5. Sia B l'insieme dei barbieri di Lodi che radono la barba a quelli e soltanto a quelli che non se la radono da soli.

Dimostrare che o $B=\emptyset$, oppure i barbieri appartenenti a B hanno barbe ... chilometriche.

6. Quale dei seguenti enunciati è vero?

a) $A \supset B$ e $C \cap A \notin \emptyset \Longrightarrow C \cap B = \emptyset$;

b) $A \supset B \cap C$ e $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow B \cap C = \emptyset$;

c) $(A \cap B)\backslash C = (A \cap C)\backslash(B \cap C)$.

3. RELAZIONI

3.1 Prodotto cartesiano

In maniera intuitiva introduciamo la nozione di **coppia ordinata**. Presi due insiemi A e B (non necessariamente distinti) indichiamo con (a, b) l'insieme costituito prendendo due elementi $a \in A$ e $b \in B$ nell'ordine indicato. Sia (a', b') un'altra coppia, $a' \in A$, $b' \in B$. Definiamo l'uguaglianza tra coppie ordinate ponendo

$$(a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow (a = a') \wedge (b = b').$$

Perciò è chiaro che (a, b) non va confusa con la coppia (non ordinata) $\{a, b\}$, cioè l'insieme dei due elementi $a \in A$, $b \in B$, che può essere anche indicato con $\{b, a\}$ poiché non importa l'ordine con cui si elencano gli elementi di un insieme.

Definizione 3.1 *L'insieme delle coppie ordinate (a, b) ottenute prendendo $a \in A$ e $b \in B$ si indica con $A \times B$ e si chiama* ***prodotto cartesiano*** *(o semplicemente prodotto) di A per B:*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

È chiaro che, se A è diverso da B, questo prodotto non è commutativo e cioè $A \times B \neq B \times A$; nel caso $A = B$ esso si indicherà semplicemente con A^2.

Esempio 3.1 Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (insieme dei numeri reali), le coppie (a, b) si possono rappresentare come punti del piano, convenendo che il primo elemento della coppia sia l'ascissa e il secondo l'ordinata. Allora, sia A l'insieme dei numeri compresi tra 0 e 1 e B l'insieme dei numeri compresi tra 1 e 2; la Figura 1.4 illustra gli insiemi $A \times B$, $B \times A$, A^2.

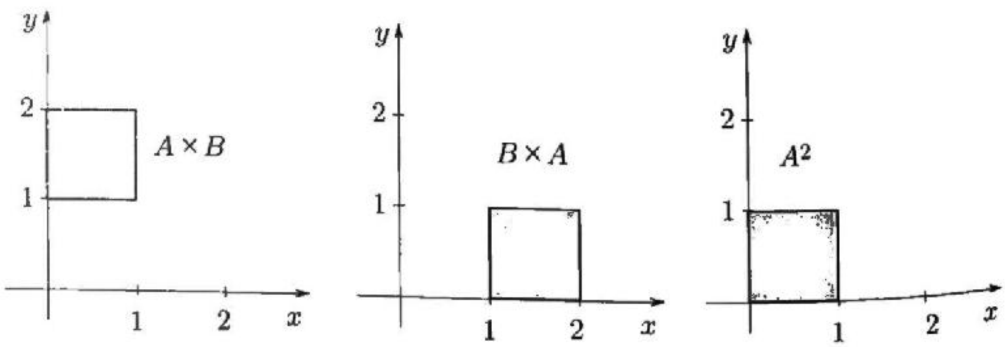

Figura 1.4. Il prodotto cartesiano degli insiemi A e B nell'Esempio 3.1.

La definizione si estende poi in maniera ovvia al caso di più di due fattori:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

è l'insieme delle n-uple ordinate $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ con $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Lo studente mostri che, per questo prodotto, valgono la proprietà associativa e la proprietà distributiva rispetto all'unione, intersezione e differenza.

