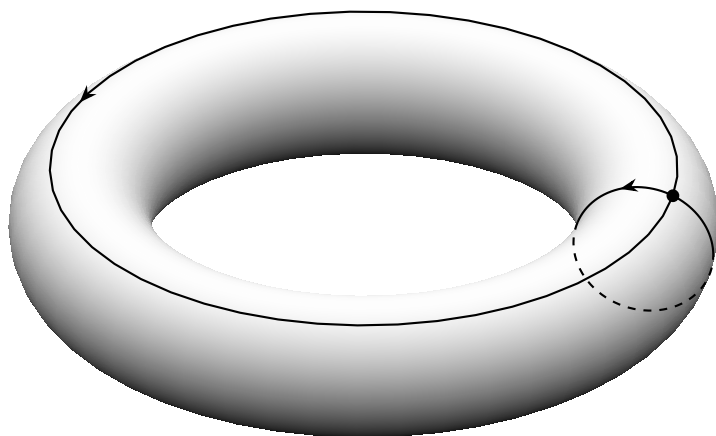


Figura 11.4: Generatori del gruppo fondamentale del toro

11.6 Esempi di Gruppi Fondamentali

Esempio. (11.61) Il gruppo fondamentale del toro, $T = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{C}^2$ è

$$\Pi(T, p) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

con generatori

$$\begin{array}{l} (1, 0) \in \mathbb{Z}^2 \\ (0, 1) \in \mathbb{Z}^2 \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{l} \alpha(t) = (e^{2\pi it}, 1) \\ \beta(t) = (1, e^{2\pi it}) \end{array}$$

come mostrato in figura 11.4

Esempio: bouquet di circonferenze. (11.62) Consideriamo X il bouquet di due circonferenze, C_1 e C_2 . Siano α, β due cammini chiusi in X , con punto base p , che girano una volta attorno ad una delle circonferenze, come in figura 11.5

$[\alpha], [\beta] \in \Pi(X, p)$, e per il teorema di Van Kanpen sono dei generatori per il gruppo.

Infatti, considero A, B insiemi aperti e cpa, come rappresentati in figura 11.6. Sicuramente $X = A \cup B$, e $A \cap B$ è sicuramente non vuota e connessa per archi.

$\Rightarrow \Pi(X, p)$ è generato dalle immagini dei gruppi fondamentali di A e B .

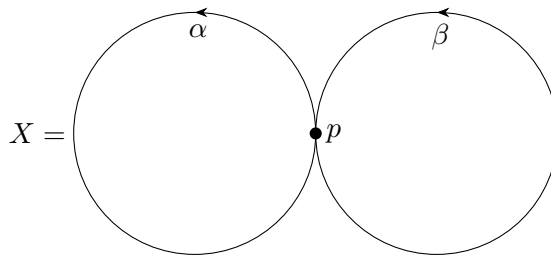


Figura 11.5: Generatori del gruppo fondamentale per il bouquet di due circonferenze

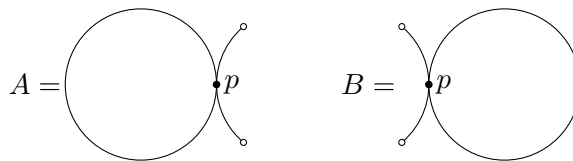


Figura 11.6: Gli insiemi A e B , aperti e cpa.

Osserviamo che C_1 è retracts di deformazione di A . Infatti, la retrazione $r : A \rightarrow C_1$ è definita come

$$r(q) = \begin{cases} q, & q \in C_1 \\ p, & q \in A \setminus C_1 \cup \{p\} \end{cases}$$

ed è continua per il lemma di incollamento.

Per far vedere che C_1 è un retracts di deformazione per A , posso osservare che A è omeomorfo a C_1 unita a due segmenti in \mathbb{R}^2 , e dopodiché utilizzare l'omotopia lineare

$$\implies \Pi(A, p) \cong \mathbb{Z} \text{ generato da } [\alpha], \Pi(B, p) \cong \mathbb{Z} \text{ generato da } [\beta]$$

$$\implies \left. \begin{array}{l} G_A \text{ è generato da } [\alpha] \\ G_B \text{ è generato da } [\beta] \end{array} \right\} \implies \Pi(X, p) \text{ è generato da } [\alpha] \text{ e } [\beta].$$

Le classi di α e β in $\Pi(X, p)$ non commutano, cioè

$$[\alpha * \beta] \neq [\beta * \alpha]$$

$\Rightarrow \Pi(X, p)$ si chiama gruppo libero a due generatori, e contiene tutte le “parole” della forma

$$[\alpha]^{m_1}[\beta]^{n_1}[\alpha]^{m_2}[\beta]^{n_2} \dots [\alpha]^{m_r}[\beta]^{n_r}$$

e generalmente si indica con $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, non abeliano.

Esempio. (11.63) Se X_m è il bouquet di m circonferenze, succede lo stesso con m generatori, e

$$\Pi(X_i) \not\cong \Pi(X_j) \text{ se } i \neq j.$$

11.6.1 Spazi proiettivi reali

Ripasso. (11.64) Consideriamo ora il caso dello spazio proiettivo reale, introdotto in precedenza.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{R}^*$$

per azione di gruppo moltiplicativo.

Avevamo osservato che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è compatto e di Hausdorff, e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è anche quoziente di S^n , dove $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ proiezione identifica i punti antipodali (quoziente per azione di $G = \{\pm 1\}$)

$\Rightarrow \pi$ è sia chiusa che aperta.

Nota. (11.65) Se $U \subseteq S^n$ è un aperto su cui π è iniettiva, allora $\pi(U)$ è aperto in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e

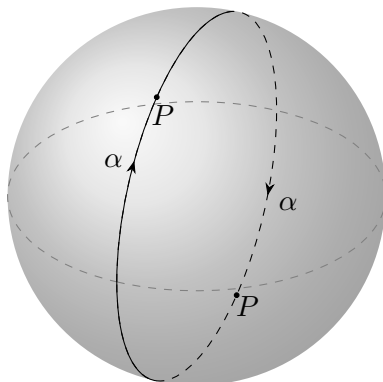
$$\pi|_U : U \rightarrow \pi(U)$$

è omeomorfismo.

Se $U \subsetneq S^n$

$\Rightarrow U$ è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n , perché $S^n \setminus \{y_0\} \underset{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \forall p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}), \exists \Omega$ intorno aperto di p tale che Ω è omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n .


 Figura 11.7: Capi in \mathbb{P}^2

Esempio. (11.66) Consideriamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale, di Hausdorff. Sia

$$C := S^2 \cap \{z \geq 0\} \text{ calotta superiore.}$$

C è compatto, e

$$\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

è chiusa, ed è ancora identificazione.

Proiettando la calotta verticalmente sul piano xy otteniamo un omeomorfismo tra C e il disco unitario D

$\Rightarrow D \twoheadrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ quoziente per la relazione di equivalenza su D che identifica i punti antipodali su ∂D .

Vale che $\Pi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), p) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, con

$$\Pi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), p) = \{[c_p], [\alpha]\}$$

come in figura 11.7.

Parte III

Classificazione delle superfici topologiche

Capitolo 12

Varietà topologiche

Definizione. (12.1) *Uno spazio topologico X si dice localmente euclideo di dimensione n se ogni punto di X ha un intorno aperto omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n .*

Definizione. (12.2) *Uno spazio topologico X si dice varietà topologica di dimensione n se*

- X è localmente euclideo di dimensione n ,
- X è di Hausdorff, connesso e a base numerabile

Esempi. (12.3)

1. \mathbb{R}^n
2. S^n compatta
3. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ compatta

Proprietà. (12.4) Ogni aperto connesso di una varietà topologica è ancora una varietà topologica.

Nota. (12.5) Il disco chiuso D non è localmente euclideo; infatti, preso un punto sulla frontiera, un suo intorno non può essere omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^2 .

Definizione. (12.6) n viene chiamata dimensione della varietà topologica

Osservazione. (12.7) La dimensione della varietà topologica è ben definita per l'invarianza della dimensione.

Proprietà. (12.8)

- Una varietà topologica è cpa^\dagger .
- Se X è una varietà topologica di dimensione n , Y è una varietà topologica di dimensione m , allora $X \times Y$ è una varietà topologica di dimensione $m + n^\ddagger$.

Esempio. (12.9) Il toro $T = S^1 \times S^1$ è una varietà topologica di dimensione 2.

Proposizione. (12.10) Sia X uno spazio topologico compatto, connesso, di Hausdorff e localmente euclideo di dimensione n .

Allora X è a base numerabile

$\implies X$ è una varietà topologica.

12.1 Varietà topologiche di dimensione $n = 1$

Esempio. (12.11) Gli esempi sono \mathbb{R} , S^1 .

Teorema XXXIV.

Classificazione delle varietà topologiche di dimensione 1

Ogni varietà topologica di dimensione 1 è omeomorfa a \mathbb{R} oppure a S^1 .

Esempio. (12.12) Se consideriamo X lo spazio topologico “retta con due origini”, X è localmente euclideo di dimensione 1, compatto e a base numerabile, ma non Hausdorff.

[†] Dimostrazione lasciata per esercizio nel foglio del tutorato

[‡] Dimostrazione lasciata per esercizio nel foglio del tutorato

Capitolo 13

Varietà topologiche di dimensione $n = 2^\dagger$

Definizione. (13.1) Una superficie (topologica) è una varietà topologica di dimensione 2. Vogliamo classificare le superfici compatte a meno di omeomorfismo.

Congettura di Poincaré. (13.2) Se X è una varietà topologica compatta di dimensione 3, semplicemente connessa, allora X è omeomorfa alla sfera.

Esempio. (13.3) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è quoziente del disco D ; possiamo vederlo come quoziente del quadrato $I \times I$, come in figura 13.1

Questo modello piano può essere rappresentato come una sequenza di lettere: “ $abab$ ”, che schematizza con una parola formale la relazione di equivalenza messa sul quadrato.

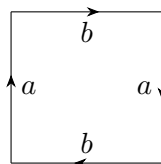


Figura 13.1: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come quoziente del quadrato $I \times I$

[†] Questa parte sarà basata sulle note del prof Occhetta, [Occ].

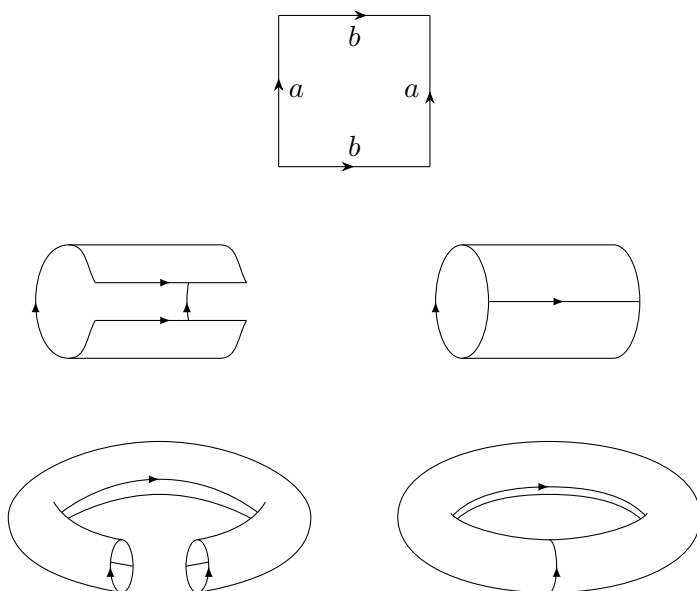


Figura 13.2: Toro come quoziente del quadrato

Esempio. (13.4) $T = S^1 \times S^1$, $\mathbb{R}^2 \twoheadrightarrow T$ quoziente per l'azione di \mathbb{Z}^2 per traslazione.

Restrizzando, $I \times I \twoheadrightarrow T$ è chiusa \implies è ancora un'identificazione.

Posso quindi vedere il toro come il quoziente del quadrato, come in figura 13.2.

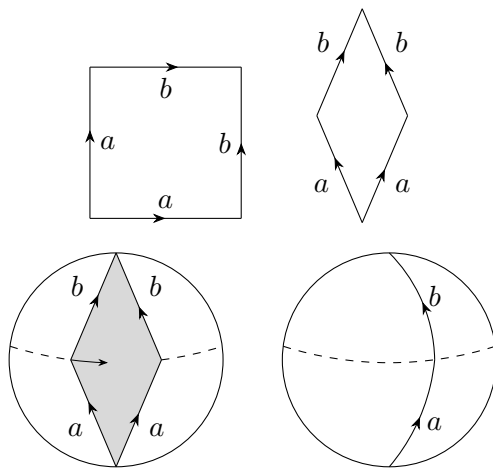
La parola formale che schematizza la relazione di equivalenza per il toro è “ $aba^{-1}b^{-1}$ ”

Esempio. (13.5) Anche S^2 si può vedere come quoziente di $I \times I$, come in figura 13.3.

La parola formale trovata è “ $abb^{-1}a^{-1}$ ”

Osservazione. (13.6) Sia $P \subseteq \mathbb{R}^2$ un poligono con un numero pari di lati. Sia \sim una relazione di equivalenza su P che identifica a 2 a 2 i lati di P , in questo modo: se l_1, l_2 sono lati da identificare, entrambi omeomorfi a $[0, 1]$, scelgo un omeomorfismo $l_1 \xrightarrow{\varphi} l_2$, allora

$$p \sim \varphi(p), \quad \forall p \in l_1$$


 Figura 13.3: S^2 come quoziente di $I \times I$

Allora $S := P / \sim$ è una superficie topologica compatta.

1. P connesso e compatto

$\implies S$ connessa e compatta.

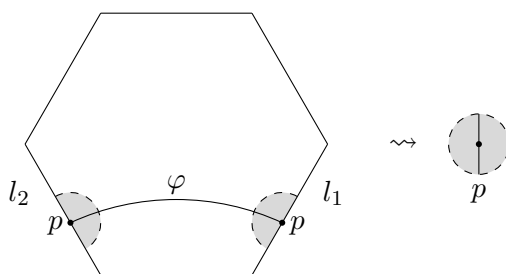
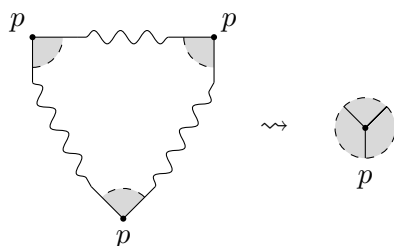
2. S è localmente euclidea di dimensione 2. Sia $p \in S$:

- se p viene da un punto all'interno di P , scegliamo un dischetto aperto U centrato in tal punto tale che $U \cap \partial P \neq \emptyset$; se π è la proiezione al quoziente

$\implies \pi(U)$ è intorno di p omeomorfo a disco aperto di \mathbb{R}^2 ;

- se p viene da un punto all'interno di un lato di l_1 , al quoziente otteniamo un intorno aperto omeomorfo al disco aperto di \mathbb{R}^2 , come mostrato in figura 13.4;
- se p viene da un vertice, il procedimento è il medesimo, come in figura 13.5. Al quoziente si ottiene un intorno aperto omeomorfo al disco aperto.

Con gli stessi intorni aperti si vede anche che S è di Hausdorff.

Figura 13.4: p punto interno di P Figura 13.5: p punto nel vertice.

Definizione. (13.7) Il poligono P tale per cui una superficie topologica è dato dal quoziente P/\sim viene detto modello piano, e si rappresenta sempre con una parola.

Esempio. (13.8) Considero la parola

$$aba^{-1}cbc^{-1}$$

che dà origine al poligono P della figura 13.6

Esempio. (13.9) S^2 ha modello piano aa^{-1} e modello piano come in figura 13.7

Esempio. (13.10) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha modello piano aa e modello piano come in figura 13.8

Esempio: bottiglia di Klein. (13.11) La bottiglia di Klein (mostrata in figura 13.9) K è data dal modello piano

$$aba^{-1}b$$

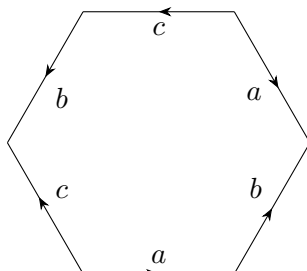


Figura 13.6: Il poligono di parola $aba^{-1}cbc^{-1}$

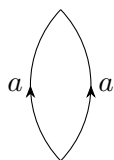


Figura 13.7: Il poligono di parola aa^{-1}

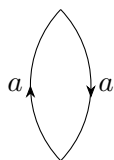


Figura 13.8: Il poligono di parola aa

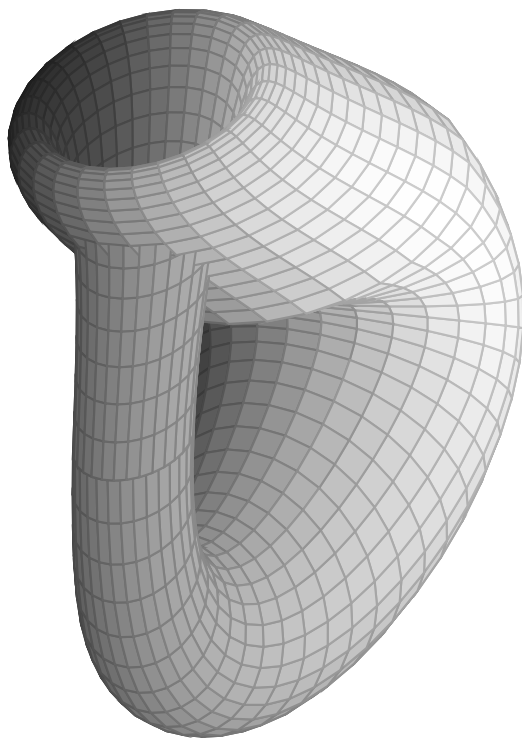


Figura 13.9: Bottiglia di Klein

come in figura 13.10

13.1 Somma connessa di superfici compatte

(13.12) Siano S_1, S_2 due superfici compatte. Siano $x \in S_1, y \in S_2$. Entrambi i punti hanno interni aperti omeomorfi ad un disco aperto di \mathbb{R}^2 .

\implies Esistono $D_x \subseteq S_1, D_y \subseteq S_2$ omeomorfi ad un disco chiuso in \mathbb{R}^2 .

Togliamo alle due superfici gli interni di questi dischi

$$Y := (S_1 \setminus \circ D_x) \sqcup (S_2 \setminus \circ D_y)$$

Notiamo che

$$\partial D_x \underset{\text{omeo}}{\sim} \partial D = S^1 \underset{\text{omeo}}{\sim} D_y$$

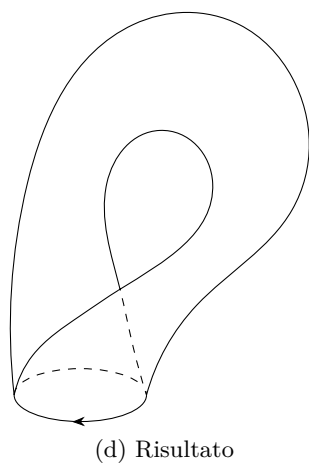
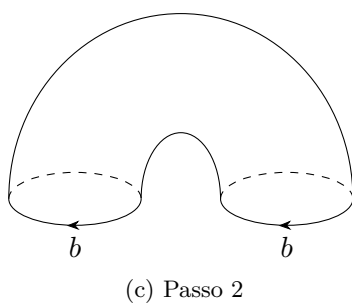
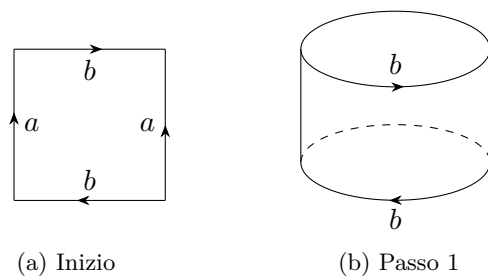


Figura 13.10: Modello piano della bottiglia di Klein

Sia

$$\varphi : \partial D_x \rightarrow \partial D_y, \quad \text{omeomorfismo}$$

Incolliamo le due componenti di Y identificando i bordi dei due dischi, cioè mettiamo in Y la relazione di equivalenza $p \sim q \iff$

$$\begin{aligned} p &= q \\ \vee \\ p \in \partial D_x, q \in \partial D_y, q &= \varphi(p) \text{ o viceversa} \end{aligned}$$

Fatti. (13.13)

1. Il quoziente Y/\sim è ancora una superficie compatta che denotiamo con

$$S_1 \# S_2, \quad \text{somma connessa}$$

2. La somma connessa $S_1 \# S_2$, a meno di omeomorfismo, non dipende dalle scelte fatte (i punti x, y , i dischi D_x, D_y e l'omeomorfismo φ) ma solo da S_1 e S_2 .
3. La somma connessa di superfici compatte è, a meno di omeomorfismo, commutativa e associativa, cioè

$$\begin{aligned} S_1 \# S_2 &\underset{\text{omeo}}{\sim} S_2 \# S_1 \\ S_1 \# (S_2 \# S_3) &\underset{\text{omeo}}{\sim} (S_1 \# S_2) \# S_3. \end{aligned}$$

Osservazione. (13.14) Se X è una superficie compatta,

$$X \# S^2 \underset{\text{omeo}}{\sim} X.$$

Definizione. (13.15) Sia $g \geq 1$ un intero e consideriamo la somma connessa di g tori:

$$T_g := \underbrace{T \# \dots \# T}_{g\text{-volte}}$$

T_g è omeomorfo ad un sottospazio di \mathbb{R}^3 , e viene detto toro con g -buchi o sfera con g -manici

Definizione. (13.16) Denotiamo $P := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale, e $\forall n \geq 1$ naturale consideriamo

$$P_n := \underbrace{P \# \dots \# P}_{n\text{-volte}}$$

13.2 Rappresentazione della somma connessa tramite modelli piani

(13.17) Supponiamo che S_1 e S_2 abbiano un modello piano, rappresentato da una parola. Prendiamo ad esempio $S_1 = T = S_2$ toro, con

$$S_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \quad S_2 = a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$$

Seguendo il procedimento mostrato in figura 13.11, scegliamo un vertice del poligono, $v \in Q$. Scegliamo un sottospazio $G \subseteq P$ omeomorfo ad un disco chiuso di \mathbb{R}^2 e tale che

$$G \cap \partial Q = \{v\}$$

Per fare la somma connessa, togliamo da S_1 l'interno di G . Facciamo la stessa cosa per entrambi i poligoni.

Modifichiamo quindi i modelli piani, aggiungendo un lato c (in corrispondenza di ∂G): incollando c otteniamo il modello piano per $S_1 \# S_2$.

Otteniamo quindi la parola

$$\underbrace{a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}}_{\text{Parola per } S_1} \underbrace{a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}}_{\text{Parola per } S_2}$$

che è la concatenazione o giustapposizione delle due parole.

Osservazione. (13.18) In particolare,

- T_g ha modello piano dato dalla parola

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1};$$

ed è quoziente di un poligono con $4g$ lati.

