h08:56

Lezione 1

Alessandro Ardizzoni

Calcolo proposizionale

Una proposizione é un'affermazione a cui è possibile attribuire un unico valore di verità:

Vero (V) oppure Falso (F).

Affermare una proposizione significa dichiarare che è vera.
Negarla vuol dire dichiarare che è falsa.

Non considereremo affermazioni del linguaggio comune che non siano trattabili attraverso dimostrazioni matematiche, come quelle di carattere estetico.

Esempio

- A: "7 è un numero dispari" (proposizione vera).
- B: "7 è un numero pari" (proposizione falsa).
- C: "7 è un" (non è una proposizione).
- D: "7 è un numero bello" (è una proposizione nel linguaggio comune ma non in quello matematico).

Connettivi Logici

I connettivi logici sono simboli che servono per costruire delle nuove proposizioni a partire da proposizioni date ed il cui valore di verità dipende esclusivamente da quello delle proposizioni di partenza.
I più usati sono

$$\wedge,\ \vee,\ \neg,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow .$$

Più precisamente, date due proposizioni A e B, definiamo le seguenti proposizioni composte:

Simbolo	Nome	Si legge
$A \wedge B$	congiunzione	A e B
$A \vee B$	disgiunzione	A o B
$\neg A$	negazione	non A
$A \Rightarrow B$	implicazione	A implica B
$A \Leftrightarrow B$	doppia implicazione (o bi-implicazione)	A se e solo se B

Un modo meccanico per descrivere i possibili valori di verità di una proposizione composta è attraverso la sua tavola di verità.

Ad esempio $A \wedge B$ è definita come quella proposizione che

è vera esclusivamente quando A e B sono entrambe vere.

La sua tavola di verità si ottiene considerando tutti i valori di verità di A e B ed il conseguente valore di verità di $A \wedge B$.

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

In modo analogo le altre tabelle definiscono le altre proposizioni composte.

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Dalle tabelle di sopra che qui riportiamo,

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

A	$\neg A$
V	F
F	V

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

deduciamo che

- $A \vee B$ è vera solo quando A è vera oppure B è vera (basta che sia vera una delle due).
- $\neg A$ è vera soltanto quando A è falsa.
- $A \Rightarrow B$ è falsa solo quando A è vera e B è falsa.
- $A \Leftrightarrow B$ è vera solo se A e B hanno lo stesso valore di verità (entrambe vere o entrambe false).

Nella proposizione $A \Rightarrow B$ a volte A è detto l'antecedente mentre B è detto il conseguente.

La tavola di verità ci dice che per dichiarare che $A \Rightarrow B$ sia vera basta supporre vera A e controllare che in tal caso sia vera anche B: infatti quando A è falsa allora $A \Rightarrow B$ è automaticamente vera.
Cerchiamo di capirlo meglio con un esempio.

Esempio

Consideriamo la frase

$$\text{se } \underbrace{n \text{ è pari}}_{A} \text{ allora } \underbrace{3n \text{ è pari}}_{B}.$$

In simboli, questa frase diventa $A \Rightarrow B$ che è ovviamente vera. Non controlliamo cosa succede se n non è pari (cioé se A è falsa): la frase non richiede nulla in tale circostanza e quindi resta vera.

Esempio

Nell'esempio precedente, allora $\neg A$ significa "n non è pari" cioè "n è dispari".

La frase $A \Rightarrow B$ non dice niente di quando A è falso, non richiede nulla, e pertanto resta vera.
(come per i teoremi, si parte dal presupposto che le ipotesi siano vere, se le ipotesi sono false il teorema perde di qualsiasi valore)

Due proposizioni A e B che abbiano gli stessi valori di verità in tutti i casi si dicono logicamente equivalenti e scriveremo in tal caso $A \equiv B$.

Osservazione

Allora $A \equiv B$ esattamente quando $A \Leftrightarrow B$ è vera.

Esercizio

Scrivere la tavola di verità di $(\neg A) \vee B$ e stabilire $(\neg A) \vee B \equiv A \Rightarrow B$.

Soluzione

Scriviamo le colonne di A e B, poi quella di $\neg A$ ed infine quella di $(\neg A) \vee B$ sfruttando le due colonne precedenti:

A	B	$\neg A$	$(\neg A) \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Confrontando le tavole di verità, è chiaro che $(\neg A) \vee B \equiv A \Rightarrow B$.

Osservazione

Per l'esercizio precedente le proposizioni $(\neg A) \vee B$ e $A \Rightarrow B$ sono logicamente equivalenti. Pertanto $\Rightarrow$ si poteva definire usando $\neg$ e $\vee$.

Osservazione

Notiamo che abbiamo usato delle parentesi per non confondere $(\neg A) \vee B$ con $\neg(A \vee B)$. In realtà esistono regole di precedenza tra gli operatori in base alle quali $\neg A \vee B$ significa $(\neg A) \vee B$: l'operatore $\neg$ ha la precedenza su $\wedge$ e $\vee$ cioé si applica per primo.

