1 Continuità

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = 0$$

Esempio (1.1) Verifichiamo che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\sin x$ è continua in x_0. Sappiamo che $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$.

Per $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \sin(x_0+h) - \sin(x_0) = \\
&\qquad = \lim_{h\to 0}\left(\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0\right) = \\
&\qquad\qquad = \lim_{h\to 0}\left(\sin x_0 (\cos h - 1) + \sin h \cos x_0\right) =
\end{aligned}$$

Dato che $\sin h \xrightarrow{h\to 0} 0$

$$= \sin x_0 \lim_{h\to 0}\left(\cos h - 1\right) = 0$$

Allora $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$\implies$ $\sin x$ continua su $\mathbb{R}$. Allo stesso modo si verifica che $\cos x$ è continua su $\mathbb{R}$

Proprietà (Algebra delle funzioni continue) Date $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, f, g continue in x_0, allora $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha che $af + g$ è continua in x_0

Inoltre

- fg continua in x_0
- se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ continua in x_0
- $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ è continua in x_0

Teorema I (Continuità della funzione composta) Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $g : f(D) \to \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$

$\implies$ $g \circ f$ è continua in x_0

dim. **(I)**

$$\forall\, V(g(f(x_0)))\, \exists\, W(f(x_0)) \text{ tale che } \forall y \in W \cap f(D)$$

$\implies g(y) \in V$

$\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D \implies f(x) \in W$

Allora $\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D$ $g(f(x)) \in V$

$\implies g \circ f$ è continua in x_0

Proprietà Date $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per D, $g : E \to \mathbb{R}$, con $f(D) \subseteq E$, assumiamo

i.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in E$$

ii. g continua in l, $l \in \mathbb{R}$

$\implies \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)$

Allora, date *i.* e *ii.*, si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

Si dimostra che sono continue nel loro dominio

- i polinomi
- le frazioni algebriche
- le funzioni esponenziali
- le funzioni logaritmiche
- le funzioni goniometriche e le loro inverse

Tutte queste funzioni sono dette "funzioni elementari"

Attenzione Data $f : D \to \mathbb{R}$, f invertibile su D, e f continua su D

$\not\Rightarrow f^{-1}$ sia continua du $f(D)$

Esempio (1.2) La funzione è analiticamente definita come

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Notiamo che $D = [0, 1] \cup (2, 3]$, e che f sia continua nel suo dominio.

$$f(D) = [0, 2]$$

Invertendola:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quindi f^{-1} non è continua su $f(D)$, in particolare non è continua in $x_0 = 1$

Proprietà Data $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo,
se f è invertibile e continua su I
$\implies f^{-1}$ è continua su $J = f(I)$

1.1 Discontinuità

Consideriamo $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ e f continua in $D \setminus \{x_0\}$

Diciamo che:

1. x_0 è una *discontinuità eliminabile* se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \wedge l \neq f(x_0)$$

   Esempio (1.3)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R} \neq 0$$

   Quindi $x_0 = 0$ è discontinuità eliminabile

2. x_0 è detto *salto* o *punto di salto* se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = n \in \mathbb{R}$$
$$l \neq n$$

Si definisce *ampiezza del salto* la grandezza

$$s = l - n$$

Esempio (1.4) Data

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 1$

Esempio (1.5) Data

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 2$

Notazione Nel Pagani Salsa i punti di salto sono detti discontinuità di prima specie

Notazione Nella terminologia a lezione, si intendono sia i salti che le discontinuità eliminabili come discontnuità di prima specie

3. x_0 è *discontinuità di seconda specie* se si verifica una delle seguenti condizioni

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) &= \pm\infty \\ &\mp\infty \\ &+\infty \\ &-\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0^{+}} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to x_0^{-}} f(x) = \nexists$$

1.2 Prolungamento per continuità di una funzione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'$.

Assumiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Diciamo *prolungamento per continuità* di f in x_0 la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in x_0

Ovviamente se $x_0 \in D$ e f continua in x_0 allora

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

Esempi (1.6)

- Consideriamo

  $$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

  f non è continua in 0, con una discontinuità elimiinabile

  $$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = x^2$$

  Questo è il prolungamento per continuità di f

- Consideriamo

  $$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

  Si ha che $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è continua nel suo dominio.

  $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

  Allora

  $$\tilde{f}(x) \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

  è il prolungamento per continuità di f in 0; $\tilde{f}$ è continua su $\mathbb{R}$

- Consideriamo $f(x) = x^x$. Si ha che $D = \text{dom} f = (0; +\infty)$.

  Osserivamo che

  $$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^l = 1$$

  dove

  $$l = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \cdots = 0$$

La funzione $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

è l'estensione per continuità di $f(x)$ in $x_0 = 0$. $\tilde{f}$ è continua su $[0; +\infty)$

2 Successioni

2.1 Un limite notevole

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\alpha = 0 \implies$ il limite vale 1
- $\alpha > 0$; ricordiamo che

  $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$

  Allora $\forall\, \varepsilon > 0$

  $$-(1-\varepsilon)^n < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$

  definitivamente

  Ma è facile vedere

  $$1 < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$

  definitivamente

  $\implies 1 < \sqrt[n]{n^\alpha} < 1 + \varepsilon$ definitivamente

  Per $\varepsilon \to 0$ si ha che

  $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

- $\alpha < 0$

  $$\sqrt[n]{n^\alpha} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{-\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}}$$

  Ma $\sqrt[n]{n^\beta} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$, con $\beta = -\alpha > 0$ Quindi

  $$\frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}} = 1$$

Ne segue che $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

2.2 Sottosuccessioni

Si ha l'obiettivo di indagare più a fondo il comportamento delle successioni irregolari

Esempi (2.1)

1. Si consideri
$$a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1$$
   - con gli indici pari
   $$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, 1, 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$
   si ha che $a_{2n} \xrightarrow{n \to +\infty} 1$
   - con gli indici dispari
   $$a_{2n+} = (-1)^{2n+1} = -1, -1, .1 \qquad n \in \mathbb{N}$$
   si ha che $a_{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} -1$

Definizione Sia $a : \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ successione a valori reali. Consideriamo una successione di indici
$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto k_n \end{aligned}$$
con k strettamente crescente, ovvero
$$k_n < k_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
Diciamo *sottosuccessione di* a la successione
$$b_n = a_{k_n}$$
Concretamente per costruire $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ cancelliamo ad $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una quantità infinita di termini lasciando gli altri invariati.

Ogni successione è sottosuccessione di se stessa, basta prendere $k_n = n$

Esercizio Dati
$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$
$$b_n = n \sin\left(\frac{\pi}{2} n\right)$$
estrarre le possibili sottosuccessioni regolari

Soluzione DA FARE