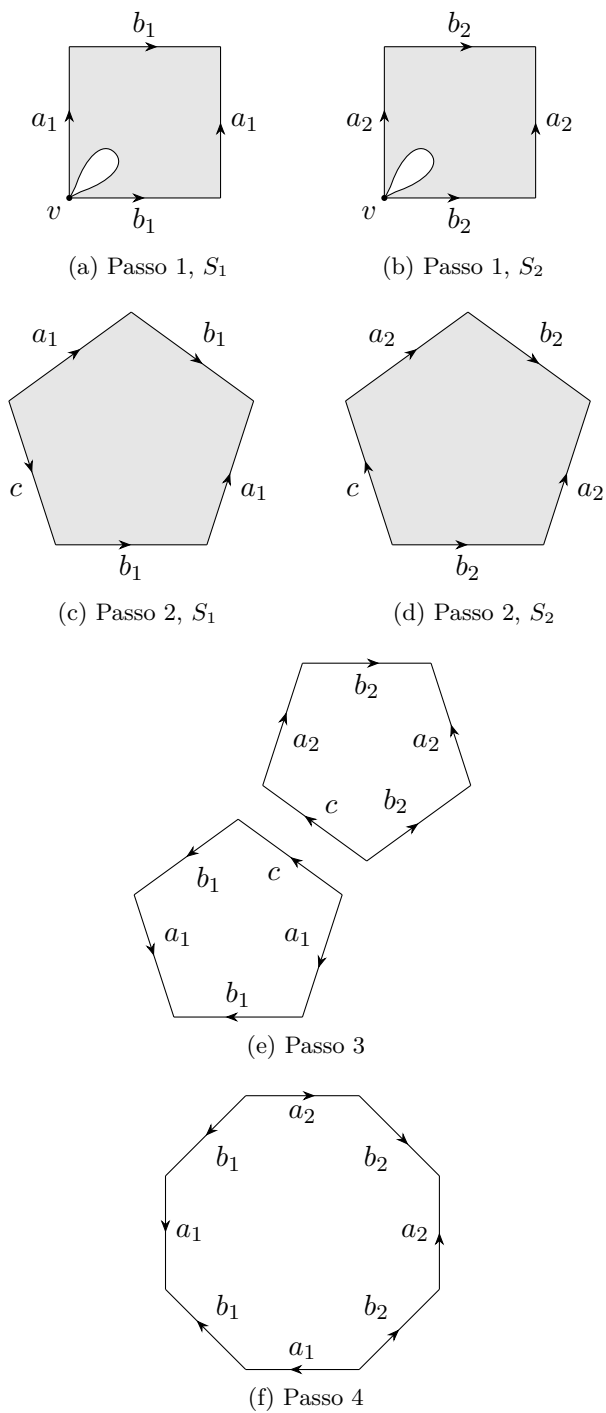


Figura 13.11: Rappresentazione della somma connessa di $T \# T$ tramite modelli piani

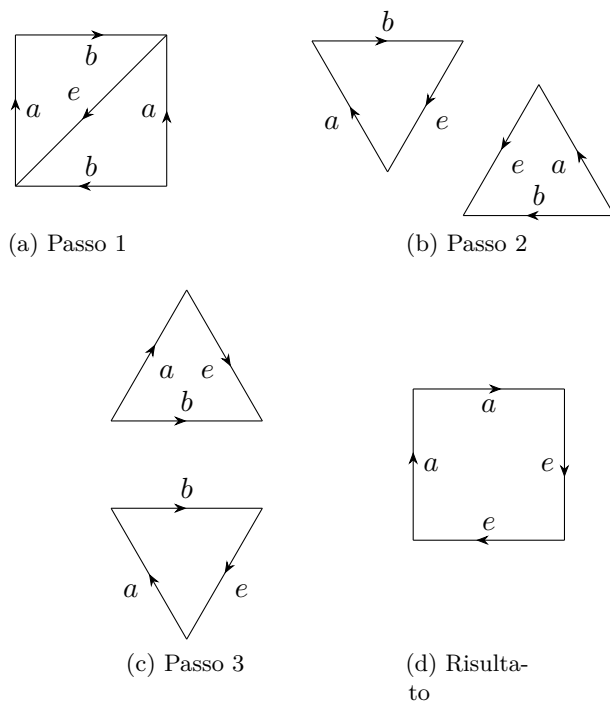


Figura 13.12: Il procedimento di taglia e incolla per l'uguaglianza $K \underset{\text{omeo}}{\sim} P \# P$

- $P := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha modello piano aa , mentre P_n ha modello piano dato dalla parola

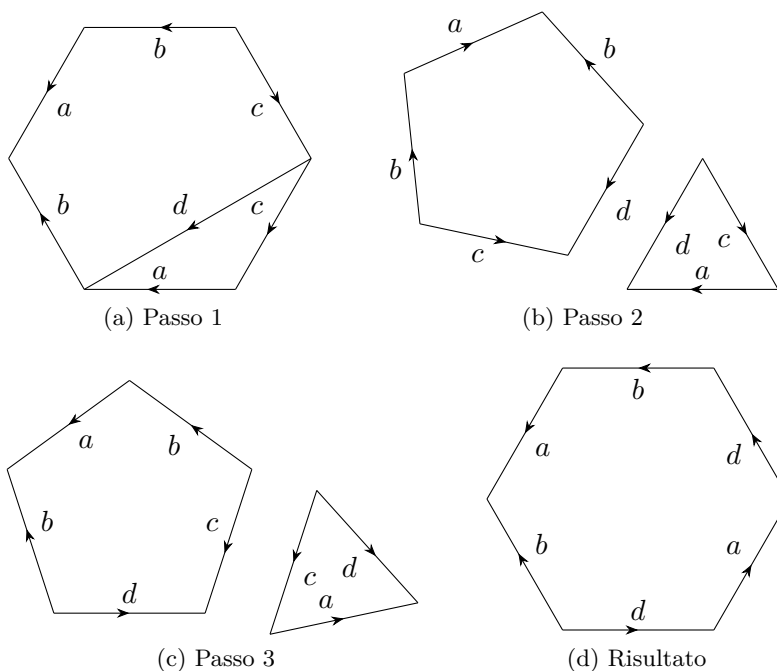
$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

ed è quoziente di un poligono con $2n$ lati

Osservazione. (13.19) Per la bottiglia di Klein K , vale

$$K \underset{\text{omeo}}{\sim} P_2 = P \# P$$

Il modello piano di K è $aba^{-1}b$: con il procedimento di taglia e incolla mostrato in figura 13.12 otteniamo l'uguaglianza.

Figura 13.13: Taglia e incolla per $T \# P$

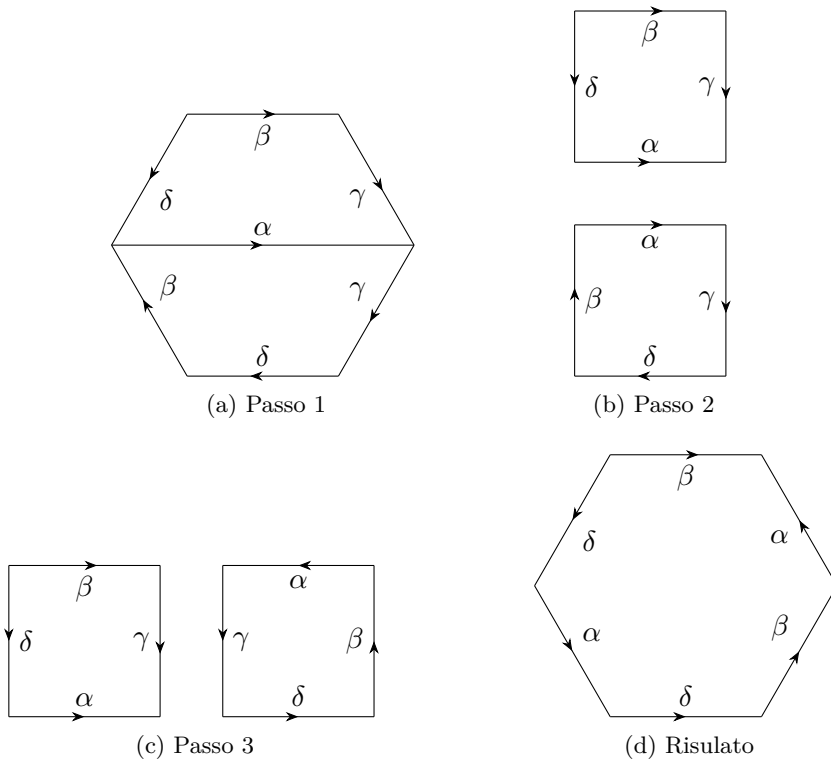
Lemma. (13.20) Vale che

$$T \# P \underset{\text{omeo}}{\sim} K \# P = P_3$$

Osservazione. (13.21) Il lemma (13.20) ci mostra che la somma connessa non valgono le leggi di cancellazione: infatti, vedremo che $T \underset{\text{omeo}}{\not\sim} K$.

Dimostrazione di (13.20) Sappiamo già che $K = P \# P$, dunque resta da mostrare che $T \# P \underset{\text{omeo}}{\sim} K \# P$.

1. Con un procedimento di taglia e incolla (come in figura 13.13), partiamo da $T \# P$ modello piano di parola $aba^{-1}b^{-1}cc$, e arriviamo a scriverlo come modello piano di parola $dadbab^{-1}$.
2. Prendiamo adesso $K \# P$, di parola $\delta\beta\delta^1\beta\gamma\gamma$, e con un procedimento di taglia e incolla (come in figura 13.14) arriviamo a scriverla come


 Figura 13.14: Taglia e incolla per $K \# P$

$\delta\alpha\delta\beta\alpha\beta^{-1}$, equivalente alla parola trovata con i passaggi del punto 1. ■

Corollario. (13.22) Se $g \geq 1$ e $n \geq 1$ si ha

$$T_g \# P_n \underset{\text{omeo}}{\sim} P_{n+2g} \quad (13.1)$$

Dimostrazione di (13.22) Dimostriamo per induzione su g .

- Se $g = 1$

$$T \# P_n = (T \# P) \# P_{n-1} = P_3 \# P_{n-1} = P_{n+2}$$

- Suppongo che sia vero per $g - 1$

$$T_g \# P_n = T \# (T_{g-1} \# P_n) = T \# P_{n+2g-2} \stackrel{\dagger}{=} P_{n+2g}$$

13.3 Enunciato del teorema di classificazione delle superfici compatte

Teorema XXXV.

Classificazione delle superfici compatte

Ogni superficie compatta è omeomorfa ad una delle superfici

$$S^2, \quad T_g, \quad P_n$$

per $g, n \geq 1$.

Inoltre tali superfici sono tutte distinte (non omeomorfe tra loro).

13.4 Dimostrazione del teorema di classificazione, prima parte

Definizione. (13.23) Sia S una superficie compatta. Un triangolo geometrico T in S è un'applicazione

$$\varphi : T' \rightarrow T \subseteq S$$

dove $T' \subseteq \mathbb{R}^2$ è un triangolo non degenero (pieno), e φ è un omeomorfismo.

I vertici e i lati di T sono le immagini tramite φ dei vertici e lati di T' .

Esempio. (13.24) In S^2 , un intorno chiuso con tre punti fissati sulla frontiera è un triangolo geometrico.

Definizione. (13.25) Sia S una superficie compatta. Una triangolazione di S è una collezione finita di triangoli geometrici $T_1, \dots, T_r \subseteq S$ tali che

$$1. \quad S = T_1 \cup \dots \cup T_r$$

[†] Caso $g = 1$.

2. $\forall i \neq j$ si ha

$$T_i \cap T_j = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un vertice di entrambi i triangoli} \\ \text{un lato di entrambi i triangoli} \end{cases}$$

Esempio. (13.26) Il tetraedro dà una triangolazione di S^2 con

- 4 vertici
- 6 lati
- 4 facce

Definizione. (13.27) Una superficie compatta S si dice triangolabile se ammette una triangolazione.

Teorema XXXVI.

Teorema di Radò, 1925

Ogni superficie compatta è triangolabile.

Corollario. (13.28) Ogni superficie compatta ammette un modello piano.

Dimostrazione di (13.28) Per il teorema di Radò, S ammette una triangolazione T_1, \dots, T_r . Riportiamo questi r triangoli nel piano, con delle identificazioni sui lati.

Incolliamo poi i lati ad uno ad uno fino ad ottenere un unico poligono con delle identificazioni sui lati. ■

Definizione. (13.29) Dato P un poligono con i lati a due a due identificati, diciamo che una coppia di lati identificati fra loro di P è

- del I tipo se, percorrendo il bordo di P i due lati compaiono con orientazione opposta (quindi nella parola ho sia a che a^{-1});
- del II tipo se, percorrendo il bordo di P i due lati compaiono con la stessa orientazione (quindi nella parola ho solo a oppure a^{-1}).

Esempio. (13.30) La bottiglia di Klein, identificata dalla parola $aba^{-1}b$ ha

- lati a del primo tipo,
- lati b del secondo tipo.

Dimostrazione di XXXV. Prima parte: ogni superficie compatta a S è omeomorfa a S^2 , P_n o T_g .

Dal corollario, S ha un modello piano P , un poligono con i lati a due a due identificati. Gli applichiamo l'algoritmo del taglia e cuci.

0. Passo 0: se nel modello piano ci sono solo due lati abbiamo finito. Infatti, ci sono solo due superfici possibili:

- se i due lati sono del primo tipo, allora $S = S^2$;
- se i due lati sono del secondo tipo, allora $S = P_1$.

D'ora in avanti possiamo quindi supporre che nel modello piano ci sia un numero di lati maggiore o uguale a quattro.

1. Passo 1: eliminazione delle coppie adiacenti del primo tipo.

Supponiamo che nel modello piano ci sia una coppia di lati adiacenti del I tipo.

Incolliamo i lati a della coppia: in questo modo, otteniamo un nuovo modello piano omeomorfo al primo con due lati in meno.

Ripetiamo il passo 1 fino ad eliminare tutte le coppie adiacenti del I tipo. Se necessario, ripetere il passo 0.

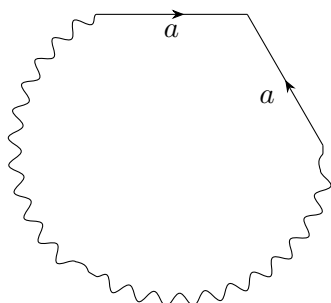
NB: notiamo che il passo 1 non modifica le coppie di lati del secondo tipo.

2. Passo 2: riduzione dei vertici ad un'unica classe di equivalenza.

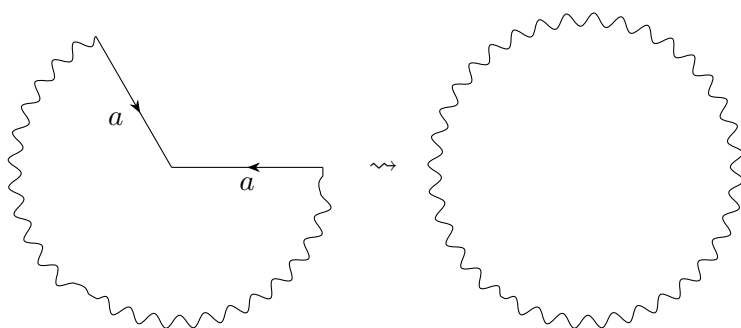
Supponiamo che i vertici del poligono non siano tutti equivalenti. Allora esiste un lato b del poligono, i cui due vertici P, Q non sono equivalenti tra loro.

Consideriamo il lato adiacente a b che termina in Q^\dagger , e il secondo lato a lui identificato.

[†] Q è il vertice che vogliamo "eliminare".



(a) Situazione iniziale



(b) Incollare i lati

Figura 13.15: Passo 1

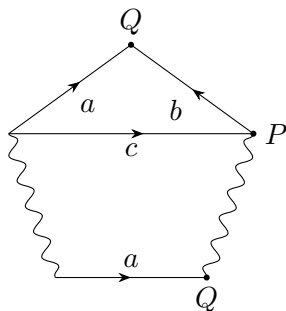
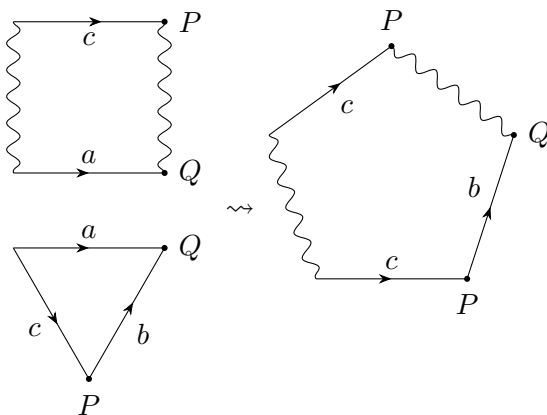
(a) Situazione iniziale(b) Taglia e incolla

Figura 13.16: Passo 2

Tagliamo lungo c e incolliamo lungo a^\dagger .

Ora abbiamo un vertice Q in meno e un vertice P in più.

Ripetendo questa operazione, facciamo via via diminuire i vertici Q ; quando ne rimane uno solo, deve essere in una coppia di lati adiacenti del primo tipo

\Rightarrow ripeto il passo 1, e il vertice Q scompare.

Alternando i passi 2 e 1 otteniamo un modello piano con tutti i vertici identificati e senza coppie di lati adiacenti del primo tipo.

NB: notiamo che

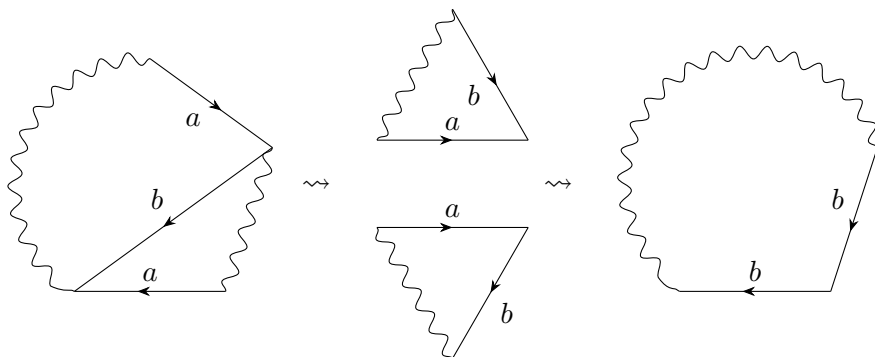


Figura 13.17: Passo 3

- se a è del primo tipo $\implies c$ viene del primo tipo, e le restanti coppie non cambiano tipo;
- se a è del secondo tipo \implies è necessario ribaltare il triangolo per incollarlo, e quindi c è del secondo tipo

\implies il passo 2 mantiene l'esistenza o meno di una coppia di lati del secondo tipo.

3. Passo 3: rendere adiacenti le coppie del secondo tipo (se ce ne sono).

Supponiamo che ci sia una coppia di lati del secondo tipo non adiacenti. Operiamo un taglio tra gli estremi finali della coppia, e incolliamo lungo la coppia stessa. Abbiamo ottenuto una nuova coppia di lati del secondo tipo, ma adiacenti.

In questo modo rendiamo adiacenti tutte le coppie del secondo tipo. Se non ci sono coppie del primo tipo, abbiamo ottenuto la parola

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n$$

$$\implies S = P_n.$$

4. Passo 4: raggruppare le coppie del primo tipo.

Supponiamo che nel modello piano ci sia almeno una coppia del primo tipo: i due lati a non possono essere adiacenti.

Deve esistere un'altra coppia di lati b tali che le due coppie si separano a vicenda. Infatti, i vertici sono tutti identificati tra loro, e in particolare

lo sono i due vertici di a ; necessariamente quindi deve esistere un lato b nella parte superiore identificato ad un lato b nella parte inferiore.

Siccome i lati b non sono adiacenti, allora necessariamente sono del primo tipo.

Operiamo due taglia-incolla per raggruppare le due coppie.

4.1. Taglio lungo gli estremi finali di a , e incollo b . Sia c la nuova coppia (del primo tipo).

4.2. Taglio lungo gli estremi finali di c e incollo a . Sia d la nuova coppia (del primo tipo).

Otteniamo una sequenza

$$d c d^{-1} c^{-1}$$

e quindi abbiamo evidenziato un toro nella somma connessa.

NB: siccome in entrambi i casi incolliamo lungo coppie del primo tipo, i tipi delle coppie restanti non cambiano

\implies viene mantenuta l'esistenza o meno di coppie del secondo tipo.

Se nel modello piano ci sono solo coppie del primo tipo, otteniamo una parola della forma

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

$$\implies S = T_g.$$

Se invece nel modello piano ci sono coppie di entrambi i tipi, allora S è somma connessa di tori e di piani proiettivi, con almeno un piano proiettivo

$$\implies_{\dagger} S = P_n. \quad \blacksquare$$

Osservazione. (13.31) Otteniamo $P_n \iff$ nel modello piano iniziale c'è una coppia di lati del secondo tipo.

Osservazione. (13.32) Osserviamo che quando incolliamo lungo una coppia di lati del primo tipo, non ribaltiamo niente, e quindi le restanti coppie di lati mantengono il tipo.

