

# Analisi Matematica 1 A

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino



# Indice

<b>1</b>	<b>Insiemi</b>	<b>5</b>
1.1	Corrispondenza biunivoca . . . . .	5
1.1.1	Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$ . . . . .	5
1.1.2	Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . . . . .	5
1.2	Insieme $\mathbb{R}$ . . . . .	6
1.2.1	Relazioni . . . . .	8
1.2.2	Definizione assiomatica dei numeri reali . . . . .	12
1.3	Campi ordinati completi . . . . .	13
1.3.1	Rappresentazione . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Lipsum</b>	<b>15</b>
<b>3</b>	<b>Limite successione</b>	<b>16</b>
3.1	Limiti . . . . .	20
3.2	Confronti tra infiniti . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Costante di Nepero</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Continuità</b>	<b>27</b>
5.1	Discontinuità . . . . .	32
5.2	Prolungamento per continuità di una funzione . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Successioni</b>	<b>35</b>
6.1	Un limite notevole . . . . .	35
6.2	Sottosuccessioni . . . . .	36
6.3	Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
6.3.1	Successioni e chiusura di $E \subset \mathbb{R}^n$ . . . . .	41
6.4	Successioni di Cauchy . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Teoremi per le funzioni continue</b>	<b>45</b>
<b>8</b>	<b>Successioni e topologia in <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>50</b>
8.1	Continuità e compattezza in $\mathbb{R}^n$ . . . . .	52
8.2	Legame tra uniforme continuità e compattezza . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Derivata</b>	<b>57</b>
9.1	Derivate di funzioni elementari . . . . .	63
9.2	Prima formula dell'incremento finito . . . . .	64
9.3	Studio dei punti di dubbia derivabilità . . . . .	68



# 1 Insiemi

20 set 2021

Gli insiemi numerici a cui siamo abituati da sempre sono

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{r = \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m, n \text{ primi tra loro}\right\}\end{aligned}$$

Per l'insieme  $\mathbb{Q}$  esiste una rappresentazione decimale:

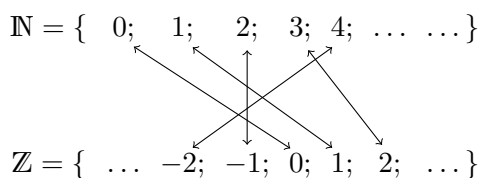
$$r = n, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_j \dots$$

con  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ . " $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_j \dots$ " prende il nome di allineamento periodico (o finisce o si ripete all'infinito).

## 1.1 Corrispondenza biunivoca

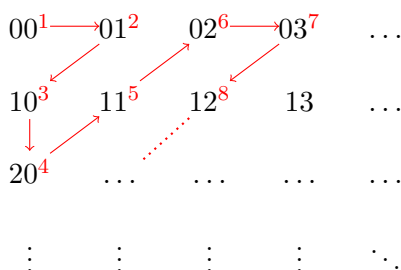
Due insiemi *finiti* possono essere messi in corrispondenza biunivoca se e solo se hanno lo stesso numero di oggetti.

### 1.1.1 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$



### 1.1.2 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

In rosso è segnato l'insieme  $\mathbb{N}$ , mentre in nero le coppie di  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , che sono state ordinate dalle frecce rosse:



In generale, se  $K \leftrightarrow \mathbb{N}$  (dove  $\leftrightarrow$  si legge "in corrispondenza biunivoca")  
 $\implies$

$$K \leftrightarrow K \times K = K^2$$

$$K \leftrightarrow K \times K \times K = K^3$$

$$K \leftrightarrow K \times K \times \cdots \times K = K^n$$

**Definizione** Un insieme  $A$  è detto *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{N}$

Gli insiemi  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{N}^n$ ,  $\mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbb{Q}^n$  sono numerabili

## 1.2 Insieme $\mathbb{R}$

21 set 2021

**Proposizione p.i** Sia  $d$  la diagonale del quadrato di lato 1, ovvero  $d^2 = 2$ .  
 $d \notin \mathbb{Q}$

*dim.* (**p.i**) Assumiamo per assurdo che  $d \in \mathbb{Q}$

$$\implies \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ primi tra loro tali che } d = \frac{m}{n}$$

$$\implies \frac{m^2}{n^2} = 2$$

$$\implies m^2 = 2n^2$$

$$\implies m^2 \text{ è pari} \implies m \text{ è pari}^1$$

$$\implies \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } m = 2k$$

$$\implies m^2 = 4k^2$$

$$\implies 2n^2 = 4k^2$$

$$\implies n^2 = 2k^2$$

$$\implies n^2 \text{ è pari} \implies n \text{ è pari;}$$

si ha contraddizione dell'ipotesi che  $m, n$  fossero primi tra di loro (in quanto entrambi pari hanno almeno un divisore in comune, ovvero 2).  $\square$

**Proposizione p.ii**  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m^2$  pari  $\implies m$  pari

---

<sup>1</sup> dimostrazione successiva

**dim. (p.ii)** Per assurdo, assumiamo  $m$  dispari

$$\implies \exists k \in \mathbb{Z} | m = 2k + 1$$

$$\implies m^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

$$\implies m^2 = \underbrace{4k(k + 1)}_{\text{pari}} + 1$$

$$\implies m^2 \text{ è dispari.}$$

Si ha contraddizione, pertanto  $m$  è pari.  $\square$

Dal momento che si è utilizzata nelle ultime dimostrazioni, è bene aprire una parentesi sulle *dimostrazioni per assurdo*

### Schema dimostrativo per assurdo

**Proposizione p.iii (schema I)** Siano  $p, q$  preposizioni

$$(p \implies q) \stackrel{?}{\iff} ((p \wedge \neg q) \implies \neg p)$$

**dim. (p.iii)**

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \implies \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali.  $\square$

**Proposizione p.iv (schema II)** Siano  $p, q$  preposizioni

$$(p \implies q) \stackrel{?}{\iff} ((p \wedge \neg q) \implies q)$$

**dim. (p.iv)**

$p$	$q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \implies q$	$(p \wedge \neg q) \implies q$
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

**Proposizione p.v (schema III)** Siano  $p, q$  preposizioni

$$(p \implies q) \stackrel{?}{\iff} (\neg q \implies \neg p)$$

*dim.* (p.v)

$p$	$q$	$\neg q$	$\neg p$	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

---

Dalle dimostrazioni precedenti (p.i) si è reso evidente che necessitiamo di un insieme numerico che permetta di risolvere il problema di trovare la diagonale di un quadrato di lato 1: infatti, questo semplice caso ci dimostra che la retta euclidea non è in corrispondenza biunivoca con  $\mathbb{Q}$ , ma che anzi la retta di  $\mathbb{Q}$  ha "un buco"

Vogliamo trovare  $X$  tale che  $\mathbb{Q} \subseteq X$ ,  $X \leftrightarrow$  retta

Per trovare questo insieme è necessario introdurre le *relazioni* all'interno di un insieme

### 1.2.1 Relazioni

Sia  $A$  un insieme generico: diciamo  $\mathcal{R}$  relazione su  $A$  tale che

$$\mathcal{R} \subseteq A \times A$$

Dati  $a, b \in A$  si scrive  $a\mathcal{R}b \iff (a, b) \in \mathcal{R}$ . Diciamo che  $a$  è in corrispondenza con  $b$  se  $a\mathcal{R}b$

#### Proprietà

- $\mathcal{R}$  si dice *simmetrica* se  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$  si dice *riflessiva* se  $\forall a \in A$ ,  $a\mathcal{R}a$



- $\mathcal{R}$  si dice *transitiva* se dati  $a, b, c \in A$ ,  $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$
- $\mathcal{R}$  si dice *antisimmetrica* se dati  $a, b \in A$ ,  $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b$

**Definizione** Una relazione  $\mathcal{R}$  su  $A$  è detta *di ordine* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*

**Definizione** Una relazione  $\mathcal{R}$  su  $A$  è detta *di ordine totale* (o anche  $A$  è totalmente ordinato rispetto ad  $\mathcal{R}$ ) se è una relazione d'ordine e vale

$$\forall a, b \in A \quad a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$$

### Esempi (1.1)

- $A$  insieme delle parole del dizionario italiano,  $\mathcal{R}$  ordine lessicografico  
 $a, b \in A \quad a\mathcal{R}b$  se  $a$  viene prima o coincide con  $b$  nell'ordine alfabetico.  
 $\mathcal{R}$  è riflessiva, transitiva e antisimmetrica,  $\mathcal{R}$  è di ordine totale.
- Sia  $U$  insieme universo,  $\mathcal{P}(U)$  l'insieme delle parti di  $U$ <sup>2</sup>,  $\mathcal{R}$  relazione di inclusione ( $\subset$ )

$$A, B \in \mathcal{P}(U), A \subset B \iff \forall x \in A \implies x \in B$$

$\mathcal{R}$  è di ordine su  $\mathcal{P}(U)$  ma non è di ordine totale

- Nell'insieme  $\mathbb{Q}$  si consideri la relazione
  - minore stretto  
 $a < b$  se  $a$  precede strettamente  $b$  nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea
  - minore uguale  
 $a \leq b$  se  $a$  precede o coincide  $b$  nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea

Si noti che

$<$  non è di ordine (non soddisfa né la proprietà riflessiva né la proprietà antisimmetrica)

---

<sup>2</sup> Si è fatto così e non si è scelto  $V$  (insieme di tutti gli insiemi) per evitare i paradossi; in particolare, vedasi *paradosso di Russel*

$\leq$  è di ordine totale

La relazione  $<$  non è di ordine in quanto

1. non soddisfa la proprietà riflessiva: ogni numero non è minore a se stesso
2. non soddisfa la proprietà di antisimmetria, in quanto non esiste nessuna coppia di numeri per cui valgano le relazioni  $a < b$  e  $b < a$

La relazione  $\leq$  è di ordine totale, in quanto soddisfa tutte e tre le proprietà:

1. è riflessiva, in quanto ogni numero è minore o uguale a se stesso
2. è antisimmetrica, in quanto l'unico modo per cui valga la relazione  $a \leq b$  e  $b \leq a$  è che  $a = b$
3. è transitiva, in quanto se  $a \leq b$  e  $b \leq c$  allora  $a \leq c$
4. inoltre, per ogni coppia (non ordinata) di numeri reali, è sempre possibile stabilire almeno un ordine che permetta di soddisfare la relazione.

