

Analisi Matematica 1 A

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

1 Insiemi

20 set 2021

Gli insiemi numerici a cui siamo abituati da sempre sono

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{r = \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m, n \text{ primi tra loro}\right\}\end{aligned}$$

Per l'insieme \mathbb{Q} esiste una rappresentazione decimale:

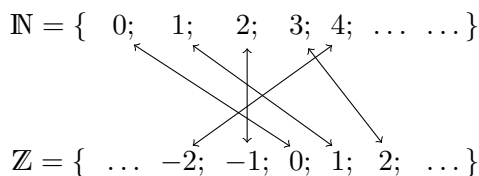
$$r = n, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_j \dots$$

con $n \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. " $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_j \dots$ " prende il nome di allineamento periodico (o finisce o si ripete all'infinito).

1.1 Corrispondenza biunivoca

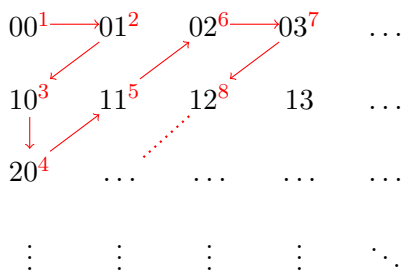
Due insiemi *finiti* possono essere messi in corrispondenza biunivoca se e solo se hanno lo stesso numero di oggetti.

1.1.1 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$



1.1.2 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

In rosso è segnato l'insieme \mathbb{N} , mentre in nero le coppie di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, che sono state ordinate dalle frecce rosse:



In generale, se $K \leftrightarrow \mathbb{N}$ (dove \leftrightarrow si legge "in corrispondenza biunivoca")
 \implies

$$K \leftrightarrow K \times K = K^2$$

$$K \leftrightarrow K \times K \times K = K^3$$

$$K \leftrightarrow K \times K \times \cdots \times K = K^n$$

Definizione Un insieme A è detto *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con \mathbb{N}

Gli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} e \mathbb{N}^n , \mathbb{Z}^n , \mathbb{Q}^n sono numerabili

1.2 Insieme \mathbb{R}

21 set 2021

Proposizione p.i Sia d la diagonale del quadrato di lato 1, ovvero $d^2 = 2$.
 $d \notin \mathbb{Q}$

dim. (p.i) Assumiamo per assurdo che $d \in \mathbb{Q}$

$$\implies \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ primi tra loro tali che } d = \frac{m}{n}$$

$$\implies \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\implies m^2 = 2n^2$$

$$\implies m^2 \text{ è pari} \implies m \text{ è pari}^1$$

$$\implies \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } m = 2k$$

$$\implies m^2 = 4k^2$$

$$\implies 2n^2 = 4k^2$$

$$\implies n^2 = 2k^2$$

$$\implies n^2 \text{ è pari} \implies n \text{ è pari;}$$

si ha contraddizione dell'ipotesi che m, n fossero primi tra di loro (in quanto entrambi pari hanno almeno un divisore in comune, ovvero 2). \square

Proposizione p.ii $m \in \mathbb{Z}$, m^2 pari $\implies m$ pari

¹ dimostrazione successiva

dim. (p.ii) Per assurdo, assumiamo m dispari

$$\implies \exists k \in \mathbb{Z} | m = 2k + 1$$

$$\implies m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\implies m^2 = \underbrace{4k(k + 1)}_{\text{pari}} + 1$$

$$\implies m^2 \text{ è dispari.}$$

Si ha contraddizione, pertanto m è pari. \square

Dal momento che si è utilizzata nelle ultime dimostrazioni, è bene aprire una parentesi sulle *dimostrazioni per assurdo*

Schema dimostrativo per assurdo

Proposizione p.iii (schema I) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \stackrel{?}{\iff} ((p \wedge \neg q) \implies \neg p)$$

dim. (p.iii)

| p | q | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \implies q$ | $p \wedge \neg q$ | $(p \wedge \neg q) \implies \neg p$ |
|-----|-----|----------|----------|----------------|-------------------|-------------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. \square

Proposizione p.iv (schema II) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \stackrel{?}{\iff} ((p \wedge \neg q) \implies q)$$

dim. (p.iv)

| p | q | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $p \implies q$ | $(p \wedge \neg q) \implies q$ |
|-----|-----|----------|-------------------|----------------|--------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

Proposizione p.v (schema III) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \stackrel{?}{\iff} (\neg q \implies \neg p)$$

dim. (p.v)

| p | q | $\neg q$ | $\neg p$ | $p \implies q$ | $\neg q \implies \neg p$ |
|-----|-----|----------|----------|----------------|--------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

Dalle dimostrazioni precedenti (p.i) si è reso evidente che necessitiamo di un insieme numerico che permetta di risolvere il problema di trovare la diagonale di un quadrato di lato 1: infatti, questo semplice caso ci dimostra che la retta euclidea non è in corrispondenza biunivoca con \mathbb{Q} , ma che anzi la retta di \mathbb{Q} ha "un buco"

