Lezione 10

Alessandro Ardizzoni

Rappresentazione algebrica o cartesiana

Abbiamo visto che ogni numero complesso $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si può riscrivere nella forma $a + ib$ dove $i = (0,1)$ è l'unità immaginaria. Pertanto

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\} = \{a + bi \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

La scrittura $a + bi$ per il numero complesso (a,b) prende il nome di rappresentazione algebrica o cartesiana di un numero complesso. Inoltre

- il numero reale a si dice parte reale di $a + bi$;
- il numero reale b è detto parte immaginaria di $a + bi$.

Un numero immaginario è un numero complesso in cui la parte reale sia nulla, cioé della forma bi per qualche $b \in \mathbb{R}$.

Osservazione

Il termine "numero immaginario" è usato talora per indicare impropriamente qualunque numero complesso: si dicono allora "immaginari puri" i numeri che soddisfano la precedente definizione.

Osserviamo che la rappresentazione algebrica di un numero complesso è unica. Infatti da

$$a + bi = a' + b'i \;\Leftrightarrow\; (a,b) = (a',b') \;\Leftrightarrow\; a = a' \;\wedge\; b = b'.$$

In notazione algebrica, l'opposto di $a + bi$ diventa

$$-(a+bi) = -(a,b) = (-a,-b) = (-a) + (-b)i = -a - bi.$$

Scriviamo la moltiplicazione dei numeri complessi con le notazioni di sopra:

$$(r + si)\cdot(x + yi) = (r,s)\cdot(x,y) = (rx - sy, ry + sx) = rx - sy + (ry + sx)i.$$

Osserviamo che, per definizione di moltiplicazione in $\mathbb{C}$, si ha

$$i^2 = (0,1)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1_{\mathbb{C}}.$$

Applicando questa uguaglianza, la proprietà distributiva e la commutativa, otteniamo

$$(r + si)\cdot(x + yi) = rx + ryi + six + siyi = rx + syi^2 + (ry + sx)i = rx - sy + (ry + sx)i$$

arrivando così allo stesso risultato. In altre parole in $\mathbb{C}$ si fanno i conti come in $\mathbb{R}$ con l'aggiunta di un numero i tale che $i^2 = -1_{\mathbb{C}}$. $\Rightarrow$ continuano a valere le stesse regole

Esempio

Calcoliamo ad esempio

EVITARE $\sqrt{-1}$ per indicare i → notazione ambigua

$$(2+3i)\cdot(-1+4i) = 2\cdot(-1)+2\cdot 4i+3i\cdot(-1)+3i\cdot 4i =$$
$$= -2+8i-3i+12i^2 = -2+5i+12\cdot(-1) = -14+5i.$$

Esempio (Razionalizzazione)

Ricordiamo come si possano eliminare le radici che compaiono al denominatore di una frazione del tipo $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ attraverso la tecnica di razionalizzazione:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1.$$

Poiché l'unità immaginaria gioca il ruolo di una radice quadrata di -1, possiamo usare una strategia analoga se compare al denominatore. Ad es.:

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i+i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2+3i-1}{1-(-1)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

Esercizio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $x \cdot (i+1) + 2 - 3i = 0$.

Soluzione

Si tratta di trovare un numero complesso x che renda vera l'uguaglianza di sopra. Se un tale numero esiste allora dall'equazione, sottraendo da ambo le parti $2-3i$, otteniamo

$$x \cdot (i+1) + \cancel{2-3i} - \cancel{(2-3i)} = 0 - (2-3i)$$

cioé $x \cdot (i+1) = -2+3i$. Dato che $i+1 \neq 0$, sappiamo che è invertibile e quindi possiamo moltiplicare per il suo inverso, ottenendo

$$x \cdot \cancel{(i+1)} \cdot \cancel{(i+1)^{-1}} = (-2+3i) \cdot (i+1)^{-1}.$$

Pertanto

$$x = (-2+3i) \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{(-2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+5i}{1-i^2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. L'equazione quadratica $ax^2 + bx + c = 0$ si può riscrivere in funzione del discriminante $\Delta := b^2 - 4ac$.