Esempio

Una frase come "*ho studiato* *ma* *non ho superato l'esame*" può essere espressa attraverso i connettivi che abbiamo introdotto. Ad esempio indicando con A l'affermazione "ho studiato" e con B l'affermazione "ho superato l'esame", potremmo scrivere $A \wedge (\neg B)$. Chiaro però che abbiamo perso completamente la delusione espressa da quel "ma" dell'affermazione originale. Un discorso analogo si può fare per altre congiunzioni come "eppure" o "sebbene".

Esercizio (per casa)

ESERCIZIO

Se A, B e C sono proposizioni, dimostrare le seguenti equivalenze.

1. $\neg(\neg A) \equiv A$ *(legge della doppia negazione);*
2. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \equiv (A \Leftrightarrow B)$;
3. $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(legge di contrapposizione);*
4. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ *(proprietà commutativa);*
5. $A \vee B \equiv B \vee A$ *(proprietà commutativa);*
6. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ *(proprietà associativa);*
7. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ *(proprietà associativa);*
8. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *(proprietà distributiva);*
9. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ *(proprietà distributiva);*
10. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$ *(legge di De Morgan);*
11. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$ *(legge di De Morgan).*

Dimostrazione per contrapposizione: l'equivalenza 3 mostra che dimostrare che vale $A \Rightarrow B$ è come dimostrare che vale $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Quantificatori.

Le proposizioni possono contenere variabili. Consideriamo le seguenti frasi.

- $P(x)$: x è un numero dispari. *(sottinteso: x è un numero naturale)*
- $P(x,y)$: $x \leq y$. *(sottinteso: x e y sono numero reali)*

Queste frasi non sono vere oppure false: dipende dal valore assunto dalle variabili. Non sono quindi proposizioni. Definiamo i quantificatori $\forall, \exists$.

Simbolo	Nome	Si legge
$\forall$	quantificatore universale	per ogni
$\exists$	quantificatore esistenziale	esiste (almeno un)

Mostriamo l'uso dei quantificatori sui due esempi di sopra.

Proprietà	Si legge	valore di verità
$\forall x\, P(x)$	per ogni x si ha che x è un numero dispari	F
$\exists x\, P(x)$	esiste x tale che x è un numero dispari	V
$\forall x\, \exists y\, P(x,y)$	per ogni x, esiste y tale che $x \leq y$	V
$\exists y\, \forall x\, P(x,y)$	esiste y tale che per ogni x si abbia $x \leq y$	F

La prima affermazione significa che "tutti i numeri sono dispari" e la seconda che "almeno un numero è dispari". Le ultime dicono che il significato può cambiare se si cambia l'ordine dei quantificatori.

Spesso si usa anche il simbolo $\exists!$ per dire "esiste un unico".

Esercizio (per casa) ESERCIZIO

Stabilire il significato e, se possibile, il valore di verità delle espressioni

$$\forall x\, \exists y\, P(x,y) \quad e \quad \exists y\, \forall x\, P(x,y)$$

nei casi seguenti.

- $P(x,y):\quad x-y=3.$
- $P(x,y):\quad x$ *è il padre di* y. *(sottinteso: x e y sono persone)*
- $P(x,y):\quad x$ *è figlio di* y.
- $P(x,y):\quad x$ *ha votato* y *alle elezioni.*

La seguente osservazione mostra come $\neg$ scambi i quantificatori $\forall$ ed $\exists$.

Osservazione

Data una proprietà $P(x)$, valgono le seguenti equivalenze.

1. $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, (\neg P(x))$;
2. $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, (\neg P(x))$.

Infatti:

1 Negare $\forall x\, P(x)$ significa dire che

non tutti gli x rendono vera la proprietà $P(x)$,

cioé

c'è almeno un x per cui non vale $P(x)$,

in simboli $\exists x\, (\neg P(x))$. Pertanto $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, (\neg P(x))$.

2 Si ha che

$$\forall x\, (\neg P(x)) \equiv \neg\neg(\forall x\, (\neg P(x))) \equiv \neg(\exists x\, \neg(\neg P(x))) \equiv \neg(\exists x\, P(x)).$$

Esempio

Consideriamo la frase

- $P(x):\quad x$ ha superato l'esame. *(sottinteso: x è uno studente)*

Allora $\forall x\, P(x)$ si legge

"tutti hanno superato l'esame".

Invece $\neg(\forall x\, P(x))$ si legge

"non è vero che tutti hanno superato l'esame"

cioé

"esiste qualcuno che non ha superato l'esame"

vale a dire $\exists x\, (\neg P(x))$.

Insiemi

I concetti di insieme, elemento di un insieme ed appartenenza di un elemento ad un insieme saranno da noi considerati come primitivi, acquisiti. Diciamo solo intuitivamente che un insieme è una collezione di oggetti che chiameremo elementi dell'insieme.

Esempio

La collezione di tutti i numeri interi divisibili per 3 è un esempio di insieme.

Ci occuperemo solo di insiemi definibili con il linguaggio matematico.

Esempio

La collezione di tutti i film belli non è un insieme matematico.

