Lezione 9

Alessandro Ardizzoni

Costruzione dei numeri interi

Abbiamo indicato in genere con $\mathscr{R}$ le relazioni d'equivalenza.
Si possono però usare altri simboli.
Uno dei più usuali è $\sim$ che verrà usato nelle prossime costruzioni.
Vogliamo innanzitutto vedere come si possa costruire $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$ attraverso gli strumenti che abbiamo introdotto.
Consideriamo sull'insieme $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione $\sim$ definita ponendo

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b.$$

a posteriori
$a - b = a' - b'$

Lemma

La relazione appena definita è una relazione d'equivalenza su $\mathbb{N}^2$.

DIMOSTRAZIONE. La riflessiva e la simmetrica sono ovviamente soddisfatte. Per la transitività, supponendo $(a, b) \sim (a', b')$ e $(a', b') \sim (a'', b'')$ otteniamo $a + b' = a' + b$ e $a' + b'' = a'' + b'$. Ma allora $a + \cancel{b'} + b'' = a' + b + b'' = a' + b'' + b = a'' + \cancel{b'} + b$. Semplificando b' otteniamo $a + b'' = a'' + b$ vale a dire $(a, b) \sim (a'', b'')$.

Definizione

L'insieme dei numeri interi è l'insieme quoziente

$$\boxed{\mathbb{Z} := \mathbb{N}^2/\sim .}$$

Indichiamo al solito la classe di equivalenza di un elemento $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ barrandolo: $\overline{(a,b)} = \{(a',b') \in \mathbb{N}^2 \mid (a',b') \sim (a,b)\}$.

Cerchiamo di descriverlo meglio. Per farlo, prima definiamo su $\mathbb{N}$ la relazione d'ordine $\leq$ ponendo $a \leq b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, a+n=b$. E' chiaro che $0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \cdots$ e che $(\mathbb{N}, \leq)$ è totalmente ordinato.

non è definita la sottrazione in $\mathbb{N}$, ma solo in $\mathbb{Z}$

Osservazione

Consideriamo una coppia $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

$\overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$

- *Se* $a \geq b$, *esiste* $m \in \mathbb{N}$ *tale che* $a = b+m$. *Ma allora* $(a,b) \sim (m,0)$.
- *Se* $a \leq b$, *esiste* $n \in \mathbb{N}$ *tale che* $a+n=b$. *Ma allora* $(a,b) \sim (0,n)$.
- *Siano* $m,n \in \mathbb{N}$ *tali che* $(m,0) \sim (0,n)$. *Allora* $m+n=0$ *il che è possibile solo se* $m=0=n$.

Per l'Osservazione precedente, abbiamo $(a,b) \sim (m,0)$ oppure $(a,b) \sim (0,n)$ e quindi $\overline{(a,b)} = \overline{(m,0)}$ oppure $\overline{(a,b)} = \overline{(0,n)}$.
Possiamo allora riscrivere $\mathbb{Z}$: come

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \mathbb{N}^2/\sim \\ &= \{\overline{(a,b)} \mid a,b \in \mathbb{N}\} \\ &= \{\ldots,\overline{(0,3)},\overline{(0,2)},\overline{(0,1)},\overline{(0,0)},\overline{(1,0)},\overline{(2,0)},\overline{(3,0)},\ldots\}.\end{aligned}$$

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ appena costruito definiamo le operazioni di addizione e moltiplicazione come segue. Per ogni $\overline{(m,n)}$, $\overline{(p,q)} \in \mathbb{Z}$ poniamo

$$\overline{(m,n)} + \overline{(p,q)} = \overline{(m+p,n+q)} \qquad \text{(somma)},$$

$$\overline{(m,n)} \cdot \overline{(p,q)} = \overline{(mp+nq,mq+np)} \quad \text{(prodotto)}.$$

Poiché le operazioni sono state definite mediante dei rappresentanti arbitrariamente scelti occorre verificare che esse siano ben definite.

Lemma

L'addizione e la moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ sono ben definite.

DIMOSTRAZIONE. Vogliamo che l'addizione

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (\overline{(m,n)}, \overline{(p,q)}) \mapsto \overline{(m+p, n+q)}$$

sia una funzione. Pertanto dobbiamo mostrare che al cambiare dei rappresentanti non cambia il risultato cioé che

$$(\overline{(m,n)}, \overline{(p,q)}) = (\overline{(m',n')}, \overline{(p',q')}) \Rightarrow \overline{(m+p, n+q)} = \overline{(m'+p', n'+q')}$$

L'uguaglianza di sinistra implica $\overline{(m,n)} = \overline{(m',n')}$ e $\overline{(p,q)} = \overline{(p',q')}$ cioé

$$m + n' = m' + n \qquad \text{e} \qquad p + q' = p' + q.$$

Usando queste uguaglianze otteniamo

$$m + p + n' + q' = m + n' + p + q' = m' + n + p' + q = m' + p' + n + q$$

da cui risulta $\overline{(m+p, n+q)} = \overline{(m'+p', n'+q')}$.

