

1 Spazi vettoriali euclidei

Esercizio In \mathbb{R}^3 si consideri la base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$,

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2).$$

Si applichi l'algoritmo per ottenere una base ortonormale di \mathbb{R}^3 rispetto al prodotto scalare

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^3 x_k y_k$$

Soluzione $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, con $\|v_1\| = \sqrt{2}$: quindi

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1}{\|v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1\|}; v_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1 =$$

$$\begin{aligned} &= (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}(-1, 2, 1) \end{aligned}$$

$$\|v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1\| = \frac{1}{2}\|(-1, 2, 1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\implies e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$$

$$e_3 = \frac{v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1}{\|v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1\|}; v_3 \cdot e_1 = 4/\sqrt{2}; v_3 \cdot e_2 = 2/\sqrt{6}$$

$$v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1 =$$

$$\begin{aligned} &= (2, 1, 2) - \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1) - \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \\ &= (2, 1, 2) - \frac{1}{3}(-1, 2, 1) - 2(1, 0, 1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{3}(1, 1, -1) \end{aligned}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$$

$\implies \{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormale.

1.1 Matrici ortogonali

Definizione Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, A si dice ortogonale se ${}^tA = A^{-1}$ (ortogonale \implies invertibile)

Proposizione p.i Valgono le seguenti proprietà:

1. se A è ortogonale $\implies A^{-1}$ è ortogonale
2. se A è ortogonale $\implies {}^tA$ è ortogonale
3. se A, B sono ortogonali $\implies AB$ è ortogonale
4. se $A \in O(n) \implies \det(A) \in \{-1, 1\}$

Indico con

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A \text{ è ortogonale}\} \in GL(n, \mathbb{R})$$

Definizione Sia (G, \cdot) un gruppo. Un sottoinsieme H di G è un sottogruppo se

$$h^{-1} \in H \forall h \in H \quad \text{e} \quad h_1 \cdot h_2 \in H \forall h_1, h_2 \in H$$

Le prime due proprietà implicano che $O(n)$ è un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$

dim. (p.i)

1. $A \in O(n)$
 $\implies {}^tA = A^{-1}$
 $\implies A = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$
 $\implies A^{-1} \in O(n)$
2. $A \in O(n)$
 $\implies A^tA =$
 $\implies {}^tA$ è invertibile e A è la sua inversa
3. A, B ortogonali
 $\implies A^tA = e \quad B^tB =$
 $\implies AB^t(AB) = AB^tB^tA = A^tA =$
 $\implies AB^t(AB) =$
 $\implies AB \in O(n)$

4. Se $A \in O(n)$

$$\implies A^t A =$$

$$\implies \det({}^t A A) = 1$$

$$\stackrel{\text{Binet}}{\implies} \det({}^t A) \det(A) = 1$$

$$\implies (\det(A))^2 = 1$$

$$\implies \det(A) \in \{-1, 1\}$$

Ne risulta che

$$O(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\} \amalg \{A \in O(n) \mid \det(A) = -1\}$$

con \amalg “unione disgiunta”

Si indica con $SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det(A) = 1\}$ sottogruppo di $O(n)$, detto *delle matrici ortogonali speciali*, infatti se $A, B \in SO(n)$

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1$

$$\implies A \in SO(n);$$

- $\det(AB) = \det A \det B = 1$

$$\implies A, B \in SO(n)$$

Teorema I Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Sono fatti equivalenti:

1. $A \in O(n)$

2. Le righe di A , R_1, \dots, R_n formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare canonico

3. Le colonne di A , C_1, \dots, C_n formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare canonico

dim. (I)

$$2 \iff 3 \text{ poich\'e } A \in O(n) \iff {}^t A \in O(n)$$

$$2 \iff 1 \text{ Infatti } A \in O(n) \iff A^t A = I, A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}, {}^t A = (R_1 \ \cdots \ R_n)$$

$$({}^t A)_{ij} = R_i \cdot R_j \text{ dove } \cdot \text{ \'{e} il prodotto scalare canonico in } \mathbb{R}^n.$$

Quindi

$$A^t A = I \iff R_i \cdot R_j = \delta_{ij}$$

$\iff \{R_1, \dots, R_n\}$ base ortonormale di (\mathbb{R}^n, \cdot) \square

Descriviamo $O(2)$ e $SO(2)$

Descrivo tutte le basi ortonormali di (\mathbb{R}^2, \cdot) , una base ortonormale è della forma $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ con $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, e $e_1 \cdot e_2 = 0$

Fissiamo e_1 . Sia α l'angolo tra e_1 e l'asse x

$$\implies e_1 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

Per e_2 ho solo le due possibilità:

- $e_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$
- $e_2 = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$

Ogni $A \in O(2)$ è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

oppure

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \in SO(2)$$

Teorema II Considero (V, \cdot) spazio vettoriale Euclideo, e $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale. Sia \mathcal{B}' una seconda base

\mathcal{B}' è ortonormale \iff la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a \mathcal{B}' è ortogonale

dim. (II) $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormale, $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_n\}$

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j \quad \forall i = 1, \dots, n$$

\mathcal{B}' è ortonormale se e solo se

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, n$$

Risulta

$$\begin{aligned} v_i \cdot v_j &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} e_k \right) \cdot \left(\sum_{s=1}^n a_{js} e_s \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n a_{ik} a_{js} \underbrace{e_k \cdot e_s}_{\delta_{ks}} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} \end{aligned}$$