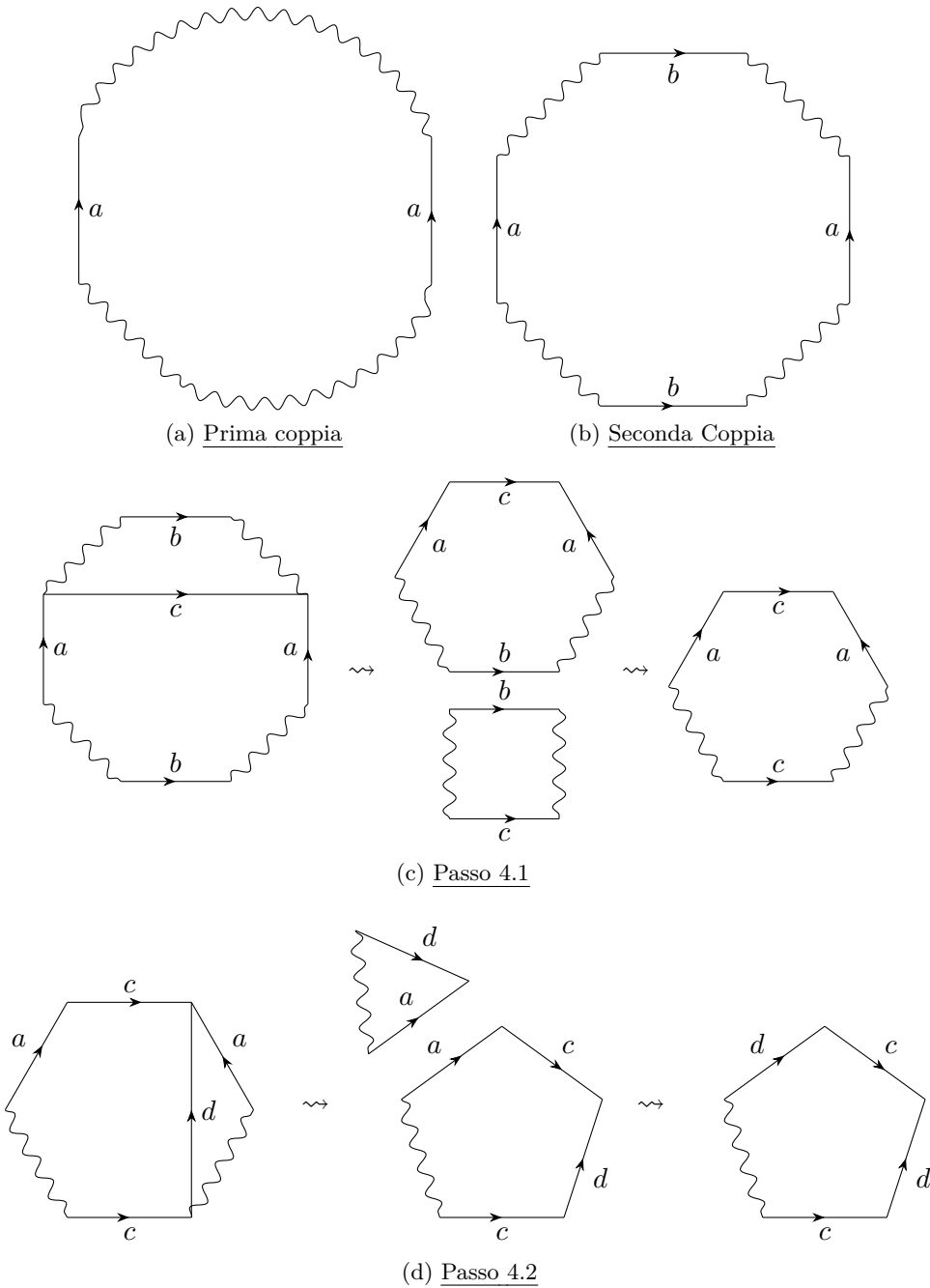


Figura 13.18: Passo 4

Quando invece incolliamo lungo una coppia di lati del secondo tipo, i lati restanti possono cambiare tipo.

13.5 Dimostrazione del teorema di classificazione, seconda parte

13.5.1 Orientabilità

Definizione. (13.33) Una superficie topologica S si dice orientabile se non contiene un sottospazio omeomorfo al nastro di Moebius. Altrimenti S si dice non orientabile.

Esempi. (13.34)

1. $P = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è orientabile. Infatti, se consideriamo la rappresentazione piana come in figura, al quoziente da una copia del nastro di Moebius.
2. La bottiglia di Klein non è orientabile. Infatti, se consideriamo la rappresentazione piana come in figura, al quoziente da una copia del nastro di Moebius.
3. Una superficie data da un modello piano che contiene una coppia di lati del secondo tipo non è orientabile, prendendo un sottospazio costruito come nei due esempi precedenti.

In particolare, P_n non è orientabile.

Teorema XXXVII.

Se una superficie compatta è omeomorfa ad un sottospazio di \mathbb{R}^3 , allora è orientabile.

Osservazione. (13.35) L'orientabilità è mantenuta per omeomorfismo.

[†] Vedasi l'osservazione (13.32)

Corollario. (13.36) Vale che

$$\begin{aligned} S^2 \not\sim_{\text{omeo}} P_n, \quad \forall n \geq 1 \\ T_g \not\sim_{\text{omeo}} P_n, \quad \forall n, g \geq 1 \end{aligned}$$

Corollario. (13.37) Sia S una superficie compatta data da un modello piano.

Allora S è orientabile \iff il modello piano non contiene coppie di lati del secondo tipo.

Dimostrazione di (13.37)

“ \Leftarrow ” Se c'è una coppia di lati del secondo tipo, troviamo un nastro di Moebius come negli esempi (13.34).

“ \Rightarrow ” Applicando l'algoritmo del taglie e incolla, troviamo $S \sim_{\text{omeo}} S^2$ oppure $S \sim_{\text{omeo}} T_g$
 $\Rightarrow S$ è orientabile. ■

13.5.2 Caratteristica di Eulero

Caratteristica di Eulero. (13.38) Sia S una superficie compatta e supponiamo di avere una triangolazione \mathcal{T} della superficie S .

Siano

- v il numero di vertici di \mathcal{T} ,
- l il numero di lati di \mathcal{T} , e
- f il numero di triangoli di \mathcal{T} .

Definizione. (13.39) La caratteristica di Eulero della triangolazione \mathcal{T} è

$$\chi(S, \mathcal{T}) = v - l + f \in \mathbb{Z}$$

Suddivisione di una superficie compatta. (13.40) Un lato in S è un sottospazio $L \subseteq S$ che sia omeomorfo a $[0, 1]$ o a S^1 .

- Se $L \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1$, L ha un punto marcato, che chiamiamo vertice.
- Se $L \underset{\text{omeo}}{\sim} [0, 1]$, L ha due vertici, corrispondenti a 0 e 1.

Definizione. (13.41) Una suddivisione di una superficie compatta S è data da

- un sottoinsieme finito $V \subseteq S$, i cui punti sono detti vertici;
- un sottoinsieme finito di lati

$$L_1, L_2, \dots, L_l \subseteq S$$

tali che

- $\forall i, L_i \cap V = \{\text{vertici di } L_i\}$;
- $\forall i \neq j, L_i \cap L_j \subseteq V$;
- V è l'unione di tutti i vertici di L_1, \dots, L_l ;
- $S \setminus (L_1 \cup \dots \cup L_l)$ ha un numero finito di componenti connesse, dette facce della suddivisione, ciascuna omeomorfa a un disco aperto di \mathbb{R}^2 .

Esempio. (13.42) Quella mostrata in figura è una suddivisione di S^2 , con un vertice, un lato e due facce.

Nota. (13.43) Una triangolazione T_1, \dots, T_f induce sempre una suddivisione, aventi

- per vertici, i vertici di tutti i triangoli;
- per lati, i lati di tutti i triangoli;
- per facce, gli interni di T_1, \dots, T_f .

Esempio: toro. (13.44) Diamo una suddivisione con un 1 vertice, 2 lati e 1 faccia, come in figura 13.19

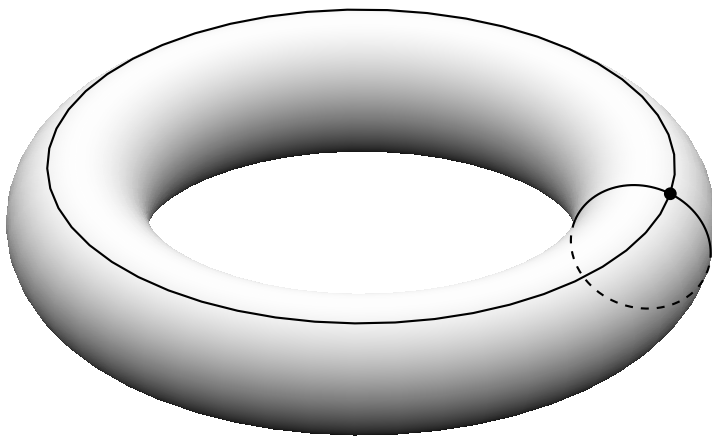


Figura 13.19: Suddivisione di un Toro

Esempio. (13.45) Sempre nel Toro, prendere una sola circonferenza non da luogo ad una suddivisione, perché se chiamo L il lato, $T \setminus L \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1 \times (0, 1)$ che non è omeomorfo ad un disco aperto di \mathbb{R}^2 .

Definizione. (13.46) Data una suddivisione \mathcal{T} di una superficie compatta S , avente v vertici, l lati e f facce, la caratteristica di Eulero della suddivisione è

$$\chi(S, \mathcal{S}) = v - l + f$$

Teorema XXXVIII.

Date due suddivisioni $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ della stessa superficie compatta S , si ha che

$$\chi(S, \mathcal{S}_1) = \chi(S, \mathcal{S}_2)$$

Definizione. (13.47) Sia S una superficie compatta. La caratteristica di Eulero

$$\chi(S) := \chi(S, \mathcal{S})$$

con \mathcal{S} una qualsiasi suddivisione di S .

Corollario. (13.48) La caratteristica di Eulero delle superfici compatte è invariante per omeomorfismo.

Dimostrazione di (13.48) Siano S_1, S_2 due superfici e

$$\varphi : S_1 \rightarrow S_2, \quad \text{omeomorfismo.}$$

Data \mathcal{S}_1 suddivisione di S_1 , usiamo φ per trasportarla a una suddivisione \mathcal{S}_2 di S_2 , che avrà lo stesso numero di vertici, late facce

$$\implies \chi(S_1) = \chi(S_1, \mathcal{S}_1) = \chi(S_2, \mathcal{S}_2) = \chi(S_2).$$

Esempi. (13.49)

$$\chi(S^2) = 2, \quad \chi(T) = 0.$$

Osservazione. (13.50) Sia S una superficie compatta, avente un modello piano con $2n$ lati a due a due identificata.

Allora il modello piano induce una suddivisione di S in cui

- i vertici sono le immagini in S dei vertici del poligono;
- i lati sono le immagini in S dei del poligono (quindi n); $l = n$
- una sola faccia, data dall'immagine in S dell'interno del poligono (in quanto le faccie sono il complementare dei lati); $f = 1$.

Quindi la caratteristica di Eulero sarà

$$\chi(S) = v - n + 1$$

con unica “incognita” v .

Osservazione. (13.51) P_n ha come parola

$$a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_n a_n,$$

e nel modello piano tutti i vertici sono identificati, e quindi otteniamo una suddivisione di P_n con 1 vertice, n lati e 1 faccia

$$\implies \chi(P_n) = 1 - n + 1 = 2 - n.$$

In particolare

- $\chi(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = 1, \phi(K) = 0;$

- $\chi(P_n) \leq 1, \forall n \geq 1$;
- $2 - n$ è una funzione di n iniettiva,
 \implies se $n_1 \neq n_2$, allora

$$\chi(P_{n_1}) \neq \chi(P_{n_2})$$

$$\implies P_{n_1} \not\sim_{\text{omeo}} P_{n_2}.$$

\implies Le superfici $P_n, n \geq 1$. sono tutte non omeomorfe tra loro.

Osservazione. (13.52) T_g ha come parola

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1},$$

tutti i vertici sono identificati tra loro

\implies otteniamo una suddivisione di T_g con 1 vertice, 1 faccia e $2g$ lati.

$\implies \chi(T_g) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g, \forall g \geq 0$.

In particolare

- posto $T_0 := S^2$, la formula vale anche per $g = 0$;
- inoltre

$$\forall g \geq 0, \quad \begin{array}{l} \chi(T_g) \leq 2 \\ \chi(T_g) \text{ pari;} \end{array}$$

- $2 - 2g$ è una funzione di g iniettiva

\implies se $g_1, g_2 \geq 0, g_1 \neq g_2$

$\implies \chi(T_{g_1}) \neq \chi(T_{g_2})$

$\implies S^2$ e le superfici T_g sono tutte distinte tra loro.

Esercizio. (13.53) Sia S la superficie compatta data dalla parola

$$a b c d e a^{-1} b^{-1} c^{-1} d^{-1} e^{-1}$$

Determinare quale superficie è S

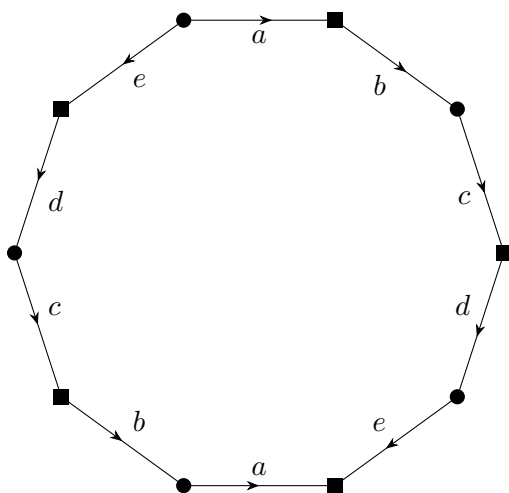


Figura 13.20: Poligono della parola $abcde a^{-1} b^{-1} c^{-1} d^{-1} e^{-1}$

Soluzione (13.53).

- Nella parola non ci sono coppie di lati del II tipo, quindi S è orientabile.
- Utilizzo la caratteristica di Eulero per calcolare di quale superficie orientabile si tratta; in particolare, voglio capire quante classi di vertici sono presenti nella parola, rappresentata dal poligono in figura 13.20.

Ci sono 2 vertici

$$\implies \chi(S) = 2 - 5 + 1 = -2 = 2 - 2g$$

$$\implies g = 2$$

$$\implies S \underset{\text{omeo}}{\sim} T_2.$$

Parte IV

Geometria Proiettiva

Capitolo 14

Geometria Proiettiva

(14.1) Sia \mathbb{K} un campo, V uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} .

Su $V \setminus \{\underline{0}\}$ consideriamo la relazione di equivalenza \sim data da:

- per $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $\boldsymbol{v} \sim \boldsymbol{w}$ se $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\boldsymbol{w} = \lambda \boldsymbol{v}$$

Esercizio. (14.2) Verificare che \sim è una relazione di equivalenza, ed è indotta dall'azione di $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ su $V \setminus \{\underline{0}\}$ per prodotto.

Definizione. (14.3) Lo spazio proiettivo associato a V è

$$\mathbb{P}(V) := V \setminus \{\underline{0}\} / \sim$$

Notazione. (14.4)

- Consideriamo π la proiezione al quoziente,

$$\pi : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}.$$

- $[\boldsymbol{v}] \in \mathbb{P}(V)$ classe di $\boldsymbol{v} \in V \setminus \{0\}$

Definizione. (14.5) La dimensione di $\mathbb{P}(V)$ è

$$\dim \mathbb{P}(V) := (\dim V) - 1$$

Esempio. (14.6) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, con

$$n = \dim \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Osservazioni. (14.7)

- Se $V = \{0\}$, allora $\mathbb{P}(V) = \emptyset$ e poniamo

$$\dim \emptyset = -1.$$

- Se $\dim V = 1$, allora $\mathbb{P}(V) = \{1 \text{ p.to}\}$ e $\dim \mathbb{P}(V) = 0$.
- Se $\dim \mathbb{P}(V) = 1$, si parla di retta proiettiva.
- Se $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, si parla di piano proiettivo.
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si parla di spazio proiettivo reale o spazio proiettivo complesso.

Esempio. (14.8) Gli esempi più frequenti di spazi vettoriali si ottengono considerando $V = \mathbb{K}^{n+1}$ e denotiamo

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$$

chiamato spazio proiettivo numerico o standard.

Osservazione. (14.9) Si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V) &\longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sottospazi vetto-} \\ \text{riali 1-dim di } V \end{array} \right\} \\ [v] &\longleftrightarrow \mathcal{L}(v) \end{aligned}$$

14.1 Sottospazi vettoriali

(14.10) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.

Allora $W \setminus \{0\} \subseteq V \setminus \{0\}$ è chiuso per \sim e $\mathbb{P}(W)$ è naturalmente un sottoinsieme di $\mathbb{P}(V)$.

$$\mathbb{P}(W) = \pi(W \setminus \{0\}) = \{[w] \in \mathbb{P}(V) : w \in W\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sottospazi vetto-} \\ \text{riali 1-dim di } V \\ \text{contenuti in } W \end{array} \right\}$$

Definizione. (14.11) $\mathbb{P}(W)$ si dice sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$, di *dimensione*

$$\dim \mathbb{P}(W) = (\dim W) - 1$$

Casi particolari. (14.12)

- $W = \{0\} \implies \mathbb{P}(W) = \emptyset$.
- Se $\dim W = 1 \implies \mathbb{P}(W) = [w]$ è un punto di $\mathbb{P}(V)$, per $w \in W \setminus \{0\}$
- Se $\dim W = 2 \implies \dim \mathbb{P}(W) = 1$ e $\mathbb{P}(W)$ è una retta proiettiva in $\mathbb{P}(V)$.
- Se $\dim W = 3 \implies \dim \mathbb{P}(W) = 2$ e $\mathbb{P}(W)$ è un piano in $\mathbb{P}(V)$.
- Se $\dim \mathbb{P}(W) = \dim \mathbb{P}(V) - 1 \implies \mathbb{P}(W)$ è un iperpiano proiettivo in $\mathbb{P}(V)$

Esempio. (14.13) $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha come sottospazi proiettivi:

- \emptyset ;
- i punti;
- le rette proiettive: immagini al quoziente dei piani vettoriali in \mathbb{R}^3 ;
- $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Definizione. (14.14) La codimensione di un sottospazio $\mathbb{P}(W)$ in $\mathbb{P}(V)$ è

$$\dim \mathbb{P}(V) - \dim \mathbb{P}(W) = \dim V - \dim W;$$

un iperpiano ha codimensione 1.

14.2 Sistema di riferimento proiettivo

Osservazione. (14.15) Consideriamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$.

Sia $\mathbf{v} \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$\mathbf{v} = (x_0, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{K}.$$

Denotiamo

$$[\mathbf{v}] = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

- Le x_i non sono mai tutte nulle, poiché $\mathbf{v} \neq \underline{0}$.

- $(x_0 : \dots : x_n) = (y_0 : \dots : y_n) \iff$

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : y_i = \lambda x_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

- Le x_i sono dette coordinate omogenee.

Esempio. (14.16) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \ni (x_0 : x_1 : x_2)$

$$(2 : 2 : -4) = (1 : 1 : -2)$$

$$(1 : 0 : 3) = (-7 : 0 : -21).$$

Definizione. (14.17) Sia

$$\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$$

una base di V , con $\dim V = n + 1$.

Se $\mathbf{v} \in V \setminus \{\underline{0}\}$ si ha

$$\mathbf{v} = x_0 e_0 + \dots + x_n e_n, \quad x_i \in \mathbb{K}$$

Diciamo che

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$$

sono le coordinate omogenee di $[v] \in \mathbb{P}(V)$ e scriviamo

$$[v] = (x_0 : \cdots : x_n).$$

Proprietà. (14.18)

- Le coordinate omogenee non sono mai tutte nulle ($v \neq \underline{0}$).
- Le coordinate omogenee sono definite solo a meno di multipli.

Definizione. (14.19) Diciamo che $(x_0 : \cdots : x_n)$ sono le coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$ definite dalla base \mathcal{B} e che la base \mathcal{B} definisce un sistema di riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$.

Osservazione. (14.20) $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ ha un riferimento proiettivo naturale dato dalla base canonica di \mathbb{K}^{n+1} .

Osservazione. (14.21) Basi multiple[†] definiscono lo stesso riferimento proiettivo. Infatti, sia $v \in V \setminus \{0\}$.

$$\begin{aligned} v &= x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n \quad \text{base } \mathcal{B} \\ &= \frac{x_0}{\mu} (\mu e_0) + \cdots + \frac{x_n}{\mu} (\mu e_n) \quad \text{base } \mathcal{B}' \end{aligned}$$

Le coordinate omogenee di $[v] \in \mathbb{P}(V)$ sono

- $(x_0 : \cdots : x_n)$ rispetto a \mathcal{B} ;
- $\left(\frac{x_0}{\mu} : \cdots : \frac{x_n}{\mu} \right)$ rispetto a \mathcal{B}'

e sono esattamente uguali.

[†] Per basi multiple si intende due sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ tali che esiste $\mu \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}, \quad \mathcal{B}' = \{\mu e_0, \dots, \mu e_n\}$$

Definizione. (14.22) Dato un riferimento proiettivo, i punti

$$P_0 = (1 : 0 : \cdots : 0) = [e_0]$$

$$\vdots$$

$$P_b = (0 : \cdots : 0 : 1) = [e_n]$$

sono detti punti coordinati o punti fondamentali con riferimento proiettivo, e il punto

$$U = (1 : 1 : \cdots : 1) = [e_0 + \cdots + e_n]$$

è detto punto unità del riferimento proiettivo.

14.2.1 Descrizione dei sottospazi proiettivi in coordinate

(14.23) Siano $(x_0 : \cdots : x_n)$ coordinate omogenee su $\mathbb{P}(V)$ e consideriamo l'equazione lineare omogenea

$$a_0 x_0 + \cdots + a_n x_n = 0, \quad a_i \in \mathbb{K} \quad (14.1)$$

con a_i non tutti nulli.

In V l'equazione rappresenta un iperpiano vettoriale H

\implies i punti $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ le cui coordinate soddisfano l'equazione sono quelli tali che $v \in H$, cioè sono tutti e soli i punti dell'iperpiano proiettivo $\mathbb{P}(H) \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Definizione. (14.24) La (14.1) è l'equazione cartesiana dell'iperpiano proiettivo $\mathbb{P}(H)$.

Definizione. (14.25) Gli iperpiani di equazione $x_i = 0$ si dicono iperpiani coordinati.

Esempio. (14.26) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ i sottospazi sono

- \emptyset ;
- i punti;
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$

$(a : b) \in \mathbb{P}^1(V)$ ha equazione nelle coordinate $(x : y)$

$$ay = bx$$

(14.27) Più in generale, fissata una base \mathcal{B} , ogni sottospazio vettoriale W di V può essere visto, in coordinate rispetto alla base, come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo:

$$A\mathbf{x} = 0, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{t, n+1}$$

con t il numero di equazioni, e \mathbf{x} il vettore delle coordinate

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{t0}x_0 + \cdots + a_{tn}x_n = 0. \end{cases} \quad (14.2)$$

(14.2) dà delle equazioni cartesiane per il sottospazio proiettivo $\mathbb{P}(W)$ nelle coordinate omogenee $(x_0 : \cdots : x_n)$.

$$\dim W = \underbrace{n+1}_{\dim V} - \text{rank } A$$

$$\implies \text{codim } \mathbb{P}(W) = \text{rank } A \leq t.$$

Possiamo sempre scegliere un sistema con $t = \text{rank } A$.

Esempio. (14.28) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ i sottospazi non banali sono

- i punti, con codimensione 2, e quindi sono descritti da un sistema di due equazioni indipendenti;
- le rette, con codimensione 1, e quindi descritte da una equazione

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0.$$

14.3 Operazioni sui sottospazi

Intersezione. (14.29) Siano $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali; allora $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale e

$$\mathbb{P}(W_1 \cap W_2) = \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2)$$

\implies l'intersezione di due sottospazi proiettivi è un sottospazio proiettivo.

Osservazione. (14.30) $\mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) = \emptyset \iff$

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

e diciamo che i due sottospazi sono sghembi o disgiunti, altrimenti diciamo che sono incidenti.

Definizione. (14.31) Sia $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottoinsieme non vuoto. Il sottospazio generato da S , denotato con $\langle S \rangle$, è l'intersezione in $\mathbb{P}(V)$ di tutti i sottospazi proiettivi che contengono S , ed è il più piccolo sottospazio proiettivo che contiene S .

