1 Spazi vettoriali Euclidei

Proposizione *p*.i La norma associata ad un prodotto scalare ha le seguenti proprietà:

1. $||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$
3. Teorema di Pitagora:
   Siano $v, w \in V$. $vw = 0 \iff ||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$
4. Disuguaglianza di Cauchy-Swartz: $|v \cdot w| \leq ||v|| \, ||w||$

   L'uguaglianza vale $\iff$ v e w sono linearmente dipendenti
5. Disuguaglianza triangolare: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Osservazione (1.1) $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 1.

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \cdot y = xy$, dove a destra vi è la moltiplicazione in $\mathbb{R}$. $\cdot$ è un prodotto scalare.

Si noti che

$$||x|| = \sqrt{x * x} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La 5. è coerente con la disuguaglianza triangolare soddisfatta dal valore assoluto in $\mathbb{R}$

dim. **(*p*.i)**

1. 2. già viste

3. si considera $||v + w||^2$

$$\begin{aligned} ||v + w||^2 = (v + w) \cdot (v + w) = \\ = v \cdot v + v \cdot w + w \cdot v + W \cdot w = \\ = ||v||^2 + 2v \cdot w + ||w||^2 \end{aligned}$$

   Segue la proprietà

4. Sicuramente la formula vale se $v = \underline{0}$ o $w = \underline{0}$. Supponiamo $v, w \neq \underline{0}$. Per $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $p(\lambda) = ||\lambda v + w||^2$

$$p(\lambda) = (\lambda v + w) \cdot (\lambda v + w) = \lambda^2 ||v||^2 + 2\lambda v \cdot w + ||w||^2$$

   $\implies p(\lambda) \in \mathbb{R}_2[\lambda]$

   Sappiamo che $p(\lambda) \geq 0 \;\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\implies$ il suo Δ soddisfa $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = 4(v \cdot w)^2 - 4||v||^2||w||^2$$

Si ottiene che $(v \cdot w)^2 \leq ||v||^2||w||^2$

$\implies |v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

Vale l'uguaglianza $\iff$ $\Delta = 0$, quindi se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ per cui $p(\lambda) = 0$

$p(\lambda) = 0 \iff ||\lambda v + w|| = 0 \iff \lambda v + w = \underline{0}$

$\iff$ v e w sono linearmente dipendenti

5. $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2\, v \cdot w$.

   Per Cauchy-Swartz $|v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

   $\implies -||v||\,||w|| \leq |v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

   $\implies ||v + w||^2 \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2\,||v||\,||w|| = (||v||\,||w||)^2$

   $\implies ||v + w|| \leq ||v||\,||w||$ $\square$

Applicazione di Cauchy-Swartz Siano $v, w \in V$, $v, w \neq 0$: so che $|v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

$$\implies -1 \leq \frac{v \cdot w}{||v||\,||w||} < 1$$

$\implies \exists\, \theta \in [0, \pi]$ tale che $\frac{v \cdot w}{||v||\,||w||} = \cos\theta$

$$\theta = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}\right)$$

θ è per definizione l'angolo tra v e w, e dipende dal prodotto scalare considerato

Osservazione (1.2)

- Se considero V_3, il prodotto scalare è stato definito come $v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos \hat{vw}$. Anche in questo caso l'angolo che formano i due vettori è
$$\hat{vw} = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}\right)$$
- Se $v, w \in V$ e $v, w \neq 0$ si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0 \iff$ l'angolo formato dai due vettori sia $\frac{\pi}{2}$

Definizione Se A è un insieme si definisce una *distanza* su A come una funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}_+$ che soddisfa le seguenti proprietà

1. $d(a, b) = 0 \iff a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (Disuguaglianza triangolare)

(A, d) si dice uno *spazio metrico.*

Esempio (1.1) $\mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = |x - y|$

Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale euclideo si definisce $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$

$$d(v, w) = ||v - w||.$$

Per la proposizione precedente d definisce una distanza su V

Definizione Se $v \in V$ con $v \neq \underline{0}$, il versore di v è il vettore

$$\text{vers}(v) := \frac{v}{||v||}$$

Osservazione (1.3) $||\text{vers}(v)|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \frac{||v||}{||v||} = 1$

v ha la stessa direzione, stesso verso di v ma norma 1

1.1 Basi ortogonali e Basi ortonormali

$(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base.