**Definizione** La relazione  $\mathcal{R}$  su  $A$  è detta *relazione di equivalenza* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*. Si indica generalmente con  $x \sim y$  invece di  $x\mathcal{R}y$

Una classe di equivalenza di  $u \in A$  (dove  $u$  è detto “rappresentante”) è

$$[u] = \{v \in A : v \sim u\}$$

L'insieme quoziente di  $A$  rispetto a  $\sim$ :

$$A/\sim := \{[u] : u \in A\}$$

22 set 2021 **Definizione** Un insieme  $U$  si dice totalmente ordinato con la relazione d'ordine “ $\preceq$ ”

Consideriamo  $A \subseteq U$

1.  $A$  è *limitato superiormente* se

$$\exists k \in U \text{ t. c. } \forall a \in A, a \preceq k$$

$\implies k$  è detto *maggiorante* di  $A$

2.  $A$  è limitato inferiormente se

$$\exists h \in U \text{ t. c. } \forall a \in A, h \preceq a$$

$\implies k$  è detto *minorante* di  $A$

Possono esistere infiniti maggioranti e infiniti minoranti

**Definizione**  $M$  è il massimo di  $A$  se  $M$  è un maggiorante ( $a \preceq M \forall a \in A$ ) e  $M \in A$

**Definizione**  $m$  è il minimo di  $A$  se  $m$  è un minorante ( $m \preceq a \forall a \in A$ ) e  $m \in A$

Si dice che  $M = \max A$  e  $m = \min A$

**Esempi (1.2)** Per tutti gli esempi successivi si consideri  $U = \mathbb{Q}$  e  $\preceq = \leq$

1.  $A = \{5, 7, 9, -4, 588\}$ .  $\min A = -4$ ,  $\max A = 588$

Con  $A \subseteq \mathbb{Q}$  e  $A$  contenente un numero finito di valori

$\implies A$  ammette  $\max$  e  $\min$

2.  $B = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ,  $B$  è limitato inferiormente

$\implies \min B = 1$ ,  $B$  non è limitato superiormente

3.  $C = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ ,  $C$  è limitato:  $\forall x \in C, 1 < x \leq 2$

$C$  ammette un massimo ( $\max C = 2$ ),  $C$  non ammette un minimo

4.  $D = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\forall x \in D, 0 \leq x < 1$

$\min D = 0$ ,  $D$  non ammette  $\max$

**Definizione** Sia  $U$  totalmente ordinato con relazione d'ordine  $\preceq$ , e sia  $a \in U$ .

- Diciamo *estremo superiore* di  $A$  ( $\sup A$ ) il più piccolo dei maggioranti.
- Diciamo *estremo inferiore* di  $A$  ( $\inf A$ ) il più grande dei minoranti

$$\sup A = \min\{M \in U \mid \forall x \in A, x \preceq M\}, \quad \inf A = \max\{m \in U \mid \forall x \in A, m \preceq x\}$$

Se esistono  $\max A$  e/o  $\min A$

$$\implies \sup A = \max A, \inf A = \min A$$

**Esempio (1.3)** Sia  $C = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$$\max C = 2 = \sup C$$

$$\min C = \nexists$$

$\implies$  se  $m$  è minorante di  $C$

$$\implies m \leq 1 \implies \inf C = 1.$$

Sia  $D = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$$\min D = 0 = \inf D$$

$$\max D = \nexists$$

$\implies$  se  $M$  è maggiorante di  $D$

$$\implies M \geq 1 \implies \sup D = 1$$

**Esempio (1.4)**

$$E = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq 0, r^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$$

- $E$  è limitato:  $\forall r \in E, 0 \leq r < 2$

- $\inf E = \min E = 0$

- $\sup E$ ? Se  $x^2 < 2$

$$\implies 0 \leq x < \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}. \text{ Un candidato } \sup E = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\implies \sup E = \nexists$$

---

L'obiettivo, quindi, è quello di costruire un insieme numerico  $X$  (con  $\mathbb{Q} \subseteq X$ ) con operazioni  $+$  e  $\cdot$  tale che ogni sottoinsieme limitato ammetta estremo superiore e inferiore.

### 1.2.2 Definizione assiomatica dei numeri reali

$\mathcal{R}_1$ . È definita un'applicazione  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , indicata con il segno “+” detta *addizione* o *somma*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$  (associativa);
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$  (commutativa);
- esiste un elemento in  $\mathbb{R}$  indicato con 0 (zero) tale che  $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a$  (esistenza elemento neutro per +);

- $\forall a \in \mathbb{R}, \exists *$  tale che  $a + * = 0$ , si indica  $* = -a$ , detto *inverso*, *opposto* di  $a$  (esistenza dell'inverso per  $+$ ).

$\mathcal{R}_2$ . È definita un'applicazione  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , indicata con il segno “ $\cdot$ ” detta *prodotto* o *moltiplicazione*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  (associativa);
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$  (commutativa);
- esiste un elemento in  $\mathbb{R}$  indicato con  $1$  (uno) tale che  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = a$  (esistenza elemento neutro per  $\cdot$ );
- $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \exists *$  tale che  $a \cdot * = 1$ , si indica  $* = a^{-1}$ , detto *inverso*, *reciproco* di  $a$  (esistenza dell'inverso per  $\cdot$ );
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$  (distributiva).

$\mathcal{R}_3$ . È definita in  $\mathbb{R}$  una relazione di ordine totale, indicata con “ $\leq$ ”, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}: a \leq b \implies a + c \leq b + c$ ;
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, 0 \leq c: a \cdot c \leq b \cdot c$ .

$\mathcal{R}_4$ . Sia  $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

Se  $A$  è limitato superiormente, allora  $A$  ammette un estremo superiore.

Se  $A$  è limitato inferiormente, allora  $A$  ammette un estremo inferiore

$\mathcal{R}_1$  garantisce che  $(\mathbb{R}, +)$  è un gruppo

Queste proprietà possono essere definite anche per  $\mathbb{Q}$ , in cui valgono però solo le proprietà corrispondenti a  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ .

Se valgono le proprietà  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$  per un qualche insieme  $\mathbb{K}$ , questo insieme prende il nome di *campo totalmente ordinato*.

$\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q}$  sono campi totalmente ordinati, e  $\mathbb{R}$  è un *campo ordinato completo*

### 1.3 Campi ordinati completi

Si è costruito un insieme  $\mathbb{R}$  con  $(+, \cdot, \geq)$ , che soddisfa  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$  e  $\mathcal{R}_4$ .

- Quanti insiemi con queste proprietà esistono?
- Che relazione c'è tra di loro?
- Come li rappresentiamo?

---

**Definizione** Dati  $B$  e  $B'$  campi ordinati (soddisfano  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ ), si definisce *isomorfismo* tra  $B$  e  $B'$  una relazione

$$\begin{aligned}\varphi : B &\rightarrow B' \\ a &\mapsto a' = \varphi(a)\end{aligned}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- $\varphi$  è biunivoca
- $\forall a, b \in B$ 
  - (i)  $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
  - (ii)  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
  - (iii)  $a \leq b \implies \varphi(a) \leq \varphi(b)$

**Teorema I** Siano  $B$  e  $B'$  campi ordinati  $(+, \cdot, \leq, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$ , con  $B$  completo e  $B'$  completo

$\implies \exists$  un isomorfismo  $\varphi : B \rightarrow B'$

Si dice che  $B$  è isomorfo a  $B'$  (e viceversa) poiché la relazione di isomorfismo è di equivalenza:  $B \sim B'$

Non lo dimostreremo

Scelto un campo  $B$  a piacere possiamo costruire la classe di equivalenza

$$[B] = \{\text{campi ordinati completi}\}$$

$$\mathbb{R} = [B]$$

### 1.3.1 Rappresentazione

Modello decimale:  $x \in \mathbb{R}$  si rappresenta come

$$x = p, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

dove  $p \in \mathbb{Z}$  e  $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots]$  è un allineamento infinito di cifre tra  $\{1, \dots, 9\}$

Modello binario:  $y \in \mathbb{R}$  si rappresenta come

$$y = p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \cdots$$

dove  $p \in \mathbb{Z}$  e  $[\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots]$  è un allineamento infinito di cifre tra  $\{1, 2\}$

Non conta il modello che si usa; è necessario dimostrare che questi modelli soddisfino gli assiomi: fare riferimento al libro di testo

## 2 Lipsum

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit.

In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetur.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

### 3 Limite successione

2 nov 2021

Data  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, a : n \rightarrow a_n, l \in \mathbb{R}^*$ , diciamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$



se  $\forall V(l) \exists U(+\infty) n \in (\mathbb{N} \text{ intersezione } D) \implies a_{n \in V(l)}$  Scriviamo  $\forall V(l) \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} a_n \in V(l)$

$l \in \mathbb{R}$ , diciamo che  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  è **convergente** a  $l$  se  $\forall \varepsilon \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n > \bar{n} |a_n - l| < \varepsilon$

Se  $l = \pm\infty$   $a_n$  è divergente a  $\pm\infty$ , se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \#$  allora  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  è irregolare (o oscillante).

### Esempio (3.1)

- $\{a_n\}_{n=0}^\infty = (-1)^n$  con  $n \in \mathbb{N}$  è irregolare e limitata
- $\{b_n\}_{n=0}^\infty = (-1)^n \cdot n$  con  $n = 0, -1, 2, -3, 4, \dots$  è irregolare e non limitata

Si dice di una successione  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$

- $\forall \{a_n\}$  è crescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$  è strettamente crescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$  è decrescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$  è strettamente decrescente se  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > a_{n+1}$

Una successione crescente o decrescente si dice monotona, se strettamente crescente o decrescente si dice strettamente monotona.

Un predicato  $P(n)$  è verificato definitivamente se  $\exists \bar{n} \forall n \leq \bar{n} P(n)$  è vero

Valgono per  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  i seguenti teoremi

- Teorema di unicità del Limite
- Teorema di permanenza del segno
- Teorema di limitatezza:

### Teorema II

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \{a_n\}_{n=0}^\infty \text{ è convergente e limitata}$$

- Teorema del confronto
- Teorema di esistenza del Limite per successioni definitivamente monotone

**Teorema III**  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  è definitivamente crescente

$\implies$  ammette limite in  $\mathbb{R}^*$

Precisamente se

–  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  è definitivamente monotona e limitata

$\implies$  è convergente

–  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  è definitivamente monotona e non limitata

$\implies$  è divergente

**Teorema IV (Principio di Archimede)**  $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a, b > 0$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $na > b$

*dim.* (IV) Utilizziamo la funzione parte intera:

$x \in \mathbb{R}$  si dice  $[x] = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{n \leq x\}$

Si verifica che  $\forall x \in \mathbb{R}, [x] < x \leq [x] + 1$

Se  $x \geq 0, [x] \geq 0, [x] \in \mathbb{R}$

Considerato  $x = \frac{b}{a}$

$$\left[ \frac{b}{a} \right] \leq \frac{b}{a} < \left[ \frac{b}{a} \right] + 1$$

Posto  $\bar{n} = \left[ \frac{b}{a} \right] + 1 \in \mathbb{N}$

$$\frac{b}{a} < \bar{n} \implies \bar{n}a > b$$

Osserviamo che posto  $a = 1$  si ha che  $\forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}$  t.c.  $n > b$

**Applicazione del Principio di Archimede** Verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ , vogliamo verificare che definitivamente  $\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$  allora per il principio di archimede

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}, \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora  $\forall n \geq \bar{n}, n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon$  dunque  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  definitivamente

Dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

### **Teorema V (Disugualianza di Bernoulli)**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

si ha che

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

**dim. (V)** Dimostrazione per induzione

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1+nx, x > -1$$

1.  $P(0)$

$$1+x > 0 \quad (1+x)^0 = 1 = 1+n0$$

$P(0)$  è vera

2. Assumiamo vera  $P(n)$  e verifichiamo  $P(n+1)$

$$P(n) : \quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \wedge \quad x > -1$$

$$(1+x) \cdot (1+x)^n \geq 1+nx \cdot (1+x)$$

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

$$(1+nx)(1+x) = 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

Dunque  $P(n+1)$  :

