

Geometria 1

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

Indice

1	Matrici	5
1.1	Somma	6
2	Gruppo	8
3	Operazioni con le matrici	9
3.1	Moltiplicazione	9
3.2	Prodotto tra matrici	9
4	Operazioni tra sottospazi vettoriali	14
5	Funzioni lineari	19
5.1	Matrice associata ad una applicazione lineare	21
5.2	Immagine di sottospazi vettoriali	24
5.3	Retroimmagine di sottospazi	26
5.4	Nucleo di una funzione lineare	28

1 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare di numeri reali ($\in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{contiene } m \cdot n \text{ numeri} \\ \text{contiene } m \text{ righe} \\ \text{contiene } n \text{ colonne} \end{array}$$

a_{ij} è l'elemento della matrice nella i -esima riga e nella j -esima colonna.
 $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

A è una matrice $m \cdot n$. Se $m = n$ allora A è una **matrice quadrata**.

Le matrici servono per:

- risolvere sistemi lineari
- studiare spazi vettoriali
- classificare strutture geometriche (es. coniche)
- presentare funzioni (semplificandone lo studio)

$\mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$:

- $\mathbb{Q}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$ le cui entrate sono elementi di \mathbb{Q} .

Esempi (1.1)

- $\mathbb{R}^{2,2}$: matrici $2 \cdot 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdots \in \mathbb{R}^{2,2}$$

- $\mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^{m,1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1} \quad \text{anche } \mathbf{vettori\ colonna}$$

- $\mathbb{R}^{1,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n} \quad \text{anche } \mathbf{vettori\ riga}$$

In $\mathbb{R}^{m,n}$ è sempre definita la **matrice nulla**, in cui tutte le entrate sono nulle. In $\mathbb{R}^{n,n}$ è sempre definita la **matrice identità**:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{1,1}$, $I = 1$

- In $\mathbb{R}^{2,2}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{3,3}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale composta unicamente da 1 nella matrice identità è il **diagonale principale** della matrice.

1.1 Somma

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempi (1.2)

- In $\mathbb{R}^{1,1}$ la somma tra matrici coincide con la somma usuale di numeri reali.
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Proprietà della somma

(i) La somma è **associativa**:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

e posso scrivere $A + B + C$ senza ambiguità.

(ii) La somma è **commutativa** (o abeliana):

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad A + B = B + A$$

(iii) Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice nulla ($B = \underline{0}$), allora $A + B = B + A = A$

(iv) $A - A = \underline{0}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \exists -A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ t.c. } A - A = 0$$

Definizione Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si definisce $-A$,

$$\text{con } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notazione In genere si scrive $A - B$ in luogo di $A + (-B)$, e si considera come una sottrazione di matrici

Definizione Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ sono uguali se hanno le stesse entrate ($A = B$)

Proprietà $A = B \iff B - A = 0$

2 Gruppo

Definizione Siano A, B due insiemi, si definisce **prodotto cartesiano**:

$$A \times B = \{(a, b) \text{ t.c. } a \in A, b \in B\}$$

in cui conta l'ordine: $(a, b) \neq (b, a)$

$$A \times A = \{(a_1, a_2) \text{ t.c. } a_1, a_2 \in A\}$$

Definizione Sia G un insieme. Una **operazione** in G è una funzione

$$\begin{aligned} \star : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \star h \end{aligned}$$

Proprietà

(i) L'operazione è **associativa** se $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$

(ii) L'operazione ha un **elemento neutro** se

$$\exists e \in G \text{ t.c. } g \star e = e \star g = g, \forall g \in G$$

(iii) Se $g \in G$ chiamiamo **inverso di g** un elemento

$$k \in G \text{ t.c. } g \star k = k \star g = e$$

Definizione Un **gruppo** è un insieme G con un'operazione \star t.c.

1. \star è associativa
2. esiste un elemento neutro
3. ogni elemento ha un inverso

Esempi (2.1) Sono gruppi

$$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +),$$

~~(\mathbb{R}, \cdot)~~ : lo zero non ha un inverso,

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R}^{m,n}, +)$$

Definizione Un gruppo (G, \star) è **abeliano** se

$$g \star h = h \star g \quad \forall g, h \in G$$

Nel caso di un gruppo abeliano l'operazione è indicata con $+$ e l'elemento neutro con 0 .

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$ è un gruppo abeliano

3 Operazioni con le matrici

3.1 Moltiplicazione

Si può moltiplicare $\lambda \in \mathbb{R}$ con matrici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$-1 \cdot A = -A$ coerente con la definizione di $-A$

Esempio (3.1)

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Osservazione (3.1) $0 \cdot A$ è la matrice nulla $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Proprietà del prodotto per scalari

- (i) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$
- (ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,n}$
- (iii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,n}$
- (iv) $1 \cdot A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$ è un **gruppo abeliano** in cui è definita una moltiplicazione per scalari in cui valgono le proprietà *i-iv* (prototipo per gli spazi vettoriali).

