1 Forme Bilineari

1.1 Vettori ortogonali

Definizione Data $\xi \in B(V, \mathbb{K})$, v, w sono ortogonali a ξ se $\xi(v, w) = 0$

Osservazione (1.1) Il vettore nullo $\underline{0}$ è ortogonale ad ogni $v \in V$, infatti

$$\xi(v, \underline{0}) = \xi(v, 0 \cdot \underline{0}) = 0\,\xi(v, \underline{0}) = 0$$

Sia $A \subseteq V$ un sottoinsieme,

$$A^{\perp} = \{v \in V \text{ t. c. } \xi(a, v) = 0 \,\forall\, a \in A\}$$

$A^{\perp}$ si dice *spazio ortogonale* ad A

Proposizione *p*.i $A^{\perp}$ è sempre un sottospazio vettoriale

***dim.* (*p*.i)** Siano $v, w \in A^{\perp}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e verifichiamo che $\lambda v + \mu w \in A^{\perp}$.
Se $a \in A$, risulta

$$\xi(a, \lambda v + \mu w) \underset{1}{=} \lambda\xi(a, v) + \mu\xi(a, w) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$$

$\implies \lambda v + \mu w \in A^{\perp}$ $\square$

In particolare, se $H \subseteq V$ è un sottospazio
$\implies H^{\perp}$ è un sottospazio.

Proposizione *p*.ii Siano $v_1, \cdots, v_l \in V$, $\xi \in B(V, \mathbb{K})$. Sono fatti equivalenti

1. $v \in V$ ortogonale a tutti i v_i, $\forall\, i = 1, \cdots, l$
2. v è ortogonale a $\mathscr{L}(v_1, \cdots, v_l)$

***dim.* (*p*.ii)**

"2. $\implies$ 1." È ovvio.

"1. $\implies$ 2." Sia $w \in \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_l)$

$\implies w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l$, quindi

$$\xi(w, v) = \xi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_l v_l, v) = \lambda_1 \xi(v_1, w) + \cdots + \lambda_l \xi(v_l, w) = 0$$

[1] ξ è bilineare

Sia $\xi \in B(V, \mathbb{K})$, siano W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V, W_1 e W_2 sono ortogonali se

$$\xi(w_1, w_2) = 0 \quad \forall\, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$$

Osservazione (1.2) Se V è uno spazio vettoriale su R, e $\xi = \cdot$ è un prodotto scalare, allora $\forall\, W \subseteq V$ sottospazio vettoriale, vale:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Questo non è vero in generale per le forme bilineari: in molti casi

$$W \cap W^{\perp} \neq \{\underline{0}\}$$

Esempio (1.1) In $\mathbb{R}^3$ si considera la forma bilineare simmetrica avente forma quadratica

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$$

Sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale generato da

$$u_1 = (4, 1, 0) \qquad u_2 = (3, 0, 1).$$

Calcoliamo $W^{\perp}$.

Sappiamo che $\xi(X, Y) = {}^tXAY$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $x \in W^{\perp} \iff \xi(x, u_1) = \xi(x, u_2) = 0$

$$\xi(x, u_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1 - 8x_2 - 5x_3$$

$\xi(x, u_2) =$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= 2x_1 - 7x_2 - 5x_3$$

$\Longrightarrow\ x \in W^{\perp} \iff$

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Si risolve il sistema $\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5x_3/2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

$\Longrightarrow\ W^{\perp} = \mathscr{L}(5/2, 0, 1)$

Osservazione (1.3) Se $v \in W \cap W^{\perp}$, e $v \neq \underline{0}$

$\Longrightarrow\ \xi(v, v) = \underline{0}$. Se $\mathscr{B}$ è una base di V, risulta che

$$^t(v)_{\mathscr{B}}\, M^{\mathscr{B}}(\xi)\, (v)_{\mathscr{B}} = 0$$

con $(v)_{\mathscr{B}} \neq \underline{0}$ in $\mathbb{K}^n$

$\Longrightarrow\ \exists\, X \in \mathbb{K}^n$ con $X \neq \underline{0}$ tale che

$$^tX\, M^{\mathscr{B}}(\xi)\, X = 0.$$

1.2 Nucleo di una forma bilineare simmetrica

Sia $\xi \in B_S(V, \mathbb{K})$,

$$\ker \xi = \Big\{ v \in V \text{ t. c. } \xi(v, w) = 0\, \forall\, w \in V \Big\}$$

