1 Limite successione

Data $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a : n \to a_n$, $l \in \mathbb{R}*$, diciamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

se $\forall V(l) \exists U(+\infty) n \in (\mathbb{N} intersezione D) \implies a_{n \in V(l)}$ Scriviamo $\forall V(l) \exists n_{segnato} \in N | \forall n > n_{segnato} a_n \in V(l)$

$l \in \mathbb{R}$, diciamo che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è **convergente** a l se $\forall \varepsilon \exists n_{segnato} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{segnato} |a_n - l| < \varepsilon$

Se $l = \pm\infty$ a_n è divergente a $\pm\infty$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \nexists$ allora $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è irregolare (o oscillante).

Esempio (1.1)

- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è irregolare e limitata
- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n \cdot n$ con $n = 0, -1, 2, -3, 4, \cdots$ è irregolare e non limitata

Si dice di una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

- $\forall \{a_n\}$ è crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$

Una successione crescente o decrescente si dice monotona, se strettamente crescente o decrescente si dice strettamente monotona.

Un predicato $P(n)$ è verificato definitivamente se $\exists n_{segnato} \forall n \leq n_{segnato}$ $P(n)$ è vero

Valgono per $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i seguenti teoremi

- Teorema di unicità del Limite
- Teorema di permanenza del segno
- Teorema di limitatezza:

  Teorema I

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ è convergente e limitata}$$

- Teorema del confronto

- Teorema di esistenza del Limite per successioni definitivamente monotone

  Teorema II $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente crescente

  $\implies$ ammette limite in $\mathbb{R}*$

  Precisamente se

  - $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e limitata

    $\implies$ è convergente

  - $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e non limitata

    $\implies$ è divergente

Teorema III Principio di Archimede $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a, b > 0$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$

dim. **(III)** Utilizziamo la funzione parte intera:

$x \in \mathbb{R}$ si dice $[x] = \max_{n \in \mathbb{Z}}\{n \leq x\}$

Si verifica che $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] < x \leq [x] + 1$

Se $x \geq 0$, $[x] \geq 0$, $[x] \in \mathbb{R}$

Considerato $x = \frac{b}{a}$

$$\left[\frac{b}{a}\right] \leq \frac{b}{a} < \left[\frac{b}{a}\right] + 1$$

Posto $n_{segnato} = \left[\frac{b}{a}\right] + 1 \in \mathbb{N}$

$$\frac{b}{a} < n_{segnato} \implies n_{segnato}a > b$$

Osserviamo che posto $a = 1$ si ha che $\forall b \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > b$

1.1 Applicazione del Principio di Archimede

Verifichiamo che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo verificare che definitivamente $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ allora per il principio di archimede

$$\exists n_{segnato} \in \mathbb{N}, n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora $\forall n \geq n_{segnato}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ dunque $\frac{1}{n} < \varepsilon$ definitivamente

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Teorema IV Disugualiganza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

si ha che

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

dim. **(IV)** Dimostrazione per induzione

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx, x > -1$$

1. $P(0)$
$$1 + x > 0\,(1+x)^0 = 1 = 1 + n0$$
P(0) è vera
2. Assumiamo vera P(n)

1.2 Limiti

Progressione geometrica

$$q \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} q^n = ?, n \in \mathbb{N}$$

- $q > 1, q = 1 + p$ con $p > 0$ $q^n = (1+p)^n \geq 1 + np$ per la disuguaglianza di Bernoulli

  $1 + np \to +\infty$ per $n \to +\infty$

  Per confronto
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$
- $q = 1$ $q^n = 1$ $\forall n$
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$$

- $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$

  $\implies |q| = \frac{1}{1+p}$ con $p > 0$

  $$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np}$$

  $1 + np \to +\infty$ per $n \to +\infty$

  $\implies \frac{1}{1+np} \to 0$

  Per confronto

  $$\lim_{n\to+\infty} |q^n| = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

- $q = -1$

  q^n è irregolare e limitata

- $q < -1$

  $$q^n = (-1)^n |q|^n$$

  ma $|q| > 1$ quindi $|q|^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, e quindi q^n è irregolare non limitata

Riassumendo

$$q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q > 1 \\ \text{convergente a } 1 & q = 1 \\ \text{convergente a } 0 & |q| < 1 \\ \text{irregolare limitata} & q = -1 \\ \text{irregolare non limitata} & q < -1 \end{cases}$$

Esercizio Posto $q \in \mathbb{R}$ e

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} b_n$$

Soluzione Da risolvere

Teorema V Sia $f : D \to \mathbb{R}$: $x \to f(x)$, $x_0 \in D'$ e $x_0 \in \mathbb{R}*$, $l \in \mathbb{R}*$

Allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (A)

$\iff$

per ogni successione $a : \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a valori in $D \setminus \{x_0\}$

$a_n \xrightarrow{n\to+\infty} x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n\to+\infty} l)$ (B)

dim. **(V)**

(A) $\implies$ (B) Sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ovvero

$$\forall V(l) \exists U(x_0) | x \in U \wedge x \in V land x \neq x_0 \implies f(x) \in V(l)(1)$$

Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$ con $a_n \in D$ e $a_n \neq x_0$ ossia

$$\exists n_{segnato} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{segnato} a_n \in D \wedge a_n \neq x_0 \wedge a_n \in U(x_0)$$

allora $f(a_n) \in V(l)(2)$

Concludendo unendo (1) e (2)

$$\forall V(l) \exists n_{segnato} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{segnato} f(a_n) \in V(l)$$

ossia

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

(B) $\implies$ (A) Procediamo per assurdo: verificando $\neg A \implies \neg B$

$\neg B$: esiste una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ per cui $a_n \overset{\to}{\longrightarrow}$

Consideriamo $\delta = 1$ $\exists x_1$ $0 < |x - x_0| < 1 \wedge f(x_1) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{2}$ $\exists x_2$ $0 < |x_2 - x_0| < 1 \wedge f(x_2) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x_n$ $0 < |x_n - x_0| < 1 \wedge f(x_n) \notin V(l)$

Allora abbiamo costruito una successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tale che $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ e $f(x_n) \notin V(l)$

inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{segnato} | \forall n > n_{segnato} 0 < |x_n - x_0| < \varepsilon$ $(n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon})$

ossia $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$

Abbiamo costruto una successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ e $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

ossia abbiamo ottenuto che $\neg B$ è vera

1.3 Confronti tra infiniti

1. Dati $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$ osserviamo che

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{a^n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{n}}{1+hn} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ allora per confronto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$$

ovvero

$$\sqrt{n} = o(a^n)_{n\to+\infty}$$

2. Dato $a > 1$

$$0 \leq \frac{n}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n}\right)^2$$

ma $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n = o(a^n)_{n\to+\infty}$$

3. Dato $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k$$

ma $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Dato che $a > 1$ e $\sqrt[k]{a} > 1$ concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n^k = o(a^n)_{n\to+\infty}$$

4.