1 Insiemi

1.1 Insieme $\mathbb{R}$

1.1.1 Caratteristiche di $\mathbb{R}$

Osservazione (1.1)

- $\mathbb{R}$ non può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. 27 set 2021
- $\mathbb{R}$ non è numerabile (mentre $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ tutti numerabili).
- diciamo che gli insiemi in corrispondenza biunivoca tra di loro sono *equipotenti*.
- Gli insiemi equipotenti a $\mathbb{N}$ hanno *potenza del numerabile*.
- Gli insiemi equipotenti ad $\mathbb{R}$ hanno *potenza del continuo*.

Obiettivo: verifichiamo che in $\mathbb{R}$

$$x^2 = 2$$

ammette soluzione (ovvero che esista la diagonale del quadrato di lato 1)

Teorema I Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora

$$\exists\, s \in \mathbb{R}, s > 0 \text{ t. c. } s^2 = a.$$

dim. **(I)**

- Sia $a > 1$ (ovvero $a^2 > a$), consideriamo

  $$A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \wedge x^2 < a\}$$

  Verifichiamo che A è limitato superiormente da a. Se così non fosse avremmo per assurdo

  $$\exists\, x \in A \,|\, x \geq a > 1$$

  dunque

  $$x^2 \geq a^2 \geq a$$

  $\Longrightarrow \exists\, x \in A$ tale che $x^2 \geq a$, contraddizione. Allora per l'assioma $\mathcal{R}_4$ (completezza)

  $$\exists\, s = \sup A$$

  Verifichiamo che $s^2 = a$. Ragioniamo per assurdo:

  $$s^2 \neq a : \begin{cases} s^2 < a & (i) \\ \vee \\ s^2 > a & (ii) \end{cases}$$

(i) $s^2 < a$ applichiamo lo schema per assurdo

$$s = \sup A \wedge s^2 < a \implies s \neq \sup A$$

Se troviamo $\varepsilon > 0$ tale che $(s+\varepsilon)^2 < a$ si ha $(s+\varepsilon) \in A$ ossia $s \neq \sup A$, contraddizione. Cerchiamo tale ε

Osserviamo

$$(s+\varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \leq s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon$$

se $0 < \varepsilon \leq 1$. Inoltre

$$s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon < a \iff s^2 + \varepsilon(2s+1) < a \iff 0 < \varepsilon \leq \frac{a - s^2}{2s+1}$$

Consideriamo ora

$$\varepsilon = \min\left\{1, \frac{a-s^2}{2s+1}\right\}$$

si ha

$$(s+\varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon < a$$

dunque $(s+\varepsilon)^2 < a$

$\implies \exists\, \varepsilon > 0$ tale che

$$(s+\varepsilon) \in A$$

$\implies s \neq \sup A$ contraddizione

(ii) $s^2 > a$ se esistesse $\varepsilon > 0$ tale che $(s-\varepsilon)^2 > a$ allora

$$\forall\, x \in A \quad x^2 < a < (s-\varepsilon)^2$$

$\implies \forall\, x \in A$, $x < s - \varepsilon$, $s \neq \sup A$.

Troviamo tale $\varepsilon > 0$

$$(s-\varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon$$

ma

$$s^2 - 2s\varepsilon > a \iff s^2 - a > 2s\varepsilon \iff 0 < \varepsilon < \frac{s^2 - a}{s_2}$$

Concludiamo dicendo che

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t. c. } (s-\varepsilon)^2 > a$$

dunque $s \neq \sup A$, contraddizione.

Punto della situazione: se $a > 1$, allora $s = \sup A$, si ha $s^2 = a$, dunque $x^2 = a$ ammette soluzione $s = \sup A$.

- Sia $a = 1$: la soluzione ovvia di $x^2 = 1$ è $x = 1$
- Sia $a < 1$.

  Sia $b = 1/a > 1$, allora esiste $s = \sup\{x \in \mathbb{R}; x^2 < b\}$ tale che $s^2 = b$, allora
  $$1/s^2 = 1/b = a$$

$\Longrightarrow \exists\, R \in \mathbb{R}$ tale che $R^2 = a$. $\square$

Osservazione (1.2) Per cercare $\varepsilon > 0$ tale che $(s+\varepsilon)^2 < a$, $a > 1$, $s > 0$, $s^2 < a$, qualcuno avrebbe potuto pensare di svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned}(s+\varepsilon)^2 < a \iff \\ \iff -\sqrt{a} < s+\varepsilon < \sqrt{a} \iff -\sqrt{a} - s < \varepsilon < \sqrt{a} - s \iff \\ \iff 0 < \varepsilon < \sqrt{a} - s\end{aligned}$$

Attenzione che la procedura è scorretta, in quanto $\sqrt{a}$ non è stata ancora definita.

Definizione In base al teorema precedentemente dimostrato possiamo affermare che: dato $a > 0$, l'equazione

$$x^2 = a$$

ammette un'unica soluzione positiva, precisamente

$$s = \sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 < a, x > 0\}$$

indichiamo tale soluzione con $\sqrt{a}$

$$\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 < a, x > 0\} \tag{1}$$

In generale, dato $a > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\sqrt[n]{a}$ è l'unica soluzione positiva di $x^n = a$

Teorema II (caratt. estremo superiore) Dato $A \subseteq \mathbb{R}$

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \leq S \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \text{ t.c.} \quad S - \varepsilon < x \leq S \end{cases}$$

dim. **(II)**

“ $\implies$ ” Per assurdo sia la seconda implicazione falsa, ossia

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,|\, \forall\, x \in A \quad x \leq S - \varepsilon$$

allora $S - \varepsilon < S$ è maggiorante di A

$\implies$ $S \neq \sup A$ contraddizione.

