Liceo "I. Newton" di Chivasso

LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo scienze applicate

APPUNTI

Corso di Matematica Olimpionica

Davide PECCIOLI

1^a **e** 2^a **superiore**

1. *Successioni*

1.1 Aritmetiche $\rightarrow n_a = n_{a-1} + k$

- punto di partenza$\rightarrow a_0$
- ragione $\Delta a = d$

$$\{\, a_0; a_0 + d; a_0 + 2d; \ldots \,\}\,; a_n = a_{n-1} + d = a_0 + nd$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \frac{(n+1)(a_0 + a_0 + nd)}{2}$$

1.2 Geometriche $\rightarrow n_a = kn_{a-1}$

- punto di partenza$\rightarrow a_0$
- ragione $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = q$

$$\left\{\, a_0; ka_0; k^2 a_0; \ldots \,\right\}\,; a_n = ka_{n-1} = k^n a_0$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1.2.1 Serie

Successioni protratte all'infinito

- $q \geq 1 \Rightarrow$

$$S_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} a_0 \cdot q^i = +\infty$$

- $q < 1 \Rightarrow$

$$q^2 < q \Rightarrow \lim_{n \to \infty} q^{n+1} \to 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

2. *Polinomi*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$$

Alcuni teoremi non dimostrati:

1. $p(x) = q(x) \Leftrightarrow a_{n_p} = a_{n_q}; a_{n-1_p} = a_{n-1_q} : \ldots ; a_{0_p} = a_{0_q} \forall a$
2. Se due polinomi di grado n hanno $n+1$ punti in comune allora saranno uguali
3. $p(x) \wedge f(x) \Rightarrow p(x) = f(x) \cdot q + r$
4. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \Rightarrow p(1) = \sum_{i=0}^{n} a_i$
5. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \Rightarrow p(0) = a_0$
6. $p(-1)$ è uguale alla differenza tra i coefficenti delle x con esponente pari e di quelle con esponente dispari

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \wedge \{a_n = a_{2u} \vee a_n = a_{2u+1}\} \Rightarrow p(-1) = \sum_{i=0}^{u} a_{2i} - \sum_{i=0}^{u} a_{2i-1}$$

3. *Calcolo combinatorio*

3.1 Permutazioni

3.1.1 Semplici

Calcolare il numero di modi in cui si possono disporre n elementi senza ripetizioni

$$P_n = n!$$

Esempio. *Quanti sono gli anagrammi della parola "case"?* $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

3.1.2 Con Ripetizioni

Calcolare il numero di modi in cui si possono disporre n elementi di cui m ripetizioni

$$P_n^m = \frac{n!}{m!}$$

Esempio. *Quanti sono gli anagrammi della parola "cocomero"?*

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{40320}{12} = 3360$$

3.2 Disposizioni

3.2.1 Semplici

Calcolare il numero di modi in cui posso mettere n oggetti in k posti, senza ripetizioni, in cui l'odine è importante

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.2.2 Con Ripetizioni

Calcolare il numero di modi in cui posso mettere n oggetti in k posti, con possibili ripetizioni, in cui l'odine è importante

$$D'_{n,k} = n^k$$

3.3 Combinazioni

3.3.1 Semplici

Calcolare il numero di modi in cui si possono mettere n oggetti in k posti senza possibili ripetizioni, in cui l'ordine non è importante

- numero di sottoinsiemi fattibili con k elementi presi da n elementi totali

$$C = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

3.3.2 Con Ripetizioni

Calcolare il numero di modi in cui si possono mettere n oggetti in k posti con possibili ripetizioni, in cui l'ordine non è importante