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

è verificata

Allora per induzione

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad \wedge \quad x > -1$$

### 3.1 Limiti

Progressione geometrica

$$q \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = ?, n \in \mathbb{N}$$

- $q > 1, q = 1 + p$  con  $p > 0$   $q^n = (1 + p)^n \geq 1 + np$  per la disuguaglianza di Bernoulli

$$1 + np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- $q = 1$   $q^n = 1 \forall n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$$

- $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$

$$\implies |q| = \frac{1}{1+p} \text{ con } p > 0$$

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np}$$

$$1 + np \rightarrow +\infty \text{ per } n \rightarrow +\infty$$

$$\implies \frac{1}{1+np} \rightarrow 0$$

Per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- $q = -1$

$q^n$  è irregolare e limitata

- $q < -1$

$$q^n = (-1)^n |q|^n$$

ma  $|q| > 1$  quindi  $|q|^n \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ , e quindi  $q^n$  è irregolare non limitata

Riassumendo

$$q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q > 1 \\ \text{convergente a } 1 & q = 1 \\ \text{convergente a } 0 & |q| < 1 \\ \text{irregolare limitata} & q = -1 \\ \text{irregolare non limitata} & q < -1 \end{cases}$$

**Esercizio** Posto  $q \in \mathbb{R}$  e

$$b_n = \sum_{k=0}^n q^k$$

calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

**Soluzione** Da risolvere

**Teorema VI (di relazione)** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ :  $x \rightarrow f(x)$ ,  $x_0 \in D'$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ,  $l \in \mathbb{R}^*$

Allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  **(A)**

$\Longleftrightarrow$

per ogni successione  $a : \{a_n\}_{n=0}^\infty$  a valori in  $D \setminus \{x_0\}$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \quad \textbf{(B)}$$

**dim. (VI)**

(A)  $\implies$  (B) Sappiamo che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  ovvero

$$\forall V(l) \exists U(x_0) \mid x \in U \wedge x \in V \wedge x \neq x_0 \implies f(x) \in V(l) \quad (3.1)$$

Consideriamo  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  con  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$  con  $a_n \in D$  e  $a_n \neq x_0$  ossia

$$\exists \bar{n} \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \bar{n}, a_n \in D \wedge a_n \neq x_0 \wedge a_n \in U(x_0)$$

allora

$$f(a_n) \in V(l) \quad (3.2)$$

Concludendo, unendo (3.1) e (3.2):

$$\forall V(l) \exists \bar{n} \in \mathbb{N} | \forall n > \bar{n} f(a_n) \in V(l)$$

ossia

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = l$$

(B)  $\implies$  (A) Procediamo per assurdo: verificando  $\neg A \implies \neg B$

$\neg B$ : esiste una successione  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  tale che  $a_n \in D \setminus \{x_0\}$  per cui  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$  con  $a_n \neq x_0$ , e  $f(a_n) \not\rightarrow l$

Abbiamo ipotizzato  $\neg(A)$ , ossia

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$$

ossia

$$\exists V(l) | \forall U(x_0) \exists x \in U \wedge x \in D \wedge x \neq x_0 \text{ t.c. } f(x) \notin V(l)$$

Ci poniamo nel caso particolare  $x_0 \in \mathbb{R}$  (il caso  $x_0 = \pm\infty$  funziona analogamente).

$\neg(A) \implies$

$$\exists V(l) | \forall \delta > 0 \exists x | 0 < |x - x_0| < \delta \wedge x \in D \wedge f(x) \notin V(l)$$

Consideriamo  $\delta = 1 \exists x_1 | 0 < |x_1 - x_0| < 1 \wedge f(x_1) \notin V(l)$

Consideriamo  $\delta = \frac{1}{2} \exists x_2 | 0 < |x_2 - x_0| < \frac{1}{2} \wedge f(x_2) \notin V(l)$

...

Consideriamo  $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n | 0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge f(x_n) \notin V(l)$

...

Allora abbiamo costruito una successione  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  tale che  $x_n \in D$ ,  $x_n \neq x_0$  e  $f(x_n) \notin V(l)$

inoltre  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} | \forall n > \bar{n} | 0 < |x_n - x_0| < \varepsilon \text{ (} \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon} \text{)}$

ossia  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0$

Abbiamo costruito una successione  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  con  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $x_n \neq x_0$  e  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$

ossia abbiamo ottenuto che  $\neg B$  è vera

### 3.2 Confronti tra infiniti

1. Dati  $a > 1$  e  $n \in \mathbb{N}$  osserviamo che

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{a^n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq \leq \frac{\sqrt{n}}{1+hn} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} =$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e  $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  allora per confronto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$$

ovvero

$$\sqrt{n} = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

2. Dato  $a > 1$

$$0 \leq \frac{n}{a^n} = \left( \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \right)^2$$

ma  $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

3. Dato  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \left( \frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k$$

ma  $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Dato che  $a > 1$  e  $\sqrt[k]{a} > 1$  concludiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n^k = o(a^n)_{n \rightarrow +\infty}$$

- 4.

## 4 Costante di Nepero

8 nov 2021

Consideriamo la successione  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^{+\infty}$$

è una forma indeterminata

Verifichiamo la convergenza:

1.  $a_n$  è crescente
  2.  $a_n$  è superiormente limitata
  3. applichiamo il teorema di esistenza del limite per le successioni monotone
1.  $a_1 = 2$ , per  $n \geq 2$  stimiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}} = \\ &= \frac{\left(\frac{1+n}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n}{\frac{n-1}{n}} = ** \end{aligned}$$

Applico la disuguaglianza di Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} < 1, -\frac{1}{n^2} > -1 \\ \implies \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \geq 1 - n \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$$\implies ** \geq \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1$$

Quindi  $\forall n \geq 2$ ,  $a_n \geq a_{n-1}$ , quindi  $a_n$  è crescente definitivamente

2. Dimostriamo ora che  $a_n$  è limitata superiormente.

Consideriamo  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  ( $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ )



Verifichiamo che  $b_n$  è decrescente.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} = \dots = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n}$$

Stimiamo  $(1 + \frac{1}{n^2-1})^n$ ; per qualsiasi  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{n^2-1} > 0$ , e posso applicare Bernoulli:

$$(1 + \frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Otengo quindi che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Quindi  $\forall n \geq 2$ ,  $b_n < b_{n-1}$ , quindi  $b_n$  decrescente definitivamente, ma  $b_2 = 4 \implies b_n \leq 4$  definitivamente

Poiché  $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$  si ha  $a_n$  crescente e  $a_n \leq 4$  definitivamente

3. Dunque, per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate, otteniamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \in \mathbb{R}$$

(esiste ed è un numero reale), e lo chiamiamo  $e$ , detta costante di Nepero □

Quindi

$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Osserviamo che

$$a_1 = 2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

Una prima stima di  $e$  risulta essere

$$2 \leq e \leq 4$$

Con opportuni algoritmi di approssimazione si stima che

$$e = 2,7182818284\dots$$

**Osservazione (4.1)**  $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  (dimostrazione sul libro di testo)

**Proposizione p.vi**

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

**Lemma l.i** Sia  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pm\infty$  allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

*dim. (p.vi)* Applicando il teorema di relazione, a partire dal lemma (l.i) si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

*dim. (l.i)*

1.  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , ricordiamo  $[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{[x_n] + 1} &< \frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{[x_n]} \\ 1 + \frac{1}{[x_n] + 1} &< 1 + \frac{1}{x_n} \leq 1 + \frac{1}{[x_n]} \\ \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]}}_{\alpha_n} &\leq 1 + \frac{1}{x_n} \leq \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n] + 1}}_{\beta_n} \end{aligned}$$

$$\beta_n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

notando che  $[x_n] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ne risulta che  $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ .

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n] + 1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{-1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$$

Ne risulta che  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$ .

Dunque, data  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

per il teorema del confronto

$$2. \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty, \quad y_n = -x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} &= \left(1 - \frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} = \\ &= \left(\frac{y_n - 1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n} = \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)^{y_n - 1}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{y_n - 1}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} \end{aligned}$$

poiché  $(y_n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Dunque, data  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

3. La proprietà

$$\lim_{x_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

discende direttamente da 1. e 2.

## 5 Continuità

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D'$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $l \in \mathbb{R}$

Diciamo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t. c. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Il valore di  $l$  non è in alcun modo legato ad  $f(x_0)$

Consideriamo  $x_0 \in D$

### Esempi (5.1)

- $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0$$

- $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H(x) = 0 = H(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)$$

- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

**Definizione** Consideriamo  $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \mapsto f(x)$$

con  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$

Diciamo che  $f$  è continua in  $x_0 \in D$  se

a.  $x_0$  punto isolato di  $D$

b.  $x_0 \in D'$  e vale una delle seguenti affermazioni tra di loro equivalenti:

(i)  $\forall V(f(x_0)) \exists U(x_0)$  tale che  $x \in U \cap D$

$$\implies f(x) \in V$$

(ii)  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che  $|x - x_0| < \delta$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(iii)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

(iv) data  $\{x_n\}_{n=0}^\infty$  a valori in  $D$  tale che  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

**Lemma l.ii** Le quattro affermazioni precedenti sono equivalenti

**dim. (l.ii)**

i.  $\iff$  ii. è ovvio

ii.  $\implies$  iii. è ovvio

iii.  $\iff$  iv. per il teorema di relazione

iii.  $\implies$  ii.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  vale

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\text{se } x = x_0 \quad |f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

$$\implies \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ ossia } f \text{ continua in } x_0 \quad \square$$

Diciamo che  $f$  è continua in  $E \subseteq D$  se  $\forall x_0 \in E$   $f$  è continua in  $x_0$

**Esempi (5.2)** Funzioni continue nel loro dominio

- $f(x) = x$
- $f(x) = x^\alpha$
- $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$
- $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$

In generale dati  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , e  $x_0 \in D$  se si ha

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da destra} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da sinistra} \end{cases}$$

9 nov 2021

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ \iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \iff \\ \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0 \end{aligned}$$

**Esempio (5.3)** Verifichiamo che  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\sin x$  è continua in  $x_0$ . Sappiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

Per  $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h) - \sin(x_0) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0 \right) = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x_0 (\cos h - 1) + \sin h \cos x_0 \right) = \end{aligned}$$

Dato che  $\sin h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

$$= \sin x_0 \lim_{h \rightarrow 0} (\cos h - 1) = 0$$

Allora  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$\implies \sin x$  continua su  $\mathbb{R}$ . Allo stesso modo si verifica che  $\cos x$  è continua su  $\mathbb{R}$

**Proprietà** (Algebra delle funzioni continue) Date  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f, g$  continue in  $x_0$ , allora  $\forall a \in \mathbb{R}$  si ha che  $af + g$  è continua in  $x_0$

Inoltre

- $fg$  continua in  $x_0$
- se  $g(x_0) \neq 0$  allora  $\frac{f}{g}$  continua in  $x_0$
- $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$  è continua in  $x_0$

**Teorema VII (Continuità della funzione composta)** Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$ ,  $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è continua in  $x_0$  e  $g$  continua in  $f(x_0)$

