1 Successioni

1.1 Sottosuccessioni

Teorema I (legame limite successione e sottosuccessione) Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $l \in \mathbb{R}*$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

$\iff$ ogni sottosuccessione di a_n ammette una sottosuccessione che tende a l

dim. (I)

"$\implies$" La prima implicazione è vera, pertanto

$$\forall V(l)\, \exists \overline{n} \forall n \geq \overline{n} :\, a_n \in V(l)$$

Sia $n \to k_n$ crescente, e $b_n = a_{k_n}$, allora

$$\exists \overline{\overline{n}} \forall n \geq \overline{\overline{n}} :\, k_n \geq \overline{n}$$

allora $b_n = a_{k_n} \in V(l)$.

Dunque

$$\forall V(l)\, \exists \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} \text{ t. c. } \forall n > \overline{\overline{n}} :\, b_n \in V(l)$$

$\implies \lim_{n\to+\infty} b_n = l$

Abbiamo anche dimostrato che $a_n \xrightarrow{n\to\infty} l$ implica che qualsiasi sua sottosuccessione $b_{k_n} \to l$

"$\impliedby$" Assumiamo vera la seconda implicazione, e procedendo per assurdo assumiamo vera la negazione della prima implicazione, ossia

$$\forall V(l) \forall n \in \mathbb{N} \exists n' \geq n | a_{n'} \notin V(l)$$

Consideriamo $n = 1$; $\exists n'_1 > 1$ tale che $a_{n'_1} \notin V(l)$; $k_1 = n'_1$

Consideriamo $n = k_1 + 1$; $\exists n'_2 \geq k_1 + 1 > k_1$ tale che $a_{n'_2} \notin V(l)$; $k_2 = n'_2$

Consideriamo $n = k_2 + 1$; $\exists n'_3 \geq k_2 + 1 > k_1$ tale che $a_{n'_3} \notin V(l)$; $k_3 = n'_3$

...

Otteniamo una successione di indici

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto k_n \end{aligned}$$

strettamente crescente, e una successione $b_n = a_{k_n}$ tale che

$$\exists\, V(l) | \forall\, n, b_n \notin V(l)$$

Allora b_n non può ammettere sottosuccessioni che tendono a l

$\implies$ abbiamo dimostrato la negazione della seconda implicazione, partendo dalla negazione della prima, ovvero la prima implicazione implica la seconda $\square$

1.2 Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$

$$\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \quad a_k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, \cdots, a_n^k) \in \mathbb{R}^n$$

Esempio (1.1) Fissato $x \in \mathbb{R}^n$,

$$a_k = kx = (kx_1, kx_2, kx_3, \cdots, kx_n)$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è convergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq \overline{k} : \quad \underbrace{|a_k - l|}_{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^k - l)^2\right)^{1/2}} \quad < \varepsilon$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è divergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall\, M > 0\, \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq \overline{k} : \, |a_k| > M$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ si dice irregolare (oscillante) se non è né convergente né divergente

Osservazione (1.1) Per $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ vale il teorema di legame tra limiti di successione e sottosuccessioni

Valgono tutti i teoremi sui limiti che non coinvolgono l'ordinamento del codominio. (In particolare, non si definiscono le successioni monotone, e quindi non vale il teorema sui limiti delle successioni monotone)

Proposizione *p.i* Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $y \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

Se y è di accumulazione per E

$\implies \exists\, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E, con $x_k \neq y\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ e tale che

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = y$$

dim. **(p.i)**

caso 1. $y \in \mathbb{R}^n$: $y \in E'$, si ha

$$\forall\, r > 0 \exists x \in E, x \neq y, x \in B_r(y)$$

Consideriamo $k = 1, 2, 3, \dots$; possiamo determinare $x_k \in E$, con $x_k \neq y$ e $x_k \in B_{1/k}(y)$

Abbiamo ottenuto una successione $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \overline{k} \,|\, \forall\, k \geq \overline{k} : x_k \in B_{1/k}(y) \subset B_{1/\overline{k}}(y) \subset B_\varepsilon(y)$

Allora $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} y$, $x_k \neq y$

caso 2. $y = \infty$, $y \in E'$

$$\forall\, M > 0 \exists x \in E : |x| > M$$

Per $k = 1, 2, 3, \dots$ consideriamo $x_k \in E$, con $|x_k| \geq k$ allora

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq \overline{k} : |x_k| \geq k \geq \overline{k} > M$$

$\implies x_k \to \infty$ □

Teorema II (di Bolzano-Weierstrass per le successioni) Data $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ (valori vettoriali), si ha che

se $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata

$\implies \exists \{a_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ sottosuccessione tale che a_{h_k} è *convergente* a $l \in \mathbb{R}$

Ogni successione limitata ammette sempre una sottosuccessione convergente

dim. **(II)** Indichiamo con $E = \{a_k\}$ = insieme dei valori della successione. E è limitato per ipotesi;

caso 1. assumiamo che E abbia un numero infinito di elementi.