$$C = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

3.4 Coefficiente binomiale

- $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$

4. *Geometria*

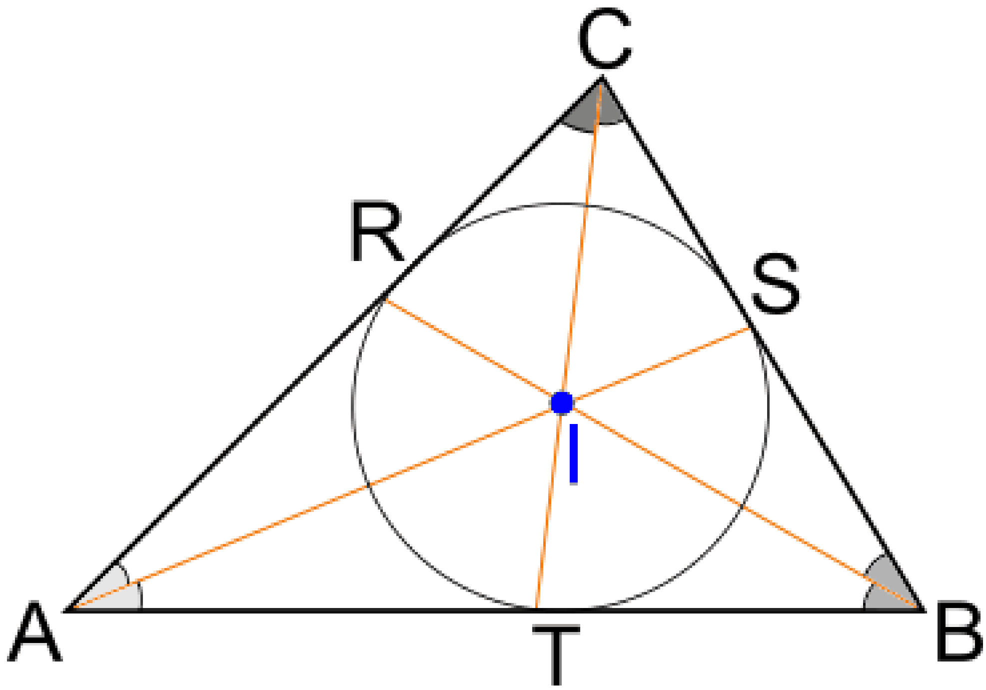
4.1 Triangoli

4.1.1 Punti Particolari

Incentro Il centro della circonferenza inscritta, *incentro*, è l'intersezione delle bisetrici.

$$p \to \text{semiperimetro} \qquad r \to \overline{IT}$$

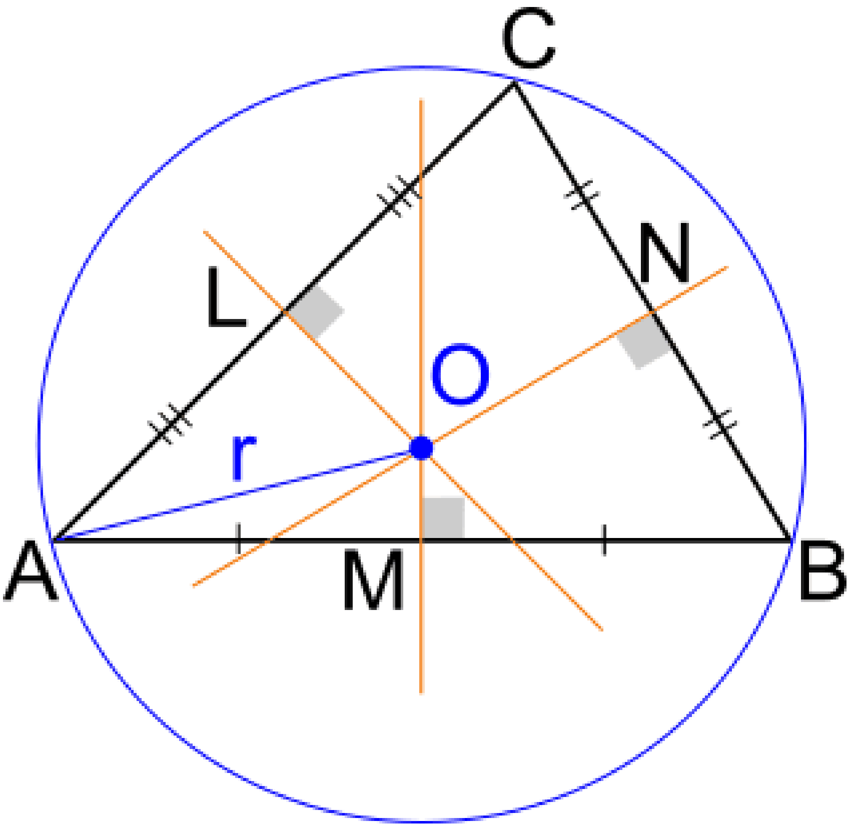
$$A_{A\hat{B}C} = r \cdot p$$



Circocentro Il centro della circonferenza circoscritta, *circocentro*, è il punto d'intersezione delle assi.

