1 Successioni

1.1 Successioni di Cauchy

Lemma *l*.i Data$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$,

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è di Cauchy $\implies$ $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata

dim. (*l*.i) Consideriamo $\varepsilon = 1$:

$$\exists\, \varkappa > 0 : \forall\, k > \varkappa$$

si ha $|a_k - a_\varkappa| < 1$, $\forall\, k \geq \varkappa$

$$|a_k - a_\varkappa| \geq ||a_k| - |a_\varkappa||$$

Allora per $k > \varkappa$

$$||a_k| - |a_\varkappa|| < 1$$

$$|a_\varkappa| - 1 < |a_k| < |a_\varkappa| + 1$$

Consideriamo

$$m = \min\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_\varkappa|, |a_\varkappa| - 1\}$$
$$M = \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_\varkappa|, |a_\varkappa| + 1\}$$

Dunque $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$m < |a_k| < M$$

$\implies$ $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata $\square$

Teorema I (Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni) Data $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, si ha

a_k convergente $\iff$ a_k è di Cauchy

dim. (I)

"$\implies$" $\{a_k\}$ è convergente, allora

$$\exists\, l \in \mathbb{R}^n$$

tale che

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \overline{k} : \forall\, k > \overline{k} : |a_k - l| < \varepsilon$$

possiamo scrivere

$$|a_k - a_m| \leq |a_k - l| + |a_m - l|$$

$$\exists\, \overline{k}\, \forall\, k, m \geq \overline{k} :$$

$$|a_k - l| < \varepsilon/2$$
$$|a_m - l| < \varepsilon/2$$

ossia

$$|a_k - a_m| \leq |a_k - l| + |a_m - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\implies \{a_n\}$ è di Cauchy

" $\Longleftarrow$ " $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è di Cauchy

$\underbrace{\implies}_{Lemma}$ $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata

$\underbrace{\implies}_{B-W}$ ammette una sotosuccessione convergente, ossia esiste $h_k \in \mathbb{N}$, $\{a_{h_k}\}$ è convergente, ossia $\exists\, l \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall\, \varepsilon\, \exists \overline{k} :\, \forall\, k > \overline{k} :\, |a_{h_k} - l| < \varepsilon/2$$

Osserviamo

$$|a_k - l| \leq |a_k - a_{h_k}| + |a_{h_k} - l|$$

Poiché la successione è di Cauchy

$$\exists\, \overline{\overline{k}} :\, \forall\, m, h > \overline{\overline{k}} :\, |a_m - a_h| < \varepsilon$$

$$\exists\, \overline{\overline{\overline{k}}} :\, \forall\, k \geq \overline{\overline{\overline{k}}} :\, h_k > \overline{\overline{k}}$$

Allora preso

$$\varkappa = \max\{\overline{k}, \overline{\overline{k}}, \overline{\overline{\overline{k}}}\}$$

Otteniamo $\forall\, k \geq \varkappa$

$$|a_k - l| \leq \overbrace{|a_k - a_{h_k}|}^{<\varepsilon/2} + \overbrace{|a_{h_k} - l|}^{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

Osservazione (1.1) Nella dimostrazione si è usato il Teorema di Bolzano-Weirestrass, ossia la completezza di $\mathbb{R}$, dunque il criterio di convergenza di Cauchy non vale per successioni a valori in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{Q}^n$.

2 Teoremi per le funzioni continue

Notazione Un punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$ è detto *zero* di f

Teorema II (Teorema di esistenza degli zeri) Consideriamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e assumiamo f continua su $[a, b]$, e assumiamo che $f(a)f(b) < 0$

$\implies \exists\, c \in (a, b) \mid f(c) = 0$

dim. **(II)** Assumiamo $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$; consideriamo il punto medio $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Abbiamo tre possibilità sul segno di $f(c_0)$:

1. $f(c_0) > 0$: poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$;
2. $f(c_0) < 0$: poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$;
3. $f(c_0) = 0$: la dimostrazione è terminata ponendo $c = c_0$: $f(c) = 0$.

