# Geometria 1

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

# Indice

**1 Matrici** **5**
1.1 Somma . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**2 Gruppo** **8**

**3 Operazioni con le matrici** **9**
3.1 Moltiplicazione . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
3.2 Prodotto tra matrici . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

**4 Operazioni tra sottospazi vettoriali** **14**

**5 Funzioni lineari** **19**
5.1 Matrice associata ad una applicazione lineare . . . . . . . . . 21
5.2 Immagine di sottospazi vettoriali . . . . . . . . . . . . . . . . 24
5.3 Retroimmagine di sottospazi . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
5.4 Nucleo di una funzione lineare . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

# 1 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare di numeri reali ($\in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

contiene $m \cdot n$ numeri
contiene $m$ righe
contiene $n$ colonne

$a_{ij}$ è l'elemento della matrice nella $i$-esima riga e nella $j$-esima colonna.
$a_{ij} \in \mathbb{R}$.

$A$ è una matrice $m \cdot n$. Se $m = n$ allora $A$ è una **matrice quadrata**.

Le matrici servono per:

- risolvere sistemi lineari
- studiare spazi vettoriali
- classificarre strutture geometrice (es. coniche)
- presentare funzioni (semplificandone lo studio)

$\mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$:

- $\mathbb{Q}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$ le cui entrate sono elementi di $\mathbb{Q}$.

**Esempi (1.1)**

- $\mathbb{R}^{2,2}$: matrici $2 \cdot 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdots \in \mathbb{R}^{2,2}$$

- $\mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^{m,1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1} \qquad \text{anche } \textbf{vettori colonna}$$

- $\mathbb{R}^{1,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n} \qquad \text{anche } \textbf{vettori riga}$$

In $\mathbb{R}^{m,n}$ è sempre definita la **matrice nulla**, in cui tutte le entrate sono nulle. In $\mathbb{R}^{n,n}$ è sempre definita la **matrice identità**:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{1,1}$, $I = 1$
- In $\mathbb{R}^{2,2}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{3,3}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale composta unicamente da 1 nella matrice identità è ila **diagonale principale** della matrice.

## 1.1 Somma

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Esempi (1.2)**

- In $\mathbb{R}^{1,1}$ la somma tra matrici coincide con la somma usuale di numeri reali.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

**Proprietà della somma**

($i$) La somma è **associativa**:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

e posso scrivere $A + B + C$ senza ambiguità.

($ii$) La somma è **commutativa** (o abeliana):

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad A + B = B + A$$

($iii$) Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice nulla ($B = \underline{0}$), allora $A + B = B + A = A$

($iv$) $A - A = \underline{0}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \exists - A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ t. c. } A - A = 0$$

**Definizione** Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si definisce $-A$,

$$\text{con } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Notazione** In genere si scrive $A - B$ in luogo di $A + (-B)$, e si considera come una sottrazione di matrici

**Definizione** Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ sono uguali se hanno le stesse entrate ($A = B$)

**Proprietà** $\quad A = B \iff B - A = 0$

# 2 Gruppo

**Definizione** Siano $A, B$ due insiemi, si definisce **prodotto cartesiano**:

$$A \times B = \{(a, b) \text{ t. c. } a \in A, b \in B\}$$

in cui conta l'ordine: $(a, b) \neq_( b, a)$

$$A \times A = \{(a_1, a_2) \text{ t. c. } a_1, a_2 \in A\}$$

**Definizione** Sia $G$ un insieme. Una **operazione** in $G$ è una funzione

$$\begin{aligned} \star : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g \star h \end{aligned}$$

**Proprietà**

$(i)$ L'operazione è **associativa** se $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$

$(ii)$ L'operazione ha un **elemento neutro** se

$$\exists\, e \in G \text{ t. c. } g \star e = e \star g = g,\ \forall g \in G$$

$(iii)$ Se $g \in G$ chiamiamo **inverso di** $g$ un elemento

$$k \in G \text{ t. c. } g \star k = k \star g = e$$

**Definizione** Un **gruppo** è un insieme $G$ con un'operazione $\star$ t. c.

1. $\star$ è associativa
2. esiste un elemento neutro
3. ogni elemento ha un inverso

**Esempi (2.1)** Sono gruppi

$$(\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),$$

$$\cancel{(\mathbb{R}, \cdot)}\text{: lo zero non ha un inverso,}$$

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ (\mathbb{R}^{m,n}, +)$$

**Definizione** Un gruppo $(G, \star)$ è **abeliano** se

$$g \star h = h \star g \, \forall \, g, h \in G$$

Nel caso di un gruppo abeliano l'operazione è indicata con $+$ e l'elemento neutro con 0.

$$(\mathbb{R}^{m,n}, +) \text{ è un gruppo abeliano}$$

# 3 Operazioni con le matrici

## 3.1 Moltiplicazione

Si può moltiplicare $\lambda \in \mathbb{R}$ con matrici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot A = -A \qquad \text{coerente con la definizione di } -A$$

**Esempio (3.1)**

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

**Osservazione (3.1)** $0 \cdot A$ è la matrice nulla $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

**Proprietà del prodotto per scalari**

(*i*) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

(*ii*) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

(*iii*) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

(*iv*) $1 \cdot A = A \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$ è un **gruppo abeliano** in cui è definita una moltiplicazione per scalari in cui valgono le proprietà *i*-*iv* (prototipo per gli spazi vettoriali).