Proprietà. (14.32)

- $\langle S \rangle = S \iff S$ è un sottospazio proiettivo.
- Se $S = \{p_1, \dots, p_m\}$, scriviamo

$$\langle S \rangle := \langle p_1, \dots, p_m \rangle.$$

Somma. (14.33) Dati due sottospazi proiettivi $T_i = \mathbb{P}(W_i)$, allora il sottospazio generato da $T_1 \cup T_2$ è denotato con $T_1 + T_2$ e si dice sottospazio somma.

$$T_1 + T_2 = \langle T_1 \cup T_2 \rangle$$

Si ha che

$$T_1 + T_2 = \mathbb{P}(W_1 + W_2).$$

Formula di Grassmann proiettiva. (14.34) Siano T_1, T_2 due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Si ha

$$\dim(T_1 + T_2) + \dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 \quad (14.3)$$

Dimostrazione di (14.34) Sia $T_i = \mathbb{P}(W_i)$, $W_i \subseteq V$ sottospazio vettoriale.

Per la formula di Grassman usuale

$$\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

Sottraendo 1 ad ogni dimensione, si ottiene la formula proiettiva. ■

Corollario. (14.35) Siano T_1, T_2 due sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ con dimensione n . Allora

$$\dim(T_1 \cap T_2) \geq \dim T_1 + \dim T_2 - n.$$

In particolare, se $\dim T_1 + \dim T_2 \geq 2$, allora

$$T_1 \cap T_2 \neq \emptyset$$

Dimostrazione di (14.35)

$$\dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 - \dim(T_1 + T_2)$$

e poiché $T_1 + T_2 \subseteq \mathbb{P}(V)$, allora

$$\dim(T_1 + T_2) \geq \dim \mathbb{P}(V) = n$$

$$\implies \dim(T_1 \cap T_2) \geq \dim T_1 + \dim T_2 - n.$$

Se $\dim T_1 + \dim T_2 \geq n$, allora $\dim(T_1 \cap T_2) \geq 0$

$$\implies T_1 \cap T_2 \neq \emptyset. \quad \blacksquare$$

Esempio. (14.36) Due rette in $\mathbb{P}(V)$ con $\dim \mathbb{P}(V) = 2$ si intersecano sempre.

Osservazione. (14.37) Se $S = \langle p_1, \dots, p_m \rangle$, allora

$$\dim S \leq m - 1.$$

Infatti, $p_i = [v_i]$, $v_i \in V \setminus \{0\}$ e

$$S = \mathbb{P}(\mathcal{L}(v_1, \dots, v_m)).$$

Definizione. (14.38) Siano $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{P}(V)$. Diciamo che i punti sono linearmente indipendenti se, scelti $v_1, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ tali che $p_i = [v_i]$, i vettori v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti.

Altrimenti diciamo che p_1, \dots, p_n sono linearmente dipendenti.

14.4 Lineare indipendenza

(14.39) La definizione (14.38) è ben posta, infatti dati $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, si ha che v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti

$\iff \lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ sono linearmente indipendenti.

Proprietà. (14.40)

- Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$, $\mathbb{P}(V)$ contiene al più $n + 1$ punti indipendenti.
- p_1, \dots, p_m sono indipendenti $\iff \dim \langle p_1, \dots, p_m \rangle = m - 1$

Esempio. (14.41) Due punti p, q sono indipendenti se e solo se $p \neq q$.

Esempio. (14.42) Tre punti p_1, p_2, p_3 sono indipendenti

\iff sono distinti e non sono allineati (ovvero appartenenti alla stessa retta proiettiva).

Esercizio. (14.43) Mostrare che i punti nel piano proiettivo reale

$$P = \left(\frac{1}{2} : 1 : 1 \right) = (1 : 2 : 2)$$

$$Q = \left(1 : \frac{1}{3} : \frac{4}{3} \right) = (3 : 1 : 4)$$

$$R = (2 : -1 : 2)$$

sono allineati, e determinare l'equazione della retta che li contiene.

Soluzione. (14.43)

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6x + 2y - 5z$$

e quindi la retta per i primi due punti è

$$\overline{PQ} : 6x + 2y - 5z = 0$$

e $12 - 2 - 10 = 0$

\implies la retta passa per R

\implies i tre punti sono allineati.

Definizione. (14.44) Dati $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{P}(V)$, n -dimensionale, diciamo che sono in posizione generale se

- $m \leq n + 1$ e sono linearmente indipendenti;
- $m > n + 1$ e ogni scelta di $n + 1$ punti tra p_1, \dots, p_m dà dei punti indipendenti.

Esempio. (14.45) Se $\dim \mathbb{P}(V) = 1$, allora p_1, \dots, p_m sono in posizione generale \iff sono tutti distinti.

Esempio. (14.46) Se $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, allora p_1, \dots, p_m sono in posizione generale \iff sono tutti distinti e a 3 a 3 non allineati.

14.5 Rappresentazione parametrica di un sottospazio proiettivo

(14.47) Sia $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ un sottospazio di dimensione m . Allora esistono sempre $m + 1$ punti

$$p_0, \dots, p_m \in S$$

indipendenti, che generano S .

Infatti, $S = \mathbb{P}(W)$ per un qualche sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ con dimensione $n + 1$.

Sia $w_0, \dots, w_m \in W$ una base $\implies p_i = [w_i], \forall i = 0, \dots, m$.

\implies I punti di S sono tutti e soli i punti della forma

$$[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m]$$

al variare di $\lambda_0, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Nota. (14.48) Nelle ipotesi precedenti, posso vedere

$$[\lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_m w_m] = (\lambda_0 : \dots : \lambda_m)$$

coordinate omogene su S indotte dalla base w_0, \dots, w_m di W .

(14.49) Supponiamo di avere fissato anche una base di V n -dimensionale e di avere quindi un riferimento proiettivo in $\mathbb{P}(V)$.

Infatti, dato $S = \langle p_0, \dots, p_n \rangle$ con

$$p_i = (p_{i0} : \dots : p_{in})$$

\Rightarrow i punti di S , in coordinate, sono dati da

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_0 p_{00} + \dots + \lambda_m p_{m0} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_0 p_{0n} + \dots + \lambda_m p_{mn} \end{cases}, \quad (\lambda_0 : \dots : \lambda_m) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$$

Esempio. (14.50) In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ consideriamo i punti

$$A = (1 : 0 : -1 : 4)$$

$$B = (2 : 3 : 0 : -5)$$

e scriviamo in forma parametrica la retta \overline{AB} :

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + 2\mu \\ x_1 = 3\mu \\ x_2 = -\lambda \\ x_3 = 4\lambda - 5\mu \end{cases} \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

14.6 Coordinate proiettive e punti in posizione generale

Osservazione. (14.51) Sia $\mathcal{B} = e_0, \dots, e_n$ una base di V che dà il riferimento proiettivo. Siano $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $\forall i$ sia

$$v_i := \lambda_i e_i$$

Allora $\mathcal{B}' = \{v_0, \dots, v_n\}$ è ancora una base di V , che dà un altro riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$, con gli stessi punti fondamentali, infatti

$$[e_i] = [v_i], \forall i = 0, \dots, n.$$

I due riferimenti proiettivi, però, sono diversi, perché dato

$$v = x_0 e_0 + \cdots + x_n e_n = \frac{x_0}{\lambda_0} v_0 + \cdots + \frac{x_n}{\lambda_n} v_n$$

$\Rightarrow [v]$ ha coordinate

- $(x_0 : \cdots : x_n)$ rispetto al primo riferimento \mathcal{B} ;
- $\left(\frac{x_0}{\lambda_0} : \cdots : \frac{x_n}{\lambda_n}\right)$ rispetto al secondo riferimento \mathcal{B}' .

\Rightarrow Conoscere i punti fondamentali non basta a determinare il riferimento proiettivo.

Osservazione. (14.52) Consideriamo, fissato il riferimento proiettivo, i punti fondamentali p_0, \dots, p_n e il punto unità u .

Allora p_0, \dots, p_n, u sono in posizione generale.

Infatti, per $p_i = [e_i]$, $u = [e_0 + \cdots + e_n]$,

$\forall i \{e_0, \dots, \check{e}_i, \dots, e_n, e_0 + \cdots + e_n\}^\dagger$ sono linearmente indipendenti

Osservazione. (14.53) Siano $q_0, \dots, q_{n+1} \in \mathbb{P}(V)$, con $q_i = [v_i]$.

q_0, \dots, q_{n+1} sono in posizione generale $\iff v_0, \dots, v_n$ sono una base e

$$v_{n+1} = a_0 v_0 + \cdots + a_n v_n, \quad a_i \neq 0, \forall i.$$

[†] Utilizzando \check{e}_i si indica che nell'insieme non è presente e_i .

Teorema XXXIX.

Sia $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n .

Fissati $n + 2$ punti p_0, \dots, p_{n+1} in posizione generale, allora esiste una base $\mathcal{B} = \{e_0, \dots, e_n\}$ tale che

$$p_0 = [e_0], p_1 = [e_1], \dots, p_n = [e_n], p_{n+1} = [e_0 + \dots + e_n] \quad (14.4)$$

Inoltre, se $\mathcal{B}' = \{f_0, \dots, f_n\}$ è un'altra base di $\mathbb{P}(V)$ che soddisfa (14.4) allora

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : f_i = \lambda e_i, \quad \forall i.$$

Corollario. (14.54) Sia $\mathbb{P}(V)$ di dimensione n .

Fissati $n + 2$ punti p_0, \dots, p_{n+1} in posizione generale, $\exists!$ un riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$\begin{aligned} p_0 &= (1 : 0 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ p_n &= (0 : \dots : 0 : 1) \\ p_{n+1} &= (1 : 1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

Dimostrazione di XXXIX. Sia $p_i = [v_i]$, $i = 0, \dots, n + 1$.

p_0, \dots, p_n sono indipendenti $\implies v_0, \dots, v_n$ sono una base di V .

Scriviamo

$$v_{n+1} = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n, \quad a_i \neq 0, \forall i$$

$\forall i = 0, \dots, n$ poniamo $e_i = a_i v_i \neq 0$

$\implies \{x_0, \dots, x_n\} = \mathcal{B}$ è la base cercata. Infatti

$$\begin{aligned} [e_i] &= [a_i v_i] = [v_i] = p_i, \quad \forall i = 0, \dots, n \\ p_{n+1} &= [e_0 + \dots + e_n]. \end{aligned}$$

[†] Perché i punti sono in posizione generale.

Sia ora $\mathcal{B}' = \{f_0, \dots, f_n\}$ un'altra base con la stessa proprietà.

Allora $p_i = [e_i] = [f_i]$

$\implies \exists \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che $f_i = \lambda_i e_i$.

Inoltre $[e_0 + \dots + e_n] = [f_0 + \dots + f_n]$

$\implies \exists \mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\mu(e_0 + \dots + e_n) = f_0 + \dots + f_n = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n$$

e_0, \dots, e_n base

\implies per l'unicità della scrittura rispetto ad una base di un vettore,

$$\mu = \lambda_0 = \dots = \lambda_n.$$

$\implies f_i = \lambda e_i, \forall i.$ ■

14.7 Trasformazioni proiettive

(14.55) Siano V, V' due spazi vettoriali e $\varphi : V \rightarrow V'$ un isomorfismo.

Allora φ induce un'applicazione

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathbb{P}(V) &\rightarrow \mathbb{P}(V') \\ [v] &\mapsto [\varphi(v)]. \end{aligned}$$

- $\tilde{\varphi}$ è ben definita, perché:

1. $v \neq 0 \implies \varphi(v) \neq 0$ (φ iniettiva, quindi $\ker \varphi = \{0\}$);

2. se $[v] = [w]$ allora $w = \lambda v$

$$\implies \varphi(w) = \lambda \varphi(v)$$

$$\implies [\varphi(w)] = [\varphi(v)].$$

- $\tilde{\varphi}$ è iniettiva, infatti siano $[v_1], [v_2]$ tali che

$$[\varphi(v_1)] = \tilde{\varphi}(v_1) = \tilde{\varphi}(v_2) = [\varphi(v_2)]$$

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\varphi(v_1) = \lambda \varphi(v_2) = \varphi(\lambda v_2)$$

$$\varphi(v_1 - \lambda v_2) = \underline{0}$$

e poiché φ iniettiva

$$\implies v_1 - \lambda v_2 = \underline{0}$$

$$\implies v_1 = \lambda v_2$$

$$\implies [v_1] = [v_2].$$

- $\tilde{\varphi}$ è suriettiva[†].

Definizione. (14.56) Un'applicazione $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ si dice trasformazione proiettiva se $\exists \varphi : V \rightarrow V'$ isomorfismo, tale che $f = \tilde{\varphi}$.

Se $V = V'$, diciamo anche che f è una proiettività.

Nota. (14.57) Se $\dim \mathbb{P}(V) = n$ allora $\exists \varphi : V \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$

$$\implies \exists f = \tilde{\varphi} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \text{ trasformazione proiettiva.}$$

Lemma. (14.58) Siano $\varphi, \psi : V \rightarrow V'$ isomorfismi. Allora

$$\tilde{\varphi} = \tilde{\psi} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} : \psi = \lambda \varphi$$

Dimostrazione di (14.58)

“ \Leftarrow ” Se $\psi = \lambda \varphi$, sia $[v] \in \mathbb{P}(V)$

$$\tilde{\psi}([v]) = [\psi(v)] = [\lambda \varphi(v)] = [\varphi(v)] = \tilde{\varphi}([v]).$$

“ \Rightarrow ” Sia $v \in V \setminus \{\underline{0}\}$. Allora

$$[\varphi(v)] = \tilde{\varphi}([v]) = \tilde{\psi}([v]) = [\psi(v)]$$

$$\implies \exists \lambda_v \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che}$$

$$\psi(v) = \lambda_v \varphi(v)$$

Sia $g = \psi^{-1} \circ \varphi : V \rightarrow V$ endomorfismo di V .

[†] **Esercizio** Mostrare che $\tilde{\varphi}$ è suriettiva.

Sia $v \in V \setminus \{0\}$ allora

$$h(v) = \psi^{-1}(\varphi(v)) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{\lambda_v}\psi(v)\right) = \frac{1}{\lambda_v}v$$

$\implies v$ è un autovettore per h , con autovalore $1/\lambda_v$

\implies ogni vettore non nullo è un autovettore.

Allora h è diagonalizzabile e deve avere un unico autovalore; infatti, se ne avesse due distinti λ_1, λ_2 , con v_1 autovettore relativo a λ_1 , v_2 autovettore relativo a λ_2

$\implies v_1 + v_2$ non è un autovettore

$\implies h = \lambda \text{Id}$

$\implies \varphi, \psi$ sono multiple. ■

Osservazione. (14.59) Sia $\mathbb{P}\text{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}\text{GL}^{n+1}(\mathbb{K})$ l'insieme delle proiettività

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K}).$$

1. $\text{Id}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})}$ è una proiettività, indotta da

$$\text{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}} : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1};$$

2. la composizione di proiettività è ancora una proiettività (indotta dalla composizione delle applicazioni lineari);

3. se $f = \tilde{\varphi} : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ allora f è biunivoca e f^{-1} è ancora una proiettività: $f^{-1} = \widetilde{\varphi^{-1}}$.

Dunque $\mathbb{P}\text{GL}(\mathbb{K}^{n+1})$ è un gruppo, detto gruppo lineare proiettivo.

Descrizione Matriciale. (14.60) Diamone ora una descrizione matriciale. $\text{GL}(\mathbb{K}^{n+1})$ è omeomorfo al gruppo delle matrici in \mathbb{K} di ordine $n+1$ invertibili, considerando

$$\text{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) = \left\{ \varphi : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \text{ lineare invertibile} \right\}$$

Consideriamo

$$\begin{aligned}\Phi : \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) \\ A &\mapsto \widetilde{\varphi_A}\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}\varphi_A : \mathbb{K}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ v &\mapsto Av\end{aligned}$$

- Φ è omomorfismo di gruppi;
- Φ è suriettivo;
- $A \in \ker \Phi$

$$\iff \widetilde{\varphi_A} = \mathrm{Id}_{\mathbb{P}^n(\mathbb{K})} = \widetilde{\mathrm{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}}}$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che}$$

$$\varphi_A = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^{n+1}}$$

$$\iff A = \lambda \mathbf{1}_{n+1}.$$

Quindi

$$\ker \Phi = \{\lambda \cdot \mathbf{1}_{n+1} : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

$$\implies \mathbb{P}\mathrm{GL}(\mathbb{K}^{n+1}) \cong \frac{\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{K})}{\{\lambda \cdot \mathbf{1}_{n+1} : \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}}$$

Esempio. (14.61) Proiettività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \\ (x_0 : x_1) &\mapsto (ax_0 + bx_1 : cx_0 + dx_1)\end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

infatti $f = \widetilde{\varphi}$ con

$$\begin{aligned}p : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &\mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Definizione. (14.62) Due sottoinsiemi A e B di $\mathbb{P}(V)$ si dicono proiettivamente equivalenti se $\exists f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ proiettività tale che $f(A) = B$.

Esempio. (14.63) Due sottospazi proiettivi della stessa dimensione sono sempre proiettivamente equivalenti.

Teorema XL.

Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ di dimensione n . Siano:

$$\begin{aligned} p_0, \dots, p_{n+1} &\in \mathbb{P}(V), \quad n+2 \text{ punti in posizione generale;} \\ q_0, \dots, q_{n+1} &\in \mathbb{P}(V'), \quad n+2 \text{ punti in posizione generale.} \end{aligned}$$

Allora $\exists! f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ trasformazione proiettiva tale che

$$f(p_i) = q_i, \quad \forall i = 0, \dots, n+1$$

Dimostrazione di XL.

- Esistenza. Siccome p_0, \dots, p_{n+1} sono in posizione generale, $\exists v_0, \dots, v_n$ base di V tale che

$$\begin{aligned} p_i &= [v_i], \quad i \in \{0, \dots, n\}; \\ p_{n+1} &= [v_0 + \dots + v_n]. \end{aligned}$$

Allo stesso modo $\exists w_0, \dots, w_n$ base di V' tale che

$$\begin{aligned} q_i &= [w_i], \quad i \in \{0, \dots, n\}; \\ q_{n+1} &= [w_0 + \dots + w_n]. \end{aligned} \tag{14.5}$$

Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ l'applicazione lineare tale che

$$\varphi(v_i) = w_i, \quad \forall i = 0, \dots, n$$

φ è invertibile perché manda una base in una base.

Sia $f := \tilde{\varphi} : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ trasformazione proiettiva. se $i \in \{0, \dots, n\}$

$$f(p_i) = f([v_i]) = [\varphi(v_i)] = [w_i] = q_i$$

Studiamo ora l'ultimo punto:

$$\begin{aligned}
 f(p_{n+1}) &= f([v_0 + \cdots + v_n]) \\
 &= [\varphi(v_0 + \cdots + v_n)] \\
 &= [\varphi(v_0) + \cdots + \varphi(v_n)] \\
 &= [w_0 + \cdots + w_n] = q_{n+1}.
 \end{aligned}$$

- Unicità. Sia $g : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ un'altra trasformazione proiettiva tale che

$$g(p_i) = q_i, \quad \forall i = 0, \dots, n+1$$

Allora $g = \tilde{\psi}$, $\psi : V \rightarrow V'$ isomorfismo.

Sia $u_i = \psi(v_i) \in V'$, $i = 0, \dots, n$.

Allora ψ invertibile

$\implies u_0, \dots, u_n$ è una base di V' . Allora

$$\begin{aligned}
 q_i &= g(p_i) = g([v_i]) \\
 &= [\psi(v_i)] = u_i, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\} \\
 q_{n+1} &= g(p_{n+1}) = g([v_0 + \cdots + v_n]) = [\psi(v_0 + \cdots + v_n)] \\
 &= [\psi(v_0) + \cdots + \psi(v_n)] = [u_0 + \cdots + u_n]
 \end{aligned}$$

\implies otteniamo un'altra base di V' con la stessa proprietà (14.5)

\implies le due basi devono essere proporzionali, cioè $\exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\psi(v_i) = u_i = \lambda w_i = \lambda \varphi(v_i), \quad \forall i = 0, \dots, n$$

$\implies \psi$ e $\lambda \psi$ coincidono su una base di c

$\implies \psi = \lambda \psi$

$\implies g = \tilde{\psi} = \tilde{\varphi} = f.$ ■

Esempio. (14.64) In \mathbb{P}^1 una proiettività è determinata dalle immagini di tre punti distinti.

Esempio. (14.65) In \mathbb{P}^2 una proiettività è determinata dalle immagini di quattro punti, a tre a tre non allineati.

Osservazione. (14.66) In \mathbb{P}^n siano A e B due insiemi di k punti in posizione generale, con $k \leq n + 2$. Allora A e B sono sempre proiettivamente equivalenti.

Esempio. (14.67) In \mathbb{P}^2 gli insiemi di due punti distinti sono sempre proiettivamente equivalenti.

Se invece consideriamo due insiemi A e B di tre punti distinti.

- Se sia in A che in B i punti non sono allineati, allora sono proiettivamente equivalenti;
- se i punti in A sono allineati e quelli in B no (o viceversa), allora non sono proiettivamente equivalenti (poiché la proiettività manda rette in rette);
- Cosa succede se entrambi gli insiemi di punti sono allineati?

Trasformazioni proiettive in coordinate. (14.68) Siano $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ con dei riferimenti proiettivi fissati, dati da

\mathcal{B} base di V

\mathcal{B}' base di V'

$f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ trasformazione proiettiva è $f = \tilde{\varphi}$, con $\varphi : V \rightarrow V'$ isomorfismo.

Sia $A \in \text{GL}(n + 1, \mathbb{K})$ la matrice associata[†]a φ rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' . Se

$$\begin{aligned} p &= (x' : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}(V) \\ f(p) &= (y_0 : \cdots : y_n) \in \mathbb{P}(V') \end{aligned}$$

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lambda y = Ax$$

Esercizio. (14.69) In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ determinare la proiettività f tale che

$$f(2 : 1) = (1 : 1), \quad (14.6)$$

$$f(1 : 2) = (0 : 1), \quad (14.7)$$

$$f(1 : -1) = (1 : 0). \quad (14.8)$$

[†] φ è determinata a meno di multipli \implies anche A è determinata a meno di multipli.

Soluzione (14.69). Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Considerando (14.6), otteniamo

$$\begin{cases} \lambda = 2a + b \\ \lambda = 2c + d \end{cases}$$

Il coefficiente di proporzionalità λ va eliminato per ottenere una relazione lineare tra a, b, c, d . Dalle altre otteniamo

$$\begin{aligned} f(1 : 2) &= (0 : 1) \\ \implies a + 2b &= 0 \\ f(1 : -1) &= (1 : 0) \\ \implies c - d &= 0 \end{aligned}$$

Otteniamo un sistema lineare omogeneo di tre equazioni nelle quattro incognite a, b, c, d .