$\implies g \circ f$  è continua in  $x_0$

*dim.* (VII)

$\forall V(g(f(x_0))) \exists W(f(x_0))$  tale che  $\forall y \in W \cap f(D)$

$\implies g(y) \in V$

$\exists U(x_0)$  tale che  $\forall x \in U \cap D \implies f(x) \in W$

Allora  $\exists U(x_0)$  tale che  $\forall x \in U \cap D \ g(f(x)) \in V$

$\implies g \circ f$  è continua in  $x_0$

**Proprietà** Date  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  di accumulazione per  $D$ ,  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(D) \subseteq E$ , assumiamo

(i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in E$$

(ii)  $g$  continua in  $l$ ,  $l \in \mathbb{R}$

$\implies \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l)$

Allora, date i. e ii., si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$$

Si dimostra che sono continue nel loro dominio

- i polinomi
- le frazioni algebriche
- le funzioni esponenziali
- le funzioni logaritmiche
- le funzioni goniometriche e le loro inverse

Tutte queste funzioni sono dette "funzioni elementari"

**Attenzione** Data  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  invertibile su  $D$ , e  $f$  continua su  $D$   
 $\nRightarrow f^{-1}$  sia continua su  $f(D)$

**Esempio (5.4)** La funzione è analiticamente definita come

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Notiamo che  $D = [0, 1] \cup (2, 3]$ , e che  $f$  sia continua nel suo dominio.

$$f(D) = [0, 2]$$

Invertendola:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quindi  $f^{-1}$  non è continua su  $f(D)$ , in particolare non è continua in  $x_0 = 1$

**Proprietà** Data  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $I$  intervallo,

se  $f$  è invertibile e continua su  $I$

$\implies f^{-1}$  è continua su  $J = f(I)$

## 5.1 Discontinuità

Consideriamo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  e  $f$  continua in  $D \setminus \{x_0\}$

Diciamo che:

1.  $x_0$  è una *discontinuità eliminabile* se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \wedge l \neq f(x_0)$$



**Esempio (5.5)**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f$  è continua in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R} \neq 0$$

Quindi  $x_0 = 0$  è discontinuità eliminabile

2.  $x_0$  è detto *salto* o *punto di salto* se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = n \in \mathbb{R}$$

$$l \neq n$$

Si definisce *ampiezza del salto* la grandezza

$$s = l - n$$

**Esempio (5.6)** Data

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

si ha che  $x_0 = 0$  è salto.  $s = 1$

**Esempio (5.7)** Data

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

si ha che  $x_0 = 0$  è salto.  $s = 2$

**Notazione** Nel PAGANI SALSA i punti di salto sono detti discontinuità di prima specie

**Notazione** Nella terminologia a lezione, si intendono sia i salti che le discontinuità eliminabili come discontinuità di prima specie

3.  $x_0$  è *discontinuità di seconda specie* se si verifica una delle seguenti condizioni

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = \pm \infty$$

$$\mp \infty$$

$$+ \infty$$

$$- \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \nexists$$

## 5.2 Prolungamento per continuità di una funzione

Sia  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  e  $x_0 \in D'$ .

Assumiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Diciamo *prolungamento per continuità* di  $f$  in  $x_0$  la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$  è continua in  $x_0$

Ovviamente se  $x_0 \in D$  e  $f$  continua in  $x_0$  allora

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

### Esempi (5.8)

- Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$f$  non è continua in 0, con una discontinuità eliminabile

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = x^2$$

Questo è il prolungamento per continuità di  $f$

- Consideriamo

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

Si ha che  $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $f$  è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Allora

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di  $f$  in 0;  $\tilde{f}$  è continua su  $\mathbb{R}$

- Consideriamo  $f(x) = x^x$ . Si ha che  $D = \text{dom} f = (0; +\infty)$ .

Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^l = 1$$

dove

$$l = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \dots = 0$$

La funzione  $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

è l'estensione per continuità di  $f(x)$  in  $x_0 = 0$ .  $\tilde{f}$  è continua su  $[0; +\infty)$

## 6 Successioni

### 6.1 Un limite notevole

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\alpha = 0 \implies$  il limite vale 1

- $\alpha > 0$ ; ricordiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$

Allora  $\forall \varepsilon > 0$

$$-(1-\varepsilon)^n < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$

definitivamente

Ma è facile vedere

$$1 < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$

definitivamente

$$\implies 1 < \sqrt[n]{n^\alpha} < 1+\varepsilon \text{ definitivamente}$$

Per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

- $\alpha < 0$

$$\sqrt[n]{n^\alpha} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{-\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}}$$

Ma  $\sqrt[n]{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , con  $\beta = -\alpha > 0$  Quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}} = 1$$

Ne segue che  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

## 6.2 Sottosuccessioni

Si ha l'obiettivo di indagare più a fondo il comportamento delle successioni irregolari

### Esempi (6.1)

1. Si consideri

$$a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1$$

- con gli indici pari

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, 1, 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

si ha che  $a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

- con gli indici dispari

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1, \quad n \in \mathbb{N}$$

si ha che  $a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$

**Definizione** Sia  $a : \{a_n\}_{n=0}^\infty$  successione a valori reali. Consideriamo una successione di indici

$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto k_n \end{aligned}$$

con  $k$  strettamente crescente, ovvero

$$k_n < k_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Diciamo *sottosuccessione di  $a$*  la successione

$$b_n = a_{k_n}$$

Concretamente per costruire  $\{b_n\}_{n=0}^\infty$  cancelliamo ad  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  una quantità infinita di termini lasciando gli altri invariati.

Ogni successione è sottosuccessione di se stessa, basta prendere  $k_n = n$

**Esercizio** Dati

$$\begin{aligned} a_n &= \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \\ b_n &= n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \end{aligned}$$

estrarre le possibili sottosuccessioni regolari

**Soluzione** DA FARE

15 nov 2021

**Teorema VIII (legame limite successione e sottosuccessione)** Consideriamo  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ ,  $l \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$$

$\iff$  ogni sottosuccessione di  $a_n$  ammette una sottosuccessione che tende a  $l$

**dim. (VIII)**

“  $\implies$  ” La prima implicazione è vera, pertanto

$$\forall V(l) \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : a_n \in V(l)$$

Sia  $n \rightarrow k_n$  crescente, e  $b_n = a_{k_n}$ , allora

$$\exists \bar{\bar{n}} \forall n \geq \bar{\bar{n}} : k_n \geq \bar{\bar{n}}$$

allora  $b_n = a_{k_n} \in V(l)$ .

Dunque

$$\forall V(l) \exists \bar{\bar{n}} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall n > \bar{\bar{n}} : b_n \in V(l)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$$

Abbiamo anche dimostrato che  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$  implica che qualsiasi sua sottosuccessione  $b_{k_n} \rightarrow l$

“  $\Leftarrow$  ” Assumiamo vera la seconda implicazione, e procedendo per assurdo assumiamo vera la negazione della prima implicazione, ossia

$$\forall V(l) \forall n \in \mathbb{N} \exists n' \geq n | a_{n'} \notin V(l)$$

Consideriamo  $n = 1$ ;  $\exists n'_1 > 1$  tale che  $a_{n'_1} \notin V(l)$ ;  $k_1 = n'_1$

Consideriamo  $n = k_1 + 1$ ;  $\exists n'_2 \geq k_1 + 1 > k_1$  tale che  $a_{n'_2} \notin V(l)$ ;  $k_2 = n'_2$

Consideriamo  $n = k_2 + 1$ ;  $\exists n'_3 \geq k_2 + 1 > k_1$  tale che  $a_{n'_3} \notin V(l)$ ;  $k_3 = n'_3$

...

Otteniamo una successione di indici

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto k_n$$

strettamente crescente, e una successione  $b_n = a_{k_n}$  tale che

$$\exists V(l) | \forall n, b_n \notin V(l)$$

Allora  $b_n$  non può ammettere sottosuccessioni che tendono a  $l$

$\implies$  abbiamo dimostrato la negazione della seconda implicazione, partendo dalla negazione della prima, ovvero la prima implicazione implica la seconda  $\square$

### 6.3 Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$

$$\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \quad a_k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, \dots, a_n^k) \in \mathbb{R}^n$$

**Esempio (6.2)** Fissato  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$a_k = kx = (kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n)$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a valori vettoriali è convergente a  $l \in \mathbb{R}^n$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k \geq \bar{k} : \underbrace{|a_k - l|}_{\left(\sum_{j=1}^n (a_j^k - l)^2\right)^{1/2}} < \varepsilon$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a valori vettoriali è divergente a  $l \in \mathbb{R}^n$  se

$$\forall M > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k \geq \bar{k} : |a_k| > M$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  si dice irregolare (oscillante) se non è né convergente né divergente

**Osservazione (6.1)** Per  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  vale il teorema di legame tra limiti di successione e sottosuccessioni

Valgono tutti i teoremi sui limiti che non coinvolgono l'ordinamento del codominio. (In particolare, non si definiscono le successioni monotone, e quindi non vale il teorema sui limiti delle successioni monotone)

**Proposizione p.vii** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , sia  $y \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

Se  $y$  è di accumulazione per  $E$

$\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  a valori in  $E$ , con  $x_k \neq y \forall k \in \mathbb{N}$  e tale che

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = y$$

*dim.* (p.vii)

caso 1.  $y \in \mathbb{R}^n$ :  $y \in E'$ , si ha

$$\forall r > 0 \exists x \in E, x \neq y, x \in B_r(y)$$

Consideriamo  $k = 1, 2, 3, \dots$ ; possiamo determinare  $x_k \in E$ , con  $x_k \neq y$  e  $x_k \in B_{1/k}(y)$

Abbiamo ottenuto una successione  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  a valori in  $E$  tale che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \mid \forall k \geq \bar{k} : x_k \in B_{1/k}(y) \subset B_{1/\bar{k}}(y) \subset B_\varepsilon(y)$

Allora  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$ ,  $x_k \neq y$

caso 2.  $y = \infty$ ,  $y \in E'$

$$\forall M > 0 \exists x \in E : |x| > M$$

Per  $k = 1, 2, 3, \dots$  consideriamo  $x_k \in E$ , con  $|x_k| \geq k$  allora

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k \geq \bar{k} : |x_k| \geq k \geq \bar{k} > M$$

$$\implies x_k \rightarrow \infty$$

□

**Teorema IX (di Bolzano-Weierstrass per le successioni)** Data  $\{a_k\}_{k=0}^\infty$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  (valori vettoriali), si ha che

se  $\{a_k\}_{k=0}^\infty$  è limitata

$$\implies \exists \{a_{h_k}\}_{k=0}^\infty \text{ sottosuccessione tale che } a_{h_k} \text{ è convergente a } l \in \mathbb{R}$$

Ogni successione limitata ammette sempre una sottosuccessione convergente

**dim. (IX)** Indichiamo con  $E = \{a_k\}$  = insieme dei valori della successione.  $E$  è limitato per ipotesi;

caso 1. assumiamo che  $E$  abbia un numero infinito di elementi.

$$\implies \text{ per il teorema di Bolzano-Weierstrass sui sottoinsiemi infiniti di } \mathbb{R}^n \implies E \text{ ammette almeno un punto di accumulazione } \lambda \in \mathbb{R}^n$$

$$\implies \exists \{b_k\}_{k=0}^\infty \text{ a valori in } E, \text{ tale che } b_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda$$

Ma  $E \equiv$  i valori di  $\{a_k\}_{k=0}^\infty$

dunque  $b_k$  è sottosuccessione di  $a_k$ .