## 3.2 Prodotto tra matrici

$$A, B \text{ t.c. } A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k} \implies AB \in \mathbb{R}^{m,k}$$

Questo è definito come il prodotto **righe per colonne**. Il numero di colonne della prima matrice deve corrispondere con il numero di righe della seconda matrice.

**Teorema I** Sia $V$ uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$, e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale:

1. se $V$ è finitamente generato $\implies$ $W$ è finitamente generato;
2. se $V$ è finitamente generato $\implies$ $\dim W \leq \dim V$
3. se $V$ è finitamente generato e $\dim W = \dim V \implies W = V$

***dim.*** (I)

1. Supponiamo che $V$ sia finitamente generato, e per assurdo che $W$ non lo sia.

   $V$ è finitamente generato $\implies$ $V$ ha una base

   $$\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

   $W$ non è finitamente generato, e sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq \underline{0}$, considero $\mathscr{L}(w_1) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1)$, altrimenti $W$ sarebbe generato da $w_1$. $\implies \exists\, w_2 \in W \wedge w_2 \notin \mathscr{L}(w_1)$.

   Considero $\mathscr{L}(w_1, w_2) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1, w_2)$, altrimenti $W$ sarebbe generato da $\{w_1, w_2\}$. $\implies$
   $\implies \exists\, w_3 \in W \wedge w_3 \notin \mathscr{L}(w_1, w_2)$.

   Itero il procedimento e trovo

   $$\{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \subseteq W \text{ t. c. } w_{n+1} \notin \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) \implies \\ \implies \{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \text{ è un insieme libero}$$

   e contiene più elementi di una base $\mathscr{B}$. Assurdo per teorema precedente.

2. Supponiamo $V$ finitamente generato, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. $W$ è finitamente generato (per 1.) $\implies \exists\, \mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di $W \implies \mathscr{B} \subseteq V$ è un sottoinsieme libero $\implies m \leq \dim V$ $\implies \dim W \leq \dim V$

3. Sia $W \subseteq V$ uno spazio vettoriale, con $V$ finitamente generato. $\dim W = \dim V$.

   $W$ ha una base $\mathscr{B}$ con $n$ vettori, dove $n = \dim V \implies \mathscr{B}$ è una base di $V$.

   Se $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_n\} \implies W = \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) = V \implies W = V$

**Osservazione (3.2)** Se $V$ è uno spazio vettoriale finitamente generato, e $\dim V = n \implies$ ogni insieme libero con $n$ elementi è una base. Infatti se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ è un insieme libero, se per assurdo esistesse $v \in V \wedge v \notin \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_n) \implies \{v_1, \cdots, v_n, v\} \subseteq V$ è un insieme libero di cardinalità $n+1$ (ovvero con $n+1$ elementi). Assurdo.

**Teorema II (del completamento di una base)** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di $V$ e sia $I = \{a_1, \cdots, a_l\} \subseteq V$ un sottoinsieme libero. Esiste sempre $\mathscr{B}'$ base di $V$ i cui primi $l$-elementi sono $a_1, \cdots, a_l$ e i restanti $n-l$-elementi sono elementi di $\mathscr{B}$.

$$\mathscr{B}' = \{a_1, \cdots, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}$$

***dim.*** **(II)** Applico il metodo degli scarti successivi

$l = n$ l'enunciato è banale ($I$ è già una base e non va completata);

$l < n \implies \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l) \subsetneq V$
$\implies \exists\, w_1 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_1 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l)$. Infatti, se tutti i generatori appartenenti a $\mathscr{B}$ fossero combinazioni lineari di $a_1, \cdot, a_l$, non sarebbero più tutti linearmente indipendenti. $\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1\}$ è libero.

Se $I_1$ è una base, la dimostrazione si conclude, altrimenti $\exists\, w_2 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_2 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l, w_2)$
$\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, w_2\}$ è libero.

