1 Funzioni lineari

1.1 Proprietà delle funzioni lineari

Proposizione *p*.i La composizione di funzioni lineari è sempre una funzione lineare

***dim.* (*p*.i)** Siano V, W, Z spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $F : V \to W$ $G : W \to Z$ funzioni lineari, e prendiamo

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} Z$$

ovvero $G \circ F$, quindi $G \circ F(v) = G(F(v))$

Siano $v, w \in V$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$

$$G \circ F(\lambda v + \mu w) =$$

dato che F è lineare

$$= G(F(\lambda v + \mu w)) = G(\lambda F(v) + \mu F(w)) =$$

dato che G è lineare

$$= \lambda G(F(v)) + \mu G(F(w))) = \lambda(G \circ F)(v) + \mu(G \circ F)(w)$$

Proposizione *p*.ii Siuano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, sia $F : V \to W$ lineare biettiva (F è un isomorfismo),

$$F^{-1} : W \to V \text{ è lineare}$$

Questa proprietà ci mostra quanto sia rigida la linearità di una funzione

***dim.* (*p*.ii)** $F^{-1}(a)$ è l'unico $x \in V$ tale che $F(x) = a$

Siano $a, b \in W$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$, dimostro che

$$F^{-1}(\lambda a + \mu b) = \lambda F^{-1}(a) + \mu F^{-1}(b)$$

Denoto $x = F^{-1}(a)$ e $y = F^{-1}(b)$: ciò significa $F(x) = a$ e $F(y) = b$

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \lambda F(y) = \lambda a + \mu b$$

$\implies$ per come è definita F^{-1} questo implica

$$F^{-1}(\lambda a + \mu b) = \lambda x + \mu y = \lambda F^{-1}(a) + \mu F^{-1}(b)$$

$\implies$ F^{-1} è lineare $\square$

Esempi (1.1)

- $V = \mathbb{K}^n$, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile,

$$F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  Se A è invertibile, esiste $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = Id$ dove $Id \in \mathbb{K}^{n,n}$ è la matrice identita.

  Posso considerare

$$F_A^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$F_{A^{-1}} \circ F_A(x) = F_{A^{-1}}(F_A(x)) = A^{-1}(Ax) = Id \cdot x = x$$

  $\implies$ $F_{A^{-1}} \circ F_A$ è la funzione identità $I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

  $\implies$ F_A è invertibile e la sua inversa è $F_{A^{-1}}$

- Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, finitamente generato.

  Fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V,

$$F : V \to \mathbb{K}^n$$
$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  funzione lineare iniettiva, poiché il suo nucleo è banale; poiché V e $\mathbb{K}^n$ hanno la stessa dimensione, la funzione è un isomorfismo

  Si noti che

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

  con un unico 1 nella posizione i-esima, quindi la base di V viene portata tramite F nella base canonica di $\mathbb{K}^n$

Definizione Due spazi vettoriali V, W sullo stesso campo $\mathbb{K}$ sono isomorfi se esiste $F : V \to W$ isomorfismo

Proposizione *p*.iii Supponiamo che V e W siano due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, entrambi finitamente generati.

V è isomorfo a $W \iff V$ e W hanno la stessa dimensione

dim. (*p*.iii)

" $\Longrightarrow$ " Supponiamo che esiste $F : V \to W$ isomorfismo,

F iniettiva $\implies \dim \mathrm{Im}(F) = \dim V$

F suriettiva $\implies \dim F(V) = \dim W$

$\implies \dim V = \dim W$

" $\Longleftarrow$ " Supponiamo $\dim V = \dim W = n$. Sia $\mathscr{B}$ base di V e $\mathscr{C}$ base di W

$$\begin{aligned} F : V &\to \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

un isomorfismo,

$$\begin{aligned} G : W &\to \mathbb{K}^n \\ w &\mapsto (w)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

un isomorfismo

$$V \xrightarrow{F} \mathbb{K}^n \xleftarrow{G} W \qquad \implies \qquad V \xrightarrow{F} \mathbb{K}^n \xrightarrow{G^{-1}} W$$

Considero $G^{-1} \circ F$, biettiva

$\implies G^{-1} \circ F$ è un isomorfismo

$\implies V, W$ sono isomorfi $\square$

1.2 Funzioni lineari e cambiamenti di base

Siano V, W spazi vettoriali su un campo K, entrambi finitamente generati

$$\dim V = n, \dim W = m$$

Considero $F : V \to W$ lineare, e fisso $\mathscr{B}$ base di V e $\mathscr{C}$ base di W.

F è rappresentata da una matrice $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \in \mathbb{K}^{m,n}$ tramite la relazione

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) * (V)_{\mathscr{B}}$$

Questo è un diagramma commutativo

Considero altre due base $\mathscr{B}'$ di V e $\mathscr{C}'$ di W.

Rispetto a queste basi, ad F corrisponde un'altra matrice $M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$, voglio campire come $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$ sono relazionate.