Esempio (1.2) Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale Euclideo e $\xi = \cdot$, $\ker \xi = \{\underline{0}\}$

Esercizio Verificare che $\ker \xi$ è sempre un sottospazio vettoraile di V

Soluzione Risolvere per esercizio

Osservazione (1.4) $\ker(\xi)^{\perp} = V$, infatti

$$\ker(\xi)^{\perp} = \Big\{ v \in V \text{ t. c. } \xi(v,w) = 0 \,\forall\, w \in \ker(\xi) \Big\} = V$$

Osservazione (1.5) In generale se $W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, può accadere che

$$(W^{\perp})^{\perp} \neq W$$

Esercizio Su $\mathbb{R}^3$ si consideri la forma bilineare simmetrica

$$\xi(x,y) = 2x_1y_1 - (x_1y_1 + x_2y_2) + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - 4x_3y_3$$

e il sottospazio vettoriale

$$W = \{ X \in \mathbb{R}^3 \text{ t. c. } x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$$

Si calcoli $(W^{\perp})^{\perp}$

Soluzione Risolvere per esercizio

Teorema I Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, V finitamente generato, $\xi \in B_S(V,\mathbb{K})$. Sia $\mathscr{B}$ una base di V.

Allora

$$\ker \xi = \Big\{ v \in V \text{ t. c. } (v)_{\mathscr{B}} \in \text{nullspace}\Big(M^{\mathscr{B}}(\xi) \Big) \Big\} \tag{1.1}$$

***dim.* (I)** Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$

$\ker \xi = \{ v \in V \text{ t. c. } \xi(v,w) = 0 \,\forall\, w \in V \} = \{ v \in V \text{ t. c. } \xi(v,v_i) = 0 \,\forall\, i = 1, \cdots, n \}$

$$\begin{aligned}
v \in \ker(\xi) \iff& \\
\iff& \xi(v, v_i) = 0 \,\forall\, i = 1, \cdots, n \iff \\
\iff& \xi(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n, v_i) = 0 \,\forall\, i = 1, \cdots, n \iff \\
\iff& \sum_{j=1}^{n} x_j \xi(v_i, v_j) = 0 \,\forall\, i = 1, \cdots, n \iff M^{\mathscr{B}}(\xi)(v)_{\mathscr{B}} = \underline{0} \iff \\
\iff& (v)_{\mathscr{B}} \in \text{nullspace}\Big(M^{\mathscr{B}}(\xi)\Big)
\end{aligned}$$

Definizione Una forma bilineare simmetrica ξ si dice

- *degenere* se $\ker \xi \neq \{\underline{0}\}$;
- *non degenere* se $\ker \xi = \{\underline{0}\}$

Dal teorema precedente risulta che in dimensione finita:

$$\xi \text{ non degenere} \quad \iff \quad \det\Big(M^{\mathscr{B}}(\xi) \Big) \neq 0$$

(questa condizione non dipende dalla base che si utilizza).

1.3 Vettori isotropi e cono isotropo

Sia V spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$ (con la caratteristica di $\mathbb{K}$, $\neq 2$), $\xi \in B_S(V, \mathbb{K})$. Un vettore $v \in V$ si dice *isotropo* rispetto a ξ se

$$Q_\xi(v) = 0 \tag{1.2}$$

(cioè $\xi(v, v) = 0$).

Si definisce

$$I = \Big\{v \in V \text{ t. c. } Q_\xi(v) = 0\Big\} \tag{1.3}$$

ed è il cono isotropo di ξ.