Se $I_2$ è una base la dimostrazione si conclude, altrimenti si itera fino a

$$I_{n-l} = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}.$$

$I_{n-l}$ è libero con $n$ vettori $\implies I_{n-l}$ è una base

**Esempio (3.2)** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3}) = \{A \in \mathbb{R}^{3,3} \text{ t. c. } {}^tA = A\}$

Cerco una base. Sia $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ generica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$A = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \\ + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \\ + e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Siano $E_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, e sia $\mathscr{B} = \{E_1, \cdots, E_6\}$

Dato

$$I = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \right. \\ A_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \\ \left. A_3 = \begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$$

insieme libero, si trovino tre elementi $w_1, w_2, w_3 \in \mathscr{B}$ tali per cui $I \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$.

$$A_1 = E_1 + 2E_2; A_2 = E_1 - E_4 + E_6; A_3 = E_2 - E_3$$

e rispetto alla base $\mathscr{B}$

$$A_1 = (1, 2, 0, 0, 0, 0), A_2 = (1, 0, 0, -1, 0, 1), A_3 = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$$
$$E_1 = (1, 0, \cdots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, E_6 = (0, \cdots, 0, 1)$$

Si studia l'appartenenza di $E_1 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3)$. Studio il sistema

$$E_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$\implies E_1 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1\}$

Si studia l'appartenenza di $E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_2 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$\implies E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies$ scarto $E_2$

Si studia l'appartenenza di $E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 1 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$\implies E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies$ scarto $E_3$

Si studia l'appartenenza di $E_4 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_4 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 1 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$\implies E_4 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4\}$

Si studia l'appartenenza di $E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4)$. Studio il sistema

$$E_5 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1 + \lambda_5 E_4$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_5 \\ 1 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 0 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$\implies E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4) \implies I_3 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

La soluzione è $\mathscr{B}' = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

## 4 Operazioni tra sottospazi vettoriali

Sia $V$ uno spazio vettoriale su un un campo $\mathbb{K}$, e siano $W_1$ e $W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

Si consideri

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in w_1 \wedge x \in w_2\}$$

**Proposizione *p*.i** $W_1 \cap W_2$ è sempre sottospazio vettoriale

***dim.* (*p*.i)** Siano $x, y \in W_1 \cap W_2$

$$\implies \left.\begin{cases} x, y \in W_1 \implies (x+y) \in W_1 \\ x, y \in W_2 \implies (x+y) \in W_2 \end{cases}\right\} \implies (x+y) \in W_1 \cap W_2$$

**Proposizione *p*.ii** Sia $V$ uno spazio vettoriale e $W, W_1$ e $W_2$ sottospazi di $V$.

Se $W$ contiene $W_1$ e $W$ contiene $W_2$ allora $W$ contiene $W_1 + W_2$ (cioè $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio di $V$ che contiene sia $W_1$ che $W_2$)

***dim.*** **(*p*.ii)** Sia $x + y \in W_1 + W_2$, $x \in W_1 \implies x \in W, y \in W_2 \implies y \in W \implies x + y \in W$, poiché $W$ è un sottospazio vettoriale. Quindi ogni $v \in W_1 + W_2$ è elemento di $W \implies W_1 + W_2 \subseteq W$.

La somma si generalizza a più sottospazi. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali, allora si definisce

$$W_1 + \cdots + W_l = \{x_1 + \cdots + x_l | x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale ed è il più piccolo sottospazio che contiene tutti i $W_1, \cdots, W_l$

**Esercizio** Si trovino somma e intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

a. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = L(e_4)$

b. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x : 1, x : 2 \in \mathbb{R}\}$,
$Z_2 = \{(0, x_2, 0, x_4) | x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

**Soluzione**

a. $W_1 + W_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$, $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

b. $W_1 + Z_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$,
$W_1 \cap Z_2 = \{(0, x_2, 0, 0) | x_2 \in \mathbb{R}\}$

**Proposizione *p*.iii** Sia $V$ spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni:

1. $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ (hanno intersezione banale)
2. ogni $v \in W_1 + W_2$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$

***dim.*** **(*p*.iii)**

1. $\implies$ 2. Suppongo $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ e considero $v \in W_1 + W_2$. Scrivo $v = x_1 + y_1$, $v = x_2 + y_2$ e dimostro che $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

$\underline{0} = v - v = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \implies x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, $x_1 - x_2 \in W_1$ mentre $y_2 - y_1 \in W_2$. Per l'uguaglianza risulta che

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \in W_2 \implies x_1 - x_2 \in W_1 \cap W_2 \\ y_2 - y_1 \in W_1 \implies y_2 - y_1 \in W_1 \cap W_2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 - x_2 = \underline{0} \implies x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = \underline{0} \implies y_1 = y_2 \end{cases}$$