Infatti $ax^2 + bx + c = 0 \overset{4a\neq 0}{\Leftrightarrow} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow$
$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow (2ax + b)^2 = \Delta.$
Quindi l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ equivale a

$$(2ax + b)^2 = \Delta. \tag{1}$$

Se $\Delta \geq 0$, la (1) si riscrive come $(2ax + b)^2 = (\sqrt{\Delta})^2$ e quindi otteniamo $2ax + b = \pm\sqrt{\Delta}$ da cui ricaviamo le ben note soluzioni $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ che, in modo più compatto scriveremo,

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

Se $\Delta < 0$, abbiamo $\Delta = -|\Delta| = i^2|\Delta| = (i\sqrt{|\Delta|})^2$.
Pertanto la (1) si riscrive come $(2ax + b)^2 = (i\sqrt{|\Delta|})^2$. Allora $(2ax + b - i\sqrt{|\Delta|})(2ax + b + i\sqrt{|\Delta|}) = 0$ e, per la legge di annullamento del prodotto, otteniamo $2ax + b = \pm i\sqrt{|\Delta|}$ da cui le soluzioni

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}}.$$

Esercizio

Risolvere l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$ *in* $\mathbb{C}$.

Soluzione

Poiché $a = b = c = 1$, *allora* $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$. *Le soluzioni sono*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Per casa: provare a controllare che le soluzioni trovate sono davvero soluzioni dell'equazione, cioé ad esempio che

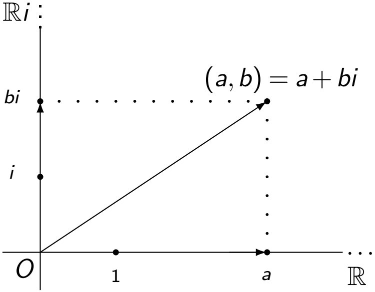
$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 0.$$

Esercizio (per casa)

Sia r *un numero reale negativo. Dimostrare che in* $\mathbb{C}$ *esistono esattamente due numeri* z_1 *e* z_2 *tali che* $(z_1)^2 = (z_2)^2 = r$.

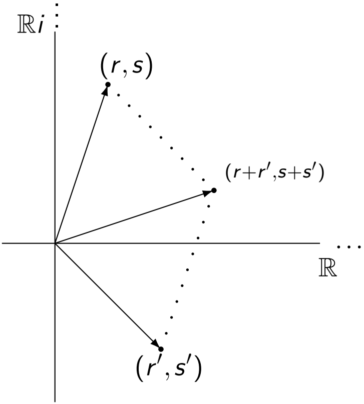
Rappresentazione grafica dei complessi

Un numero complesso è una coppia ordinata $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ di numeri reali. Sappiamo che ogni coppia di questo tipo si può rappresentare come un punto del piano reale. Questa rappresentazione grafica di $\mathbb{C}$ è nota come piano complesso (o piano di Argand-Gauss). Fissato un punto O nel piano si prenda un riferimento cartesiano ortogonale centrato in O. Identifichiamo l'asse orizzontale (ascisse) con $\mathbb{R}$ e l'asse verticale (ordinate) con $\mathbb{R}i = \{ri \mid r \in \mathbb{R}\}$ ponendo i in corrispondenza con $(0,1)$.



Il punto $(a,b) = a + bi$ individua un vettore applicato all'origine.

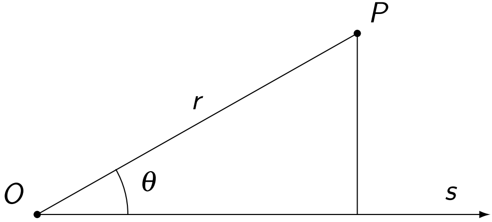
La somma di due numeri complessi corrisponde alla somma dei rispettivi vettori definita dalla cosiddetta regola del parallelogramma:
la somma di due vettori è rappresentata dalla diagonale del parallelogramma da essi definito.



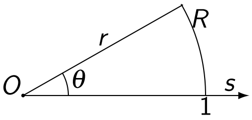
Rappresentazione polare o trigonometrica

Con le coordinate cartesiane non riusciamo a dare un'interpretazione geometrica soddisfacente del prodotto di numeri complessi.
Si può rimediare passando ad un sistema di coordinate differente.