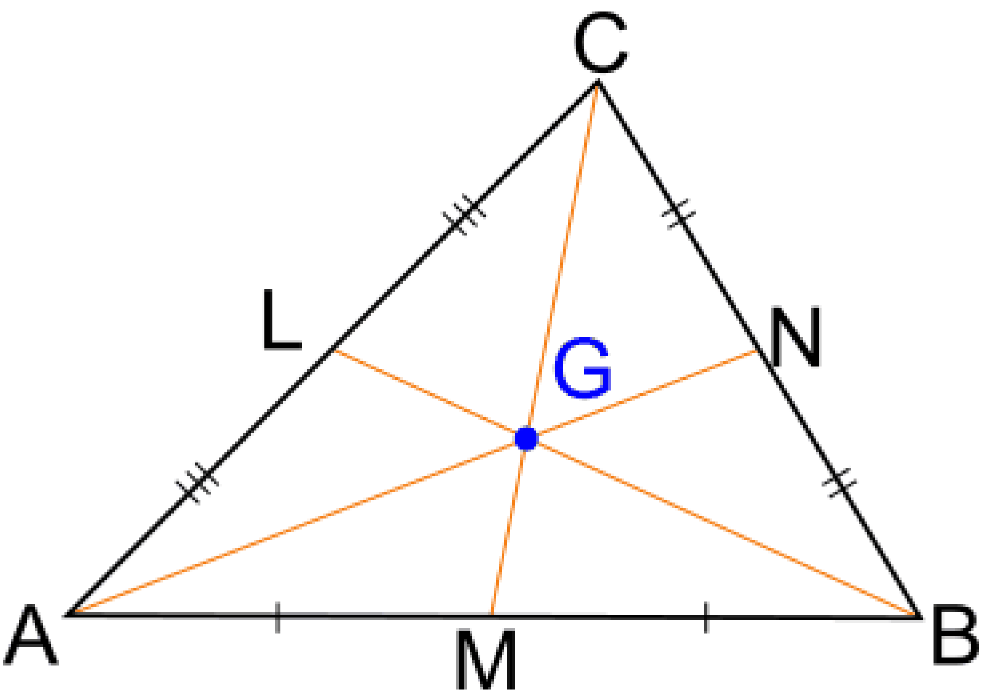
$$R \rightarrow \text{raggio circonferenza circoscritta} \qquad \overline{AB} = a \qquad \overline{BC} = b \qquad \overline{AC} = c$$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A_{A\hat{B}C}}$$