3.2 Prodotto tra matrici

$$A, B \text{ t.c. } A \in \mathbb{R}^{m,\textcolor{red}{n}}, B \in \mathbb{R}^{\textcolor{red}{n},k} \implies AB \in \mathbb{R}^{m,k}$$

Questo è definito come il prodotto **righe per colonne**. Il numero di colonne della prima matrice deve corrispondere con il numero di righe della seconda matrice.

Teorema I Sia V uno spazio vettoriale su campo \mathbb{K} , e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale:

1. se V è finitamente generato $\implies W$ è finitamente generato;
2. se V è finitamente generato $\implies \dim W \leq \dim V$
3. se V è finitamente generato e $\dim W = \dim V \implies W = V$

dim. (I)

1. Supponiamo che V sia finitamente generato, e per assurdo che W non lo sia.

V è finitamente generato $\implies V$ ha una base

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

W non è finitamente generato, e sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq \underline{0}$, considero $\mathcal{L}(w_1) \subseteq W$, ma $W \neq \mathcal{L}(w_1)$, altrimenti W sarebbe generato da w_1 .
 $\implies \exists w_2 \in W \wedge w_2 \notin \mathcal{L}(w_1)$.

Considero $\mathcal{L}(w_1, w_2) \subseteq W$, ma $W \neq \mathcal{L}(w_1, w_2)$, altrimenti W sarebbe generato da $\{w_1, w_2\}$. \implies
 $\implies \exists w_3 \in W \wedge w_3 \notin \mathcal{L}(w_1, w_2)$.

Itero il procedimento e trovo

$$\begin{aligned} \{w_1, \dots, w_{n+1}\} \subseteq W \text{ t.c. } w_{n+1} \notin \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) &\implies \\ &\implies \{w_1, \dots, w_{n+1}\} \text{ è un insieme libero} \end{aligned}$$

e contiene più elementi di una base \mathcal{B} . Assurdo per teorema precedente.

2. Supponiamo V finitamente generato, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. W è finitamente generato (per 1.) $\implies \exists \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di $W \implies \mathcal{B} \subseteq V$ è un sottoinsieme libero $\implies m \leq \dim V \implies \dim W \leq \dim V$
3. Sia $W \subseteq V$ uno spazio vettoriale, con V finitamente generato. $\dim W = \dim V$.

W ha una base \mathcal{B} con n vettori, dove $n = \dim V \implies \mathcal{B}$ è una base di V .

Se $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\} \implies W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) = V \implies W = V$

Osservazione (3.2) Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato, e $\dim V = n \implies$ ogni insieme libero con n elementi è una base. Infatti se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme libero, se per assurdo esistesse $v \in V \wedge v \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \implies \{v_1, \dots, v_n, v\} \subseteq V$ è un insieme libero di cardinalità $n + 1$ (ovvero con $n + 1$ elementi). Assurdo.

Teorema II (del completamento di una base) Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} finitamente generato. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V e sia $I = \{a_1, \dots, a_l\} \subseteq V$ un sottoinsieme libero. Esiste sempre \mathcal{B}' base di V i cui primi l -elementi sono a_1, \dots, a_l e i restanti $n - l$ -elementi sono elementi di \mathcal{B} .

$$\mathcal{B}' = \{a_1, \dots, a_l, w_1, \dots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \dots, w_{n-l} \in \mathcal{B}$$

dim. (II) Applico il metodo degli scarti successivi

$l = n$ l'enunciato è banale (I è già una base e non va completata);

$l < n \implies \mathcal{L}(a_1, \dots, a_l) \subsetneq V$
 $\implies \exists w_1 \in \mathcal{B}$ t.c. $w_1 \notin \mathcal{L}(a_1, \dots, a_l)$. Infatti, se tutti i generatori appartenenti a \mathcal{B} fossero combinazioni lineari di a_1, \dots, a_l , non sarebbero più tutti linearmente indipendenti. $\implies I_1 = \{a_1, \dots, a_l, w_1\}$ è libero.

Se I_1 è una base, la dimostrazione si conclude, altrimenti $\exists w_2 \in \mathcal{B}$ t.c. $w_2 \notin \mathcal{L}(a_1, \dots, a_l, w_1)$
 $\implies I_1 = \{a_1, \dots, a_l, w_1, w_2\}$ è libero.