Fissiamo, come sistema di riferimento, un punto O del piano ed una semiretta s di origine O. Un punto qualunque del piano, diciamo P, è univocamente determinato dalla sua distanza r da O (la lunghezza del segmento OP) e dall'angolo θ che OP forma con la semiretta s.



Ricordiamo che, per convenzione, gli angoli si misurano nel verso antiorario in radianti: la misura di un angolo in radianti è la lunghezza dell'arco del cerchio di raggio 1 da esso sotteso.



Se D indica la misura in gradi ($^\circ$) ed R in radianti (rad) di uno stesso angolo, abbiamo la seguente formula di conversione:

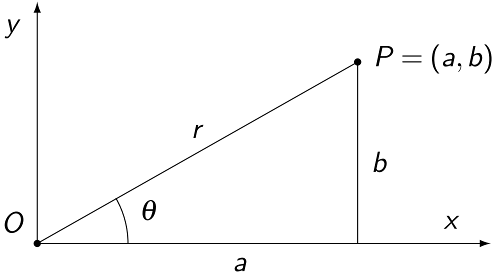
$$\frac{R}{D} = \frac{\pi}{180}.$$

Quindi, ad esempio, se $D = 30^\circ$, allora $R = \frac{\pi}{180} \cdot D = \frac{\pi}{180} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$ rad.

Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

La coppia di valori (r, θ) costituisce le coordinate polari del punto P.
Parleremo di notazione polare o trigonometrica.
Per un ripasso di trigonometria si veda `https://orientamente.unito.it`.

Sovrapponiamo un sistema di coordinate polari ad uno di coordinate cartesiane in modo che i punti origine coincidano e la semiretta s coincida con la semiretta destra dell'asse (orizzontale) delle ascisse. Vediamo in questo caso come passare da coordinate cartesiane a polari e viceversa. Indichiamo con (a, b) le coordinate cartesiane di P e con (r, θ) le sue coordinate polari.



Per il Teorema di Pitagora, la lunghezza di OP è $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Inoltre, dalla trigonometria sappiamo che $\cos(\theta) = \frac{a}{r}$ e $\sin(\theta) = \frac{b}{r}$.

Per quanto visto, conoscendo (r, θ) possiamo calcolare (a, b) con le formule

$$a = r\cos(\theta), \quad b = r\sin(\theta).$$

Con queste formule possiamo riscrivere il numero complesso $z = a + bi \in \mathbb{C}$ come

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i \\ &= \boxed{r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))}. \end{aligned}$$

L'ultima espressione è detta forma trigonometrica o polare del numero complesso z. Inoltre

- L'angolo θ è detto argomento o anomalia di z, mentre
- r è detto il modulo di z e si indica con $|z|$.

Siccome $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ otteniamo $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

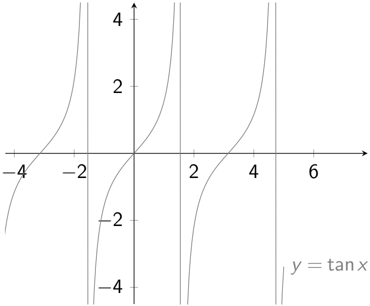
Esempio

Calcoliamo $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

Viceversa, conoscendo (a, b), possiamo calcolare (r, θ), tenendo presente che l'arcotangente assume valori in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tramite le formule

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{se } a > 0; \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \text{se } a < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \wedge b > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0 \wedge b < 0. \end{cases} \tag{2}$$

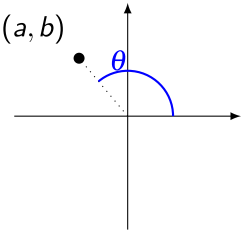
Cerchiamo di capire perché la formula dell'angolo θ in funzione dell'arcotangente in (2) è così strana. Ricordiamo che la tangente è invertibile se riguardata come funzione $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto \tan(\theta)$.



La sua inversa, è l'arcotangente

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), r \mapsto \arctan(r).$$

Se consideriamo un punto (a, b) con $a < 0$, esso starà nel II o nel III quadrante e quindi il suo argomento θ starà nell'intervallo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.



