1 Funzione convessa

Definizione Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è *convesso* se $\forall\, x, y \in E$, il segmento $[x, y] \subseteq E$.

Si noti che in $\mathbb{R}^n$ un segmento $[x, y]$ è definito come

$$[x, y] := x + ty$$

al variare di $t \in [0, 1]$.

Definizione Data $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, diciamo *epigrafo* (o epigrafico), l'insieme

$$\operatorname{Epi} f = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } x \in I, y \geq f(x)\Big\}$$

Diciamo che una funzione f è convessa su I, se $\operatorname{Epi}(f)$ è convesso in $\mathbb{R}^2$

Poniamo adesso nel caso in cui f sia derivabile su I.

Teorema I (di caratt. delle funzioni convesse) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I, allora sono equivalenti le seguenti proprietà:

1. f convessa su I;
2. $\forall\, x_0, x \in I,\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;
3. f' è crescente su I.

dim. **(I)** Dimostreremo che 1. $\implies$ 2. $\implies$ 3. $\implies$ 1.

1. $\implies$ 2. Consideriamo f convessa su I, e fissiamo $x_0, x \in I$, con $x_0 < x$. È noto che $\forall\, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f\Big((1-t)x_0 + tx\Big) &\leq (1-t)f(x_0) + t\,f(x) \\ f(x_0 - tx_0 + tx) &\leq f(x_0) - t\,f(x_0) + t\,f(x) \\ f\Big(x_0 + t(x - x_0)\Big) &\leq f(x_0) + t\Big(f(x) - f(x_0)\Big) \\ f\Big(x_0 + t(x - x_0)\Big) - f(x_0) &\leq t\,\Big(f(x) - f(x_0)\Big) \end{aligned}$$

Per $t \in (0, 1)$ dividiamo per $t(x - x_0) > 0$

$$\frac{f\Big(x_0 + t(x - x_0)\Big) - f(x_0)}{t(x - x_0)} \leq \frac{\cancel{t}\,\Big(f(x) - f(x_0)\Big)}{\cancel{t}(x - x_0)}$$

Posto $h = t(x - x_0)$ abbiamo che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

Quando $t \to 0 \implies h \to 0$, quindi questa proprietà è valida definitivamente per $h \to 0$.

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \underset{1}{\leq} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}$$

$\implies f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

2. $\implies$ 3. Noi sappiamo che f è derivabile su I, e $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Allora si ha che fissati $x_0, x \in I$, con $x_0 < x$,

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{>0}$$

inoltre vale anche (scambiando x e x_0)

$$f(x_0) \geq f(x) + f'(x)\underbrace{(x_0-x)}_{<0}.$$

Allora abbiamo che

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$f(x_0) - f(x) \geq f'(x)(x_0-x) \implies f(x)-f(x_0) \leq f'(x)(x-x_0).$$

Otteniamo quindi, dalla seconda equazione:

$$f'(x) \geq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$f'(x_0) \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'(x).$$

Allora per $x < x_0$ generico in I si ha

$$f'(x_0) \leq f'(x)$$

$\implies$ per genericità di $x_0, x \in I$, $x < x_0$, f' è crescente su I.

3. $\implies$ 1. Data f' crescente su I, dobbiamo far vedere che

$\forall\, t \in [0,1], \forall\, x_0, x \in I$

$$f\Big((1-t)x_0 + tx\Big) \leq (1-t)f(x_0) + t\, f(x) \tag{1.1}$$

[1] per permanenza del segno

(1.1) è ovviamente vera per $t = 0 \wedge t = 1$

Consideriamo ora $t \in (0,1)$. Preso

$$z_t = (1-t)\,x_0 + t\,x = x - t\,x_0 + t\,x = x_0 + t\,(x - x_0)$$

Dato $t \in (0,1)$, assumendo $x_0 < x$, vale che $x_0 < z_t < x$.

Applichiamo il Teorema di Lagrange agli intervalli $I_1 = [x_0, z_t]$ e $I_2 = [z_t, x]$, in quanto f derivabile (e quindi continua) su I_1, I_2.

