

ANALISI MATEMATICA UNO

Esercizi da consegnare per la correzione – Foglio 2

Cognome e nome

Es. II. Siano M la funzione mantissa, $h(x) = |2x - 1|$ ed $f = h \circ M$.

1. Provare che la funzione f è pari ed è periodica di periodo 1. Tracciarne il grafico.
2. Sia F la restrizione di f all'intervallo $[0, 1/2]$. Provare che F è invertibile e determinare dominio e immagine di F^{-1} .
3. Dimostrare che la funzione $\varphi = F^{-1} \circ f$ è definita su \mathbb{R} , è pari ed è periodica di periodo 1. Scriverne l'espressione e tracciarne il grafico.

Svolgimento.

$$1. \quad M(n) := n - \lfloor n \rfloor$$

$$h(n) := |2n - 1|$$

$$f = h \circ M = h(M)$$

$$f = |2M(n) - 1|$$

$$\text{Dato: } M(n) = M(n+k) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{periodicità } M(n) = 1$$

$$M(n) = M(n+k) \Rightarrow 2M(n) = 2M(n+k) \Rightarrow 2M(n) - 1 = 2M(n+k) - 1$$

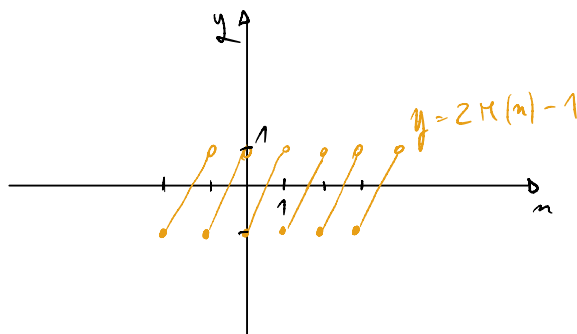
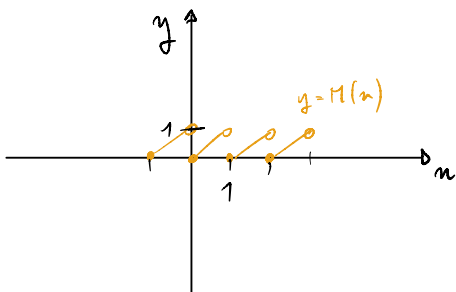
$$\Rightarrow |2M(n) - 1| = |2M(n+k) - 1| \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

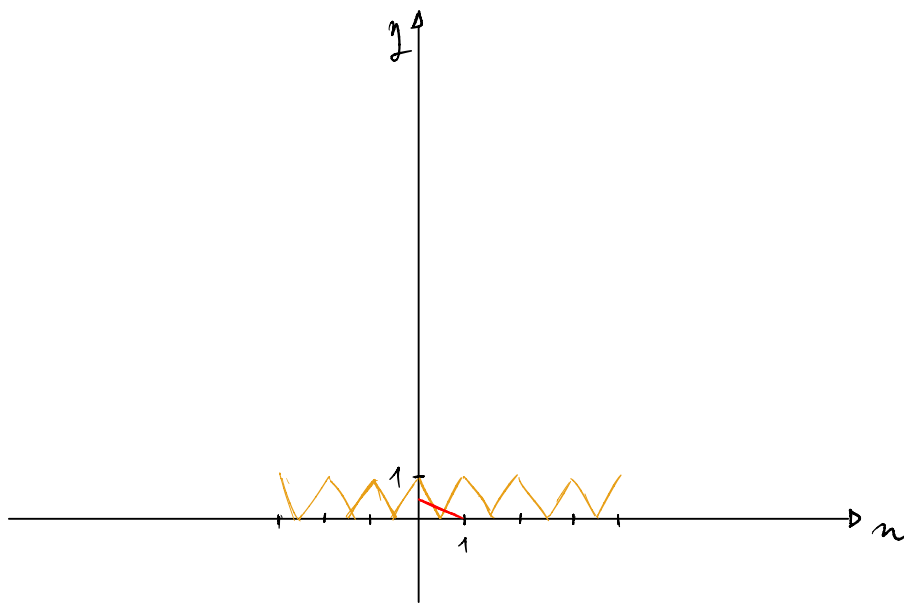
$$\Rightarrow f \text{ ha periodicità } 1.$$

$$\text{Dato } M(n) = M(-n) \Rightarrow M \text{ è pari}$$

$$M(n) = M(-n) \Rightarrow 2M(n) = 2M(-n) \Rightarrow 2M(n) - 1 = 2M(-n) - 1 \Rightarrow |2M(n) - 1| = |2M(-n) - 1|$$

$$\Rightarrow f \text{ è pari.}$$





$$2. \quad \left. \begin{array}{l} F: [0; 1/2] \rightarrow [0; 1] \\ n \mapsto |2M(n) - 1| \end{array} \right\} \text{equivalenza} \quad \left. \begin{array}{l} F: [0; 1/2] \rightarrow [0; 1] \\ n \mapsto -2n + 1 \end{array} \right\}$$

F strettamente decrescente in $[0; 1/2]$, e ogni elemento di $[0; 1]$ è immagine di un qualche elemento di $[0; 1/2]$ $\Rightarrow F$ è suriettiva e iniettiva $\Rightarrow F$ è biiettiva e quindi invertibile

$$F^{-1}: [0; 1] \rightarrow [0; 1/2] \\ n \mapsto -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$3. \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1] \\ F^{-1}: [0; 1] \rightarrow [0; 1/2] \quad \Rightarrow F^{-1} \circ f: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1/2]$$

$$\varphi = F^{-1}(f(n)) = -\frac{1}{2}|2M(n) - 1| + \frac{1}{2}$$

$M(n)$ periodicità 1 $\Rightarrow \varphi$ ha periodicità 1

$M(n)$ pari $\Rightarrow \varphi$ è pari