

Analisi Matematica 1 A

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

1 Limite successione

Data $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, a : n \rightarrow a_n, l \in \mathbb{R}^*$, diciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

se $\forall V(l) \exists U(+\infty) n \in (\mathbb{N} \text{ intersezione } D) \implies a_n \in V(l)$ Scriviamo $\forall V(l) \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{\text{segnato}} a_n \in V(l)$

$l \in \mathbb{R}$, diciamo che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è **convergente** a l se $\forall \varepsilon \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{\text{segnato}} |a_n - l| < \varepsilon$

Se $l = \pm\infty$ a_n è divergente a $\pm\infty$, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \nexists$ allora $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è irregolare (o oscillante).

Esempio (1.1)

- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è irregolare e limitata
- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n \cdot n$ con $n = 0, -1, 2, -3, 4, \dots$ è irregolare e non limitata

Si dice di una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

- $\forall \{a_n\}$ è crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente crescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n+1}$

Una successione crescente o decrescente si dice monotona, se strettamente crescente o decrescente si dice strettamente monotona.

Un predicato $P(n)$ è verificato definitivamente se $\exists n_{\text{segnato}} \forall n \leq n_{\text{segnato}} P(n)$ è vero

Valgono per $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i seguenti teoremi

- Teorema di unicità del Limite
- Teorema di permanenza del segno
- Teorema di limitatezza:

Teorema I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ è convergente e limitata}$$

- Teorema del confronto
- Teorema di esistenza del Limite per successioni definitivamente monotone

Teorema II $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente crescente

\implies ammette limite in \mathbb{R}^*

Precisamente se

- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e limitata
 \implies è convergente
- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e non limitata
 \implies è divergente

Teorema III Principio di Archimede $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a, b > 0$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$

dim. (III) Utilizziamo la funzione parte intera:

$x \in \mathbb{R}$ si dice $[x] = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{n \leq x\}$

Si verifica che $\forall x \in \mathbb{R}, [x] < x \leq [x] + 1$

Se $x \geq 0, [x] \geq 0, [x] \in \mathbb{R}$

Considerato $x = \frac{b}{a}$

$$\left[\frac{b}{a} \right] \leq \frac{b}{a} < \left[\frac{b}{a} \right] + 1$$

Posto $n_{segnato} = \left[\frac{b}{a} \right] + 1 \in \mathbb{N}$

$$\frac{b}{a} < n_{segnato} \implies n_{segnato}a > b$$

Osserviamo che posto $a = 1$ si ha che $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > b$

1.1 Applicazione del Principio di Archimede

Verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo verificare che definitivamente $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ allora per il principio di archimede

$$\exists n_{segnato} \in \mathbb{N}, n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora $\forall n \geq n_{segnato}, n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ dunque $\frac{1}{n} < \varepsilon$ definitivamente

Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Teorema IV Disugualianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

si ha che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

dim. (IV) Dimostrazione per induzione

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx, x > -1$$

1. $P(0)$

$$1+x > 0 \quad (1+x)^0 = 1 = 1+n0$$

$P(0)$ è vera

2. Assumiamo vera $P(n)$

1.2 Limiti

Progressione geometrica

$$q \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = ?, n \in \mathbb{N}$$

- $q > 1, q = 1 + p$ con $p > 0$ $q^n = (1 + p)^n \geq 1 + np$ per la disuguaglianza di Bernoulli

$$1 + np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- $q = 1$ $q^n = 1 \forall n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$$

- $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$

$$\implies |q| = \frac{1}{1+p} \text{ con } p > 0$$

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np}$$

$$1 + np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\implies \frac{1}{1+np} \rightarrow 0$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- $q = -1$

q^n è irregolare e limitata

- $q < -1$

$$q^n = (-1)^n |q|^n$$

ma $|q| > 1$ quindi $|q|^n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, e quindi q^n è irregolare non limitata

Riassumendo

$$q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q > 1 \\ \text{convergente a } 1 & q = 1 \\ \text{convergente a } 0 & |q| < 1 \\ \text{irregolare limitata} & q = -1 \\ \text{irregolare non limitata} & q < -1 \end{cases}$$

Esercizio Posto $q \in \mathbb{R}$ e

$$b_n = \sum_{k=0}^n q^k$$

calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

Soluzione Da risolvere

Teorema V Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$: $x \rightarrow f(x)$, $x_0 \in D'$ e $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $l \in \mathbb{R}^*$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (A)

\Longleftrightarrow

per ogni successione $a : \{a_n\}_{n=0}^\infty$ a valori in $D \setminus \{x_0\}$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \text{ (B)}$$

dim. (V)

(A) \implies (B) Sappiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ovvero

$$\forall V(l) \exists U(x_0) | x \in U \wedge x \in V \text{ and } x \neq x_0 \implies f(x) \in V(l) \text{ (1)}$$

Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ con $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$ con $a_n \in D$ e $a_n \neq x_0$ ossia

$$\exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{\text{segnato}} a_n \in D \wedge a_n \neq x_0 \wedge a_n \in U(x_0)$$

allora $f(a_n) \in V(l) \text{ (2)}$

Concludendo unendo (1) e (2)

$$\forall V(l) \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{\text{segnato}} f(a_n) \in V(l)$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$$