Vediamo ora che la moltiplicazione

$$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \ \left(\overline{(m,n)}, \overline{(p,q)}\right) \mapsto \overline{(mp+nq, mq+np)}$$

è una funzione.
Di nuovo dobbiamo mostrare che al cambiare dei rappresentanti non cambia il risultato cioé che

$$\left(\overline{(m,n)}, \overline{(p,q)}\right) = \left(\overline{(m',n')}, \overline{(p',q')}\right) \Rightarrow \overline{(mp+nq, mq+np)} = \overline{(m'p'+n'q', m'q'+n'p')}.$$

L'uguaglianza di sinistra implica come prima

$$m+n' = m'+n \qquad \text{e} \qquad p+q' = p'+q. \tag{1}$$

L'uguaglianza di destra, che dobbiamo ottenere, è

$$m'q'+n'p'+mp+nq = mq+np+m'p'+n'q'.$$

Si arriva all'uguaglianza cercata sommando al suo primo membro $m(p'+q)+n(p+q')$ e al secondo membro $m(p+q')+n(p'+q)$ (si noti che per (1) le quantità sommate sono uguali) e cancellando, dopo qualche manipolazione, tutti i termini usando ancora (1).

L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi con le sue operazioni è un'estensione dei numeri naturali nel senso della proposizione seguente

Proposizione (Immersione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$)

La funzione

$$\imath : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad \overset{n}{\cancel{m}} \mapsto \overline{(n,0)},$$

è iniettiva e rispetta le operazioni di addizione e moltiplicazione, cioè

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \qquad \imath(m+n) = \imath(m) + \imath(n), \qquad \imath(mn) = \imath(m) \cdot \imath(n).$$

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo che su $\mathbb{Z}$ abbiamo definito

$$\overline{(m,n)} + \overline{(p,q)} = \overline{(m+p, n+q)}, \quad \overline{(m,n)} \cdot \overline{(p,q)} = \overline{(mp+nq, mq+np)}.$$

Se $\imath(m) = \imath(n)$, allora $\overline{(m,0)} = \overline{(n,0)}$, cioé $m+0 = n+0$ da cui $m = n$. Inoltre, per ogni m, $n \in \mathbb{N}$.

$$\imath(m) + \imath(n) = \overline{(m,0)} + \overline{(n,0)} = \overline{(m+n,0)} = \imath(m+n),$$
$$\imath(m) \cdot \imath(n) = \overline{(m,0)} \cdot \overline{(n,0)} = \overline{(mn,0)} = \imath(mn). \quad \square$$

Ora è facile dimostrare, usando come essa è definita, che in $\mathbb{Z}$

- l'addizione è associativa, commutativa,
- che $\overline{(0,0)}$ è lo zero (l'elemento neutro in notazione additiva) e che
- $\overline{(n,m)}$ è un opposto di $\overline{(m,n)}$.

Vediamo ad esempio quest'ultima proprietà:

$$\overline{(n,m)} + \overline{(m,n)} = \overline{(n+m, m+n)} = \overline{(m+n, m+n)} = \overline{(0,0)}.$$

$-\overline{(n,m)} := \overline{(m,n)}$

L'opposto di $\overline{(n,m)}$ si indica anche con il simbolo $-\overline{(n,m)}$ (come si fa solitamente in notazione additiva). Notiamo che $-\imath(n) = -\overline{(n,0)} = \overline{(0,n)}$. Pertanto

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{\ldots, \overline{(0,3)}, \overline{(0,2)}, \overline{(0,1)}, \overline{(0,0)}, \overline{(1,0)}, \overline{(2,0)}, \overline{(3,0)}, \ldots\} \\ &= \{\ldots, -\imath(3), -\imath(2), -\imath(1), \imath(0), \imath(1), \imath(2), \imath(3), \ldots\}\end{aligned}$$

Inoltre per $\mathbb{Z}$ si può dimostrare che la moltiplicazione è associativa, commutativa, che $\overline{(1,0)}$ è un elemento neutro e che $\overline{(m,n)}$ è invertibile solo se $\overline{(m,n)} = \pm\overline{(1,0)}$ (basta ricordare che $\overline{(m,n)}$ può essere riscritto in modo che la prima o la seconda entrata della coppia sia nulla).