Se I_2 è una base la dimostrazione si conclude, altrimenti si itera fino a

$$I_{n-l} = \{a_1, \dots, a_l, w_1, \dots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \dots, w_{n-l} \in \mathcal{B}.$$

I_{n-l} è libero con n vettori $\implies I_{n-l}$ è una base

Esempio (3.2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3}) = \{A \in \mathbb{R}^{3,3} \text{ t.c. } {}^tA = A\}$

Cerco una base. Sia $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ generica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
+ c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\
+ e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Siano $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e sia $\mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_6\}$

Dato

$$\begin{aligned}
I = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\
A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\left. A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})
\end{aligned}$$

insieme libero, si trovino tre elementi $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{B}$ tali per cui $I \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$.

$$A_1 = E_1 + 2E_2; A_2 = E_1 - E_4 + E_6; A_3 = E_2 - E_3$$

e rispetto alla base \mathcal{B}

$$\begin{aligned}
A_1 &= (1, 2, 0, 0, 0, 0), A_2 = (1, 0, 0, -1, 0, 1), A_3 = (0, 1, -1, 0, 0, 0) \\
E_1 &= (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_6 = (0, \dots, 0, 1)
\end{aligned}$$

Si studia l'appartenenza di $E_1 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3)$. Studio il sistema

$$E_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_1 \notin \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1\}$$

Si studia l'appartenenza di $E_2 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_2 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$$\implies E_2 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies \text{scarto } E_2$$

Si studia l'appartenenza di $E_3 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 1 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$$\implies E_3 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies \text{scarto } E_3$$

Si studia l'appartenenza di $E_4 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_4 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 1 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_4 \notin \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4\}$$

Si studia l'appartenenza di $E_5 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4)$. Studio il sistema

$$E_5 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1 + \lambda_5 E_4$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_5 \\ 1 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 0 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_5 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4) \implies I_3 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$$

La soluzione è $\mathcal{B}' = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

4 Operazioni tra sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , e siano W_1 e $W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

Si consideri

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in w_1 \wedge x \in w_2\}$$

Proposizione p.i $W_1 \cap W_2$ è sempre sottospazio vettoriale

dim. (p.i) Siano $x, y \in W_1 \cap W_2$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} x, y \in W_1 \implies (x + y) \in W_1 \\ x, y \in W_2 \implies (x + y) \in W_2 \end{array} \right\} \implies (x + y) \in W_1 \cap W_2$$

Proposizione p.ii Sia V uno spazio vettoriale e W, W_1 e W_2 sottospazi di V .

Se W contiene W_1 e W contiene W_2 allora W contiene $W_1 + W_2$ (cioè $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene sia W_1 che W_2)

dim. (p.ii) Sia $x + y \in W_1 + W_2, x \in W_1 \implies x \in W, y \in W_2 \implies y \in W \implies x + y \in W$, poiché W è un sottospazio vettoriale. Quindi ogni $v \in W_1 + W_2$ è elemento di $W \implies W_1 + W_2 \subseteq W$.

La somma si generalizza a più sottospazi. Siano $W_1, \dots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali, allora si definisce

$$W_1 + \dots + W_l = \{x_1 + \dots + x_l | x_1 \in W_1, \dots, x_l \in W_l\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale ed è il più piccolo sottospazio che contiene tutti i W_1, \dots, W_l

Esercizio Si trovino somma e intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di \mathbb{R}^4

- a. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, W_2 = L(e_4)$
- b. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$
 $Z_2 = \{(0, x_2, 0, x_4) | x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

Soluzione

- a. $W_1 + W_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}, W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$
- b. $W_1 + Z_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\},$
 $W_1 \cap Z_2 = \{(0, x_2, 0, 0) | x_2 \in \mathbb{R}\}$

Proposizione p.iii Sia V spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} e $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni:

- 1. $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ (hanno intersezione banale)
- 2. ogni $v \in W_1 + W_2$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$

dim. (p.iii)

- 1. \implies 2. Suppongo $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ e considero $v \in W_1 + W_2$. Scrivo $v = x_1 + y_1$,
 $v = x_2 + y_2$ e dimostro che $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

$\underline{0} = v - v = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \implies$
 $x_1 - x_2 = y_2 - y_1, x_1 - x_2 \in W_1$ mentre $y_2 - y_1 \in W_2$. Per l'uguaglianza
risulta che

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 - x_2 \in W_2 \implies x_1 - x_2 \in W_1 \cap W_2 \\ y_2 - y_1 \in W_1 \implies y_2 - y_1 \in W_1 \cap W_2 \end{cases} \\ & \implies \begin{cases} x_1 - x_2 = \underline{0} \implies x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = \underline{0} \implies y_1 = y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. \implies 1. Suppongo che ogni $v \in W_1 + W_2$ si scriva in modo unico come $v = x + y$
con $x \in W_1$ e $y \in W_2$ e dimostro che $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

