Sottospazi vettoriali

Si definisce $W_1 + W_2 = \{x+y \in V \mid x \in W_1 \wedge y \in W_2\}$

Proposizione $W_1 + W_2$ é sottospazio vettoriale di V

dim. Siano $w_1, w_2 \in W_1 + W_2$

+) $w_1 \in W_1 + W_2 \Rightarrow w_1 = x_1 + y_1$ con $x_1 \in W_1$ e $y_1 \in W_2$

$w_2 \in W_1 + W_2 \Rightarrow w_2 = x_2 + y_2$ con $x_2 \in W_1$ e $y_2 \in W_2$

$$w_1 + w_2 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\in W_1} + \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\in W_2} \in W_1 + W_2$$

·) Sia $w \in W_1 + W_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $w = x + y$, con $x \in W_1$ e $y \in W_2$

$$\lambda w = \lambda(x+y) = \underset{W_1}{\underset{\cap}{\lambda x}} + \underset{W_2}{\underset{\cap}{\lambda y}} \in W_1 + W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 + W_2 \text{ sottospazio vettoriale}$$

Esempio $V = \mathbb{R}^2$, $W_1 = \mathcal{L}((1,0))$, $W_2 = \mathcal{L}((0,1))$; $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ infatti un generico elemento di W_1 é della forma $(x, 0)$, mentre un generico elemento di W_2 é della forma $(0, y)$. Un generico vettore di $W_1 + W_2$ é della forma $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ che é un generico elemento di $\mathbb{R}^2$

$W_1 + W_1 = W_1$, $W_2 + W_2 = W_2$. $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

$W_1, W_2 \subseteq W_1 + W_2$, infatti ogni elemento x di W_1 si può scrivere come $x + \underset{\in W_2}{\underline{0}} \in W_1 + W_2$

Ogni elemento y di W_2 si scrive $\underset{\in W_1}{\underline{0}} + y \in W_1 + W_2$. Quindi $\dim(W_1 + W_2) \geq \max\{\dim(W_1), \dim(W_2)\}$