2. $\implies$ 1. Suppongo che ogni $v \in W_1 + W_2$ si scriva in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$ e dimostro che $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

   Sia $v \in W_1 \cap W_2$. Sia $v \in W_1 + W_2$, $v = x + y = x + v + y - v$, con $x + v \in W_1$, $y - v \in W_2$. Quindi se $v \neq \underline{0}$, le due scritture $v = x + y$, $v = (x + v) + (y - v)$ sono diverse e ciò non è possibile per ipotesi

**Notazione** Se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ si scrive $W_1 \oplus W_2$ invece che $W_1 + W_2$ $\oplus$ si legge "somma diretta"

**Esempio (4.1)** $\mathbb{K}^{n,n} = S(\mathbb{K}^{n,n}) \oplus A(\mathbb{K}^{n,n})$

**Esempio (4.2)** $R^2 = \mathscr{L}(e_1) \oplus \mathscr{L}(e_2)$

**Proposizione *p.iv*** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni

1. $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_l) = \{\underline{0}\}$ $\forall i = 1, \cdots, l$
2. Ogni $v \in W_1 + \cdots + W_l$ si scrive in modo unico come $v = x_1 + \cdots + x_l$ con $x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l$

Se vale 1. si scrive $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_l$

**Esempio (4.3)** Considero $V$ spazio vettoriale di dimensione finita e $\mathscr{B} = \{v1, \cdots, v_n\} \implies V = \mathscr{L}(v_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}(v_l)$

Sia $V$ spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, finitamente generato. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale, sia $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_l\}$ una base di $W$. Possiamo completare $\mathscr{B}$ con una base dello spazio $\mathscr{B}' = \{w_1, \cdots, w_l, v_1, \cdots, v_m\}$. Sia

$$Z = \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_m) \subseteq V$$

un sottospazio vettoriale, e per costruzione $V = W \oplus Z$

**Osservazione (4.1)** Sia $V$ spazio vettoriale di dimensione finita con $V = W \oplus Z$ Siano $\mathscr{B} = \{w1, \cdots, w_l\}$ una base di $W$ e $C = \{z_1, \cdots, z_m\}$ una base di $Z$. Ogni elemento di $V$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W$ e $y \in Z$ $\mathscr{B}$ base di $W$

$\implies$ $x$ si scrive in modo unico come $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l$

$\mathscr{C}$ base di $Z$ $\implies$ $y$ si scrive in modo unico come

$$y = \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies$ $v$ si scrive in modo unico come

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l + \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies$ $B \cup C = \{w1, \cdots, w_l, z_1, \cdots, z_l\}$ è una base di $V$

$\implies$ $\dim V = \dim W + \dim Z$

**Teorema III** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Siano $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali t. c. $V = W_1 + W_2$. Allora

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Questa è la **Formula di Grassmann**.

Chiamo $\dim V = n$, $\dim W_1 = l$, $\dim W_2 = p$, $\dim(W_1 \cap W_2) = r$

In particolare $l, p \leq n$, $r \leq l, p$

1. $r = l \implies W_1 \cap W_2 = W_1 \implies W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 + W_2 = W_2 = V$
2. $r = p \implies W_1 \cap W_2 = W_2 \implies W_2 \subseteq W_1 \implies W_1 + W_1 = W_1 = V$
3. si assume $r \leq l, p$ e sia

   $$\mathscr{B} = \{a_1, \cdots, a_r\} \text{ base di } W_1 \cap W_2$$

   Completo $\mathscr{B}$ con una base $\mathscr{C}$ di $W_1$,

   $$\mathscr{C} = \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l\}$$

   e completo $\mathscr{B}$ con una base $\mathscr{D}$ di $W_2$,

   $$\mathscr{D} = \{a_1, \cdots, a_r, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

Si verifica che l'insieme

$$\{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

è una base di $V$. In questo modo si ottiene

$$\dim V = l + (p - r)$$

cioè la tesi.

Ovviamente risulta

$$\mathscr{L}(a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p) = V$$

in quanto contiene i generatori sia di $W_1$ che di $W_2$, e quindi anche della loro somma. Verifichiamo che l'insieme

$$\{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

sia libero. Supponiamo

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu r + 1 + b_{r+1} + \cdots + \\ + \cdots + \mu_l b_l + \gamma_{r+1} c_{r+1} + \cdots + \gamma_p c_p = \underline{0} **$$

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l) = (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \cdots - \gamma_p c_p)$$

Sia

$$c = (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \cdots - \gamma_p c_p) = \\ = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l)$$

sicuramente $c \in W_2$

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l \in W_1$$

$\implies c \in W_1 \cap W_2 = \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_r)$

$\implies c = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r$, vado a sostituire in **

$$(\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r) + (\gamma_{r+1} c_{r+1} + \cdots + \gamma_p c_p) = \underline{0}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0 \\ \gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0 \end{cases}$$

Ho ottenuto

$$\gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0$$
$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l = \underline{0}$$

Poiché l'insieme

$$\mathscr{C} = \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l\}$$

è libero

$\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \cdots = \mu_l = 0$

$\implies \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$ è libero

## 5 Funzioni lineari

$V$ e $W$ spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e una funzione $F : V \to W$, $F$ è lineare se verifica $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$

**Teorema IV (di esistenza e unicità)** Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con $V$ finitamente generato.

Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di $V$ e $a_1, \cdots, a_n \in W$.

Allora esiste un'unica funzione lineare $F : V \to W$ tale che $F(v_i) = a_i$ $\forall i = 1, \cdots, n$

***dim.*** **(IV)**

Esistenza Sia $v \in V$, $v$ si scrive in modo unico come $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$ per $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

Si definisce

$$F(v) = F(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) := x_1 a_1 \cdots + x_n a_n$$

$F$ definisce una funzione $V \to W$ tale che $F(v_i) = a_i$ per $i = 1, \cdots, n$. Verifico che $F$ è lineare.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$ e dimostro che $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$

Scrivo

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

e

$$w = \sum_{r=1}^{n} y_r v_r$$

$$\lambda v + \mu w = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k) v_k$$

Quindi per come è definita $F$ risulta che

$$F(\lambda v + \mu w) = F\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k\right) v_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k) a_k =$$

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k a_k =$$

$$= \lambda F(v) + \mu F(w)$$

$\implies F$ è lineare

Unicità Supponiamo di avere due funzioni lineari $F, G : V \to W$ tali che $F(v_i) = G(v_i) = a_i \ \forall i = 1, \cdots, n$ e dimostro che $F = G$, cioè che $F(v) = G(v) \ \forall v \in V$ Possiamo scrivere $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ quindi

$$F(v) = F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$$

Inoltre

$$G(v) = G\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k G(v_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$$

$\implies F(v) = G(v) \; \forall v \in V$

$\implies F = V$

## 5.1 Matrice associata ad una applicazione lineare

Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con $V, W$ entrambi finitamente generati. Supponiamo $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

Considero $F : V \to W$ lineare, e fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di $V$ e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base di $W$.

$$F(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k1}w_k$$

$$F(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k2}w_k$$

$$\cdots$$

$$F(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{kn}w_k$$

Tutto questo determina $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $A$ è determinata da $F, \mathscr{B}, \mathscr{C}$

Sia $v \in V$ un vettore generico $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
F(v) = F\Bigg(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\Bigg) &= \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k) = \\
&= x_1 F(v_1) + x_2 F(v_2) + \cdots + x_n F(v_n) = \\
&= x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{k1} w_k + x_2 \sum_{k=1}^{m} a_{k2} w_k + \cdots + x_n \sum_{k=1}^{m} a_{kn} w_k = \\
&= \sum_{k=1}^{m} (a_{k1} x_1) w_k + \sum_{k=1}^{m} (a_{k2} x_2) w_k + \cdots + \sum_{k=1}^{m} (a_{kn} x_n) w_k = \\
&= \Bigg(\sum_{r=1}^{n} a_{1r} x_r\Bigg) w_1 + \Bigg(\sum_{r=1}^{n} a_{2r} x_r\Bigg) w_2 + \cdots + \Bigg(\sum_{r=1}^{n} a_{mr} x_r\Bigg) w_m
\end{aligned}$$

Se $(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\implies \big(F(v)\big) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\implies \big(F(v)\big) = A(v)_{\mathscr{B}}$

**Notazione** Si indica $A$ con $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$, matrice che rappresenta $F$ rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$

**Esempio (5.1)** Sia $I : V \to V$ funzione identità, e calcoliamo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I)$ dove $\mathscr{B}$ è una base fissata di $V$. Se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ risulta $I(v_i) = v_i$ $\forall i = 1, \cdots, n$

$\implies M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I) = Id$ matrice identità

**Esempio (5.2)** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3)$$

Sia $\mathscr{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, voglio trovare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

Possiamo scrivere $F\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

Sono noti $F(1,0,0) = (3,0)$, $F(0,1,0) = (-1,2)$ e $F(0,0,1) = (0,3)$, quindi

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

In generale data $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ espressa in termini della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ la matrice che rappresenta $F$ è la matrice le cui colonne sono $F(e_1), \cdots, F(e_n)$

**Esempio (5.3)** Data $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix}4 & 0 & -1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