Sia $v \in W_1 \cap W_2$. Sia $v \in W_1 + W_2$, $v = x + y = x + v + y - v$, con
 $x + v \in W_1$, $y - v \in W_2$. Quindi se $v \neq \underline{0}$, le due scritture $v = x + y$,
 $v = (x + v) + (y - v)$ sono diverse e ciò non è possibile per ipotesi

Notazione Se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ si scrive $W_1 \oplus W_2$ invece che $W_1 + W_2 \oplus$
si legge “somma diretta”

Esempio (4.1) $\mathbb{K}^{n,n} = S(\mathbb{K}^{n,n}) \oplus A(\mathbb{K}^{n,n})$

Esempio (4.2) $R^2 = \mathcal{L}(e_1) \oplus \mathcal{L}(e_2)$

Proposizione p.iv Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Siano
 $W_1, \dots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali. Sono fatti equivalenti le seguenti
proposizioni

1. $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_l) = \{\underline{0}\} \forall i = 1, \dots, l$
2. Ogni $v \in W_1 + \dots + W_l$ si scrive in modo unico come $v = x_1 + \dots + x_l$
con $x_1 \in W_1, \dots, x_l \in W_l$

Se vale 1. si scrive $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_l$

Esempio (4.3) Considero V spazio vettoriale di dimensione finita e
 $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \implies V = \mathcal{L}(v_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}(v_l)$

Sia V spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , finitamente generato. Sia $W \subseteq V$
un sottospazio vettoriale, sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_l\}$ una base di W . Possiamo
completare \mathcal{B} con una base dello spazio $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_m\}$. Sia

$$Z = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m) \subseteq V$$

un sottospazio vettoriale, e per costruzione $V = W \oplus Z$

Osservazione (4.1) Sia V spazio vettoriale di dimensione finita con $V = W \oplus Z$. Siano $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_l\}$ una base di W e $\mathcal{C} = \{z_1, \dots, z_m\}$ una base di Z . Ogni elemento di V si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W$ e $y \in Z$. \mathcal{B} base di W

$\implies x$ si scrive in modo unico come $x = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_l w_l$

\mathcal{C} base di $Z \implies y$ si scrive in modo unico come

$$y = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n$$

$\implies v$ si scrive in modo unico come

$$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_l w_l + \mu_1 z_1 + \dots + \mu_n z_n$$

$\implies \mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_l, z_1, \dots, z_l\}$ è una base di V

$\implies \dim V = \dim W + \dim Z$

Teorema III Sia V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} finitamente generato. Siano $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali t.c. $V = W_1 + W_2$. Allora

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Questa è la **Formula di Grassmann**.

Chiamo $\dim V = n$, $\dim W_1 = l$, $\dim W_2 = p$, $\dim(W_1 \cap W_2) = r$

In particolare $l, p \leq n$, $r \leq l, p$

1. $r = l \implies W_1 \cap W_2 = W_1 \implies W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 + W_2 = W_2 = V$
2. $r = p \implies W_1 \cap W_2 = W_2 \implies W_2 \subseteq W_1 \implies W_1 + W_2 = W_1 = V$
3. si assume $r \leq l, p$ e sia

$$\mathcal{B} = \{a_1, \dots, a_r\} \text{ base di } W_1 \cap W_2$$

Completo \mathcal{B} con una base \mathcal{C} di W_1 ,

$$\mathcal{C} = \{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l\}$$

e completo \mathcal{B} con una base \mathcal{D} di W_2 ,

$$\mathcal{D} = \{a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_p\}$$

Si verifica che l'insieme

$$\{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l, c_{r+1}, \dots, c_p\}$$

è una base di V . In questo modo si ottiene

$$\dim V = l + (p - r)$$

cioè la tesi.

Ovviamente risulta

$$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l, c_{r+1}, \dots, c_p) = V$$

in quanto contiene i generatori sia di W_1 che di W_2 , e quindi anche della loro somma. Verifichiamo che l'insieme

$$\{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l, c_{r+1}, \dots, c_p\}$$

sia libero. Supponiamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \mu_r + 1 + b_{r+1} + \dots + \\ + \dots + \mu_l b_l + \gamma_{r+1} c_{r+1} + \dots + \gamma_p c_p = \underline{0} * * \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_l b_l) = (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \dots - \gamma_p c_p)$$

Sia

$$\begin{aligned} c &= (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \dots - \gamma_p c_p) = \\ &= (\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_l b_l) \end{aligned}$$

sicuramente $c \in W_2$

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_l b_l \in W_1$$

$$\implies c \in W_1 \cap W_2 = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_r)$$

$$\implies c = \beta_1 a_1 + \dots + \beta_r a_r, \text{ vado a sostituire in } **$$

$$(\beta_1 a_1 + \dots + \beta_r a_r) + (\gamma_{r+1} c_{r+1} + \dots + \gamma_p c_p) = \underline{0}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_1 = \dots = \beta_r = 0 \\ \gamma_{r+1} = \dots = \gamma_p = 0 \end{cases}$$