(B) \implies (A) Procediamo per assurdo: verificando $\neg A \implies \neg B$

$\neg B$: esiste una successione $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ tale che $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ per cui $a_n \xrightarrow{\rightarrow}$

Consideriamo $\delta = 1 \exists x_1 0 < |x - x_0| < 1 \wedge f(x_1) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{2} \exists x_2 0 < |x_2 - x_0| < 1 \wedge f(x_2) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n 0 < |x_n - x_0| < 1 \wedge f(x_n) \notin V(l)$

Allora abbiamo costruito una successione $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ tale che $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ e $f(x_n) \notin V(l)$

inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{segnato} \forall n > n_{segnato} 0 < |x_n - x_0| < \varepsilon$ ($n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$)

ossia $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$

Abbiamo costruito una successione $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ con $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$

ossia abbiamo ottenuto che $\neg B$ è vera

1.3 Confronti tra infiniti

1. Dati $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$ osserviamo che

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\sqrt{n}}{a^n} &= \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{1+hn} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

e $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ allora per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$$

ovvero

$$\sqrt{n} = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

2. Dato $a > 1$

$$0 \leq \frac{n}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \right)^2$$

ma $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

3. Dato $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k$$

$$\text{ma } \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Dato che $a > 1$ e $\sqrt[k]{a} > 1$ concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n^k = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

4.

2 Costante di Nepero

8 nov 2021

Consideriamo la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^{+\infty}$$

è una forma indeterminata

Verifichiamo la convergenza:

1. a_n è crescente
2. a_n è superiormente limitata
3. applichiamo il teorema di esistenza del limite per le successioni monotone

1. $a_1 = 2$, per $n \geq 2$ stimiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} = \\ &= \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n (\frac{n}{n-1})^{-1}} = \\ &= \frac{(\frac{1+n}{n})^n (\frac{n-1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = \\ &= \frac{(1 - \frac{1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = ** \end{aligned}$$

Applico la disuguaglianza di Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} < 1, -\frac{1}{n^2} > -1 \\ \implies (1 - \frac{1}{n^2}) \geq 1 - n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\implies ** \geq \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$

Quindi $\forall n \geq 2$, $a_n \geq a_{n-1}$, quindi a_n è crescente definitivamente

2. Dimostriamo ora che a_n è limitata superiormente.

Consideriamo $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ($a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$)

Verifichiamo che b_n è decrescente.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} = \dots = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n}$$

Stimiamo $(1 + \frac{1}{n^2-1})^n$; per qualsiasi $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2-1} > 0$, e posso applicare Bernoulli:

$$(1 + \frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Ottengo quindi che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Quindi $\forall n \geq 2, b_n < b_{n-1}$, quindi b_n decrescente definitivamente, ma $b_2 = 4 \implies b_n \leq 4$ definitivamente

Poiché $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ si ha a_n crescente e $a_n \leq 4$ definitivamente

3. Dunque, per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate, otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \in \mathbb{R}$$

(esiste ed è un numero reale), e lo chiamiamo e , detta costante di Nepero \square

Quindi

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Osserviamo che

$$a_1 = 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

Una prima stima di e risulta essere

$$2 \leq e \leq 4$$

Con opportuni algoritmi di approssimazione si stima che

$$e = 2,7182818284 \dots$$

Osservazione (2.1) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (dimostrazione sul libro di testo)

Proposizione p.i

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Lemma l.i Sia $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$ allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

dim. (p.i) Applicando il teorema di relazione, a partire dal lemma (l.i) si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

dim. (l.i)

$$1. \ x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty, \text{ ricordiamo } [x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$$

2. ...

□

3 Continuità

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

Diciamo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Il valore di l non è in alcun modo legato ad $f(x_0)$

Consideriamo $x_0 \in D$

Esempi (3.1)

- $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

- $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sgn}(x) = 1 \neq \text{sgn}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sgn}(x) = -1 \neq \text{sgn}(0) = 0$$

•

$$\bullet f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Definizione Consideriamo $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

Diciamo che f è continua in $x_0 \in D$ se

a. x_0 punto isolato di D

b. $x_0 \in D'$ e vale una delle seguenti affermazioni tra di loro equivalenti:

i. $\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0)$ tale che $x \in U \cap D$

$$\implies f(x) \in V$$

ii. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

iii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

iv. data $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ a valori in D tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Lemma l.ii Le quattro affermazioni precedenti sono equivalenti

dim. (l.ii)

i. \iff ii. è ovvio

ii. \implies iii. è ovvio

iii. \iff iv. per il teorema di relazione

iii. \implies ii. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

se $x = x_0$ $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ossia f
continua in x_0 \square

Diciamo che f è continua in $E \subseteq D$ se $\forall x_0 \in E$ f è continua in x_0

Esempi (3.2) In generale dati $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $x_0 \in D$ se si ha

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da destra} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da sinistra} \end{cases}$$