**Esempio (5.4)** $F : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$: $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ e deterrmino la matrice che rappresenta $F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^{n,n}$, $\mathscr{B} = E_{i_1j}$ e alla base canonica di $\mathbb{K}$ $\mathscr{C} = \{1\}$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix}\mathrm{tr}(E_{11}) & \mathrm{tr}(E_{12}) & \cdots & \mathrm{tr}(E_{1n}) & \mathrm{tr}(E_{21}) & \mathrm{tr}(E_{22}) & \cdots & \mathrm{tr}(E_{nn})\end{pmatrix}$$

Per esempio se $n = 2$ risulta $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

**Esempio (5.5)** Sia $a \in V_3$ e $F : V_3 \to V_3$: $x \mapsto a \wedge x$ funzione lineare.

Sia $\mathscr{B} = \{i, j, k\}$ base ortonormale positiva di $V_3$ e calcolo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, scriviamo $a = a_1i + a_2j + a_3k$

$$\begin{aligned}F(i) &= a \wedge i = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge i = -a_2k + a_3j\\F(j) &= a \wedge j = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge j = a_1k - a_3j\\F(k) &= a \wedge k = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge k = -a_1j + a_2i\end{aligned}$$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\a_3 & 0 & -a_1\\-a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$$

**Esercizio** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$, $F(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}$

Sia $\mathscr{B}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$

Si trovi $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

**Soluzione** Da risolvere

## 5.2 Immagine di sottospazi vettoriali

Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $F : V \to W$ lineare, sia $H \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $F(H)$ immagine di $H$ tramite $F$, tale che $F(H) \subseteq W$, $F(H) = \{F(h) | h \in H\}$

**Proposizione *p.*v** $F(H)$ è sempre un sottospazio vettoriale di $W$

***dim.* (*p.*v)** Siano $w_1, w_2 \in F(H)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $\lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$$w_1 \in F(H) \implies w_1 = F(h_1) \text{per qualche } h_1 \in H$$
$$w_2 \in F(H) \implies w_2 = F(h_2) \text{per qualche } h_2 \in H$$
$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda F(h_1) + \mu F(h_2) = F(\lambda h_1 + \mu h_2)$$

Poiché $H$ è un sottospazio vettoriale, risulta che, dato $h = \lambda h_1 + \mu h_2$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 = F(h)$ per qualche $h \in H$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$\implies F(H)$ sottospazio vettoriale di $V$

Supponiamo $\dim H = n$, $\dim F(H) =?$

Sia $\mathscr{B} = \{h_1, \cdots, h_n\}$ base di $H$, sappiamo che $\{F(h_1), \cdots, F(h_n)\}$ è un insieme di generatori di $F(H)$

$\implies \dim F(H) \leq n$

**Esercizio** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

Sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio $H = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\}$, $\dim H = 2$

Si trovi una base di $F(H)$

**Soluzione**

1. Trovo una base di $H$, per esempio $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$
2. Calcolo le immagini dei vettori della base

$$F(1,-1,0) = (2,0,2,-1)$$
$$F(0,0,1) = (-1,1,0,-1)$$

   Questi due vettori sono linearmente indipendendenti, allora formano una base di $F(H)$

**Definizione** Sia $F : V \to W$ lineare, $F(V)$ (che è un sottospazio vettoriale di $W$) si dice l'immagine di $F$

**Osservazione (5.1)** $F$ è suriettiva $\iff F(V) = W \iff \dim F(V) = \dim W$ (criterio per testare la suriettività di una funzione lineare)

**Esercizio** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) = (2x+2y, x+z, x+3y-2z)$

1. Dire se $F$ è suriettiva e in caso contrario trovare $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $w \notin F(\mathbb{R}^3)$
2. Sia $a = (1,0,1)$, $b = (0,1,1)$, $H = \mathscr{L}(a,b)$. Dire se $(4,3,-2) \in F(H)$

**Soluzione**

1. $F(\mathbb{R}^3) = \mathscr{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3))$

$$F(e_1) = (2,1,1)$$
$$F(e_2) = (2,0,3)$$
$$F(e_3) = (0,1,-2)$$

   Si osserva che $F(e_1) = F(e_2) + F(e_3)$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti

   Ma $F(e_2)$ e $F(e_3)$ sono linearmente indipendenti

   $\implies$ $F(\mathbb{R}^3)$ ha dimensioone 2, ed i vettori $(2,0,3),(0,1,-2)$ ne formano una base. $F$ non è suriettiva

   $w \in \mathbb{R}^3$, $w \notin F(\mathbb{R}^3) \iff w$ non è combinaziione lineare di $(2,0,3),(0,1,-2)$.