Ho ottenuto

$$\gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0$$
$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l = \underline{0}$$

Poiché l'insieme

$$\mathcal{C} = \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l\}$$

è libero

$$\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \cdots = \mu_l = 0$$

$$\implies \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\} \text{ è libero}$$

5 Funzioni lineari

V e W spazi vettoriali sullo stesso campo \mathbb{K} e una funzione $F : V \rightarrow W$, F è lineare se verifica $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v, w \in V$

Teorema IV (di esistenza e unicità) Siano V e W spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} con V finitamente generato.

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e $a_1, \cdots, a_n \in W$.

Allora esiste un'unica funzione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che $F(v_i) = a_i \forall i = 1, \cdots, n$

dim. (IV)

Esistenza Sia $v \in V$, v si scrive in modo unico come $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$ per $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

Si definisce

$$F(v) = F(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) := x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$$

F definisce una funzione $V \rightarrow W$ tale che $F(v_i) = a_i$ per $i = 1, \cdots, n$. Verifico che F è lineare.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$ e dimostro che $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$

Scrivo

$$v = \sum_{k=1}^n x_k v_k$$

e

$$w = \sum_{r=1}^n y_r v_r$$

$$\lambda v + \mu w = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k \mu y_k) v_k$$

Quindi per come è definita F risulta che

$$\begin{aligned} F(\lambda v + \mu w) &= F\left(\sum_{k=1}^n (\lambda x_k \mu y_k) v_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k \mu y_k) a_k = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k a_k + \mu \sum_{k=1}^n y_k a_k = \\ &= \lambda F(v) + \mu F(w) \end{aligned}$$

$\implies F$ è lineare

Unicità Supponiamo di avere due funzioni lineari $F, G : V \rightarrow W$ tali che $F(v_i) = G(v_i) = a_i \ \forall i = 1, \dots, n$ e dimostro che $F = G$, cioè che $F(v) = G(v) \ \forall v \in V$ Possiamo scrivere $v = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ quindi

$$\begin{aligned} F(v) &= F\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k F(v_k) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k a_k \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
 G(v) &= G\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k G(v_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n x_k a_k
 \end{aligned}$$

$$\implies F(v) = G(v) \quad \forall v \in V$$

$$\implies F = G$$

5.1 Matrice associata ad una applicazione lineare

Siano V e W spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} con V, W entrambi finitamente generati. Supponiamo $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

Considero $F : V \rightarrow W$ lineare, e fisso $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W .

$$\begin{aligned}
 F(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m = \sum_{k=1}^m a_{k1}w_k \\
 F(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m = \sum_{k=1}^m a_{k2}w_k \\
 &\dots \\
 F(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m = \sum_{k=1}^m a_{kn}w_k
 \end{aligned}$$

Tutto questo determina $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, A è determinata da $F, \mathcal{B}, \mathcal{C}$

Sia $v \in V$ un vettore generico $v = \sum_{k=1}^n x_k v_k$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
 F(v) &= F\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k F(v_k) = \\
 &= x_1 F(v_1) + x_2 F(v_2) + \dots + x_n F(v_n) = \\
 &= x_1 \sum_{k=1}^m a_{k1} w_k + x_2 \sum_{k=1}^m a_{k2} w_k + \dots + x_n \sum_{k=1}^m a_{kn} w_k = \\
 &= \sum_{k=1}^m (a_{k1} x_1) w_k + \sum_{k=1}^m (a_{k2} x_2) w_k + \dots + \sum_{k=1}^m (a_{kn} x_n) w_k = \\
 &= \left(\sum_{r=1}^n a_{1r} x_r\right) w_1 + \left(\sum_{r=1}^n a_{2r} x_r\right) w_2 + \dots + \left(\sum_{r=1}^n a_{mr} x_r\right) w_m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Se } (v)_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
 \implies (F(v)) &= A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\implies (F(v)) = A(v)_{\mathcal{B}}$$

Notazione Si indica A con $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$, matrice che rappresenta F rispetto alle basi \mathcal{B} e \mathcal{C}

Esempio (5.1) Sia $I : V \rightarrow V$ funzione identità, e calcoliamo $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(I)$ dove \mathcal{B} è una base fissata di V . Se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ risulta $I(v_i) = v_i \forall i = 1, \dots, n$

$$\implies M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(I) = Id \text{ matrice identità}$$

Esempio (5.2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3)$$

Sia \mathcal{B} la base canonica di \mathbb{R}^3 e \mathcal{C} la base canonica di \mathbb{R}^2 , voglio trovare $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$