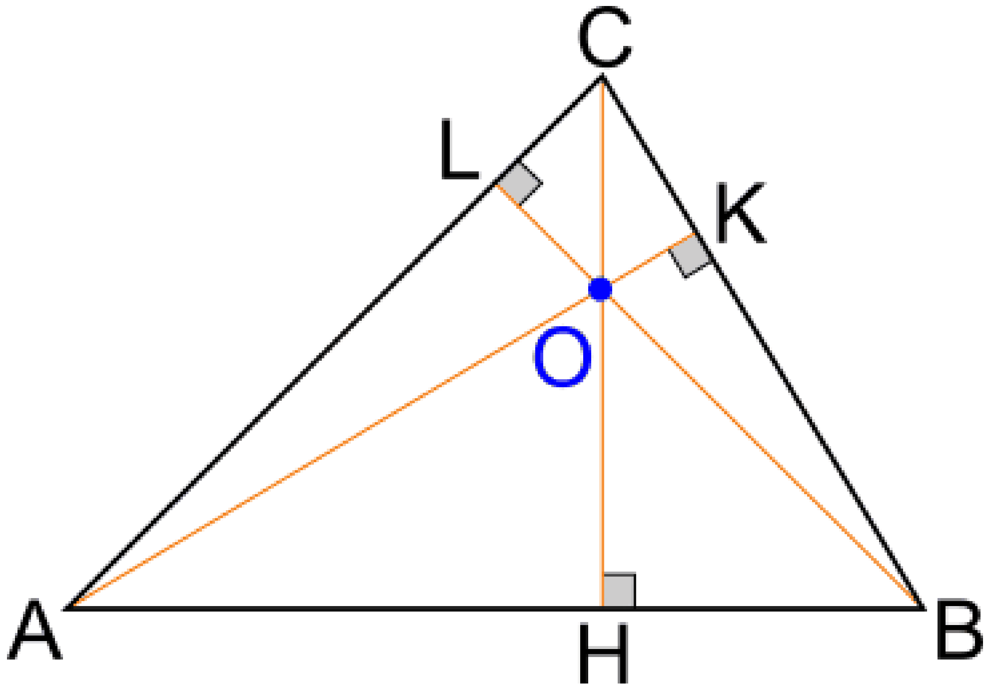


Baricentro Il punto d'incontro delle mediane, il *baricentro*, è sempre interno

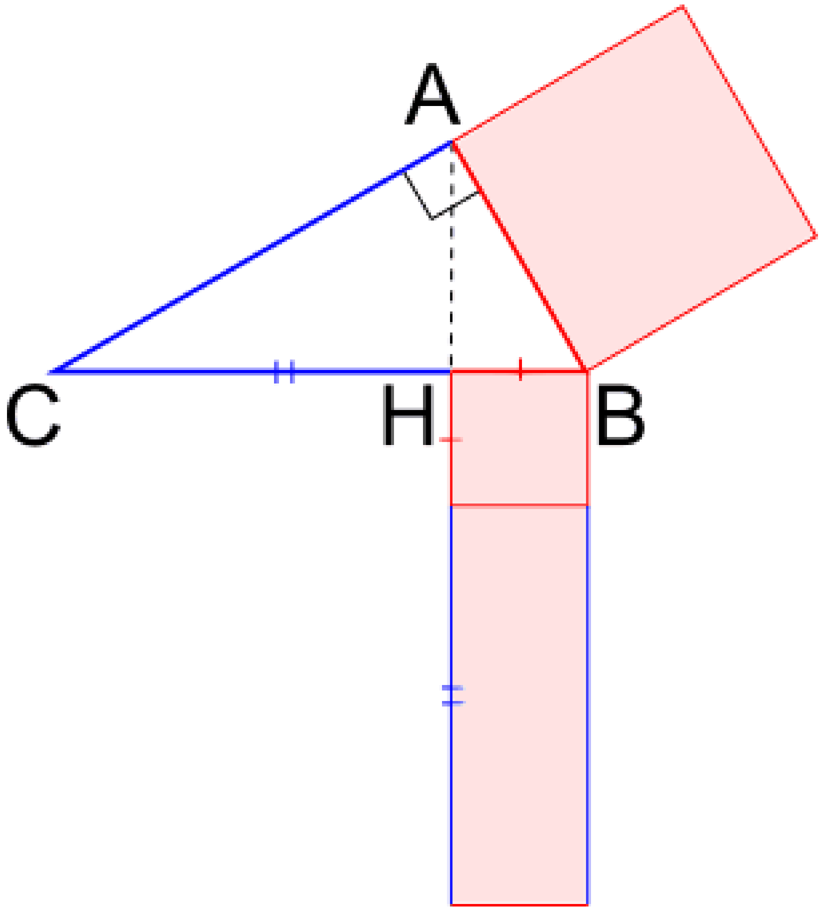
$$\overline{AG} = 2\overline{GN} \qquad \overline{BG} = 2\overline{GL} \qquad \overline{CG} = 2\overline{GM}$$



