1 Costante di Nepero

Consideriamo la successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1^{+\infty}$$

è una forma indeterminata

Verifichiamo la convergenza:

1. a_n è crescente
2. a_n è superiormente limitata
3. applichiamo il teorema di esistenza del limite per le succesioni monotone

1. $a_1 = 2$, per $n \geq 2$ stimiamo il rapporto

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} =$$
$$= \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n(\frac{n}{n-1})^{-1}} =$$
$$= \frac{(\frac{1+n}{n})^n(\frac{n-1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} =$$
$$= \frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = **$$

Applico la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{1}{n^2} < 1, -\frac{1}{n^2} > -1$$

$$\implies (1-\frac{1}{n^2}) \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$\implies ** \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$

Quindi $\forall n \geq 2$, $a_n \geq a_{n-1}$, quindi a_n è crescente definitivamente

2. Dimostriamo ora che a_n è limitata superiormente.

Consideriamo $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $(a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}\ )$

Verifichiamo che b_n è decrescente.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \cdots = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}$$

Stimiamo $(1+\frac{1}{n^2-1})^n$; per qualsiasi $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2-1} > 0$, e posso applicare Bernoulli:

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Ottengo quindi che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Quindi $\forall n \geq 2$, $b_n < b_{n-1}$, quindi b_n decrescente definitivamente, ma $b_2 = 4 \implies b_n \leq 4$ definitivamente

Poiché $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ si ha a_n crescente e $a_n \leq 4$ definitivamente

3. Dunque, per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate, otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \in \mathbb{R}$$

(esiste ed è un numero reale), e lo chiamiamo e, detta costante di Nepero $\square$

Quindi

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Osserviamo che

$$a_1 = 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

Una prima stima di e risulta essere

$$2 \leq e \leq 4$$

Con opportuni algoritmi di approssimazione si stima che

$$e = 2,7182818284\ldots$$

Osservazione (1.1) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (dimostrazione sul libro di testo)

Proposizione *p*.i

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Lemma *l*.i Sia $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \pm\infty$ allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

***dim.* (*p*.i)** Applicando il teorema di relazione, a partire dal lemma (*l*.i) si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

***dim.* (*l*.i)**

1. $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, ricordiamo $[x_n] \leq x_n \leq [x_n]+1$
2. ... $\square$

2 Continuità

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in D'$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

Diciamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

$$\iff \quad \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \text{ t. c. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Il valore di l non è in alcun modo legato ad $f(x_0)$

Consideriamo $x_0 \in D$

Esempi (2.1)

- $f(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) = \nexists$$
$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0$$

-
- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Definizione Consideriamo $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$

Diciamo che f è continua in $x_0 \in D$ se

a. x_0 punto isolato di D

b. $x_0 \in D'$ e vale una delle seguenti affermazioni tra di loro equivalenti:

i. $\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0)$ tale che $x \in U \cap D$

$\implies f(x) \in V$

ii. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$

$\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

iii. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

iv. data $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a valori in D tale che $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Lemma *l.*ii Le quattro affermazioni precedenti sono equivalenti

dim. (*l.*ii)

i. $\iff$ *ii.* è ovvio

ii. $\implies$ *iii.* è ovvio

iii. $\iff$ *iv.* per il teorema di relazione *iii.* $\implies$ *ii.* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ vale

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

se $x = x_0$ $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

$\implies \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ossia f continua in x_0 $\square$

Diciamo che f è continua in $E \subseteq D$ se $\forall x_0 \in E$ f è continua in x_0

Esempi (2.2) In generale dati $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $x_0 \in D$ se si ha

$$\begin{cases} \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da destra} \\ \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da sinistra} \end{cases}$$