Possiamo scrivere $F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Sono noti $F(1, 0, 0) = (3, 0)$, $F(0, 1, 0) = (-1, 2)$ e $F(0, 0, 1) = (0, 3)$, quindi

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In generale data $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ espressa in termini della base canonica di \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m la matrice che rappresenta F è la matrice le cui colonne sono $F(e_1), \dots, F(e_n)$

Esempio (5.3) Data $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Si ha

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio (5.4) $F : \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$: $A \mapsto \text{tr}(A)$ e determino la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^{n,n}$, $\mathcal{B} = E_{i1j}$ e alla base canonica di \mathbb{K} $\mathcal{C} = \{1\}$

Si ha

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} \text{tr}(E_{11}) & \text{tr}(E_{12}) & \dots & \text{tr}(E_{1n}) & \text{tr}(E_{21}) & \text{tr}(E_{22}) & \dots & \text{tr}(E_{nn}) \end{pmatrix}$$

Per esempio se $n = 2$ risulta $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esempio (5.5) Sia $a \in V_3$ e $F : V_3 \rightarrow V_3$: $x \mapsto a \wedge x$ funzione lineare.

Sia $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$ base ortonormale positiva di V_3 e calcolo $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(F)$, scriviamo $a = a_1i + a_2j + a_3k$

$$F(i) = a \wedge i = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge i = -a_2k + a_3j$$

$$F(j) = a \wedge j = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge j = a_1k - a_3j$$

$$F(k) = a \wedge k = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge k = -a_1j + a_2i$$

Si ha

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$, $F(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}$

Sia \mathcal{B} base canonica di \mathbb{R}^3 e \mathcal{C} base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$

Si trovi $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F)$

Soluzione Da risolvere

5.2 Immagine di sottospazi vettoriali

Siano V e W spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} e sia $F : V \rightarrow W$ lineare, sia $H \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $F(H)$ immagine di H tramite F , tale che $F(H) \subseteq W$, $F(H) = \{F(h) | h \in H\}$

Proposizione p.v $F(H)$ è sempre un sottospazio vettoriale di W

dim. (p.v) Siano $w_1, w_2 \in F(H)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $\lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$$w_1 \in F(H) \implies w_1 = F(h_1) \text{ per qualche } h_1 \in H$$

$$w_2 \in F(H) \implies w_2 = F(h_2) \text{ per qualche } h_2 \in H$$

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda F(h_1) + \mu F(h_2) = F(\lambda h_1 + \mu h_2)$$

Poiché H è un sottospazio vettoriale, risulta che, dato $h = \lambda h_1 + \mu h_2$

$$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 = F(h) \text{ per qualche } h \in H$$

$$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$$

$$\implies F(H) \text{ sottospazio vettoriale di } W$$

Supponiamo $\dim H = n$, $\dim F(H) = ?$

Sia $\mathcal{B} = \{h_1, \dots, h_n\}$ base di H , sappiamo che $\{F(h_1), \dots, F(h_n)\}$ è un insieme di generatori di $F(H)$

$$\implies \dim F(H) \leq n$$

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

Sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\}$, $\dim H = 2$

Si trovi una base di $F(H)$

Soluzione

1. Trovo una base di H , per esempio $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. Calcolo le immagini dei vettori della base

$$F(1, -1, 0) = (2, 0, 2, -1)$$

$$F(0, 0, 1) = (-1, 1, 0, -1)$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base di $F(H)$

Definizione Sia $F : V \rightarrow W$ lineare, $F(V)$ (che è un sottospazio vettoriale di W) si dice l'immagine di F

Osservazione (5.1) F è suriettiva $\iff F(V) = W \iff \dim F(V) = \dim W$ (criterio per testare la suriettività di una funzione lineare)

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$

1. Dire se F è suriettiva e in caso contrario trovare $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $w \notin F(\mathbb{R}^3)$
2. Sia $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$, $H = \mathcal{L}(a, b)$. Dire se $(4, 3, -2) \in F(H)$

Soluzione

1. $F(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3))$

$$F(e_1) = (2, 1, 1)$$

$$F(e_2) = (2, 0, 3)$$

$$F(e_3) = (0, 1, -2)$$

Si osserva che $F(e_1) = F(e_2) + F(e_3)$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti

Ma $F(e_2)$ e $F(e_3)$ sono linearmente indipendenti

$\implies F(\mathbb{R}^3)$ ha dimensione 2, ed i vettori $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$ ne formano una base. F non è suriettiva

$w \in \mathbb{R}^3$, $w \notin F(\mathbb{R}^3) \iff w$ non è combinazione lineare di $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$.