$\implies \exists$ una soluzione non nulla, unica a meno di scalari.

Osservazione: cambiamenti di coordinate. (14.70) Supponiamo in $\mathbb{P}(V)$ di avere due riferimenti proiettivi, uno dato dalla base \mathcal{B} di V , e l'altro dalla base \mathcal{B}' di V .

Sia $M \in \text{GL}(n+1, \mathbb{K})$ la matrice del cambiamento di base, tale che

$$x' = Mx$$

dove x sono le coordinate del vettore rispetto a \mathcal{B} e x' sono le coordinate del vettore rispetto a \mathcal{B}' .

Allora se $p \in \mathbb{P}(V)$

$$\begin{aligned} P &= (x_0 : \cdots : x_n), & (\mathcal{B}) \\ P &= (x'_0 : \cdots : x'_n), & (\mathcal{B}') \end{aligned}$$

$\implies \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lambda x' = Mx.$$

Nota. (14.71) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) &= \mathbb{R}^{n+1} / \sim \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) &= \mathbb{C}^{n+1} / \sim\end{aligned}$$

e quindi, avendo \mathbb{R} e \mathbb{C} la topologia euclidea, anche $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ avrà la topologia quoziente.

Punti fissi di proieività. (14.72) Sia $f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ proieività.

$p \in \mathbb{P}(V)$ è un punto fisso se $f(p) = p$.

Se $p = [v]$ e $f = \tilde{\varphi}$, $f(p) = [\varphi(v)]$.

$$f(p) = p \iff [\varphi(v)] = [v]$$

$$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \text{ tale che } \varphi(v) = \lambda v$$

$$\iff v \text{ è un autovettore per } \varphi.$$

$$\implies \text{ i punti fissi di } f \text{ sono tutti e soli i punti } [v] \text{ con } v \text{ autovettore di } \varphi.$$

In particolare:

1. se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ogni proieività ha punti fissi;
2. se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e $n = \dim \mathbb{P}(V)$, allora $n + 1 = \dim V$ è il grado del polinomio caratteristico
 \implies se n è pari, il polinomio caratteristico ha grado dispari e pertanto c'è sempre almeno un autovalore reale
 \implies c'è almeno un punto fisso.

Esercizio. (14.73) Scrivere una proieività di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ senza punti fissi.

Nota. (14.74) In generale l'insieme di tutti punti fissi di f è dato da

$$\{\mathbb{P}(V_\lambda)\}, \quad \lambda \text{ autovalore di } \varphi$$

$$\implies \text{ è un'unione di sottospazi proiettivi a due a due disgiunti.}$$

Definizione. (14.75) Se $S \subseteq \mathbb{P}(V)$ è un sottospazio proiettivo, se $f(S) = S$ si dice che S è un sottospazio fisso.

Se invece $f(p) = p, \forall p \in S$, si dice che S è un sottospazio di punti fissi.

14.8 Geometria affine e geometria proiettiva

Definizione. (14.76) Lo spazio affine di dimensione n su un campo \mathbb{K} è \mathbb{K}^n . Quando parliamo di spazio affine, pensiamo a \mathbb{K}^n come un insieme geometrico di punti, in cui l'origine è un punto come gli altri.

Definizione. (14.77) Un'affinità (o trasformazione lineare affine) di \mathbb{K}^n è $\varphi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ della forma

$$\varphi(x) = Ax + b$$

con $A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$.

Definizione. (14.78) Un sottospazio affine di \mathbb{K}^n è un traslato di un sottospazio vettoriale:

$$S = W + x_0$$

con W un sottospazio vettoriale e $x_0 \in \mathbb{K}^n$.

W è l'unico traslato di S che passa per l'origine, e si dice sottospazio direttore di S .

Si definisce

$$\dim S := \dim W.$$

Esempi. (14.79)

- Un punto di \mathbb{K}^n è un sottospazio affine di dimensione 0.
- Una retta è un sottospazio affine di dimensione 1.
- Un piano è un sottospazio affine di dimensione 2.
- Un iperpiano è un sottospazio affine di dimensione $n - 1$.

Definizione. (14.80) Due sottospazi affini della stessa dimensione si dicono paralleli se hanno lo stesso sottospazio direttore.

Esempio. (14.81) Se $r \subseteq \mathbb{K}^n$ è una retta affine, allora

$$r = W + x_0$$

con $\dim W = 1$, $W = \mathcal{L}(v)$, dove v è la direzione di r .

(14.82) Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{K}^n$ può essere descritto con equazioni cartesiane o in forma parametrica.

- Equazioni cartesiane. S è visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Allora il sottospazio direttore W è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

- Forma parametrica. Se $m = \dim S = \dim W$ sia $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ base di W , $\mathbf{c} \in S$. Allora

$$S = \mathcal{L}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) + \mathbf{c}$$

\implies i punti di S in forma parametrica sono dati da

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{v}_1 + \dots + t_m \mathbf{v}_m + \mathbf{c}, \quad t_1, \dots, t_m \in \mathbb{K}.$$

Esempio. (14.83) Se $m = 1$, S è una retta; $W = \mathcal{L}(\mathbf{v})$, \mathbf{v} direzione retta; quindi

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v} + \mathbf{c}$$

(14.84) Consideriamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$. Sia

$$U_0 = \{p = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_0 \neq 0\}$$

Notiamo che questa è una condizione ben posta, perché $x_0 \neq 0 \iff \lambda x_0 \neq 0$ per $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Vogliamo “identificare” $U_0 \longleftrightarrow \mathbb{K}^n$ con \mathbb{K}^n spazio affine. Quindi

$$\mathbb{P}^n = U_0 \sqcup H_0$$

dove H_0 è l'iperpiano con $x_0 = 0$. Geometricamente, quindi

$$\mathbb{P}^n \text{ “=” } \mathbb{K}^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$$

Sia $p \in U_0$, $p = (a_0 : \dots : a_n)$, poiché $a_0 \neq 0$,

$$p = \left(1 : \frac{a_1}{a_0} : \dots : \frac{a_n}{a_0}\right)$$

Notiamo che le coordinate $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$ sono univocamente determinate da P .

Definiamo[†]

$$\begin{aligned}\varphi : U_0 &\rightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)\end{aligned}$$

e la sua inversa

$$\begin{aligned}j : \mathbb{K}^n &\rightarrow U_0 \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)\end{aligned}$$

Verifichiamo che φ e j sono l'una l'inversa dell'altra.

$$\begin{aligned}\bullet \quad \mathbb{K}^n &\xrightarrow{j} U_0 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (1 : x_1 : \dots : x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U_0 &\xrightarrow{\varphi} \mathbb{K}^n \xrightarrow{j} U_0 \\ \bullet \quad (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) \longmapsto \left(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0} \right) \\ &= (x_0 : \dots : x_n)\end{aligned}$$

Esempio. (14.85) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, H_0 sono le rette vettoriali giacenti nel piano $x_0 = 0$.

Sia $p \in U_0$, p è in corrispondenza con $\mathcal{L}((a, b, c))$ con $a \neq 0$

Se consideriamo il piano affine π di equazione $x_0 = 1$,

$$r \cap \pi = \left\{ \left(1, \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \right) \right\}$$

[†] Questa operazione si chiama deomogeneizzazione rispetto a x_0 .

π è il traslato di H_0 . Ogni retta che non sta in U_0 lo interseca in un punto identificato con un vettore di \mathbb{R}^2 :

$$\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}\right)$$

Interpretazione. (14.86)

- \mathbb{P}^n è visto come estensione (o ampliamento) dello spazio affine \mathbb{K}^n .
- U_0 è detto carta affine di \mathbb{P}^n e i suoi punti sono detti punti propri.
- I punti di H_0 sono detto punti impropri o punti all'infinito.
- H_0 è detto iperpiano improprio o iperpiano all'infinito.

Esempio. (14.87) Se consideriamo \mathbb{P}^1 , si ha che

$$U_0 \longleftrightarrow \mathbb{K}$$

$$(x_0 : x_1) \longleftrightarrow \frac{x_1}{x_0}$$

e $H_0 = \{(0 : 1)\}$. Quindi

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{K} \cup \{(0 : 1)\}_{=\infty}$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

14.8.1 Chiusura proiettiva di un sottospazio affine

Definizione. (14.88) Data $r \subseteq \mathbb{K}^n$ una retta affine, $r \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$, la chiusura proiettiva di r è il sottospazio proiettivo $\bar{r} \subseteq \mathbb{P}^n$ generato da $r \subseteq U_0$.

Si ha $\bar{r} = R \cup P_\infty$ dove $P_\infty = \bar{r} \cap H_0$ è detto punto all'infinito o punto improprio della retta r .

(14.89) Sia $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ la direzione di r e $w \in \mathbb{K}^n$. La descrizione parametrica di r in \mathbb{K}^n è

$$\begin{cases} x_1 = t v_1 + w_1 \\ \vdots \\ x_n = t v_n + w_n, \end{cases} \quad t \in \mathbb{K}$$

Allora \bar{r} ha descrizione parametrica

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = t v_1 + s w_1 \\ \vdots \\ x_n = t v_n + s w_n, \end{cases} \quad (s : t) \in \mathbb{P}^1.$$

- Se $s = 0 \implies (0 : v_1 : \dots : v_n) \in \bar{r} \cap H_0$ da cui

$$P_\infty = (0 : v_1 : \dots : v_n) \in H_0;$$

- se $s \neq 0 \implies s = 1$

$\implies (1 : t v_1 + w_1 : \dots : t v_n + w_n)$ tutti i punti della retta r .

Notiamo che P_∞ è il punto improprio di r e corrisponde alla direzione della retta r . Se consideriamo $H_0 = \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$, allora

$$P_\infty = [v] \in H_0, \quad P_\infty = (v_1 : \dots : v_n).$$

Quindi i punti di H_0 sono in corrispondenza biunivoca con le rette vettoriali di \mathbb{K}^n , a loro volta in corrispondenza vettoriale con le direzioni delle rette affini in \mathbb{K}^n .

Osservazione. (14.90) Due rette affini $r_1, r_2 \in \mathbb{K}^n$ hanno lo stesso punto improprio se e solo se sono parallele.

Se $r_1 \neq r_2$ sono parallele, allora $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ in \mathbb{K}^n , ma

$$\bar{r}_1 \cap \bar{r}_2 = P_\infty, \quad \text{in } \mathbb{P}^n.$$

Osservazione. (14.91) Se $n = 2$ due rette affini $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{K}^2$ possono essere

- incidenti: si intersecano in \mathbb{P}^2 ;
- parallele: si intersecano all'infinito in \mathbb{P}^2 ;

quindi in \mathbb{P}^2 due rette si intersecano sempre.

Se invece $n \geq 3$, due rette affini $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{K}^n$, possono essere

- incidenti: si intersecano in \mathbb{P}^n ;
- parallele: si intersecano in \mathbb{P}^n ;
- sghembe: restano sghembe in \mathbb{P}^n

Osservazione. (14.92) In \mathbb{K}^2 , con coordinate (x, y) una retta affine r è descritta da un'equazione lineare

$$ax + by + c = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

Se $(x : y : z)$ sono le coordinate omogenee su \mathbb{P}^2 , ($z = 0$ iperpiano improprio), allora \bar{r} ha equazione

$$ax + by + cz = 0.$$

- Se $z = 1$ ottengo r ;
- se $z = 0$ ottengo $ax + by = 0$

$$\implies P_\infty = (-b : a : 0) \text{ direzione di } r.$$

(14.93) Più in generale: se $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{K}^n$ è un sottospazio affine, la sua chiusura proiettiva \bar{S} è il sottospazio proiettivo generato da $S \subseteq U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$.

- $\dim \bar{S} = \dim S$;
- $\bar{S} \cap H_0 = \bar{S} \cap \mathbb{P}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$, con $W \subseteq \mathbb{K}^n$ sottospazio direttore di S .

14.9 Spazi proiettivi complessi

Nota. (14.94) Se $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, allora $\mathbb{P}^n(K)$ ha una topologia, e U_0 è aperto e

$$U_0 \longleftrightarrow \begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{C}^n \end{matrix}$$

è omeomorfismo, dove U_0 ha la topologia di sottospazio.

Se H è un iperpiano qualsiasi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ o $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ allora $\exists \varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ proiettività tale che $\varphi(H) = H_0$

$\implies \mathbb{P}^n \setminus H$ è aperto in \mathbb{P}^n e

$$\mathbb{P}^n \setminus H \underset{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{P}^n \setminus H_0 = U_0 \underset{\text{omeo}}{\sim} K^n.$$

Ogni $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ha un intorno aperto omeomorfo a \mathbb{R}^n (scelgo H iperpiano tale che $p \notin H$)

$\implies \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietà topologica compatta di dimensione n .

Varietà topologica. (14.95) Considero $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Ogni $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ha un intorno aperto omeomorfo a \mathbb{C}^n

$\implies \mathbb{P}^n$ è localmente euclideo di dimensione $2n$.

Mostriamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è una varietà topologica compatta di dimensione $2n$.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è connesso perché quoziente di $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$;
- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è di Hausdorff: se $p, q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $p \neq q$

$\implies \exists H$ iperpiano tale che $p, q \notin H$

$\implies p, q \in \underbrace{\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus H}_{\text{aperto}} \underset{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{C}^n$, \mathbb{C}^n Hausdorff

\implies separiamo p, q con due aperti da \mathbb{C}^n .

Quoziente sulla sfera. (14.96) Voglio vedere $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ come quoziente di una sfera:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} &= \mathbb{R}^{2n+2} \setminus \{0\} \supseteq S^{2n+1} \\ S^{2n+1} &= \left\{ (x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+2} : \right. \\ &\quad \left. x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \right. \\ &\quad \left. |z_1|^2 \dots + |z_{n+1}|^2 = 1 \right\} \\ &= \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\| = 1\}\end{aligned}$$

Se $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|\lambda z\| = |\lambda| \|z\|$$

quindi $\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\lambda z \in S^{2n+1}$.

Basta prendere $\lambda = 1/\|z\|$, infatti

$$\|\lambda z\| = 1$$

$$\implies \pi(S^{2n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

$$\implies \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ è compatto.}$$

Consideriamo quindi la proiezione $\pi|_{S^{2n+1}} : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Se $z_1, z_2 \in S^{2n+1}$ allora $\pi(z_1) = \pi(z_2) \iff$

$$z_2 = \lambda z_1$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1^\dagger$

Osservazione. (14.97) Notiamo che sia $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ che $\mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R})$ sono varietà topologiche compatte di dimensione $2n$, ma non sono omeomorfe.

Sfera di Riemann. (14.98) Vediamo che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \underset{\text{omeo}}{\sim} S^2$.

Prendo $N = (0, 0, 1) \in S^2$, $S = (0, 0, -1) \in S^2$, e scrivo $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup \{(0 : 1)\}$

Definiamo $F : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in questo modo

[†] Ovvero $\lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}$.

- su $S^2 \setminus \{N\}$, definito $U_0 = \mathbb{P}^1((\mathbb{C})) \setminus \{(0, 1)\}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 S^2 \setminus \{N\} & \xrightarrow[\dagger]{\sim} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\sim} & U_0 \\
 & & (x, y) \longmapsto & x + iy & & & \\
 & & & & w \longmapsto & (1 : w) &
 \end{array}$$

$F : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{P}^1((\mathbb{C})) \setminus \{(0, 1)\}$ omeomorfismo

- estendiamo F ponendo $F(N) = (0 : 1)$.

Otteniamo quindi $F : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ biunivoca.

Se mostriamo che F è continua $\implies F$ è chiusa $\implies F$ omeomorfismo.

F è continua su $S^2 \setminus \{N\}$. Dobbiamo mostrare la continuità in N .

Scriviamo esplicitamente $F|_{S^2 \setminus \{N\}}$. Sia $p = (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\}$.

- La proiezione stereografica da N di p in \mathbb{R}^2 è

$$\left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right).$$

- In \mathbb{C} questo diventa il numero complesso

$$\frac{1}{1-z}(x + iy).$$

- In U_0 ottengo

$$\left(1 : \frac{x + iy}{1-z} \right) = (1-z : x + iy)$$

$$F(x, y, z) = (1-z : x + iy).$$

Dall'equazione della sfera,

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in S^2 &\implies x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
 x^2 + y^2 &= 1 - z^2 \\
 (x + iy)(x - iy) &= (1+z)(1-z)
 \end{aligned}$$

[†] Proiezione stereografica

Quindi, su $S^2 \setminus \{N, S\}$ i valori sono tutti non nulli, quindi

$$\frac{x + i y}{1 - z} = \frac{1 + z}{x - i y}$$

$$\begin{aligned} \implies F(x, y, z) &= (1 - z : x + i y) \\ &= \left(1 : \frac{x + i y}{1 - z}\right) = \left(1 : \frac{1 + z}{x - i y}\right) \\ &= (x - i y : 1 + z) \end{aligned}$$

che vale su $S^2 \setminus \{S\}$

$$\implies F(N) = (0 : 1)$$

Su $S^2 \setminus \{S\}$, dato $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ aperto

$$F(S^2 \setminus \{S\}) \subseteq U_1 \subseteq \mathbb{P}^1(C) \cong \mathbb{C}$$

con

$$\begin{aligned} U_1 &\longleftrightarrow \mathbb{C} \\ (x_0 : x_1) &\longleftrightarrow x_0/x_1 \end{aligned}$$

e quindi, definita g come

$$\begin{array}{ccc} S^2 \setminus \{S\} & \xrightarrow{F} & U_1 \\ & \searrow g & \downarrow \wr \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

$$g(x, y, z) = \frac{x - i y}{1 + z} \text{ continua su } S^2 \setminus \{S\}$$

$$\implies g \text{ è continua in } N$$

$$\implies F \text{ è continua in } N. \quad \blacksquare$$

Esercizio. (14.99) Mostrare che

$$g : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$$

è data da

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & g & & & \\
 & & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\
 S^2 \setminus \{S\} & \xrightarrow{\star} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\star\star} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\star\star\star} & \mathbb{C} \\
 & & & & u \longmapsto & \bar{u} &
 \end{array}$$

dove

(\star) è la proiezione stereografica da S ;

$(\star\star)$ è standard;

$(\star\star\star)$ è tramite il coniugio.

Nota. (14.100) $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono superfici compatte distinte:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \ell$$

con ℓ retta all'infinito,

$$\ell = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \underset{\text{omeo}}{\sim} S^1.$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ compattificano il piano in maniera diversa.

14.10 Birapporto

Definizione. (14.101) Sia $\mathbb{P}(V)$ una retta proiettiva ($\dim V = 2$). Siano $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}(V)$ con p_1, p_2, p_3 distinti

\implies esiste ed è unico il riferimento proiettivo su $\mathbb{P}(V)$ tale che

$$p_1 = (1 : 0), \quad p_2 = (0 : 1), \quad p_3 = (1 : 1)$$

Sia $p_4 = (y_0 : y_1)$.

Il birapporto dei punti di p_1, p_2, p_3, p_4 è

$$\beta(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{y_1}{y_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

(dove $\beta = \infty$ se $y_0 = 0$.)

Osservazione. (14.102)

- β è ben definito;
- $p_4 = p_1 \iff y_1 = 0 \iff \beta = 0$;
- $p_4 = p_2 \iff y_0 = 0 \iff \beta = \infty$;
- $p_4 = p_3 \iff y_1 = y_0 \iff \beta = 1$.

Quindi se p_1, p_2, p_3, p_4 sono distinti, allora

$$\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$$

Proposizione. (14.103) Siano $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}(V)$ retta proiettiva, i primi tre distinti.

Sia $p_i = (\lambda_i : \mu_i)$ in un riferimento proiettivo fissato. Allora

$$\beta(p_i) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_4 \\ \mu_2 & \mu_4 \end{vmatrix}}$$

Dimostrazione di (14.103) $p_1 \neq p_2$

$\implies (\lambda_1 : \mu_1)$ e (λ_2, μ_2) sono una base di \mathbb{K}^2 .

Siano $a, b \in \mathbb{K}$ tale che

$$\begin{aligned} (\lambda_3, \mu_3) &= a(\lambda_1, \mu_1) + b(\lambda_2, \mu_2) \\ &= (a \lambda_1, a \mu_1) + (b \lambda_2, b \mu_2) \end{aligned} \tag{14.9}$$

$(a \lambda_1, a \mu_1), (b \lambda_2, b \mu_2)$ sono base di \mathbb{K}^2 che da il riferimento proiettivo con p_1, p_2 punti fondamentali e p_3 punto unità.

$$(\lambda_4, \mu_4) = c(a \lambda_1, a \mu_1) + d(b \lambda_2, b \mu_2) \tag{14.10}$$

$\implies p_4$ ha coordinate $(c : d)$ nel nuovo riferimento proiettivo $(\beta d/c)$.

La (14.9) da un sistema lineare di due equazioni e due incognite a, b . Chiamando

$$\delta_{ij} := \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j \\ \mu_i & \mu_j \end{vmatrix}$$

il sistema trovato

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2 b = \lambda_3 \\ \mu_1 a + \mu_2 b = \mu_3 \end{cases}$$

ha con Cramer soluzioni

$$a = \frac{\delta_{32}}{\delta_{12}}, \quad b = \frac{\delta_{13}}{\delta_{12}}$$

La (14.10) da un sistema lineare di due equazioni e due incognite c, d .

$$\begin{cases} (a \lambda_1) c + (b \lambda_2) d = \lambda_4 \\ (a \mu_1) c + (b \mu_2) d = \mu_4 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} (\delta_{31} \lambda_1) c + (\delta_{13} \lambda_2) d = \delta_{12} \lambda_4 \\ (\delta_{32} \mu_1) c + (\delta_{13} \mu_2) d = \delta_{12} \mu_4 \end{cases}$$

Ancora con Cramer

$$c = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{12} \lambda_4 & \delta_{13} \lambda_2 \\ \delta_{12} \mu_4 & \delta_{13} \mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \delta_{32} \lambda_2 & \delta_{13} \lambda_2 \\ \delta_{32} \mu_2 & \delta_{13} \mu_2 \end{vmatrix}} = \frac{\cancel{\delta_{12}} \cancel{\delta_{13}} \delta_{42}}{\delta_{32} \cancel{\delta_{13}} \cancel{\delta_{12}}}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} \delta_{32} \lambda_1 & \delta_{12} \lambda_4 \\ \delta_{31} \mu_1 & \delta_{12} \mu_4 \end{vmatrix}}{\delta_{32} \delta_{13} \delta_{12}} = \frac{\cancel{\delta_{32}} \cancel{\delta_{12}} \delta_{14}}{\cancel{\delta_{32}} \delta_{13} \cancel{\delta_{12}}}$$

da cui $\beta = \frac{d}{c} = \frac{\delta_{14}}{\delta_{13}} \cdot \frac{\delta_{32}}{\delta_{42}}$. Poiché

$$\delta_{23} = -\delta_{32}$$

$$\delta_{24} = -\delta_{42}$$

allora $\beta = \frac{\delta_{14} \delta_{23}}{\delta_{13} \delta_{24}}$

■

Nota. (14.104) Se $p_i \neq (0 : 1) \forall i$, cioè $\lambda_i \neq 0$, $p_i = (1 : z_i)$ da cui

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_4 \end{vmatrix} = z_4 - z_1$$

$$\implies \beta = \frac{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}.$$

Esercizio. (14.105) Osservare cosa succede se $p_i \neq (1 : 0) \forall i$

Teorema XLI.

