Geometria 1

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

Indice

20 set 2021

1 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare di numeri reali ($\in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

contiene $m \cdot n$ numeri
contiene m righe
contiene n colonne

a_{ij} è l'elemento della matrice nella i-esima riga e nella j-esima colonna. $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

A è una matrice $m \cdot n$. Se $m = n$ allora A è una **matrice quadrata**.

Le matrici servono per:

- risolvere sistemi lineari
- studiare spazi vettoriali
- classificarre strutture geometrice (es. coniche)
- presentare funzioni (semplificandone lo studio)

$\mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$:

- $\mathbb{Q}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$ le cui entrate sono elementi di $\mathbb{Q}$.

Esempi (1.1)

- $\mathbb{R}^{2,2}$: matrici $2 \cdot 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdots \in \mathbb{R}^{2,2}$$

- $\mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^{m,1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1} \qquad \text{anche } \textbf{vettori colonna}$$

- $\mathbb{R}^{1,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n} \qquad \text{anche } \textbf{vettori riga}$$

In $\mathbb{R}^{m,n}$ è sempre definita la **matrice nulla**, in cui tutte le entrate sono nulle. In $\mathbb{R}^{n,n}$ è sempre definita la **matrice identità**:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{1,1}$, $I = 1$
- In $\mathbb{R}^{2,2}$
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- In $\mathbb{R}^{3,3}$
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale composta unicamente da 1 nella matrice identità è ila **diagonale principale** della matrice.

1.1 Somma

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Esempi (1.2)

- In $\mathbb{R}^{1,1}$ la somma tra matrici coincide con la somma usuale di numeri reali.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

Proprietà della somma

(*i*) La somma è **associativa**:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

e posso scrivere $A + B + C$ senza ambiguità.

(*ii*) La somma è **commutativa** (o abeliana):

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad A + B = B + A$$

(*iii*) Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice nulla ($B = \underline{0}$), allora $A + B = B + A = A$

(*iv*) $A - A = \underline{0}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \exists - A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ t. c. } A - A = 0$$

Definizione Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si definisce $-A$,

$$\text{con } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notazione In genere si scrive $A - B$ in luogo di $A + (-B)$, e si considera come una sottrazione di matrici

Definizione Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ sono uguali se hanno le stesse entrate ($A = B$)

Proprietà $A = B \iff B - A = 0$

2 Gruppo

Definizione Siano A, B due insiemi, si definisce **prodotto cartesiano**:

$$A \times B = \{(a, b) \text{ t. c. } a \in A, b \in B\}$$

in cui conta l'ordine: $(a, b) \neq_(b, a)$

$$A \times A = \{(a_1, a_2) \text{ t. c. } a_1, a_2 \in A\}$$

Definizione Sia G un insieme. Una **operazione** in G è una funzione

$$\begin{aligned} \star : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g \star h \end{aligned}$$

Proprietà

(*i*) L'operazione è **associativa** se $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$

(*ii*) L'operazione ha un **elemento neutro** se

$$\exists\, e \in G \text{ t. c. } g \star e = e \star g = g, \ \forall g \in G$$

(*iii*) Se $g \in G$ chiamiamo **inverso di** g un elemento

$$k \in G \text{ t. c. } g \star k = k \star g = e$$

Definizione Un **gruppo** è un insieme G con un'operazione $\star$ t. c.

1. $\star$ è associativa
2. esiste un elemento neutro
3. ogni elemento ha un inverso

Esempi (2.1) Sono gruppi

$$(\mathbb{R}, +),\ (\mathbb{Z}, +),\ (\mathbb{Q}, +),$$

$$\cancel{(\mathbb{R}, \cdot)}\text{: lo zero non ha un inverso,}$$

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ (\mathbb{R}^{m,n}, +)$$

Definizione Un gruppo $(G, \star)$ è **abeliano** se

$$g \star h = h \star g\ \forall\, g, h \in G$$

Nel caso di un gruppo abeliano l'operazione è indicata con $+$ e l'elemento neutro con 0.

$$(\mathbb{R}^{m,n}, +) \text{ è un gruppo abeliano}$$

21 set 2021

3 Operazioni con le matrici

3.1 Moltiplicazione

Si può moltiplicare $\lambda \in \mathbb{R}$ con matrici $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot A = -A \qquad \text{coerente con la definizione di } -A$$

Esempio (3.1)

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Osservazione (3.1) $0 \cdot A$ è la matrice nulla $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Proprietà del prodotto per scalari

(i) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

(ii) $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

(iii) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

(iv) $1 \cdot A = A \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$ è un **gruppo abeliano** in cui è definita una moltiplicazione per scalari in cui valgono le proprietà *i*-*iv* (prototipo per gli spazi vettoriali).

3.2 Prodotto tra matrici

$$A, B \text{ t.c. } A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k} \implies AB \in \mathbb{R}^{m,k}$$

Questo è definito come il prodotto **righe per colonne**. Il numero di colonne della prima matrice deve corrispondere con il numero di righe della seconda matrice.

Definizione Siano $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,k}$ due matrici, siano a_{ij} gli elementi di A e b_{rs} gli elementi di B [Notazione: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{rs})$]

La matrice $A \cdot B$ è la matrice in $R^{m,k}$ il cui ij-esimo elemento è

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{ni} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj}$$

3.2.1 Prodotto tra matrici quadrate

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,m}$, $AB \in \mathbb{R}^{m,m}$; in questo caso il prodotto tra matrici definisce una operazione in $\mathbb{R}^{m,m}$.

(i) il prodotto è associativo: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,m}$

(ii) esiste un elemento neutro

Proposizione *p*.i Sia $I \in \mathbb{R}^{m,m}$ la matrice identità, $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

$\implies A \cdot I = I \cdot A = A \ \forall A \in \mathbb{R}^{m,m}$

dim. **(*p*.i)** Sia (r_{ij}) l'ij-esimo elemento della matrice $A \cdot I$ con $A = (a_{ij})$ e $I = (b_{ij})$

$$r_{ij} = \sum_{n=1}^{m} a_{in} \cdot b_{ni}$$

Si noti che $b_{kh} = 0 \ \forall k, h | k \neq h \implies$

$$r_{ij} = \sum_{n=1}^{m} a_{in} \cdot b_{ni} =$$
$$= \cancel{a_{i1} b_{1j}} + \cancel{\cdots} + a_{ij} b_{jj} + \cancel{\cdots} + \cancel{a_{in} b_{nj}} =$$
$$= a_{ij} \cdot b_{jj} = a_{ij} \cdot 1$$

$\implies r_{ij} = a_{ij}$ $\square$

In generale se $A \in \mathbb{R}^{m,m} \nexists$ un inverso per A, cioè non esiste $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I$

Esempio (3.2)

- Se A è la matrice nulla

  $\implies A \cdot B =$ matrice nulla $\neq I$

- Se A ha una riga o una colonna nulla (ovvero fatta tutta di zeri)

  $\implies$ non è invertibile

4 Lipsum 1

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

5 ott 2021

Teorema I Sia V uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$, e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale:

1. se V è finitamente generato $\implies$ W è finitamente generato;
2. se V è finitamente generato $\implies$ $\dim W \leq \dim V$
3. se V è finitamente generato e $\dim W = \dim V \implies W = V$

dim. **(I)**

1. Supponiamo che V sia finitamente generato, e per assurdo che W non lo sia.

   V è finitamente generato $\implies$ V ha una base

   $$\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

   W non è finitamente generato, e sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq \underline{0}$, considero $\mathscr{L}(w_1) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1)$, altrimenti W sarebbe generato da w_1. $\implies \exists\, w_2 \in W \land w_2 \notin \mathscr{L}(w_1)$.

   Considero $\mathscr{L}(w_1, w_2) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1, w_2)$, altrimenti W sarebbe generato da $\{w_1, w_2\}$. $\implies$
   $\implies \exists\, w_3 \in W \land w_3 \notin \mathscr{L}(w_1, w_2)$.

   Itero il procedimento e trovo

   $$\{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \subseteq W \text{ t. c. } w_{n+1} \notin \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) \implies \\ \implies \{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \text{ è un insieme libero}$$

   e contiene più elementi di una base $\mathscr{B}$. Assurdo per teorema precedente.

2. Supponiamo V finitamente generato, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. W è finitamente generato (per 1.) $\implies \exists\, \mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di $W \implies \mathscr{B} \subseteq V$ è un sottoinsieme libero $\implies m \leq \dim V$ $\implies \dim W \leq \dim V$

3. Sia $W \subseteq V$ uno spazio vettoriale, con V finitamente generato. $\dim W = \dim V$.

   W ha una base $\mathscr{B}$ con n vettori, dove $n = \dim V \implies \mathscr{B}$ è una base di V.

   Se $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_n\} \implies W = \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) = V \implies W = V$ □

Osservazione (4.1) Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato, e $\dim V = n \implies$ ogni insieme libero con n elementi è una base. Infatti se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ è un insieme libero, se per assurdo esistesse $v \in V \wedge v \notin \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_n) \implies \{v_1, \cdots, v_n, v\} \subseteq V$ è un insieme libero di cardinalità $n+1$ (ovvero con $n+1$ elementi). Assurdo.

Teorema II (del completamento di una base) Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e sia $I = \{a_1, \cdots, a_l\} \subseteq V$ un sottoinsieme libero. Esiste sempre $\mathscr{B}'$ base di V i cui primi l-elementi sono $a_1, \cdots, a_l$ e i restanti $n-l$-elementi sono elementi di $\mathscr{B}$.

$$\mathscr{B}' = \{a_1, \cdots, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}$$

***dim.* (II)** Applico il metodo degli scarti successivi

$l = n$ l'enunciato è banale (I è già una base e non va completata);

$l < n \implies \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l) \subsetneq V$
$\implies \exists\, w_1 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_1 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l)$. Infatti, se tutti i generatori appartenenti a $\mathscr{B}$ fossero combinazioni lineari di $a_1, \cdot, a_l$, non sarebbero più tutti linearmente indipendenti. $\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1\}$ è libero.

Se I_1 è una base, la dimostrazione si conclude, altrimenti $\exists\, w_2 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_2 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l, w_2)$
$\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, w_2\}$ è libero.

Se I_2 è una base la dimostrazione si conclude, altrimenti si itera fino a

$$I_{n-l} = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}.$$

I_{n-l} è libero con n vettori $\implies I_{n-l}$ è una base □

Esempio (4.1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3}) = \{A \in \mathbb{R}^{3,3} \text{ t. c. } {}^tA = A\}$

Cerco una base. Sia $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ generica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e sia $\mathscr{B} = \{E_1, \cdots, E_6\}$

Dato

$$I = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\left. A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$$

insieme libero, si trovino tre elementi $w_1, w_2, w_3 \in \mathscr{B}$ tali per cui $I \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$.

$$A_1 = E_1 + 2E_2; A_2 = E_1 - E_4 + E_6; A_3 = E_2 - E_3$$

e rispetto alla base $\mathscr{B}$

$$A_1 = (1, 2, 0, 0, 0, 0), A_2 = (1, 0, 0, -1, 0, 1), A_3 = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$$
$$E_1 = (1, 0, \cdots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, E_6 = (0, \cdots, 0, 1)$$

Si studia l'appartenenza di $E_1 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3)$. Studio il sistema

$$E_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_1 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1\}$$

Si studia l'appartenenza di $E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_2 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$$\implies E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies \text{scarto } E_2$$

Si studia l'appartenenza di $E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 1 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$\implies E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies$ scarto E_3

Si studia l'appartenenza di $E_4 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_4 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 1 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$\implies E_4 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4\}$

Si studia l'appartenenza di $E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4)$. Studio il sistema

$$E_5 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1 + \lambda_5 E_4$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_5 \\ 1 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 0 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$\implies E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4) \implies I_3 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

La soluzione è $\mathscr{B}' = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

5 Operazioni tra sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale su un un campo $\mathbb{K}$, e siano W_1 e $W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

Si consideri

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in w_1 \land x \in w_2\}$$

Proposizione *p*.ii $W_1 \cap W_2$ è sempre sottospazio vettoriale

***dim.* (*p*.ii)** Siano $x, y \in W_1 \cap W_2$

$$\implies \left.\begin{cases} x, y \in W_1 \implies (x+y) \in W_1 \\ x, y \in W_2 \implies (x+y) \in W_2 \end{cases}\right\} \implies (x+y) \in W_1 \cap W_2$$

7 ott 2021

Proposizione *p*.iii Sia V uno spazio vettoriale e W, W_1 e W_2 sottospazi di V.

Se W contiene W_1 e W contiene W_2 allora W contiene $W_1 + W_2$ (cioè $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio di V che contiene sia W_1 che W_2)

***dim.* (*p*.iii)** Sia $x + y \in W_1 + W_2$, $x \in W_1 \implies x \in W, y \in W_2 \implies y \in W \implies x + y \in W$, poiché W è un sottospazio vettoriale. Quindi ogni $v \in W_1 + W_2$ è elemento di $W \implies W_1 + W_2 \subseteq W$.

La somma si generalizza a più sottospazi. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali, allora si definisce

$$W_1 + \cdots + W_l = \{x_1 + \cdots + x_l | x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale ed è il più piccolo sottospazio che contiene tutti i $W_1, \cdots, W_l$ $\square$

Esercizio Si trovino somma e intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

a. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = L(e_4)$

b. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x : 1, x : 2 \in \mathbb{R}\}$,
$Z_2 = \{(0, x_2, 0, x_4) | x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

Soluzione

a. $W_1 + W_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$, $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

b. $W_1 + Z_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$,
$W_1 \cap Z_2 = \{(0, x_2, 0, 0) | x_2 \in \mathbb{R}\}$

Proposizione *p*.iv Sia V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni:

1. $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ (hanno intersezione banale)
2. ogni $v \in W_1 + W_2$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$

dim. **(*p*.iv)**

1. $\implies$ 2. Suppongo $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ e considero $v \in W_1 + W_2$. Scrivo $v = x_1 + y_1$, $v = x_2 + y_2$ e dimostro che $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

   $\underline{0} = v - v = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \implies x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, $x_1 - x_2 \in W_1$ mentre $y_2 - y_1 \in W_2$. Per l'uguaglianza risulta che

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \in W_2 \implies x_1 - x_2 \in W_1 \cap W_2 \\ y_2 - y_1 \in W_1 \implies y_2 - y_1 \in W_1 \cap W_2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 - x_2 = \underline{0} \implies x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = \underline{0} \implies y_1 = y_2 \end{cases}$$

2. $\implies$ 1. Suppongo che ogni $v \in W_1 + W_2$ si scriva in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$ e dimostro che $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

   Sia $v \in W_1 \cap W_2$. Sia $v \in W_1 + W_2$, $v = x + y = x + v + y - v$, con $x + v \in W_1$, $y - v \in W_2$. Quindi se $v \neq \underline{0}$, le due scritture $v = x + y$, $v = (x + v) + (y - v)$ sono diverse e ciò non è possibile per ipotesi

$\square$

Notazione Se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ si scrive $W_1 \oplus W_2$ invece che $W_1 + W_2$ $\oplus$ si legge "somma diretta"

Esempio (5.1) $\mathbb{K}^{n,n} = S(\mathbb{K}^{n,n}) \oplus A(\mathbb{K}^{n,n})$

Esempio (5.2) $R^2 = \mathscr{L}(e_1) \oplus \mathscr{L}(e_2)$

Proposizione *p*.v Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni

1. $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_l) = \{\underline{0}\}\ \forall i = 1, \cdots, l$

2. Ogni $v \in W_1 + \cdots + W_l$ si scrive in modo unico come $v = x_1 + \cdots + x_l$ con $x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l$

Se vale 1. si scrive $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_l$

Esempio (5.3) Considero V spazio vettoriale di dimensione finita e $\mathscr{B} = \{v1, \cdots, v_n\} \implies V = \mathscr{L}(v_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}(v_l)$

Sia V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, finitamente generato. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale, sia $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_l\}$ una base di W. Possiamo completare $\mathscr{B}$ con una base dello spazio $\mathscr{B}' = \{w_1, \cdots, w_l, v_1, \cdots, v_m\}$. Sia

$$Z = \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_m) \subseteq V$$

un sottospazio vettoriale, e per costruzione $V = W \oplus Z$

Osservazione (5.1) Sia V spazio vettoriale di dimensione finita con $V = W \oplus Z$ Siano $\mathscr{B} = \{w1, \cdots, w_l\}$ una base di W e $C = \{z_1, \cdots, z_m\}$ una base di Z. Ogni elemento di V si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W$ e $y \in Z$ $\mathscr{B}$ base di W

$\implies$ x si scrive in modo unico come $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l$

$\mathscr{C}$ base di $Z \implies y$ si scrive in modo unico come

$$y = \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies$ v si scrive in modo unico come

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l + \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies B \cup C = \{w1, \cdots, w_l, z_1, \cdots, z_l\}$ è una base di V

$\implies \dim V = \dim W + \dim Z$

Teorema III Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Siano $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali t. c. $V = W_1 + W_2$. Allora

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Questa è la **Formula di Grassmann**.

dim. **(III)** Chiamo

$$\dim V = n,\ \dim W_1 = l,\ \dim W_2 = p,\ \dim(W_1 \cap W_2) = r$$

In particolare $l, p \leq n$, $r \leq l, p$

1. $r = l \implies W_1 \cap W_2 = W_1 \implies W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 + W_2 = W_2 = V$
2. $r = p \implies W_1 \cap W_2 = W_2 \implies W_2 \subseteq W_1 \implies W_1 + W_1 = W_1 = V$
3. si assume $r \leq l, p$ e sia

   $$\mathscr{B} = \{a_1, \cdots, a_r\} \text{ base di } W_1 \cap W_2$$

   Completo $\mathscr{B}$ con una base $\mathscr{C}$ di W_1,

   $$\mathscr{C} = \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l\}$$

   e completo $\mathscr{B}$ con una base $\mathscr{D}$ di W_2,

   $$\mathscr{D} = \{a_1, \cdots, a_r, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

   Si verifica che l'insieme

   $$\{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

   è una base di V. In questo modo si ottiene

   $$\dim V = l + (p - r)$$

   cioè la tesi.