$\implies$ per il teorema di Bolzano-Weiesrtrass sui sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}^n \implies E$ ammette almeno un punto di accumulazione $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$\implies \exists \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E, tale che $b_k \xrightarrow{k \to +\infty} \lambda$

Ma $E \equiv$ i valori di $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$

dunque b_k è sottosuccessione di a_k.

Allora esiste una sottosuccessione di a_k convergente.

caso 2. assumiamo che E abbia un numero finito di elementi.

$\Longrightarrow$ esisterà sicuramente un valore di E assunto infinite volte dalla successione $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Sia $a_k = l$ per infiniti indici.

Consideriamo $b_k = l$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, b_k è successioni a valori in E, ed essendo costante: $b_k \xrightarrow{k\to+\infty} l$, dunque b_n è convergente $\square$

Osservazione (1.2) Il teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni utilizza il teorema di Bolzano-Weierstrass per gli insiemi in $\mathbb{R}^n$. Dunque è necessaria la completezza di $\mathbb{R}$

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ed è limitata $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ed è limitata $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ ed è limitata $\Longrightarrow$ $\{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ed è limitata $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente

1.2.1 Successioni e chiusura di $E \in \mathbb{R}^n$

Si ricorda che la chiusura è

$$\overline{E} = E \cup \delta E$$

Proprietà Data $E \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$

$y \in \overline{E} \iff \exists\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$

Dimostrazione. Procediamo spezzando le due implicazioni

" $\Longrightarrow$ " Ricordiamo che $\overline{E} = E \cup E'$

$y \in \overline{E} = E \cup E'$

- se $y \in E$, allora consideriamo $x_k \equiv y \in E$ si ha $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$
- se $y \in E'$ e $y \notin E$, per la proposizione (p.i), $\exists\, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$

" $\Longleftarrow$ " Assumiamo per assurdo che esista $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$ e $y \notin \overline{E}$, con $x_k \in E$.

$\overline{E}$ è un insieme chiuso, allora $(\overline{E})^C$ è aperto, ovvero $\exists\, r > 0$ tale che $B_r(y) \subset (\overline{E})^C$

Allora $B_r(y) \cap \overline{E} = \emptyset$, allora poiché $E \subset \overline{E}$

$$\exists\, r > 0 : \; B_r(y) \cap E = \emptyset$$

allora qualsiasi successione a valori in E non può convergere a y, dunque neghiamo $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$, si ha contraddizione, dunque

$$y \in \overline{E} \qquad \square$$

Teorema III Dato $E \in \mathbb{R}^n$

E è chiuso **(A)**

$\iff$ se esiste $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$ allora $y \in E$ **(B)**

Equivalentemente:

E è chiuso **(A)**

$\iff$ tutte le sue successioni convergenti hanno limite in E stesso **(B)**

dim. **(III)**

"$\implies$" E è chiuso. Ricordiamo che E è chiuso $\iff$ $E = \overline{E}$

Allora per proprietà precedente

$$\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset E \wedge x_k \to y \implies y \in \overline{E} = E$$

"$\impliedby$" Ricordiamo che E chiuso $\iff$ $E' \subset E$. Dimostriamo che $E' \subset E$.

Consideriamo $y \in E'$, $\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset E$, con $x_k \neq y$, $x_k \to y$, allora per (B), $y \in E$

Dunque $E' \subset E$, ed E chiuso $\square$

Definizione Sia $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$. Questa successione è detta *successione di Cauchy* (o successione fondamentale) se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \overline{k} \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, k, m \geq \overline{k}\, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

O, equivalentemente

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k > \overline{k}\, \forall\, p \in \mathbb{N}\, |a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$$

(Definitivamente $|a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$)

Intuitivamente, da un certo punto in poi i valori della successione di Cauchy sono vicini a piacere

Studieremo il legame tra l'essere di Cauchy l'essere convergente.