Ortocentro Il punto d'incontro delle altezze, l'*ortocentro*

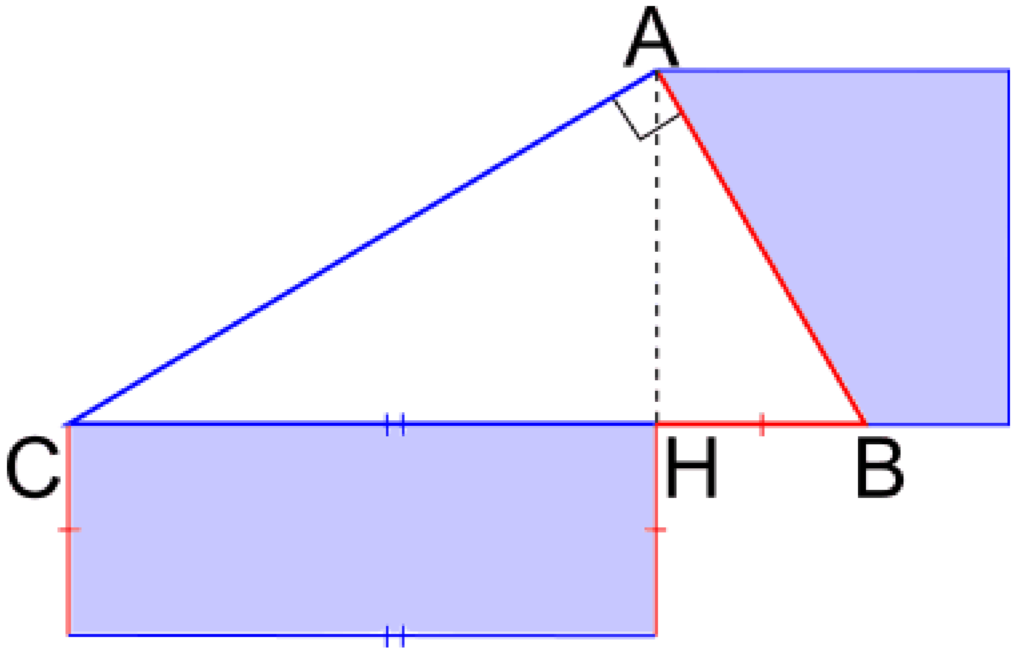


4.1.2 Teoremi



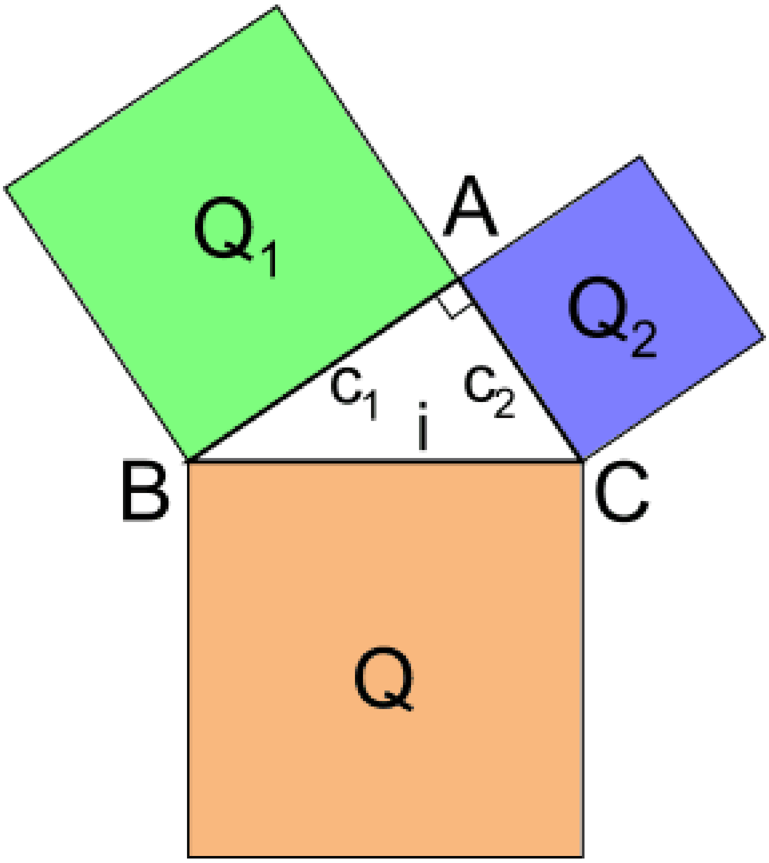
I Teorema di Euclide. *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa*

