1 Immagine di sottospazi

Definizione Data $F : V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali su uno stesso campo, il rango di F ($\operatorname{rank} F$) è la dimensione di $F(V)$

Se $\mathscr{B}$ è una base di V e $\mathscr{C}$ è una base di W, ad F si associa la matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ che rappresenta F rispetto alle basi fissate.

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}$$

Il rango di F coincide con il rango della matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

$\implies$ tutte le matrici associate ad F hanno lo stesso rango.

2 Retroimmagine di sottospazi

$F : V \to W$ applicazione lineare, sia $K \subseteq W$ un sottospazio

$$F^{-1}(K) = \{w \in K | w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\}$$

Si noti che $F^{-1}(K) \neq \emptyset$: sicuramente K contiene $\underline{0}_W$ e sappiamo che $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.

Proposizione *p.i* $F^{-1}(K)$ è sempre un sottospazio vettoriale di V, $\forall K \subseteq W$ sottospazio vettoriale

dim. **(*p.*i)** Fisso $v, w \in F^{-1}(K)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostro che $\lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} v \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(x) \text{ per qualche } x \in K, F(v) = x \\ w \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(y) \text{ per qualche } y \in K, F(w) = y \end{cases}$$

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) = \lambda x + \mu y \in K$$

poiché K è un sottospazio vettoriale

$\implies F(\lambda v + \mu w) \in K$

$\implies \lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$\implies F^{-1}(K)$ sottospazio vettoriale di W

$$\dim F(H) \leq \dim H,$$
$$\text{se } K \subseteq F(V) \implies \dim F^{-1}(K) \geq \dim K$$

Esercizio

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$$

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1 + y_2 = 0\} \ \dim K = 3$$

Si determini $F^{-1}(K)$

Soluzione Voglio trovare le $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $F(x_1, x_2, x_3) \in K$

$$F(x_1, x_2, x_3) \in K \iff (x_1 + x_2) + 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ è l'equazione di $F^{-1}(K)$ ($\dim F^{-1}(K) = 2$)

Trovo una base di $F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = -3t - 2s \end{cases}$$

$$\mathscr{B} = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\} \quad \text{è una base di } F^{-1}(K)$$

Altro approccio risolutivo:

Fisso una base di K, per esempio

$$\{w_1 = (1, -1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$F^{-1}(K) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | F(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -\lambda_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda_2 \\ x_2 - x_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Si risolve il sistema in x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 2 & 1 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{si riduce per righe}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -1 & 1 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 + 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 + 3\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Affinché il sistema sia risolubile si deve avere

$$\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0; \qquad \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ -x_2 + x_3 = -3\lambda_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2\lambda_1 - \mu \\ x_2 = \mu + 3\lambda_1 \\ x_2)\mu \end{cases}$$

Da qui si deduce una base di $F^{-1}(K)$

3 Nucleo di una funzione lineare

V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $F : V \to W$ lineare

$\implies$ $\{\underline{0}_W\}$ è sottospazio vettoriale di W

$\implies$ $F^{-1}(\underline{0}_W)$ sottospazio vettoriale di V

Definizione $F^{-1}(\underline{0}_W)$ si dice nucleo di F (kernel di F) e si indica con $\ker(F)$

$$\ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\}$$

Teorema I F è iniettiva $\iff$ $\ker F = \underline{0}_V$

dim. **(I)**

" $\implies$ " Supponiamo F iniettiva e sia $v \in \ker F$

$\implies$ $F(v) = \underline{0}_W$, ma poiché F è lineare risulta $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

$\implies$ $F(v) = F(\underline{0}_V)$ e poiché F è iniettiva risulta $v = \underline{0}_W$

$\implies$ $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

"$\Longleftarrow$" Per ipotesi $\ker F = \{\underline{0}_V\}$, siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = F(v_2)$

$\implies$ $F(v_1) - F(v_2) = \underline{0}_W$, poiché F è lineare si ottiene $F(v_1 - v_2) = \underline{0}_W$

$\implies$ $v_1 - v_2 \in \ker F$

$\implies$ $v_1 - v_2 = \underline{0}_V$

$\implies$ $v_1 = v_2$, quindi F è iniettiva.