   Ovviamente risulta

   $$\mathscr{L}(a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p) = V$$

   in quanto contiene i generatori sia di W_1 che di W_2, e quindi anche della loro somma. Verifichiamo che l'insieme

   $$\{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

   sia libero. Supponiamo

   $$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu r + 1 + b_{r+1} + \cdots + \\ + \cdots + \mu_l b_l + \gamma_{r+1} c_{r+1} + \cdots + \gamma_p c_p = \underline{0} **$$

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l) = (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \cdots - \gamma_p c_p)$$

Sia

$$\begin{aligned} c = (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \cdots - \gamma_p c_p) = \\ = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l) \end{aligned}$$

sicuramente $c \in W_2$

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l \in W_1$$

$\implies c \in W_1 \cap W_2 = \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_r)$

$\implies c = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r$, vado a sostituire in **

$$(\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r) + (\gamma_{r+1} c_{r+1} + \cdots + \gamma_p c_p) = \underline{0}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0 \\ \gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0 \end{cases}$$

Ho ottenuto

$$\gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0$$
$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l = \underline{0}$$

Poiché l'insieme

$$\mathscr{C} = \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l\}$$

è libero

$\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \cdots = \mu_l = 0$

$\implies \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$ è libero

$\square$

6 Lipsum 2

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

2 nov 2021

7 Funzioni lineari

V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e una funzione $F : V \to W$, F è lineare se verifica $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$

Teorema IV (di esistenza e unicità) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con V finitamente generato.

Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e $a_1, \cdots, a_n \in W$.

Allora esiste un'unica funzione lineare $F : V \to W$ tale che $F(v_i) = a_i$ $\forall i = 1, \cdots, n$

dim. **(IV)**

Esistenza Sia $v \in V$, v si scrive in modo unico come $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$ per $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

Si definisce

$$F(v) = F(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) := x_1 a_1 \cdots + x_n a_n$$

F definisce una funzione $V \to W$ tale che $F(v_i) = a_i$ per $i = 1, \cdots, n$. Verifico che F è lineare.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$ e dimostro che $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$

Scrivo

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

e

$$w = \sum_{r=1}^{n} y_r v_r$$

$$\lambda v + \mu w = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k) v_k$$

Quindi per come è definita F risulta che

$$F(\lambda v + \mu w) = F\left(\sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k \right) v_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k) a_k =$$

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k a_k =$$

$$= \lambda F(v) + \mu F(w)$$

$\implies$ F è lineare

Unicità Supponiamo di avere due funzioni lineari $F, G : V \to W$ tali che $F(v_i) = G(v_i) = a_i \ \forall i = 1, \cdots, n$ e dimostro che $F = G$, cioè che $F(v) = G(v) \ \forall v \in V$ Possiamo scrivere $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ quindi

$$
\begin{aligned}
F(v) = F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
G(v) = G\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k G(v_k) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k
\end{aligned}
$$

$$\implies F(v) = G(v) \ \forall v \in V$$

$$\implies F = V$$ □

7.1 Matrice associata ad una applicazione lineare

Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con V, W entrambi finitamente generati. Supponiamo $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

Considero $F : V \to W$ lineare, e fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di V e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base di W.

$$F(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k1}w_k$$
$$F(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k2}w_k$$
$$\cdots$$
$$F(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{kn}w_k$$

Tutto questo determina $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, A è determinata da $F, \mathscr{B}, \mathscr{C}$

Sia $v \in V$ un vettore generico $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} F(v) = F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k) = \\ &= x_1 F(v_1) + x_2 F(v_2) + \cdots + x_n F(v_n) = \\ &= x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{k1}w_k + x_2 \sum_{k=1}^{m} a_{k2}w_k + \cdots + x_n \sum_{k=1}^{m} a_{kn}w_k = \\ &= \sum_{k=1}^{m}(a_{k1}x_1)w_k + \sum_{k=1}^{m}(a_{k2}x_2)w_k + \cdots + \sum_{k=1}^{m}(a_{kn}x_n)w_k = \\ &= \left(\sum_{r=1}^{n} a_{1r}x_r\right)w_1 + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{2r}x_r\right)w_2 + \cdots + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{mr}x_r\right)w_m \end{aligned}$$

Se $(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\implies \big(F(v)\big) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\implies \big(F(v)\big) = A(v)_{\mathscr{B}}$$

Notazione Si indica A con $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$, matrice che rappresenta F rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$

Esempio (7.1) Sia $I : V \to V$ funzione identità, e calcoliamo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I)$ dove $\mathscr{B}$ è una base fissata di V. Se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ risulta $I(v_i) = v_i$ $\forall i = 1, \cdots, n$

$\implies M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I) = Id$ matrice identità

Esempio (7.2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3)$$

Sia $\mathscr{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, voglio trovare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

Possiamo scrivere $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Sono noti $F(1,0,0) = (3,0)$, $F(0,1,0) = (-1,2)$ e $F(0,0,1) = (0,3)$, quindi

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In generale data $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ espressa in termini della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ la matrice che rappresenta F è la matrice le cui colonne sono $F(e_1), \cdots, F(e_n)$

Esempio (7.3) Data $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio (7.4) $F : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$: $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ e deterrmino la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^{n,n}$, $\mathscr{B} = E_{i_1 j}$ e alla base canonica di $\mathbb{K}$ $\mathscr{C} = \{1\}$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(E_{11}) & \mathrm{tr}(E_{12}) & \cdots & \mathrm{tr}(E_{1n}) & \mathrm{tr}(E_{21}) & \mathrm{tr}(E_{22}) & \cdots & \mathrm{tr}(E_{nn}) \end{pmatrix}$$

Per esempio se $n = 2$ risulta $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Esempio (7.5) Sia $a \in V_3$ e $F : V_3 \to V_3$: $x \mapsto a \wedge x$ funzione lineare.

Sia $\mathscr{B} = \{i, j, k\}$ base ortonormale positiva di V_3 e calcolo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, scriviamo $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$$F(i) = a \wedge i = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge i = -a_2 k + a_3 j$$
$$F(j) = a \wedge j = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge j = a_1 k - a_3 j$$
$$F(k) = a \wedge k = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge k = -a_1 j + a_2 i$$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$, $F(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}$

Sia $\mathscr{B}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$

Si trovi $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

Soluzione Da risolvere

7.2 Immagine di sottospazi vettoriali

Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $F : V \to W$ lineare, sia $H \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $F(H)$ immagine di H tramite F, tale che $F(H) \subseteq W$, $F(H) = \{F(h) | h \in H\}$

Proposizione *p*.vi $F(H)$ è sempre un sottospazio vettoriale di W

dim. **(*p*.vi)** Siano $w_1, w_2 \in F(H)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $\lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$$w_1 \in F(H) \implies w_1 = F(h_1)\text{per qualche } h_1 \in H$$
$$w_2 \in F(H) \implies w_2 = F(h_2)\text{per qualche } h_2 \in H$$

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda F(h_1) + \mu F(h_2) = F(\lambda h_1 + \mu h_2)$$

Poiché H è un sottospazio vettoriale, risulta che, dato $h = \lambda h_1 + \mu h_2$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 = F(h)$ per qualche $h \in H$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$\implies F(H)$ sottospazio vettoriale di V $\square$

Supponiamo $\dim H = n$, $\dim F(H) =?$

Sia $\mathscr{B} = \{h_1, \cdots, h_n\}$ base di H, sappiamo che $\{F(h_1), \cdots, F(h_n)\}$ è un insieme di generatori di $F(H)$

$\implies \dim F(H) \leq n$

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

Sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio $H = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\}$, $\dim H = 2$

Si trovi una base di $F(H)$

Soluzione

1. Trovo una base di H, per esempio $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. Calcolo le immagini dei vettori della base

$$F(1, -1, 0) = (2, 0, 2, -1)$$
$$F(0, 0, 1) = (-1, 1, 0, -1)$$

Questi due vettori sono linearmente indipendendenti, allora formano una base di $F(H)$

Definizione Sia $F : V \to W$ lineare, $F(V)$ (che è un sottospazio vettoriale di W) si dice l'immagine di F

Osservazione (7.1) F è suriettiva $\iff F(V) = W \iff \dim F(V) = \dim W$ (criterio per testare la suriettività di una funzione lineare)

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$

1. Dire se F è suriettiva e in caso contrario trovare $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $w \notin F(\mathbb{R}^3)$
2. Sia $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$, $H = \mathscr{L}(a, b)$. Dire se $(4, 3, -2) \in F(H)$

Soluzione

1. $F(\mathbb{R}^3) = \mathscr{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3))$

$$F(e_1) = (2, 1, 1)$$
$$F(e_2) = (2, 0, 3)$$
$$F(e_3) = (0, 1, -2)$$

Si osserva che $F(e_1) = F(e_2) + F(e_3)$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti

Ma $F(e_2)$ e $F(e_3)$ sono linearmente indipendenti

$\implies F(\mathbb{R}^3)$ ha dimensioone 2, ed i vettori $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$ ne formano una base. F non è suriettiva

$w \in \mathbb{R}^3$, $w \notin F(\mathbb{R}^3) \iff w$ non è combinaziione lineare di $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$.

Per esempio $w = (1, 0, 0)$ va bene, poiché non esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(1, 0, 0) = \lambda(2, 0, 3) + \mu(0, 1, -2)$

2. $F(H) = \mathscr{L}(F(a), F(b))$. $F(a) = (2, 2, -1)$, $F(b) = (2, 1, 1)$. $F(a), F(b)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim F = 2$

$(4, 3, -2) \in F(H) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(4, -3, -2) = (2\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, -\lambda + \mu)$

Il sistema non ha soluzione, pertanto $(4, 3, -2) \notin F(H)$

4 nov 2021

Definizione Data $F : V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali su uno stesso campo, il rango di F ($\operatorname{rank} F$) è la dimensione di $F(V)$

Se $\mathscr{B}$ è una base di V e $\mathscr{C}$ è una base di W, ad F si associa la matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ che rappresenta F rispetto alle basi fissate.

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}$$

Il rango di F coincide con il rango della matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

$\implies$ tutte le matrici associate ad F hanno lo stesso rango.

7.3 Retroimmagine di sottospazi

$F : V \to W$ applicazione lineare, sia $K \subseteq W$ un sottospazio

$$F^{-1}(K) = \{w \in K | w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\}$$

Si noti che $F^{-1}(K) \neq \emptyset$: sicuramente K contiene $\underline{0}_W$ e sappiamo che $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.

Proposizione *p*.vii $F^{-1}(K)$ è sempre un sottospazio vettoriale di V, $\forall K \subseteq W$ sottospazio vettoriale

dim. **(*p*.vii)** Fisso $v, w \in F^{-1}(K)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostro che $\lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} v \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(x) \text{ per qualche } x \in K, F(v) = x \\ w \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(y) \text{ per qualche } y \in K, F(w) = y \end{cases}$$

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) = \lambda x + \mu y \in K$$

poiché K è un sottospazio vettoriale

$\implies F(\lambda v + \mu w) \in K$

$\implies \lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$\implies F^{-1}(K)$ sottospazio vettoriale di W $\square$

$$\dim F(H) \leq \dim H,$$
$$\text{se } K \subseteq F(V) \implies \dim F^{-1}(K) \geq \dim K$$

Esercizio

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$$

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1 + y_2 = 0\} \ \dim K = 3$$

Si determini $F^{-1}(K)$

Soluzione Voglio trovare le $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $F(x_1, x_2, x_3) \in K$

$$F(x_1, x_2, x_3) \in K \iff (x_1 + x_2) + 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ è l'equazione di $F^{-1}(K)$ ($\dim F^{-1}(K) = 2$)

Trovo una base di $F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = -3t - 2s \end{cases}$$

$$\mathscr{B} = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\} \quad \text{è una base di } F^{-1}(K)$$

Altro approccio risolutivo:

Fisso una base di K, per esempio

$$\{w_1 = (1, -1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$F^{-1}(K) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | F(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -\lambda_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda_2 \\ x_2 - x_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Si risolve il sistema in x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 2 & 1 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{si riduce per righe}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -1 & 1 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 + 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 + 3\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Affinché il sistema sia risolubile si deve avere

$$\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0; \qquad \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ -x_2 + x_3 = -3\lambda_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2\lambda_1 - \mu \\ x_2 = \mu + 3\lambda_1 \\ x_2)\mu \end{cases}$$

Da qui si deduce una base di $F^{-1}(K)$

7.4 Nucleo di una funzione lineare

V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $F : V \to W$ lineare

$\implies$ $\{\underline{0}_W\}$ è sottospazio vettoriale di W

$\implies$ $F^{-1}(\underline{0}_W)$ sottospazio vettoriale di V

Definizione $F^{-1}(\underline{0}_W)$ si dice nucleo di F (kernel di F) e si indica con $\ker(F)$

$$\ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\}$$

Teorema V F è iniettiva $\iff \ker F = \underline{0}_V$

dim. **(V)**

" $\implies$ " Supponiamo F iniettiva e sia $v \in \ker F$

$\implies$ $F(v) = \underline{0}_W$, ma poiché F è lineare risulta $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

$\implies$ $F(v) = F(\underline{0}_V)$ e poiché F è iniettiva risulta $v = \underline{0}_W$

$\implies$ $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

"$\impliedby$" Per ipotesi $\ker F = \{\underline{0}_V\}$, siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = F(v_2)$

$\implies$ $F(v_1) - F(v_2) = \underline{0}_W$, poiché F è lineare si ottiene $F(v_1 - v_2) = \underline{0}_W$

$\implies$ $v_1 - v_2 \in \ker F$

$\implies$ $v_1 - v_2 = \underline{0}_V$

$\implies$ $v_1 = v_2$, quindi F è iniettiva. $\square$

Supponiamo V, W di dimensione finita, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, siano $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di V e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di W, e si consideri $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}(F)}$

$$\begin{aligned} \ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\} = \\ = \{v \in V | (F(v))_{\mathscr{C}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ = \{v \in V | M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)(v)_{\mathscr{B}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ = \{v \in V | (v)_{\mathscr{B}} \text{ appartiene al null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\} \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned}\dim\ker F &= \\ &= \dim(\text{null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)) = \\ &= \dim V - \operatorname{rank} M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \\ &= \dim V - \operatorname{rank} F\end{aligned}$$

$$\dim V = \dim\ker F + \operatorname{rank} F$$

Questo sopra enunciato è il teorema di nullità più rango in termini di una funzione lineare.

Esercizio Sia $F : V \to W$ lineare. Fisso $w_0 \in W$, e definisco

$$F^{-1}(w_0) = \{v \in V | F(v) = w_0\}$$

Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché $F^{-1}(w_0)$ sia sottospazio.

Soluzione

Esercizio Sia $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $V, 3-$dim, $\mathscr{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $W, 4 - \dim$

Sia $g : V \to W$ la funzione lineare determinata dalle relazioni

$$\begin{cases} g(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3 \\ g(v_2) = w_1 + w_2 + w_4 \\ g(v_3) = w_2 + w_3 - w_4 \end{cases}$$

Si calcolino $g(V)$ e $\ker g$

Soluzione Possiamo calcolare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare $\ker g$ devo calcolare il null-space di $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Quindi

$$\ker g = \{-\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 | \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2 - v_3)$$

$g(V)$ ha dimensione 2. Per esercizio si trovi una base di $g(V)$

Notazione Spesso l'immagine di una funzione lineare F si indica con $\mathrm{Im}(F)$

Teorema VI Sia $F : V \to W$ una funzione lineare tra spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

F è iniettiva $\iff$ F porta insiemi liberi di vettori di V in insiemi liberi di vettori di W

dim. **(VI)**

" $\implies$ " Supponiamo F iniettiva e sia $\{v_1, \cdots, v_l\} \subseteq V$ un insieme libero, e dimostriamo che $\{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è un insieme libero in W

Considero $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ tali che

$$\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \cdots + \lambda_l F(v_l) = \underline{0}_W$$

Poiché F è lineare risulta

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l) = \underline{0}_W$$

$\implies \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l \in \ker F$, ma poiché F iniettiva $\ker F = \{\underline{0}_W\}$

$\implies \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = \underline{0}_V$, ma $\{v_1, \cdots, v_l\}$ è libero

$\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$

$\implies \{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è libero

"$\impliedby$" Per ipotesi F porta insiemi liberi in insiemi liberi. Si fissa $v \in V$, $v \neq \underline{0}_V$, quindi $\{v\}$ è libero

$\implies \{F(v)\}$ è libero

$\implies F(v) \neq \underline{0}_W$

$\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$

$\implies F$ è iniettiva $\square$

Definizione Una funzione lineare sia iniettiva che suriettiva si dice un isomorfismo

$F : V \to W$ è un isomorfismo $\iff$ $\mathrm{Im}(F) = W$ e $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

Teorema VII

1. Sia $F : V \to W$ lineare con V, W finitamente generati e tali che $\dim V = \dim W$.

   F è iniettiva $\iff$ F è suriettiva

2. $F : V \to V$ lineare con V finitamente generato è un isomorfismo $\iff$ iniettiva $\iff$ suriettiva

Definizione Un isomorfismo $F : V \to V$ si dice un automorfismo di V

dim. **(VII)**

1. $\dim V = \dim W$, $\dim V = \dim\ker(F) + \dim\mathrm{Im}(F)$

   $\implies \dim W = \dim\ker(F) + \dim\mathrm{Im}(F)$

   - Se F è suriettiva

     $\implies \dim W = \dim\mathrm{Im}(F)$

     $\implies \dim\ker(F) = 0$

     $\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$

     $\implies$ F è iniettiva

   - Se F è iniettiva

     $\implies \dim\ker F = 0$

     $\implies \dim W = \dim\mathrm{Im}F$

     $\implies W = \mathrm{Im}F$

     $\implies$ F è suriettiva

2. Segue dal punto 1. □

Esempio (7.6) V spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, $\mathscr{B}$ base di V

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{L_{\mathscr{B}}} \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

è un isomorfismo

7.5 Proprietà delle funzioni lineari

8 nov 2021

Proposizione *p*.viii La composizione di funzioni lineari è sempre una funzione lineare

dim. **(*p*.viii)** Siano V, W, Z spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $F : V \to W$ $G : W \to Z$ funzioni lineari, e prendiamo

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} Z$$

ovvero $G \circ F$, quindi $G \circ F(v) = G(F(v))$

Siano $v, w \in V$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$

$$G \circ F(\lambda v + \mu w) =$$

dato che F è lineare

$$= G(F(\lambda v + \mu w)) = G(\lambda F(v) + \mu F(w)) =$$

dato che G è lineare

$$= \lambda G(F(v)) + \mu G(F(w))) = \lambda(G \circ F)(v) + \mu(G \circ F)(w)$$

Proposizione *p*.ix Siuano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, sia $F : V \to W$ lineare biettiva (F è un isomorfismo),

$$F^{-1} : W \to V \text{ è lineare}$$

Questa proprietà ci mostra quanto sia rigida la linearità di una funzione

dim. **(*p*.ix)** $F^{-1}(a)$ è l'unico $x \in V$ tale che $F(x) = a$

Siano $a, b \in W$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$, dimostro che

$$F^{-1}(\lambda a + \mu b) = \lambda F^{-1}(a) + \mu F^{-1}(b)$$

Denoto $x = F^{-1}(a)$ e $y = F^{-1}(b)$: ciò significa $F(x) = a$ e $F(y) = b$

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \lambda F(y) = \lambda a + \mu b$$

$\implies$ per come è definita F^{-1} questo implica

$$F^{-1}(\lambda a + \mu b) = \lambda x + \mu y = \lambda F^{-1}(a) + \mu F^{-1}(b)$$

$\implies$ F^{-1} è lineare $\square$

Esempi (7.7)

- $V = \mathbb{K}^n$, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile,

$$F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se A è invertibile, esiste $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{Id}$ dove $\mathrm{Id} \in \mathbb{K}^{n,n}$ è la matrice identita.

