

# Analisi Matematica 1 A

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino



# 1 Limite successione

Data  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, a : n \rightarrow a_n, l \in \mathbb{R}^*$ , diciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

se  $\forall V(l) \exists U(+\infty) n \in (\mathbb{N} \text{ intersezione } D) \implies a_{n \in V(l)}$  Scriviamo  $\forall V(l) \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} \forall n > n_{\text{segnato}} a_n \in V(l)$

$l \in \mathbb{R}$ , diciamo che  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  è **convergente** a  $l$  se  $\forall \varepsilon \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} \forall n > n_{\text{segnato}} |a_n - l| < \varepsilon$

Se  $l = \pm\infty$   $a_n$  è divergente a  $\pm\infty$ , se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \#$  allora  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  è irregolare (o oscillante).

## Esempio (1.1)

- $\{a_n\}_{n=0}^\infty = (-1)^n$  con  $n \in \mathbb{N}$  è irregolare e limitata
- $\{b_n\}_{n=0}^\infty = (-1)^n \cdot n$  con  $n = 0, -1, 2, -3, 4, \dots$  è irregolare e non limitata

Si dice di una successione  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$

- $\forall \{a_n\}$  è crescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$  è strettamente crescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$  è decrescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$  è strettamente decrescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n+1}$

Una successione crescente o decrescente si dice monotona, se strettamente crescente o decrescente si dice strettamente monotona.

Un predicato  $P(n)$  è verificato definitivamente se  $\exists n_{\text{segnato}} \forall n \leq n_{\text{segnato}} P(n)$  è vero

Valgono per  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  i seguenti teoremi

- Teorema di unicità del Limite
- Teorema di permanenza del segno

- Teorema di limitatezza:

### Teorema I

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ è convergente e limitata}$$

- Teorema del confronto
- Teorema di esistenza del Limite per successioni definitivamente monotone

**Teorema II**  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  è definitivamente crescente

$\implies$  ammette limite in  $\mathbb{R}^*$

Precisamente se

–  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  è definitivamente monotona e limitata

$\implies$  è convergente

–  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  è definitivamente monotona e non limitata

$\implies$  è divergente

**Teorema III Principio di Archimede**  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a, b > 0$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $na > b$

**dim. (III)** Utilizziamo la funzione parte intera:

$x \in \mathbb{R}$  si dice  $[x] = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{n \leq x\}$

Si verifica che  $\forall x \in \mathbb{R}, [x] < x \leq [x] + 1$

Se  $x \geq 0, [x] \geq 0, [x] \in \mathbb{R}$

Considerato  $x = \frac{b}{a}$

$$\left[ \frac{b}{a} \right] \leq \frac{b}{a} < \left[ \frac{b}{a} \right] + 1$$

Posto  $n_{segnato} = \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}$

$$\frac{b}{a} < n_{segnato} \implies n_{segnato}a > b$$

Osserviamo che posto  $a = 1$  si ha che  $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$  t.c.  $n > b$

## 1.1 Applicazione del Principio di Archimede

Verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , vogliamo verificare che definitivamente  $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$  allora per il principio di archimede

$$\exists n_{segnato} \in \mathbb{N}, n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora  $\forall n \geq n_{segnato}, n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon \text{ dunque } \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ definitivamente}$$

Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

## Teorema IV Disugualianza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

si ha che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**dim. (IV)** Dimostrazione per induzione

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx, x > -1$$

1.  $P(0)$

$$1+x > 0 (1+x)^0 = 1 = 1+n0$$

$P(0)$  è vera

2. Assumiamo vera  $P(n)$

## 1.2 Limiti

Progressione geometrica

$$q \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = ?, n \in \mathbb{N}$$

- $q > 1, q = 1+p$  con  $p > 0$   $q^n = (1+p)^n \geq 1+np$  per la disuguaglianza di Bernoulli

$$1+np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- $q = 1$   $q^n = 1 \forall n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$$

- $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$

$$\implies |q| = \frac{1}{1+p} \text{ con } p > 0$$

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np}$$

$$1+np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\implies \frac{1}{1+np} \rightarrow 0$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- $q = -1$

$q^n$  è irregolare e limitata

- $q < -1$

$$q^n = (-1)^n |q|^n$$

ma  $|q| > 1$  quindi  $|q|^n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , e quindi  $q^n$  è irregolare non limitata

Riassumendo

$$q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q > 1 \\ \text{convergente a } 1 & q = 1 \\ \text{convergente a } 0 & |q| < 1 \\ \text{irregolare limitata} & q = -1 \\ \text{irregolare non limitata} & q < -1 \end{cases}$$

**Esercizio** Posto  $q \in \mathbb{R}$  e

$$b_n = \sum_{k=0}^n q^k$$

calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

**Soluzione** Da risolvere

**Teorema V** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ :  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x_0 \in D'$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $l \in \mathbb{R}^*$

Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  (A)

$\Longleftrightarrow$

per ogni successione  $a : \{a_n\}_{n=0}^\infty$  a valori in  $D \setminus \{x_0\}$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \text{ (B)}$$

*dim.* (V)

(A)  $\implies$  (B) Sappiamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  ovvero

$$\forall V(l) \exists U(x_0) | x \in U \wedge x \in V \text{ and } x \neq x_0 \implies f(x) \in V(l) \quad (1)$$

Consideriamo  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  con  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$  con  $a_n \in D$  e  $a_n \neq x_0$  ossia

$$\exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{\text{segnato}} a_n \in D \wedge a_n \neq x_0 \wedge a_n \in U(x_0)$$

allora  $f(a_n) \in V(l) \quad (2)$

Concludendo unendo (1) e (2)

$$\forall V(l) \exists n_{\text{segnato}} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{\text{segnato}} f(a_n) \in V(l)$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$$

(B)  $\implies$  (A) Procediamo per assurdo: verificando  $\neg A \implies \neg B$

$\neg B$ : esiste una successione  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  tale che  $a_n \in D \setminus \{x_0\}$  per cui  $a_n \not\rightarrow x_0$

Consideriamo  $\delta = 1 \exists x_1 0 < |x_1 - x_0| < 1 \wedge f(x_1) \notin V(l)$

Consideriamo  $\delta = \frac{1}{2} \exists x_2 0 < |x_2 - x_0| < 1 \wedge f(x_2) \notin V(l)$

Consideriamo  $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n 0 < |x_n - x_0| < 1 \wedge f(x_n) \notin V(l)$

Allora abbiamo costruito una successione  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  tale che  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq x_0$  e  $f(x_n) \notin V(l)$

inoltre  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\text{segnato}} | \forall n > n_{\text{segnato}} 0 < |x_n - x_0| < \varepsilon$   
( $n_{\text{segnato}} > \frac{1}{\varepsilon}$ )

ossia  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$

Abbiamo costruito una successione  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  con  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$

ossia abbiamo ottenuto che  $\neg B$  è vera



### 1.3 Confronti tra infiniti

1. Dati  $a > 1$  e  $n \in \mathbb{N}$  osserviamo che

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\sqrt{n}}{a^n} &= \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{n}}{1+hn} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} = \\ &= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

e  $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  allora per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$$

ovvero

$$\sqrt{n} = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

2. Dato  $a > 1$

$$0 \leq \frac{n}{a^n} = \left( \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \right)^2$$

ma  $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

3. Dato  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \left( \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k$$

ma  $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Dato che  $a > 1$  e  $\sqrt[k]{a} > 1$  concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n^k = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

4.