1 Successioni e topologia in $\mathbb{R}^n$

1.1 Continuità e compattezza in $\mathbb{R}^n$

Teorema I Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K compatto sequenzialmente. Consideriamo $f : K \to \mathbb{R}^m$ continua su tutto K

$\implies f(K)$ è un insieme sequenzialmente compatto in $\mathbb{R}^m$

L'immagine continua di un compatto è compatta.

dim. **(I)** Consideriamo $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ successione a valori in $f(K)$. 23 nov 2021

$$y_k \in f(K) \iff \exists\, x_k \in K \text{ t. c. } y_k = f(x_k)$$

Consideriamo ora la successione $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ così ottenuta, a valori in K: K è compatto in $\mathbb{R}^n$

$\implies \exists\, l \in K$, $\exists \{x_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ sottosuccessione di $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ tale che

$$x_{h_k} \xrightarrow{k\to+\infty} l \in K$$

Consideriamo $y_{h_k} = f(x_{h_k})$: $\{y_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ è sottosuccessione di $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$\lim_{k\to+\infty} y_{h_k} = \lim_{k\to+\infty} f(x_{h_k}) =$$

$$\overset{1}{=} f(\lim_{k\to+\infty} x_{h_k}) = f(l) \in f(K)$$

Allora considerata $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ successione a valori in $f(K)$

$$\exists\, y_{h_k} \xrightarrow{k\to+\infty} f(l) \in f(K)$$

$\implies f(K)$ è compatto.

Definizione Dato $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

diciamo che

[1] per la continuità di f su K

- x_M è punto di massimo assoluto di f su D se
$$\forall\, x \in D \quad f(x) \leq f(x_M).$$
Si indica inoltre $M = f(x_M)$ come valore massimo di f su D.
- x_m è punto di minimo assoluto di f su D se
$$\forall\, x \in D \quad f(x) \geq f(x_M).$$
Si indica inoltre $m = f(x_m)$ come valore minimo di f su D

Teorema II (di Weierstrass) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K compatto sequenzialmente. Data $f : K \to \mathbb{R}$ continua su K

$\implies \exists\, x_M$ punto di massimo assoluto di f su K, e $\exists\, x_m$ punto di minimo assoluto di f su K.

dim. **(II)** K compatto in $\mathbb{R}^n$, $H = f(K)$ compatto in $\mathbb{R}$. Dunque $H \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato in $\mathbb{R}$: H ammette
$$\begin{aligned} s &= \sup H \in \mathbb{R} \\ i &= \inf H \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Concentriamoci su s; abbiamo verificato che se $s = \sup H$ allora ci sono due possibilità

- s isolato $\implies$ $s \in H$
- s di accumulazione per H,
$\overset{2}{\implies} s \in H$

Concludiamo allora che $s \in H$, ma allora per definizione
$$s = M = \max H \quad \wedge \quad \exists\, x_M \text{ t. c. } f(x_M) = M.$$

Dunque esiste x_M punto di massimo. Lo stesso si ripete con $i = \inf H$.

$i = \min H = m$, $m \in H$

$\implies \exists\, x_m$ t. c. $f(x_m) = m$

$\implies x_m$ è un punto di minimo $\square$

[2] perché H è chiuso

Osservazione (1.1) Dato $D \subseteq \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

f continua su D, allora dato $[a, b] \subseteq D$

$$\begin{aligned} &\exists\, x_m \in [a, b] \text{ punto di minimo di } f \text{ su } [a, b] \\ &\exists\, x_M \in [a, b] \text{ punto di massimo di } f \text{ su } [a, b] \end{aligned}$$

Teorema III (dei valori intermedi sui compatti) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

$\implies$ f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.

Dati

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x) \qquad m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$$

vale che

$$\forall\, \lambda \in [m, M] \quad \exists\, c \in [a, b] \text{ t. c. } f(c) = \lambda$$

dim. **(III)** f continua su $[a, b]$

$\implies$ f ammette valor massimo M e valor minimo m. Poniamo

$$x_M \mid f(x_M) = M \qquad x_m \mid f(x_m) = m$$

Sia $\lambda \in [m, M]$, e consideriamo $g(x) = f(x) - \lambda$. g è continua su $[a, b]$, e in particolar modo g continua su $[x_m, x_M]$ o su $[x_M, x_m]$

$$\exists\, c \in \begin{matrix} [x_m, x_M] \\ [x_M, x_m] \end{matrix} \quad \text{t. c. } g(c) = 0 \implies f(x) = \lambda$$

1.2 Legame tra uniforme continuità e compattezza

Teorema IV (di Heine-Cantor) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, sia $f : K \to \mathbb{R}^m$ e f continua su K

$\implies$ f è uniformemente continua su K.

