Università di Torino
Scuola di Scienze della Natura
Corso di Laurea in Matematica

ANALISI MATEMATICA UNO

Esercizi da consegnare per la correzione
Consegna 4

Cognome e nome Peccioli Daviole

Es. I. Discutere il carattere della seguente successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

Svolgimento.

Se esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ deve valere, per l'algebra dei limiti

$$\ell = \sqrt{2+\ell} \qquad (\ell > -2)$$

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow \ell = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ \cancel{-1} \end{cases}$$

Quindi $\ell = 2$

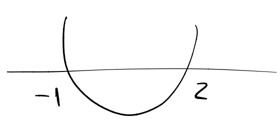
Quando $\{a_n\}$ monotona ?

crescente $a_{n+1} > a_n$?

$$\sqrt{2+a_n} > a_n \qquad (a_n > -2)$$

$$2 + a_n > a_n^2$$

$$a_n^2 - a_n - 2 < 0$$

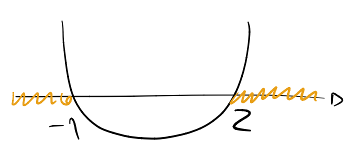


$$-1 < a_n < 2$$

decrescente $a_n > a_{n+1} \Rightarrow a_n > \sqrt{2+a_n}$ (se $a_n \geq 0$) sempre, in quanto la radice quadrata è positiva

$$a_n^2 > a_n + 2$$

$$a_n^2 - a_n - 2 > 0$$



$a_n > 2 \rightarrow$ Quando $a_n > 2$ la succ. è decrescente

Dimostro per induzione che tutta la successione $\{a_n\} > 2$

① $a_0 = 4 > 2$

② se $a_n > 2 \Rightarrow a_{n+1} > 2$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} > \sqrt{2+2} = \sqrt{2} = 2 \Rightarrow a_{n+1} > \sqrt{2}$$

Essendo strettamente decrescente ammette limite $\boxed{l = 2}$