Vogliamo trovare X tale che $\mathbb{Q} \subseteq X$, $X \leftrightarrow$ retta

Per trovare questo insieme è necessario introdurre le *relazioni* all'interno di un insieme

1.2.1 Relazioni

Sia A un insieme generico: diciamo \mathcal{R} relazione su A tale che

$$\mathcal{R} \subseteq A \times A$$

Dati $a, b \in A$ si scrive $a\mathcal{R}b \iff (a, b) \in \mathcal{R}$. Diciamo che a è in corrispondenza con b se $a\mathcal{R}b$

Proprietà

- \mathcal{R} si dice *simmetrica* se $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$
- \mathcal{R} si dice *riflessiva* se $\forall a \in A$, $a\mathcal{R}a$

- \mathcal{R} si dice *transitiva* se dati $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$
- \mathcal{R} si dice *antisimmetrica* se dati $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b$

Definizione Una relazione \mathcal{R} su A è detta *di ordine* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*

Definizione Una relazione \mathcal{R} su A è detta *di ordine totale* (o anche A è totalmente ordinato rispetto ad \mathcal{R}) se è una relazione d'ordine e vale

$$\forall a, b \in A \quad a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$$

Esempi (1.1)

- A insieme delle parole del dizionario italiano, \mathcal{R} ordine lessicografico
 $a, b \in A \quad a\mathcal{R}b$ se a viene prima o coincide con b nell'ordine alfabetico.
 \mathcal{R} è riflessiva, transitiva e antisimmetrica, \mathcal{R} è di ordine totale.
- Sia U insieme universo, $\mathcal{P}(U)$ l'insieme delle parti di U ², \mathcal{R} relazione di inclusione (\subset)

$$A, B \in \mathcal{P}(U), A \subset B \iff \forall x \in A \implies x \in B$$

\mathcal{R} è di ordine su $\mathcal{P}(U)$ ma non è di ordine totale

- Nell'insieme \mathbb{Q} si consideri la relazione
 - minore stretto
 $a < b$ se a precede strettamente b nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea
 - minore uguale
 $a \leq b$ se a precede o coincide b nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea

Si noti che

$<$ non è di ordine (non soddisfa né la proprietà riflessiva né la proprietà antisimmetrica)

² Si è fatto così e non si è scelto V (insieme di tutti gli insiemi) per evitare i paradossi; in particolare, vedasi *paradosso di Russel*

\leq è di ordine totale

La relazione $<$ non è di ordine in quanto

1. non soddisfa la proprietà riflessiva: ogni numero non è minore a se stesso
2. non soddisfa la proprietà di antisimmetria, in quanto non esiste nessuna coppia di numeri per cui valgano le relazioni $a < b$ e $b < a$

La relazione \leq è di ordine totale, in quanto soddisfa tutte e tre le proprietà:

1. è riflessiva, in quanto ogni numero è minore o uguale a se stesso
2. è antisimmetrica, in quanto l'unico modo per cui valga la relazione $a \leq b$ e $b \leq a$ è che $a = b$
3. è transitiva, in quanto se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$
4. inoltre, per ogni coppia (non ordinata) di numeri reali, è sempre possibile stabilire almeno un ordine che permetta di soddisfare la relazione.

Definizione La relazione \mathcal{R} su A è detta *relazione di equivalenza* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*. Si indica generalmente con $x \sim y$ invece di $x\mathcal{R}y$

Una classe di equivalenza di $u \in A$ (dove u è detto “rappresentante”) è

$$[u] = \{v \in A : v \sim u\}$$

L'insieme quoziente di A rispetto a \sim :

$$A/\sim := \{[u] : u \in A\}$$

22 set 2021 **Definizione** Un insieme U si dice totalmente ordinato con la relazione d'ordine “ \preceq ”

Consideriamo $A \subseteq U$

1. A è *limitato superiormente* se

$$\exists k \in U \text{ t. c. } \forall a \in A, a \preceq k$$

$\implies k$ è detto *maggiorante* di A

2. A è limitato inferiormente se

$$\exists h \in U \text{ t. c. } \forall a \in A, h \preceq a$$

$\implies k$ è detto *minorante* di A

Possono esistere infiniti maggioranti e infiniti minoranti

Definizione M è il massimo di A se M è un maggiorante ($a \preceq M \forall a \in A$) e $M \in A$

Definizione m è il minimo di A se m è un minorante ($m \preceq a \forall a \in A$) e $m \in A$

Si dice che $M = \max A$ e $m = \min A$

Esempi (1.2) Per tutti gli esempi successivi si consideri $U = \mathbb{Q}$ e $\preceq = \leq$

1. $A = \{5, 7, 9, -4, 588\}$. $\min A = -4$, $\max A = 588$

Con $A \subseteq \mathbb{Q}$ e A contenente un numero finito di valori

$\implies A$ ammette \max e \min

2. $B = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, B è limitato inferiormente

$\implies \min B = 1$, B non è limitato superiormente

3. $C = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, C è limitato: $\forall x \in C, 1 < x \leq 2$

C ammette un massimo ($\max C = 2$), C non ammette un minimo

4. $D = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\forall x \in D, 0 \leq x < 1$

$\min D = 0$, D non ammette \max

Definizione Sia U totalmente ordinato con relazione d'ordine \preceq , e sia $a \in U$.

