Geometria 1

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

1 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare di numeri reali ($\in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

contiene $m \cdot n$ numeri
contiene m righe
contiene n colonne

a_{ij} è l'elemento della matrice nella i-esima riga e nella j-esima colonna. $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

A è una matrice $m \cdot n$. Se $m = n$ allora A è una **matrice quadrata**.

Le matrici servono per:

- risolvere sistemi lineari
- studiare spazi vettoriali
- classificarre strutture geometrice (es. coniche)
- presentare funzioni (semplificandone lo studio)

$\mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$:

- $\mathbb{Q}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$ le cui entrate sono elementi di $\mathbb{Q}$.

Esempi (1.1)

- $\mathbb{R}^{2,2}$: matrici $2 \cdot 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdots \in \mathbb{R}^{2,2}$$

- $\mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^{m,1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1} \qquad \text{anche } \textbf{vettori colonna}$$

- $\mathbb{R}^{1,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n} \qquad \text{anche } \textbf{vettori riga}$$

In $\mathbb{R}^{m,n}$ è sempre definita la **matrice nulla**, in cui tutte le entrate sono nulle. In $\mathbb{R}^{n,n}$ è sempre definita la **matrice identità**:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{1,1}$, $I = 1$
- In $\mathbb{R}^{2,2}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{3,3}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale composta unicamente da 1 nella matrice identità è ila **diagonale principale** della matrice.

1.1 Somma

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempi (1.2)

- In $\mathbb{R}^{1,1}$ la somma tra matrici coincide con la somma usuale di numeri reali.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

Proprietà della somma

(i) La somma è **associativa**:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

e posso scrivere $A + B + C$ senza ambiguità.

(ii) La somma è **commutativa** (o abeliana):

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad A + B = B + A$$

(iii) Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice nulla ($B = \underline{0}$), allora $A + B = B + A = A$

(iv) $A - A = \underline{0}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \exists - A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ t. c. } A - A = 0$$

Definizione Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si definisce $-A$,

$$\text{con } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notazione In genere si scrive $A-B$ in luogo di $A+(-B)$, e si considera come una sottrazione di matrici

Definizione Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ sono uguali se hanno le stesse entrate $(A = B)$

Proprietà $A = B \iff B - A = 0$

2 Gruppo

Definizione Siano A, B due insiemi, si definisce **prodotto cartesiano**:

$$A \times B = \{(a, b) \text{ t. c. } a \in A, b \in B\}$$

in cui conta l'ordine: $(a, b) \neq_(b, a)$

$$A \times A = \{(a_1, a_2) \text{ t. c. } a_1, a_2 \in A\}$$

Definizione Sia G un insieme. Una **operazione** in G è una funzione

$$\begin{aligned} \star : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g \star h \end{aligned}$$

Proprietà

(*i*) L'operazione è **associativa** se $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$

(*ii*) L'operazione ha un **elemento neutro** se

$$\exists\, e \in G \text{ t.c. } g \star e = e \star g = g,\ \forall g \in G$$

(*iii*) Se $g \in G$ chiamiamo **inverso di** g un elemento

$$k \in G \text{ t.c. } g \star k = k \star g = e$$

Definizione Un **gruppo** è un insieme G con un'operazione $\star$ t. c.

1. $\star$ è associativa
2. esiste un elemento neutro
3. ogni elemento ha un inverso

Esempi (2.1) Sono gruppi

$$(\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),$$

$$\cancel{(\mathbb{R}, \cdot)}\text{: lo zero non ha un inverso,}$$

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ (\mathbb{R}^{m,n}, +)$$

Definizione Un gruppo $(G, \star)$ è **abeliano** se

$$g \star h = h \star g\ \forall\, g, h \in G$$

Nel caso di un gruppo abeliano l'operazione è indicata con $+$ e l'elemento neutro con 0.

$$(\mathbb{R}^{m,n}, +) \text{ è un gruppo abeliano}$$

3 Operazioni con le matrici

3.1 Moltiplicazione

Si può moltiplicare $\lambda \in \mathbb{R}$ con matrici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot A = -A \qquad \text{coerente con la definizione di } -A$$

Esempio (3.1)

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Osservazione (3.1) $0 \cdot A$ è la matrice nulla $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Proprietà del prodotto per scalari

(*i*) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

(*ii*) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

(*iii*) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

(*iv*) $1 \cdot A = A \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$ è un **gruppo abeliano** in cui è definita una moltiplicazione per scalari in cui valgono le proprietà *i*-*iv* (prototipo per gli spazi vettoriali).