Dato che la tangente è una funzione periodica di periodo π, allora abbiamo $\tan(\theta - \pi) = \tan(\theta) = \frac{b}{a}$. Siccome $\theta - \pi \in (\frac{\pi}{2} - \pi, \frac{3\pi}{2} - \pi) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ allora $\theta - \pi$ sta nel dominio su cui tan è invertibile. Pertanto

$$\tan(\theta - \pi) = \frac{b}{a} \;\Rightarrow\; \theta - \pi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

e quindi $\theta = \arctan(\frac{b}{a}) + \pi$ come in (2).

Confronto tra coordinate polari

Mettiamo che due numeri complessi, scritti in forma polare, siano uguali:

$$r(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)) = r'(\cos(\beta)+i\sin(\beta)).$$

Allora sono uguali anche i loro moduli, cioé $r = r'$.

Se $r = r' = 0$, allora le anomalie α e β sono indipendenti (qualunque loro valore rende vera l'uguaglianza di sopra).

Se invece $r = r' \neq 0$, possiamo cancellarli dall'uguaglianza di sopra ottenendo

$$\cos(\alpha)+i\sin(\alpha) = \cos(\beta)+i\sin(\beta).$$

Uguagliando parte reale ed immaginaria, otteniamo

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) \qquad \text{e} \qquad \sin(\alpha) = \sin(\beta).$$

In questo caso, per periodicità di seno e coseno, possiamo concludere che $\alpha = \beta + 2\pi k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio

Scrivere $1+i$ in forma polare.

SOLUZIONE. Vogliamo scrivere $1+i$ nella forma

$$1+i = r\cdot(\cos(\theta)+i\sin(\theta)).$$

Sappiamo che $r=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Allora l'uguaglianza cercata diventa $1+i=\sqrt{2}\cdot(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$ da cui, uguagliando parte reale e immaginaria, otteniamo $\cos(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Vediamo tre modi per calcolare θ.

1. Dalle tabelle dei valori notevoli, si vede che l'angolo avente questo seno e coseno è $\theta = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad.
2. Calcoliamo $\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=1$ da cui $\theta=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ (poiché $(a,b)=1+i=(1,1)$ allora $a>0$ e non servono correttivi al valore dell'arcotangente).
3. Rappresentando $1+i=(1,1)$ come un punto del piano, si vede che si trova sulla bisettrice del I quadrante e quindi l'angolo è proprio $\frac{\pi}{4}$.

In conclusione $1+i=\sqrt{2}\cdot(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4}))$. □

Esercizio (per casa)

Scrivere $i - 1$ in forma polare. [NB: se si applica il metodo dell'arcotangente, qui il correttivo serve].

Vediamo come la forma trigonometrica permetta di scrivere più agevolmente il prodotto di numeri complessi.

Proposizione

Siano $w = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ e $z = r'(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ due numeri complessi espressi in forma trigonometrica. Allora

$$wz = rr'(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)). \tag{3}$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>. Eseguendo la moltiplicazione si ottiene

$$\begin{aligned} wz &= r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))r'(\cos(\beta) + i\sin(\beta)) \\ &= rr'\big(\underbrace{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}_{=\cos(\alpha+\beta)} + i(\underbrace{\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}_{=\sin(\alpha+\beta)})\big) \end{aligned}$$

Interpretazione geometrica della moltiplicazione

Un aspetto interessante della formula di moltiplicazione appena dimostrata è che fornisce un'interpretazione geometrica della moltiplicazione tra i numeri complessi letti come punti del piano.

Consideriamo infatti $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ e la funzione "moltiplicazione per z"

$$R_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto wz.$$

Scritti $w = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$ e $z = r'(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ in forma trigonometrica come nella proposizione precedente, l'uguaglianza $R_z(w) = wz$ diventa

$$R_z(r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))) = rr'(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta))$$

da cui risulta chiaro che moltiplicare per $z = r'(\cos(\beta) + i\sin(\beta))$ significa

- ruotare il piano di Argand-Gauss di un angolo β e
- dilatarlo (se $r' > 1$) o contrarlo (se $0 < r' < 1$) di un fattore r'.

Proposizione (**Formula di De Moivre**)

Sia $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \in \mathbb{C}$. *Allora, per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *si ha*

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \tag{4}$$

Proof.