Siano $\mathbb{P}(V)$, $\mathbb{P}(V')$ due rette proiettive e siano

$p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}(V)$ distinti

$q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}(V')$ distinti

Allora

$$\left. \begin{array}{l} \exists f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V') \\ \text{trasformazione proiettiva} \\ \text{tale che} \\ f(p_i) = q_i, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\} \iff \beta(p_i) = \beta(q_i).$$

In tal caso f è unica.

Dimostrazione di XLI. Dato che p_1, p_2, p_3 e q_1, q_2, q_3 sono in posizione generale, allora $\exists! f : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V')$ tale che $f(p_i) = q_i, \forall i = 1, 2, 3$.

Dobbiamo quindi mostrare che $f(p_4) = q_4 \iff \beta(p_i) = \beta(q_i)$.

Ricordiamo com'è costruita f . Sia $\{v_1, v_2\}$ base di V tale che

$$p_1 = [v_1], \quad p_2 = [v_2], \quad p_3 = [v_1 + v_2].$$

Sia $\{w_1, w_2\}$ base di V' tale che

$$q_1 = [w_1], \quad q_2 = [w_2], \quad q_3 = [w_1 + w_2].$$

Sia $\varphi : V \rightarrow V'$ lineare tale che

$$\varphi(v_1) = w_1, \quad \varphi(v_2) = w_2.$$

Allora $f = \tilde{\varphi}$.

“ \implies ” Supponiamo che $f(p_4) = q$.

$$p_4 = [v_4], \quad v_4 = a v_1 + b v_2$$

$$\implies p_4 = (a : b)$$

$$\implies \beta(p_i) = b/a$$

$$q_4 = f(p_4) = [\varphi(v_4)] = [\varphi(a v_1 + b v_2)] = [a w_1 + b w_2]$$

$$\implies q_4 = (a : b)$$

$$\implies \beta(q_i) = b/a = \beta(p_i).$$

“ \impliedby ” Supponiamo che $\beta(p_i) = \beta(q_i)$

$$p_4 = [v_4], \quad v_4 = a v_1 + b v_2, \quad p_4 = (a : b)$$

$$\beta(p_i) = \frac{b}{a} = \beta(q_i)$$

$$\implies q_4 = (a : b) = [a w_1 + b w_2]$$

$$= [a \varphi(v_1) + b \varphi(v_2)] = [\varphi(a v_1 + b v_2)]$$

$$= [\varphi(v_4)] = f(p_4).$$

Nota. (14.106) Definito \mathcal{S} come l'insieme delle quaterne rodinate di punti distinti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, diciamo che due quaterne $(p_i), (q_i)$ sono proiettivamente equivalenti[†] se

$$\exists f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ tale che } f(p_i) = q_i, \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$$

[†] È una relazione di equivalenza \sim su \mathcal{S} .

(14.107) Vogliamo classificare le quaterne ordinate a meno di proiettività, cioè studiare l'insieme quoziente \mathcal{S}/\sim . Possiamo definire un'applicazione

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{S}/\sim &\rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0, 1\} \\ \{p_1, p_2, p_3, p_4\}_\sim &\mapsto \beta(p_i)\end{aligned}$$

- ben definita, perché le quaterne equivalenti hanno lo stesso birapporto;
- Φ è iniettiva perché se due quaterne hanno lo stesso birapporto, allora sono proiettivamente equivalenti;
- Φ è suriettiva, perché $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ esiste una quaterna di birapporto λ .

$\implies \Phi$ è una biezione

$$\mathcal{S}/\sim \longleftrightarrow \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$$

Osservazione. (14.108) Se $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}^n$ punti distinti, $n \geq 2$, il birapporto dei p_i non è definito a meno che i quattro punti non siano allineati su una retta $r \subseteq \mathbb{P}^n$.

Se $p_1, p_2, p_3, p_4 \in r \implies \exists \beta(p_i)$.

Esempio. (14.109) In \mathbb{P}^2 consideriamo due quaterne di punti distinti:

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \quad \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

Ciascuna delle due quaterne ha tre posizioni possibili:

1. in posizione generale: a 3 a 3 non allineati;
2. 3 allineati, il quarto no;
3. tutti allineati.

Queste posizioni vengono mantenute per equivalenza proiettiva.

- Caso 1: se sia i p_i che i q_i sono in posizione generale
 \implies sono proiettivamente equivalenti.
- Caso 2: p_1, p_2, p_3 allineati, p_4 non allineato; q_1, q_2, q_3 allineati e q_4 non allineato, come in figura 14.1.

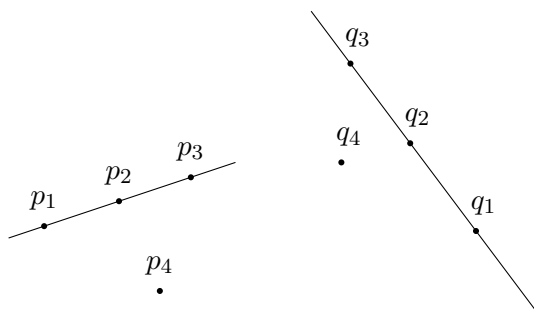


Figura 14.1: Caso 2

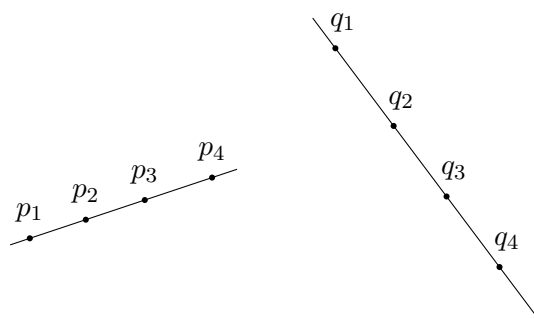


Figura 14.2: Caso 3

Allora $\exists g : r \rightarrow s$ trasformazione proiettiva, tale che

$$g(p_i) = q_i, \forall i = 1, 2, 3^\dagger$$

Quindi i p_i e i q_i sono proiettivamente equivalenti.

- Caso 3: come in figura 14.2.

Allora i p_i e i q_i sono proiettivamente equivalenti

$$\iff \beta(p_i) = \beta(q_i).$$

“ \implies ” Sia $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ proiettività tale che $f(p_i) = q_i$

[†] **Esercizio.** Mostrare che $\exists f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ tale che

$$f|_r = g, \quad f(p_4) = q_4.$$

$\implies f(r) = s$ e $g := f|_r : r \rightarrow s$ è una trasformazione proiettiva che manda i p_i nei q_i

$$\implies \beta(p_i) = \beta(q_i).$$

$$\text{“} \Leftarrow \text{” } \beta(p_i) = \beta(q_i)$$

$\implies \exists g : r \rightarrow s$ trasformazione proiettiva tale che $g(p_i) = q_i$,
 $\forall i = 1, 2, 3, 4$

Dall'esercizio: g si estende ad una proiettività $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Capitolo 15

Coniche in \mathbb{P}^2 (e in \mathbb{K}^2)

(15.1) Considero \mathbb{P}^2 con un sistema di coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$, e l'anello dei polinomi

$$\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$$

In generale, se $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, l'equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ non è ben posta in \mathbb{P}^2 .

Definizione. (15.2) Un polinomio $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ si dice omogeneo se tutti i monomi che compaiono in F hanno lo stesso grado.

Esempio. (15.3) $F = x_0^3 - x_1 x_2^2$ è omogeneo di grado 3.

Proprietà. (15.4) Se F è omogeneo di grado d , per $\lambda \in \mathbb{K}$

$$F(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^d F(a, b, c)$$

Infatti, per ogni monomio su F

$$\mu x_0^{i_0} x_1^{i_1} x_2^{i_2}$$

$$\implies \mu(\lambda a)^{i_0} (\lambda b)^{i_1} (\lambda c)^{i_2} = \lambda^{i_0+i_1+i_2} (\mu a^{i_0} b^{i_1} c^{i_2}) = \lambda^d (\mu a^{i_0} b^{i_1} c^{i_2})$$

$$\implies \text{se } \lambda \neq 0 \text{ si ha}$$

$$F(a, b, c) = 0 \iff F(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = 0$$

\implies se F è omogeneo, la condizione $F(p) = 0$ per $p \in \mathbb{P}^2$ è ben posta, perché non dipende dalla scelta delle coordinate omogenee.

Definizione. (15.5) Una curva algebrica, piana, proiettiva \mathcal{C} è data da un polinomio omogeneo $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ a meno di multipli: se $G = \lambda F$, con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ consideriamo G e F la stessa curva.

- Il supporto della curva \mathcal{C} è

$$\{p \in \mathbb{P}^2 : F(p) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2.$$

- F è l'equazione di \mathcal{C} .
- Il grado di \mathcal{C} è il grado di F .
- Una curva di grado 1 è una retta.
- Una conica è una curva di grado 2.
- Diciamo che la curva \mathcal{C} è reale se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o complessa se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Nota. (15.6) D'ora in avanti, considereremo solo casi in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Terminologia. (15.7) Diciamo che \mathcal{C} è irriducibile se F è irriducibile in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$.

Se $F = F_1^{m_1} \cdots F_r^{m_r}$ fattorizzazione irriducibile in $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ le componenti irriducibili di \mathcal{C} sono le curve date da $F_i = 0$, con molteplicità m_i .

Osservazione. (15.8) Una retta è sempre irriducibile.

Una conica può essere

- irriducibile;
- unione di due rette distinte: $F = L_1 L_2$;
- retta doppia $F = L^2$.

15.1 Coniche Proiettive

Coniche proiettive. (15.9) Una conica in \mathbb{P}^2 è data da un polinomio omogeneo di grado 2 in x_0, x_1, x_2 a coefficiente reali o complessi.

$$F = a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} x_0 x_1 + 2a_{02} x_0 x_2 + 2a_{12} x_1 x_2$$

F è una forma quadratica su \mathbb{R}^3 o \mathbb{C}^3 .

$A = (a_{ij})$ è la matrice 3×3 simmetrica associata alla forma quadratica (rispetto alla base canonica)

$$F = {}^t x A x, \quad x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che F e A sono determinati solo a meno di multipli diversi da 0.

Definizione. (15.10) Definiamo il rango della conica \mathcal{C} come

$$\text{rank}(\mathcal{C}) := \text{rank}(A) \in \{1, 2, 3\}$$

Equivalenze proiettive. (15.11) Vogliamo studiare le coniche a meno di equivalenza proiettiva.

Sia $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ una proiettività

$$x' = M x, \quad M \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$$

Allora diciamo che f porta la conica \mathcal{C} di equazione $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ nella conica $\widetilde{\mathcal{C}} : \widetilde{F} = 0$ dove \widetilde{F} si ottiene sostituendo in F

$$x = M^{-1} x'$$

Esempio. (15.12) Consideriamo la conica $\mathcal{C} : x_0 x_1 = 0$ e la proiettività

$$f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 + x_1 : x_0 - 2x_1 : x_2).$$

$$f \begin{cases} x'_0 = x_0 + x_1 \\ x'_1 = x_0 - 2x_1 \\ x'_2 = x_2 \end{cases} \quad f^{-1} \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}(2x'_0 + x'_1) \\ x_1 = \frac{1}{3}(x'_0 - x'_1) \\ x_2 = x'_2 \end{cases}$$

La trasformata di \mathcal{C} tramite f è

$$\widetilde{\mathcal{C}} : (-2x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$$

Trasformazioni e forme quadratiche. (15.13) Trasformando la conica tramite una proiettività, trasformiamo la forma quadratica F tramite un cambiamento di coordinate M di \mathbb{K}^3 .

Se A è la matrice di \mathcal{C} , e \widetilde{A} è la matrice di $\widetilde{\mathcal{C}}$, allora A e \widetilde{A} sono congruenti cioè

$$\widetilde{A} = {}^t M A M, \quad M \in \text{GL}(3, \mathbb{K})$$

con M matrice della proiettività

\implies due coniche proiettivamente equivalenti hanno matrici congruenti.

Viceversa, date due coniche $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$, se le matrici associate A_1 e A_2 sono congruenti, allora \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono proiettivamente equivalenti.

Proposizione. (15.14) Siano \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono due coniche di matrici A_1, A_2 .

\mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 sono proiettivamente equivalenti

$\iff A_1$ e A_2 sono congruenti.

(15.15) Ricordiamo che due matrici simmetriche $A_1, A_2 \in \mathbb{C}^{3,3}$ sono congruenti $\iff \text{rank } A_1 = \text{rank } A_2$.

Teorema XLII.**Teorema di classificazione delle coniche proiettive complesse a meno di proiettività**

1. Due coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno lo stesso rango.
2. Ogni conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è proiettivamente equivalente ad una (e una sola) delle tre coniche

- rank 3: conica irriducibile

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0;$$

- rank 2: coppia di rette distinte

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1) = 0;$$

- rank 1: retta doppia

$$x_0^2 = 0.$$

(15.16) Ricordiamo che due matrici simmetriche $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{3,3}$ sono congruenti \iff hanno la stessa segnatura.

(15.17) Osserviamo che la matrice A è determinata a meno di scalare non nullo, e se A ha segnatura (p, q) , allora λA ha segnatura

- (p, q) se $\lambda > 0$
- (q, p) se $\lambda < 0$

\implies la segnatura della conica \mathcal{C} è definita solo “a meno del segno”.

Teorema XLIII.

1. Due coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono proiettivamente equivalente se e solo se hanno la stessa segnatura a meno del segno.
2. Ogni conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è proiettivamente equivalente ad una (e una sola) delle cinque coniche:

- rank 3:

- $(3, 0)/(0, 3)$: conica irriducibile senza punti reali

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0;$$

- $(2, 1)/(1, 2)$: conica irriducibile con infiniti punti reali

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0;$$

- rank 2: $(1, 1)$: coppia di rette distinte

$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1) = 0;$$

- rank 1: $(1, 0)/(0, 1)$: retta doppia

$$x_0^2 = 0.$$

15.2 Coniche Affini

Definizione. (15.18) Una curva algebrica affine \mathcal{C} in \mathbb{K}^2 è data dall'equazione $f(x, y) = 0$, $f \in \mathbb{K}[x, y]$. Per definizione, polinomi multipli definiscono la stessa curva.

Notazione. (15.19)

- Il grado di \mathcal{C} è definito come il grado di f .
- Il supporto di \mathcal{C} è l'insieme

$$\{p \in \mathbb{K}^2 : f(p) = 0\}$$

- Se il grado di \mathcal{C} è uno, allora è una retta, mentre se il grado di \mathcal{C} è due allora è una conica.

(15.20) Dato $\mathbb{K}^2 = U \subseteq \mathbb{P}^2$, voglia associare ad ogni curva affine in \mathbb{K}^2 una curva proiettiva in \mathbb{P}^2 .

Siano $(x : y)$ coordinate su \mathbb{A}^2 , piano affine, $(x : y : z)$ coordinate su \mathbb{P}^2 , e vogliamo $U = \{z \neq 0\}$

$$\mathcal{C} : f(x, y) = 0, \quad \text{con } \deg(f) = d$$

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Consideriamo il polinomio in $\mathbb{K}[x, y, z]$

$$F := \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j} \quad \text{omogeneo di grado } d.$$

F è omogeneizzato di f rispetto a z .

$$f(x, y) = F(x, y, 1).$$

15.3 Polinomi omogenei in due variabili

Introduzione. (15.21) Sia $F(x_0, x_1) \in \mathbb{K}[x_0, x_1]$ omogeneo di grado d .

$$F(x_0, x_1) = \sum_{i=0}^d a_i x_0^{d-i} x_1^i$$

Se $(x_0 : x_1)$ sono coordinate omogenee su \mathbb{P}^1 , studiamo gli zeri di F su \mathbb{P}^1 .

Proprietà. (15.22) Se $p = (a : b)$, $F(p) = 0 \iff ax_1 - bx_0 \mid F$

Dimostrazione di (15.22)

“ \Leftarrow ” Ovvio.

“ \Rightarrow ” Supponiamo $a \neq 0$,

$$p = \left(1 : \frac{b}{a}\right)$$

e raccogliamo x_0^d in F

$$F(x_0, x_1) = x_0^d \sum_{i=0}^d a_i \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^i = x_0^d F \left(1, \frac{x_1}{x_0} \right)$$

Sia $t = x_1/x_0$ e sia $f(t) := F(1, t)$

$$\implies f(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i, f(t) \in \mathbb{K}[t].$$

F e f si determinano a vicenda, infatti $F(p) = 0$ e

$$F(p) = F \left(1 : \frac{b}{a} \right) = f \left(\frac{b}{a} \right)$$

$$\implies f \left(\frac{b}{a} \right) = 0.$$

Dalla proprietà dei polinomi in una variabile[†]

$$\implies t - \frac{b}{a} \mid f$$

$$\implies f(t) = \left(t - \frac{b}{a} \right) g(t)$$

$$\begin{aligned} \implies F(x_0, x_1) &= x_0^d f \left(\frac{x_1}{x_0} \right) = x_0^2 \left(\frac{x_1}{x_0} - \frac{b}{a} \right) g \left(\frac{x_1}{x_0} \right) \\ &= \left(x_1 - \frac{b}{a} x_0 \right) \left[x_0^{d-1} g \left(\frac{x_1}{x_0} \right) \right] \\ &= (a x_1 - b x_0) \left[\frac{x_0^{d-1}}{a} g \left(\frac{x_1}{x_0} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\implies a x_0 - b x_1 \mid F. \quad \blacksquare$$

Definizione. (15.23) Diciamo che F si annulla in $p = (a : b)$ di ordine $m \in \mathbb{N}$ se

$$(a x_1 - b x_0)^m \mid F, \quad \wedge \quad (a x_1 - b x_0)^{m+1} \nmid F$$

[†] $f(t_0) = 0 \iff t - t_0 \mid f(t)$

Proprietà. (15.24) F ha al più d zeri su \mathbb{P}^1 , contati con molteplicità.

Proprietà. (15.25) Se $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1]$, allora F si fattorizza come il prodotto di fattori lineari, e ha esattamente d zeri su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, contati con molteplicità

Proprietà. (15.26) Se $F \in \mathbb{R}[x_0, x_1]$ e d è dispari, F ha sempre almeno uno zero nella retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

15.4 Fasci di coniche proiettive

(15.27) Siano \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 due coniche distinte in \mathbb{P}^2 di equazioni F_1, F_2^\dagger .

Il fascio di coniche generato da \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 è dato da tutte le coniche di equazione

$$\mathcal{F} : \underbrace{\lambda F_1 + \mu F_2}_{\mathcal{C}_{\lambda, \mu}} = 0$$

con $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$. Si ha quindi una corrispondenza biunivoca:

$$\mathcal{F} \xleftarrow{1:1} \mathbb{P}.$$

Esempio. (15.28) Siano

$$\mathcal{C}_1 : x_0 x_1 = 0, \quad \mathcal{C}_2 : (x_0 - x_1) x_2 = 0$$

entrambe coppie di rette

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\lambda, \mu} : \lambda x_0 x_1 + \mu (x_0 - x_1) x_2 &= 0 \\ \lambda x_0 x_1 + \mu x_0 x_2 - \mu x_1 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Definizione. (15.29) Una conica si dice degenere se non ha rango massimo, cioè

$$\text{rank} \in \{1, 2\}.$$

[†] \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 distinte $\implies F_1$ e F_2 non sono multipli

Coniche degeneri in un fascio. (15.30) Studiamo le coniche degeneri in un fascio \mathcal{F} .

- \mathcal{C}_1 ha matrice associata A_1 ;
- \mathcal{C}_2 ha matrice associata A_2 ;
- $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ ha matrice associata simmetrica di ordine 3×3

$$\lambda A_1 + \mu A_2$$

i cui elementi sono forme lineari omogenee in λ e μ .

$$\mathcal{C}_{\lambda,\mu} \text{ è degenere } \iff \det(\lambda A_1 + \mu A_2) = 0.$$

Sia $D(\lambda, \mu) := \det(\lambda A_1 + \mu A_2)$. $D(\lambda, \mu)$ è un polinomio omogeneo di grado 3 in λ, μ , oppure è il polinomio nullo (poiché è il prodotto di forme lineari omogenee).

Ci chiediamo quali siano gli zeri di $D(\lambda, \mu)$ su \mathbb{P}^1 con $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$.

Ci sono due possibilità:

1. $D(\lambda, \mu) \equiv 0$
 \implies tutte le coniche del fascio sono degeneri.
2. $D(\lambda, \mu)$ è omogeneo di grado tre
 \implies ci sono al più tre coniche degeneri (cioè al massimo tre zeri).

(15.31) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, allora c'è almeno una conica degenere.

Esempio. (15.32) Sia \mathcal{F} il fascio di coniche definito come

$$\mathcal{F} : \lambda x_0 x_1 + \mu x_0 x_2 - \mu x_1 x_2 = 0$$

Moltiplicando tutto per 2, otteniamo la matrice associata

$$M(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ \lambda & 0 & -\mu \\ \mu & -\mu & 0 \end{bmatrix} \quad D(\lambda, \mu) := \det(M(\lambda, \mu))$$

$$\begin{aligned} D(\lambda, \mu) &= -\lambda \begin{vmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & 0 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ \mu & -\mu \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \mu^2 - \lambda \mu^2 = -2\lambda \mu^2 \end{aligned}$$

\implies ci sono esattamente due coniche degeneri, corrispondenti a $\lambda = 0$ e $\mu = 0$.

15.4.1 Punti base e fasci di coniche in \mathbb{P}^5

Definizione. (15.33) *I punti base di un fascio di coniche sono i punti di \mathbb{P}^2 che appartengono a tutte le coniche del fascio. Se con \mathcal{C} indichiamo il supporto della conica del fascio, allora i punti base sono*

$$\bigcap_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} \mathcal{C} \subseteq \mathbb{P}^2$$

Osservazione. (15.34) I punti base sono dati da $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$

Dimostrazione di (15.34)

- Sicuramente $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 \supseteq \bigcap_{\mathcal{C} \in \mathcal{F}} \mathcal{C}$.
- Viceversa, se $p \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, allora

$$F_1(p) = F_2(p) = 0$$

$$\implies (\lambda F_1 + \mu F_2)(p) = 0$$

$$\implies p \in \mathcal{C}_{\lambda, \mu} \quad \forall (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1.$$

Osservazione. (15.35) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $F \in \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo di grado due, allora

$$F = a_{00} x_0^2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} x_0 x_1 + 2a_{02} x_0 x_2 + 2a_{12} x_1 x_2$$

Associamo alla conica di equazione $F = 0$ il punto

$$(a_{00} : a_{01} : a_{02} : a_{11} : a_{12} : a_{22}) \in \mathbb{P}^5$$

Infatti λF è la stessa conica di F

\implies valendo anche il viceversa, otteniamo una corrispondenza biunivoca tra le coniche in \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^5 .