Posso considerare

$$F_A^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$F_{A^{-1}} \circ F_A(x) = F_{A^{-1}}(F_A(x)) = A^{-1}(Ax) = \mathrm{Id} \cdot x = x$$

$\implies$ $F_{A^{-1}} \circ F_A$ è la funzione identità $I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$\implies$ F_A è invertibile e la sua inversa è $F_{A^{-1}}$

- Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, finitamente generato.

  Fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V,

$$F : V \to \mathbb{K}^n$$
$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  funzione lineare iniettiva, poiché il suo nucleo è banale; poiché V e $\mathbb{K}^n$ hanno la stessa dimensione, la funzione è un isomorfismo

  Si noti che

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  con un unico 1 nella posizione i-esima, quindi la base di V viene portata tramite F nella base canonica di $\mathbb{K}^n$

Definizione Due spazi vettoriali V, W sullo stesso campo $\mathbb{K}$ sono isomorfi se esiste $F : V \to W$ isomorfismo

Proposizione $\boldsymbol{p}$**.x** Supponiamo che V e W siano due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, entrambi finitamente generati.

V è isomorfo a $W \iff V$ e W hanno la stessa dimensione

dim. **(*p*.x)**

" $\implies$ " Supponiamo che esiste $F : V \to W$ isomorfismo,

F iniettiva $\implies \dim \operatorname{Im}(F) = \dim V$

F suriettiva $\implies \dim F(V) = \dim W$

$\implies \dim V = \dim W$

" $\impliedby$ " Supponiamo $\dim V = \dim W = n$. Sia $\mathscr{B}$ base di V e $\mathscr{C}$ base di W

$$\begin{aligned} F : V &\to \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

un isomorfismo,

$$\begin{aligned} G : W &\to \mathbb{K}^n \\ w &\mapsto (w)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

un isomorfismo

$$V \xrightarrow{F} \mathbb{K}^n \xleftarrow{G} W \quad \implies \quad V \xrightarrow{F} \mathbb{K}^n \xrightarrow{G^{-1}} W$$

Considero $G^{-1} \circ F$, biettiva

$\implies G^{-1} \circ F$ è un isomorfismo

$\implies V, W$ sono isomorfi $\square$

7.6 Funzioni lineari e cambiamenti di base

Siano V, W spazi vettoriali su un campo K, entrambi finitamente generati

$$\dim V = n, \dim W = m$$

Considero $F : V \to W$ lineare, e fisso $\mathscr{B}$ base di V e $\mathscr{C}$ base di W.

F è rappresentata da una matrice $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \in \mathbb{K}^{m,n}$ tramite la relazione

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\text{iso}"'] & W \arrow[d, "\text{iso}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "F_A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Questo è un diagramma commutativo

Considero altre due base $\mathscr{B}'$ di V e $\mathscr{C}'$ di W.

Rispetto a queste basi, ad F corrisponde un'altra matrice $M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$, voglio campire come $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$ sono relazionate.

Indico $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $A' = M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$

Sia $v \in V$ quindi

$$(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in \mathbb{K}^n$$

e

$$(v)_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = x' \in \mathbb{K}^n$$

So che $x = Px'$ con $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Considero $F(v) \in W$

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y \in \mathbb{K}^m$$

$$(F(v))_{\mathscr{C}'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = y' \in \mathbb{K}^m$$

So che $y = Qy'$, con Q matrice del cambiamento di base da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}'$, dove $Q \in \mathbb{K}^{m,m}$ è invertibile

$$y = Ax,\ y' = A'x,\ x = Px',\ y = Qy'$$

$Qy' = Ax \implies Qy' = APx'$

$\implies y' = Q^{-1}APx'$

$\implies A'x' = Q'APx' \ \forall x' \in \mathbb{K}^n$

$\implies A' = Q^{-1}AP$

7.6.1 Caso particolare

$W = V$, quindi $F : V \to V$ e considero $\mathscr{C} = \mathscr{B}'$ e $\mathscr{C}' = \mathscr{B}'$ ($\implies Q = P$).

In questo caso la formula implica $A' = P^{-1}AP$ dove P è la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$

Definizione Due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono simili se esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

Esercizio Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrici simili

$\implies \det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

Soluzione Supponiamo A, B simili, allora esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

Per il teorema di Binet:

$$\det B = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$$

Poi

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr} A$$

Poiché P e P^{-1} hanno rango n, risulta

$$\operatorname{rank}(P^{-1}AP) = \operatorname{rank} A$$

Esercizio Si verifichi che la similitudine (la proprietà di due matrici di essere simili) in $\mathbb{K}^{n,n}$ è una relazione di equivalenza

Soluzione Indico con $\sim$ la relazione

$$A \sim B \text{ se esiste } P \in \mathbb{K}^{n,n} \text{ invertibile} \mid B = P^{-1}AP$$

- $\sim$ è riflessiva, $A = (\mathrm{Id})^{-1}A \cdot \mathrm{Id} \implies A \sim A$

- $\sim$ è simmetrica, infatti, se $A \sim B$

  $\implies B = P^{-1}AP$

  $\implies A = PBP^{-1}$

  $\implies B \sim A$

- Supponiamo $A \sim B$ e $B \sim C$ e dimostro $A \sim C$

$$A \sim B \implies B = P^{-1}AP \quad B \sim C \implies C = Q^{-1}BQ$$

  $\implies C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$

  $\implies A \sim C$ $\square$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ considero la base canonica $\mathscr{B} = e_1, e_2, e_3$ e la base data dai tre vettori

$$v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, 0, -2)$$

1. Si verifichi che $\mathscr{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$
2. Sia F la funzione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinata dalle relazioni

$$\begin{aligned} F(v_1) &= v_1 + v_2 \\ F(v_2) &= 2v_1 - v_2 \\ F(v_3) &= -v_2 + v_3 \end{aligned}$$

   Si trovi la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ e la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica $\mathscr{B}$

Soluzione

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   si noti che $\det A \neq 0$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti, ovvero sono una base

2.

$$M^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$: per quanto visto oggi $M^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F) = P^{-1}M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)P$
$\implies M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = PM^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F)P^{-1}$

Definizione Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $F : V \to V$ lineare. Se $\mathscr{B}$ è la base fissata di V, allora $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, si definisce

$$\det F = \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F))$$

e

$$\operatorname{tr} F = \operatorname{tr}(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F))$$

Per un risultato precedente, $\operatorname{tr} F$ e $\det F$ sno ben definiti, ovvero non dipendono dalla base fissata, mentre $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ sì

Attenzione Esistono matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tali che $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\det A = \det B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ ma non simili

Esempio (7.8)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

Notiamo che $\det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, ma A e B non sono simili, infatti

$$P^{-1}AP = \operatorname{Id} \forall P \in \operatorname{GL}(2, \mathbb{R}), B \neq \operatorname{Id}$$

7.7 Spazio delle funzioni lineari

7.7.1 Somma di funzioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Siano $F, G : V \to W$ lineari. Si introduce

$$\begin{aligned} F + G : V &\to W \\ v &\mapsto F(v) + G(v) \end{aligned}$$

funzione da V in W

Esercizio Si dimostri che $F + G$ è funzione lineare

Soluzione Da fare

7.7.2 Prodotto per scalari di funzioni lineari

Si introduce inoltre, se $\lambda \in \mathbb{K}$, la funzione

$$\begin{aligned} \lambda F : V &\to W \\ v &\mapsto \lambda F \end{aligned}$$

Esercizio Si dimostri che λF è funzione lineare

Soluzione Da fare

Indico con

$$L(V, W) = \{F : V \to W | F \text{ lineare}\}$$

$L(V, W)$ eredita una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove il vettore nullo di $L(V, W)$ è la funzione costante

$$\begin{aligned} 0_{L(V,W)} : V &\to W \\ v &\mapsto \underline{0}_W \end{aligned}$$

Suppongo che V e W abbiano dimensione finita, $\dim V = n, \dim W = m$. 9 nov 2021
Fisso $\mathscr{B}$ base di V e $\mathscr{C}$ base di W, ogni $F \in L(V, W)$ induce la matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \in \mathbb{K}^{m,m}$

Abbiamo quindi una funzione

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}} : L(V, W) \to \mathbb{K}^{m,m}$$

Esercizio La funzione $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali:

- $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è lineare cioè

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F + G) = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) + M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(G)$$
$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda F) = \lambda M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$$

- $\ker(M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}) = \underline{0}_{L(V,W)} \implies M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è iniettiva

- $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è suriettiva, cioè

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}\Big(L(V, W)\Big) = \mathbb{K}^{m,n}$$

Soluzione Da fare

7.8 Composizione di funzioni lineari

Siano V, W, Z spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$.

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} Z \implies G \circ F : V \to Z \text{ è lineare}$$

Supponiamo che V, W, Z abbiano dimensione finita. Siano $\mathscr{B}$ una base di V, $\mathscr{C}$ una base di W e $\mathscr{D}$ una base di Z. Abbiamo $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G)$ matrici, con

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}} = (F(v))_{\mathscr{C}} \text{ e } M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G) \cdot (w)_{\mathscr{C}} = (G(v))_{\mathscr{D}}$$

Considero

$$\begin{aligned}\Big((G \circ F)(v)\Big)_{\mathscr{D}} = \Big(G(F(v))\Big)_{\mathscr{D}} &= \\ &= M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G) \cdot (F(v))_{\mathscr{C}} = \\ &\qquad = M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G) \cdot M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

cioè la matrice che rappresenta $G \circ F$ rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$ è il prodotto della matrice che rappresenta G per la matrice che rappresenta F

Esercizio Siano $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari definite come

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

$$H\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

Si determini (se esiste) una funzione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $H = G \circ F$

Soluzione F è rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

H è rappresentata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sia C la matrice che rappresenta G

$\implies C$ soddisfa $B = C \cdot A$ con B e A note e C matrice incognita. Studio il sistema matriciale, che posso scrivere nella forma ${}^tB = {}^tAX$, con $X = {}^tC$

Osservazione (7.2) Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{p,m}$, con $BA \in \mathbb{K}^{p,n}$. Si noti che

$$\operatorname{rank} BA \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

Motivazione geometrica: A induce

$$\begin{aligned} F_A : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^m \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

e $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im}(F_A)$

B induce

$$\begin{aligned} F_B : \mathbb{K}^m &\to \mathbb{K}^p \\ x &\mapsto Bx \end{aligned}$$

e $\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im}(F_B)$

BA induce

$$\begin{aligned} F_{BA} : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^p \\ x &\mapsto BAx \end{aligned}$$

e $\operatorname{rank} BA = \dim \operatorname{Im}(F_{BA})$

Ma $\operatorname{Im}(F_{BA}) \subseteq \operatorname{Im}(F_B)$, perché $F_{BA} = F_B \circ F_A$:

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{F_A} \mathbb{K}^m \xrightarrow{F_B} \mathbb{K}^p$$

$\implies \dim \mathrm{Im}(F_{BA}) \subseteq \dim \mathrm{Im}(F_B) \implies$

$$\operatorname{rank} BA \leq \operatorname{rank} B$$

Si noti che $\ker F_A \subseteq \ker F_{BA}$; per il teorema del rango

$$n - \operatorname{rank} A \leq n - \operatorname{rank} BA$$

$\implies \operatorname{rank} BA \leq \operatorname{rank} A$

Ottengo quindi che

$$\operatorname{rank} BA \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

Definizione Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $F : V \to V$ lineare (un automorfismo). F è *nilpotente* se $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k-\text{volte}} = 0$$

con $0 : V \to V$ funzione identicamente nulla

Esempio (7.9)

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

F è lineare e $F \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, F è nilpotente.

F è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, infatti $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definizione Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che A^k è la amtrice nulla per qualche $k \in \mathbb{N}$ si dice nilpotente

Definizione Data $F : V \to V$ lineare nilpotente, F ha grado di nilpotenza k se

$$\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{k-\text{volte}} = 0 \wedge \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{k-1-\text{volte}} \neq 0$$

Esercizio Si trovi una funzione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nilpotente con grado di nilpotenza 2

Soluzione Da fare

$F : V \to V$ lineare con V di dimensione finita. Possiamo usare il teorema di nullità più rango:

$$\dim V = \dim \ker(F) + \dim(\mathrm{Im}(F))$$

ma in generale

$$V \neq \ker(F) + \mathrm{Im}(F)$$

8 Spazi vettoriali Euclidei

Si consideri V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

Definizione Un prodotto scalare su V è una funzione $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:

1. $v \cdot w = w \cdot v$ (simmetria)
2. $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$
3. $(\lambda v) \cdot w = \lambda(v \cdot w)$
4. $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0$ se e solo se $v = \underline{0}$ ($\cdot$ è definito positivo)

Si noti che $\cdot$ è lineare in ogni componente

Esempio (8.1) In V_3 è definito il prodotto scalare $v \cdot w = ||v||\,||w|| \cos \hat{vw}$. "$\cdot$" definisce un prodotto scalare in V_3

Conseguenza Su ogni spazio vettoriale di dimensione finita esiste un prodotto scalare, infatti se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, si fissa una base $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ si definisce per $x, y \in V$

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Esempio (8.2) Anche $\mathbb{R}^{m,n}$ ha un prodotto scalare canonico, dato da

$$A \cdot B := \operatorname{tr}({}^tB \cdot A)$$

1. Per le proprietà della traccia $\operatorname{tr}({}^tB{\cdot}A) = \operatorname{tr}({}^t({}^tB{\cdot}A)) = \operatorname{tr}({}^tAB) = B{\cdot}A$

   $\implies$ $\cdot$ è simmetrico

2. $$(A + C) \cdot B = \operatorname{tr}({}^tB(A + C)) = \operatorname{tr}({}^tBA) + \operatorname{tr}({}^tBC) = A \cdot B + C \cdot B$$

   $\implies$ la proprietà 2 è verificata

3. $$(\lambda A) \cdot B = \operatorname{tr}({}^tB(\lambda A)) = \lambda \operatorname{tr}({}^tBA) = \lambda A \cdot B$$

   $\implies$ la proprietà 3 è verificata

4. $A \cdot A = \operatorname{tr}({}^tAA)$;

Esempio (8.3) Si consideri lo spazio vettoriale

$$\mathbb{R}_n[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] | \deg p \leq n\}$$

spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $n + 1$

Se $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ possiamo scrivere $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$

Si definisce $p \cdot q$ come

$$p \cdot q := \sum_{k=0}^n a_k b_k$$

Definizione Uno *spazio vettoriale euclideo* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita in cui è stato fissato un prodotto scalare, indicato generalmente con $(V, \cdot)$

In uno spazio vettoriale euclideo è definita la norma di un vettore come

$$||v|| = \sqrt{v \cdot v}$$

$||v||$ definisce una funzione $||v|| : V \to \mathbb{R}_+$ dove $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$. Si noti che

$$||\lambda v|| = \sqrt{(\lambda v) \cdot (\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 v \cdot v} = |\lambda| \sqrt{v \cdot v} = |\lambda| \, ||v||$$

Esempio (8.4) Su $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare

$$x \cdot y = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3.$$

Rispetto a questo prodotto scalare risulta

$$||x|| = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2}.$$

Definizione Due vettori v, w in uno spazio vettoriale euclideo sono *ortogonali* se $v \cdot w = 0$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare

$$x \cdot y = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3$$

si trovino tutti i vettori ortogonali a $(1, 1, 0)$

Soluzione Da fare

Proposizione *p*.xi La norma associata ad un prodotto scalare ha le seguenti proprietà: 11 nov 2021

1. $||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$
3. Teorema di Pitagora:
   Siano $v, w \in V$. $vw = 0 \iff ||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$
4. Disuguaglianza di Cauchy-Swartz: $|v \cdot w| \leq ||v|| \, ||w||$

   L'uguaglianza vale $\iff$ v e w sono linearmente dipendenti
5. Disuguaglianza triangolare: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

Osservazione (8.1) $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 1.

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \cdot y = xy$, dove a destra vi è la moltiplicazione in $\mathbb{R}$. $\cdot$ è un prodotto scalare.

Si noti che

$$||x|| = \sqrt{x * x} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La 5. è coerente con la disuguaglianza triangolare soddisfatta dal valore assoluto in $\mathbb{R}$

dim. **(p.xi)**

1. 2. già viste

3. si considera $||v+w||^2$

$$\begin{aligned}||v+w||^2 = (v+w)\cdot(v+w) = \\ = v\cdot v + v\cdot w + w\cdot v + W\cdot w = \\ = ||v||^2 + 2v\cdot w + ||w||^2\end{aligned}$$

Segue la proprietà

4. Sicuramente la formula vale se $v = \underline{0}$ o $w = \underline{0}$. Supponiamo $v, w \neq \underline{0}$. Per $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $p(\lambda) = ||\lambda v + w||^2$

$$p(\lambda) = (\lambda v + w)\cdot(\lambda v + w) = \lambda^2||v||^2 + 2\lambda v\cdot w + ||w||^2$$

$\implies p(\lambda) \in \mathbb{R}_2[\lambda]$

Sappiamo che $p(\lambda) \geq 0 \;\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$\implies$ il suo Δ soddisfa $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = 4(v\cdot w)^2 - 4||v||^2||w||^2$$

Si ottiene che $(v\cdot w)^2 \leq ||v||^2||w||^2$

$\implies |v\cdot w| \leq ||v||\,||w||$

Vale l'uguaglianza $\iff \Delta = 0$, quindi se $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $p(\lambda) = 0$

$p(\lambda) = 0 \iff ||\lambda v + w|| = 0 \iff \lambda v + w = \underline{0}$

$\iff v$ e w sono linearmente dipendenti

5. $||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2\,v\cdot w$.