Allora esiste una sottosuccessione di  $a_k$  convergente.

caso 2. assumiamo che  $E$  abbia un numero finito di elementi.

$$\implies \text{ esisterà sicuramente un valore di } E \text{ assunto infinite volte dalla successione } \{a_k\}_{k=0}^\infty. \text{ Sia } a_k = l \text{ per infiniti indici.}$$



Consideriamo  $b_k = l, \forall k \in \mathbb{N}$ ,  $b_k$  è successioni a valori in  $E$ , ed essendo costante:  $b_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l$ , dunque  $b_n$  è convergente  $\square$

**Osservazione (6.2)** Il teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni utilizza il teorema di Bolzano-Weierstrass per gli insiemi in  $\mathbb{R}^n$ . Dunque è necessaria la completezza di  $\mathbb{R}$

Se  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^n$  ed è limitata  $\implies \{a_n\}$  convergente

Se  $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$  ed è limitata  $\implies \{a_n\}$  convergente

Se  $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$  ed è limitata  $\implies \{a_n\}$  convergente

Se  $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$  ed è limitata  $\nRightarrow \{a_n\}$  convergente

### 6.3.1 Successioni e chiusura di $E \subset \mathbb{R}^n$

Si ricorda che la chiusura è

$$\overline{E} = E \cup \delta E$$

**Proprietà** Data  $E \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}$

$$y \in \overline{E} \iff \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ a valori in } E \text{ tale che } x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$$

*Dimostrazione.* Procediamo spezzando le due implicazioni

“  $\implies$  ” Ricordiamo che  $\overline{E} = E \cup E'$

$$y \in \overline{E} = E \cup E'$$

– se  $y \in E$ , allora consideriamo  $x_k \equiv y \in E$  si ha  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$

– se  $y \in E'$  e  $y \notin E$ , per la proposizione (p.vii),  $\exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$  a valori in  $E$  tale che  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$

“  $\impliedby$  ” Assumiamo per assurdo che esista  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$  e  $y \notin \overline{E}$ , con  $x_k \in E$ .

$\overline{E}$  è un insieme chiuso, allora  $(\overline{E})^C$  è aperto, ovvero  $\exists r > 0$  tale che  $B_r(y) \subset (\overline{E})^C$

Allora  $B_r(y) \cap \overline{E} = \emptyset$ , allora poiché  $E \subset \overline{E}$

$$\exists r > 0 : B_r(y) \cap E = \emptyset$$

allora qualsiasi successione a valori in  $E$  non può convergere a  $y$ , dunque neghiamo  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$ , si ha contraddizione, dunque

$$y \in \overline{E} \quad \square$$

**Teorema X** Dato  $E \in \mathbb{R}^n$

$E$  è chiuso (A)

$\iff$  se esiste  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  a valori in  $E$  tale che  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} y$  allora  $y \in E$  (B)

Equivalentemente:

$E$  è chiuso (A)

$\iff$  tutte le sue successioni convergenti hanno limite in  $E$  stesso (B)

*dim.* (X)

“ $\implies$ ”  $E$  è chiuso. Ricordiamo che  $E$  è chiuso  $\iff E = \overline{E}$

Allora per proprietà precedente

$$\{x_k\}_{k=0}^\infty \subset E \wedge x_k \rightarrow y \implies y \in \overline{E} = E$$

“ $\impliedby$ ” Ricordiamo che  $E$  chiuso  $\iff E' \subset E$ . Dimostriamo che  $E' \subset E$ .

Consideriamo  $y \in E'$ ,  $\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^\infty \subset E$ , con  $x_k \neq y$ ,  $x_k \rightarrow y$ , allora per (B),  $y \in E$

Dunque  $E' \subset E$ , ed  $E$  chiuso  $\square$

## 6.4 Successioni di Cauchy

**Definizione** Sia  $\{a_k\}_{k=0}^\infty$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ . Questa successione è detta *successione di Cauchy* (o successione fondamentale) se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \mid \forall k, m \geq \bar{k} : |a_k - a_m| < \varepsilon$$

O, equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \in \mathbb{N} \forall k > \bar{k} \forall p \in \mathbb{N} : |a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$$

(Definitivamente  $|a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$ )

Intuitivamente, da un certo punto in poi i valori della successione di Cauchy sono vicini a piacere

Studieremo il legame tra l'essere di Cauchy l'essere convergente.

**Lemma l.iii** Data  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ ,

16 nov 2021

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  è di Cauchy  $\implies \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  è limitata

*dim.* (l.iii) Consideriamo  $\varepsilon = 1$ :

$$\exists \kappa > 0 : \forall k > \kappa$$

si ha  $|a_k - a_{\kappa}| < 1, \forall k \geq \kappa$

$$|a_k - a_{\kappa}| \geq ||a_k| - |a_{\kappa}||$$

Allora per  $k > \kappa$

$$||a_k| - |a_{\kappa}|| < 1$$

$$|a_{\kappa}| - 1 < |a_k| < |a_{\kappa}| + 1$$

Consideriamo

$$m = \min\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\kappa}|, |a_{\kappa}| - 1\}$$

$$M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\kappa}|, |a_{\kappa}| + 1\}$$

Dunque  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$m < |a_k| < M$$

$\implies \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  è limitata

□

**Teorema XI (Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni)**

Data  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , si ha

$a_k$  convergente  $\iff a_k$  è di Cauchy

*dim.* (XI)

“  $\implies$  ”  $\{a_k\}$  è convergente, allora

$$\exists l \in \mathbb{R}^n$$

tale che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} : \forall k > \bar{k} : |a_k - l| < \varepsilon$$

possiamo scrivere

$$|a_k - a_m| \leq |a_k - l| + |a_m - l|$$

$$\exists \bar{k} \forall k, m \geq \bar{k} :$$

$$|a_k - l| < \varepsilon/2$$

$$|a_m - l| < \varepsilon/2$$

ossia

$$|a_k - a_m| \leq |a_k - l| + |a_m - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\implies \{a_n\} \text{ è di Cauchy}$$

$$\text{“} \Longleftarrow \text{” } \{a_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ è di Cauchy}$$

$$\implies \{a_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ è limitata}$$

*Lemma*

$$\implies \text{ ammette una sottosuccessione convergente, ossia esiste } h_k \in \mathbb{N},$$

*B-W*

$$\{a_{h_k}\} \text{ è convergente, ossia } \exists l \in \mathbb{R}^n:$$

$$\forall \varepsilon \exists \bar{k} : \forall k > \bar{k} : |a_{h_k} - l| < \varepsilon/2$$

Osserviamo

$$|a_k - l| \leq |a_k - a_{h_k}| + |a_{h_k} - l|$$

Poiché la successione è di Cauchy

$$\exists \bar{k} : \forall m, h > \bar{k} : |a_m - a_h| < \varepsilon$$

$$\exists \bar{\bar{k}} : \forall k \geq \bar{\bar{k}} : h_k > \bar{\bar{k}}$$

Allora preso

$$\varkappa = \max\{\bar{k}, \bar{\bar{k}}, \bar{\bar{\bar{k}}}\}$$

Otteniamo  $\forall k \geq \varkappa$

$$|a_k - l| \leq \overbrace{|a_k - a_{h_k}|}^{< \varepsilon/2} + \overbrace{|a_{h_k} - l|}^{< \varepsilon/2} < \varepsilon$$

**Osservazione (6.3)** Nella dimostrazione si è usato il Teorema di Bolzano-Weierstrass, ossia la completezza di  $\mathbb{R}$ , dunque il criterio di convergenza di Cauchy non vale per successioni a valori in  $\mathbb{Q}$  o in  $\mathbb{Q}^n$ .

## 7 Teoremi per le funzioni continue

**Notazione** Un punto  $x_0$  tale che  $f(x_0) = 0$  è detto *zero* di  $f$

**Teorema XII (Teorema di esistenza degli zeri)** Consideriamo  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , e assumiamo  $f$  continua su  $[a, b]$ , e assumiamo che  $f(a)f(b) < 0$   
 $\implies \exists c \in (a, b) \mid f(c) = 0$

**dim. (XII)** Assumiamo  $f(a) > 0$  e  $f(b) < 0$ .

Poniamo  $a_0 = a$  e  $b_0 = b$ ; consideriamo il punto medio  $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ .

Abbiamo tre possibilità sul segno di  $f(c_0)$ :

1.  $f(c_0) > 0$ : poniamo  $a_1 = c_0$  e  $b_1 = b_0$ ;
2.  $f(c_0) < 0$ : poniamo  $a_1 = a_0$  e  $b_1 = c_0$ ;
3.  $f(c_0) = 0$ : la dimostrazione è terminata ponendo  $c = c_0$ :  $f(c) = 0$ .

Consideriamo  $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

Abbiamo tre possibilità sul segno di  $f(c_1)$ :

1.  $f(c_1) > 0$ : poniamo  $a_2 = c_1$  e  $b_2 = b_1$ ;
2.  $f(c_1) < 0$ : poniamo  $a_2 = a_1$  e  $b_2 = c_1$ ;
3.  $f(c_1) = 0$ : la dimostrazione è terminata ponendo  $c = c_1$ :  $f(c) = 0$ .

Procedendo in questo modo, vi sono due possibilità

- $\exists n$  tale che  $f(c_n) = 0$ :  $c = c_n$  e  $f(c) = 0$ ;
- si ottengono due successioni a valori reali in  $[a, b]$ , che chiamiamo  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{b_n\}_{n=0}^\infty$  tali che:
  - $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  crescente e  $\forall n, a_n \leq b_0 = b$ ;
  - $\{b_n\}_{n=0}^\infty$  decrescente e  $\forall n, b_n \geq a_0 = a$ ;
  - $\forall n, a_n \leq b_n$

Otteniamo inoltre una sequenza di intervalli  $[a_n, b_n]$  tali che

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \cdots$$

Inoltre

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \forall n$$

allora

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Si verifica che  $a_n \rightarrow l$ , in quanto  $a_n$  crescente e limitata superiormente, e  $b_n \rightarrow m$ , in quanto  $b_n$  è decrescente e limitata inferiormente: allora

$$\forall n : a_n \leq l, b_n \geq m$$

allora

$$\forall n : 0 \leq m - l \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\implies m - l = 0$$

$$\implies m = l.$$

Poniamo  $c = m = l$ , e consideriamo  $c$  candidato zero della funzione. Verifichiamo che vale  $f(c) = 0$ .