Supponiamo V, W di dimensione finita, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, siano $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di V e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di W, e si consideri

$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}(F)}$

$$\begin{aligned}\ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\} = \\ = \{v \in V | (F(v))_{\mathscr{C}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ = \{v \in V | M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)(v)_{\mathscr{B}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ = \{v \in V | (v)_{\mathscr{B}} \text{ appartiene al null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\}\end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned}\dim \ker F = \\ = \dim(\text{null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)) = \\ = \dim V - \operatorname{rank} M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \\ = \dim V - \operatorname{rank} F\end{aligned}$$

$$\dim V = \dim \ker F + \operatorname{rank} F$$

Questo sopra enunciato è il teorema di nullità più rango in termini di una funzione lineare.

Esercizio Sia $F : V \to W$ lineare. Fisso $w_0 \in W$, e definisco

$$F^{-1}(w_0) = \{v \in V | F(v) = w_0\}$$

Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché $F^{-1}(w_0)$ sia sottospazio.

Soluzione

Esercizio Sia $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $V, 3-\dim$, $\mathscr{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $W, 4-\dim$

Sia $g : V \to W$ la funzione lineare determinata dalle relazioni

$$\begin{cases} g(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3 \\ g(v_2) = w_1 + w_2 + w_4 \\ g(v_3) = w_2 + w_3 - w_4 \end{cases}$$

Si calcolino $g(V)$ e $\ker g$

Soluzione Possiamo calcolare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare $\ker g$ devo calcolare il null-space di $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Quindi

$$\ker g = \{-\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 | \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2 - v_3)$$

$g(V)$ ha dimensione 2. Per esercizio si trovi una base di $g(V)$

Notazione Spesso l'immagine di una funzione lineare F si indica con $\mathrm{Im}(F)$

Teorema II Sia $F : V \to W$ una funzione lineare tra spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

F è iniettiva $\iff$ F porta insiemi liberi di vettori di V in insiemi liberi di vettori di W

dim. **(II)**

" $\Longrightarrow$ " Supponiamo F iniettiva e sia $\{v_1, \cdots, v_l\} \subseteq V$ un insieme libero, e dimostriamo che $\{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è un insieme libero in W

Considero $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ tali che

$$\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \cdots + \lambda_l F(v_l) = \underline{0}_W$$

Poiché F è lineare risulta

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l) = \underline{0}_W$$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l \in \ker F$, ma poiché F iniettiva $\ker F = \{\underline{0}_W\}$

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = \underline{0}_V$, ma $\{v_1, \cdots, v_l\}$ è libero

$\Longrightarrow$ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$

$\Longrightarrow$ $\{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è libero

"$\Longleftarrow$" Per ipotesi F porta insiemi liberi in insiemi liberi. Si fissa $v \in V$, $v \neq \underline{0}_V$, quindi $\{v\}$ è libero

$\Longrightarrow$ $\{F(v)\}$ è libero

$\Longrightarrow$ $F(v) \neq \underline{0}_W$

$\Longrightarrow$ $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

$\Longrightarrow$ F è iniettiva

Definizione Una funzione lineare sia iniettiva che suriettiva si dice un isomorfismo

$F : V \to W$ è un isomorfismo $\iff$ $\mathrm{Im}(F) = W$ e $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

Teorema III

1. Sia $F : V \to W$ lineare con V, W finitamente generati e tali che $\dim V = \dim W$.

   F è iniettiva $\iff$ F è suriettiva

2. $F : V \to V$ lineare con V finitamente generato è un isomorfismo $\iff$ iniettiva $\iff$ suriettiva

Definizione Un isomorfismo $F : V \to V$ si dice un automorfismo di V

dim. **(III)**

1. $\dim V = \dim W$, $\dim V = \dim \ker(F) + \dim \operatorname{Im}(F)$

   $\implies \dim W = \dim \ker(F) + \dim \operatorname{Im}(F)$

   - Se F è suriettiva

     $\implies \dim W = \dim \operatorname{Im}(F)$

     $\implies \dim \ker(F) = 0$

     $\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$

     $\implies$ F è iniettiva

   - Se F è iniettiva

     $\implies \dim \ker F = 0$

     $\implies \dim W = \dim \operatorname{Im} F$

     $\implies W = \operatorname{Im} F$

     $\implies$ F è suriettiva

2. Segue dal punto 1.

Esempio (3.1) V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, $\mathscr{B}$ base di V

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{L_{\mathscr{B}}} \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

è un isomorfismo