3.2 Prodotto tra matrici

$$A, B \text{ t. c. } A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k} \implies AB \in \mathbb{R}^{m,k}$$

Questo è definito come il prodotto **righe per colonne**. Il numero di colonne della prima matrice deve corrispondere con il numero di righe della seconda matrice.

Teorema I Sia V uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$, e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale:

1. se V è finitamente generato $\implies$ W è finitamente generato;
2. se V è finitamente generato $\implies$ $\dim W \leq \dim V$
3. se V è finitamente generato e $\dim W = \dim V \implies W = V$

dim. **(I)**

1. Supponiamo che V sia finitamente generato, e per assurdo che W non lo sia.

   V è finitamente generato $\implies$ V ha una base

   $$\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

   W non è finitamente generato, e sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq \underline{0}$, considero $\mathscr{L}(w_1) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1)$, altrimenti W sarebbe generato da w_1. $\implies \exists\, w_2 \in W \wedge w_2 \notin \mathscr{L}(w_1)$.

   Considero $\mathscr{L}(w_1, w_2) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1, w_2)$, altrimenti W sarebbe generato da $\{w_1, w_2\}$. $\implies$
   $\implies \exists\, w_3 \in W \wedge w_3 \notin \mathscr{L}(w_1, w_2)$.

   Itero il procedimento e trovo

   $$\{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \subseteq W \text{ t.c. } w_{n+1} \notin \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) \implies \\ \implies \{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \text{ è un insieme libero}$$

   e contiene più elementi di una base $\mathscr{B}$. Assurdo per teorema precedente.

2. Supponiamo V finitamente generato, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. W è finitamente generato (per 1.) $\implies \exists\, \mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di $W \implies \mathscr{B} \subseteq V$ è un sottoinsieme libero $\implies m \leq \dim V \implies \dim W \leq \dim V$

3. Sia $W \subseteq V$ uno spazio vettoriale, con V finitamente generato. $\dim W = \dim V$.

   W ha una base $\mathscr{B}$ con n vettori, dove $n = \dim V \implies \mathscr{B}$ è una base di V.

   Se $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_n\} \implies W = \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) = V \implies W = V$

Osservazione (3.2) Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato, e $\dim V = n \implies$ ogni insieme libero con n elementi è una base. Infatti se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ è un insieme libero, se per assurdo esistesse $v \in V \wedge v \notin \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_n) \implies \{v_1, \cdots, v_n, v\} \subseteq V$ è un insieme libero di cardinalità $n+1$ (ovvero con $n+1$ elementi). Assurdo.

Teorema II (del completamento di una base) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e sia $I = \{a_1, \cdots, a_l\} \subseteq V$ un sottoinsieme libero. Esiste sempre $\mathscr{B}'$ base di V i cui primi l-elementi sono $a_1, \cdots, a_l$ e i restanti $n-l$-elementi sono elementi di $\mathscr{B}$.

$$\mathscr{B}' = \{a_1, \cdots, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}$$

dim. **(II)** Applico il metodo degli scarti successivi

$l = n$ l'enunciato è banale (I è già una base e non va completata);

$l < n \implies \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l) \subsetneq V$
$\implies \exists\, w_1 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_1 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l)$. Infatti, se tutti i generatori appartenenti a $\mathscr{B}$ fossero combinazioni lineari di $a_1, \cdot, a_l$, non sarebbero più tutti linearmente indipendenti.
$\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1\}$ è libero.