- Diciamo *estremo superiore* di A ($\sup A$) il più piccolo dei maggioranti.
- Diciamo *estremo inferiore* di A ($\inf A$) il più grande dei minoranti

$$\sup A = \min\{M \in U \mid \forall x \in A, x \preceq M\}, \quad \inf A = \max\{m \in U \mid \forall x \in A, m \preceq x\}$$

Se esistono $\max A$ e/o $\min A$

$$\implies \sup A = \max A, \inf A = \min A$$

Esempio (1.3) Sia $C = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$$\max C = 2 = \sup C$$

$$\min C = \nexists$$

\implies se m è minorante di C

$$\implies m \leq 1 \implies \inf C = 1.$$

Sia $D = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$$\min D = 0 = \inf D$$

$$\max D = \nexists$$

\implies se M è maggiorante di D

$$\implies M \geq 1 \implies \sup D = 1$$

Esempio (1.4)

$$E = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq 0, r^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$$

- E è limitato: $\forall r \in E, 0 \leq r < 2$

- $\inf E = \min E = 0$

- $\sup E$? Se $x^2 < 2$

$$\implies 0 \leq x < \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}. \text{ Un candidato } \sup E = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\implies \sup E = \nexists$$

L'obiettivo, quindi, è quello di costruire un insieme numerico X (con $\mathbb{Q} \subseteq X$) con operazioni $+$ e \cdot tale che ogni sottoinsieme limitato ammetta estremo superiore e inferiore.

1.2.2 Definizione assiomatica dei numeri reali

\mathcal{R}_1 . È definita un'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, indicata con il segno “+” detta *addizione* o *somma*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa);
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ (commutativa);
- esiste un elemento in \mathbb{R} indicato con 0 (zero) tale che $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a$ (esistenza elemento neutro per +);

- $\forall a \in \mathbb{R}, \exists *$ tale che $a + * = 0$, si indica $* = -a$, detto *inverso*, *opposto* di a (esistenza dell'inverso per $+$).

\mathcal{R}_2 . È definita un'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, indicata con il segno “ \cdot ” detta *prodotto* o *moltiplicazione*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativa);
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$ (commutativa);
- esiste un elemento in \mathbb{R} indicato con 1 (uno) tale che $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = a$ (esistenza elemento neutro per \cdot);
- $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists *$ tale che $a \cdot * = 1$, si indica $* = a^{-1}$, detto *inverso*, *reciproco* di a (esistenza dell'inverso per \cdot);
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (distributiva).

\mathcal{R}_3 . È definita in \mathbb{R} una relazione di ordine totale, indicata con “ \leq ”, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \implies a + c \leq b + c$;
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, 0 \leq c: a \cdot c \leq b \cdot c$.

\mathcal{R}_4 . Sia $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

Se A è limitato superiormente, allora A ammette un estremo superiore.

Se A è limitato inferiormente, allora A ammette un estremo inferiore

\mathcal{R}_1 garantisce che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo

Queste proprietà possono essere definite anche per \mathbb{Q} , in cui valgono però solo le proprietà corrispondenti a $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$.

Se valgono le proprietà $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ per un qualche insieme \mathbb{K} , questo insieme prende il nome di *campo totalmente ordinato*.

\mathbb{R} e \mathbb{Q} sono campi totalmente ordinati, e \mathbb{R} è un *campo ordinato completo*

1.3 Campi ordinati completi

Si è costruito un insieme \mathbb{R} con $(+, \cdot, \geq)$, che soddisfa $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ e \mathcal{R}_4 .

- Quanti insiemi con queste proprietà esistono?
- Che relazione c'è tra di loro?
- Come li rappresentiamo?

Definizione Dati B e B' campi ordinati (soddisfano $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$), si definisce *isomorfismo* tra B e B' una relazione

$$\begin{aligned}\varphi : B &\rightarrow B' \\ a &\mapsto a' = \varphi(a)\end{aligned}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- φ è biunivoca
- $\forall a, b \in B$
 - i. $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
 - ii. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
 - iii. $a \leq b \implies \varphi(a) \leq \varphi(b)$

Teorema I Siano B e B' campi ordinati $(+, \cdot, \leq, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$, con B completo e B' completo

$\implies \exists$ un isomorfismo $\varphi : B \rightarrow B'$

Si dice che B è isomorfo a B' (e viceversa) poiché la relazione di isomorfismo è di equivalenza: $B \sim B'$

Non lo dimostreremo

Scelto un campo B a piacere possiamo costruire la classe di equivalenza

$$[B] = \{\text{campi ordinati completi}\}$$

$$\mathbb{R} = [B]$$

1.3.1 Rappresentazione

Modello decimale: $x \in \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$x = p, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

dove $p \in \mathbb{Z}$ e $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots]$ è un allineamento infinito di cifre tra $\{1, \dots, 9\}$

Modello binario: $y \in \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$y = p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \cdots$$

dove $p \in \mathbb{Z}$ e $[\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots]$ è un allineamento infinito di cifre tra $\{1, 2\}$

