1 Orientazione di uno spazio vettoriale

In generale V non ha un'orientazione canonica, ma nei casi in cui V abbia una base canonica $\mathscr{B}_0$

$\implies$ V ha l'orientazione canonica $[\mathscr{B}_0]$; ad esempio in $\mathbb{R}^n$ si considera la base canonica $\mathscr{B}_0 = \{e_1, \cdots, e_n\}$, e ci si riferisce a $[B_0]$ come all'orientazione di $\mathbb{R}^n$

2 Complementi ortogonali

Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo, e sia $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale. Si definisce

$$W^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0 \,\forall\, w \in W\}$$

Questi sono i vettori di V ortogonali a tutti i vettori di W, $W^\perp \subseteq V$

Esempi (2.1)

1. $W = \{\underline{0}\}$

   $\implies W^\perp = V$

2. $W = V$

   $\implies W^\perp = \{\underline{0}\}$

3. $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $\dim W = k$. Fisso $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_k\}$ base di W.

   Si osserva che

   $$W^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w_r \,\forall\, r = 1, \cdots, k\}.$$

   Lo dimostro con la doppia inclusione. L'inclusione $\supseteq$ è ovvia, dimostro $\subseteq$.

   Sia $v \in V$ tale che $v \cdot w_r = 0 \,\forall\, r = 1, \cdots, k$. Sia $w \in W$ generico. Posso scrivere $w = a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k$ per qualche $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned} v \cdot w = v(a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k) = \\ = a_1 v \cdot w_1 + a_2 v \cdot w_2 + \cdots + a_k v \cdot w_k = 0 \end{aligned}$$

   $\implies v \cdot w = 0 \,\forall\, w \in W$

   $\implies v \in W^\perp$

Esercizio Sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare canonico

Soluzione $\dim W = 1$. Una base di W è data da $\mathscr{B} = \{(1, -1, -, 1)\}$.

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y, z) \cdot (1, -1, -, 1) = 0\}$$

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, -, 1) = x - y - z$$

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - z = 0\} \quad \text{piano in } \mathbb{R}^3$$

Teorema I Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora

1. $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V
2. $W \oplus W^\perp = V$
3. $(W^\perp)^\perp = W$

dim. **(I)**

1. Siano v_1, $v_2 \in W^\perp$, e λ, $\mu \in \mathbb{R}$, dimostriamo che $\lambda v_1 + \mu v_2 \in W^\perp$

$$\begin{aligned} v_1 \in W^\perp &\implies v_1 \cdot w = 0 \,\forall\, w \in W \\ v_2 \in W^\perp &\implies v_2 \cdot w = 0 \,\forall\, w \in W \end{aligned}$$

Sia $w \in W$

$$(\lambda v_1 \cdot \mu v_2) \cdot w = \lambda \overbrace{v_1 \cdot w}^{0} + \mu \overbrace{v_2 \cdot w}^{0} = 0$$

$\implies \lambda v_1 \cdot \mu v_2 \in W^\perp$

$\implies W^\perp$ sottospazio vettoriale.

2. Supponiamo $\dim W = k$, sia $\{v_1, \cdots, v_k\}$ una base di W. Possiamo completare $\{v_1, \cdots, v_k\}$ ad una base

   $$\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$$

   base di tutto V

   Utilizziamo l'algoritmo di Gram-Schmidt e troviamo una base ortonormale $\{e_1, \cdots, e_n\}$ di V tale che

   $$\mathscr{L}(e_1, \cdots, e_r) = \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_r) \quad \forall\, r = 1, \cdots, n.$$

   Quindi $\{e_1, \cdots, e_k\}$ è una base di W.

   Sia $v \in V$. Possiamo scrivere

   $$v = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r e_r$$

   $v \in W^\perp \iff v \cdot e_i = 0 \;\forall\, i = 1, \cdots, k$

   $\iff \underbrace{\sum_{r=1}^{n} (\lambda_r e_r) \cdot e_1}_{\lambda_i} = 0 \;\forall\, i = 1, \cdots, k$

   $\iff \lambda_i = 0 \;\forall\, i = 1, \cdots, k$

   $\iff v \in \mathscr{L}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$

   Cioè $W^\perp = \mathscr{L}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$

   $\implies V = \mathscr{L}(e_1, \cdots, e_k) + \mathscr{L}(e_{k+1}, \cdots, e_n) = W \oplus W^\perp$

   In particolare $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, infatti se $\overline{v} \in W \cap W^\perp$

   $\implies \overline{v} \cdot \overline{v} = 0$

   $\implies \overline{v} = \underline{0}$

3. $(W^\perp)^\perp$:

   $$v \in (W^\perp)^\perp \iff v \cdot z = 0 \,\forall\, z \in W^\perp \iff v \in W$$