Notazione per gli insiemi: $A, B, C, \ldots$ (lettere maiuscole).
Notazione per gli elementi: $a, b, c \ldots$ (lettere minuscole).
Se a è elemento dell'insieme S, scriveremo $a \in S$ e diremo "*a appartiene ad S*" In luogo di $\neg(a \in S)$ scriveremo $a \notin S$ e diremo "*a non appartiene ad S*".

Esempio

Alcuni esempi noti (che per ora prendiamo per aquisiti):

- $\mathbb{N} =$ insieme dei numeri naturali,
- $\mathbb{Z} =$ insieme dei numeri interi,
- $\mathbb{Q} =$ insieme dei numeri razionali,
- $\mathbb{R} =$ insieme dei numeri reali.

Un insieme può essere dato elencando i suoi elementi tra parentesi graffe.

Esempio

Ad esempio $A = \{0, 1\}$ oppure $B = \{\mathbb{Z}, \emptyset, 1, \pi, \{a, b\}, \infty\}$.

Oppure si può formare un insieme scegliendo elementi di un altro insieme (a volte sottinteso, se chiaro dal contesto) che soddisfano certe proprietà.

Esempio

$P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è multiplo di due}\} =$ numeri pari. La barra verticale si legge "tale che". Sta ad indicare che si suppone vera l'affermazione seguente. A volte viene sostituita con i due punti.

Scriveremo $A = B$ se gli insiemi A e B contengono gli stessi elementi. Diremo in tal caso che *"A è uguale a B"*. In simboli

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

In luogo di $\neg(A = B)$ scriveremo $A \neq B$ e diremo *"A è diverso da B"*.

Esempio

Valgono le seguenti uguaglianze

$$\{1, 1, 2\} = \{1, 2\} = \{2, 1\}.$$

Quindi in un insieme non contano le ripetizioni (possiamo eliminare i doppioni e l'insieme resta lo stesso) e non conta l'ordine dei suoi elementi.

Diremo che un *"insieme è vuoto"* se non contiene elementi. C'è un unico insieme vuoto. Infatti se A e B sono insiemi vuoti allora hanno entrambi gli stessi elementi, cioé nessuno, e quindi $A = B$. L'unico insieme vuoto si indica con $\emptyset$ oppure con $\{\ \}$. L'affermazione $\exists x, x \in \emptyset$ è falsa. Equivalentemente $\forall x, x \notin \emptyset$ è vera. In effetti

$$\neg(\exists x, x \in \emptyset) \equiv (\forall x, \neg(x \in \emptyset)) \equiv (\forall x, x \notin \emptyset).$$

Esempio

L'insieme $\{n \in \mathbb{N} \mid n+1=0\}$ è vuoto.

Scriveremo $A \subseteq B$ se tutti gli elementi di A stanno anche in B, in simboli

$$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Diremo in tal caso che *"A è sottoinsieme di B"* oppure che *"A è contenuto in B"* o ancora che *"B contiene A"*.
Il simbolo $\subseteq$ prende il nome di inclusione.
Invece di $\neg(A \subseteq B)$ scriveremo $A \nsubseteq B$ e diremo "*A non è contenuto in B*".

Esempio

Si ha che $\{1,5,7\} \subseteq \{1,2,5,7,8\}$.

Esempio

Notiamo la differenza tra i simboli di appartenenza ed inclusione:

$1 \in \{1,2\}$, $1 \nsubseteq \{1,2\}$, $\{1\} \subseteq \{1,2\}$, $\{1\} \notin \{1,2\}$, $\{1\} \in \{1,\{1\}\}$, $\{1\} \subseteq \{1,\{1\}\}$.

Esempio

Notiamo che $\emptyset \subseteq A$ per ogni insieme A. Infatti ciò significa $\forall x(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$. Siccome l'antecedente $x \in \emptyset$ è sempre falsa, allora l'implicazione è vera a prescindere dalla veridicità del conseguente $x \in A$.

Esempio

Per ogni insieme A si ha $A \subseteq A$.

Quindi ogni insieme A ha almeno due sottoinsiemi, cioé $\emptyset$ e A.

Lemma

Si ha che

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \qquad \textit{(criterio della doppia inclusione).}$$

Proof.

$A = B$ significa che vale $\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ cioé $\forall x((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$, cioé $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$. □

Diremo che *"A è un sottoinsieme proprio di B"* se $A \subseteq B$ e $A \neq B$. In questo caso scriveremo $A \subsetneq B$ oppure $A \subset B$. ESEMPI: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

Definiamo l'insieme delle parti di un insieme A come l'insieme

$$P(A) := \{S \mid S \subseteq A\}.$$

Quindi è l'insieme formato da tutti i sottoinsiemi di A.

Osservazione

Siccome $\emptyset \subseteq A$ e $A \subseteq A$, abbiamo $\emptyset \in P(A)$ e $A \in P(A)$.

Ecco alcuni esempi di un insieme A e del suo insieme delle parti $P(A)$.

A	$P(A)$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\{1\}$	$\{\emptyset,\{1\}\}$
$\{1,2\}$	$\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$
$\{1,2,3\}$	$\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

In tutti questi casi, se A contiene n elementi distinti allora $P(A)$ ne contiene 2^n. Vedremo che è un fatto generale.