Non conta il modello che si usa; è necessario dimostrare che questi modelli soddisfino gli assiomi: fare riferimento al libro di testo

2 Limite successione

2 nov 2021

Data $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, a : n \rightarrow a_n, l \in \mathbb{R}^*$, diciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

se $\forall V(l) \exists U(+\infty) n \in (\mathbb{N} \text{ intersezione } D) \implies a_{n \in V(l)}$ Scriviamo $\forall V(l) \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{\text{segnato}} a_n \in V(l)$

$l \in \mathbb{R}$, diciamo che $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ è **convergente** a l se $\forall \varepsilon \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{\text{segnato}} |a_n - l| < \varepsilon$

Se $l = \pm\infty$ a_n è divergente a $\pm\infty$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \#$ allora $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ è irregolare (o oscillante).

Esempio (2.1)

- $\{a_n\}_{n=0}^\infty = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è irregolare e limitata
- $\{b_n\}_{n=0}^\infty = (-1)^n \cdot n$ con $n = 0, -1, 2, -3, 4, \dots$ è irregolare e non limitata

Si dice di una successione $\{a_n\}_{n=0}^\infty$

- $\forall \{a_n\}$ è crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n+1}$

Una successione crescente o decrescente si dice monotona, se strettamente crescente o decrescente si dice strettamente monotona.

Un predicato $P(n)$ è verificato definitivamente se $\exists n_{\text{segnato}} \forall n \leq n_{\text{segnato}} P(n)$ è vero

Valgono per $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ i seguenti teoremi

- Teorema di unicità del Limite
- Teorema di permanenza del segno

- Teorema di limitatezza:

Teorema II

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ è convergente e limitata}$$

- Teorema del confronto
- Teorema di esistenza del Limite per successioni definitivamente monotone

Teorema III $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente crescente

\implies ammette limite in \mathbb{R}^*

Precisamente se

- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e limitata
 \implies è convergente
- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e non limitata
 \implies è divergente

Teorema IV Principio di Archimede $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a, b > 0$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$

dim. (IV) Utilizziamo la funzione parte intera:

$x \in \mathbb{R}$ si dice $[x] = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{n \leq x\}$

Si verifica che $\forall x \in \mathbb{R}, [x] < x \leq [x] + 1$

Se $x \geq 0, [x] \geq 0, [x] \in \mathbb{R}$

Considerato $x = \frac{b}{a}$

$$\left[\frac{b}{a} \right] \leq \frac{b}{a} < \left[\frac{b}{a} \right] + 1$$

Posto $n_{segnato} = \left[\frac{b}{a} \right] + 1 \in \mathbb{N}$

$$\frac{b}{a} < n_{segnato} \implies n_{segnato}a > b$$

Osserviamo che posto $a = 1$ si ha che $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > b$

2.1 Applicazione del Principio di Archimede

Verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo verificare che definitivamente $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ allora per il principio di archimede

$$\exists n_{segnato} \in \mathbb{N}, n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora $\forall n \geq n_{segnato}, n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ dunque $\frac{1}{n} < \varepsilon$ definitivamente

Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Teorema V Disugualianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

si ha che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

dim. (V) Dimostrazione per induzione

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx, x > -1$$

1. $P(0)$

$$1+x > 0 \quad (1+x)^0 = 1 = 1+n0$$

$P(0)$ è vera

2. Assumiamo vera $P(n)$

2.2 Limiti

Progressione geometrica

$$q \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = ?, n \in \mathbb{N}$$

- $q > 1, q = 1 + p$ con $p > 0$ $q^n = (1 + p)^n \geq 1 + np$ per la disuguaglianza di Bernoulli

$$1 + np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- $q = 1$ $q^n = 1 \forall n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$$

- $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$

$$\implies |q| = \frac{1}{1+p} \text{ con } p > 0$$

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np}$$

$$1 + np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\implies \frac{1}{1+np} \rightarrow 0$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- $q = -1$

q^n è irregolare e limitata

- $q < -1$

$$q^n = (-1)^n |q|^n$$

ma $|q| > 1$ quindi $|q|^n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, e quindi q^n è irregolare non limitata

Riassumendo

$$q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q > 1 \\ \text{convergente a } 1 & q = 1 \\ \text{convergente a } 0 & |q| < 1 \\ \text{irregolare limitata} & q = -1 \\ \text{irregolare non limitata} & q < -1 \end{cases}$$

Esercizio Posto $q \in \mathbb{R}$ e

$$b_n = \sum_{k=0}^n q^k$$

calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Soluzione Da risolvere

Teorema VI Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$: $x \rightarrow f(x)$, $x_0 \in D'$ e $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $l \in \mathbb{R}^*$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (A)

\Longleftrightarrow

per ogni successione $a : \{a_n\}_{n=0}^\infty$ a valori in $D \setminus \{x_0\}$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \text{ (B)}$$

dim. (VI)