Se I_1 è una base, la dimostrazione si conclude, altrimenti $\exists\, w_2 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_2 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l, w_2)$
$\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, w_2\}$ è libero.

Se I_2 è una base la dimostrazione si conclude, altrimenti si itera fino a

$$I_{n-l} = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}.$$

I_{n-l} è libero con n vettori $\implies$ I_{n-l} è una base

Esempio (3.2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3}) = \{A \in \mathbb{R}^{3,3} \text{ t. c. } {}^tA = A\}$

Cerco una base. Sia $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ generica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e sia $\mathscr{B} = \{E_1, \cdots, E_6\}$

Dato

$$I = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left. A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$$

insieme libero, si trovino tre elementi $w_1, w_2, w_3 \in \mathscr{B}$ tali per cui $I \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$.

$$A_1 = E_1 + 2E_2; A_2 = E_1 - E_4 + E_6; A_3 = E_2 - E_3$$

e rispetto alla base $\mathscr{B}$

$$A_1 = (1,2,0,0,0,0), A_2 = (1,0,0,-1,0,1), A_3 = (0,1,-1,0,0,0)$$
$$E_1 = (1,0,\cdots,0), E_2 = (0,1,0,\cdots,0), \cdots, E_6 = (0,\cdots,0,1)$$

Si studia l'appartenenza di $E_1 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3)$. Studio il sistema

$$E_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_1 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1\}$$

Si studia l'appartenenza di $E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_2 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$$\implies E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies \text{scarto } E_2$$

Si studia l'appartenenza di $E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 1 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$$\implies E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies \text{scarto } E_3$$

Si studia l'appartenenza di $E_4 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_4 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 1 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_4 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4\}$$

Si studia l'appartenenza di $E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4)$. Studio il sistema

$$E_5 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1 + \lambda_5 E_4$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_5 \\ 1 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 0 \\ \cdots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4) \implies I_3 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$$

La soluzione è $\mathscr{B}' = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

4 Operazioni tra sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un un campo $\mathbb{K}$, e siano W_1 e $W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

Si consideri

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in w_1 \wedge x \in w_2\}$$

Proposizione *p*.i $W_1 \cap W_2$ è sempre sottospazio vettoriale

dim. **(*p*.i)** Siano $x, y \in W_1 \cap W_2$

$$\implies \left.\begin{cases} x, y \in W_1 \implies (x+y) \in W_1 \\ x, y \in W_2 \implies (x+y) \in W_2 \end{cases}\right\} \implies (x+y) \in W_1 \cap W_2$$

Proposizione *p*.i Sia V uno spazio vettoriale e W, W_1 e W_2 sottospazi di V.

Se W contiene W_1 e W contiene W_2 allora W contiene $W_1 + W_2$ (cioè $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene sia W_1 che W_2)

***dim.* (*p*.i)** Sia $x + y \in W_1 + W_2$, $x \in W_1 \implies x \in W, y \in W_2 \implies y \in W \implies x+y \in W$, poiché W è un sottospazio vettoriale. Quindi ogni $v \in W_1 + W_2$ è elemento di $W \implies W_1 + W_2 \subseteq W$.

La somma si generalizza a più sottospazi. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali, allora si definisce

$$W_1 + \cdots + W_l = \{x_1 + \cdots + x_l | x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale ed è il più piccolo sottospazio che contiene tutti i $W_1, \cdots, W_l$

Esercizio Si trovino somma e intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

a. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = L(e_4)$

b. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x : 1, x : 2 \in \mathbb{R}\}$,
$Z_2 = \{(0, x_2, 0, x_4) | x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

Soluzione

a. $W_1 + W_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$, $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

b. $W_1 + Z_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$,
$W_1 \cap Z_2 = \{(0, x_2, 0, 0) | x_2 \in \mathbb{R}\}$

Proposizione *p*.i Sia V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni:

1. $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ (hanno intersezione banale)