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{BH} \qquad \overline{HB} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{CB}$$



II Teorema di Euclide. *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stesso*

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH} \qquad \overline{CH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{BH}$$



Teorema di Pitagora. *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti*

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2$$

4.1.3 Formule

Formula di Erone Siano a, b, c i lati di un triangolo, e p il semiperimetro dello stesso. Sarà possibile trovare l'area (A) di questo triangolo utilizzando la sequente formula:

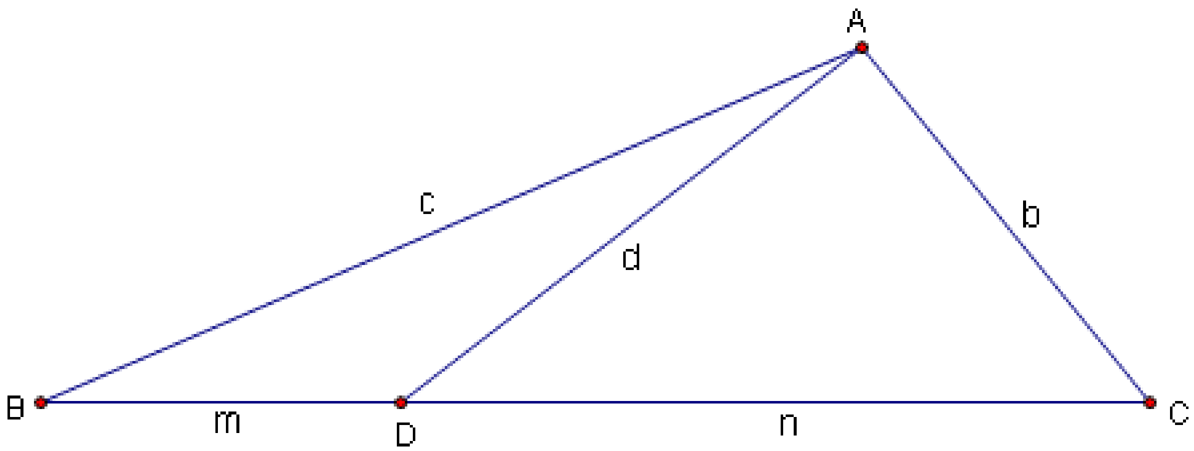
$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Terne Pitagoriche Considerando il Teorema di Pitagora: $a^2 + b^2 = c^2$, ecco le formule necessarie per calcolare le terne pitagoriche

$$\underbrace{a = m; \qquad b = \frac{(m+1)(m-1)}{2}; \qquad c = \frac{(m^2+1)}{2}}_{b; c \in \mathbb{N} \forall m | m = 2q \wedge q \notin \mathbb{N}}$$

$$\underbrace{a = 2m; \qquad b = (m+1)(m-1); \qquad c = (m^2+1)}_{b; c \in \mathbb{N} \forall m | m = 2q \wedge q \in \mathbb{N}}$$

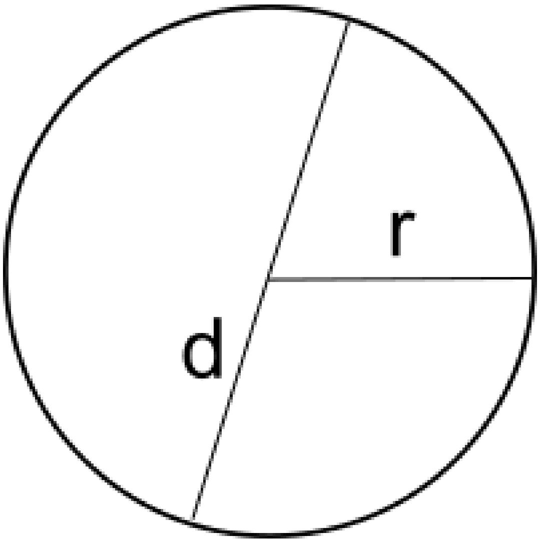
Teorema di Stewart Questo teorema è riassumibile dalla frase: "a **man** and his **dad** put a bomb (**bmb**) in the sink (**cnc**)