Infatti,

$$\forall n \quad f(a_n) > 0 \quad f(b_n) < 0$$

inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(c)$$

perché  $f$  continua e vale il teorema di relazione, e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(c).$$

Inoltre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) \geq 0$$

per il teorema di permanenza del segno, e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) \leq 0.$$

Risulta quindi che  $\begin{cases} f(c) \geq 0 \\ f(c) \leq 0 \end{cases}$

$$\implies f(c) = 0$$

□

**Osservazione (7.1)** Sotto l'ipotesi  $f$  continua su un intervallo  $[a, b]$ ,  $c$ , lo zero  $c$  non è unico.

**Osservazione (7.2)** Il teorema vale solo su intervalli

**Esempio (7.1)** Preso

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ -1 & x \in [c, d] \end{cases}$$

con  $b \not\leq c$ , vale che  $f(a) > 0$ ,  $f(d) < 0$ ,  $f$  è continua su  $[a, b] \cup [c, d] = D$ ,  
 $\nexists c \in D$  tale che  $f(c) = 0$

**Osservazione (7.3)** Data  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , l'ipotesi di  $f$  continua non è eliminabile

**Teorema XIII (dei valori intermedi)** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$ , continua su  $(a, b)$ ; indichiamo

$$i = \inf_{x \in (a, b)} f(x) \quad s = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

con  $i, s \in \mathbb{R}^*$

$$\implies \forall \lambda \in (i, s), \exists c \in (a, b) \text{ tale che } f(c) = \lambda$$

**dim. (XIII)** Prendiamo  $\lambda \in (i, s)$ .

$$\exists x_1, x_2 \in (a, b) \text{ t.c. } i < \underbrace{f(x_1)}_m < \lambda < \underbrace{f(x_2)}_M < s.$$

Consideriamo  $g(x) = f(x) - \lambda$ :  $g$  continua su  $(a, b)$ , e  $g(x_1) < 0$  e  $g(x_2) > 0$ ;  
inoltre  $x_1, x_2 \in (a, b)$ , quindi  $g$  continua su  $[x_1, x_2]$  oppure  $[x_2, x_1]$ .

Allora, per il teorema di esistenza degli zeri, si ha che

$$\exists c \text{ tra } x_1, x_2 \text{ t.c. } g(c) = 0$$

ossia

$$f(c) - \lambda = 0 \implies f(c) = \lambda$$

**Corollario** Sia  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$ ; si indica con

$$i = \inf_{x \in (a, b)} f(x) \quad s = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$$

con  $i, s \in \mathbb{R}^*$ , si ha che

$$f((a, b)) = (i, s)$$

Possiamo dire che  $f$  continua mappa intervalli in intervalli, ovvero

$$f(I) = J$$

con  $J = (i, s)$ , e

$$i = \inf_{x \in I} f(x) \quad s = \sup_{x \in I} f(x)$$

22 nov 2021

### Esempio (7.2)

$$\begin{aligned} f : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Entrambe le funzioni sono continue in  $(0, 1)$ :  $\forall x_0 \in (0, 1)$ ,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ t. c. } |x - x_0| < \delta \quad \begin{cases} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \end{cases}$$

$f$ . fissiamo  $x_0 \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| |x + x_0| \underset{x \in (0, 1)}{=} \\ &\leq \underbrace{(|x| + |x_0|)}_{\leq 2} \cdot |x - x_0| \leq 2|x - x_0| \end{aligned}$$

Preso  $\delta < \varepsilon/2$  si ha che

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ne risulta che  $\delta$  non dipende da  $x_0 \in (0, 1)$

$g$ . fissiamo  $x_0 \in (0, 1)$ , fissiamo  $\varepsilon > 0$

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \iff |1/x - 1/x_0| < \varepsilon$$

$$\iff \underset{x \in (0, 1)}{\frac{|x - x_0|}{x x_0}} < \varepsilon$$

Consideriamo  $x \in (x_0 - x_0/2, x_0 + x_0/2) = (x_0/2, 3x_0/2)$ ,  $x \in B_{\frac{x_0}{2}}(x_0)$   
ha  $\delta = x_0/2$ , otteniamo



Riassumiamo:

$g$ .  $\forall x_0 \in (0, 1), \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$  tale che

$$\forall x \quad |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

$f$ .  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$  tale che

$$\begin{aligned} \forall x_0 \in (0, x_1) \quad |x - x_0| < \delta &\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ \forall x \in (0, 1) \end{aligned}$$

$f$  è *uniformemente continua* in  $(0, 1)$

**Definizione** Data

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con  $D \subseteq \mathbb{R}$ , diciamo che  $f$  è *uniformemente continua su  $D$*  se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t. c. } \forall x_0, x \in D \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Esercizio** Verificare che su  $[0, +\infty)$   $f(x) = e^{-x}$  è uniformemente continua e  $g(x) = e^x$  non è uniformemente continua.

**Soluzione** Verificare per esercizio

**Osservazione (7.4)** Sia

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con  $E \subseteq \mathbb{R}$ .

Indichiamo con *diametro* di  $E$

$$\text{diam} E = \sup_{x, y \in E} \{|x - y|\}$$

Indichiamo con *oscillazione* di  $f$  in  $E$

$$\omega_E(f) = \sup_{x, y \in E} \{|f(x) - f(y)|\}$$

Sia ha che  $f$  è uniformemente continua  $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t. c. } \text{diam} E < \delta \implies \omega_E(f) < \varepsilon$$

## 8 Successioni e topologia in $\mathbb{R}^n$

Breve riassunto:

1.  $E$  limitato

$\implies$  ogni successione a valori in  $E$  ammette sottosuccessioni convergenti

2.  $E$  chiuso

$\iff$  il limite di una successione a valori in  $E$ , se esiste, appartiene ad  $E$

**Definizione** Dato  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  diciamo  $K$  *sequenzialmente compatto* (o compatto per successioni)  $\forall \{x_k\}_{k=0}^\infty$  a valori in  $K$  ammette una sottosuccessione  $\{x_{h_k}\}_{k=0}^\infty$  convergente a  $y \in K$

$K \subseteq \mathbb{R}$  è compatto se ogni sua successione ammette una sottosuccessione convergente in  $K$  stesso

### Esempi (8.1)

1.  $E = \{1 + 1/x, x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$ ,  $E$  limitato, non chiuso.

Consideriamo  $x_k = 1 + 1/k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 \notin E$

$\implies$  ogni sua sottosuccessione  $x_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1 \notin E$

$\implies E$  non è compatto.

2.  $A = \{\cos k\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{0, 1, -1\}$

3.  $I = [-1, 1]$ , chiuso e limitato.  $I$  è limitato

$\implies \forall x_k$  ammette  $x_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$ . Inoltre  $I$  è chiuso

$\implies l \in I$

$\implies I$  è compatto.

4.  $J = [0, +\infty)$ , chiuso non limitato. Sia  $x_k = k$  a valori in  $J$ .

$x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$

$\implies$  ogni sua sottosuccessione  $x_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty \notin J$

$\implies J$  non è compatto

**Teorema XIV (caratt. degli insiemi compatti)** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

$K$  è sequenzialmente compatto

$\Longleftrightarrow K$  è chiuso e limitato.

*dim. (XIV)*

“  $\Leftarrow$  ” Assumiamo  $K$  limitato

$\implies \forall \{x_k\}_{k=0}^\infty$  a valori in  $K$  ammette  $\{x_{h_k}\}_{k=0}^\infty, x_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}^n$

Inoltre, poiché  $K$  è chiuso si ha  $l \in K$

$\implies K$  è compatto sequenzialmente.

“  $\implies$  ”  $K$  compatto.

1. Verifichiamo che  $K$  è limitato; per assurdo assumiamo  $K$  non limitato

$\implies \forall k \in \mathbb{N}, \exists x_k \in K$  tale che  $|x_k| > k$

Sia ora  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  a valori in  $K$  data dagli  $x_k$  visti sopra.

$|x_k| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$  ( $x_k$  è divergente a  $\infty$ )

$\implies$  ogni sua sottosuccessione  $\{x_{h_k}\}_{k=0}^\infty$  diverge a  $\infty$

$\implies K$  non è compatto.

Abbiamo dimostrato che  $K$  compatto

$\implies K$  è limitato.

2. Verifichiamo che  $K$  è chiuso; usiamo la proprietà

$$K \text{ è chiuso } \Longleftrightarrow \delta K \subseteq K$$

Sia  $z \in \delta K$ . Per definizione di frontiera  $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \exists x_k \in K$  tale che  $x_k \in B_{1/k}(z)$

Sia  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  la successione così ottenuta.  $\implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \mid \forall k \geq \bar{k} \quad x_k \in B_{1/k}(z) \subseteq B_{1/\bar{k}}(z) \subseteq B_\varepsilon(z)$$

dunque  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} z \in \delta K$

Osserviamo che poiché  $K$  è compatto esiste una sottosuccessione  $\{x_{h_k}\}_{k=0}^\infty$  di  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  che converge a  $w \in K$ , ossia

$$\{x_{h_k}\}_{k=0}^\infty \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} w \in K.$$

Poiché  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} z$  si ha che ogni sua sottosuccessione converge a  $z$ .

Allora  $x_{h_k} \rightarrow w$ ,  $x_{h_k} \rightarrow z$

$\implies$  per il teorema di unicità del limite,  $w = z$

$\implies z \in K$

$\implies \delta K \subseteq K$

$\implies K$  è chiuso. □

In  $\mathbb{R}^n$  sono sequenzialmente compatti tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati.

### Esempi (8.2)

- $[a, b]$  compatto;
- $[a, b), (a, b]$  non compatti (non chiusi);
- $[a, +\infty), (-\infty, a]$  non compatti (non limitati);
- $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |x - x_0| \leq r\}$  compatta;
- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |x - x_0| < r\}$  non compatta (non chiusa);
- $B_r^c = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |x - x_0| \geq r\}$  non compatta (non limitata).

## 8.1 Continuità e compattezza in $\mathbb{R}^n$

**Continuità** Sia

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con  $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

Diciamo che  $f$  è continua su  $D$  se

$$\forall x_0 \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \forall x \in D \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Osservazione (8.1)**  $f$  è continua su  $D$  se tutte le funzioni componenti  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  sono continue su  $D$ .

**Teorema XV** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto sequenzialmente. Consideriamo  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  continua su tutto  $K$

$\implies f(K)$  è un insieme sequenzialmente compatto in  $\mathbb{R}^m$

L'immagine continua di un compatto è compatta.

**dim. (XV)** Consideriamo  $\{y_k\}_{k=0}^\infty$  successione a valori in  $f(K)$ .

23 nov 2021

$$y_k \in f(K) \iff \exists x_k \in K \text{ t.c. } y_k = f(x_k)$$

Consideriamo ora la successione  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  così ottenuta, a valori in  $K$ :  $K$  è compatto in  $\mathbb{R}^n$

$\implies \exists l \in K, \exists \{x_{h_k}\}_{k=0}^\infty$  sottosuccessione di  $\{x_k\}_{k=0}^\infty$  tale che

$$x_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} l \in K$$

Consideriamo  $y_{h_k} = f(x_{h_k})$ :  $\{y_{h_k}\}_{k=0}^\infty$  è sottosuccessione di  $\{y_k\}_{k=0}^\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} y_{h_k} &= \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{h_k}) = \\ &= f(\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{h_k}) = f(l) \in f(K) \end{aligned}$$

Allora considerata  $\{y_k\}_{k=0}^\infty$  successione a valori in  $f(K)$

$$\exists y_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(l) \in f(K)$$

$\implies f(K)$  è compatto.