2. ogni $v \in W_1 + W_2$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$

dim. **(p.i)**

1. $\implies$ 2. Suppongo $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ e considero $v \in W_1 + W_2$. Scrivo $v = x_1 + y_1$, $v = x_2 + y_2$ e dimostro che $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

$\underline{0} = v - v = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$ $\implies$ $x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, $x_1 - x_2 \in W_1$ mentre $y_2 - y_1 \in W_2$. Per l'uguaglianza risulta che

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \in W_2 \implies x_1 - x_2 \in W_1 \cap W_2 \\ y_2 - y_1 \in W_1 \implies y_2 - y_1 \in W_1 \cap W_2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 - x_2 = \underline{0} \implies x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = \underline{0} \implies y_1 = y_2 \end{cases}$$

2. $\implies$ 1. Suppongo che ogni $v \in W_1 + W_2$ si scriva in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$ e dimostro che $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

Sia $v \in W_1 \cap W_2$. Sia $v \in W_1 + W_2$, $v = x + y = x + v + y - v$, con $x + v \in W_1$, $y - v \in W_2$. Quindi se $v \neq \underline{0}$, le due scritture $v = x + y$, $v = (x + v) + (y - v)$ sono diverse e ciò non è possibile per ipotesi

Notazione Se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ si scrive $W_1 \oplus W_2$ invece che $W_1 + W_2$ $\oplus$ si legge "somma diretta"

Esempio (4.1) $\mathbb{K}^{n,n} = S(\mathbb{K}^{n,n}) \oplus A(\mathbb{K}^{n,n})$

Esempio (4.2) $R^2 = \mathscr{L}(e_1) \oplus \mathscr{L}(e_2)$

Proposizione *p*.i Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni

1. $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{\{} i-1\} + W_{\{} i+1\} + \cdots + W_l) = \{\underline{0}\}$ $\forall i = 1, \cdots, l$
2. Ogni $v \in W_1 + \cdots + W_l$ si scrive in modo unico come $v = x_1 + \cdots + x_l$ con $x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l$

Se vale 1. si scrive $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_l$

Esempio (4.3) Considero V spazio vettoriale di dimensione finita e $\mathscr{B} = \{v1, \cdots, v_n\} \implies V = \mathscr{L}(v_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}(v_l)$

Sia V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, finitamente generato. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale, sia $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_l\}$ una base di W. Possiamo completare $\mathscr{B}$ con una base dello spazio $\mathscr{B}' = \{w_1, \cdots, w_l, v_1, \cdots, v_m\}$. Sia

$$Z = \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_m) \subseteq V$$

un sottospazio vettoriale, e per costruzione $V = W \oplus Z$

Osservazione (4.1) Sia V spazio vettoriale di dimensione finita con $V = W \oplus Z$ Siano $\mathscr{B} = \{w1, \cdots, w_l\}$ una base di W e $C = \{z_1, \cdots, z_m\}$ una base di Z. Ogni elemento di V si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W$ e $y \in Z$ $\mathscr{B}$ base di W

$\implies$ x si scrive in modo unico come $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l$

$\mathscr{C}$ base di $Z \implies y$ si scrive in modo unico come

$$y = \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies$ v si scrive in modo unico come

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l + \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies B \cup C = \{w1, \cdots, w_l, z_1, \cdots, z_l\}$ è una base di V

$\implies \dim V = \dim W + \dim Z$

Teorema I Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Siano $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali t. c. $V = W_1 + W_2$. Allora

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Questa è la **Formula di Grassmann**.

dim. **(I)** Chiamo $\dim V = n$, $\dim W_1 = l$, $\dim W_2 = p$, $\dim(W_1 \cap W_2) = r$

In particoalre $l, p \leq n$, $r \leq l, p$

1. $r = l \implies W_1 \cap W_2 = W_1 \implies W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 + W_2 = W_2 = V$
2. $r = p \implies W_1 \cap W_2 = W_2 \implies W_2 \subseteq W_1 \implies W_1 + W_1 = W_1 = V$