(A) \implies (B) Sappiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ovvero

$$\forall V(l) \exists U(x_0) | x \in U \wedge x \in V \text{ and } x \neq x_0 \implies f(x) \in V(l) \text{ (1)}$$

Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ con $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ con $a_n \in D$ e $a_n \neq x_0$ ossia

$$\exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{\text{segnato}} a_n \in D \wedge a_n \neq x_0 \wedge a_n \in U(x_0)$$

allora $f(a_n) \in V(l) \text{ (2)}$

Concludendo unendo (1) e (2)

$$\forall V(l) \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{\text{segnato}} f(a_n) \in V(l)$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$$

(B) \implies (A) Procediamo per assurdo: verificando $\neg A \implies \neg B$

$\neg B$: esiste una successione $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ tale che $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ per cui $a_n \xrightarrow{\rightarrow} x_0$

Consideriamo $\delta = 1 \exists x_1 0 < |x - x_0| < 1 \wedge f(x_1) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{2} \exists x_2 0 < |x_2 - x_0| < 1 \wedge f(x_2) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n 0 < |x_n - x_0| < 1 \wedge f(x_n) \notin V(l)$

Allora abbiamo costruito una successione $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ tale che $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ e $f(x_n) \notin V(l)$

inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{segnato} \forall n > n_{segnato} 0 < |x_n - x_0| < \varepsilon$ ($n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$)

ossia $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$

Abbiamo costruito una successione $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ con $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$

ossia abbiamo ottenuto che $\neg B$ è vera

2.3 Confronti tra infiniti

1. Dati $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$ osserviamo che

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\sqrt{n}}{a^n} &= \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{1+hn} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

e $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ allora per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$$

ovvero

$$\sqrt{n} = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

2. Dato $a > 1$

$$0 \leq \frac{n}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \right)^2$$

ma $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

3. Dato $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k$$

$$\text{ma } \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Dato che $a > 1$ e $\sqrt[k]{a} > 1$ concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n^k = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

4.

3 Costante di Nepero

8 nov 2021

Consideriamo la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^{+\infty}$$

è una forma indeterminata

Verifichiamo la convergenza:

1. a_n è crescente
2. a_n è superiormente limitata
3. applichiamo il teorema di esistenza del limite per le successioni monotone

1. $a_1 = 2$, per $n \geq 2$ stimiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \\ &= \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n (\frac{n}{n-1})^{-1}} = \\ &= \frac{(\frac{1+n}{n})^n (\frac{n-1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = ** \end{aligned}$$

Applico la disuguaglianza di Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} < 1, -\frac{1}{n^2} > -1 \\ \implies (1 - \frac{1}{n^2}) \geq 1 - n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\implies ** \geq \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$

Quindi $\forall n \geq 2$, $a_n \geq a_{n-1}$, quindi a_n è crescente definitivamente

2. Dimostriamo ora che a_n è limitata superiormente.

Consideriamo $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ($a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$)

Verifichiamo che b_n è decrescente.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} = \dots = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n}$$

Stimiamo $(1 + \frac{1}{n^2-1})^n$; per qualsiasi $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2-1} > 0$, e posso applicare Bernoulli:

$$(1 + \frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Ottengo quindi che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Quindi $\forall n \geq 2, b_n < b_{n-1}$, quindi b_n decrescente definitivamente, ma $b_2 = 4 \implies b_n \leq 4$ definitivamente

Poiché $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ si ha a_n crescente e $a_n \leq 4$ definitivamente

3. Dunque, per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate, otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \in \mathbb{R}$$

(esiste ed è un numero reale), e lo chiamiamo e , detta costante di Nepero \square

Quindi

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Osserviamo che

$$a_1 = 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

Una prima stima di e risulta essere

$$2 \leq e \leq 4$$

Con opportuni algoritmi di approssimazione si stima che

$$e = 2,7182818284 \dots$$

Osservazione (3.1) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (dimostrazione sul libro di testo)

Proposizione p.vi

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Lemma l.i Sia $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

dim. (p.vi) Applicando il teorema di relazione, a partire dal lemma (li) si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

dim. (li)

$$1. \ x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ ricordiamo } [x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$$

2. ...

□

4 Continuità

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

Diciamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Il valore di l non è in alcun modo legato ad $f(x_0)$

Consideriamo $x_0 \in D$

Esempi (4.1)

- $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

- $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1 \neq \text{sgn}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1 \neq \text{sgn}(0) = 0$$

•

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Definizione Consideriamo $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

Diciamo che f è continua in $x_0 \in D$ se

a. x_0 punto isolato di D

b. $x_0 \in D'$ e vale una delle seguenti affermazioni tra di loro equivalenti:

i. $\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0)$ tale che $x \in U \cap D$

$$\implies f(x) \in V$$

ii. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

iv. data $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ a valori in D tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Lemma l.ii Le quattro affermazioni precedenti sono equivalenti

dim. (l.ii)

i. \iff ii. è ovvio

ii. \implies iii. è ovvio

iii. \iff iv. per il teorema di relazione

iii. \implies ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\text{se } x = x_0 \quad |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ ossia } f \text{ continua in } x_0 \quad \square$$

Diciamo che f è continua in $E \subseteq D$ se $\forall x_0 \in E$ f è continua in x_0

Esempi (4.2) In generale dati $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $x_0 \in D$ se si ha

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da destra} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da sinistra} \end{cases}$$

9 nov 2021

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$$

Esempio (4.3) Verifichiamo che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\sin x$ è continua in x_0 . Sappiamo che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$.