**Definizione** Dato  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , e

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

diciamo che

---

<sup>3</sup> per la continuità di  $f$  su  $K$

- $x_M$  è punto di massimo assoluto di  $f$  su  $D$  se

$$\forall x \in D \quad f(x) \leq f(x_M).$$

Si indica inoltre  $M = f(x_M)$  come valore massimo di  $f$  su  $D$ .

- $x_m$  è punto di minimo assoluto di  $f$  su  $D$  se

$$\forall x \in D \quad f(x) \geq f(x_m).$$

Si indica inoltre  $m = f(x_m)$  come valore minimo di  $f$  su  $D$

**Teorema XVI (di Weierstrass)** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K$  compatto sequenzialmente. Data  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continua su  $K$

$\implies \exists x_M$  punto di massimo assoluto di  $f$  su  $K$ , e  $\exists x_m$  punto di minimo assoluto di  $f$  su  $K$ .

**dim. (XVI)**  $K$  compatto in  $\mathbb{R}^n$ ,  $H = f(K)$  compatto in  $\mathbb{R}$ . Dunque  $H \subseteq \mathbb{R}$  chiuso e limitato in  $\mathbb{R}$ :  $H$  ammette

$$s = \sup H \in \mathbb{R}$$

$$i = \inf H \in \mathbb{R}$$

Concentriamoci su  $s$ ; abbiamo verificato che se  $s = \sup H$  allora ci sono due possibilità

- $s$  isolato  $\implies s \in H$
- $s$  di accumulazione per  $H$ ,

$$\stackrel{4}{\implies} s \in H$$

Concludiamo allora che  $s \in H$ , ma allora per definizione

$$s = M = \max H \quad \wedge \quad \exists x_M \text{ t.c. } f(x_M) = M.$$

Dunque esiste  $x_M$  punto di massimo. Lo stesso si ripete con  $i = \inf H$ .

$$i = \min H = m, m \in H$$

$$\implies \exists x_m \text{ t.c. } f(x_m) = m$$

$$\implies x_m \text{ è un punto di minimo}$$

□

---

<sup>4</sup> perché  $H$  è chiuso

**Osservazione (8.2)** Dato  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

$f$  continua su  $D$ , allora dato  $[a, b] \subseteq D$

$$\begin{aligned} \exists x_m \in [a, b] &\text{ punto di minimo di } f \text{ su } [a, b] \\ \exists x_M \in [a, b] &\text{ punto di massimo di } f \text{ su } [a, b] \end{aligned}$$

**Teorema XVII (dei valori intermedi sui compatti)** Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua

$\implies f$  assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.

Dati

$$M = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

vale che

$$\forall \lambda \in [m, M] \quad \exists c \in [a, b] \text{ t.c. } f(c) = \lambda$$

**dim. (XVII)**  $f$  continua su  $[a, b]$

$\implies f$  ammette valor massimo  $M$  e valor minimo  $m$ . Poniamo

$$x_M \mid f(x_M) = M \quad x_m \mid f(x_m) = m$$

Sia  $\lambda \in [m, M]$ , e consideriamo  $g(x) = f(x) - \lambda$ .  $g$  è continua su  $[a, b]$ , e in particolar modo  $g$  continua su  $[x_m, x_M]$  o su  $[x_M, x_m]$

$$\exists c \in \begin{matrix} [x_m, x_M] \\ [x_M, x_m] \end{matrix} \quad \text{t.c. } g(c) = 0 \implies f(x) = \lambda$$

## 8.2 Legame tra uniforme continuità e compattezza

**Teorema XVIII (di Heine-Cantor)** Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compatto, sia  $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $f$  continua su  $K$

$\implies f$  è uniformemente continua su  $K$ .

Le funzioni continue sui compatti sono ivi uniformemente continue.

**dim. (XVIII)** Per assurdo assumiamo che  $f$  sia continua su  $K$  e che  $f$  non sia assolutamente continua su  $K$ .

$$\exists \bar{\varepsilon} > 0 \text{ t.c. } \forall \delta > 0 \exists x_\delta, z_\delta \in K \quad |x_\delta - z_\delta| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(z_\delta)| \geq \bar{\varepsilon}.$$

Diamo a  $\delta$  i valori  $1, 1/2, \dots, 1/k$  allora

$$\begin{aligned} \exists \bar{\varepsilon} > 0 \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \exists x_k, z_k \in K \\ \text{t.c. } |x_k - z_k| < 1/k \wedge |f(x_k) - f(z_k)| \geq \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (\text{A})$$

Consideriamo le successioni a valori in  $K$  ottenute dagli  $x_k$  e  $z_k$  sopra considerati, a valori in  $K$

$$\{x_k\}_{k=1}^\infty \quad \{z_k\}_{k=1}^\infty.$$

$K$  compatto in  $\mathbb{R}^n$ , allora esiste una sottosuccessione di  $\{x_k\}_{k=1}^\infty$  tale che  $x_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x \in K$ .

Consideriamo  $\{z_{h_k}\}$  la sottosuccessione di  $\{z_k\}$  ottenuta con gli stessi indici  $h_k$ .

Osserviamo che

$$|z_{h_k} - x| \leq \underbrace{|z_{h_k} - x_{h_k}|}_{\text{def. } \leq 1/k} + \underbrace{|x_{h_k} - x|}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0}$$

Allora  $z_{h_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$

Stimiamo

$$|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| \leq |f(x_{h_k}) - f(x)| + |f(x) - f(z_{h_k})|.$$

Poiché  $f$  continua su  $K$

$$\begin{aligned} f(x_{h_k}) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x) \\ f(z_{h_k}) &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(x) \end{aligned}$$

allora

$$|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$\implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{k} \mid \forall k > \bar{k} \quad |f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| < \varepsilon$$



Questo nega la condizione (A), dunque  $f$  non può essere non uniformemente continua

Concludiamo che, dato  $K$  compatto

$$f \text{ continua su } K \quad \wedge \quad f \text{ non uniformemente continua su } K$$

$\implies f$  uniformemente continua su  $K$ : contraddizione

Dunque  $f$  continua su  $K$

$\implies f$  uniformemente continua su  $K$ .  $\square$

**Proprietà**  $K$  compatto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  continua e iniettiva (e quindi invertibile)

$\implies f^{-1} : f(K) \rightarrow K$  è continua su  $f(K)$ .

**Definizione** Data  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  e

$$\begin{aligned} f : D &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  indichiamo con

$$f^{-1}(E) = \{x \in D; f(x) \in E\}$$

chiamato *controimmagine* di  $E$

**Teorema XIX (caratt. delle funzioni continue)** Data  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$f$  è continua su  $\mathbb{R}^n$

$\iff \forall E \subseteq \mathbb{R}^m, E$  aperto, si ha che  $f^{-1}(E)$  è aperto in  $\mathbb{R}^n$ .

## 9 Derivata

**Esempio (9.1)** Data

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Si ha che  $x_0, x_1 \in I$ ,  $P_0 = (x_0, f(x_0))$ ,  $P_1 = (x_1, f(x_1))$ .

Indichiamo con  $s$  la secante al grafico tra  $P_0$  e  $P_1$ , di equazione

$$y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m, \text{ pendenza}^5} (x - x_0)$$

Cosa accade quando  $x_1 \rightarrow x_0$ ? Si ha che  $P_1 \rightarrow P_0$  e che  $s \rightarrow r$ , che intuitivamente è la retta tangente al grafico in  $P_0$ .

**Esempio (9.2)** Consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq x_0 \\ 2 & x > x_0 \end{cases}$$

In questo caso quando  $x \rightarrow x_0$ ,  $P_1 \rightarrow P_2 \neq P_1$ , e  $s \rightarrow r$  retta verticale.

Intuitivamente  $r$  non è la tangente in  $P_0$ .

**Esempio (9.3)** Sia  $h(x)$  una funzione, dal grafico:

Quando  $x_1 \rightarrow x_0$ ,  $P_1 \rightarrow P_2$ , ma  $s \rightarrow r$  che non è “tangente”.

Si ha l’obiettivo di dare una definizione che

- distingua il [primo esempio](#) dagli altri
- dare una definizione rigorosa di tangente in  $P_0$

**Definizione** Data  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , fissiamo  $x_0 \in I$ , diciamo rapporto incrementale di  $f$  centrato in  $x_0$ , la quantità

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si osservi che è il coefficiente angolare della secante tra  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  e  $P = (x, f(x))$

---

<sup>5</sup> o coefficiente angolare

**Definizione** Diciamo che  $f$  è *derivabile* in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$$

Indichiamo

$$L = f'(x_0)$$

detta *derivata* di  $f$  in  $x_0$ .

Diciamo *tangente* si  $f$  in  $x_0$  la retta  $r$  di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

da cui  $f'(x_0)$  è il coefficiente angolare (pendenza) della tangente al grafico in  $x_0$ .

**Esempio (9.4)**  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,

29 nov 2021

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0 \end{aligned}$$

$f(x) = x^2$  è derivabile  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ . La retta tangente è

$$y = 2x_0 x - x_0^2$$

**Esempio (9.5)**

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{dom } H = \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$$

$f$  continua e derivabile ovunque,  $H$  non è continua e non è derivabile in  $x_0 = 0$

**Teorema XX** Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ .  $f$  derivabile in  $x_0$

$\implies f$  continua in  $x_0$

**dim. (XX)**  $f$  continua in  $x_0$

$$\iff \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \iff \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$$

Dimostriamo che vale se  $f$  è derivabile in  $x_0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h = 0$$

$\rightarrow f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Quindi  $f$  derivabile in  $x_0$  implica  $f$  continua, dunque  $f$  non continua in  $x_0$  implica  $f$  non derivabile in  $x_0$ .

Si ha che  $f$  continua in  $x_0$  *non* implica  $f$  derivabile in  $x_0$

**Esempio (9.6)**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$f$  continua in  $x_0 = 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow h^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow h^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = -1$$

ovvero la funzione non è derivabile per  $x_0 = 0$

**Osservazione (9.1)**  $f(x) = |x|$  non è derivabile in  $x_0 = 0$  e

$$\lim_{x \rightarrow h^+} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = +1$$

$$\lim_{x \rightarrow h^-} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = -1$$

La funzione  $|x|$  ammette in  $x_0 = 0$  limite destro e sinistro del rapporto incrementale.

**Definizione** Consideriamo  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f$  è derivabile da destra (sinistra) in  $x_0$  se

$$\lim_{x \rightarrow h^\pm} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} m \in \mathbb{R} & h \rightarrow 0^+ \\ l \in \mathbb{R} & h \rightarrow 0^- \end{cases}$$

Diciamo  $x_0$  *punto angoloso*.

Si dirà  $m = f'_+(x_0)$  *derivata destra* in  $x_0$  e  $l = f'_-(x_0)$  *derivata sinistra* in  $x_0$

**Osservazione (9.2)**  $f$  è derivabile in  $x_0 \in \text{dom } f$

$\iff f$  è derivabile da destra e da sinistra in  $x_0$  e  $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

**Proprietà**  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $x_0$  punto angoloso per  $f$

$\implies f$  continua in  $x_0$

*Dimostrazione.*

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^\pm} h \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\substack{\xrightarrow{h \rightarrow 0^+} f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \\ \xrightarrow{h \rightarrow 0^-} f'_-(x_0) \in \mathbb{R}}} = 0 \quad \square$$

**Esempio (9.7)** Consideriamo

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$  è un punto di salto.  $H$  non è derivabile in  $x_0 = 0$ , è possibile che ammetta derivata destra e sinistra?

