Università degli Studi di Torino
Scuola di Scienze della Natura
Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA UNO

Esercizi da consegnare per la correzione – Foglio 1

Cognome e nome PECCIOLI DAVIDE

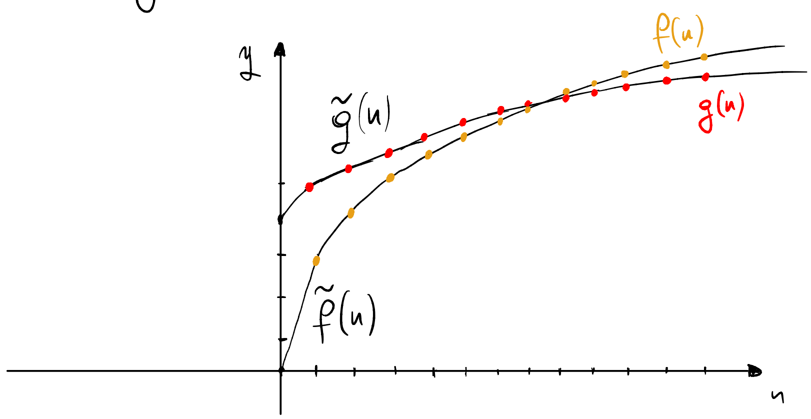
Es. II. Determinare estremo superiore ed estremo inferiore del seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}$, stabilendo inoltre se siano massimo e minimo:

$$A = \left\{ \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

Svolgimento.

$y = \frac{f(n)}{g(n)}$ con $f(n) = 3\sqrt{n}$, $g(n) = \sqrt{n}+4$ $\quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Sia $\tilde{f}(n) = 3\sqrt{n}$ e $\tilde{g}(n) = \sqrt{n}+4$ $\quad n \in \mathbb{R}_+$



$i = \inf A = \frac{3}{5}$?

$s = \sup A = 3$?

Suppongo che $s = 3$ sia l'estremo sup. di A. Verifico che l'ipotesi sia corretta.

$s = \sup A \iff$ i. $\forall x \in A \quad x \leq s$

ii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \mid s - \varepsilon < x \leq s$

i. $\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} \leq 3 \underset{\substack{(\sqrt{n}+4>0 \\ \forall n \in \mathbb{N})}}{\iff} 3\sqrt{n} \leq 3\sqrt{n} + 12 \implies 0 \leq 12$ vera $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

ii. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \mid 3 - \varepsilon < \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} \leq 3$

$3 - \varepsilon < \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} \underset{\substack{(\sqrt{n}+4>0 \\ \forall n \in \mathbb{N})}}{\iff} (3-\varepsilon)(\sqrt{n}+4) \leq 3\sqrt{n}$

$(3-\varepsilon)\sqrt{n} + 12 - 4\varepsilon \leq 3\sqrt{n}$

$-\varepsilon\sqrt{n} + 12 \leq 4\varepsilon \implies \sqrt{n} \geq \frac{12-4\varepsilon}{\varepsilon}$

$|n| \geq \left(\frac{12-4\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2 \implies n \geq \left(\frac{12-4\varepsilon}{\varepsilon}\right)^2$

Suppongo che $i = 3/5$ sia l'estremo inferiore di A. Verifico che l'ipotesi sia corretta

$$i = \inf A \iff \begin{array}{ll} \text{i.} & \forall a \in A \quad a \ge i \\ \text{ii.} & \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A \mid i \le a < i + \varepsilon \end{array}$$

i. $$\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} \ge \frac{3}{5} \underset{\left(\substack{\sqrt{n}+4>0 \\ \forall n \in \mathbb{N}}\right)}{\iff} 3\sqrt{n} \ge \frac{3}{5}\sqrt{n} + \frac{12}{5} \iff 12\sqrt{n} \ge 12$$

$$\sqrt{n} \ge 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

ii. $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \mid \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n}+4} < \varepsilon + \frac{3}{5} \iff 15\sqrt{n} < (5\varepsilon + 3)(\sqrt{n}+4)$$

$$(12 - 5\varepsilon)\sqrt{n} < 20\varepsilon + 12$$

Senza perdita di generalità posso porre $12 - 5\varepsilon > 0 \iff \varepsilon < 12/5$

$$\sqrt{n} < \frac{20\varepsilon + 12}{12 - 5\varepsilon} = h(\varepsilon) \qquad (1)$$

☆ $h(\varepsilon)$ è crescente: dati $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \frac{12}{5} \iff \frac{20\varepsilon_1 + 12}{12 - 5\varepsilon_1} < \frac{20\varepsilon_2 + 12}{12 - 5\varepsilon_2}$

$$(20\varepsilon_1 + 12)(12 - 5\varepsilon_2) < (20\varepsilon_2 + 12)(12 - 5\varepsilon_1)$$

$$240\varepsilon_1 - \cancel{100\varepsilon_1\varepsilon_2} + \cancel{144} - 60\varepsilon_2 < 240\varepsilon_2 - \cancel{100\varepsilon_1\varepsilon_2} + \cancel{144} - 60\varepsilon_1$$

$$300\varepsilon_1 < 300\varepsilon_2 \qquad \text{VERIFICATO}$$

☆ $h(\varepsilon) = 1$

Da ☆ e ☆ si deduce che $h(\varepsilon) \ge 1 \ \forall \varepsilon > 0$

Inserendo in (1)

$$\sqrt{n} < \frac{20\varepsilon + 12}{12 - 5\varepsilon} \ge 1 \implies \sqrt{n} \le 1 \quad \text{Vero} \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$\boxtimes$