Per Cauchy-Swartz $|v\cdot w| \leq ||v||\,||w||$

$\implies -||v||\,||w|| \leq |v\cdot w| \leq ||v||\,||w||$

$\implies ||v+w||^2 \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2\,||v||\,||w|| = (||v||\,||w||)^2$

$\implies ||v+w|| \leq ||v||\,||w||$ $\square$

Applicazione di Cauchy-Swartz Siano $v, w \in V$, $v, w \neq 0$: so che $|v \cdot w| \leq ||v|| \, ||w||$

$$\implies -1 \leq \frac{v \cdot w}{||v|| \, ||w||} < 1$$

$\implies \exists\, \theta \in [0, \pi]$ tale che $\frac{v \cdot w}{||v|| \, ||w||} = \cos\theta$

$$\theta = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}\right)$$

θ è per definizione l'angolo tra v e w, e dipende dal prodotto scalare considerato

Osservazione (8.2)

- Se considero V_3, il prodotto scalare è stato definito come $v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos v\hat{w}$. Anche in questo caso l'angolo che formano i due vettori è
$$v\hat{w} = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}\right)$$
- Se $v, w \in V$ e $v, w \neq 0$ si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0 \iff$ l'angolo formato dai due vettori sia $\frac{\pi}{2}$

Definizione Se A è un insieme si definisce una *distanza* su A come una funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}_+$ che soddisfa le seguenti proprietà

1. $d(a, b) = 0 \iff a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (Disuguaglianza triangolare)

(A, d) si dice uno *spazio metrico*.

Esempio (8.5) $\mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = |x - y|$

Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale euclideo si definisce $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$

$$d(v, w) = ||v - w||.$$

Per la proposizione precedente d definisce una distanza su V

Definizione Se $v \in V$ con $v \neq \underline{0}$, il versore di v è il vettore

$$\text{vers}(v) := \frac{v}{||v||}$$

Osservazione (8.3) $||\text{vers}(v)|| = \left|\left| \frac{v}{||v||} \right|\right| = \frac{||v||}{||v||} = 1$

v ha la stessa direzione, stesso verso di v ma norma 1

8.1 Basi ortogonali e Basi ortonormali

$(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base.

- $\mathscr{B}$ è ortogonale se $v_i \cdot v_j = 0 \; \forall \, i \neq j$
- $\mathscr{B}$ è ortonormale se è ortogonale e tutti i vettori della base hanno norma 1

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

In generale si scrive δ_{ij} per indicare

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

e prende il nome di "Delta di Knonecker"

Esempi (8.6)

- La base canonica in $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard ($x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$)
- In $\mathbb{R}^{m,n}$ la base canonica E_{ij} è ortonormale rispetto al prodotto scalare:

$$A \cdot B = \text{tr}({}^t BA)$$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare

$$x \cdot y = 5x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$$

si trovi una base ortonormale

Soluzione $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= 5 \\ e_1 \cdot e_2 &= 0 \\ e_1 \cdot e_3 &= 0 \\ e_2 \cdot e_2 &= 3 \\ e_2 \cdot e_3 &= 0 \\ e_3 \cdot e_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\mathscr{B}$ è una base ortogonale, ma non ortonormale.

$$\mathscr{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} e_1, \frac{1}{\sqrt{3}} e_2, \frac{1}{2} e_3 \right\}$$

è una base ortonormale

Esercizio Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, sia $\{v_1, \cdots, v_l\} \subseteq V$ tale che $v_i \cdot v_j = \delta_{ij}\ \forall\, i, j = 1, \cdots, l$

Si dimostri che $\{v_1, \cdots, v_l\}$ sia sempre libero.

$(\implies l \leq \dim V$, $l = \dim V \iff \{v_1, \cdots, v_l\}$ è una base$)$

Soluzione Suppongo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = 0$$

e dimostro $\lambda_i = 0\ \forall\, i = 1, \cdots, l$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l) \cdot v_i = 0 \\ \lambda_1 v_1 v_i + \lambda_2 v_2 v_i + \cdots + \lambda_l v_l v_i = 0 \end{aligned}$$

$\implies \lambda_i = 0$

$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_3 = 0$ $\square$

Sia $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo e $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale di V rispetto a $\cdot$

Sia $v \in V$,

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

quindi

$$v \cdot e_r = \sum_{k=1}^{n} x_k(e_k e_r)$$

$\implies x_r = v \cdot e_r$

Rispetto ad una base ortonormale ogni v si scrive come

$$v = \sum_{k=1}^{n} (v \cdot e_k) e_k$$

Teorema VIII (Gram-Schmidt) Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo e sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base.

Esiste $\mathscr{B}' = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale di $(V, \cdot)$ tale che

$$\mathscr{L}(v_1, \cdots, v_k) = \mathscr{L}(e_1, \cdots, e_k) \quad \forall\, k = 1, \cdots, n$$

dim. **(VIII)** La dimostrazione corrisponde all'*algoritmo di Gram-Schmidt* $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Per e_1 non ho facoltà di scelta:

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$

Sia $e_2' = v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1$, si noti che $e_2' \cdot e_1 = v_2 \cdot e_1 - v_2 \cdot 1 = 0$

e_2' è ortogonale a e_1; $\mathscr{L}(e_1, e_2') = \mathscr{L}(v_1, v_2)$. Ad e_2' manca solo la proprietà di avere norma 1

A questo punto si può definire e_2 come

$$e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1}{||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1||}$$

Itero fino ad ottenere

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i=1}^{j-1}(v_j \cdot e_i)e_i}{||v_j - \sum_{i=1}^{j-1}(v_j \cdot e_i)e_i||}$$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathscr{B} = v_1, v_2, v_3$, 15 nov 2021

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2).$$

Si applichi l'algoritmo per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$$

Soluzione $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, con $||v_1|| = \sqrt{2}$: quindi

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1}{||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1||}$; $v_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1 =$$
$$= (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1,2,1)$$

$$||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1|| = \frac{1}{2}||(-1,2,1)|| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$
$$\implies e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$$

$e_3 = \frac{v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1}{||v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1||}$; $v_3 \cdot e_1 = 4/\sqrt{2}$; $v_3 \cdot e_2 = 2/\sqrt{6}$

$$v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1 =$$
$$= (2,1,2) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) - \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) =$$
$$= (2,1,2) - \frac{1}{3}(-1,2,1) - 2(1,0,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{3}(1,1,-1)$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

$\implies \{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormale.

8.2 Matrici ortogonali

Definizione Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, A si dice ortogonale se ${}^tA = A^{-1}$ (ortogonale $\implies$ invertibile)

Proposizione *p*.xii Valgono le seguenti proprietà:

1. se A è ortogonale $\implies$ A^{-1} è ortogonale
2. se A è ortogonale $\implies$ ${}^tA$ è ortogonale
3. se A, B sono ortogonali $\implies$ AB è ortogonale
4. se $A \in \mathrm{O}(n)$ $\implies$ $\det(A) \in \{-1, 1\}$

Indico con

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A \text{ è ortogonale}\} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

Definizione Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Un sottoinsieme H di G è un sottogruppo se

$$h^{-1} \in H \,\forall\, h \in H \quad \text{e} \quad h_1 \cdot h_2 \in H \,\forall\, h_1, h_2 \in H$$

Le prime due proprietà implicano che $\mathrm{O}(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

dim. **(*p*.xii)**

1. $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies {}^tA = A^{-1}$

   $\implies A = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

   $\implies A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$

2. $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies A\,{}^tA = \mathrm{Id}$

   $\implies$ ${}^tA$ è invertibile e A è la sua inversa

3. A, B ortogonali

   $\implies A\,{}^tA = \mathrm{Id}$ e $B\,{}^tB = \mathrm{Id}$

   $\implies AB\,{}^t(AB) = AB\,{}^tB\,{}^tA = A\,{}^tA = \mathrm{Id}$

   $\implies AB\,{}^t(AB) = \mathrm{Id}$

   $\implies AB \in \mathrm{O}(n)$

4. Se $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies A^tA = \mathrm{Id}$

   $\implies \det({}^tAA) = 1$

   $\overset{\text{Binet}}{\implies} \det({}^tA)\det(A) = 1$

   $\implies (\det(A))^2 = 1$

   $\implies \det(A) \in \{-1, 1\}$

Ne risulta che

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\} \amalg \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = -11\}$$

con $\amalg$ "unione disgiunta"

Si indica con $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$ sottogruppo di $\mathrm{O}(n)$, detto *delle matrici ortogonali speciali*, infatti se $A, B \in \mathrm{SO}(n)$

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1$

  $\implies A \in \mathrm{SO}(n)$;

- $\det(AB) = \det A \det B = 1$

  $\implies A, B \in \mathrm{SO}(n)$

Teorema IX Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Sono fatti equivalenti:

1. $A \in \mathrm{O}(n)$
2. Le righe di A, $R_1, \cdots, R_n$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico
3. Le colonne di A, $C_1, \cdots, C_n$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico

***dim.* (IX)**

$2 \iff 3$ poiché $A \in \mathrm{O}(n) \iff {}^tA \in \mathrm{O}(n)$

$2 \iff 1$ Infatti $A \in \mathrm{O}(n) \iff A^tA = \mathrm{Id}$, $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_n \end{pmatrix}$

$$(A^tA)_{ij} = R_i \cdot R_j \text{ dove } \cdot \text{ è il prodotto scalare canonico in } \mathbb{R}^n.$$

Quindi

$A^tA = \mathrm{Id} \iff R_i \cdot R_j = \delta_{ij}$

$\iff \{R_1, \cdots, R_n\}$ base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ $\square$

Descriviamo O(2) e SO(2)

Descrivo tutte le basi ortonormali di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, una base ortonormale è della forma $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ con $||e_1|| = ||e_2|| = 1$, e $e_1 \cdot e_2 = 0$

Fissiamo e_1. Sia α l'angolo tra e_1 e l'asse x

$\implies e_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

Per e_2 ho solo le due possibilità:

- $e_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$
- $e_2 = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$

Ogni $A \in \mathrm{O}(2)$ è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

oppure

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

Teorema X Considero $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo, e $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale. Sia $\mathscr{B}'$ una seconda base

$\mathscr{B}'$ è ortonormale $\iff$ la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ è ortogonale

dim. **(X)** $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ ortonormale, $\mathscr{B}' = \{v_1, \cdots, v_n\}$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \,\forall\, i = 1, \cdots, n$$

$\mathscr{B}'$ è ortonormale se e solo se

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \,\forall\, i, j = 1, \cdots, n$$

Risulta

$$v_i \cdot v_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k\right) \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js} e_s\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ik} a_{js} \underbrace{e_k e_s}_{\delta_{ks}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

Quindi $\mathscr{B}'$ è ortonormale

$\iff \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$

$\iff$ le righe della matrice $A = (a_{ij})$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico

$\underset{\text{per il teorema}}{\iff}$ A è ortogonale

$\iff$ la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}' \in \mathrm{O}(n)$ $\square$

Esercizio Si trovi in $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico una base ortonormale il cui primo vettore sia

$$u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Soluzione Approccio risolutivo: trovo v in $\mathbb{R}^3$ ortogonale a u, con $||v|| = 1$ e quindi si considera z come $z = u \wedge v$

$\implies \{u, v, z\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

9 Orientazione di uno spazio vettoriale (reale)

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ finitamente generato, siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ due basi e sia $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice del cambiamento di base $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

$\implies \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) \neq 0$

$\implies$ ci sono due possibilità:

1. $\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$: si dice che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ hanno la stessa orientazione
2. $\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) < 0$: si dice che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ hanno orientazione opposta

Esempio (9.1) Consideriamo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Le basi di $\mathbb{R}$ sono del tipo $\mathscr{B} = \{t_0\}$, con $t_0 \neq 0$

$\Longrightarrow$ $\mathscr{B} = \{t_0\}$ e $\mathscr{B}' = \{t_0'\}$ hanno la stessa orientazione

$\iff$ t_0 e t_0' hanno lo stesso segno

Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ finitamente generato. Basi(V) insieme di tutte le basi di V. In Basi(V) si considera la relazione $\sim$ dove due basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ sono in relazione

$\iff$ hanno la stessa orientazione

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \iff \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$$

Proposizione *p*.xiii $\sim$ è una relazione di equivalenza e nel quoziente Basi$(V)/\sim$ ci sono solo due classi (se $\dim V \geq 1$).

Esempio (9.2) $\text{Basi}(\mathbb{R}) = \Big\{\{t_0\} \,|\, t_0 \neq 0\Big\}$, $\{t_0\} \sim \{t_0'\} \iff t_0$ e t_0' hanno lo stesso segno.

$\sim$ è una relazione di equivalenza, e Basi$(R)/\sim$ consta di sole due classi, infatti, prendendo le classi

$$[\{1\}], [\{-1\}],$$

una qualsiasi base $\{t_0\}$ o è in relazione con $[\{1\}]$ o con $[\{-1\}]$

***dim.* (*p*.xiii)** Idea della dimostrazione: dimostro che $\sim$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

- $\sim$ riflessiva, infatti se $\mathscr{B} \in \text{Basi}(V)$ si ha che $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \text{Id}$

  $\Longrightarrow \det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} = 1$

  $\Longrightarrow \mathscr{B} \sim \mathscr{B}$

- $\sim$ simmetrica, infatti siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}' \in \text{Basi}(V)$, supponiamo $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$, cioè $\det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} > 0$

  $\Longrightarrow (v)_{\mathscr{B}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v)_{\mathscr{B}'} \ \forall\, v \in V$

  $\iff (v)_{\mathscr{B}'} = (M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}(v)_{\mathscr{B}} \ \forall\, v \in V$, cioè $M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = (M^{\mathscr{B},\mathscr{B}})^{-1}$

  $\Longrightarrow \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}}) = \frac{1}{\det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}} > 0$

  $\Longrightarrow \mathscr{B}' \sim \mathscr{B}$

- $\sim$ transitiva, infatti siano $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}'' \in \text{Basi}(V)$ con
  - $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \iff \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$
  - $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}'' \iff \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) > 0$

$$\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) = \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) = \overset{\text{Binet}}{=} \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) \cdot \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) > 0 \quad \square$$

Per dimostrare il numero di elementi dell'insieme quoziente: 16 nov 2021

caso 1. $\dim V \geq 2$; date $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ e $\mathscr{B}' = \{v_2, v_1, \cdots, v_n\}$; si osserva facilmente che $\mathscr{B}'$ non hja la stessa orientazione di $\mathscr{B}$.

In $\text{Basi}(V)/\sim$ ci sono sempre almeno 2 elementi. Dimostriamo che sono esattamente 2.

Considero $[\mathscr{B}]$ e $[]\mathscr{B}'] \in \text{Basi}(V)/\sim$, con $[\mathscr{B}] \neq [\mathscr{B}']$ e sia $\mathscr{B}'' \in \text{Basi}(V)/\sim$ tale che $\mathscr{B}'' \notin [\mathscr{B}]$

$\implies \det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}''} < 0$. Dimostro che $\mathscr{B}'' \in [\mathscr{B}']$

Infatti

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}$$

$$\overbrace{\implies}^{\text{Binet}} \det \underset{<0}{M^{\mathscr{B},\mathscr{B}''}} = \det \underset{<0}{M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}} \cdot \det \underset{>0}{M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$$

$\implies$ deduco che $\det M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} > 0$

$\implies \mathscr{B}' \in [\mathscr{B}'']$ $\square$

In generale V non ha un'orientazione canonica, ma nei casi in cui V abbia una base canonica $\mathscr{B}_0$

$\implies V$ ha l'orientazione canonica $[\mathscr{B}_0]$; ad esempio in $\mathbb{R}^n$ si considera la base canonica $\mathscr{B}_0 = \{e_1, \cdots, e_n\}$, e ci si riferisce a $[B_0]$ come all'orientazione di $\mathbb{R}^n$

10 Complementi ortogonali

Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo, e sia $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale. Si definisce

$$W^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0 \, \forall \, w \in W\}$$

Questi sono i vettori di V ortogonali a tutti i vettori di W, $W^\perp \subseteq V$

Esempi (10.1)

1. $W = \{\underline{0}\}$

   $\implies W^\perp = V$

2. $W = V$

   $\implies W^\perp = \{\underline{0}\}$

3. $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $\dim W = k$. Fisso $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_k\}$ base di W.

   Si osserva che

   $$W^\perp = \{v \in V \,|\, v \cdot w_r \,\forall\, r = 1, \cdots, k\}.$$

   Lo dimostro con la doppia inclusione. L'inclusione $\supseteq$ è ovvia, dimostro $\subseteq$.

   Sia $v \in V$ tale che $v \cdot w_r = 0 \;\forall\, r = 1, \cdots, k$. Sia $w \in W$ generico. Posso scrivere $w = a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k$ per qualche $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned} v \cdot w = v(a_1 w_1 + \cdots + a_k w_k) = \\ = a_1 v \cdot w_1 + a_2 v \cdot w_2 + \cdots + a_k v \cdot w_k = 0 \end{aligned}$$

   $\implies v \cdot w = 0 \;\forall\, w \in W$

   $\implies v \in W^\perp$

Esercizio Sia $W \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determinare $W^\perp$ rispetto al prodotto scalare canonico

Soluzione $\dim W = 1$. Una base di W è data da $\mathscr{B} = \{(1, -1, -, 1)\}$.