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{H(0 + h) - H(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

$H$  ammette derivata destra in  $x_0 = 0$ ,  $H'_+(0) = 0$ .

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{H(0 + h) - H(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0 - 1}{h} = +\infty$$

$H$  non ammette derivata sinistra in  $x_0 = 0$ .

**Osservazione (9.3)** Se  $x_0$  è un punto di discontinuità di prima specie (eliminabile o salto)  $f$  non può ammettere in  $x_0$  sia derivata destra che derivata sinistra.

**Proprietà (Algebra delle derivate)** Siano  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , consideriamo  $x \in I$ ,  $f, g$  derivabili in  $x$ . Allora si ha

(i)  $f + g$  è derivabile in  $x$ ,

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

(ii)  $fg$  è derivabile in  $x$ ,

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(regola di Leibniz)

(iii)  $k \in \mathbb{R}$ ,  $kf$  derivabile in  $x$ ,

$$(kf)'(x) = k f'(x)$$

(iv) se  $g(x) \neq 0$  allora  $f/g$  è derivabile in  $x$  e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

*Dimostrazione.*

□

**Osservazione (9.4)** Le proprietà (i) e (iii) garantiscono che l'insieme delle funzioni derivabili su  $x$  è uno spazio vettoriale su campo reale. Vale

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

**Definizione** Data  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  diciamo  $f$  derivabile su  $I$  se  $\forall x \in I$ ,  $f$  derivabile in  $x$

Possiamo scrivere il rapporto incrementale  $\forall x \in I$

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = L \in \mathbb{R}$$

diciamo  $f$  derivabile 2 volte in  $x$ , e

$$f''(x) = L$$

detta *derivata seconda* di  $f$  in  $x$ .

Assunta  $f''$  derivabile su tutto  $I$  possiamo allo stesso modo definire

$$f'''(x)$$

Se  $f$  derivabile  $n - 1$  volte su  $I$ , definiamo la derivata  $n$ -esima di  $f$  in  $x \in I$

$$f^{(n)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

se tale limite esiste.

**Notazione** Si indica

$$\begin{aligned} f'(x) &= \dot{f} = D(f(x)) = \frac{df}{dx} \\ f''(x) &= \ddot{f} = D^2(f(x)) = \frac{d^2f}{dx^2} \\ f'''(x) &= D^3(f(x)) = \frac{d^3f}{dx^3} \\ f^{(n)}(x) &= D^n(f(x)) = \frac{d^n f}{dx^n} \end{aligned}$$

## 9.1 Derivate di funzioni elementari

- Sia  $f(x) = x^\alpha$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

30 nov 2021

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^\alpha(1+h/x)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{(h/x) \cdot x} = \\ &= x^{\alpha-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Abbiamo effettuato una sostituzione:  $t = h/x$ , mentre l'ultimo è un limite notevole

- Sia  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} &= e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \\ &= e^x \end{aligned}$$

Vale quindi  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$D(e^x) = e^x \quad (9.1)$$

Di verifica inoltre che

$$a > 0 \quad D(a^x) = a^x \ln a \quad (9.2)$$

- Sia  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln[x(1+h/x)] - \ln x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{\ln x} + \ln(1+h/x) - \cancel{\ln x}}{x(h/x)} = \\ &= \frac{1}{x} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Sostituendo  $t = h/x$ , e ricordando che  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

- Sia  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h+x) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) = \\ &= \cos x \end{aligned} \quad (9.3)$$

## 9.2 Prima formula dell'incremento finito

**Osservazione (9.5)** Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in I$ , assumiamo  $f$  derivabile in  $x$ .

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= f'(x) \\ \Longleftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) &= 0 \end{aligned}$$



Poniamo

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \quad (9.4)$$

Vale  $\text{dom } \varepsilon(h) = \text{dom } f \setminus \{0\}$ . Notiamo che  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ , quindi  $\varepsilon(h)$  è estendibile per continuità in  $h = 0$ .

Possiamo scrivere che  $f$  è derivabile in  $x$

$\Longleftrightarrow \exists \varepsilon(h)$  continua in  $I(0)$ , con

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

tale che

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\varepsilon(h) \quad (9.5)$$

Questa è la prima formula dell'*incremento finito*.

Equivalentemente, poiché  $\lim_{h \rightarrow 0} (h\varepsilon(h))/h = 0$  si ha

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h) \quad (9.6)$$

**Teorema XXI (di derivazione delle funzioni composte)** Consideriamo  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}$ , e consideriamo  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f(D) \subseteq E$ . Assumiamo  $f$  derivabile in  $x \in D$ , e  $g$  derivabile in  $y = f(x) \in E$ .

Allora  $w = g \circ f$  è derivabile in  $x$  e vale

$$w'(x) = g'(f(x)) f'(x) \quad (9.7)$$

La (9.7) prende il nome di *chain rule*.

**dim. (XXI)**  $f$  derivabile in  $x$ , poniamo  $y = f(x)$ , e assumiamo  $g$  derivabile in  $y$ .

$$\exists \varepsilon(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \mid g(y+k) - g(y) = g'(y)k + k\varepsilon(k) \quad (9.8)$$

Poniamo  $k = f(x+h) - f(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , si ha allora

$$k = f(x+h) - y$$

e, poiché  $f$  continua in  $x$

$$y + k = f(x+h)$$

Sostituiamo in (9.8)

$$g(f(x+h)) - g(f(x)) = g'(y)k + k\varepsilon_k$$

dunque, sostituendo e dividendo per  $h$

$$\begin{aligned} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} &= \\ &= g'(f(x)) \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x)} + \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) \in \mathbb{R}} \underbrace{\varepsilon(k)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0} \end{aligned}$$

allora

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = g'(f(x)) f'(x)$$

**Esempio (9.8)** Consideriamo  $f(x) = \ln(\sin x)$ , con  $x \in (0, \pi)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

In generale, se  $f(x) = \ln g(x)$ ,  $x \in \text{dom } f$ ,  $g(x) > 0$ , vale

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)} g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

**Esercizio** Calcolare

$$D(\ln |x|)$$

**Soluzione** Da svolgere

**Teorema XXII (di derivazione della funzione inversa)** Sia

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$I$  intervallo,  $f$  invertibile su  $I$  (strettamente monotona su  $I$ ), indichiamo  $J = f(I)$ , e assumiamo  $f$  derivabile in  $x_0 \in I$ , e  $f'(x_0) \neq 0$ , allora posto  $y_0 = f(x_0)$ , si ha che la funzione inversa

$$f^{-1} : J \rightarrow I$$

è derivabile in  $y_0$  e vale

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (9.9)$$

**Esempio (9.9)** Sia  $f(x) = x^3$ ,  $f'(0) = 0$

$$f^{-1}(0) = 0$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

$f^{-1}(y)$  è derivabile per qualsiasi  $y \neq 0$ . Osserviamo che in  $y = 0$  la tangente a  $y = \sqrt[3]{x}$  è verticale, dunque  $\sqrt[3]{x}$  non è derivabile in 0.

**Applicazione** Sia  $f(x) = \tan x$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , e  $f^{-1} = \arctan x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= 1 + \tan^2 x > 0 \end{aligned}$$

Poniamo  $y = \tan x$ ,  $f^{-1}$  derivabile in  $y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Dunque

$$D(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (9.10)$$

**Applicazione** Sia  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ . Consideriamo  $f^{-1} = \arcsin x$

$$f'(x) = D(\sin x) = \cos x \neq 0 \text{ per } x \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

Posto  $y = f(x) = \sin x$ ,  $\arcsin y$  è derivabile per  $y \neq \pm 1 = f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ \cos x &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 x} \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \cos x &= +\sqrt{1 - \sin^2 x} \end{aligned}$$

Quindi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Allora

$$\forall x \in (-1, 1) \quad D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (9.11)$$

Inoltre

$$\forall x \in (-1, 1) \quad D(\arccos x) = \frac{1}{-\sqrt{1 - x^2}} \quad (9.12)$$

### 9.3 Studio dei punti di dubbia derivabilità

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , assumiamo  $f$  derivabile in  $I \setminus \{x_0\}$

L'obiettivo è studiare la derivabilità in  $x_0$

**Teorema XXIII (di Darboux)** Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , , assumiamo  $f$  derivabile in  $I \setminus \{x_0\}$ ,  $f$  continua in  $x_0$  e esistano

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) &= l \in \mathbb{R}^* \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) &= m \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Allora

1. se  $l = m \in \mathbb{R}$

$$\implies f \text{ è derivabile in } x_0 \text{ e } f'(x_0) = l = m;$$

2. se  $l, m \in \mathbb{R}, l \neq m$

$$\implies f \text{ è derivabile da destra e sinistra in } x_0 \text{ e si ha}$$

$$f'_+(x) = l \quad f'_-(x) = m;$$

3. se anche solo uno tra  $m$  e  $l$  è  $\pm\infty$ ;

$$\implies f \text{ non è derivabile in } x_0.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \#$$

(al di fuori dei casi precedenti) l'esistenza di  $f'(x_0)$  varia da caso a caso.

### Esempi (9.10)

$$1. \text{ Sia } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, f \text{ continua in } 0$$

$$x \neq 0 \quad f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \cos x \frac{1}{x^2} = \underbrace{\sin \frac{1}{x}}_6 + \underbrace{\cos x \frac{1}{x}}_7$$

$$2. \text{ Sia } g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, g \text{ continua in } 0.$$

$$x \neq 0 \quad g'(x) = \underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} - \underbrace{\frac{x^2}{x^2}}_8$$

**Esercizio** Studiare la derivabilità in  $x_0 = 0$  di

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ \alpha x & x < 0 \end{cases}$$

al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$

**Soluzione** Da risolvere

**Definizione** Data  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  derivabile in  $I \setminus \{x_0\}$ ,  $f$  continua in  $x_0$ , 1 dic 2021 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \pm \infty$$

allora  $x_0$  è un *flesso a tangente verticale*.

In  $x_0$  la tangente al grafico è verticale

**Esempio (9.11)**  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , derivabile in  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x)_{x \neq 0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

---

<sup>6</sup> oscilla tra  $\pm 1$  per  $x \rightarrow 0$

<sup>7</sup> oscilla tra  $\pm \infty$  per  $x \rightarrow 0$

<sup>8</sup> oscilla tra  $\pm 1$  per  $x \rightarrow 0$

**Definizione** Data  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  derivabile in  $I \setminus \{x_0\}$ ,  $f$  continua in  $x_0$ , se

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f'(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \end{pmatrix}$$

allora  $x_0$  è detto *cuspidale*.

**Osservazione (9.6)** È fondamentale che  $f$  sia continua in  $x_0$ , altrimenti può succedere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

e  $f$  non derivabile in  $x_0$ .

**Esempio (9.12)**  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  non è derivabile in  $x_0 = 0$ , ma

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \in \mathbb{R}$$