$$man + dad = bmb + cnc$$

$$man + ad^2 = mb^2 + nc^2$$

4.2 Circonferenza e cerchio



Formule

$$2p = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2$$

4.2.1 Poligoni inscritti

Sia n il numero di lati del poligoni inscritto in una circonferenza di raggio r, e l_n la lunghezza del lato del poligono

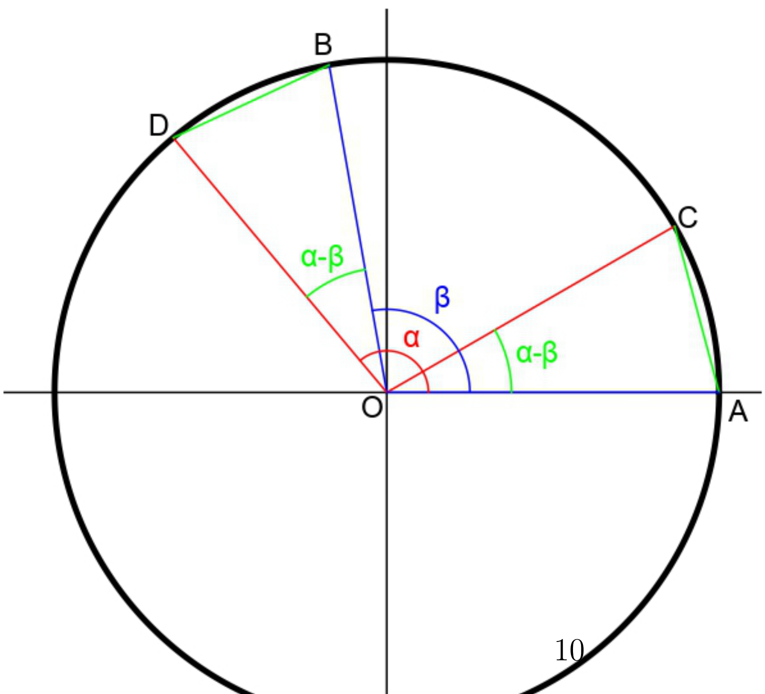
$$l_3 = r \cdot \sqrt{3} \qquad l_4 = r \cdot \sqrt{2} \qquad l_6 = r$$

4.3 Goniometria

4.3.1 Formule Goniometriche

Sottrazione del coseno

$$cos(\alpha - \beta) \neq cos\alpha - cos\beta$$



5. *Teoria dei numeri*

5.1 Classi di resto

$$\begin{aligned} &a : b = q \text{ con resto } r \implies b \text{ DIV } a = q \\ &a = b \cdot q + r \qquad\qquad\quad \text{b MOD a=r} \end{aligned}$$

b MOD $a = r$ $\implies [b]_a = [r]_a \to$ Queste sono classi di resto.
Per qualsiasi intero n esistono $n-1$ classi di resto *modulo* n

$$n = [0]; \dots; [n-1] \qquad \textbf{ESEMPIO: } 7 = [0]; [1]; \dots; \underset{[-1]}{[6]}$$

Operazioni con le classi di resto

Somma, sottrazione e prodotto Le prime tre operazioni base della matematica si comportano in maniera abbastanza prevedibile anche utilizzando le classi di resto; ecco qualche esempio.
Stiamo lavorando modulo *7*

$$\begin{aligned} &[1] + [4] = 5 \\ &[6] + [6] = [12] = [5] \\ &[3] - [1] = [2] \\ &[1] \cdot [4] = [4] \\ &[6] \cdot [6] = [36] = [1] \\ &[-1] \cdot [-1] = [1] \end{aligned}$$