Notazione

Alla luce della discussione svolta finora possiamo d'ora in poi adottare la comoda notazione seguente. In luogo l'elemento $\iota(n) = \overline{(n,0)}$ scriveremo semplicemente n. Dunque possiamo riscrivere $\mathbb{Z}$ nel modo più familiare

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} =& \{\dots, \underbrace{-\iota(3)}_{-3}, \underbrace{-\iota(2)}_{-2}, \underbrace{-\iota(1)}_{-1}, \underbrace{\iota(0)}_{0}, \underbrace{\iota(1)}_{1}, \underbrace{\iota(2)}_{2}, \underbrace{\iota(3)}_{3}, \dots\} \\ =& \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.\end{aligned}$$

Con queste notazioni

$$\begin{aligned} m - n =& \iota(m) - \iota(n) \\ =& \overline{(m,0)} - \overline{(n,0)} \\ =& \overline{(m,0)} + (-\overline{(n,0)}) \\ =& \overline{(m,0)} + \overline{(0,n)} = \overline{(m,n)}. \end{aligned}$$

Osservazione

Altre proprietà di $\mathbb{N}$ vengono ereditate da $\mathbb{Z}$. Ad esempio la legge di cancellazione. Se $\overline{(m,n)}+\overline{(a,b)}=\overline{(m',n')}+\overline{(a,b)}$, allora $\overline{(m+a,n+b)}=\overline{(m'+a,n'+b)}$ da cui $m+a+n'+b=m'+a+n+b$ e cioé

$$m+n'+a+b=m'+n+a+b.$$

Siccome questa è un'uguaglianza in $\mathbb{N}$ dove la cancellazione vale, otteniamo $m+n'=m'+n$ il che vuol dire $\overline{(m,n)}=\overline{(m',n')}$.

Esercizio (per casa)

Dimostrare le seguenti proprietà di $\mathbb{Z}$.

- *Se $x,y\in\mathbb{Z}$, $x\cdot y=0 \Rightarrow x=0 \vee y=0$ (legge di annullamento del prodotto).*
- *Definiamo $\overline{(m,n)}\le\overline{(m',n')} \Leftrightarrow m+n'\le m'+n$. Dimostrare che quello appena definito è un ordine totale su $\mathbb{Z}$.*
- *Se $x,y\in\mathbb{Z}$ dimostrare che $x\le y \Rightarrow -y\le -x$ (dove la relazione d'ordine è quella del punto precedente).*

Costruzione dei numeri razionali

La costruzione di $\mathbb{Q}$ a partire da $\mathbb{Z}$ è simile a quella di $\mathbb{Z}$ a partire da $\mathbb{N}$, per cui daremo indicazione dei passi e delle proprietà fondamentali lasciandone spesso per esercizio la verifica.

Iniziamo considerando la relazione $\sim$ sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definita da

$$(a, b) \sim (a', b') \iff ab' = a'b.$$

Si vede che si tratta di una relazione d'equivalenza su A.
Possiamo ora dare la definizione seguente.

Definizione

Si dice insieme dei numeri razionali l'insieme quoziente

$$\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim .$$

Per gli elementi di $\mathbb{Q}$ usiamo la notazione standard sotto forma di frazione

$$\frac{a}{b} := \overline{(a,b)}, \qquad \text{se } a,\ b \in \mathbb{Z} \text{ e } b \neq 0.$$

Notiamo che $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}} \Leftrightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \Leftrightarrow (a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow \boxed{ab' = a'b}$.

Osservazione

Se $c \neq 0$, poiché $(ac)b = a(bc)$, otteniamo la regola di riduzione $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Possiamo ora definire addizione e moltiplicazione in $\mathbb{Q}$ ponendo per ogni $\frac{m}{n},\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq} \quad \text{(somma)},$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq} \qquad \text{(prodotto)}.$$

Anche in questo caso le operazioni sono definite tramite certi rappresentanti delle classi che definiscono $\mathbb{Q}$ e quindi occorre verificare che siano ben definite.

Proposizione

L'addizione e la moltiplicazione sono ben definite.