- $\mathscr{B}$ è ortogonale se $v_i \cdot v_j = 0 \; \forall \, i \neq j$
- $\mathscr{B}$ è ortonormale se è ortogonale e tutti i vettori della base hanno norma 1

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

In generale si scrive δ_{ij} per indicare

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

e prende il nome di "Delta di Knonecker"

Esempi (1.2)

- La base canonica in $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard ($x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$)
- In $\mathbb{R}^{m,n}$ la base canonica E_{ij} è ortonormale rispetto al prodotto scalare:

$$A \cdot B = \operatorname{tr}({}^t BA)$$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare

$$x \cdot y = 5x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$$

si trovi una base ortonormale

Soluzione $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= 5 \\ e_1 \cdot e_2 &= 0 \\ e_1 \cdot e_3 &= 0 \\ e_2 \cdot e_2 &= 3 \\ e_2 \cdot e_3 &= 0 \\ e_3 \cdot e_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\mathscr{B}$ è una base ortogonale, ma non ortonormale.

$$\mathscr{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} e_1, \frac{1}{\sqrt{3}} e_2, \frac{1}{2} e_3 \right\}$$

è una base ortonormale

Esercizio Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, sia $\{v_1, \cdots, v_l\} \subseteq V$ tale che $v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \; \forall \, i, j = 1, \cdots, l$

Si dimostri che $\{v_1, \cdots, v_l\}$ sia sempre libero.

($\implies l \leq \dim V$, $l = \dim V \iff \{v_1, \cdots, v_l\}$ è una base)

Soluzione Suppongo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = 0$$

e dimostro $\lambda_i = 0 \; \forall \, i = 1, \cdots, l$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l) \cdot v_i &= 0 \\ \lambda_1 v_1 v_i + \lambda_2 v_2 v_i + \cdots + \lambda_l v_l v_i &= 0 \end{aligned}$$

$\implies \lambda_i = 0$

$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_3 = 0$ $\square$

Sia $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo e $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale di V rispetto a $\cdot$

Sia $v \in V$,

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

quindi

$$v \cdot e_r = \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k e_r)$$

$\implies x_r = v \cdot e_r$

Rispetto ad una base ortonormale ogni v si scrive come

$$v = \sum_{k=1}^{n} (v \cdot e_k) e_k$$

Teorema I Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo e sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base.

Esiste $\mathscr{B}' = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale di $(V, \cdot)$ tale che

$$\mathscr{L}(v_1, \cdots, v_k) = \mathscr{L}(e_1, \cdots, e_k) \quad \forall\, k = 1, \cdots, n$$

dim. **(I)** La dimostrazione corrisponde all'*algoritmo di Gram-Schmidt* $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Per e_1 non ho facoltà di scelta:

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$

Sia $e_2' = v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1$, si noti che $e_2' \cdot e_1 = v_2 \cdot e_1 - v_2 \cdot 1 = 0$

e_2' è ortogonale a e_1; $\mathscr{L}(e_1, e_2') = \mathscr{L}(v_1, v_2)$. Ad e_2' manca solo la proprietà di avere norma 1

A questo punto si può definire e_2 come

$$e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1}{||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1||}$$

Itero fino ad ottenere

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i=1}^{j-1} (v_j \cdot e_i) e_i}{||v_j - \sum_{i=1}^{j-1} (v_j \cdot e_i) e_i||}$$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathscr{B} = v_1, v_2, v_3$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (2,1,2)$.

Si applichi l'algoritmo per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$$

Soluzione Da fare