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y, z) \cdot (1, -1, -, 1) = 0\}$$

$$(x, y, z) \cdot (1, -1, -, 1) = x - y - z$$

$$W^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y - z = 0\} \quad \text{piano in } \mathbb{R}^3$$

Teorema XI Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora

1. $W^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V
2. $W \oplus W^{\perp} = V$
3. $(W^{\perp})^{\perp} = W$

dim. **(XI)**

1. Siano v_1, $v_2 \in W^{\perp}$, e λ, $\mu \in \mathbb{R}$, dimostriamo che $\lambda v_1 + \mu v_2 \in W^{\perp}$

   $$\begin{aligned} v_1 \in W^{\perp} &\implies v_1 \cdot w = 0 \,\forall\, w \in W \\ v_2 \in W^{\perp} &\implies v_2 \cdot w = 0 \,\forall\, w \in W \end{aligned}$$

   Sia $w \in W$

   $$(\lambda v_1 \cdot \mu v_2) \cdot w = \lambda \overbrace{v_1 \cdot w}^{0} + \mu \overbrace{v_2 \cdot w}^{0} = 0$$

   $\implies \lambda v_1 \cdot \mu v_2 \in W^{\perp}$

   $\implies W^{\perp}$ sottospazio vettoriale.

2. Supponiamo $\dim W = k$, sia $\{v_1, \cdots, v_k\}$ una base di W. Possiamo completare $\{v_1, \cdots, v_k\}$ ad una base

   $$\{v_1, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_n\}$$

   base di tutto V

   Utilizziamo l'algoritmo di Gram-Schmidt e troviamo una base ortonormale $\{e_1, \cdots, e_n\}$ di V tale che

   $$\mathscr{L}(e_1, \cdots, e_r) = \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_r) \quad \forall\, r = 1, \cdots, n.$$

   Quindi $\{e_1, \cdots, e_k\}$ è una base di W.

Sia $v \in V$. Possiamo scrivere

$$v = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r e_r$$

$v \in W^\perp \iff v \cdot e_i = 0 \ \forall\, i = 1, \cdots, k$

$\iff \underbrace{\sum_{r=1}^{n} (\lambda_r e_r) \cdot e_1}_{\lambda_i} = 0 \ \forall\, i = 1, \cdots, k$

$\iff \lambda_i = 0 \ \forall\, i = 1, \cdots, k$

$\iff v \in \mathscr{L}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$

Cioè $W^\perp = \mathscr{L}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$

$\implies V = \mathscr{L}(e_1, \cdots, e_k) + \mathscr{L}(e_{k+1}, \cdots, e_n) = W \oplus W^\perp$

In particolare $W \cap W^\perp = \{\underline{0}\}$, infatti se $\overline{v} \in W \cap W^\perp$

$\implies \overline{v} \cdot \overline{v} = 0$

$\implies \overline{v} = \underline{0}$

3. $(W^\perp)^\perp$:

$$v \in (W^\perp)^\perp \iff v \cdot z = 0 \, \forall\, z \in W^\perp \iff v \in W$$

Proposizione *p*.xiv Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, siano W_1 e $W_2 \in V$ sottospazi vettoriali

1. Se $W_1 \subseteq W_2 \implies W_2^\perp \subseteq W_1^\perp$
2. $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$
3. $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$

***dim.* (*p*.xiv)** Dimostrazione per esercizio

Esercizio Prendiamo $\mathbb{R}^{2,2}$ con il prodotto scalare canonico, considero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

e prendo $W = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = XA\}$ sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{2,2}$. Trovare $W^\perp$

Soluzione Trovo una base di W. Sia
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$
matrice generica in $\mathbb{R}^{2,2}$ e impongo $AX = XA$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_3 & x_2 + 3x_4 \\ -x_3 & -x_4 \end{pmatrix}$$
$$XA = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 3x_1 - x_2 \\ x_3 & 3x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

Otteniamo il sistema
$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = x_1 \\ x_2 + 3x_4 = 3x_1 - x_2 \\ x_3 = -x_3 \\ -x_4 = 3x_3 - x_4 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = \frac{3}{2}(x_1 - x_4) \\ x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \dim W = 2$$

Una base di W è data da
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Impongo per $Y \in \mathbb{R}^{2,2}$, $Y \cdot A_1 = Y \cdot A_2 = \underline{0}$
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y \cdot A_1 = \operatorname{tr}({}^tYA_1) &= \\ &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 2y_1 & 3y_1 \\ 2y_2 & 3y_2 \end{pmatrix} = 2y_1 + 3y_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y \cdot A_2 = \operatorname{tr}({}^tYA_2) &= \\ &= \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & -3y_1 + 2y_3 \\ 0 & -3y_2 + 2y_4 \end{pmatrix} = -3y_2 + 2y_4 \end{aligned}$$

Quindi

$$Y \in W^{\perp} \iff 2y_1 + 3y_2 = 0 \wedge -3y_2 + 2y_4 = 0$$
$$y_1 = -3/2y_2, \quad y_4 = 3/2y_2, \quad y_3 = y_3$$

Una base di $W^{\perp}$ è data da

$$A_3 = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$W = \mathscr{L}(A_3, A_4)$

Esercizio $\mathbb{R}^{n,n}$ con il prodotto scalare canonico,

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid {}^tA = A\} \qquad \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} \mid {}^tA = -A\}$$

Dimostrare $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})^{\perp} = \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$

Soluzione

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) \cap \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) = \{\underline{0}\},$$

infatti una matrice è sia simmetrica che antisimmetrica $\iff$ è la matrice nulla.

$$\dim \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n}) + \dim \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) = n^2 = \dim \mathbb{R}^{n,n}$$

$\implies \mathbb{R}^{n,n} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n}) \oplus \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$

Mi basta dimostrare che date $A \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^{n,n})$ e $S \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n,n})$ risulta $A \cdot S = 0$

$$A \cdot S = \mathrm{tr}({}^tA \cdot S) = -\mathrm{tr}(A \cdot S)$$

ma

$$A \cdot S = S \cdot A = \mathrm{tr}({}^tSA) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS).$$

Quindi $A \cdot S = -A \cdot S$

$\implies A \cdot S = 0.$ Segue l'esercizio.

10.1 Proiezioni ortogonali

$(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo, $W \subseteq V$ sottospazio. $V = W \oplus W^\perp$. Ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = v' + v''$ con $v' \in W$ e $v'' \in W^\perp$.

Si definisce

$$\begin{aligned} pr_w : V &\to W \\ v &\mapsto v' \end{aligned}$$

pr_w si dice la *proiezione ortogonale* su W. pr_w è lineare, suriettiva, e $pr_w = \mathrm{I}_W$, $\ker(pr_w) = W^\perp$

11 Isometrie

Sia $(V, \cdot)$ spazio vettoriale, e sia $F \in End(V)$[1], $F : V \to V$ lineare. F è un'*isometria* se $F(v) \cdot F(w) = v \cdot w \; \forall \, v, w \in V$.

Teorema XII Se F è una isometria,

$\implies$ F è un automorfismo di V (cioè F è un isomorfismo $V \to V$)

***dim.* (XII)** Basta verificare che F iniettiva, ovvero che $\ker F = \{\underline{0}\}$. Sia $v \in \ker F$, cioè v è tale che $F(v) = 0$

$\implies$ $F(v) \cdot F(v) = \underline{0} \cdot \underline{0} = \underline{0}$, ma poiché F isometria risulta che $F(v) \cdot F(v) = v \cdot v$

$\implies$ $v \cdot v = 0$

$\implies$ $v = \underline{0}$

Quindi $\ker F = \{\underline{0}\}$ e F è iniettiva. $\square$

Esempio (11.1) I e $-$I sono isometrie su V rispetto a tutti i prodotti scalari.

Esercizio Sia $F \in End(V)$ tale che $||F(v)|| = ||v|| \; \forall \, v \in V$. Si dimostri che F è un'isometria

[1] è un endomorfismo

Soluzione Supponiamo che F soddisfi $||F(v)|| = ||v||\ \forall\, v \in V$, e siano $v, w \in V$. Per ipotesi $||F(v+w)||^2 = ||v+w||$

$\implies\ ||F(v) + F(w)||^2 = ||v+w||^2$

$$||F(v)||^2 + ||F(w)||^2 + 2F(v) \cdot F(w) = ||v||^2 + ||w||^2 + 2v \cdot w$$

uso $||F(v)|| = ||v||$ e $||F(w)|| = ||w|| \implies$

$$\cancel{||F(v)||^2} + \cancel{||F(w)||^2} + 2F(v) \cdot F(w) = \cancel{||v||^2} + \cancel{||w||^2} + 2v \cdot w$$

$\implies\ F(v) \cdot F(w) = v \cdot w$

$\implies\ F$ isometria

Proprietà delle isometria 18 nov 2021

1. F è una isometria $\iff\ ||F(v)|| = ||v||\ \forall\, v \in V$.
2. F è una isometria $\implies\ F$ conserva gli ancoli tra i vettori.

   Attenzione Ci sono funzioni che conseravano gli angoli ma non sono isometrie: si chiamano *funzioni conformi*.

   Esempio (11.2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2x, 2y)$, F conserva gli angoli in $\mathbb{R}^2$ rispetto al prodotto scalare canonico, infatti

   $$\frac{F(v) \cdot F(w)}{||F(v)||\,||F(w)||} = \frac{4v \cdot w}{4||v||\,||w||}$$

   ma $||F(v)|| = ||2v|| = 2||v|| \neq ||v||$, quindi F non è un'isometria.

3. F, G isometrie $\implies\ F \circ G$ è un'isometria.
4. F è un'isometria $\implies\ F^{-1}$ è una isometria.

   Quindi

   $$Iso(V, \cdot) = \{F \in End(v) | F \text{ isometria rispetto a } \cdot\}$$

   è un sottogruppo di $(Aut(v), \circ)$

5. $F \in Aut(V)$ è un'isometria $\iff$ F porta basi ortonormali in basi ortonormali
6. Fissiamo $\mathscr{B}$ una base ortonormale di $(V, \cdot)$. Sia $F \in Aut(v)$. F isometria $\iff$ $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ è ortogonale.

Dimostrazione. Dimostriamo le proprietò delle isometrie

1. "$\Rightarrow$" ovvio

   "$\Leftarrow$" Supponiamo che F soddisfi $||F(v)|| = ||v|| \; \forall \, v \in V$, e siano $v, w \in V$. Per ipotesi $||F(v+w)||^2 = ||v+w||$

   $$\implies ||F(v) + F(w)||^2 = ||v+w||^2$$

   $$||F(v)||^2 + ||F(w)||^2 + 2F(v) \cdot F(w) = ||v||^2 + ||w||^2 + 2v \cdot w$$

   uso $||F(v)|| = ||v||$ e $||F(w)|| = ||w|| \implies$

   $$\cancel{||F(v)||^2} + \cancel{||F(w)||^2} + 2F(v) \cdot F(w) = \cancel{||v||^2} + \cancel{||w||^2} + 2v \cdot w$$

   $$\implies F(v) \cdot F(w) = v \cdot w$$

   $\implies F$ isometria

2. Siano $v, w \in V$, $v, w \neq \underline{0}$, $\hat{vw} := \arccos \frac{v \cdot w}{||v|| \, ||w||}$, utilizzando che F è una isometria si ottiene che

   $$\frac{v \cdot w}{||v|| \, ||w||} = \frac{F(v) \cdot F(w)}{||F(v)|| \, ||F(w)||}$$

   quindi

   $$\hat{vw} = \frac{F(v) \cdot F(w)}{||F(v)|| \, ||F(w)||} = \widehat{F(v) \, F(w)}$$

3. $||F(G(v))|| \underset{F \text{ isometria}}{=} ||G(v)|| \underset{G \text{ isometria}}{=} ||v||$

   $\implies F \circ G$ è isometria.

4. So che $||F(v)|| = ||v|| \; \forall \, v \in V$, in particolare

   $$||F(F^{-1}(v))|| = ||F^{-1}(v)||$$

   $\implies ||v|| = ||F^{-1}(v)||$

5. "$\Rightarrow$" Supponiamo F isometria, sia $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ una base ortonormale di $(V, \cdot)$, sappiamo che $\{F(e_1), \cdots, F(e_n)\}$ è base di V e $F(e_i) \cdot F(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$

   $\implies \{F(e_1), \cdots, F(e_n)\}$ è ortonormale

"$\Leftarrow$" Supponiamo che F porti basi ortonormali in basi ortonormali. Sia $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ una base ortonormale di $(V, \cdot)$.

Per ipotesi $\{F(e_1), \cdots, F(e_n)\}$ è una base ortogonale di $(V, \cdot)$

Sia $v \in V$, $v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$,

$$||F(v)||^2 = ||\sum_{k=1}^{n} \lambda_k F(e_k)||^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 ||F(e_k)||^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = ||v||^2$$

$\Longrightarrow$ F isometria

$$\underset{\{F(e_1),\cdots,F(e_n)\}\text{ ortonormale}}{=}$$

6. "$\Rightarrow$" Supponiamo F isometria e sia $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ dove $n = \dim V$, $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $F(v_i) \cdot F(v_j) = \delta_{ij}$

$\Longrightarrow$ $(Ae_i) \star (A_{ej}) = \delta_{ij}$, dove $\{e_1, \cdots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$, e $\star$ è il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ le colonne di A formano una base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \star)$

$\Longrightarrow$ $A \in O(n)$

"$\Leftarrow$" Supponiamo che $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) \in O(n)$

$\Longrightarrow$ F porta $\mathscr{B}$ in una base ortonormale

$\Longrightarrow$ F isometria (stessa dimostrazione della proprietà 5, lasciata per esercizio)

Esercizio Sia $F \in End(V)$ e $\mathscr{B}$ base ortonormale fissata di $(V, \cdot)$.

Dimostrare che F isometria $\iff$ F porta B in una base ortonormale

Soluzione

Conseguenza Se si fissa $\mathscr{B}$ base ortonormale di $(V, \cdot)$, allora

$$\Phi : Iso(V, \cdot) \to O(n)$$
$$F \mapsto M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$$

è un isomorfismo di gruppi, cioè Φ è biettiva,

$$\Phi(F \circ G) = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) \cdot M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(G)$$

□

12 Endomorfismi simmetrici

Siano $(V, \cdot)$ e $(W, \cdot)$ spazi vettoriali Euclidei (diversi, con prodotti scalari anche diversi tra loro), e $F : V \to W$ lineare

Teorema XIII Esiste un'unica funzione lineare $F^* : W \to V$ tale che

$$F(v) \cdot w = v \cdot F^*(w) \,\forall\, v \in V, w \in W \tag{12.1}$$

F^* si dice l'*aggiunta* di F rispetto ai prodotti scalari

dim. **(XIII)**

Esistenza di F^*. Dimostro che $\forall\, w \in W$ esiste un unico w^* tale che

$$v \cdot w^* = F(v) * w \,\forall\, v \in V \tag{12.2}$$

Siano

$$\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

una base ortonormale di $(V, \cdot)$ e

$$\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_m\}$$

base ortonormale di $(W, \cdot)$. Sia $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

Si definisce w^*,

$$(w^*)_{\mathscr{B}} := {}^tA(w)_{\mathscr{C}}$$

Si dimostra che w^* soddisfa la (12.2)

Infatti supponiamo $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$, $w = \sum_{j=1}^m y_j w_j$

$$F(v) \cdot w = (A(v)_{\mathscr{B}}) \star (w)_{\mathscr{C}} =$$

dove $\star$ è il prodotto canonico in $\mathbb{R}^m$

$$= {}^t(A(v)_{\mathscr{B}})(w)_{\mathscr{C}} = {}^t(v)_{\mathscr{B}}{}^tA(w)_{\mathscr{C}} = {}^t(v)_{\mathscr{B}} \star (w^*)_{\mathscr{B}} = v \cdot w^*$$

Quindi si definisce $F^* := w^*$. In altre parole F^* è la funzione lineare $W \to V$ che soddisfa $M^{\mathscr{C},\mathscr{B}}(F^*) : {}^tA$

$\implies$ esistenza di F^*

Unicità di F^*. Supponiamo di avere $G_1, G_2 : W \to V$ lineari, tali che, $\forall\, v \in V$ e $w \in W$

$$F(v) \cdot w = v \cdot G_1(w) \qquad F(v) \cdot w = v \cdot G_2(w)$$

e dimostriamo che $G_1 = G_2$

Sappiamo che $v \cdot G_1(w) = v \cdot G_2(w)\ \forall\, v \in V, w \in W$

$\implies v \cdot G_1(w) - v \cdot G_2(w) = 0$

$\implies v(\cdot G_1(w) - \cdot G_2(w)) = 0$

$\implies (\cdot G_1(w) - \cdot G_2(w))(\cdot G_1(w) - \cdot G_2(w)) = 0$

$\implies || \cdot G_1(w) - \cdot G_2(w)|| = 0\ \forall\, w \in W$

$\implies G_1(w) = G_2(w)\ \forall\, w \in W$

$\implies G_1 = G_2$ □

Proprietà dell'aggiunta

1. $\dim(Im\, F) = \dim(Im\, F^*)$.
2. $(F^*)^* = F$.
3. In generale, se $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$ non sono ortonormali

   $\implies M^{\mathscr{C},\mathscr{B}}(F^*)$ non è la matrice trasposta di $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$.

Dimostrazione. Si motivano le proprietà:

1. È implicata da $\text{rank}(A) = \text{rank}({}^tA)\ \forall\, A \in \mathbb{R}^{m,n}$.
2. È implicata da ${}^t({}^tA)\ \forall\, A \in \mathbb{R}^{m,n}$
3. Lasciata per esercizio □

Definizione Sia $F \in End(V)$ con $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo. F si dice *autoaggiunta* se $F^* = F$

Esempi (12.1)

1. Sia $F : V \to V$ l'endomorfismo nullo, cioè $F(v) = \underline{0}\; \forall\, v \in V$.

$$F(v) \cdot w = 0\, \forall\, v, w \in V \qquad 0 = v \cdot \underline{0}$$

$\implies F(v) \cdot w = v \cdot \underline{0}\; \forall\, v \in V, w \in W$

$\implies F^* = \underline{0}\; \forall\, v \in V$

$\implies F = F^*$, cioè F è autoaggiunta.

2. $\mathrm{I} : V \to V$, $\mathrm{I}(v) = v\; \forall\, v \in V$

$$\mathrm{I}(v) \cdot w = v \cdot w = v \cdot \mathrm{I}(w)$$

$\implies \mathrm{I}(v) \cdot w = v \cdot \mathrm{I}(w)\; \forall\, v, w \in V$

$\implies \mathrm{I}^* = \mathrm{I}$.

3. $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (y, x + 3y)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

A rappresenta F rispetto alla base canonica.

Quindi F è autoaggiunta poiché A è simmetrica.

Esercizio Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo. $F \in Aut(V)$.

Dimostrare che: F è un'isometria $\iff F^* = F^{-1}$.