Per $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) - \sin(x_0) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0 \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sin x_0 (\cos h - 1) + \sin h \cos x_0 \right) = \end{aligned}$$

Dato che $\sin h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$$= \sin x_0 \lim_{h \rightarrow 0} (\cos h - 1) = 0$$

Allora $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$\implies \sin x$ continua su \mathbb{R} . Allo stesso modo si verifica che $\cos x$ è continua su \mathbb{R}

Proprietà (Algebra delle funzioni continue) Date $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, con $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, f, g continue in x_0 , allora $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha che $af + g$ è continua in x_0

Inoltre

- fg continua in x_0
- se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ continua in x_0
- $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ è continua in x_0

Teorema VII (Continuità della funzione composta) Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$

$\implies g \circ f$ è continua in x_0

dim. (VII)

$\forall V(g(f(x_0))) \exists W(f(x_0))$ tale che $\forall y \in W \cap f(D)$

$\implies g(y) \in V$

$\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D \implies f(x) \in W$

Allora $\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D \ g(f(x)) \in V$

$\implies g \circ f$ è continua in x_0

Proprietà Date $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per D , $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(D) \subseteq E$, assumiamo

i.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in E$$

ii. g continua in l , $l \in \mathbb{R}$

$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l)$

Allora, date *i.* e *ii.*, si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$$

Si dimostra che sono continue nel loro dominio

- i polinomi
- le frazioni algebriche
- le funzioni esponenziali
- le funzioni logaritmiche
- le funzioni goniometriche e le loro inverse

Tutte queste funzioni sono dette "funzioni elementari"

Attenzione Data $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, f invertibile su D , e f continua su D
 $\nRightarrow f^{-1}$ sia continua su $f(D)$

Esempio (4.4) La funzione è analiticamente definita come

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Notiamo che $D = [0, 1] \cup (2, 3]$, e che f sia continua nel suo dominio.

$$f(D) = [0, 2]$$

Invertendola:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quindi f^{-1} non è continua su $f(D)$, in particolare non è continua in $x_0 = 1$

Proprietà Data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, con I intervallo,

se f è invertibile e continua su I

$\implies f^{-1}$ è continua su $J = f(I)$

4.1 Discontinuità

Consideriamo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ e f continua in $D \setminus \{x_0\}$

Diciamo che:

1. x_0 è una *discontinuità eliminabile* se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \wedge l \neq f(x_0)$$

Esempio (4.5)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R} \neq 0$$

Quindi $x_0 = 0$ è discontinuità eliminabile

2. x_0 è detto *salto* o *punto di salto* se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = n \in \mathbb{R}$$

$$l \neq n$$

Si definisce *ampiezza del salto* la grandezza

$$s = l - n$$

Esempio (4.6) Data

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 1$

Esempio (4.7) Data

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 2$

Notazione Nel PAGANI SALSA i punti di salto sono detti discontinuità di prima specie

Notazione Nella terminologia a lezione, si intendono sia i salti che le discontinuità eliminabili come discontinuità di prima specie

3. x_0 è *discontinuità di seconda specie* se si verifica una delle seguenti condizioni

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm \infty$$

$$\mp \infty$$

$$+ \infty$$

$$- \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \nexists$$

4.2 Prolungamento per continuità di una funzione

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'$.

Assumiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Diciamo *prolungamento per continuità* di f in x_0 la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

\tilde{f} è continua in x_0

Ovviamente se $x_0 \in D$ e f continua in x_0 allora

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

Esempi (4.8)

- Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

f non è continua in 0, con una discontinuità eliminabile

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = x^2$$

Questo è il prolungamento per continuità di f

- Consideriamo

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

Si ha che $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Allora

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di f in 0; \tilde{f} è continua su \mathbb{R}

- Consideriamo $f(x) = x^x$. Si ha che $D = \text{dom} f = (0; +\infty)$.

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^l = 1$$

dove

$$l = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \dots = 0$$

La funzione \tilde{f}

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

è l'estensione per continuità di $f(x)$ in $x_0 = 0$. \tilde{f} è continua su $[0; +\infty)$

5 Successioni

5.1 Un limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\alpha = 0 \implies$ il limite vale 1

- $\alpha > 0$; ricordiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{(1 + \varepsilon)^n} = 0$$

Allora $\forall \varepsilon > 0$

$$-(1 - \varepsilon)^n < n^\alpha < (1 + \varepsilon)^n$$

definitivamente

Ma è facile vedere

$$1 < n^\alpha < (1 + \varepsilon)^n$$

definitivamente

$$\implies 1 < \sqrt[n]{n^\alpha} < 1 + \varepsilon \text{ definitivamente}$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

- $\alpha < 0$

$$\sqrt[n]{n^\alpha} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{-\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}}$$