Procediamo per induzione su n. La formula è ovviamente vera per $n = 0$. Assumendola vera per n, verifichiamo che vale anche per $n+1$. Si ha

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= z^n z = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big) r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big) \\ &= r^{n+1}\big(\cos(n\theta+\theta) + i\sin(n\theta+\theta)\big) = r^{n+1}\big(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\big) \end{aligned}$$

applicando la formula della moltiplicazione. □

Esercizio (per casa)

Dimostrare che la formula di De Moivre vale per ogni $n \in \mathbb{Z}$ *e* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *una volta definite le potenze negative ponendo* $z^n := (z^{-1})^{-n}$ *per* $n < 0$.

Radici n-esime di un numero complesso

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $z \in \mathbb{C}$. Una radice n-esima di z in $\mathbb{C}$ è un numero complesso w tale che $w^n = z$.

Osservazione (Radici n-esime di zero)

E' chiaro che l'unica radice n-esima di $z = 0$ è 0 stesso. Infatti, $w^n = 0 \Leftrightarrow w \cdot \dots \cdot w = 0 \Leftrightarrow w = 0$ per la legge di annullamento del prodotto.

Vediamo invece chi sono le radici n-esime di un $z \neq 0$.

Proposizione

Sia $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ e sia $n \geq 1$ un numero intero. Allora esistono esattamente n radici n-esime di z in $\mathbb{C}$ a due a due distinte $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$. Più precisamente, si ha

$$w_k := \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

DIMOSTRAZIONE. Se w_k è come nell'enunciato, per la formula di De Moivre

$$\begin{aligned}(w_k)^n &= \left(\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)\right)^n \\ &= (\sqrt[n]{\rho})^n\left(\cos\left(\cancel{n}\cdot\frac{\theta+2\pi k}{\cancel{n}}\right)+i\sin\left(\cancel{n}\cdot\frac{\theta+2\pi k}{\cancel{n}}\right)\right) \\ &= \rho\left(\cos(\theta+2\pi k)+i\sin(\theta+2\pi k)\right) \\ &= \rho\left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right) = z\end{aligned}$$

e dunque vale l'uguaglianza $(w_k)^n = z$. Pertanto w_k è una radice n-esima di z. Inoltre w_0, w_1, $w_2, \dots, w_{n-1}$ sono tutte distinte perché hanno anomalie diverse.

Vediamo ora che queste sono le uniche radici n-esime di z.
Sia dunque $w \in \mathbb{C}$ tale che $w^n = z$. Scriviamolo in forma polare:
$w = \gamma(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)) \in \mathbb{C}$ per certi γ, ρ .
Di nuovo per la formula di De Moivre,

$$\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = z = w^n = \gamma^n(\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)).$$

Pertanto otteniamo

$$\gamma^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)) = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Siccome questi due numeri complessi sono non nulli (perché uguali a $z \neq 0$), otteniamo $\gamma^n = \rho$ (e quindi $\gamma = \sqrt[n]{\rho}$ poiché ogni numero reale positivo ammette esattamente una radice n-esima reale positiva) e

$$n\alpha = \theta + 2\pi k \qquad \text{per qualche } k \in \mathbb{Z},$$

cioè $\alpha = \frac{\theta + 2\pi k}{n}$. Dividendo k per n possiamo scriverlo come $k = qn + r$ dove $q \in \mathbb{Z}$ è il quoziente e $0 \leq r < n$ è il resto della divisione (lo dimostreremo più avanti ma prendiamolo per vero, per ora). Allora

$$\alpha = \frac{\theta + 2\pi(qn + r)}{n} = \frac{\theta + 2\pi r}{n} + \frac{2\pi q\cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{\theta + 2\pi r}{n} + 2\pi q$$

da cui

$$\begin{aligned} w &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi r}{n} + 2\pi q\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi r}{n} + 2\pi q\right)\right) \\ &= \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi r}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi r}{n}\right)\right) = w_r \end{aligned}$$

Siccome $0 \leq r < n$, concludiamo che $w = w_r \in \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$.

Pertanto le radici n-esime di $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ sono
$w_k := \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right)$ dove $k = 0, 1, ..., n-1$.
Disegnandole su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ otteniamo i vertici del poligono regolare di n lati in essa inscritto ed avente un vertice in $w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$.