3.2 Definizione di relazione

Definizione 3.2 *Siano X e Y due insiemi. Una* ***relazione binaria*** *(o corrispondenza) tra gli elementi di X e Y è un predicato binario $r(x,y)$ nelle variabili $x \in X$ e $y \in Y$. Se $r(x,y)$ è vera, si dice che x e y sono in relazione tra loro.*

Se $X = Y$, diremo semplicemente che r è una relazione tra gli elementi di X.

Sia R il sottoinsieme di $X \times Y$ costituito dalle coppie (x,y) per cui la relazione è vera:

$$R := \{(x,y) \overset{\text{t.c.}}{:} (x,y) \in X \times Y \wedge r(x,y)\}.$$

R si chiama *grafico* della relazione e si indica con $\text{graf}(r)$. Per indicare che x e y sono legati dalla relazione r scriveremo

$$(x,y) \in \text{graf}(r).$$

Viceversa, dato un insieme $R \subseteq X \times Y$, risulta individuata la relazione r definita da:

$$\text{“}r(x,y) \text{ vera se e solo se } (x,y) \in R\text{”}.$$

Evidentemente il grafico di questa relazione coincide con R.

In ultima analisi, una relazione binaria r in $X \times Y$ è identificabile con un sottoinsieme di $X \times Y$, il grafico di r.

Nella lingua parlata “x è fratello di y”, “x abita nella città y”, “x è iscritto alla facoltà y”, ecc., sono esempi evidenti di relazioni. A noi interessano le relazioni espresse nel linguaggio della teoria degli insiemi.

Esempi

3.2 X è l'insieme dei punti del piano, Y l'insieme delle rette del piano: una relazione in $X \times Y$ è quella di appartenenza del punto alla retta.

3.3 Dato un insieme U, sia $X = Y = \mathcal{P}(U)$. Allora se $A, B \in \mathcal{P}(U)$ il predicato $r(A,B)$: “$A \subseteq B$” esprime una relazione in $\mathcal{P}(U)$.

Se $U = \{a, b\}$ invitiamo il lettore a rappresentare schematicamente con un disegno il grafico della relazione.

3.4 Sia X l'insieme degli interi positivi. Esempi di relazioni in X sono:

$$\begin{aligned} r(m,n)&: \quad \text{“}m \text{ ed } n \text{ sono primi tra loro”;} \\ s(m,n)&: \quad \text{“}m \text{ è divisore di } n\text{”;} \\ t(m,n)&: \quad \text{“}m^2 + n^2 = \text{quadrato di un intero”.} \end{aligned}$$

Invitiamo il lettore a farsi un'idea del grafico di queste relazioni, magari limitandosi a considerare gli interi compresi tra 1 e 100.

3.5 Sia X l'insieme dei numeri reali. Esempi di relazioni in X sono:

$$“x \le y”, \quad “x^2 + y^2 + 1 = 0”, \quad “(\sin x)^2 + (\cos y)^2 = 1”.$$

Qual è il loro grafico? (Quando il grafico è vuoto, la relazione è detta *impossibile*).

Sono di grande importanza due speciali tipi di relazioni definite fra gli elementi di uno stesso insieme: le **equivalenze** e gli **ordinamenti**.

3.3 Equivalenze

DEFINIZIONE 3.3 *Diciamo che r è una* ***relazione di equivalenza*** *(o semplicemente un'equivalenza) in X e la indicheremo col simbolo $x \approx y$ (si legge: x è equivalente a y), se verifica le proprietà:*

riflessiva	$\forall x \in X : x \approx x$
simmetrica	$\forall x \in X, \forall y \in X : x \approx y \iff y \approx x$
transitiva	$\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X : (x \approx y) \wedge (y \approx z) \Longrightarrow x \approx z.$

L'importanza di una simile relazione sta nel fatto che essa realizza, sull'insieme in cui è definita, una **partizione**. Definiamo cosa si intende con questo.