<u>DIMOSTRAZIONE</u>. Vogliamo che

$$+ : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) \mapsto \frac{mq+np}{nq}$$

sia una funzione. Pertanto dobbiamo mostrare che

$$\left(\frac{m}{n}, \frac{p}{q}\right) = \left(\frac{m'}{n'}, \frac{p'}{q'}\right) \Rightarrow \frac{mq+np}{nq} = \frac{m'q'+n'p'}{n'q'}$$

L'uguaglianza di sinistra implica $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ e $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, cioé $mn' = m'n$ e $pq' = p'q$. Allora

$$(mq+np)n'q' = mn'qq' + nn'pq' = m'nqq' + nn'p'q = (m'q'+n'p')nq$$

da cui $\frac{mq+np}{nq} = \frac{m'q'+n'p'}{n'q'}$. Similmente $mpn'q' = mn'pq' = m'np'q = m'p'nq$ da cui $\frac{mp}{nq} = \frac{m'p'}{n'q'}$. Pertanto anche la moltiplicazione è un'operazione.

Proposizione (Immersione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$)

La funzione

$$\imath : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q},\ z \mapsto \frac{z}{1},$$

è iniettiva e rispetta le operazioni di addizione e moltiplicazione, cioè, per ogni m, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\imath(m+n) = \imath(m) + \imath(n), \qquad \imath(mn) = \imath(m) \cdot \imath(n).$$

Come per $\mathbb{Z}$ si può dimostrare in $\mathbb{Q}$ che

- l'addizione è associativa e commutativa, che
- $\frac{0}{1}$ è l'elemento neutro dell'addizione (cioé lo zero) e che
- $\frac{-m}{n}$ è un opposto di $\frac{m}{n}$ (infatti $\frac{-m}{n} + \frac{m}{n} = \frac{-mn+nm}{nn} = \frac{0}{nn} = \frac{0\cancel{nn}}{1\cancel{nn}} = \frac{0}{1}$).

L'opposto di $\frac{m}{n}$ si indica, al solito, anche con il simbolo $-\frac{m}{n}$.
Inoltre per $\mathbb{Q}$ si può dimostrare che la moltiplicazione è associativa, commutativa, che $\frac{1}{1}$ è un elemento neutro e che $\frac{m}{n}$ è invertibile solo se $m \neq 0$ (l'inverso è $\frac{n}{m}$).

Costruzione dei numeri complessi

La costruzione di $\mathbb{R}$ a partire da $\mathbb{Q}$ necessita di tecniche più sofisticate di quelle base della teoria degli insiemi ed è tradizionalmente demandata ai corsi di Analisi.
Passiamo dunque direttamente alla costruzione di $\mathbb{C}$ a partire da $\mathbb{R}$.
L'obiettivo è di estendere $\mathbb{R}$ e le sue operazioni ad un insieme più grande che permetta di estrarre radici quadrate senza restrizioni e quindi risolvere equazioni algebriche che non ammettono soluzione tra i numeri reali.

Definizione

Si dice insieme dei numeri complessi, l'insieme

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tali che } a,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

Definiamo ora l'addizione e la moltiplicazione, per ogni $(r, s), (r', s') \in \mathbb{C}$,

$$(r, s) + (r', s') = (r + r', s + s') \qquad \text{(somma componente per componente)},$$

$$(r, s) \cdot (r', s') = (rr' - ss', rs' + sr') \quad \text{(prodotto)}.$$

Osservazione

Si vede subito che $(\mathbb{C},+) = (\mathbb{R}^2,+)$ *è un monoide commutativo rispetto alla somma componente per componente e che lo zero (elemento neutro) è*

$$0_{\mathbb{C}} = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}).$$

Poiché $(r,s)+(-r,-s) = (r-r, s-s) = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}})$ *otteniamo che ogni elemento* (r,s) *ha un opposto* $(-r,-s)$*. Pertanto* $-(r,s) = (-r,-s)$*. Inoltre* $(\mathbb{C},\cdot)$ *risulta essere un monoide commutativo con elemento neutro*

$$1_{\mathbb{C}} = (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}).$$

Vale inoltre la proprietà distributiva, cioé per ogni $u,v,w \in \mathbb{C}$ *si ha che*

$$(u+v)\cdot w = u\cdot w + v\cdot w.$$

Lemma

Un numero complesso è non nullo $\Leftrightarrow$ è invertibile rispetto al prodotto. Più precisamente, se $x, y \in \mathbb{R}$ sono tali che $x \neq 0 \vee y \neq 0$, allora

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right).$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>. Indichiamo con $\mathbb{C}^\times$ l'insieme degli elementi invertibili in $(\mathbb{C}, \cdot)$ e dimostriamo che $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0_\mathbb{C}\}$.