   Per esempio $w = (1,0,0)$ va bene, poiché non esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(1,0,0) = \lambda(2,0,3) + \mu(0,1,-2)$

2. $F(H) = \mathscr{L}(F(a), F(b))$. $F(a) = (2, 2, -1)$, $F(b) = (2, 1, 1)$. $F(a), F(b)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim F = 2$

   $(4, 3, -2) \in F(H) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(4, -3, -2) = (2\lambda+2\mu, 2\lambda+\mu, -\lambda+\mu)$

   Il sistema non ha soluzione, pertanto $(4, 3, -2) \notin F(H)$

**Definizione** Data $F : V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali su uno stesso campo, il rango di F ($\operatorname{rank} F$) è la dimensione di $F(V)$

Se $\mathscr{B}$ è una base di $V$ e $\mathscr{C}$ è una base di $W$, ad $F$ si associa la matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ che rappresenta $F$ rispetto alle basi fissate.

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}$$

Il rango di F coincide con il rango della matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

$\implies$ tutte le matrici associate ad $F$ hanno lo stesso rango.

## 5.3 Retroimmagine di sottospazi

$F : V \to W$ applicazione lineare, sia $K \subseteq W$ un sottospazio

$$F^{-1}(K) = \{w \in K | w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\}$$

Si noti che $F^{-1}(K) \neq \emptyset$: sicuramente $K$ contiene $\underline{0}_W$ e sappiamo che $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.

**Proposizione *p*.vi** $F^{-1}(K)$ è sempre un sottospazio vettoriale di $V$, $\forall K \subseteq W$ sottospazio vettoriale

***dim.*** **(*p*.vi)** Fisso $v, w \in F^{-1}(K)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostro che $\lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} v \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(x) \text{ per qualche } x \in K, F(v) = x \\ w \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(y) \text{ per qualche } y \in K, F(w) = y \end{cases}$$

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) = \lambda x + \mu y \in K$$

poiché $K$ è un sottospazio vettoriale

$\implies F(\lambda v + \mu w) \in K$

$\implies \lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$\implies F^{-1}(K)$ sottospazio vettoriale di $W$

$$\dim F(H) \leq \dim H,$$
$$\text{se } K \subseteq F(V) \implies \dim F^{-1}(K) \geq \dim K$$

**Esercizio**

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$$
$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1 + y_2 = 0\} \dim K = 3$$

Si determini $F^{-1}(K)$

**Soluzione** Voglio trovare le $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $F(x_1, x_2, x_3) \in K$

$$F(x_1, x_2, x_3) \in K \iff (x_1 + x_2) + 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ è l'equazione di $F^{-1}(K)$ ($\dim F^{-1}(K) = 2$)

Trovo una base di $F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = -3t - 2s \end{cases}$$

$$\mathscr{B} = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\} \quad \text{è una base di } F^{-1}(K)$$

Altro approccio risolutivo:

Fisso una base di $K$, per esempio

$$\{w_1 = (1, -1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$F^{-1}(K) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | F(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -\lambda_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda_2 \\ x_2 - x_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Si risolve il sistema in $x_1, x_2, x_3, x_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 2 & 1 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{si riduce per righe}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -1 & 1 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 + 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 + 3\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Affinché il sistema sia risolubile si deve avere

$$\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0; \qquad \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ -x_2 + x_3 = -3\lambda_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2\lambda_1 - \mu \\ x_2 = \mu + 3\lambda_1 \\ x_2)\mu \end{cases}$$

Da qui si deduce una base di $F^{-1}(K)$

## 5.4 Nucleo di una funzione lineare

$V, W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $F : V \to W$ lineare

$\implies \{\underline{0}_W\}$ è sottospazio vettoriale di $W$

$\implies F^{-1}(\underline{0}_W)$ sottospazio vettoriale di $V$

**Definizione** $F^{-1}(\underline{0}_W)$ si dice nucleo di $F$ (kernel di $F$) e si indica con $\ker(F)$

$$\ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\}$$

**Teorema V** $F$ è iniettiva $\iff \ker F = \underline{0}_V$

***dim.*** **(V)**

" $\implies$ " Supponiamo $F$ iniettiva e sia $v \in \ker F$

$\implies F(v) = \underline{0}_W$, ma poiché $F$ è lineare risulta $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

$\implies F(v) = F(\underline{0}_V)$ e poiché $F$ è iniettiva risulta $v = \underline{0}_W$

$\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$

"$\Longleftarrow$" Per ipotesi $\ker F = \{\underline{0}_V\}$, siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = F(v_2)$

$\Longrightarrow$ $F(v_1) - F(v_2) = \underline{0}_W$, poiché $F$ è lineare si ottiene $F(v_1 - v_2) = \underline{0}_W$

$\Longrightarrow$ $v_1 - v_2 \in \ker F$

$\Longrightarrow$ $v_1 - v_2 = \underline{0}_V$

$\Longrightarrow$ $v_1 = v_2$, quindi $F$ è iniettiva.