Allora $\exists\, z \in I_1$ e $w \in I_2$ tale che

$$f'(z) = \frac{f(z_t) - f(x_0)}{(z_t - x_0)} \qquad f'(w) = \frac{f(x) - f(z_t)}{(x - z_t)}$$

$$f'(z) = \frac{f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0)}{\cancel{x_0} + t\,(x - x_0) - \cancel{x_0}} \tag{1.2}$$

$$f'(w) = \frac{f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)}{x - x_0 - t\,x + t\,x_0} = \frac{f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)}{(1-t)(x - x_0)} \tag{1.3}$$

Da (1.2) otteniamo che

$$f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0) = t\,f'(z)\,(x - x_0). \tag{1.4}$$

Da (1.3) otteniamo che

$$f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) = (1-t)\,f'(w)\,(x - x_0) \tag{1.5}$$

Moltiplichiamo (1.4) per $(1-t)$ e (1.5) per t

$$(1-t)\Big[f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0)\Big] = \underbrace{t\,(1-t)}_{>0}\,f'(z)\,\underbrace{(x - x_0)}_{>0}$$

$$t\Big[f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)\Big] = \underbrace{t\,(1-t)}_{>0}\,f'(w)\,\underbrace{(x - x_0)}_{>0}.$$

Inoltre $z \in [x_0, z_t]$, $w \in [z_t, x]$

$\implies z < w$

$\implies f'(z) \leq f'(w)$, in quanto per ipotesi f' è crescente.

Allora si ha, per $x_0 < x$

$$(1-t)\Big[f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0)\Big] \leq$$
$$\leq t\Big[f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)\Big]$$

Con banali passaggi algebrici si ottiene

$$f\Big((1-t)\,x_0 + t\,x\Big) \leq (1-t)\,f(x_0) + t\,f(x)$$

ossia f convessa su I.

Per $x < x_0$ si fanno passaggi simili. $\square$

Teorema II (test della derivata seconda) Data f derivabile due volte su I, f è convessa su I

$\iff f''(x) \geq 0 \;\forall\, x \in I$.

dim. **(II)** È sufficiente applicare il test della derivata prima ad f'. $\square$

Definizione $f : I \to \mathbb{R}$ è detta *concava* se $g := -f$ è convessa.

f derivabile su I è concava

$\iff$ la tangente in ogni punto giace sopra il grafico;

$\iff$ f' è decrescente (e se f derivabile due volte $\iff f''(x) \leq 0 \;\forall\, x \in I$).

Definizione Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, f derivabile in x_0, x_0 è un *punto di flesso* per f

- se f convessa in $(x_0 - \delta, x_0)$ e f concava in $(x_0, x_0 + \delta)$, ed è detto *flesso discendente*;
- se f concava in $(x_0 - \delta, x_0)$ e f convessa in $(x_0, x_0 + \delta)$, ed è detto *flesso ascendente.*

Attenzione In x_0 punto di flesso, la tangente in x_0 attraversa (taglia) il grafico.

Definizione Se la tangente è orizzontale in x_0 ($f'(x_0) = 0$), x_0 è detto *flesso a tangente orizzontale.*

Attenzione Per definire il flesso la funzione deve essere derivabile in quel punto.

Caso particolare: f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$$

x_0 è detto flesso a tangente verticale.

In x_0 flesso a tangente verticale, la tangente è verticale e taglia il grafico.

Proprietà Data $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, f derivabile due volte in x_0. Allora vale

x_0 è punto di flesso (non verticale)

$\implies f''(x_0) = 0$

Dimostrazione. Si applica il teorema di Fermat a f' $\square$

I candidati punti di flesso (se f è derivabile due volte) sono i punti con $f''(x_0) = 0$.

Attenzione $f''(x) = 0 \not\Rightarrow x_0$ punto di flesso

Esempio (1.1) Sia $f(x) = x^4$,

$$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$$

Si ha che $f''(x) = 0 \iff x = 0$.

Quindi $x = 0$ è punto di minimo e non di flesso.