Per esempio $w = (1, 0, 0)$ va bene, poiché non esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(1, 0, 0) = \lambda(2, 0, 3) + \mu(0, 1, -2)$

2. $F(H) = \mathcal{L}(F(a), F(b))$. $F(a) = (2, 2, -1)$, $F(b) = (2, 1, 1)$. $F(a), F(b)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim F = 2$

$$(4, 3, -2) \in F(H) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tali che } (4, -3, -2) = (2\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, -\lambda + \mu)$$

Il sistema non ha soluzione, pertanto $(4, 3, -2) \notin F(H)$

Definizione Data $F : V \rightarrow W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali su uno stesso campo, il rango di F ($\text{rank } F$) è la dimensione di $F(V)$

Se \mathcal{B} è una base di V e \mathcal{C} è una base di W , ad F si associa la matrice $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$ che rappresenta F rispetto alle basi fissate.

$$(F(v))_{\mathcal{C}} = M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) \cdot (v)_{\mathcal{B}}$$

Il rango di F coincide con il rango della matrice $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$

\implies tutte le matrici associate ad F hanno lo stesso rango.

5.3 Retroimmagine di sottospazi

$F : V \rightarrow W$ applicazione lineare, sia $K \subseteq W$ un sottospazio

$$F^{-1}(K) = \{w \in V \mid w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\}$$

Si noti che $F^{-1}(K) \neq \emptyset$: sicuramente K contiene $\underline{0}_W$ e sappiamo che $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.

Proposizione p.vi $F^{-1}(K)$ è sempre un sottospazio vettoriale di V , $\forall K \subseteq W$ sottospazio vettoriale

dim. (p.vi) Fisso $v, w \in F^{-1}(K)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostro che $\lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} v \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(x) \text{ per qualche } x \in K, F(v) = x \\ w \in F^{-1}(K) \implies w = F^{-1}(y) \text{ per qualche } y \in K, F(w) = y \end{cases}$$

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) = \lambda x + \mu y \in K$$

poiché K è un sottospazio vettoriale

$$\implies F(\lambda v + \mu w) \in K$$

$$\implies \lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$$

$\implies F^{-1}(K)$ sottospazio vettoriale di W

$$\begin{aligned} \dim F(H) &\leq \dim H, \\ \text{se } K \subseteq F(V) &\implies \dim F^{-1}(K) \geq \dim K \end{aligned}$$

Esercizio

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$$

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 + y_2 = 0\} \quad \dim K = 3$$

Si determini $F^{-1}(K)$

Soluzione Voglio trovare le $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $F(x_1, x_2, x_3) \in K$

$$F(x_1, x_2, x_3) \in K \iff (x_1 + x_2) + 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ è l'equazione di $F^{-1}(K)$ ($\dim F^{-1}(K) = 2$)

Trovo una base di $F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = -3t - 2s \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\} \quad \text{è una base di } F^{-1}(K)$$

Altro approccio risolutivo:

Fisso una base di K , per esempio

$$\{w_1 = (1, -1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$F^{-1}(K) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Otengo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -\lambda_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda_2 \\ x_2 - x_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Si risolve il sistema in x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 2 & 1 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{si riduce per righe}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -1 & 1 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 + 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 + 3\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Affinché il sistema sia risolubile si deve avere

$$\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0; \quad \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ -x_2 + x_3 = -3\lambda_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2\lambda_1 - \mu \\ x_2 = \mu + 3\lambda_1 \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

Da qui si deduce una base di $F^{-1}(K)$

5.4 Nucleo di una funzione lineare

V, W spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} , $F: V \rightarrow W$ lineare

$\implies \{0_W\}$ è sottospazio vettoriale di W

$\implies F^{-1}(0_W)$ sottospazio vettoriale di V

Definizione $F^{-1}(0_W)$ si dice nucleo di F (kernel di F) e si indica con $\ker(F)$

$$\ker F = \{v \in V \mid F(v) = 0_W\}$$

Teorema V F è iniettiva $\iff \ker F = 0_V$

dim. (V)

" \implies " Supponiamo F iniettiva e sia $v \in \ker F$

$\implies F(v) = 0_W$, ma poiché F è lineare risulta $F(0_V) = 0_W$

$\implies F(v) = F(0_V)$ e poiché F è iniettiva risulta $v = 0_V$

$\implies \ker F = \{0_V\}$

" \Leftarrow " Per ipotesi $\ker F = \{\underline{0}_V\}$, siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = F(v_2)$

$$\implies F(v_1) - F(v_2) = \underline{0}_W, \text{ poiché } F \text{ è lineare si ottiene } F(v_1 - v_2) = \underline{0}_W$$

$$\implies v_1 - v_2 \in \ker F$$

$$\implies v_1 - v_2 = \underline{0}_V$$

$$\implies v_1 = v_2, \text{ quindi } F \text{ è iniettiva.}$$

Supponiamo V, W di dimensione finita, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, siano $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V e $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ base di W , e si consideri $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$