$(\subseteq)$. Preso $z \in \mathbb{C}^\times$, allora esiste il suo inverso z^{-1}. Se z fosse $0_\mathbb{C}$, allora si avrebbe $0_\mathbb{C} \cdot z^{-1} = z \cdot z^{-1} = 1_\mathbb{C}$. Ma dalla definizione di prodotto segue subito che moltiplicando per $0_\mathbb{C}$ si ottiene sempre $0_\mathbb{C}$. Pertanto si avrebbe $0_\mathbb{C} = 1_\mathbb{C}$, cioé $(0_\mathbb{R}, 0_\mathbb{R}) = (1_\mathbb{R}, 0_\mathbb{R})$, da cui $0_\mathbb{R} = 1_\mathbb{R}$, assurdo. Pertanto $z \neq 0_\mathbb{C}$ e dunque $z \in \mathbb{C} \setminus \{0_\mathbb{C}\}$.

$(\supseteq)$. Sia $z \in \mathbb{C} \setminus \{0_\mathbb{C}\}$. Scritto $z = (x,y) \in \mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la condizione $z \neq 0_\mathbb{C}$ significa $(x,y) \neq (0,0)$ cioé $x \neq 0 \vee y \neq 0$. In particolare si ha $x^2 + y^2 \neq 0$. Allora si vede subito, dalla definizione di prodotto che

$$(x,y) \cdot \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = (1_\mathbb{R}, 0_\mathbb{R}) = 1_\mathbb{C}.$$

Controlliamo come $\mathbb{C}$ sia un'estensione di $\mathbb{R}$ con le sue operazioni.

Proposizione (Immersione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$)

La funzione $\imath : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, r \mapsto (r, 0_{\mathbb{R}})$, *è iniettiva e rispetta le operazioni di addizione e moltiplicazione.*
Più precisamente, per ogni r, $s \in \mathbb{R}$, *si ha che*

$$\imath(r+s) = \imath(r) + \imath(s), \qquad \imath(0_{\mathbb{R}}) = 0_{\mathbb{C}}, \qquad \imath(rs) = \imath(r)\cdot\imath(s), \qquad \imath(1_{\mathbb{R}}) = 1_{\mathbb{C}}.$$

Proof.

E' iniettiva perché $\imath(a) = \imath(b)$ vuol dire $(a, 0_{\mathbb{R}}) = (b, 0_{\mathbb{R}})$ e quindi $a = b$.
Inoltre

$$\begin{aligned}
&\imath(r) + \imath(s) = (r, 0_{\mathbb{R}}) + (s, 0_{\mathbb{R}}) = (r+s, 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}) = (r+s, 0_{\mathbb{R}}) = \imath(r+s),\\
&\imath(0_{\mathbb{R}}) = (0_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}) = 0_{\mathbb{C}},\\
&\imath(r)\cdot\imath(s) = (r, 0_{\mathbb{R}})\cdot(s, 0_{\mathbb{R}}) = (r\cdot s - 0_{\mathbb{R}}\cdot 0_{\mathbb{R}}, r\cdot 0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}}\cdot s) = (rs, 0_{\mathbb{R}}) = \imath(rs),\\
&\imath(1_{\mathbb{R}}) = (1_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}) = 1_{\mathbb{C}},
\end{aligned}$$

per ogni r, $s \in \mathbb{R}$, come segue subito dalle definizioni delle operazioni. $\square$

Lemma (Legge di annullamento del prodotto)

$\forall w, z \in \mathbb{C}$ *si ha che* $w \cdot z = 0_{\mathbb{C}} \Rightarrow w = 0_{\mathbb{C}} \vee z = 0_{\mathbb{C}}$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto che, se $w \neq 0_{\mathbb{C}}$, allora w è invertibile rispetto al prodotto. Pertanto $w \cdot z = 0_{\mathbb{C}} \Rightarrow w^{-1} \cdot w \cdot z = w^{-1} \cdot 0_{\mathbb{C}}$. Il prodotto per $0_{\mathbb{C}}$ fa sempre zero e quindi otteniamo $1_{\mathbb{C}} \cdot z = 0_{\mathbb{C}}$ cioé $z = 0_{\mathbb{C}}$.

Definiamo unità immaginaria il numero complesso

$$i = (0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}).$$

Notiamo che, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\imath(a) + \imath(b) \cdot i = (a, 0_{\mathbb{R}}) + (b, 0_{\mathbb{R}}) \cdot (0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}}) = (a, 0_{\mathbb{R}}) + (0_{\mathbb{R}}, b) = (a, b).$$

Quindi $(a, b) = \imath(a) + \imath(b) \cdot i$. Per snellire la notazione, al posto di $\imath(a)$ si scriverà semplicemente "a", e quindi $(a, b) = a + b \cdot i$.

Inoltre il segno di moltiplicazione si omette scrivendo $(a, b) = a + bi.$