1 Spazi vettoriali Euclidei

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathscr{B} = v_1, v_2, v_3$,

$$v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,1), v_3 = (2,1,2).$$

Si applichi l'algoritmo per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$$

Soluzione $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, con $||v_1|| = \sqrt{2}$: quindi

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$e_2 = \frac{v_2-(v_2\cdot e_1)e_1}{||v_2-(v_2\cdot e_1)e_1||}$; $v_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\begin{aligned} v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1 &= \\ &= (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1,2,1) \end{aligned}$$

$$||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1|| = \frac{1}{2}||(-1,2,1)|| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\implies e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$$

$e_3 = \frac{v_3-(v_3\cdot e_2)e_2-(v_3\cdot e_1)e_1}{||v_3-(v_3\cdot e_2)e_2-(v_3\cdot e_1)e_1||}$; $v_3 \cdot e_1 = 4/\sqrt{2}$; $v_3 \cdot e_2 = 2/\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1 &= \\ &= (2,1,2) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) - \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \\ &= (2,1,2) - \frac{1}{3}(-1,2,1) - 2(1,0,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3}(1,1,-1) \end{aligned}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

$\implies \{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormale.

1.1 Matrici ortogonali

Definizione Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, A si dice ortogonale se ${}^tA = A^{-1}$ (ortogonale $\implies$ invertibile)

Proposizione *p*.i Valgono le seguenti proprietà:

1. se A è ortogonale $\implies$ A^{-1} è ortogonale
2. se A è ortogonale $\implies$ ${}^tA$ è ortogonale
3. se A, B sono ortogonali $\implies$ AB è ortogonale
4. se $A \in \mathrm{O}(n)$ $\implies$ $\det(A) \in \{-1, 1\}$

Indico con

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A \text{ è ortogonale}\} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

Definizione Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Un sottoinsieme H di G è un sottogruppo se

$$h^{-1} \in H \,\forall\, h \in H \quad \text{e} \quad h_1 \cdot h_2 \in H \,\forall\, h_1, h_2 \in H$$

Le prime due proprietà implicano che $\mathrm{O}(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

dim. **(*p*.i)**

1. $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies {}^tA = A^{-1}$

   $\implies A = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

   $\implies A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$
2. $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies A{}^tA =$

   $\implies {}^tA$ è invertibile e A è la sua inversa
3. A, B ortogonali

   $\implies A{}^tA =$ e $B{}^tB =$

   $\implies AB{}^t(AB) = AB{}^tB{}^tA = A{}^tA =$

   $\implies AB{}^t(AB) =$

   $\implies AB \in \mathrm{O}(n)$

4. Se $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\Longrightarrow \; A^tA =$

   $\Longrightarrow \; \det({}^tAA) = 1$

   $\overset{\text{Binet}}{\Longrightarrow} \; \det({}^tA)\det(A) = 1$

   $\Longrightarrow \; (\det(A))^2 = 1$

   $\Longrightarrow \; \det(A) \in \{-1, 1\}$

Ne risulta che

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \,|\, \det(A) = 1\} \amalg \{A \in \mathrm{O}(n) \,|\, \det(A) = -11\}$$

con $\amalg$ "unione disgiunta"

Si indica con $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \,|\, \det(A) = 1\}$ sottogruppo di $\mathrm{O}(n)$, detto *delle matrici ortogonali speciali*, infatti se $A, B \in \mathrm{SO}(n)$

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1$

  $\Longrightarrow \; A \in \mathrm{SO}(n)$;

- $\det(AB) = \det A \det B = 1$

  $\Longrightarrow \; A, B \in \mathrm{SO}(n)$

Teorema I Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Sono fatti equivalenti:

1. $A \in \mathrm{O}(n)$
2. Le righe di A, $R_1, \cdots, R_n$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico
3. Le colonne di A, $C_1, \cdots, C_n$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico

dim. **(I)**

$2 \iff 3$ poiché $A \in \mathrm{O}(n) \iff {}^tA \in \mathrm{O}(n)$

$2 \iff 1$ Infatti $A \in \mathrm{O}(n) \iff A^tA =$, $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_n \end{pmatrix}$

$(A^tA)_{ij} = R_i \cdot R_j$ dove $\cdot$ è il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$.