Proposizione *p.i* Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, siano W_1 e $W_2 \in V$ sottospazi vettoriali

1. Se $W_1 \subseteq W_2 \implies W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$
2. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$
3. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

dim. **(*p*.i)** Dimostrazione per esercizio

Esercizio Prendiamo $\mathbb{R}^{2,2}$ con il prodotto scalare canonico, considero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e prendo $W = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = XA\}$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$. Trovare $W^\perp$

Soluzione Trovo una base di W. Sia

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

matrice generica in $\mathbb{R}^{2,2}$ e impongo $AX = XA$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \\ -x_3 & -x_4 \end{pmatrix}$$
$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 3x_1 - x_2 \\ x_3 & 3x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = x_1 \\ x_2 + 3x_4 = 3x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_3 \\ -x_4 = 3x_3 - x_4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = \frac{3}{2}(x_1 - x_4) \\ x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \dim W = 2$$

Una base di W è data da

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Impongo per $Y \in \mathbb{R}^{2,2}$, $Y \cdot A_1 = Y \cdot A_2 = \underline{0}$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y \cdot A_1 = \operatorname{tr}({}^tYA_1) &= \\ &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2y_1 & 3y_1 \\ 2y_2 & 3y_2 \end{pmatrix} = 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

$$Y \cdot A_2 = \operatorname{tr}({}^tYA_2) =$$
$$= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & -3y_1 + 2y_3 \\ 0 & -3y_2 + 2y_4 \end{pmatrix} = -3y_2 + 2y_4$$

Quindi

$$Y \in W^\perp \iff 2y_1 + 3y_2 = 0 \wedge -3y_2 + 2y_4 = 0$$
$$y_1 = -3/2y_2, \quad y_4 = 3/2y_2, \quad y_3 = y_3$$

Una base di $W^\perp$ è data da

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$W = \mathscr{L}(A_3, A_4)$

Esercizio $\mathbb{R}^{n,n}$ con il prodotto scalare canonico,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid {}^tA = A\} \qquad \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid {}^tA = -A\}$$

Dimostrare $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})^\perp = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$

Soluzione

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{\underline{0}\},$$

infatti una matrice è sia simmetrica che antisimmetrica $\iff$ è la matrice nulla.

$$\dim \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) + \dim \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) = n^2 = \dim \mathbb{R}^{n,n}$$

$\implies \mathbb{R}^{n,n} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$

Mi basta dimostrare che date $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ e $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ risulta $A \cdot S = 0$

$$A \cdot S = \operatorname{tr}({}^tA \cdot S) = -\operatorname{tr}(A \cdot S)$$

ma

$$A \cdot S = S \cdot A = \operatorname{tr}({}^tSA) = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}(AS).$$

Quindi $A \cdot S = -A \cdot S$

$\implies A \cdot S = 0$. Segue l'esercizio.

2.1 Proiezioni ortogonali

$(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo, $W \subseteq V$ sottospazio. $V = W \oplus W^{\perp}$. Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = v' + v''$ con $v' \in W$ e $v'' \in W^{\perp}$.

Si definisce

$$\begin{aligned} pr_w : V &\to W \\ v &\mapsto v' \end{aligned}$$

pr_w si dice la *proiezione ortogonale* su W. pr_w è lineare, suriettiva, e $pr_w =_W$, $\ker(pr_w) = W^{\perp}$

Sia $F \in End(V)$[1], $F : V \to V$ è lineare. F è un'isometria se $F(v) \cdot F(w) = v \cdot w$ $\forall\, v, w \in V$.

Teorema II Se F è una isometria,

$\implies$ F è un automorfismo di V (cioè F è un isomorfismo $V \to V$)

dim. **(II)** Basta verificare che F iniettiva, ovvero che $\ker F = \{\underline{0}\}$. Sia $v \in \ker F$, cioè v è tale che $F(v) = 0$

$\implies$ $F(v) \cdot F(v) = \underline{0} \cdot \underline{0} = \underline{0}$, ma poiché F isometria risulta che $F(v) \cdot F(v) = v \cdot v$

$\implies$ $v \cdot v = 0$

$\implies$ $v = \underline{0}$

Quindi $\ker F = \{\underline{0}\}$ e F è iniettiva. □

Esempio (2.2) e $-$ sono isometrie su V rispetto a tutti i prodotti scalari.

Esercizio Sia $F \in End(V)$ tale che $||F(v)|| = ||v||$ $\forall\, v \in V$. Si dimostri che F è un'isometria

Soluzione Da risolvere.

[1] è un endomorfismo