(15.36) Dato un fascio \mathcal{F} generato da due coniche \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 ,

$$\mathcal{C}_1 : F_1 = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j \longleftrightarrow P_1 = (a_{00} : \cdots : a_{22}) \in \mathbb{P}^5$$

$$\mathcal{C}_2 : F_2 = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} x_i x_j \longleftrightarrow P_2 = (b_{00} : \cdots : b_{22}) \in \mathbb{P}^5$$

La generica conica del fascio $\mathcal{C}_{\lambda,\mu}$ ha equazione

$$\lambda F_1 + \mu F_2 = \sum_{i,j=0}^2 (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij}) x_i x_j \longleftrightarrow P_{\lambda,\mu} \in \mathbb{P}^5$$

con $P_{\lambda,\mu}$ di coordinate

$$P_{\lambda,\mu} = (\lambda a_{00} + \mu b_{00} : \cdots : \lambda a_{22} + \mu b_{22}) \in \mathbb{P}^5$$

Al variare di λ e μ , $P_{\lambda,\mu}$ definisce la retta $\overline{P_1 P_2} \subseteq \mathbb{P}^5$ in forma parametrica

\implies ogni fascio \mathcal{F} di coniche corrisponde ad una retta in \mathbb{P}^5 .

$$\begin{array}{ccc} \{\text{coniche su } \mathbb{P}^2\} & \xleftarrow{1:1} & \mathbb{P}^5 \\ \uparrow & & \\ \{\text{fasci di coniche}\} & \longleftrightarrow & \text{rette in } \mathbb{P}^5 \end{array}$$

Una retta in \mathbb{P}^5 è determinata da due suoi punti qualsiasi distinti

\implies il fascio \mathcal{F} è determinato da due qualsiasi sue coniche distinte[†].

Corollario. (15.37) Dato un fascio \mathcal{F} di coniche, i punti base si possono ottenere come

$$\mathcal{C} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$$

dove \mathcal{C} e $\widetilde{\mathcal{C}}$ sono due coniche qualsiasi del fascio, purché distinte.

Osservazione. (15.38) Sia \mathcal{F} un fascio. Allora c'è sempre una conica degenera \mathcal{C} che può essere:

- una coppia di rette;

[†] La scelta di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 dà diverse descrizioni parametriche del fascio.

- una retta doppia; un punto (su \mathbb{R} coppia di rette non reali).

Allora, usiamo \mathcal{C} per calcolare i punti base, calcolando $\mathcal{C} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$, dove \mathcal{C} è un'altra conica del fascio.

15.5 Intersezione tra una retta e una curva in \mathbb{P}^2

(15.39) Siano $r \subseteq \mathbb{P}^2$ retta, \mathcal{C} una curva di grado d in \mathbb{P}^2 , di equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Vogliamo intersecare r e \mathcal{C} (i loro supporti).

Scriviamo una parametrizzazione di r : siano $A, B \in r$ punti distinti, $A = [v]$, $B = [w]$, $v, w \in \mathbb{K}^3$.

$$P \in r \implies p = \lambda A + \mu B, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$$

$$\implies \mathcal{C} \cap r \text{ è data da } F(\lambda v + \mu w) = 0$$

$$F(\lambda v + \mu w) = F(\lambda v_0 + \mu w_0, \lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)^\dagger$$

Per v, w fissati, sia

$$G(\lambda, \mu) := F(\lambda v + \mu w), \quad G(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}[\lambda, \mu]$$

Allora, poiché le componenti di F sono forme lineari omogenee in λ e μ , si ha che G è un polinomio omogeneo di grado d oppure nullo.

I punti $P_{\lambda, \mu} \in r \cap \mathcal{C}$ corrispondono agli zeri di $G(\lambda : \mu)$ in \mathbb{P}^1 .

Abbiamo due possibilità:

1. $G \equiv 0 \iff r \subseteq \mathcal{C}$
2. $G \not\equiv 0 \implies$ ha un numero finito di zeri e ne ha al più d

$$\implies r \cap \mathcal{C} \text{ è finito e}$$

$$\#(r \cap \mathcal{C}) \leq d$$

dove d è il grado della curva.

Inoltre, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora $r \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ sempre.

Se G ha uno zero di molteplicità m ($\lambda_0 : \mu_0$) in \mathbb{P}^1 , diciamo che \mathcal{C} e r hanno molteplicità di intersezione m in P_{λ_0, μ_0} e si può dimostrare che questa molteplicità non dipende dalla parametrizzazione scelta per r .

[†] Forme lineari omogenee in λ e μ

(15.40) Se $r \not\subseteq \mathcal{C}$, r retta e \mathcal{C} conica, allora $r \cap \mathcal{C}$ è finita,

$$r \cap \mathcal{C} = \{p_0, \dots, p_k\}$$

Sia m_i la molteplicità di intersezione sui p_i , allora

$$\#(r \cap \mathcal{C}) \leq \sum_{i=1}^k m_i \leq d.$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, allora $\sum_{i=1}^k m_i = d$

$$\implies r \cap \mathcal{C} \neq \emptyset, \forall r, \mathcal{C}.$$

(15.41) Se \mathcal{C} è una conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, allora le posizioni tra retta e conica possono essere

- $r \subseteq \mathcal{C}$ (\mathcal{C} degenere);
- $r \cap \mathcal{C}$ è composto da due punti con molteplicità 1;
- $r \cap \mathcal{C}$ è composto da un punto con molteplicità 2;

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, invece, oltre ai tre casi precedenti c'è anche la possibilità

$$\mathcal{C} \cap r = \emptyset$$

Osservazione. (15.42) Se una conica \mathcal{C} contiene tre punti allineati, allora \mathcal{C} è degenere e contiene la retta per i tre punti.

Corollario. (15.43) Sia \mathcal{F} un fascio di coniche. Se i punti base sono finiti, allora sono al più 4.

Dimostrazione di (15.43) Sia \mathcal{C} una conica degenere in \mathcal{F} e $\widetilde{\mathcal{C}}$ un'altra conica del fascio, $\widetilde{\mathcal{C}} \neq \mathcal{C}$.

I punti base sono dati da $\mathcal{C} \cap \widetilde{\mathcal{C}}$ e sono finiti per ipotesi.

- Se $\mathcal{C} = l_1 \cup l_2$, con l_1, l_2 rette, allora

$$\mathcal{C} \cap \widetilde{\mathcal{C}} = (l_1 \cap \widetilde{\mathcal{C}}) \cup (l_2 \cap \widetilde{\mathcal{C}})$$

unione di due insiemi con cardinalità minore o uguale a due

$$\implies \#\mathcal{C} \cap \widetilde{\mathcal{C}} \leq 4.$$

- Se \mathcal{C} è una retta doppia o ha supporto un punto (rette complesse in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) si procede in modo simile. ■

Corollario. (15.44) Se due coniche \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 distinte non hanno una retta in comune, allora

$$\#(\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2) \leq 4$$

Dimostrazione di (15.44) $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ sono i punti base del fascio generato da \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 . ■

Osservazione. (15.45) Quanto visto dà anche un modo per calcolare $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$:

- scrivo il fascio;
- calcolo $D(\lambda, \mu)$;
- trovo una conica riducibile $\widetilde{\mathcal{C}}$;
- calcolo $\mathcal{C}_1 \cap \widetilde{\mathcal{C}}$

Proposizione. (15.46) Siano $A, B, C, D \in \mathbb{P}^2$ quattro punti in posizione generale. Allora la famiglia delle coniche passanti per i quattro punti forma un fascio \mathcal{F} di coniche, avente per punti base esattamente A, B, C, D .

Inoltre \mathcal{F} non contiene rette doppie, e contiene esattamente tre coniche degeneri:

- $\overline{AB} \cup \overline{CD}$;
- $\overline{AC} \cup \overline{BD}$;
- $\overline{AD} \cup \overline{BC}$;

Dimostrazione di (15.46) Siccome A, B, C, D sono in posizione generale, esistono coordinate su \mathbb{P}^2 tali che

$$A = (1 : 0 : 0), \quad B = (0 : 1 : 0), \quad C = (0 : 0 : 1), \quad D = (1 : 1 : 1)$$

Consideriamo una conica generale, e imponiamo il passaggio per i quattro punti:

$$a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

- passaggio per A : $a_{00} = 0$;
- passaggio per B : $a_{11} = 0$;
- passaggio per C : $a_{22} = 0$.

per cui l'equazione diventa

$$a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 + a_{12}x_1x_2 = 0.$$

Imponendo ancora il passaggio per D , otteniamo la condizione

$$a_{01} + a_{02} + a_{12} = 0$$

da cui

$$a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_2 - (a_{01} + a_{02})x_1x_2 = 0$$

che al variare di a_{01} e a_{02} sono tutte e sole le coniche per A, B, C, D .
Raccogliendo ottengo

$$a_{01}x_1 \underbrace{(x_0 - x_2)}_{C_1} + a_{02}x_2 \underbrace{(x_0 - x_1)}_{C_2}$$

che è il fascio di coniche generato da \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2

Si ha che $\mathcal{C}_1 = \overline{AC} \cup \overline{BD}$ e che $\mathcal{C}_2 = \overline{AB} \cup \overline{CD}$.

I punti base di \mathcal{F} sono dati da[†]

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 &= (\overline{AC} \cup \overline{BD}) \cap \overline{AB} \cup \overline{CD} \\ &= \dots = \{A, B, C, D\}. \end{aligned}$$

Per calcolare le coniche degeneri:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & 0 & -(a_{01} + a_{02}) \\ a_{02} & -(a_{01} + a_{02}) & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha che

$$\begin{aligned} D &= \det M \\ &= -a_{01} (a_{02} (a_{01} + a_{02})) + a_{02} (-a_{01} (a_{01} + a_{02})) \\ &= -2a_{01} a_{02} (a_{01} + a_{02}) \end{aligned}$$

Le tre coniche degeneri, quindi, sono

[†] Verificare per esercizio

- $a_{02} = 0 \rightsquigarrow \mathcal{C}_1$;
- $a_{01} = 0 \rightsquigarrow \mathcal{C}_2$;
- $a_{01} + a_{02} = 0, a_{02} = -a_{01} \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_3 : x_0 x_1 - \cancel{x_1 x_2} - x_0 x_2 + \cancel{x_1 x_2} &= 0 \\ x_0 (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned}$$

da cui $\mathcal{C}_3 = \overline{AD} \cup \overline{BC}$. ■

Osservazione. (15.47) Dati quattro punti in posizione generale A, B, C, D , per scrivere il fascio delle coniche per A, B, C, D : scriviamo due delle coniche degeneri; se

- l_1 retta \overline{AB} ;
- l_2 retta \overline{CD} ;
- l_3 retta \overline{AC} ;
- l_4 retta \overline{BD} ;

$$\rightsquigarrow \lambda l_1 l_2 + \mu l_3 l_4 = 0.$$

Osservazione. (15.48) Dato un fascio di coniche \mathcal{F} e un punto $p \in \mathbb{P}^2$ che non è un punto base per \mathcal{F} , allora $\exists!$ la conica \mathcal{C} del fascio che passa per p .

Dimostrazione di (15.48) Siano $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ due coniche che generano \mathcal{F} , di equazione

$$\mathcal{C}_1 : F_1 = 0, \quad \mathcal{C}_2 : F_2 = 0$$

Quindi si ha che

$$\mathcal{F} : \lambda F_1 + \mu F_2 = 0 \rightsquigarrow \mathcal{C}_{\lambda, \mu}, \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$$

si ha quindi che $p \in \mathcal{C}_{\lambda, \mu}$

$$\iff \lambda F_1(p) + \mu F_2(p) = 0.$$

p non è un punto base

$$\implies p \notin \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$$

$$\implies (F_1(p), F_2(p)) \neq (0, 0)$$

\implies l'equazione non è banale e $\exists!$ la soluzione in \mathbb{P}^1

$$(-F_2(p) : F_1(p))$$

■

Proposizione. (15.49) Dati 5 punti distinti in \mathbb{P}^2 a quattro a quattro non allineati, $\exists!$ la conica \mathcal{C} che li contiene.

Dimostrazione di (15.49) Possiamo sempre scegliere quattro dei cinque punti che siano in posizione generale. Infatti abbiamo tre posizioni possibili per i cinque punti:

1. in posizione generale;
2. solo tre allineati: A, B, C su una retta, e D, E no: A, B, D, E saranno in posizione generale;
3. due triplette allineate, con A che fa parte di entrambe le triplette: B, C, D, E sono ancora in posizione generale.

A meno di cambiare i nomi ai punti, supponiamo che A, B, C, D siano in posizione generale, e sia E il quinto punto.

Sia \mathcal{F} il fascio delle coniche per A, B, C, D . Sicuramente E non è un punto base,

$\implies \exists!$ la conica di \mathcal{F} che passa per E .

■

Osservazione. (15.50) Dato $p \in \mathbb{P}^2$

$$\begin{array}{ccc} \{\text{coniche su } \mathbb{P}^2\} & \xleftarrow{1:1} & \mathbb{P}^5 \ni (a_{00} : a_{01} : \dots) \\ \uparrow & & \\ \{\text{coniche passanti per } p\} & \xleftarrow{\quad} & \text{iperpiano in } \mathbb{P}^5 \end{array}$$

$$F = \sum a_{ij} x_i x_j, \quad p = (\overline{x}_0 : \overline{x}_1 : \overline{x}_2)$$

quindi il passaggio per p , $F(p) = 0$, equivale a

$$\sum a_{ij} \overline{x}_i \overline{x}_j = 0.$$

Il passaggio per un punto dà una condizione lineare sulle coniche.

Quindi il passaggio per cinque punti equivale a intersecare cinque iperpiani in \mathbb{P}^5 , ovvero cinque equazioni lineari in a_{00}, \dots, a_{22} (6 incognite)

\implies c'è sempre una conica per i cinque punti, ed è unica se i punti non sono troppo speciali.

Osservazione. (15.51) Dati cinque punti di cui quattro allineati su una retta r , \forall retta s passante per il punto non allineato, la conica $r \cup s$ contiene i cinque punti.

15.6 Intersezione tra una retta e una curva in \mathbb{K}^2

(15.52) Se $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ è una curva, r retta, $p \in \mathcal{C} \cap r$, sia m la molteplicità di intersezione tra r e \mathcal{C} in p (con $m = +\infty$ se $r \subseteq \mathcal{C}$).

Definizione. (15.53) Diciamo che r è tangente a \mathcal{C} in p se $m > 1$.

Come calcolare l'intersezione retta/curva e la molteplicità di intersezione nel piano affine \mathbb{K}^2 . (15.54) Sia \mathcal{C} una curva di grado d , e r una retta

$$\mathcal{C} : f(x, y) = 0, \quad f \in \mathbb{K}[x, y]$$

Considero una forma parametrica per r

$$\begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{K}$ e (v_1, v_2) direzione di r .

$\mathcal{C} \cap r$ sarà data da

$$g(t) := f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2), \quad g \in \mathbb{K}[t]$$

- I punti in $\mathcal{C} \cap r$ corrispondono alle radici di g .
- Se $p \in \mathcal{C} \cap r$, corrispondente a $t_0 \in \mathbb{K}$, la molteplicità di intersezione tra \mathcal{C} e r in p è la molteplicità di t_0 come radice di g .

Fatto. (15.55) Se $\overline{\mathcal{C}}$ è la chiusura proiettiva di \mathcal{C} in \mathbb{P}^2 e \bar{r} è la chiusura proiettiva di r in \mathbb{P}^2 , allora la molteplicità di intersezione tra $\overline{\mathcal{C}}$ e \bar{r} in p è uguale alla molteplicità di intersezione tra \mathcal{C} e r in p .

Diciamo che r è tangente a \mathcal{C} in p se $m > 1$.

(15.56) Studiamo quando r è tangente a \mathcal{C} in $p = (x_0, y_0)$.

La conica $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ ha polinomio

$$f(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Trasformo f per “centrarlo” in p :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j \\ &= \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} (x - x_0 + x_0)^i (y - y_0 + y_0)^j \\ &= \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=0}^i \binom{i}{k} x_0^{i-k} (x - x_0)^k \right) \cdot \left(\sum_{h=0}^j \binom{j}{h} y_0^{j-h} (y - y_0)^h \right) \\ &= \cdots = \sum_{k, h \geq 0} b_{k, h} (x - x_0)^k (y - y_0)^h \\ &= b_{00} + b_{10} (x - x_0) + b_{01} (y - y_0) + \text{termini di grado } > 1 \end{aligned}$$

dove $b_{00} = f(x_0, y_0) = f(p)$ e i $b_{h, k} \in \mathbb{K}$.

Si definiscono le derivate parziali formali $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{K}[x, y]$ seguendo le regole usuali formali di derivazione. Allora

$$b_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}(p), \quad b_{01} = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

Infatti

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k, h \geq 0} b_{k, h} (x - x_0)^k (y - y_0)^h \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \sum_{\substack{k \geq 1 \\ h \geq 0}} k b_{k, h} (x - x_0)^{k-1} (y - y_0)^h \end{aligned}$$

e dunque

$$b_{10} = \frac{\partial f}{\partial x}(p)$$

Ora supponiamo $p = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$

$$\implies f(p) = 0.$$

Sia r una retta per p con direzione $v = (v_1, v_2)$

$\implies p \in r \cap \mathcal{C}$, vediamo quando r è tangente a \mathcal{C} in p .

$$r : \begin{cases} x = x_0 + t v_1 \\ y = y_0 + t v_2 \end{cases} \quad p \longleftrightarrow t = 0$$

Scrivendo il poligono $g(t)$,

$$\begin{aligned} g(t) &= f(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2) \\ &= \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} (t v_1)^i (t v_2)^j \\ &= \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} v_1^i v_2^j t^{i+j} \\ &= b_{00} + (b_{10} v_1 + b_{01} v_2)t + \text{termini di grado } > 1 \text{ in } t \end{aligned}$$

Notiamo che $b_{00} = f(p) = 0$.

La molteplicità di intersezione tra r e \mathcal{C} in p è uguale alla molteplicità di $t = 0$ come radice di g .

La retta r è tangente a \mathcal{C} in p

$$\iff \text{la molteplicità è maggiore di uno}$$

$$\iff t^2 \mid g(t)$$

$$\iff b_{10} v_1 + b_{01} v_2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p) \cdot v_2 = 0$$

Questa si pone come una condizione sulla direzione v della retta (salvo il caso degenerare).

Abbiamo quindi due possibilità.

$$1. \frac{\partial f}{\partial x}(p) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(p)$$

\implies ogni retta passante per p è tangente a \mathcal{C} in p ; diremo allora che \mathcal{C} è singolare nel punto p .

$$2. \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p) \right) \neq \underline{0}$$

$\implies \exists!$ la retta tangente a \mathcal{C} in p ed è quella di direzione

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial x}(p) \right).$$

Diciamo che p non è singolare per \mathcal{C}

Esempio. (15.57) Se $f \in \mathbb{R}[x, y]$,

$$\mathcal{C} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0$$

è una curva di livello, con $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ .

$p \in \mathcal{C}$ è non singolare se $\nabla f(p) \neq \underline{0}$.

Esempio. (15.58) Se considero $f(x, y) = y^2 - x^2 - x^3$ e prendo

$$\mathcal{C} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0$$

si ha che $\nabla f(0, 0) = 0$, e quindi $\underline{0}$ è singolare.

Osservazione. (15.59) Se $p = (x_0, y_0)$ è non singolare, la retta tangente $T_p \mathcal{C}$ a \mathcal{C} in p ha equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p)(y - y_0) = 0 \quad (15.1)$$

15.7 Punti singolari in \mathbb{P}^2

Relazione di Eulero sui polinomi omogenei. (15.60) Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ di grado m . Si ha che

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \text{ omogeneo di grado } m - 1$$

e vale che

$$m \cdot F = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (15.2)$$

Dimostrazione di (15.60) Basta verificare questa proprietà per un monomio di grado m .

$$M = \lambda x_0^{i_0} \cdot x_n^{i_n}, \quad \sum_{j=0}^n i_j = m$$

Si ha che

$$\frac{\partial M}{\partial x_j} = \lambda i_j x_0^{i_0} \dots x_j^{i_j-1} \dots x_n^{i_n}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n x_j \frac{\partial M}{\partial x_j} &= \sum_{j=0}^n x_j \lambda i_j x_0^{i_0} \dots x_j^{i_j-1} \dots x_n^{i_n} \\ &= \sum_{j=0}^n \lambda i_j x_0^{i_0} \cdot x_n^{i_n} \\ &= \left(\sum_{j=0}^n i_j \right) M = m \cdot M \end{aligned}$$

Proposizione. (15.61) Sia \mathcal{C} in \mathbb{P}^2 una curva di equazione $F(x, y, z) = 0$, F omogenea di grado d . Sia $p \in \mathcal{C}$.

Allora p è non singolare per $\mathcal{C} \iff$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(p), \frac{\partial F}{\partial y}(p), \frac{\partial F}{\partial z}(p) \right) \neq (0, 0, 0)$$

In tal caso la retta tangente a \mathcal{C} in p è

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p) \cdot x + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \cdot y + \frac{\partial F}{\partial z}(p) \cdot z = 0$$

Dimostrazione di (15.61) Sia $U := \{z \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$,

$$P = (a : b : 1) \longleftrightarrow (a, b) \in \mathbb{K}^2.$$

Sia $f(x, y) := F(x, y, 1) \in \mathbb{K}[x, y]$ e sia \mathcal{C}_0 la curva affine in \mathbb{K}^2 di equazione $f(x, y) = 0$, $p = (a, b) \in \mathcal{C}_0$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ è la chiusura proiettiva di \mathcal{C}_0 .

Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, 1) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, 1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, 1) &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, 1) \end{aligned}$$

Dalla relazione di Eulero abbiamo che

$$d \cdot F = x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z}$$

Valutiamo in $(a, b, 1)$.

$$d \cdot \underbrace{F(a, b, 1)}_{=0} = a \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, 1) + b \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, 1) + \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, 1) = -a \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, 1) - b \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, 1)$$

Quindi p è non singolare per \mathcal{C} se e solo se (per definizione)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right) \neq (0, 0)$$

e dai risultati precedenti, questa condizione è equivalente (\iff) a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, 1), \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, 1), \frac{\partial F}{\partial z}(a, b, 1) \right) \neq (0, 0, 0).$$

Supponiamo che p non sia singolare. La retta tangente affine ha equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) = 0$$

La retta tangente proiettiva è la chiusura proiettiva, che ha equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - az) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - bz) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p) \cdot x + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \cdot y + z \cdot \left(-a \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, 1) - b \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, 1) \right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(p) \cdot x + \frac{\partial F}{\partial y}(p) \cdot y + \frac{\partial F}{\partial z}(p) \cdot z = 0$$

Punti singolari delle coniche. (15.62) Sia \mathcal{C} una conica in \mathbb{P}^2 . Allora

- $\text{rank } \mathcal{C} = 3 \implies \mathcal{C}$ non ha punti singolari;
- $\text{rank } \mathcal{C} = 2 \implies \mathcal{C}$ ha un unico punto singolare;
- $\text{rank } \mathcal{C} = 1 \implies \mathcal{C}$ è retta doppia, ogni punto è singolare.