“ $\impliedby$ ” Per assurdo sia $S \neq \sup A$, allora esiste S' maggiorante di A con $S' < S$.

Poniamo $\varepsilon = S - S'$ $(S' = S - \varepsilon)$, allora abbiamo che

$$\forall\, x \in A \quad x \leq S' = S - \varepsilon$$

e la seconda implicazione è negata: si ha contraddizione. $\square$

Teorema III (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \exists\, r \in \mathbb{Q} \text{ t. c.} \quad a < r < b \tag{2}$$

1.2 Spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$

Dato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{R}^n = n - \text{volte}\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

Notazione Scrivendo (a, b) conta l'ordine, in particolare

$$(a, b) \neq (b, a).$$

Scrivendo invece $\{a, b\}$ non conta l'ordine, infatti

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

Notazione Il libro di testo spesso usa il grassetto per indicare gli elementi di $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

Altre notazioni

$$\vec{x} = \overline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

Noi useremo

$$x = (x_1, \cdots, x_{ne})$$

1.2.1 Operazioni su $\mathbb{R}^n$

Somma (+)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

In $\mathbb{R}^2$ questa è la regola del parallelogramma

Proprietà della somma La somma rispetta queste proprietà:

ν_1

- commutativa;
- associativa;
- esistenza dell'elemento neutro
$$\underline{0} = (0, 0, \cdots, 0);$$
- esistenza dell'opposto:
$$\forall\, x = (x_1, \cdots, x_n)$$
  x ammette opposto
$$-x = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$$
  tale che $x + (-x) = \underline{0}$.

Prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall\, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

si definisce λx come
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

Proprietà del prodotto $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha che

ν_2

- $\lambda(\mu\, x) = (\lambda\mu)x$;
- $1\, x = x$;
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

ν_1 e ν_2 non saranno dimostrate.

Diciamo che $\mathbb{R}^n$, dotato di somma e prodotto per scalare è uno *spazio vettoriale* sullo scalare $\mathbb{R}$.

Definizione Dati

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$y = (y_1, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

diciamo *prodotto scalare* di $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{3}$$

Attenzione

$$\begin{aligned} \langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Il prodotto scalare non è una operazione interna a $\mathbb{R}^n$.

Proprietà del prodotto scalare $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\zeta \begin{cases} 1.\ \langle x, x \rangle \geq 0;\ \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0; \\ 2.\ \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle; \\ 3.\ \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle; \\ 4.\ \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \end{cases}$$

Si dice che $\langle \bullet, \bullet \rangle$ è un'applicazione bilineare positiva da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Esempio (1.1)

$\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$	forza applicata ad un oggetto
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$	spostamento
$L = \langle \vec{F}, \vec{x} \rangle$	lavoro.

Definizione Dato $x \in \mathbb{R}^n$ diciamo *modulo* (norma) di x

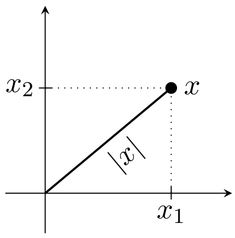
$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{4}$$

Osservazione (1.3)

$$|\bullet| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R}; a \geq 0\}$$

Risulta quindi che $|-x| = |x|$.

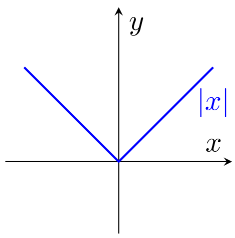
Osservazione (1.4) In $\mathbb{R}^2$, $|x|$ rappresenta la lunghezza del vettore x



Invece, per $a \in \mathbb{R}$,

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

ovvero diventa equivalente al *valore assoluto* di a.



Proprietà del modulo $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha

$$\eta \begin{cases} 1. \ |x| \geq 0; \quad |x| = 0 \iff x = 0 \\ 2. \ |\lambda x| = |\lambda|\,|x| \\ 3. \ |x+y| \leq |x| + |y| \ \text{(disuguaglianza triangolare)} \end{cases}$$

Osservazione (1.5)

$$(5) \quad |x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \iff |x| - |y| \leq |x-y|$$
$$(6) \quad |y| = |(y-x)+x| \leq |x-y| + |x| \iff |x| - |y| \geq -|x-y|$$

Mettendo insieme (5) e (6) otteniamo

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

da cui

$$(7) \qquad \Big| |x| - |y| \Big| \leq |x-y|$$

Ricordare che, dato $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Definizione Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ diciamo *distanza* di x da y

$$d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2} \tag{8}$$

Proprietà della distanza $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mathcal{D}\begin{cases} 1.\ d(x,y) \geq 0; \quad d(x,y) = 0 \iff x = y; \\ 2.\ d(x,y) = d(y,x); \\ 3.\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \text{ (disuguaglianza triangolare).} \end{cases}$$

Definizione $\mathbb{R}^n$ e ogni altro insieme dotato di somma (+), prodotto per uno scalare e norma (distanza), sono detti *spazi vettoriali normati* o *spazi vettoriali metrici.*