Quindi \mathcal{B}' è ortonormale

$$\iff \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$$

\iff le righe della matrice $A = (a_{ij})$ formano una base ortonormale di \mathbb{R}^n con il prodotto scalare canonico

\iff per il teorema A è ortogonale

\iff la matrice del cambiamento di base da \mathcal{B} a $\mathcal{B}' \in O(n)$ \square

Esercizio Si trovi in \mathbb{R}^3 con il prodotto scalare canonico una base ortonormale il cui primo vettore sia

$$u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Soluzione Approccio risolutivo: trovo v in \mathbb{R}^3 ortogonale a u , con $\|v\| = 1$ e quindi si considera z come $z = u \wedge v$

$\implies \{u, v, z\}$ base ortonormale di \mathbb{R}^3

2 Orientazione di uno spazio vettoriale (reale)

Sia V spazio vettoriale su \mathbb{R} finitamente generato, siano \mathcal{B} e \mathcal{B}' due basi e sia $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice del cambiamento di base $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in GL(n, \mathbb{R})$

$$\implies \det(M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) \neq 0$$

\implies ci sono due possibilità:

1. $\det(M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) > 0$: si dice che \mathcal{B} e \mathcal{B}' hanno la stessa orientazione
2. $\det(M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) < 0$: si dice che \mathcal{B} e \mathcal{B}' hanno orientazione opposta

Esempio (2.1) Consideriamo \mathbb{R} come spazio vettoriale su \mathbb{R} . Le basi di \mathbb{R} sono del tipo $\mathcal{B} = \{t_0\}$, con $t_0 \neq 0$

$\implies \mathcal{B} = \{t_0\}$ e $\mathcal{B}' = \{t'_0\}$ hanno la stessa orientazione

$\iff t_0$ e t'_0 hanno lo stesso segno

Sia V spazio vettoriale su \mathbb{R} finitamente generato. $\text{Basi}(V)$ insieme di tutte le basi di V . In $\text{Basi}(V)$ si considera la relazione \sim dove due basi \mathcal{B} e \mathcal{B}' sono in relazione

\iff hanno la stessa orientazione

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \iff \det(M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}) > 0$$

Proposizione p.ii \sim è una relazione di equivalenza e nel quoziente $\text{Basi}(V)/\sim$ ci sono solo due classi (se $\dim V \geq 1$).

Esempio (2.2) $\text{Basi}(\mathbb{R}) = \{\{t_0\} \mid t_0 \neq 0\}, \{t_0\} \sim \{t'_0\} \iff t_0 \text{ e } t'_0 \text{ hanno lo stesso segno.}$

\sim è una relazione di equivalenza, e $\text{Basi}(R)/\sim$ consta di sole due classi, infatti, prendendo le classi

$$[\{1\}], [\{-1\}],$$

una qualsiasi base $\{t_0\}$ o è in relazione con $[\{1\}]$ o con $[\{-1\}]$

dim. (p.ii) Idea della dimostrazione: dimostro che \sim è riflessiva, simmetrica e transitiva.

- \sim riflessiva, infatti se $\mathcal{B} \in \text{Basi}(V)$ si ha che $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}} =$
 $\implies \det M^{\mathcal{B},\mathcal{B}} = 1$
 $\implies \mathcal{B} \sim \mathcal{B}$
- \sim simmetrica, infatti siano \mathcal{B} e $\mathcal{B}' \in \text{Basi}(V)$, supponiamo $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$,
cioè $\det M^{\mathcal{B},\mathcal{B}} > 0$
 $\implies (v)_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v)_{\mathcal{B}'} \quad \forall v \in V$
 $\iff (v)_{\mathcal{B}'} = (M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}(v)_{\mathcal{B}} \quad \forall v \in V$, cioè $M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = (M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$
 $\implies \det(M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) = \frac{1}{\det M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}} > 0$
 $\implies \mathcal{B}' \sim \mathcal{B}$
- \sim transitiva, infatti siano $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'' \in \text{Basi}(V)$ con
 - $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \iff \det(M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) > 0$
 - $\mathcal{B}' \sim \mathcal{B}'' \iff \det(M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}) > 0$

$$\det(M^{\mathcal{B},\mathcal{B}''}) = \det(M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}) =$$

$$\stackrel{\text{Binet}}{=} \det(M^{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) \cdot \det(M^{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}) > 0 \quad \square$$

16 nov 2021

Per dimostrare il numero di elementi dell'insieme quoziente:

caso 1. $\dim V \geq 2$; date $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{v_2, v_1, \dots, v_n\}$; si osserva facilmente che \mathcal{B}' non ha la stessa orientazione di \mathcal{B} .

In $\text{Basi}(V)/\sim$ ci sono sempre almeno 2 elementi. Dimostriamo che sono esattamente 2.

Considero $[\mathcal{B}]$ e $[\mathcal{B}'] \in \text{Basi}(V)/\sim$, con $[\mathcal{B}] \neq [\mathcal{B}']$ e sia $\mathcal{B}'' \in \text{Basi}(V)/\sim$ tale che $\mathcal{B}'' \notin [\mathcal{B}]$

$\implies \det M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} < 0$. Dimostro che $\mathcal{B}'' \in [\mathcal{B}']$

Infatti

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$$

$$\stackrel{\text{Binet}}{\implies} \det_{<0} M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = \det_{<0} M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \det_{>0} M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$$

\implies deduco che $\det M^{\mathcal{B}', \mathcal{B}''} > 0$

$\implies \mathcal{B}' \in [\mathcal{B}'']$

□