Dimostrazione di (15.62) Sia F l'equazione di \mathcal{C} , con $A = (a_{ij})$ simmetrica

$$F = {}^t x A x = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} x_i x_j$$

Fissato $h \in \{0, 1, 2\}$ si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x_h} = \sum_{j=0}^2 a_{hj} x_j + \sum_{i=0}^2 a_{ih} x_i \stackrel{\dagger}{=} 2 \sum_{i=0}^2 a_{hi} x_i$$

$p = [v]$ è singolare per \mathcal{C}

$$\iff \frac{\partial F}{\partial x_h}(v) = 0, \forall h = 0, 1, 2$$

$$\iff \sum_{i=0}^2 a_{hi} v_i = 0, \forall h = 0, 1, 2$$

$$\iff \stackrel{\ddagger}{A} v = 0$$

$$\iff v \in \ker A \subseteq \mathbb{K}^3.$$

Quindi

- $\text{rank } A = 3$
 - $\implies \ker A = \{0\}$
 - \implies non ci sono punti singolari;
- $\text{rank } A = 2$
 - $\implies \dim \ker A = 1$
 - $\implies \exists! p$ punto singolare;

[†] Poiché A è simmetrica, $a_{hj} = a_{jh}$

[‡] Infatti, $\sum_{i=0}^2 a_{hi} v_i$ corrisponde all' h -esima riga del prodotto Av

- $\text{rank } A = 1$
- $\implies \dim \ker A = 2$ retta di punti singolari
- $\implies C$ retta doppia. ■

15.8 Altre proprietà dei fasci di coniche proiettive

Proposizione. (15.63) Sia $A, B, C \in \mathbb{P}^2$ tre punti non allineati, e sia r una retta tale che $A \in r$ e $B, C \notin r$.

Allora la famiglia delle coniche che passano per A, B, C e sono tangenti a r in A è un fascio di coniche \mathcal{F} .

- I punti base di \mathcal{F} sono A, B, C .
- Il fascio \mathcal{F} non contiene rette doppie, e contiene due coniche degeneri:
 - $r \cup \overline{BC}$;
 - $\overline{AB} \cup \overline{AC}$.

Dimostrazione di (15.63) Sia $p \in r$ diverso da A e tale che $p \notin \overline{BC}$.

$\implies A, B, C, P$ sono in posizione generale

\implies scegliamo le coordinate $(x_0 : x_1 : x_2)$ tali che

$$A = (1 : 0 : 0), \quad B = (0 : 1 : 0), \quad C = (0 : 0 : 1), \quad P = (1 : 1 : 1).$$

Si ha che $r = \overline{AP}$ ha equazione $x_1 - x_2 = 0$, quindi, considerando la generica conica \mathcal{C}

$$\mathcal{C} : a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

Imponendo il passaggio per A, B e C otteniamo

$$a_{00} = 0, \quad a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0.$$

da cui

$$\mathcal{C} : 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0$$

Intersechiamo con la retta r : $x_2 = x_1$ da cui

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : a_{01}x_0x_1 + a_{02}x_0x_1 + a_{12}x_1^2 &= 0 \\ x_1((a_{01} + a_{02})x_0 + a_{12}x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Pensiamo a $(x_0 : x_1)$ come coordinate su r . $x_0 = 0$ corrisponde ad

$$A = (1 : 0 : 0) \in r \cap \mathcal{C}$$

r è tangente a \mathcal{C} se e solo se anche la seconda soluzione da il punto A .

$$\iff a_{01} + a_{02} = 0 \implies a_{01} = -a_{02}$$

$$\implies a_{01} x_0 x_1 - a_{01} x_0 x_2 + a_{12} x_1 x_2 = 0$$

$$\mathcal{C} : a_{01} x_0 (x_1 - x_2) + a_{12} x_1 x_2 = 0$$

fascio di coniche generato da A, B, C, P

$$\begin{array}{ll} \mathcal{C}_1 : x_0 (x_1 - x_2) = 0 & \mathcal{C}_2 : x_1 x_2 = 0 \\ \overline{BC} \cup r & \overline{AC} \cup \overline{AB} \end{array}$$

I punti base di \mathcal{F} sono dati da

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2 = (\overline{BC} \cup r) \cap (\overline{AB} \cup \overline{AC}) = \{B, C, A\}$$

Inoltre

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & -a_{01} \\ a_{01} & 0 & a_{12} \\ -a_{01} & a_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} D = \det M = -a_{01}(a_{01} a_{12}) \\ \quad -a_{01}(a_{01} a_{12}) \\ \quad = -2a_{01}^2 a_{12} \end{array}$$

$\implies \mathcal{C}_1$ e \mathcal{C}_2 sono le uniche coniche degeneri in \mathcal{F} . ■

Parte V

Appendici

Categorie e Funtori

Definizione. (A.1) Una categoria \mathcal{C} consiste di

- i. una collezione di oggetti $\text{Ob}(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti oggetti di \mathcal{C} ;
- ii. per ogni coppia di oggetti X, Y di \mathcal{C} abbiamo un insieme

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

i cui elementi sono detti morfismi da X a Y ;

- iii. per ogni terna di oggetti X, Y e Z di \mathcal{C} abbiamo un applicazione

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

detta *composizione*.

Questi oggetti devono soddisfare le seguente proprietà:

- 1. la composizione è associativa;
- 2. per ogni oggetto X esiste un morfismo identità

$$\text{Id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$$

tale che, $\forall Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ll} \forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y): & f \circ \text{Id}_X = f \\ \forall g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X): & \text{Id}_X \circ g = g \end{array}$$

Nota. (A.2)

- 1. Si dimostra che Id_X è unica.

2. Un morfismo si dice isomorfismo se ha un inverso, cioè se per $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $\exists g$

$$g \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X) : \begin{array}{l} g \circ f = \text{Id}_X \\ f \circ g = \text{Id}_Y \end{array}.$$

In questo caso g è unica e si pone $g = f^{-1}$.

Due oggetti si dicono isomorfi se $\exists f$ isomorfismo.

Inoltre: relazione di equivalenza

Esempi di categorie. (A.3)

1. Categoria SET degli insiemi, in cui
 - oggetti: insiemi;
 - morfismi: applicazioni.
2. Categoria GR dei gruppi, in cui
 - oggetti: gruppi;
 - morfismi: morfismi di gruppi.
3. Categoria $\text{VECT}_{\mathbb{K}}$ (\mathbb{K} campo fissato), in cui
 - oggetti: spazi vettoriali su \mathbb{K} ;
 - morfismi: applicazioni lineari.
4. Categoria TOP degli spazi topologici, in cui
 - oggetti: spazi topologici;
 - morfismi: applicazioni continue.
5. Categoria TOP^* degli spazi topologici puntati, in cui
 - oggetti: coppia (X, x_0) , $x_0 \in X$;
 - morfismi:

$$f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$
 continua tale che $f(x_0) = y_0$.
6. Categoria KTOP, in cui

- oggetti: spazi topologici;
- morfismi: classi di omotopia di funzioni continue da X a Y .

7. Sia X uno spazio topologico fissato. Formiamo una categoria \mathcal{C}_X in cui

- oggetti: aperti di X ;
- morfismi: inclusioni, nel senso che, dati $U, V \subseteq X$ aperti di X :

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}_X} = \begin{cases} \emptyset & U \not\subseteq V \\ i : U \hookrightarrow V & U \subseteq V \end{cases}$$

Definizione. (A.4) Siano \mathcal{A}, \mathcal{B} due categorie. Un funtore covariante

$$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

è dato da

i. una funzione

$$\begin{aligned} F : \text{Ob}(\mathcal{A}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B}) \\ X &\mapsto F(X) \end{aligned}$$

ii. per ogni coppia di oggetti X, Y di \mathcal{A} , un'applicazione

$$\begin{aligned} F : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

che rispetta l'identità e la composizione, ovvero

- $\forall X \in \text{Ob}(\mathcal{A}), F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}$
- $\forall f \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y), g \in \text{Mor}_{\mathcal{A}}(Y, Z)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \swarrow g \\ & Z & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ & \searrow F(g \circ f) & \swarrow F(g) \\ & F(Z) & \end{array}$$

dove $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Definizione. (A.5) Siano \mathcal{A}, \mathcal{B} due categorie. Un funtore controvariante

$$F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$$

è dato da

i. una funzione

$$\begin{aligned} F : \text{Ob}(\mathcal{A}) &\rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B}) \\ X &\mapsto F(X) \end{aligned}$$

ii. per ogni coppia di oggetti X, Y di \mathcal{A} , un'applicazione

$$\begin{aligned} F : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)) \\ f &\mapsto F(f) \end{aligned}$$

tale che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \swarrow g \\ & Z & \end{array} \quad \longmapsto \quad \begin{array}{ccc} F(X) & \xleftarrow{F(f)} & F(Y) \\ & \nwarrow F(g \circ f) & \nearrow F(g) \\ & F(Z) & \end{array}$$

dove $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

Osservazione. (A.6) Un funtore porta

- isomorfismi in isomorfismi;
- oggetti isomorfi in oggetti isomorfi.

Esempi. (A.7)

1. Funtore covariante $F : \text{GR} \rightarrow \text{SET}$, funtore dimenticante, ad ogni gruppo associa lo stesso “gruppo” visto come insieme, e

$$\{\text{morfismo di gruppo}\} \mapsto \{\text{applicazione insiemistica}\}$$

2. Funtore controvariante

$$\begin{aligned} F : \text{VECT}_{\mathbb{K}} &\rightarrow \text{VECT}_{\mathbb{K}} \\ V &\mapsto V^* \\ (V \rightarrow W) &\mapsto (W^* \rightarrow V^*) \end{aligned}$$

3. Il gruppo fondamentale da un funtore covariante alla categoria degli spazi topologici puntati alla categoria dei gruppi:

$$\begin{aligned} \text{TOP}^* &\rightarrow \text{GR} \\ (X, x_0) &\mapsto \Pi(X, x_0) \\ (f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)) &\mapsto (f_* : \Pi(X, x_0) \rightarrow \Pi(Y, y_0)) \end{aligned}$$

Verifichiamo la funtorialità.

- Dato (X, x_0) ,

$$\begin{aligned} (\text{Id}_X)_* : \Pi(X, x_0) &\rightarrow \Pi(X, x_0) \\ [\alpha] &\mapsto [\text{Id}_X \circ \alpha] = [\alpha] \end{aligned}$$

$$\implies (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\Pi(X, x_0)}.$$

- Dati

$$(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$$

con f, g continue, applicando F ottengo:

$$\begin{array}{ccc} \Pi(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \Pi(Y, y_0) \\ & \searrow (g \circ f)_* & \swarrow g_* \\ & \Pi(Z, z_0) & \end{array}$$

Se $[\alpha] \in \Pi(X, x_0)$:

$$\begin{aligned} (f \circ g)_* ([\alpha]) &= [g \circ f \circ \alpha] \\ &= g_* ([f \circ \alpha]) \\ &= g_* (f_* ([\alpha])) \end{aligned}$$

Numero di Lebesgue

Definizione. (B.1) Sia (X, d) uno spazio metrico, $C \subseteq X$ sottoinsieme non vuoto e $x \in X$.

La distanza di x da C è

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y).$$

Proprietà. (B.2)

1. $d(x, C) \geq 0$, e

$$d(x, C) = 0 \iff x \in \overline{C}$$

Infatti $d(x, C) = 0 \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists y \in C : d(x, y) < \varepsilon.$$

2. La funzione “distanza da C ”,

$$\begin{aligned} X &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, C) \end{aligned}$$

è continua.

Infatti, siano $x, z \in X$, $y \in C$. Allora

$$\begin{aligned} d(x, C) &\leq d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \\ \implies d(x, C) - d(x, z) &\leq d(z, y), \quad \forall y \in C \\ \implies d(x, C) - d(x, z) &\leq d(z, C) \\ \implies d(x, C) - d(z, C) &\leq d(x, z) \end{aligned}$$

Scambiando il ruolo di x e z vediamo che

$$d(z, C) - d(x, C) \leq d(x, z)$$

$$\implies |d(x, C) - d(z, C)| \leq d(x, z)$$

\implies la funzione è continua.

Lemma del numero di Lebesgue. (B.3) Siano (X, d) uno spazio metrico compatto e \mathcal{A} un ricoprimento aperto di X .

Allora $\exists \delta > 0$ tale che per ogni palla aperta B in X di diametro minore di δ , $\exists U \in \mathcal{A}$ tale che $B \subseteq U$.

δ si chiama numero di Lebesgue del ricoprimento \mathcal{A} .

Dimostrazione di (B.3) X compatto

$\implies \mathcal{A}$ ammette un sottoricoprimento finito

$$\{U_1, \dots, U_n\}$$

$\forall j = 1, \dots, n$ sia $C_j = X \setminus U_j$ chiuso in X , e sia

$$f_j : X \rightarrow \mathbb{R}$$

la funzione distanza da C_j . f_j continua, ≥ 0 e si annulla esattamente su C_j .

Notiamo anche che

$$C_1 \cap \dots \cap C_n = \emptyset$$

Sia $f := \max(f_1, \dots, f_n)$

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \max(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

f continua e ≥ 0 .

Se $x \in X$ è tale che $f(x) = 0$

$$\implies f_j = 0, \forall j$$

$$\implies x \in C_j, \forall j$$

$$\implies x \in C_1 \cap \dots \cap C_n, \text{ assurdo}$$

$\implies f$ è sempre positiva,

\implies poiché X è compatto

$\implies f$ ha minimo δ su X .

Mostriamo che δ è il numero di Lebesgue per il ricoprimento.

Sia $B \subseteq X$ una palla aperta di diametro $< \delta$; sia $x_0 \in B$, e consideriamo

$$f(x_0) = \max(f_1(x_0), \dots, f_n(x_0)),$$

sia i tale che $f_i(x_0) = f(x_0) = d(C_i, x_0)$.

$$C \subseteq U_i \iff B \cap C_i = \emptyset;$$

Se $x_1 \in B$, allora $d(x_0, x_1) < \delta$

$\implies x_1 \notin C_i$, perché $d(x_0, y) \geq \delta, \forall y \in C_i$

$\implies B \cap C_i = \emptyset.$ ■

Corollario. (B.4) Sia X uno spazio topologico e $\alpha : I \rightarrow X$ un cammino. Sia \mathcal{A} un ricoprimento aperto di X .

Allora esiste una suddivisione finita

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k = 1$$

di $[0, 1]$ tale che $\forall i = 0, \dots, k-1$,

$$\exists U_i \in \mathcal{A} : \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq U_i$$

Dimostrazione. (B.5) I con la metrica euclidea è uno spazio metrico compatto. Sia

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \{\alpha^{-1}(U) : U \in \mathcal{A}\}$$

$\widetilde{\mathcal{A}}$ ricoprimento aperto di I .

Sia δ il numero di Lebesgue del ricoprimento $\widetilde{\mathcal{A}}$

\implies per ogni intervallo J aperto di $[0, 1]$ di ampiezza minore di δ ,

$$\exists U \in \mathcal{A} : J \subseteq \alpha^{-1}(U)$$

Scegliamo una partizione

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = 1$$

di $[0, 1]$ tale che

$$|t_{i+1} - t_i| < \delta, \quad \forall i$$

$\implies \exists \varepsilon > 0$ tale che

$$|(t_{i+1} + \varepsilon) - (t_i - \varepsilon)| < \delta, \quad \text{for all } i$$

$\implies (t_i - \varepsilon, t_{i+1} + \varepsilon)$ ha ampiezza minore di δ

$\implies \exists U_i \in \mathcal{A}$ tale che

$$\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq \alpha((t_i - \varepsilon, t_{i+1} + \varepsilon)) \subseteq U_i$$

■

Osservazione. (B.6) Se G è un gruppo e S è un suo sottoinsieme, diciamo che S genera G se ogni elemento di G si può scrivere come prodotto finito di elementi di S o di loro inversi.

Esercitazioni

C.1 Esercitazione 4

Teorema XLIV.

Sia X spazio topologico compatto e di Hausdorff. Sia $f : X \rightarrow Y$ identificazione, i.e.

- i.* f continua e suriettiva;
- ii.* $\forall B \subseteq Y, B$ aperto $\iff f^{-1}(B) \subseteq X$ è aperto.

Sono fatti equivalenti:

- (a) f è chiusa;
- (b) Y è di Hausdorff;
- (c) l'insieme

$$K = \{(x_1, x_2) \in X \times X : f(x_1) = f(x_2)\}$$

è chiuso in $X \times X$

Lemma. (C.1) Sia X spazio topologico, $C \subseteq X$ è chiuso

$\implies \pi : X \rightarrow X/C$ proiezione è chiusa.

Dimostrazione di (C.1) Devo dimostrare che $\forall K \subseteq X$ chiuso,

$$\pi^{-1}(\pi(K)) \text{ è chiuso in } X$$

- Caso 1: $K \cap C = \emptyset$

$$\implies \pi^{-1}(\pi(K)) = K \text{ chiuso.}$$

- Caso 2: $K \cap C \neq \emptyset$

$$\implies \pi^{-1}(\pi(K)) = K \cup C \text{ chiuso.}$$

■

C.2 Esercitazione 5

Esercizio. (C.2) Sia $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la sfera in \mathbb{R}^3 , $N = (0, 0, 1)$ il polo nord. Considero

$$\begin{aligned} f : S^2 \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ p &\mapsto Q \end{aligned}$$

dove Q è il punto costruito in questo modo: $\forall p \in S^2 \setminus \{N\}$

- costruisco la retta r che passa per p e N ;
- interseco r con il piano $z = 0$ e chiamo il punto di intersezione Q .

È richiesto di

1. Scrivere esplicitamente l'equazione di f .
2. Dimostrare che f è un omeomorfismo.

Soluzione. (C.2)

1. Scrivo l'equazione di f .
 - La retta passante per N e $p = (x_p, y_p, z_p)$ è

$$\begin{cases} x = \frac{z-1}{z_p-1} \cdot x_p \\ y = \frac{z-1}{z_p-1} \cdot y_p. \end{cases}$$

- Interseco la retta r con il piano $z = 0$, ottenendo il punto

$$\begin{cases} x = -\frac{x_p}{z_p-1} \\ y = -\frac{y_p}{z_p-1} \end{cases}$$

La funzione trovata, quindi, è

$$f : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_p, y_p, z_p) \longmapsto \left(-\frac{x_p}{z_p - 1}, -\frac{y_p}{z_p - 1} \right)$$

2. Dimostro che f è omeomorfismo.

- f è continua, in quanto ogni sua componente è una funzione razionale continua dove è definita.
- Dimostro che $\exists g := f^{-1}$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$$

$$Q \longmapsto g(Q)$$

continua trovando l'equazione esplicita:

- si traccia la retta per Q e N ;
- l'intersezione con S^2 è $g(Q)$

Riapplicando i passaggi di prima, si ottiene che

$$g(x, y, z) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

g continua $\implies f$ omeomorfismo. ■

Definizione. (C.3) *La funzione definita nella soluzione dell'esercizio (3.2) viene detta proiezione stereografica.*

C.3 Esercitazione 7

Proposizione. (C.4) Se X e Y sono spazi topologici contraibili, allora $X \times Y$ è spazio topologico contraibile.

Dimostrazione di (C.4) La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Riferimenti in bibliografia

- **Teorema III:** Teorema 3.7, [Man14].
- **Proprietà degli intorni. (1.40):** Esercizio 3.14, [Man14].
- **Lemma. (1.41):** Lemma 3.21, [Man14].
- **Teorema IV:** Teorema 3.26, [Man14].
- **Lemma. (1.47):** Lemma 3.25, [Man14].
- **Lemma. (2.8):** Lemma 3.55, [Man14].
- **Lemma. (2.13):** Lemma 3.59, [Man14].
- **Teorema VI:** Teorema 3.61, [Man14].
- **Esercizio. (3.11):** Esercizio 3.56, [Man14].
- **Teorema VIII:** Teorema 4.6, [Man14].
- **Teorema IX:** Teorema 4.7, [Man14].
- **Lemma. (3.19):** Lemma 4.9, [Man14].
- **Lemma. (3.26):** Lemma 4.10, [Man14].
- **Lemma. (3.30):** Lemma 4.13, [Man14].
- **Lemma. (3.33):** Lemma 4.16, [Man14].
- **Lemma. (3.36):** Lemma 4.4, [Man14].
- **Lemma. (3.37):** Lemma 4.23, [Man14].
- **Lemma. (3.38):** Lemma 4.22, [Man14].
- **Teorema XVI:** Teorema 4.41, [Man14].

- **Teorema XVII:** Teorema 4.41, [Man14].
- **Teorema XVIII:** Teorema 4.48, [Man14].
- **Teorema XXI:** Teorema 4.49, [Man14].
- **Teorema XXIII:** Teorema 4.50, [Man14].
- **Teorema XXIV:** Teorema 4.52, [Man14].
- **Lemma. (4.6):** Lemma 4.18, [Man14].
- **Lemma. (5.11):** Lemma 5.4, [Man14].
- **Proposizione. (8.15):** Lemma 4.46, [Man14].
- **Lemma. (11.5):** Lemma 14.2, [Kos88].
- **Lemma. (11.6):** Lemma 11.3, [Man14].
- **Proposizione. (11.7):** Proposizioni 11.4, 11.6, [Man14], oppure Lemmi 14.3, 14.4, 14.5, [Kos88].
- **Teorema XXVIII:** Teorema 15.12, [Kos88].
- **Teorema XXIX:** Teorema 11.22, [Man14].
- **Teorema XXX:** Teorema 11.25, [Man14].
- **Proposizione. (11.60):** Proposizione 11.17, [Man14].
- **Esercizio. (14.43):** Esercizio 2.1, [FFP11].
- **Lemma del numero di Lebesgue. (2.3):** Teorema 23.4, [Kos88].

Bibliografia

- [FFP11] Elisabetta Fortuna, Roberto Frigerio e Rita Pardini. *Geometria proiettiva. Problemi risolti e richiami di teoria*. Springer, 2011.
- [Kos88] Czes Kosniowski. *Introduzione alla topologia algebrica*. 1988.
- [Man14] Marco Manetti. *Topologia*. 2014.
- [Occ] Gianluca Occhetta. *Note di Topologia Algebrica e Analisi Complessa*. URL: <http://www.science.unitn.it/~occhetta/studenti/disgeoIII.pdf>.