Osservazione (1.6) Prende il nome di *cono* poiché I, in generale, non è un sottospazio vettoriale (se $v, w \in I$, $Q_\xi(v + w) \neq Q_\xi(v) + Q_\xi(w)$) perché non è in generale chiuso rispetto a "+".

Però se $v \in I$ e $\lambda \in \mathbb{K}$

$\implies Q_\xi(\lambda v) = \lambda^2 Q_\xi(v) = 0$

$$\forall\, v \in I, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda v \in I.$$

Quindi I non è chiuso rispetto a "+" ma solo rispetto ai prodotti per scalari. Sottoinsiemi di questo tipo si dicono *coni*.

Osservazione (1.7) $\ker \xi \subseteq I$, infatti se $v \in \ker \xi$

$\implies \xi(v, w) = 0 \;\forall\, w \in V$

$\implies \xi(v, v) = 0$

$\implies v \in I.$

Se V ha dimensione finita, fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di V.

$$I = \{v \in V \text{ t. c. } Q_\xi(v) = 0\} = \{v \in V \text{ t. c. } {}^t(v)_{\mathscr{B}} M^{\mathscr{B}}(\xi)(v)_{\mathscr{B}} = 0\}$$

Noto che ${}^t(v)_{\mathscr{B}} M^{\mathscr{B}}(\xi)(v)_{\mathscr{B}} = 0$ è un'equazione di secondo grado nelle componenti di $(v)_{\mathscr{B}}$

Esempio (1.3) Sia su $\mathbb{R}^2$ la forma quadratica $Q_\xi(x) = x_1^2 - x_2^2$

$$\begin{aligned} I = \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } Q_\xi(v) = 0\} &= \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } x_1^2 = x_2^2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } x_1 = \pm x_2\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } x_1 = +x_2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } x_1 = -x_2\} = \\ &= \mathscr{L}((1,1)) \cup \mathscr{L}((1,-1)) \end{aligned}$$

I è unione di due rette, I non è sun sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

Teorema II Sia V spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$, e $\xi \in B_S(V, \mathbb{K})$ non degenere, sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale.

$\implies \dim(W^\perp) = \dim V - \dim W$

***dim.* (II)** Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e supponiamo $\dim W = h$.

- $h = 0 \implies \dim W = 0$

  $\implies W = \{\underline{0}\}$

  $\implies W^\perp = V$

  $\implies \dim W^\perp = \dim V - 0$

- $h \neq 0$. Sia $\{w_1, \cdots, w_h\}$ una base di W, sia $A = M^{\mathscr{B}}(\xi)$. Sia $C \in \mathbb{K}^n$

$$C = \begin{pmatrix} (w_1)_{\mathscr{B}} \\ \vdots \\ (w_h)_{\mathscr{B}} \end{pmatrix}$$

  Le righe di C sono le componenti dei votteri della base di W rispetto alla base B, ${}^t C = \Big((w_1)_{\mathscr{B}}, \cdots, (w_h)_{\mathscr{B}}\Big)$

$$W^\perp = \Big\{v \in V \text{ t. c. } \xi(w_i, v) = 0 \,\forall\, i = 1, \cdots, h\Big\}$$

  $\xi(w_i, v) = 0 \iff {}^t(w_i)_{\mathscr{B}} A (v)_{\mathscr{B}} = 0$ quindi

$$W^\perp = \Big\{v \in V \text{ t. c. } CA(v)_{\mathscr{B}} = \underline{0}\Big\}$$

  Quindi $W^\perp$ sono i vettori $v \in V$ tali che $(v)_{\mathscr{B}} \in \text{nullspace}(CA)$, $\text{rank}(C) = h$ e $\text{rank}(A) = n$[2] , ovvero la dimensione di V

  $\implies \text{rank}(CA) = A$. Per il teorema di nullità più rango si ottiene che

$$\dim \text{nullspace}(CA) = n - h = \dim V - \dim W$$

1.4 Basi ortogonali, Teorema di Lagrange

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (caratteristica di $\mathbb{K} \neq 2$), supponiamo V finitamente generato e $\xi \in B_S(V, \mathbb{K})$. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V.