Soluzione

"$\implies$" F isometria, quindi $F(v) \cdot F(w) = v \cdot w\; \forall\, v, w \in V$. Sostituendo w con $F^{-1}(w)$ si ottiene

$$F(w) \cdot F(F^{-1}(w)) = v \cdot F^{-1}(w)$$

$\implies F(v) \cdot w = v \cdot F^{-1}(w)\; \forall\, v, w \in V$

$\implies F^{-1} = F^*$

"$\Longleftarrow$" Supponiamo $F^* = F^{-1}$ e dimostriamo F isometria.

$$F(v) \cdot w = v \cdot F^{-1}(w) \quad \forall\, v, w \in V.$$

Sostituendo a w, $F(w)$ si ottiene

$$F(v) \cdot F(w) = v \cdot w \quad \forall\, v, w \in V$$

$\Longrightarrow$ F isometria. □

13 Spazi vettoriali Hermitiani

22 nov 2021

$$\mathbb{C} = \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad i \notin \mathbb{R} \text{ soddisfa } i^2 = -1$$

Su $\mathbb{C}$ sono definite una somma e un prodotto

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$
$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

In questo modo $\mathbb{C}$ è un campo. Possiamo considerare spazi vettoriali complessi, cioè su $\mathbb{C}$.

Esempio (13.1) $\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n-\text{volte}}$, gli elementi di $\mathbb{C}^n$ sono della forma $(x_1, \cdots, x_n)$ con $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{C}$,

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$
$$\lambda(x_1, \cdots, x_n) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n)$$

$\mathbb{C}^n$ spazio vettoriale n-dimensionale su $\mathbb{C}$.

V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$ è definitivo λv

$\Longrightarrow$ V è anche uno spazio vettoriale su R.

La dimensione di V come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è il doppio della dimensione di V come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. Si indica $\dim_{\mathbb{R}} V$ la dimensione dello spazio vettoriale rispetto ad $\mathbb{R}$ e si indica $\dim_{\mathbb{C}} V$ la dimensione dello spazio vettoriale rispetto ad $\mathbb{C}$.

$\Longrightarrow$ $\dim_{\mathbb{C}} V = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V$

$\mathbb{C}$ è sia spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ che spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\mathscr{B} = \{1\}$ base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, $\mathscr{B} = \{1, i\}$ base di $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

La funzione

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ a + ib &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$

è un isomorfismo tra $\mathbb{C}$ visto come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$

Su $\mathbb{C}$ è definito il coniugato tramite la relazione

$$\overline{(a + ib)} = (a - ib)$$

La funzione definita da $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tale che $z \mapsto \overline{z}$, è lineare su $\mathbb{C}$ visto come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, ma non su $\mathbb{C}$ visto come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. La funzione quindi è $\mathbb{R}$-lineare, ma non $\mathbb{C}$-lineare.

Si noti che

$$(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Si definisce il modulo di un numero complesso come

$$|(a + ib)| = \sqrt{a^2 + b^2} = ||(a, b)||$$

$\implies z \cdot \overline{z} = |z|^2$

È naturale in $\mathbb{C}$ considerare la funzione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto z\overline{w} \end{aligned}$$

Proprietà di $\cdot$

1. $z \cdot w = \overline{w \cdot z}$ in quanto
$$z \cdot w = z\overline{w} = \overline{w}z = \overline{w\overline{z}} = \overline{w \cdot z}$$
2. $(z_1 + z_2) \cdot w = z_1 \cdot w + z_2 \cdot w$, $z(w_1 + w_2) = z \cdot w_1 + z \cdot w_2$
3. $(\lambda z) \cdot w = \lambda z \cdot w$, $z \cdot (\lambda w) = \overline{\lambda} z \cdot w$
4. $z \cdot \overline{z} \geq 0$ e $z \cdot \overline{z} = 0 \iff z = 0$

Definizione Sia V uno spazio vettoriale complesso. Un *prodotto Hermitiano* su V è una funzione $\cdot : V \times V \to \mathbb{C}$ tale che

1. $v \cdot w = \overline{w \cdot v}$
2. $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$
3. $(\lambda v) \cdot w = \lambda(v \cdot w)$
4. $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0 \iff v = 0$

Osservazione (13.1) Se $\cdot$ è un prodotto Hermitiano

$\implies v \cdot (w_1 + w_2) = v \cdot w_1 + v \cdot w_2$

Osservazione (13.2) Se $\cdot$ prodotto Hermitiano, e $v \in V$

$\implies v \cdot v \in \mathbb{R}$, infatti per la proprietà 1. vale

$$v \cdot v = \overline{v \cdot v}$$

e un numero complesso coincide con il suo coniugato $\iff$ è reale

Definizione Uno spazio vettoriale Hermitiano è una coppia $(V, \cdot)$ con V spazio vettoriale complesso, finitamente generato, e $\cdot$ prodotto Hermitiano su V

Esempio (13.2) $\mathbb{C}^n$ con il prodotto Hermitiano canonico,

$$(z_1, \cdots, z_n) \cdot (w_1, \cdots, w_n) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$

Esercizio Si dimostri che $\cdot$ è un prodotto Hermitiano su $\mathbb{C}^n$

Soluzione Da fare

Se V è uno spazio vettoriale complesso finitamente generato, posso sempre definire un prodotto Hermitiano su V. Fisso $\mathscr{B}$ una base e definisco $v \cdot w$ come il prodotto Hermitiano canonico in $\mathbb{C}^n$ tra $(v)_{\mathscr{B}}$ e $(w)_{\mathscr{B}}$

$\implies$ Ogni spazio vettoriale complesso (dim ≥ 1) ha un prodotto Hermitiano.

Se $\cdot$ è un prodotto Hermitiano su V, e $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$\implies v \star w := \lambda\, v \cdot w$ definisce un prodotto Hermitiano su V.

$\Longrightarrow$ Ogni spazio vettoriale complesso ($\dim \geq 1$) ha sempre infiniti prodotti Hermitiani.

Definizione Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Hermitiano.

1. Se $v, w \in V$ soddisfano $v \cdot w = 0$ si dicono ortogonali.
2. Se $v \in V$ si definisce la *norma* di v come $||v|| := \sqrt{v \cdot v}$, $||\,|| : V \to \mathbb{R}_+$ e soddisfa
   (a) $||\lambda v|| = |\lambda| ||v||$, infatti
   $$||\lambda v|| = \sqrt{(\lambda v) \cdot (\lambda v)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} v \cdot v}$$
   (b) $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$

Teorema XIV Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Hermitiano. Valgono le seguenti proprietà:

1. (Teorema di Pitagora) se $v \cdot w = 0$
   $\Longrightarrow$ $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$
2. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz) $|v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$
3. (Disuguaglianza triangolare) $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

$\forall\, v, w \in V$

dim. **(XIV)** Data per esercizio

Osservazione (13.3) Nel Teorema di Pitagora non vale " $\Longleftarrow$ ". Per esempio consideriamo $\mathbb{C}^2$ con il prodotto Hermitiano canonico, $v = (1, -i)$, $w = (i, 1)$.

$$\begin{aligned} & v \cdot w = -2i \qquad \text{non sono ortogonali} \\ & v + w = (1 + i, 1 - i) \\ & ||v + w||^2 = \cdots = 4 \\ & ||v||^2 = ||w||^2 = 2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$ ma $v \cdot w \neq 0$

Osservazione (13.4) La disuguagliana di Cauchy-Schwartz non permette di definire l'angolo tra i due vettori

$$\frac{|v \cdot w|}{||v||\,||w||} \leq 1 \not\Rightarrow -1 \leq \frac{v \cdot w}{||v||\,||w||} \leq 1$$

poiché $v \cdot w$ potrebbe non essere reale.

Definizione Una base $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ di uno spazio vettoriale Hermitiano si dice *Unitaria* se soddisfa

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

Esempio (13.3) La base canonica di $\mathbb{C}^n$ è unitaria rispetto al prodotto Hermitiano canonico.

Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Hermitiano, siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ due basi unitarie, sia $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice del cambiamento di base. La matrice del cambiamento di base soddisfa

$${}^t\overline{A}A = \mathrm{Id}$$

Definizione Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ che soddisfa ${}^t\overline{A}A = \mathrm{Id}$ si dice unitaria.

$$U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid {}^t\overline{A}A = \mathrm{Id}\} \subseteq \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

$U(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$

Osservazione (13.5) Se $A \in U(n)$

$\implies {}^t\overline{A}A = \mathrm{Id}$

$\implies \det({}^t\overline{A})\det(A) = 1$

$\implies \det(\overline{A})\det(A) = 1$

Per $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ vale[2] $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$

$\implies \overline{\det(A)}\det(A) = 1$

$\implies |\underbrace{\det(A)}_{\in\mathbb{C}}| = 1$

[2] evidente con gli sviluppi di Laplace

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

$SU(n)$ è un sottogruppo di $U(n)$

23 nov 2021

Proposizione *p*.xv

1. Se $A \in U(n) \implies {}^tA \in U(n)$.
2. Data $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $A \in U(n)$

   $\iff$ le colonne di A formano una base unitario di C^n con il prodotto Hermitiano canonico.

Definizione Dato $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Hermitiano, $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale, si definisce

$$W^\perp = \{v \in V \mid v \cdot w = 0 \,\forall\, w \in W\}$$

chiamato complemento ortogonale di W

Proposizione *p*.xvi

$$V = W \oplus W^\perp$$

Definizione $F : V \to V$ funzione lineare su $(V, \cdot)$ è una *isometria* se

$$F(v) \cdot F(w) = v \cdot w \, v, w \in V$$

F isometria $\implies F \in \mathrm{Aut}(V)$, definendo

$$\mathrm{Iso}(V, \cdot) = \{F : V \to V \mid F \text{ isometria}\}$$

si ha che $\mathrm{Iso}(V, \cdot)$ è sottogruppo di $\mathrm{Aut}(V)$ con l'operazione di composizione tra funzioni.

Se si fissa $\mathscr{B}$ base unitario di $(V, \cdot)$, $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$,

F isometria $\iff M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) \in U(n)$

Si definisce quindi un isomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Iso}(V, \cdot) &\to U(n) \\ F &\mapsto M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) \end{aligned}$$

Siano $(V, \cdot)$ e $(W, \cdot)$ spazi vettoriale Hermitiani, $F : V \to W$ lineare, allora esiste un'unica funzione lineare $F^* : W \to V$ lineare, tale che

$$F(v) \cdot w = v \cdot F^*(w) \quad \forall\, v \in V, w \in W$$

F^* si dice l'aggiunta di F.

Se $\mathscr{B}$ base unitaria di $(V, \cdot)$ e $\mathscr{C}$ base unitaria di $(W, \cdot)$

$\implies$ F^* soddisfa $M^{\mathscr{C}}(F^*) = \overline{{}^tM^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)}$

Definizione $F \in \mathrm{End}(V)$ è *autoaggiunta* se $F = F^*$

Se $\mathscr{B}$ è una base unitaria di $(V, \cdot)$, $F \in \mathrm{End}(V)$ è autoaggiunta

$\iff$ $\overline{{}^tM^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)} = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$

Definizione Una matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ è *Hermitiana* se

$${}^t\overline{A} = A$$

$$\mathrm{Herm}(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n,n} \mid {}^t\overline{A} = A\}$$

$\mathrm{Herm}(n)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^{n,n}$ su campo $\mathbb{R}$.

Esercizio Calcolare $\dim \mathrm{Herm}(n)$

Soluzione Da fare

14 Autovalori e autovettori

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, $F \in \mathrm{End}(V)$ i.e. $F : V \to V$ lineare.

Definizione $v \in V$ è un autovettore di F se $v \neq \underline{0}$ e

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K} \text{ t. c. } F(v) = \lambda v$$

Osservazione (14.1) Se $F(v) = \lambda v$ e $F(v) = \mu v$

$\Longrightarrow \lambda v = \mu v$

$\Longrightarrow (\lambda - \mu)v = \underline{0}$, quindi se $v \neq \underline{0}$

$\Longrightarrow \lambda = \mu$.

Quindi $v \in V$ con $v \neq 0$ può essere autovettore di F per al più un λ.

Definizione Se v autovettore di F e $F(v) = \lambda v$, λ si dice un autovalore di F.

$$\text{Spettro}(F) = \{\text{autovalori di } F\} \subseteq \mathbb{K}$$

e si dice spettro di F.

Se $\lambda \in \text{Spettro}(F)$,

$$V_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = \lambda v\}$$

e V_λ si dice l'autospazio di F relativo a λ

Proposizione *p*.xvii V_λ è sempre un sottospazio vettoriale di V

dim. **(*p*.xvii)** Siano v_1 e $v_2 \in V_\lambda$, e μ_1 e $\mu_2 \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \in V_\lambda$

$$F(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) \underset{F \text{ lin.}}{=} \mu_1 F(v_1) + \mu_2 F(v_2) =$$
$$\underset{3}{=} \mu_1 \lambda v_1 + \mu_2 \lambda v_2 = \lambda(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2)$$

$\Longrightarrow \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \in V_\lambda$ $\square$

Proposizione *p*.xviii $F(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$

dim. **(*p*.xviii)** Sia $v \in F(V_\lambda)$

$\Longrightarrow v = F(v_1)$ con $v_1 \in V_\lambda$

$$F(v) = F(F(v_1)) = F(\lambda v_1) = \lambda F(v_1) = \lambda v$$

$\Longrightarrow v \in V_\lambda$

$\Longrightarrow F(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ $\square$

[3] $v_1, v_2 \in V_\lambda$

Esempi (14.1)

1. $\mathrm{I} : V \to V$, $\mathrm{I}(v) = v \; \forall\, v \in V$

$$\text{Spettro}(I) = \{1\} \qquad V_1 = V.$$

2. $F : V \to V$, $F(v) = \lambda_0 v \; \forall\, v \in V, \lambda_0 \in \mathbb{K}$ fissato

$$\text{Spettro}(F) = \{\lambda_0\} \qquad V_1 = V.$$

3. $F : V \to V$ non iniettiva, ovvero $\ker(F) \neq \{\underline{0}\}$, $\underline{0} \in \text{Spettro}(F)$ e $\ker(F) = V_0$.

4. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(x, y) = (x, x + y)$. Per trovare lo spettro di F si imposta il sistema $F(x, y) = \lambda(x, y)$

$$\implies \begin{cases} x = \lambda x \\ x + y = \lambda y \end{cases}$$

   - Se $x \neq 0 \implies$ l'equazione $x = \lambda x$ implica $\lambda = 1$, e la seconda equazione $(x + y) = y$ è soddisfatta se $x = 0$, quindi mai.
   - Se $x = 0 \implies$ l'equazione $x = \lambda x$ è soddisfatta per ogni λ, mentre la seconda si riduce a $y = \lambda y$, e se $y \neq 0$

     $\implies \lambda = 1$

$$\text{Spettro}(F) = \{1\} \qquad \mathbb{R}^2_1 = \mathscr{L}((0, 1))$$

   L'insieme degli autovettori rispetto a 1 è dato da

$$\{(0, y) \mid y \neq 0\}$$

   e non è un sottospazio vettoriale.

Osservazione (14.2) $F \in \text{End}(V)$, $\lambda, \mu \in \text{Spettro}(F)$, $\lambda \neq \mu$

$\implies V_\lambda \cap V_\mu = \{\underline{0}\}$

Infatti se $v \in V_\lambda \cap V_\mu$

$\implies F(v) = \lambda v$ e $F(v) = \mu v$

$\implies (\lambda - \mu)v = \underline{0}$

$\implies v = \underline{0}$.

Teorema XV V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $F \in \operatorname{End}(V)$,

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \text{Spettro}(F)$$

con $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

Sia $v_i \in V_{\lambda_i}$ con $v_i \neq \underline{0}$

$\implies \{v_1, \cdots, v_l\}$ è libero.

dim. **(XV)** Per induzione su l.

Se $l = 1$ allora $\lambda_1 \in \text{Spettro}(F)$

$\implies v_1 \in V_{\lambda_1}$ con $v_1 \neq 0$

$\implies \{v_1\}$ è libero.

Supponiamo l'enunciato vero per $l-1$ autovalori, e dimostriamolo per l autovalori.

Dati $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{K}$, $v_1, \cdots, v_l$ consideriamo $\mu_1, \cdots, \mu_l \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_l v_l = \underline{0}.$$

Devo verificare che necessariamente risulta $\mu_1 = \cdots = \mu_l = 0$

$$F(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_l v_l) = F(\underline{0}) = \underline{0}$$

$$\begin{aligned} &F(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_l v_l) = \\ &\qquad = \mu_1 F(v_1) + \cdots + \mu_l F(v_l) = \lambda_1 \mu_1 v_1 + \cdots + \lambda_l \mu_l v_l \end{aligned}$$

$\implies \lambda_1 \mu_1 v_1 + \cdots + \lambda_l \mu_l v_l = \underline{0}^{\mathbf{(1)}}$

Si considera la relazione $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_l v_l = \underline{0}$ e la si moltiplica per λ_1 (qui senza perdere di generalità si può supporre $\lambda_1 \neq 0$)

$$\lambda_1 \mu_1 v_1 + \cdots + \lambda_1 \mu_l v_l^{\mathbf{(2)}}$$

Facendo ora (2)-(1)

$$\mu_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 + \mu_3(\lambda_1 - \lambda_3)v_3 + \cdots + \mu_l(\lambda_1 - \lambda_l)v_l = \underline{0}$$

Per ipotesi induttiva $\{v_2, \cdots, v_l\}$ è libero

$\Longrightarrow \mu_2(\lambda_1 - \lambda_2) = \mu_3(\lambda_1 - \lambda_3) = \cdots = \mu_l(\lambda_1 - \lambda_l) = \underline{0}$

Per ipotesi $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ se $i \neq j$

$\Longrightarrow \mu_2 = \mu_3 = \cdots = \mu_l = 0$

$\Longrightarrow$ la relazione $\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_l v_l = \underline{0}$ si riduce a $\mu_1 v_1 = \underline{0}$, $v_1 \neq 0$

$\Longrightarrow \mu_1 = 0$

$\Longrightarrow \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_l = \underline{0}$

$\Longrightarrow \{v_1, \cdots, v_l\}$ è libero. $\square$

Conseguenza Se Spettro$(F) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$

$\Longrightarrow V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l} \subseteq V$, e in particolare se V ha dimensione finita lo spettro è finito e $\dim V = n$

$\Longrightarrow$ lo spettro di F ha al più n elementi.