Consideriamo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

Abbiamo tre possibilità sul segno di $f(c_1)$:

1. $f(c_1) > 0$: poniamo $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$;
2. $f(c_1) < 0$: poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$;
3. $f(c_1) = 0$: la dimostrazione è terminata ponendo $c = c_1$: $f(c) = 0$.

Procedendo in questo modo, vi sono due possibilità

- $\exists\, n$ tale che $f(c_n) = 0$: $c = c_n$ e $f(c) = 0$;
- si ottengono due successioni a valori reali in $[a, b]$, che chiamiamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ tali che:
  - $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ crescente e $\forall\, n$, $a_n \leq b_0 = b$;
  - $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ decrescente e $\forall\, n$, $b_n \geq a_0 = a$;
  - $\forall\, n$, $a_n \leq b_n$

  Otteniamo inoltre una sequenza di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che

  $$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \cdots$$

  Inoltre
  $$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}\ \forall\, n$$
  allora
  $$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

  Si verifica che $a_n \longrightarrow l$, in quanto a_n crescente e limitata superiormente, e $b_n \longrightarrow m$, in quanto b_n è decrescente e limitata inferiormente: allora

  $$\forall\, n : \ a_n \leq l,\ b_n \geq m$$

allora

$$\forall\, n:\ 0 \leq m - l \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$\implies m - l = 0$

$\implies m = l.$

Poniamo $c = m = l$, e consideriamo c candidato zero della funzione. Verifichiamo che vale $f(c) = 0$.

Infatti,

$$\forall\, n \quad f(a_n) > 0 \quad f(b_n) < 0$$

inoltre

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c)$$

perché f continua e vale il teorema di relazione, e

$$\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(c).$$

Inoltre

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \geq 0$$

per il teorema di permanenza del segno, e

$$\lim_{n \to +\infty} f(b_n) \leq 0.$$

Risulta quindi che $\begin{cases} f(c) \geq 0 \\ f(c) \leq 0 \end{cases}$

$\implies f(c) = 0$ $\square$

Osservazione (2.1) Sotto l'ipotesi f continua su un intervallo $[a, b]$, c, lo zero c non è unico.

Osservazione (2.2) Il teorema vale solo su intervalli

Esempio (2.1) Preso

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ -1 & x \in [c, d] \end{cases}$$

con $b \lneqq c$, vale che $f(a) > 0$, $f(d) < 0$, f è continua su $[a, b] \cup [c, d] = D$, $\nexists\, c \in D$ tale che $f(c) = 0$

Osservazione (2.3) Data $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, l'ipotesi di f continua non è eliminabile

Teorema III (dei valori intermedi) Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, continua su (a,b); indichiamo

$$i = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \qquad s = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

con $i, s \in \mathbb{R}^*$

$\implies \forall\, \lambda \in (i,s)$, $\exists\, c \in (a,b)$ tale che $f(c) = \lambda$

dim. **(III)** Prendiamo $\lambda \in (i,s)$.

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a,b) \text{ t. c. } i < \underbrace{f(x_1)}_{m} < \lambda < \underbrace{f(x_2)}_{M} < s.$$

Consideriamo $g(x) = f(x) - \lambda$: g continua su (a,b), e $g(x_1) < 0$ e $g(x_2) > 0$; inoltre $x_1, x_2 \in (a,b)$, quindi g contiua su $[x_1, x_2]$ oppure $[x_2, x_1]$.

Allora, per il teorema di esistenza degli zeri, si ha che

$$\exists\, c \text{ tra } x_1, x_2 \text{ t. c. } g(c) = 0$$

ossia

$$f(c) - \lambda = 0 \implies f(c) = \lambda$$

Corollario Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua su (a,b), $a, b \in \mathbb{R}^*$; si indica con

$$i = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \qquad s = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

con $i, s \in \mathbb{R}^*$, si ha che

$$f\Big((a,b)\Big) = (i,s)$$

Possiamo dire che f continua mappa intervalli in intervalli, ovvero

$$f(I) = J$$

con $J = (i,s)$, e

$$i = \inf_{x \in I} f(x) \qquad s = \sup_{x \in I} f(x)$$