Definizione $\mathscr{B}$ è *ortogonale* se $\xi(v_i, v_j) = 0 \;\forall\, i, j = 1, \cdots, n$, e $i \neq j$.

[2] qui si usa ξ non degenere

Osservazione (1.8) Se B è una base ortogonale

$\implies M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è diagonale

$\implies Q_\xi(V) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$, dove $(v)_{\mathscr{B}} = (x_1, \cdots, x_n)$

Teorema III (di Lagrange) Nelle nostre ipotesi esiste sempre una base ortogonale

***dim.* (III)** Per induzione su $n = \dim V$.

- Se $n = 1$, ogni base è ortogonale.
- Supponiamo l'enunciato vero per spazi vettoriali n-dimensionali, e supponiamo $\dim V = n+1$
  - Se $\xi(v, w) = 0 \ \forall\, v, w \in V$

    $\implies$ ogni base è ortogonale.
  - Supponiamo che esista $v_1 \in V$ tale che $\xi(v_1, v_1) \neq 0$

    Sia $W = \mathscr{L}(v_1)^\perp$.

    $$W = \{v \in V \text{ t.c. } \xi(v, v_1) = 0\}$$

    Sia

    $$\begin{aligned} F_1 : V &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto \xi(v, v_1) \end{aligned}$$

    F_1 è lineare poiché ξ è bilineare, e $W = \ker F_1$, $\dim \mathbb{K} = 1$

    $\implies \dim W \geq n$, ma poiché $F_1(v_1) \neq 0$

    $\implies \dim W = n$, ma W non contiene v_1

    $\implies V = W \oplus L(v_1)$

    Si usa l'ipotesi induttiva

    $\implies \exists\, \{w_2, \cdots, w_{n+1}\}$ base ortogonale di W

    $\implies \{v_1, w_2, \cdots, w_{n+1}\}$ base ortogonale di V. □

Corollario Ogni matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ simmetrico è congruente ad una matrice diagonale, cioè esiste $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

Osservazione (1.9) Se $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso (es. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

$\Longrightarrow$ ogni base ortogonale può essere modificata in modo che sia ortogonale e $\xi(v_i, v_i) \in 0, 1$, infatti se $\xi(v_i, v_i) = a_i$ con $a_i \neq 0$, poiché $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso $\exists\, b_i \in \mathbb{K}$ tale che $b_i^2 = a_i$, e quindi sostituendo a v_i, v_i/b_i si ottiene

$$\xi\Big(v_i/b_i, v_i/b_i\Big) = 1$$

Proposizione *p*.iii Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ due matrici simmetriche, con $\mathbb{K}$ campo algebricamente chiuso.

A, B sono simili $\iff$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

***dim.* (*p*.iii)**

"$\Longrightarrow$" Ovvia e sempre vera.

"$\Longleftarrow$" Per il teorema di Lagrange entrambe sono simili ad una matrice diagonale. Poiché $\mathbb{K}$ è algebricamente chiuso, per le matrici diagonali si può assumere che abbiano solo 0 e 1 sulla diagonale.

$\Longrightarrow$ $\exists P, Q \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tale che ${}^tPAP = D_1$ e ${}^tQBQ = D_2$, D_1 e D_2 matrici diagonali aventi solo 0 e 1 sulla diagonale.

Posso supporre

$$D_1 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dove Id_r è l'identità $r \times r$ e

$$D_2 = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Id}_s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

dove Id_s è l'identità $s \times s$

Poiché $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ risulta $r = s$

$\Longrightarrow$ $D_1 = D_2$

$\Longrightarrow$ ${}^tPAP = {}^tQBQ$

$\Longrightarrow$ A, B simili, poiché stanno nella stessa classe di equivalenza. $\square$