Sia V a dimensione finita, $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$, dove

$$\text{Spettro}(F) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$$

sia $\mathscr{B}_i$ una base di V_{λ_i}, sia $\mathscr{B} = \bigcup_i \mathscr{B}_i$ base di V, $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \star & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In questa situazione $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ è una matrice diagonale.

14.1 Calcolo degli autovalori

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, con V finitamente generato, $F \in \text{End}(V)$ e cerco gli autovalori di F.

Fisso $\mathscr{B}$ base di V e sia $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ autovattore di F

$\iff \exists\, v \in V$ con $v \neq 0$ tale che $F(v) = \lambda v$

$\iff \exists\, v \in V$, $v \neq 0$ tale che $A(v)_{\mathscr{B}} = \lambda(v)_{\mathscr{B}}$

$\iff (A - \lambda\,\mathrm{Id})(v)_{\mathscr{B}} = \underline{0}$

λ autovalore di $F \iff \exists\, X \in \mathbb{K}^n$ tale che

$$(A - \lambda\,\mathrm{Id})X = \underline{0}$$

$\iff \det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$

Quindi gli autovalori di F sono gli elementi λ di $\mathbb{K}$ che soddisfano l'equazione

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0.$$

Si definisce $p(\lambda) := \det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$, un polinomio in λ di grado n. ($p \in \mathbb{K}[\lambda]$)

Definizione $p(\lambda) := \det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$ si dice il polinomio caratteristico di F.

$$\mathrm{Spettro}(F) = \{\text{radici di } p\}$$

Osservazione (14.3) Il polinomio caratteristico non dipende dalla base $\mathscr{B}$. Infatti se fisso un'altra base $\mathscr{B}'$ e considero $A' = M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(F)$, allora $A' = P^{-1}AP$, con $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. 25 nov 2021

$$\det(A' - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - \lambda\,\mathrm{Id})P)$$

Questa quantità, per il teorema di Binet

$$= \det P^{-1} \det P \det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = \det(A - \lambda\,\mathrm{Id}).$$

14.2 Molteplicità di un autovalore

Se $\lambda_0 \in \mathrm{Spettro}(F)$

$\implies p(\lambda_0) = 0$

$\implies p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m r(\lambda)$ con r polinomio tale che $r(\lambda_0) \neq 0$, ci riferiamo a m come alla *molteplicità algebrica* di λ_0, e viene indicata con $m_a(\lambda_0)$

La *molteplicità geometrica* di λ_0 è il numero $m_g(\lambda_0) := \dim V_{\lambda_0}$.

Esempio (14.2) Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la funzione $F(X) = AX$, dove $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo gli autovalori di F e gli autospazi corrispondenti.

Calcolo $p(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{Id})$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 & 6 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (-2-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(2+\lambda)^2\Big((3-\lambda)(-2-\lambda)+6\Big) = (2+\lambda)^2(\lambda^2-\lambda) =$$

$$\lambda(2+\lambda)^2(\lambda-1)$$

$$\mathrm{Spettro}(F) = \{-2, 0, 1\}$$

$$m_a(-2) = 2, \quad m_a(0) = m_a(1) = 1$$

Calcoliamo gli autospazi di $F : V_{-2}, V_0, V_1$

$$V_{-2} = \{X \in \mathbb{R}^4 \,|\, F(X) = -2X\} =$$
$$= \{X \in \mathbb{R}^4 \,|\, AX + 2X = \underline{0}\} = \{X \in \mathbb{R}^4 \,|\, (A+2I)X = \underline{0}\} =$$
$$= \mathrm{nullspace}(A+2I)$$

Inoltre $V_0 = \mathrm{nullspace}(A)$, $V_1 = \mathrm{nullspace}(A - I)$

1. Calcolo V_{-2}

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Si studia il sistema lineare omogeneo associato a $A + 2I$.

$$\begin{cases} 6x_3 + 6x_4 = 0 \\ 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$\implies V_{-2} = \mathscr{L}(e_1, e_2)$.

$m_g(-2) = 2$.

2. Calcolo V_0

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -2x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = -x_3 \end{cases}$$

$\implies V_0 = \mathscr{L}((0, 0, 1, -1))$

$m_g(0) = 1$

3. Calcolo V_1

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Considero il sistema omogeneo associato a $A - I$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -3x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{2}{3}x_3 \\ x_4 = -\frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

$\implies V_1 = \mathscr{L}((0, 2, 3, -2))$

$m_g(1) = 1$

In questo caso, facendo

$$V_{-2} \oplus V_0 \oplus V_1 = \mathbb{R}^4$$

Rispetto alla base

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ è diagonale

Definizione $F \in \mathrm{End}(F)$ è diagonalizzabile se esiste $\mathscr{B}$ base di V rispetto a cui $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ è diagonale.

Una matrice A in $\mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile se $\exists\, P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

Osservazione (14.5)

Osservazione (14.5)

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $p \in \mathbb{C}[\lambda]$

  $\implies$ per $n \geq 1$ il teorema fondamentale dell'algebra implica che p ha almeno una radice.

  Quindi ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale complesso ha sempre almeno un autovalore.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale su V potrebbe non avere autovalori. Per esempio se F è una rotazione di $\pi/2$, lo spettro di F è vuoto.

- Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con $\dim V$ dispari

  $\implies$ ogni $F \in \mathrm{End}(V)$ ha almeno un autovalore.

  Infatti sia $F \in \mathrm{End}(V)$ e consideriamo $p(\lambda)$ polinomio caratteristico. $p \in \mathbb{R}[\lambda]$, $p \in \mathbb{C}[\lambda]$.

  Si osserva che se $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ è una radice di p

  $\implies$ $\overline{\lambda_0}$ è una radice di p. Infatti $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ con $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$.

  Se λ_0 è una radice di p, $p(\lambda_0) = 0$,

  $$a_n\lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

e coniugando

$$\overline{a_n\lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \cdots + a_0} = 0$$
$$\implies a_n\overline{\lambda_0}^n + a_{n-1}\overline{\lambda_0}^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Il teorema fondamentale dell'algebra dice che p ha esattamente n radici complesse contate con la rispettiva molteplicità. Dal momento che per ogni radice di p, anche la sua coniugata è radice di p, e n è dispari (per ipotesi)

$\implies \exists\, \lambda_0$ radice di p tale che $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$, cioè λ_0 è reale

$\implies p$ come polinomio reale ha almeno una radice,

$\implies F$ ha almeno un autovalore.

Conseguenza Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $F \in \operatorname{End}(V)$, e $\dim V$ è dispari

$\implies$ esiste $W \subseteq V$ sottospazio vettoriale di dimensione 1 tale che $F(W) \subseteq W$

Teorema XVI Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ con V finitamente generato, $F \in \operatorname{End}(V)$, $\lambda \in \operatorname{Spettro}(F)$, allora

$$1 \le m_g(\lambda) \le m_a(\lambda)$$

dim. **(XVI)** Supponiamo $\dim V = n$

- Caso 1: $m_g(\lambda) = n = \dim V$

  $\implies V = V_\lambda$, cioè $F(v) = \lambda v \ \forall\, v \in V$. Se $\mathscr{B}$ è una base di V

  $\implies A = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ soddisfa $A = \lambda \operatorname{Id}$. Quindi $\det(A - x\operatorname{Id}) = (\lambda - x)^n$

  $\implies \lambda$ è una radice del polinomio caratteristico di F con molteplicità n.

  $\implies m_g(\lambda) = m_a(\lambda) = n$

  Il teorema è vero in questo caso.

- Caso 2: supponiamo che $l := m_g(\lambda) \lneq n$. Quindi V_λ ha dimensione l. Fissiamo una base $\{v_1, \cdots, v_l\}$ di V_λ, che completo con una base di V, $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_l, w_{l+1}, \cdots, w_n\}$.

  Sia $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$.

  $$A =$$

  Calcolo $p(x) = \det(A - x \operatorname{Id}) = (\lambda - x)^l q(x)$ con $q \in \mathbb{K}_{n-l}[x]$

  λ è radie di p con molteplicità $\geq l = m_g(\lambda)$. Quindi $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ $\square$

Corollario Se $m_a(\lambda) = 1$

$\implies m_g(\lambda) = 1$

Teorema XVII Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, V finitamente generato. $F \in \operatorname{End}(V)$.

Sono fatti equivalenti

1. F è diagonalizzabile;
2. $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$ con Spettro$(F) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$;
3. $\dim V = m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \cdots + m_g(\lambda_l)$ con Spettro$(F) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$;
4. il polinomio caratteristico di F ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ (i.e. il numero delle radici contate con la loro molteplicità è il grado del polinomio) e per ogni radice λ_i risulta $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$.

dim. **(XVII)**

"1. $\implies$ 4." Per ipotesi F diagonalizzabile 29 nov 2021

$\implies \exists \mathscr{B}$ base di B rispetto a cui $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ è diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = \det(A - \lambda \operatorname{Id}) = (a_1 - \lambda) \\ (a_n - \lambda) = \prod_{i=1}^{n} (a_i - \lambda)$$

$\implies p(\lambda)$ ha tutte le radici in $\mathbb{K}$.

Siano $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$ le radici di p. A meno di riordinare i vettori di B posso supporre

$$\mathscr{B} = \{\underbrace{v_1, \cdots, v_{k_1}}_{4}, \underbrace{v_{k_1+1}, \cdots, v_{k_2+k_1}}_{5}, \cdots, \underbrace{v_{k_{l-1}+kl}}_{6}\}$$

$\implies p(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = (\lambda_1 - \lambda)^{k_1}(\lambda_2 - \lambda)^{k_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda_l - \lambda)^{k_l}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$

$\implies m_a(\lambda_i) = k_1$

$\{v_1, \cdots, v_k\}$ è una basee di V_{λ_1}

$\implies \dim V_{\lambda_1} = k_1$

$\implies m_g(\lambda_1) = k_1$

$\{v_{k_1+1}, \cdots, v_{k_1+k_2}\}$ è una basee di V_{λ_1}

$\implies \dim V_{\lambda_2} = k_2$

$\implies m_g(\lambda_2) = k_2$

Si itera il processo per ogni λ_i.

$\implies m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)\ \forall\, i = 1, \cdots, l$

"4. $\implies$ 3." Per ipotesi p ha tutte le radici in $\mathbb{K}$ e $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ per ogni λ_i radice di p.

Per ipotesi $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$ sono le radici di p e soddisfano

$$m_a(\lambda_1) + \cdots + m_a(\lambda_l) = n$$

con $n = \dim V = \deg p$.

$m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)\,\forall\,\lambda_i$

$\implies m_g(\lambda_1) + \cdots + m_g(\lambda_l) = n = \dim V$

"3. $\implies$ 2." Per ipotesi

$$\dim V = n = m_g(\lambda_1) + \cdots + m_g(\lambda_l)$$

sappiamo che $m_g(\lambda_i) = \dim V_{\lambda_i}$

$$V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{\underline{0}\} \quad \text{se } \lambda_i \neq \lambda_j$$

4 autovettori rispetto a λ_1
5 autovettori rispetto a λ_2
6 autovettore rispetto a λ_l

$$\implies V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$$

"2. $\implies$ 1." Per ipotesi $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$. Considero una base $\mathscr{B}_i$ di V_{λ_i}

$$\implies \mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{l} \mathscr{B}_i \text{ è una base di } V \text{ fatta di autovettori di } F$$

$$\implies F \text{ è diagonalizzabile.}$$ □

Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è diagonalizzabile se l'endomorfismo $F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$ è diagonalizzabile.

$\iff$ esiste $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

Esercizio Dire se la matrice $A \in \mathbb{R}^{3,3}$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile.

Soluzione Si trova lo spettro di A.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \,\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\implies$ gli autovalori di A sono ± 1, $m_a(-1) = 1$, $m_a(+1) = 2$.

$$m_a(-1) = 1 \implies m_g(-1) = 1 \implies m_a(-1) = m_g(-1)$$

Ci sono due possibilità:

- $m_g(1) = 1$, A non è diagonalizzabile
- $m_g(1) = 2$, A è diagonalizzabile

Si calcola $m_g(1)$,

$$m_g(1) = \dim V_1 = \dim \mathrm{nullspace}(A - \mathrm{I})$$

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Imposto

$$(A-I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0} \implies \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\implies \begin{cases} -2x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\implies V_1 = \mathscr{L}((0,1,0))$

$\implies \dim V_1 = 1$

$\implies m_g(1) = 1$

$\implies A$ non è diagonalizzabile.

Osservazione (14.6) Se $\dim V = n$, e $F \in \operatorname{End}(V)$ ha n-autovalori (distinti)

$\implies F$ è diagonalizzabile.

Infatti la molteplicità algebrica di ogni autovalore è necessariamente 1

$\implies$ la molteplicità geometrica di ogni autovalore è 1

$\implies m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ per ogni $\lambda_i \in \operatorname{Spettro}(F)$

$\implies F$ è diagonalizzabile.

Osservazione (14.7) Sia V di dimensione finita, $F \in \operatorname{End}(V)$, supponiamo che il polinomio p di F abbia tutte le radici in K. Fisso $\mathscr{B}$ base di V, e sia $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$,

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\cdot\dots\cdot(\lambda_n - \lambda)$$
$$p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n - \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

con $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non necessariamente distinti.

Uguagliando le due scritture si ottiene

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \qquad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

14.3 Teorema di Caley-Hamilton

Sia $\mathbb{K}$ un campo e consideriamo $\mathbb{K}^{n,n}$, $\mathbb{K}[x]$. Se $p \in \mathbb{K}[x]$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

p induce una funzione $p : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}^{n,n}$

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 \,\mathrm{Id} \in \mathbb{K}^{n,n}\, \forall\, A \in \mathbb{K}^{n,n}.$$

Teorema XVIII (di Caley-Hamilton) Se p è il polinomio caratteristico di A, allora $p(A) = \underline{0}$

Si definisce

$$I = \{1 \in \mathbb{K}[x] \,|\, q(A) = \underline{0}\}, p \in I$$

e da qui si arriva al polinomio minimo di A.

14.4 Teorema Spettrale

Teorema XIX (reale, versione geometrica) Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale euclideo (V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim V < +\infty$ e $\cdot$ è un prodotto scalare di V).

1. Sia $F \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico (cioè $F(v) \cdot w = v \cdot F(w)$ $\forall\, v, w \in V$)

   $\implies$ F è diagonalizzabile e i relativi autospazi sono 2 a 2 ortogonali.

2. Se $F \in \mathrm{End}(V)$ diagonalizzabile, e i suoi autospazi sono 2 a 2 ortogonali

   $\implies$ F è simmetrico.

Teorema XX (reale, versione algebrica) Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

1. Se A è simmetrica (${}^tA = a$)

   $\implies$ $\exists\, P \in O(n)$ (${}^tP = P^{-1}$) tale che $P^{-1}AP = {}^tPAP$ è diagonale.

2. Se esiste $P \in O(n)$ tale che $P^{-1}AP$ è diagonale

   $\implies$ A è simmetrica.

$F \in \mathrm{End}(V)$ è simmetrico $\iff$ la matrice che rappresenta F rispetto ad una base ortonormale è simmetrica

Lemma *l*.i Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Hermitiano (V spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ con $\dim V < +\infty$, $\cdot$ prodotto Hermitiano), $F \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo Hermitiano (i.e. $F(v) \cdot w = v \cdot F(w)\ \forall\, v, w \in V$)

$\Longrightarrow$ tutti gli autovalori di F sono reali.

dim. (*l*.i) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di F

$\Longrightarrow$ $\exists\, v \neq \underline{0} \in V$ tale che $F(v) = \lambda v$

$$\lambda||v||^2 = F(v) \cdot v = v \cdot F(v) = v(\lambda v) = \overline{\lambda}||v||^2.$$

Poiché $||v|| \neq \underline{0}$ ottengo $\lambda = \overline{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$ □

Corollario Se $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ è una matrice Hermitiana (i.e. $A = {}^t\overline{A}$)

$\Longrightarrow$ gli autovalori di A sono reali.

dim. Ogni endomorfismo Hermitiano rispetto ad una base unitaria è rappresentato da una matrice Hermitiana, quindi si applica il lemma precedente. □

Conseguenza Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ è una matrice simmetrica

$\Longrightarrow$ A ha almeno un autovalore.

Infatti, $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ed è Hermitiana, quindi A ha un autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ per il teorema fondamentale dell'algebra, e $\lambda \in \mathbb{R}$ per il corollario precedente

Conseguenza Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale euclideo, $F \in \operatorname{End}(V)$ è simmetrico

$\Longrightarrow$ F ha almeno un autovalore.

Lemma *l*.ii Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, sia $F \in \operatorname{End}(V)$ simmetrico e $\lambda_1, \lambda_2 \in \operatorname{Spettro}(F)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$\Longrightarrow$ V_{λ_1} e V_{λ_2} sono ortogonali. ($v \cdot w = 0\ \forall\, v \in V_{\lambda_1}, w \in V_{\lambda_2}$)

dim. (*l*.ii) Siano $v \in V_{\lambda_1}$ e $w \in V_{\lambda_2}$. $F(v) \cdot w = v \cdot F(w)$ poiché F è simmetrico.

$$\lambda_1 v \cdot w = F(v) \cdot = v \cdot (F(w)) = v \cdot (\lambda_2 w) = \lambda_2 v \cdot w$$

$\implies (\lambda_1 - \lambda_2) v \cdot w = 0$ con $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$

$\implies v \cdot w = 0.$ $\square$

dim. **(XIX)**

1. $F \in \mathrm{End}(V)$ simmetrico. Per i lemmi Spettro(F) non è vuoto, e considero Spettro$(F) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$. 30 nov 2021

   Per il lemma precedente so che $V_{\lambda_i} \perp V_{\lambda_j}$ se $\lambda_i \neq \lambda_j$. Dimostro che

   $$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$$

   da cui si ottiene la tesi.

   Considero $H = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$ sottospazio vettoriale di V tale che $F(H) \subseteq H$ (poiché $F(V_{\lambda_i}) \subseteq V_{\lambda_i}$).

   Suppongo per assurdo che $H \subsetneq V$, $H \oplus H^\perp = V$

   $\implies H^\perp \neq \{\underline{0}\}$

   Si verifica che $F(H^\perp) \subseteq H^\perp$, infatti se $v \in H^\perp$, $\forall\, h \in H$

   $$F(v) \cdot h \underset{7}{=} v \cdot F(h) \underset{8}{=} 0$$

   $\implies F(V) \in H^\perp$.