Quindi

$A^tA = \iff R_i \cdot R_j = \delta_{ij}$

$\iff \{R_1, \cdots, R_n\}$ base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ $\square$

Descriviamo $\mathrm{O}(2)$ e $\mathrm{SO}(2)$

Descrivo tutte le basi ortonormali di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, una base ortonormale è della forma $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ con $||e_1|| = ||e_2|| = 1$, e $e_1 \cdot e_2 = 0$

Fissiamo e_1. Sia α l'angolo tra e_1 e l'asse x

$\implies e_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

Per e_2 ho solo le due possibilità:

- $e_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$
- $e_2 = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$

Ogni $A \in \mathrm{O}(2)$ è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

oppure

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

Teorema II Considero $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo, e $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale. Sia $\mathscr{B}'$ una seconda base

$\mathscr{B}'$ è ortonormale $\iff$ la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ è ortogonale

dim. **(II)** $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ ortonormale, $\mathscr{B}' = \{v_1, \cdots, v_n\}$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \,\forall\, i = 1, \cdots, n$$

$\mathscr{B}'$ è ortonormale se e solo se

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \,\forall\, i, j = 1, \cdots, n$$

Risulta

$$v_i \cdot v_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k\right) \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js} e_s\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ik} a_{js} \underbrace{e_k e_s}_{\delta_{ks}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

Quindi $\mathscr{B}'$ è ortonormale

$\iff \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$

$\iff$ le righe della matrice $A = (a_{ij})$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico

$\underset{\text{per il teorema}}{\iff}$ A è ortogonale

$\iff$ la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}' \in \mathrm{O}(n)$ $\square$

Esercizio Si trovi in $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico una base ortonormale il cui primo vettore sia

$$u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Soluzione Approccio risolutivo: trovo v in $\mathbb{R}^3$ ortogonale a u, con $||v|| = 1$ e quindi si considera z come $z = u \wedge v$

$\implies \{u, v, z\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

2 Orientazione di uno spazio vettoriale (reale)

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ finitamente generato, siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ due basi e sia $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice del cambiamento di base $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

$\implies \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) \neq 0$

$\implies$ ci sono due possibilità:

1. $\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$: si dice che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ hanno la stessa orientazione
2. $\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) < 0$: si dice che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ hanno orientazione opposta

Esempio (2.1) Consideriamo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Le basi di $\mathbb{R}$ sono del tipo $\mathscr{B} = \{t_0\}$, con $t_0 \neq 0$

$\implies \mathscr{B} = \{t_0\}$ e $\mathscr{B}' = \{t_0'\}$ hanno la stessa orientazione

$\iff t_0$ e t_0' hanno lo stesso segno

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ finitamente generato. Basi(V) insieme di tutte le basi di V. In Basi(V) si considera la relazione $\sim$ dove due basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ sono in relazione

$\iff$ hanno la stessa orientazione

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \iff \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$$

Proposizione *p.*ii $\sim$ è una relazione di equivalenza e nel quoziente $\text{Basi}(B)/\sim$ ci sono solo due classi

Esempio (2.2) $\text{Basi}(\mathbb{R}) = \Big\{\{t_0\} \,|\, t_0 \neq 0\Big\}$, $\{t_0\} \sim \{t_0'\} \iff t_0$ e t_0' hanno lo stesso segno.

$\sim$ è una relazione di equivalenza, e $\text{Basi}(R)/\sim$ consta di sole due classi, infatti, prendendo le classi

$$[\{1\}], [\{-1\}],$$

una qualsiasi base $\{t_0\}$ o è in relazione con $[\{1\}]$ o con $[\{-1\}]$

***dim.* (*p.*ii)** Idea della dimostrazione: dimostro che $\sim$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

- $\sim$ riflessiva, infatti se $\mathscr{B} \in \text{Basi}(V)$ si ha che $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} =$

  $\Longrightarrow \det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} = 1$

  $\Longrightarrow \mathscr{B} \sim \mathscr{B}$

- $\sim$ simmetrica, infatti siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}' \in \text{Basi}(V)$, supponiamo $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$, cioè $\det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} > 0$

  $\Longrightarrow (v)_{\mathscr{B}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v)_{\mathscr{B}'} \; \forall\, v \in V$

  $\iff (v)_{\mathscr{B}'} = (M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}(v)_{\mathscr{B}} \; \forall\, v \in V$, cioè $M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = (M^{\mathscr{B},\mathscr{B}})^{-1}$

  $\Longrightarrow \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}}) = \frac{1}{\det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}} > 0$

  $\Longrightarrow \mathscr{B}' \sim \mathscr{B}$

- $\sim$ transitiva, infatti siano $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}'' \in \text{Basi}(V)$ con
  - $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \iff \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$
  - $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}'' \iff \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) > 0$

  $$\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) = \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) = \overset{\text{Binet}}{=} \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) \cdot \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) > 0 \quad \square$$