Indico $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $A' = M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$

Sia $v \in V$ quindi

$$(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in \mathbb{K}^n$$

e

$$(v)_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = x' \in \mathbb{K}^n$$

So che $x = Px'$ con $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Considero $F(v) \in W$

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y \in \mathbb{K}^m$$

$$(F(v))_{\mathscr{C}'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = y' \in \mathbb{K}^m$$

So che $y = Qy'$, con Q matrice del cambiamento di base da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}'$, dove $Q \in \mathbb{K}^{m,m}$ è invertibile

$$y = Ax,\ y' = A'x,\ x = Px',\ y = Qy'$$

$Qy' = Ax \implies Qy' = APx'$

$\implies y' = Q^{-1}APx'$

$\implies A'x' = Q'APx' \ \forall x' \in \mathbb{K}^n$

$\implies A' = Q^{-1}AP$

1.2.1 Caso particolare

$W = V$, quindi $F : V \to V$ e considero $\mathscr{C} = \mathscr{B}'$ e $\mathscr{C}' = \mathscr{B}'$ ($\implies Q = P$).

In questo caso la formula implica $A' = P^{-1}AP$ dove P è la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$

Definizione Due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono simili se esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

Esercizio Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrici simili

$\implies \det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

Soluzione Supponiamo A, B simili, allora esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

Per il teorema di Binet:

$$\det B = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$$

Poi

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr} A$$

Poiché P e P^{-1} hanno rango n, risulta

$$\operatorname{rank}(P^{-1}AP) = \operatorname{rank} A$$

Esercizio Si verifichi che la similitudine (la proprietà di due matrici di essere simili) in $\mathbb{K}^{n,n}$ è una relazione di equivalenza

Soluzione Indico con $\sim$ la relazione

$$A \sim B \text{ se esiste } P \in \mathbb{K}^{n,n} \text{ invertibile} \mid B = P^{-1}AP$$

- $\sim$ è riflessiva, $A = (Id)^{-1}A \cdot Id \implies A \sim A$
- $\sim$ è simmetrica, infatti, se $A \sim B$

  $\implies B = P^{-1}AP$

  $\implies A = PBP^{-1}$

  $\implies B \sim A$
- Supponiamo $A \sim B$ e $B \sim C$ e dimostro $A \sim C$

  $$A \sim B \implies B = P^{-1}AP \quad B \sim C \implies C = Q^{-1}BQ$$

  $\implies C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$

  $\implies A \sim C$ $\square$

Esercizio In $\mathbb{R}^3$ considero la base canonica $\mathscr{B} = e_1, e_2, e_3$ e la base data dai tre vettori

$$v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, 0, -2)$$

1. Si verifichi che $\mathscr{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$
2. Sia F la funzione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinata dalle relazioni

$$\begin{aligned} F(v_1) &= v_1 + v_2 \\ F(v_2) &= 2v_1 - v_2 \\ F(v_3) &= -v_2 + v_3 \end{aligned}$$

   Si trovi la matrice che rappresenta F rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ e la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica $\mathscr{B}$

Soluzione

1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   si noti che $\det A \neq 0$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti, ovvero sono una base

2. $$M^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$: per quanto visto oggi $M^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F) = P^{-1}M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)P$

   $\implies M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = PM^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F)P^{-1}$

Definizione Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $F : V \to V$ lineare. Se $\mathscr{B}$ è la base fissata di V, allora $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, si definisce

$$\det F = \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F))$$

e

$$\operatorname{tr} F = \operatorname{tr}(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F))$$

Per un risultato precedente, $\operatorname{tr} F$ e $\det F$ sno ben definiti, ovvero non dipendono dalla base fissata, mentre $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ sì

Esistono matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tali che $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\det A = \det B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ ma non simili

Esempio (1.2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

Notiamo che $\det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, ma A e B non sono simili, infatti

$$P^{-1}AP = Id \forall P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), B \neq Id$$

1.3 Somma di funzioni lineari

Siano V, W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Siano $F, G : V \to W$ lineari. Si introduce

$$\begin{aligned} F + G : V &\to W \\ v &\mapsto F(v) + G(v) \end{aligned}$$

funzione da V in W

Esercizio Si dimostri che $F + G$ è funzione lineare

Soluzione XX

Si introduce inoltre, se $\lambda \in \mathbb{K}$, la funzione

$$\begin{aligned} \lambda F : V &\to W \\ v &\mapsto \lambda F \end{aligned}$$

Esercizio Si dimostri che λF è funzione lineare

Soluzione XX

Indico con

$$L(V, W) = \{F : V \to W | F \text{ lineare}\}$$

$L(V, W)$ eredita una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove il vettore nullo di $L(V, W)$ è la funzione costante

$$\begin{aligned} 0_{L(V,W)} : V &\to W \\ v &\mapsto \underline{0}_W \end{aligned}$$