DEFINIZIONE 3.4 *Sia X un insieme non vuoto. Una* ***partizione*** *di X, che indicheremo con S, è una famiglia di sottoinsiemi di X, ovvero un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$, tale che:*

i) *ogni elemento A di S è non vuoto;*

ii) *se $A_1 \in S$, $A_2 \in S$ e $A_1 \notin A_2$, allora $A_1 \cap A_2 = \varnothing$;*

iii) $\displaystyle\bigcup_{A \in S} A = X$.

Il simbolo $\displaystyle\bigcup_{A \in S} A = X$ indica l'unione degli insiemi A, al variare di A nella famiglia S.
Per esempio, se X è l'insieme degli interi positivi, una sua partizione si ha prendendo $S = \{P, D\}$ dove P è l'insieme dei numeri pari e D l'insieme di quelli dispari.

Se in X è data una equivalenza r, indichiamo con $[x]$ l'insieme di tutti gli elementi di X equivalenti a x, cioè

$$[x] := \{y : (y \in X) \wedge (x \approx y)\};$$

$[x]$ è detta **classe di equivalenza** di x.

■ **TEOREMA 3.1** *Stabilita in un insieme non vuoto X una relazione di equivalenza, la famiglia $\{[x] : x \in X\}$ delle classi di equivalenza costituisce una partizione di X.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che valgono le proprietà i) ii) iii) sopra menzionate.

La i) è evidente poiché $[x]$ contiene almeno x.

Per mostrare la ii) procediamo per assurdo: supponiamo che due classi di equivalenza distinte $[x]$ e $[y]$ abbiano un elemento in comune: z; sarebbe allora $x \approx z$ e $y \approx z$ e perciò, per la proprietà transitiva, $x \approx y$; qualunque altro elemento $x' \in [x]$, essendo equivalente a

x, sarebbe perciò equivalente a y e qualunque altro elemento $y' \in [y]$, essendo equivalente a y, sarebbe perciò equivalente a x, da cui seguirebbe $[x] = [y]$ contro l'ipotesi.

La iii) è pure evidente, poiché un qualsiasi elemento di X appartiene alla classe che egli stesso individua. □

Possiamo così affermare che: *ogni elemento $x \in X$ sta in una e una sola classe di equivalenza.* La partizione determinata su X dall'equivalenza r prende un nome speciale: viene detta **insieme quoziente** di X rispetto a r e viene indicata col simbolo X/r.

Insieme di tutte le classi di equivalenza dell'insieme X

È anche immediato constatare che, assegnata una partizione S su X, questa determina univocamente una equivalenza r, tale che $S = X/r$. Tale equivalenza è definita da:

$$\text{“}x \approx y \iff x \text{ e } y \text{ appartengono allo stesso elemento di } S\text{”}.$$

Esempi

3.6 La relazione di uguaglianza, già introdotta in 2.1, è evidentemente una equivalenza; in questo caso le classi $[x]$ contengono solamente l'elemento x.

3.7 In algebra e in teoria dei numeri hanno grande importanza le **classi di resti modulo m**, definite dalla seguente equivalenza.

Sia $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi relativi $(0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ e sia m un intero fissato ≥ 1; consideriamo il predicato binario

$$r(x, y) : \text{“}x - y \text{ è divisibile per } m\text{”}.$$

È facile verificare (esercizio) che r è una relazione di equivalenza in $\mathbb{Z}$. Ogni classe è composta da numeri che, divisi per m, danno lo stesso resto; da qui la terminologia.

[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
−15	−14	−13	−12	−11
−10	−9	−8	−7	−6
−5	−4	−3	−2	−1
0	**1**	**2**	**3**	**4**
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Figura 1.5. Le classi di resti modulo 5.

Se $m = 1$, la r definisce una sola classe che contiene tutti gli interi.

Se $m = 2$, la r definisce due classi, una formata dai numeri pari, l'altra dai dispari.

Se $m = 3$, la r definisce 3 classi: quella dei multipli di 3, quella dei (multipli di 3)+1, quella dei (multipli di 3)+2.

3.8 Nella geometria euclidea sono, per esempio, relazioni di equivalenza il *parallelismo* tra le rette di un piano e la *similitudine* tra i poligoni di un piano; ricordiamo