Ma $\sqrt[n]{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, con $\beta = -\alpha > 0$ Quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}} = 1$$

Ne segue che $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

5.2 Sottosuccessioni

Si ha l'obiettivo di indagare più a fondo il comportamento delle successioni irregolari

Esempi (5.1)

1. Si consideri

$$a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1$$

- con gli indici pari

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, 1, 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

si ha che $a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

- con gli indici dispari

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1, \quad n \in \mathbb{N}$$

si ha che $a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$

Definizione Sia $a : \{a_n\}_{n=0}^\infty$ successione a valori reali. Consideriamo una successione di indici

$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto k_n \end{aligned}$$

con k strettamente crescente, ovvero

$$k_n < k_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Diciamo *sottosuccessione di a* la successione

$$b_n = a_{k_n}$$

Concretamente per costruire $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ cancelliamo ad $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ una quantità infinita di termini lasciando gli altri invariati.

Ogni successione è sottosuccessione di se stessa, basta prendere $k_n = n$

Esercizio Dati

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \\ b_n &= n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned}$$

estrarre le possibili sottosuccessioni regolari

Soluzione DA FARE

15 nov 2021

Teorema VIII (legame limite successione e sottosuccessione) Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^\infty$, $l \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

\iff ogni sottosuccessione di a_n ammette una sottosuccessione che tende a l

dim. (VIII)

“ \implies ” La prima implicazione è vera, pertanto

$$\forall V(l) \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : a_n \in V(l)$$

Sia $n \rightarrow k_n$ crescente, e $b_n = a_{k_n}$, allora

$$\exists \bar{\bar{n}} \forall n \geq \bar{\bar{n}} : k_n \geq \bar{\bar{n}}$$

allora $b_n = a_{k_n} \in V(l)$.

Dunque

$$\forall V(l) \exists \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n > \bar{\bar{n}} : b_n \in V(l)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

Abbiamo anche dimostrato che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ implica che qualsiasi sua sottosuccessione $b_{k_n} \rightarrow l$

“ \Leftarrow ” Assumiamo vera la seconda implicazione, e procedendo per assurdo assumiamo vera la negazione della prima implicazione, ossia

$$\forall V(l) \forall n \in \mathbb{N} \exists n' \geq n | a_{n'} \notin V(l)$$

Consideriamo $n = 1$; $\exists n'_1 > 1$ tale che $a_{n'_1} \notin V(l)$; $k_1 = n'_1$

Consideriamo $n = k_1 + 1$; $\exists n'_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ tale che $a_{n'_2} \notin V(l)$; $k_2 = n'_2$

Consideriamo $n = k_2 + 1$; $\exists n'_3 \geq k_2 + 1 > k_1$ tale che $a_{n'_3} \notin V(l)$; $k_3 = n'_3$

...

Otteniamo una successione di indici

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto k_n$$

strettamente crescente, e una successione $b_n = a_{k_n}$ tale che

$$\exists V(l) | \forall n, b_n \notin V(l)$$

Allora b_n non può ammettere sottosuccessioni che tendono a l

\implies abbiamo dimostrato la negazione della seconda implicazione, partendo dalla negazione della prima, ovvero la prima implicazione implica la seconda \square

5.3 Successioni a valori in \mathbb{R}^n

$$\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \quad a_k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, \dots, a_n^k) \in \mathbb{R}^n$$

Esempio (5.2) Fissato $x \in \mathbb{R}^n$,

$$a_k = kx = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n)$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è convergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k \geq \bar{k} : \underbrace{|a_k - l|}_{\left(\sum_{j=1}^n (a_j^k - l)^2\right)^{1/2}} < \varepsilon$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è divergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall M > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k \geq \bar{k} : |a_k| > M$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ si dice irregolare (oscillante) se non è né convergente né divergente

Osservazione (5.1) Per $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in \mathbb{R}^n vale il teorema di legame tra limiti di successione e sottosuccessioni

Valgono tutti i teoremi sui limiti che non coinvolgono l'ordinamento del codominio. (In particolare, non si definiscono le successioni monotone, e quindi non vale il teorema sui limiti delle successioni monotone)

Proposizione p.vii Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $y \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

Se y è di accumulazione per E

$\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E , con $x_k \neq y \forall k \in \mathbb{N}$ e tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = y$$

dim. (p.vii)

caso 1. $y \in \mathbb{R}^n$: $y \in E'$, si ha

$$\forall r > 0 \exists x \in E, x \neq y, x \in B_r(y)$$

Consideriamo $k = 1, 2, 3, \dots$; possiamo determinare $x_k \in E$, con $x_k \neq y$ e $x_k \in B_{1/k}(y)$

Abbiamo ottenuto una successione $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ a valori in E tale che $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \mid \forall k \geq \bar{k} : x_k \in B_{1/k}(y) \subset B_{1/\bar{k}}(y) \subset B_\varepsilon(y)$