$$\begin{aligned} \ker F &= \{v \in V \mid F(v) = \underline{0}_W\} = \\ &= \{v \in V \mid (F(v))_{\mathcal{C}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ &= \{v \in V \mid M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)(v)_{\mathcal{B}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ &= \{v \in V \mid (v)_{\mathcal{B}} \text{ appartiene al null-space di } M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)\} \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned} \dim \ker F &= \\ &= \dim(\text{null-space di } M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)) = \\ &= \dim V - \text{rank } M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) = \\ &= \dim V - \text{rank } F \end{aligned}$$

$$\dim V = \dim \ker F + \text{rank } F$$

Questo sopra enunciato è il teorema di nullità più rango in termini di una funzione lineare.

Esercizio Sia $F : V \rightarrow W$ lineare. Fisso $w_0 \in W$, e definisco

$$F^{-1}(w_0) = \{v \in V \mid F(v) = w_0\}$$

Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché $F^{-1}(w_0)$ sia sottospazio.

Soluzione

Esercizio Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $V, 3\text{-dim}$, $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base di uno spazio vettoriale $W, 4\text{-dim}$

Sia $g : V \rightarrow W$ la funzione lineare determinata dalle relazioni

$$\begin{cases} g(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3 \\ g(v_2) = w_1 + w_2 + w_4 \\ g(v_3) = w_2 + w_3 - w_4 \end{cases}$$

Si calcolino $g(V)$ e $\ker g$

Soluzione Possiamo calcolare $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare $\ker g$ devo calcolare il null-space di $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$ per righe:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\ker g = \{-\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathcal{L}(v_1 - v_2 - v_3)$$

$g(V)$ ha dimensione 2. Per esercizio si trovi una base di $g(V)$

Notazione Spesso l'immagine di una funzione lineare F si indica con $\text{Im}(F)$

Teorema VI Sia $F : V \rightarrow W$ una funzione lineare tra spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} .

F è iniettiva $\iff F$ porta insiemi liberi di vettori di V in insiemi liberi di vettori di W

dim. (VI)

" \implies " Supponiamo F iniettiva e sia $\{v_1, \dots, v_l\} \subseteq V$ un insieme libero, e dimostriamo che $\{F(v_1), \dots, F(v_l)\}$ è un insieme libero in W

Considero $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ tali che

$$\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \dots + \lambda_l F(v_l) = \underline{0}_W$$

Poiché F è lineare risulta

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_l v_l) = \underline{0}_W$$

$$\implies \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_l v_l \in \ker F, \text{ ma poiché } F \text{ iniettiva } \ker F = \{\underline{0}_W\}$$

$$\implies \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_l v_l = \underline{0}_V, \text{ ma } \{v_1, \dots, v_l\} \text{ è libero}$$

$$\implies \lambda_1 = \dots = \lambda_l = 0$$

$$\implies \{F(v_1), \dots, F(v_l)\} \text{ è libero}$$

" \impliedby " Per ipotesi F porta insiemi liberi in insiemi liberi. Si fissa $v \in V$, $v \neq \underline{0}_V$, quindi $\{v\}$ è libero

$$\implies \{F(v)\} \text{ è libero}$$

$$\implies F(v) \neq \underline{0}_W$$

$$\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$$

$$\implies F \text{ è iniettiva}$$

Definizione Una funzione lineare sia iniettiva che suriettiva si dice un isomorfismo

$F : V \rightarrow W$ è un isomorfismo $\iff \text{Im}(F) = W$ e $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

Teorema VII

1. Sia $F : V \rightarrow W$ lineare con V, W finitamente generati e tali che $\dim V = \dim W$.

F è iniettiva $\iff F$ è suriettiva

2. $F : V \rightarrow V$ lineare con V finitamente generato è un isomorfismo \iff iniettiva \iff suriettiva

Definizione Un isomorfismo $F : V \rightarrow V$ si dice un automorfismo di V

dim. (VII)

1. $\dim V = \dim W, \dim V = \dim \ker(F) + \dim \text{Im}(F)$

$$\implies \dim W = \dim \ker(F) + \dim \text{Im}(F)$$

- Se F è suriettiva

$$\implies \dim W = \dim \text{Im}(F)$$

$$\implies \dim \ker(F) = 0$$

$$\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$$

$$\implies F \text{ è iniettiva}$$

- Se F è iniettiva

$$\implies \dim \ker F = 0$$

$$\implies \dim W = \dim \text{Im} F$$

$$\implies W = \text{Im} F$$

$$\implies F \text{ è suriettiva}$$

2. Segue dal punto 1.

Esempio (5.6) V spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} , \mathcal{B} base di V

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

è un isomorfismo