Divisione Osserviamo adesso come si comporta la divisione:

$$\begin{aligned} &[3] : [2] = [3] \cdot [2]^{-1} \\ &[2]^{-1} = [x] \\ &[2] \cdot [x] = [1] \implies x = 4 \\ &[3] \cdot [4] = [12] = [5] \end{aligned}$$

Utilizzo delle classi di resto

Semplificazione delle potenze Ecco un semplice problema: con che cifra termina il numero 2007^{2010}? Dato che ci viene richiesta solo l'ultima cifra, possiamo considerare, anzichè 2007, $[2007]_{10} = [7]$.
Adesso consideriamo le potenze di [7]:

$$\begin{aligned}
[7]^1 &= [7] \\
[7]^2 &= [9] \\
[7]^3 &= [3] \\
[7]^4 &= [1] \\
[7]^5 &= [7] \\
[7]^6 &= [9]
\end{aligned}$$

Possiamo immediatamente notare che esiste una certa ciclicità delle potenze.
Diciamo quindi che

$$[7]^n = [7]^{[n]_4}$$

Possiamo ora risolvere il problema iniziale:

$$[2007^{2010}]_{10} = [7]^{[2010]_4} = [7]^{[2]} = [9]$$

Criteri di divisibilità Iniziamo con elencare i criteri di divisibilità più noti:

- Ogni intero modulo 2^n è uguale alle sue ultime n cifre modulo 2^n
- Ogni intero modulo 5^n è uguale alle due ultime n cifre modulo 5^n
- Ogni intero modulo 3 o 9 è uguale alla somma delle sue cifre modulo 3 o 9
- Ogni intero modulo 11 è uguale alla somma delle sue cifre di posizione dispari meno la somma delle cifre di posizione pari modulo 11

Adesso proviamo a dimostrare il criterio di congruenza *modulo 3* utilizzando le classi di resto
Sfruttiamo la scrittura polinomiale del numero:

$$3457 = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 1000$$

$$[3457]_3 = [7]_3 + [5]_3 \cdot [10]_3 + [4]_3 \cdot [100]_3 + [3] \cdot [1000]_3$$

$$\begin{aligned}
&[10^1]_3 = [1]_3 \\
&[10^2]_3 = [1]_3 \\
&[10^3]_3 = [1]_3 \\
&\dots \\
&[10^n]_3 = [1]_3
\end{aligned}$$

Possiamo quindi riscrivere il numero:

$$[3457]_3 = [7]_3 + [5]_3 + [4]_3 + [3]_3$$

$$[3457]_3 = [7+5+4+3]_3 = [3+4+5+7]_3 = [1]_3$$

Ecco quindi dimostrato il criterio di divisibilità *modulo 3*

Residui quadratici Data un'equazione con radici razionali in due incognite, prima di cercare di risolverla sarebbe meglio stabilire se ammette soluzioni:

$$x^2 + y^2 = 175$$

Esiste un metodo molto veloce per stabilirlo: utilizzare i residui quadratici di 4

$$\begin{cases} x \implies x^2 \\ [0] \implies [0] \\ [1] \implies [1] \\ [2] \implies [0] \\ [3] \implies [1] \end{cases}$$

Possiamo quindi stabilire che $x^2 + y^2$ può assumere solamente certi valori *modulo 4*: $\{0; 1; 2\}$.
Studiamo ora $[175]_4$: $[175]_4 = [3]$, di conseguenza l'equazione riportata sopra è impossibile

5.2 Equazioni lineari diofantee

Le equazioni diofantee sono tutte quelle equazioni in due incognite a coefficienti razionali di cui si devono sapere le soluzioni intere.

$$ax + by = c$$

Perché queste equazioni possano avere soluzioni ci sono alcune condizioni:

$$m.c.m.(a; b)|c$$

$$a > b$$

Mentre la prima condizione è fondamentale perchè esistano soluzioni, la seconda è una convenzione, utile per gli algoritmi di risoluzione

Algoritmo di risoluzione Per risolvere queste equazioni ci si può affidare all'algoritmo di Euclide, che prevede diversi passaggi:

- Trasformare l'equazione in modo tale che $c = 1$

$$ax + by = c \implies ax + by = 1$$

- Sfruttare