Allora $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$, $x_k \neq y$

caso 2. $y = \infty$, $y \in E'$

$$\forall M > 0 \exists x \in E : |x| > M$$

Per $k = 1, 2, 3, \dots$ consideriamo $x_k \in E$, con $|x_k| \geq k$ allora

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k \geq \bar{k} : |x_k| \geq k \geq \bar{k} > M$$

$$\implies x_k \rightarrow \infty$$

□

Teorema IX (di Bolzano-Weierstrass per le successioni) Data $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ a valori in \mathbb{R}^n (valori vettoriali), si ha che

se $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ è limitata

$$\implies \exists \{a_{h_k}\}_{k=0}^\infty \text{ sottosuccessione tale che } a_{h_k} \text{ è convergente a } l \in \mathbb{R}$$

Ogni successione limitata ammette sempre una sottosuccessione convergente

dim. (IX) Indichiamo con $E = \{a_k\}$ = insieme dei valori della successione. E è limitato per ipotesi;

caso 1. assumiamo che E abbia un numero infinito di elementi.

$$\implies \text{ per il teorema di Bolzano-Weierstrass sui sottoinsiemi infiniti di } \mathbb{R}^n \implies E \text{ ammette almeno un punto di accumulazione } \lambda \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies \exists \{b_k\}_{k=0}^\infty \text{ a valori in } E, \text{ tale che } b_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda$$

Ma $E \equiv$ i valori di $\{a_k\}_{k=0}^\infty$

dunque b_k è sottosuccessione di a_k .

Allora esiste una sottosuccessione di a_k convergente.

caso 2. assumiamo che E abbia un numero finito di elementi.

$$\implies \text{ esisterà sicuramente un valore di } E \text{ assunto infinite volte dalla successione } \{a_k\}_{k=0}^\infty. \text{ Sia } a_k = l \text{ per infiniti indici.}$$

Consideriamo $b_k = l, \forall k \in \mathbb{N}$, b_k è successioni a valori in E , ed essendo costante: $b_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l$, dunque b_n è convergente \square

Osservazione (5.2) Il teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni utilizza il teorema di Bolzano-Weierstrass per gli insiemi in \mathbb{R}^n . Dunque è necessaria la completezza di \mathbb{R}

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ed è limitata $\implies \{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ed è limitata $\implies \{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ ed è limitata $\implies \{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ed è limitata $\nRightarrow \{a_n\}$ convergente

5.3.1 Successioni e chiusura di $E \subset \mathbb{R}^n$

Si ricorda che la chiusura è

$$\overline{E} = E \cup \delta E$$

Proprietà Data $E \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$

$$y \in \overline{E} \iff \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ a valori in } E \text{ tale che } x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$$

Dimostrazione. Procediamo spezzando le due implicazioni

“ \implies ” Ricordiamo che $\overline{E} = E \cup E'$

$$y \in \overline{E} = E \cup E'$$

– se $y \in E$, allora consideriamo $x_k \equiv y \in E$ si ha $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$

– se $y \in E'$ e $y \notin E$, per la proposizione (p.vii), $\exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$

“ \impliedby ” Assumiamo per assurdo che esista $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$ e $y \notin \overline{E}$, con $x_k \in E$.

\overline{E} è un insieme chiuso, allora $(\overline{E})^C$ è aperto, ovvero $\exists r > 0$ tale che $B_r(y) \subset (\overline{E})^C$

Allora $B_r(y) \cap \overline{E} = \emptyset$, allora poiché $E \subset \overline{E}$

$$\exists r > 0 : B_r(y) \cap E = \emptyset$$

allora qualsiasi successione a valori in E non può convergere a y , dunque neghiamo $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$, si ha contraddizione, dunque

$$y \in \overline{E} \quad \square$$

Teorema X Dato $E \in \mathbb{R}^n$

(A) E è chiuso

(B) \iff se esiste $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$ allora $y \in E$

Equivalentemente:

(A) E è chiuso

(B) \iff tutte le sue successioni convergenti hanno limite in E stesso

dim. (X)

“ \implies ” E è chiuso. Ricordiamo che E è chiuso $\iff E = \overline{E}$

Allora per proprietà precedente

$$\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset E \wedge x_k \rightarrow y \implies y \in \overline{E} = E$$

“ \impliedby ” Ricordiamo che E chiuso $\iff E' \subset E$. Dimostriamo che $E' \subset E$.

Consideriamo $y \in E'$, $\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^\infty \subset E$, con $x_k \neq y$, $x_k \rightarrow y$, allora per (B), $y \in E$

Dunque $E' \subset E$, ed E chiuso \square

Definizione Sia $\{a_k\}_{k=0}^\infty$ a valori in \mathbb{R}^n . Questa successione è detta *successione di Cauchy* (o successione fondamentale) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \mid \forall k, m \geq \bar{k} \mid a_k - a_m \mid < \varepsilon$$

O, equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k > \bar{k} \forall p \in \mathbb{N} \mid a_k - a_{k+p} \mid < \varepsilon$$

(Definitivamente $\mid a_k - a_{k+p} \mid < \varepsilon$)

Intuitivamente, da un certo punto in poi i valori della successione di Cauchy sono vicini a piacere

Studieremo il legame tra l'essere di Cauchy l'essere convergente.