Le funzioni continue sui compatti sono ivi uniformemente continue.

dim. **(IV)** Per assurdo assumiamo che f sia continua su K e che f non sia assolutamente continua su K.

$$\exists\,\overline{\varepsilon} > 0 \text{ t. c. } \forall\,\delta > 0\,\exists\,x_\delta, z_\delta \in K \qquad |x_\delta - z_\delta| < \delta \,\wedge\, |f(x_\delta) - f(z_\delta)| \geq \overline{\varepsilon}.$$

Diamo a δ i valori $1, 1/2, \cdots, 1/k$ allora

$$\begin{aligned}&\exists\,\overline{\varepsilon} > 0\,\forall\,k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\,\exists\,x_k, z_k \in K\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{t. c. } |x_\delta - z_\delta| < 1/k \,\wedge\, |f(x_\delta) - f(z_\delta)| \geq \overline{\varepsilon}.^{\textbf{(A)}}\end{aligned}$$

Consideriamo le successioni a valori in K ottenute dagli x_k e z_k sopra considerati, a valori in K

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \qquad \{z_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

K compatto in $\mathbb{R}^n$, allora esiste una sottosuccesssione di $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tale che $x_{h_k} \xrightarrow{k\to+\infty} x \in K$.

Consideriamo $\{z_{h_k}\}$ la sottosuccessione di $\{z_k\}$ ottenuta con gli stessi indici h_k.

Osserviamo che

$$|z_{h_k} - x| \leq \underbrace{|z_{h_k} - x_{h_k}|}_{\text{def. } \leq 1/k} + \underbrace{|x_{h_k} - x|}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$$

Allora $z_{h_k} \xrightarrow{k\to+\infty} x$

Stimiamo

$$|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| \leq |f(x_{h_k}) - f(x)| + |f(x) - f(z_{h_k})|.$$

Poiché f continua su K

$$\begin{aligned} f(x_{h_k}) &\xrightarrow{k\to+\infty} f(x)\\ f(z_{h_k}) &\xrightarrow{k\to+\infty} f(x)\end{aligned}$$

allora

$$|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

$\Longrightarrow$

$$\forall\,\varepsilon > 0 \exists\,\overline{k}\,|\,\forall\,k > \overline{k} \quad |f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| < \varepsilon$$

Questo nega la condizione (A), dunque f non può essere non uniformemente continua

Concludiamo che, dato K compatto

$$f \text{ continua su } K \quad \wedge \quad f \text{ non uniformemente continua su } K$$

$\implies$ f uniformemente continua su K: contraddizione

Dunuqe f continua su K

$\implies$ f uniformemente continua su K. $\square$

Proprietà K compatto di $\mathbb{R}^n$, $f : K \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva (e quindi invertibile)

$\implies$ $f^{-1} : f(K) \to K$ è continua su $f(K)$.

Definizione Data $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^m$ indichiamo con

$$f^{-1}(E) = \{x \in D;\ f(x) \in E\}$$

chiamato *controimmagine* di E

Teorema V (caratt. delle funzioni continue) Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

f è continua su $\mathbb{R}^n$

$\iff$ $\forall\, E \subseteq \mathbb{R}^m$, E aperto, si ha che $f^{-1}(E)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$.

2 Derivata

Esempio (2.1) Data

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Si ha che $x_0, x_1 \in I$, $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P_1 = (x_1, f(x_1))$.

Indichiamo con s la secante al grafico tra P_0 e P_1, di equazione

$$y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m,\ \text{pendenza}[3]}(x - x_0)$$

Cosa accade quando $x_1 \to x_0$? Si ha che $P_1 \to P_0$ e che $s \to r$, che intuitivamente è la retta tangenta al grafico in P_0.

[3] o coefficiente angolare

Esempio (2.2) Consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq x_0 \\ 2 & x > x_0 \end{cases}$$

In questo caso quando $x \to x_0$, $P_1 \to P_2 \neq P_1$, e $s \to r$ retta verticale.

Intuitivamente r non è la tangente in P_0.

Esempio (2.3) Sia $h(x)$ una funzione, dal grafico:

Quando $x_1 \to x_0$, $P_1 \to P_2$, ma $s \to r$ che non è "tangente".

Si ha l'obiettivo di dare una definizione che

- distingua il primo esempio dagli altri
- dare una definizione rigorosa di tangente in P_0

Definizione Data $f : I \to \mathbb{R}$, fissiamo $x_0 \in I$, diciamo rapporto incrementale di f centrato in x_0, la quantità

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si osservi che è il coefficiente angolare della secante tra $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x, f(x))$

Definizione Diciamo che f è *derivabile* in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$$

Indichiamo

$$L = f'(x_0)$$

detta *derivata* di f in x_0.

Diciamo *tangente* si f in x_0 la retta r di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

da cui $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare (pendenza) della tangente al grafico in x_0.