Supponiamo $V, W$ di dimensione finita, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, siano $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di $V$ e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di $W$, e si consideri $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}(F)}$

$$\begin{aligned}\ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\} &= \\ &= \{v \in V | (F(v))_{\mathscr{C}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ &= \{v \in V | M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)(v)_{\mathscr{B}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ &= \{v \in V | (v)_{\mathscr{B}} \text{ appartiene al null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\}\end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned}\dim \ker F &= \\ &= \dim(\text{null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)) = \\ &= \dim V - \operatorname{rank} M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \\ &= \dim V - \operatorname{rank} F\end{aligned}$$

$$\dim V = \dim \ker F + \operatorname{rank} F$$

Questo sopra enunciato è il teorema di nullità più rango in termini di una funzione lineare.

**Esercizio** Sia $F : V \to W$ lineare. Fisso $w_0 \in W$, e definisco

$$F^{-1}(w_0) = \{v \in V | F(v) = w_0\}$$

Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché $F^{-1}(w_0)$ sia sottospazio.

**Soluzione**

**Esercizio** Sia $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $V, 3-$dim, $\mathscr{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $W, 4-\text{dim}$

Sia $g : V \to W$ la funzione lineare determinata dalle relazioni

$$\begin{cases} g(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3 \\ g(v_2) = w_1 + w_2 + w_4 \\ g(v_3) = w_2 + w_3 - w_4 \end{cases}$$

Si calcolino $g(V)$ e $\ker g$

**Soluzione** Possiamo calcolare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare $\ker g$ devo calcolare il null-space di $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Quindi

$$\ker g = \{-\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 | \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2 - v_3)$$

$g(V)$ ha dimensione 2. Per esercizio si trovi una base di $g(V)$

**Notazione** Spesso l'immagine di una funzione lineare $F$ si indica con $\mathrm{Im}(F)$

**Teorema VI** Sia $F : V \to W$ una funzione lineare tra spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

$F$ è iniettiva $\iff$ $F$ porta insiemi liberi di vettori di $V$ in insiemi liberi di vettori di $W$

***dim.*** **(VI)**

" $\implies$ " Supponiamo $F$ iniettiva e sia $\{v_1, \cdots, v_l\} \subseteq V$ un insieme libero, e dimostriamo che $\{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è un insieme libero in $W$

Considero $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ tali che

$$\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \cdots + \lambda_l F(v_l) = \underline{0}_W$$

Poiché $F$ è lineare risulta

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l) = \underline{0}_W$$

$\implies$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l \in \ker F$, ma poiché $F$ iniettiva $\ker F = \{\underline{0}_W\}$

$\implies$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = \underline{0}_V$, ma $\{v_1, \cdots, v_l\}$ è libero

$\implies$ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$

$\implies$ $\{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è libero

"$\impliedby$" Per ipotesi $F$ porta insiemi liberi in insiemi liberi. Si fissa $v \in V$, $v \neq \underline{0}_V$, quindi $\{v\}$ è libero

$\implies$ $\{F(v)\}$ è libero

$\implies$ $F(v) \neq \underline{0}_W$

$\implies$ $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

$\implies$ $F$ è iniettiva

**Definizione** Una funzione lineare sia iniettiva che suriettiva si dice un isomorfismo

$F : V \to W$ è un isomorfismo $\iff$ $\mathrm{Im}(F) = W$ e $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

**Teorema VII**

1. Sia $F : V \to W$ lineare con $V, W$ finitamente generati e tali che $\dim V = \dim W$.

   $F$ è iniettiva $\iff$ $F$ è suriettiva

2. $F : V \to V$ lineare con $V$ finitamente generato è un isomorfismo $\iff$ iniettiva $\iff$ suriettiva

**Definizione** Un isomorfismo $F : V \to V$ si dice un automorfismo di $V$

***dim.*** **(VII)**

1. $\dim V = \dim W$, $\dim V = \dim\ker(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$

   $\implies$ $\dim W = \dim\ker(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$

   - Se $F$ è suriettiva

     $\implies$ $\dim W = \dim \mathrm{Im}(F)$

     $\implies$ $\dim\ker(F) = 0$

     $\implies$ $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

     $\implies$ F è iniettiva

   - Se $F$ è iniettiva

     $\implies$ $\dim\ker F = 0$

     $\implies$ $\dim W = \dim \mathrm{Im} F$

     $\implies$ $W = \mathrm{Im} F$

     $\implies$ F è suriettiva

2. Segue dal punto 1.

**Esempio (5.6)** $V$ spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, $\mathscr{B}$ base di $V$

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{L_{\mathscr{B}}} \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

è un isomorfismo