   Sia $F' = F_{|H^\perp}$, $F' : H^\perp \to H^\perp$ ed è un endomorfismo simmetrico di $(H^\perp, \cdot)$.

   Per un lemma precedente F' ha almeno un autovalore λ.

   $\implies \exists\, v \neq \underline{0}$, $v \in H^\perp$ tale che $F'(v) = \lambda v$, $F(v) = \lambda v$

   $\implies$ v autovettore di F che non appartiene a nessun autospazio: assurdo.

   $\implies H^\perp = \{\underline{0}\}$

   $\implies H = V$ e F è diagonalizzabile

2. $F \in \mathrm{End}(V)$ e diagonalizzabile, e i suoi autospazi sono 2 a 2 ortogonali. Sia $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$ lo spettro di F

[7] poiché F è simmetrico
[8] poiché $F(h) \in H$

$\implies$ poiché F è diagonalizzabile

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$$

Sia $\mathscr{B}_i$ una base ortonormale di V_{λ_i}, sia $\mathscr{B}$

$$\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{l}$$

base ortonormale di V. Risulta che $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ è diagonale, in particolare $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ è simmetrica.

F è rappresentata da una matrice simmetrica rispetto ad una base ortonormale

$\implies$ F è simmetrica come funzione su $(V, \cdot)$. $\square$

Corollario Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale euclideo e $F \in \mathrm{End}(V)$ è simmetrico

$\implies$ F ha una base ortonormale di autovettori.

dim. F diagonalizzabile con autospazi ortogonali 2 a 2, $\mathrm{Spettro}(F) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_l\}$, so che

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_l}$$

se $\mathscr{B}_i$ è base ortonormale di V_{λ_i}

$\implies$ $\mathscr{B}$

$$\mathscr{B} = \bigcup_{i=1}^{l}$$

base ortonormale di $(V, \cdot)$ fatta da autovettori di V.

Osservazione (14.8) Vale anche il viceversa, se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale Euclideo e $F \in \mathrm{End}(V)$ ha una base ortonormale di autovettori

$\implies$ F è simmetrico.

Esercizio Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

A simmetrica. Si trovi una base ortonormale di autovettori di A. (in $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico)

Soluzione

1. Trovo gli autovalori di A

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda\,\mathrm{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -\lambda\det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) + (\lambda - 1) + (-1 + \lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 1) + 2\lambda - 2 =$$
$$= -\lambda^3 + 3\lambda - 2$$

Quindi $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$, di cui devo trovare le radici.

2. Trovo le radici di $p(\lambda)$. Noto che 1 è radice del polinomio.

$\implies$ $(\lambda - 1)$ divide $p(\lambda)$, dividiamo $p(\lambda)$ con $(\lambda - 1)$

$\implies$ $p(\lambda) = (\lambda - 1)(-\lambda^2 - \lambda + 2)$. Tutte le radici del polinomio, ovvero gli autovalori di A, sono

$$\{1, -2\}$$

Risulta che $m_a(-2) = 1 = m_2(-2)$ e $m_a(1) = 2 = m_2(1)$

Sapendo quindi che $\mathbb{R}^3 = V_{-2} \oplus V_1$

3. Calcolo V_1. $V_1 = \text{nullspace}(A - \mathrm{Id})$, studio il sistema $(A - \mathrm{Id})X = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$\implies$ $x_1 + x_2 - x_3 = 0$

$\implies$ $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$

Trovo una base ortonormale di V_1, osservo che

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

è base di V_1, non ortonormale.

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} \qquad e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1}{||v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1||}$$

So che $||v_1|| = \sqrt{2}$, da cui

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo e_2

$$v_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$||v_2 - (v_2 \cdot e_1)\, e_1|| = \frac{1}{2}\sqrt{1+5+1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$\implies \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\implies \; \{e_1, e_2\}$ base ortonormale di V_1

4. Studio V_{-2} $V_{-2} = \text{nullspace}(A + 2\,\text{Id})$, studio il sistema $(A + 2\,\text{Id})X = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alla fine si trova $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$, quindi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

è base di V_{-2}

Quindi $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ base ortonormale di V_{-2}

5. Trovo la base ortonormale: $\{e_1, e_2, e_3\}$ è base ortonormale di autovettori di A. Quindi
$$Q = \in O(3)$$
Vale $Q^{-1}AQ$ è diagonale e ${}^tQAQ$ è diagonale

Osservazione (14.9) Ci sono matrici $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ simmetriche ma non diagonalizzabili. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}$$
Questa matrice è simmetrica, ma non è diagonalizzabile. Infatti
$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \operatorname{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ i & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = \lambda^2$$
0 è l'unica radice di p, è ha molteplicità 2, Spettro$(A) = \{0\}$, $m_a(0) = 2$, ma $m_g(0) \neq 2$ poiché A non è la matrice nulla

$\implies$ A non è diagonale

Teorema XXI (complesso, versione geometrica) Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Hermitiano, sia $F \in \operatorname{End}(V)$ un endomorfismo Hermitiano

$\implies$ F è diagonalizzabile e gli autospazi di F sono a due a due ortogonale.

($\implies$ F ha una bae ortonormale di autovettori)

Teorema XXII (complesso, versione algebrica) Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ una matrice Hermitiana (${}^t\overline{A} = A$)

$\implies \exists\, P \in U(n)$ tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

$(U(n) = \{B \in \mathbb{C}^{n,n} \mid {}^t\overline{B} = B^{-1}\})$

Teorema XXIII (complesso, per matrici normali) Sia $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ sono fatti equivalenti

(*i*) $\exists P \in U(n)$ tale che $P^{-1}AP$ è diagonale.

(*ii*) A è normale.

dim. **(XXIII)**

$(i) \implies (ii)$

15 Forme Bilineari

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Una *forma bilineare* su V è una funzione

$$\xi : V \times V \to \mathbb{K}$$

tale che ξ è lineare in ogni variabile.

1. $\xi(v_1 + v_2, w) = \xi(v_1, w) + \xi(v_2, w)$
2. $\xi(v, w_1 + w_2) = \xi(v, w_1) + \xi(v, w_2)$
3. $\xi(\lambda v, w) = \xi(v, \lambda w) = \lambda \xi(v, w)$

$\forall\, v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V,\ \lambda \in \mathbb{K}$

Esempio (15.1) Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, un prodotto scalare su V è una forma bilineare

Definizione Una forma bilineare su V è *simmetrica* se

$$\xi(v, w) = \xi(w, v)$$

mentre è *antisimmetrica* se

$$\xi(v, w) = -\xi(w, v)$$

entrambe $\forall\, v, w \in V$

Esempi (15.2)

- $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\xi(X, Y) = X_1 Y_1 - X_2 Y_2$ è una forma bilineare simmetrica che non è un prodotto scalare
- $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\xi(X, Y) = X_1 Y_2 - Y_1 X_2$ è una forma bilineare antisimmetrica
- Sia $\mathbb{K}$ un campo e $A \in \mathbb{K}^{n,n}$,

$$\xi_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$$

e siano $X, Y \in \mathbb{K}^n$ vettori colonna,

$$\xi_A(X, Y) = {}^tXAY$$

ξ_A è sempre una forma bilineare su $\mathbb{K}^n$

Se in $\mathbb{R}^n$ si considera il prodotto scalare canonico

$\implies X \cdot Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^tX\,\mathrm{I}\,Y$

15.1 Matrici associate alle forme bilineari

Osservazione (15.1) Se $\xi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare, ξ induce una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $\xi = \xi_A$, cioè 2 dic 2021

$$\xi(X, Y) = {}^tXAY \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{K}^n$$

Per costruire A fisso

$$\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$$

base canonica in $\mathbb{K}^n$ e quindi si definisce $A = (a_{ij})$ dove $a_{ij} = \xi(e_i, e_j)$. Verifico che $\xi(X, Y) = {}^tXAY$, infatti

$$X = \sum_{i=1}^n x_i e_i \qquad Y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$\begin{aligned}\xi(X, Y) = \xi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) &= \\ \underset{9}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \xi(e_i, e_j) y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j &= \\ = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= {}^tXAY\end{aligned}$$

---

[9] ξ bilineare

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e sia $\xi : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare, associamo a ξ la matrice $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \xi(v_i, v_j)$.

$$\xi(v, w) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}$$

infatti

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

$$(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (w)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \xi(v, w) = \xi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) &= \\ \underset{10}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \xi(v_i, v_j) y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j &= \\ = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} &= {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

Indico A con $M^{\mathscr{B}}(\xi)$, cioè A è la matrice associata a ξ tramite la base $\mathscr{B}$

Proposizione *p*.xix Sia $\mathscr{B}$ una base di V, e sia ξ una forma bilineare su V

1. ξ è simmetrica $\iff$ $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è simmetrica;
2. ξ è antisimmetrica $\iff$ $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è antisimmetrica.

***dim.* (*p*.xix)** Dimostro 1, 2 è analogo.

"$\Longrightarrow$" Sia $A = M^{\mathscr{B}}(\xi)$, e indico $\mathscr{B}$ con $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. So che $a_{ij} = \xi(v_i, v_j)$, poiché ξ è simmetrica

$$\xi(v_i, v_j) = \xi(v_j, v_i) = a_{ji}$$

$\Longrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$, ovvero A è simmetrica.

[10] ξ bilineare

" $\Longleftarrow$ " $A = M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è simmetrica e dimostro che $\xi(v,w) = \xi(w,v)\ \forall\, v,w \in V$.

$$\xi(v,w) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}$$

poiché ${}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} \in \mathbb{K}$, ho che

$${}^t\Big({}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}\Big) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} = \xi(v,w)$$

ma so anche che

$${}^t\Big({}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}\Big) =$$

$$= {}^t(w)_{\mathscr{B}} {}^t A (v)_{\mathscr{B}} \underset{11}{=} {}^t(w)_{\mathscr{B}} A (v)_{\mathscr{B}} =$$

$$= \xi(w,v)$$

$\Longrightarrow$ si ottiene $\xi(v,w) = \xi(w,v)\ \forall\, v,w \in V$, cioè ξ simmetrica. $\square$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finitan su un campo $\mathbb{K}$, e sia ξ una forma bilineare su V. Siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ due basi su V. Sono definite $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ e $M^{\mathscr{B}'}(\xi)$- Cerchiamo il legame tra le due matrici. Pongo $A = M^{\mathscr{B}}(\xi)$, e $A' = M^{\mathscr{B}'}(\xi)$.

Sappiamo che se $v, w \in V$ allora

$$\xi(v,w) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} = {}^t(v)_{\mathscr{B}'} A' (w)_{\mathscr{B}'}$$

Posso scrivere

$$(v)_{\mathscr{B}} = P(v)_{\mathscr{B}'} \qquad (w)_{\mathscr{B}} = P(w)_{\mathscr{B}'}$$

con $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ matrice del cambiamento di base

$$\Longrightarrow \quad {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} = {}^t\Big(P(v)_{\mathscr{B}'}\Big) A P (w)_{\mathscr{B}'} = {}^t(v)_{\mathscr{B}'} {}^t P A P (w)_{\mathscr{B}'}$$

Da qui si deduce

$${}^t(v)_{\mathscr{B}'} {}^t P A P (w)_{\mathscr{B}'} = {}^t(v)_{\mathscr{B}'} A' (w)_{\mathscr{B}'} \qquad \forall\, v,w \in V$$

$\Longrightarrow\ \forall\, X, Y \in \mathbb{K}^n\ {}^tX {}^tP A P Y = {}^tX A' Y$

[11] poiché $A = {}^tA$

$\implies A' = {}^tPAP$, infatti se $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ $C = (c_{ij})$, vale $c_{ij} = {}^te_iCe_j$, dove $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$.

$A' = {}^tPAP$ con P matrice del cambiamento di base:

$$M^{\mathscr{B}'}(\xi) = {}^tM^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}M^{\mathscr{B}}(\xi)M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \tag{15.1}$$

Osservazione (15.2) In generale A e A' non hanno lo stesso determinante, infatti

$$A' = {}^tPAP \qquad \det(A') = \overset{2}{\det}(P)\det(A)$$

Definizione $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono congruenti se $\exists P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tale che $B = {}^tPAP$

Esercizio Essere congruenti è una relazione di equivalenza

Soluzione Dimostrare l'affermazione

Definizione Matrici congruenti possono avere determinanti diversi, ma se B e A sono congruenti hanno lo stesso rango.

Si definisce il *rango* di una forma bilineare come il rango di una sua qualsiasi matrice associata rispetto ad un base.

15.2 Forme quadratiche

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$

$$B(V, \mathbb{K}) = \{\xi : V \times V \,|\, \xi \text{ è bilineare}\}$$

$B(V, \mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, con la struttura data da

$$(\lambda\xi + \mu\eta)(v, w) := \lambda\xi(v, w) + \mu\eta(v, w) \tag{15.2}$$

con $\lambda\xi + \mu\eta \in B(V, \mathbb{K})$, e $\xi, \eta \in B(V, \mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Si definiscono

$$\begin{aligned} B_S(V, \mathbb{K}) &= \{\xi \in B(V, \mathbb{K}) \,|\, \xi \text{ è simmetrica}\} \\ B_A(V, \mathbb{K}) &= \{\xi \in B(V, \mathbb{K}) \,|\, \xi \text{ è antisimmetrica}\} \end{aligned}$$

$B_S(V, \mathbb{K})$ e $B_A(V, \mathbb{K})$ sottospazi vettoriali in $B(V, \mathbb{K})$

Definizione Se $\mathbb{K}$ è un campo si definisce la caratteristica di $\mathbb{K}$ come il più piccolo naturale n tale che $n \neq 0$ e

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-\text{volte}} = 0 \tag{15.3}$$

Per convenzione si dice che $\mathbb{K}$ ha caratteristica 0 se n non esiste

Esempio (15.3) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ hanno caratteristica 0, mentre $\mathbb{Z}_2$ ha caratteristica 2.

Se $\mathbb{K}$ ha caratteristica 2

$$x = -x \nRightarrow x = 0$$

D'ora in avanti si assume che $\mathbb{K}$ non abbia caratteristica 2.

Risulta $B_S(V,\mathbb{K}) \cap B_A(V,\mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$, infatti se $\xi \in B_S(V,\mathbb{K}) \cap B_A(V,\mathbb{K})$ allora

$$\xi(v,w) = -\xi(v,w)\,\forall\, v,w \in V \implies \xi(v,w) = 0 \in \mathbb{K}$$

Inoltre

$$B(V,\mathbb{K}) = B_S(V,\mathbb{K}) \oplus B_A(V,\mathbb{K}) \tag{15.4}$$

infatti se $\xi \in B(V,\mathbb{K})$

$$\xi(v,w) = \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) + \xi(w,v)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) - \xi(w,v)\Big)\forall\, v,w \in V$$

Si definiscono

$$\begin{aligned}\xi_s &:= \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) + \xi(w,v)\Big),\ \xi_s \in B_S(V,\mathbb{K})\\ \xi_a &:= \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) - \xi(w,v)\Big),\ \xi_a \in B_A(V,\mathbb{K})\end{aligned}$$

$\implies \xi = \xi_a + \xi_s$

$\implies$ la somma è diretta.

Definizione Sia $\xi \in B_S(V,\mathbb{K})$, ξ induce

$$\begin{aligned}Q_\xi : V &\to \mathbb{K}\\ v &\mapsto \xi(v,v)\end{aligned}$$

Q_ξ si dice la *forma quadratica* associata a ξ

Esempio (15.4) Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale Euclideo, e $\xi(v,w) = v \cdot w$ $\implies Q_\xi(v) = ||v||^2$

Osservazione (15.3)

1. Si può estendere la nozione di forma quadratica su $B(V, \mathbb{K})$ tramite $Q_\xi(v) = \xi(v,v)$, in questo modo $Q_\xi = Q_{\xi_s}$
2. $Q_{\lambda\xi+\mu\eta} = \lambda Q_\xi + \mu Q_\eta$
3. $Q_\xi(\lambda v) = \lambda^2 Q_\xi(v)$
4. Se $Q_\xi = Q_\eta \implies \xi = \eta$, cioè la forma quadratica di una forma bilineare simmetrica determina la forma bilineare simmetrica

   Dimostrazione.

   $$\begin{aligned} Q_\xi(v+w) = \xi(v+w, v+w) = \\ = \xi(v,v) + \xi(w,w) + \xi(v,w) + \xi(w,v) = \\ = Q_\xi(v) + Q_\xi(w) + 2\xi(v,w) \end{aligned}$$

   Quindi

   $$\xi(v,w) = \frac{1}{2}\Big(Q_\xi(v+w) - Q_\xi(v) - Q_\xi(w)\Big) \tag{15.5}$$

   □

Definizione Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\xi \in B_S(V, \mathbb{K})$, Q_ξ.

Fissiamo $\mathscr{B}$ base di V, $M^{\mathscr{B}}(\xi) \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice associata. $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ si dice anche la matrice associata a Q_ξ, e il rango di $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è per definizione il rango di Q_ξ.

Sia $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, sia $v \in V$ e $X = (v)_{\mathscr{B}}$ con $X \in \mathbb{K}^n$.

$$Q_\xi(v) = {}^tX M^{\mathscr{B}}(\xi) X = \sum_{i,j}^{n} X_i X_j a_{ij}$$

dove $(a_{ij}) = M^{\mathscr{B}}(\xi)$.

Dal punto di vista algebrico Q_ξ è un polionmio di secondo grado omogeneo nelle componenti di v.

Esempio (15.5) Sia $\mathscr{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e $\xi \in B_S(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tale che

$$M^{\mathscr{B}}(\xi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo $Q_\xi(X)$

$$\begin{aligned} Q_\xi(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \\ = x_1(3x_1 + x_2 - 2x_3) + x_2(x_1 - x_3) + x_3(-2x_1 - x_2 + x_3) = \\ = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 1x_3^2 + 0x_2^2 \end{aligned}$$

Osservazione (15.4) Si noti che i coefficienti dei quadrati sono gli elementi sulla diagonale. Vale come regola generale che, data $M^{\mathscr{B}}(\xi) = (a_{ij})$, $X = (x_1, \cdots, x_n)$, $Q_\xi(X)$ è un polinomio tale che

- gli elementi a_{ii} sono i coefficienti di x_i^2;
- gli elementi a_{ij}, con $i \neq j$, moltiplicati per due, sono i coefficienti del prodotto x_ix_j.