1 Forme Bilineari

1.1 Matrici associate alle forme bilineari

Osservazione (1.1) Se $\xi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ è una forma bilineare, ξ induce una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $\xi = \xi_A$, cioè 2 dic 2021

$$\xi(X,Y) = {}^tXAY \quad \forall\, X, Y \in \mathbb{K}^n$$

Per costruire A fisso

$$\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$$

base canonica in $\mathbb{K}^n$ e quindi si definisce $A = (a_{ij})$ dove $a_{ij} = \xi(e_i, e_j)$. Verifico che $\xi(X,Y) = {}^tXAY$, infatti

$$X = \sum_{i=1}^n x_i e_i \qquad Y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$\begin{aligned}\xi(X,Y) = \xi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \\ \underset{1}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \xi(e_i, e_j) y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j = \\ = (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tXAY\end{aligned}$$

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con $\dim V = n$. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e sia $\xi : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare, associamo a ξ la matrice $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = \xi(v_i, v_j)$.

$$\xi(v,w) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}$$

infatti

$$v = \sum_{i=1}^n x_i v_i \qquad w = \sum_{j=1}^n y_j v_j$$

$$(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (w)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

[1] ξ bilineare

$$\xi(v,w) = \xi\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j\right) =$$
$$\underset{2}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \xi(v_i, v_j) y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} y_j =$$
$$= (x_1, \cdots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}$$

Indico A con $M^{\mathscr{B}}(\xi)$, cioè A è la matrice associata a ξ tramite la base $\mathscr{B}$

Proposizione *p*.i Sia $\mathscr{B}$ una base di V, e sia ξ una forma bilineare su V

1. ξ è simmetrica $\iff$ $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è simmetrica;
2. ξ è antisimmetrica $\iff$ $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è antisimmetrica.

***dim.* (*p*.i)** Dimostro 1, 2 è analogo.

" $\Longrightarrow$ " Sia $A = M^{\mathscr{B}}(\xi)$, e indico $\mathscr{B}$ con $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. So che $a_{ij} = \xi(v_i, v_j)$, poiché ξ è simmetrica

$$\xi(v_i, v_j) = \xi(v_j, v_i) = a_{ji}$$

$\Longrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$, ovvero A è simmetrica.

" $\Longleftarrow$ " $A = M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è simmetrica e dimostro che $\xi(v,w) = \xi(w,v)\ \forall\, v, w \in V$.

$$\xi(v,w) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}$$

poiché ${}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} \in \mathbb{K}$, ho che

$${}^t\left({}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}\right) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} = \xi(v,w)$$

ma so anche che

$${}^t\left({}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}}\right) =$$
$$= {}^t(w)_{\mathscr{B}} {}^t A (v)_{\mathscr{B}} \underset{3}{=} {}^t(w)_{\mathscr{B}} A (v)_{\mathscr{B}} =$$
$$= \xi(w,v)$$

[2] ξ bilineare

$\implies$ si ottiene $\xi(v,w) = \xi(w,v)\ \forall\, v,w \in V$, cioè ξ simmetrica. $\square$

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finitan su un campo $\mathbb{K}$, e sia ξ una forma bilineare su V. Siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ due basi su V. Sono definite $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ e $M^{\mathscr{B}'}(\xi)$- Cerchiamo il legame tra le due matrici. Pongo $A = M^{\mathscr{B}}(\xi)$, e $A' = M^{\mathscr{B}'}(\xi)$.

Sappiamo che se $v, w \in V$ allora

$$\xi(v,w) = {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} = {}^t(v)_{\mathscr{B}'} A' (w)_{\mathscr{B}'}$$

Posso scrivere

$$(v)_{\mathscr{B}} = P(v)_{\mathscr{B}'} \qquad (w)_{\mathscr{B}} = P(w)_{\mathscr{B}'}$$

con $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ matrice del cambiamento di base

$$\implies {}^t(v)_{\mathscr{B}} A (w)_{\mathscr{B}} = {}^t\Big(P(v)_{\mathscr{B}'}\Big) A P (w)_{\mathscr{B}'} = {}^t(v)_{\mathscr{B}'} {}^tPAP (w)_{\mathscr{B}'}$$

Da qui si deduce

$${}^t(v)_{\mathscr{B}'} {}^tPAP(w)_{\mathscr{B}'} = {}^t(v)_{\mathscr{B}'} A'(w)_{\mathscr{B}'} \qquad \forall\, v, w \in V$$

$\implies \forall\, X, Y \in \mathbb{K}^n\ {}^tX {}^tPAPY = {}^tXA'Y$

$\implies A' = {}^tPAP$, infatti se $C \in \mathbb{K}^{n,n}$ $C = (c_{ij})$, vale $c_{ij} = {}^te_iCe_j$, dove $\{e_1, \cdots, e_n\}$ base canonica di $\mathbb{K}^n$.

$A' = {}^tPAP$ con P matrice del cambiamento di base:

$$M^{\mathscr{B}'}(\xi) = {}^tM^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} M^{\mathscr{B}}(\xi) M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \tag{1}$$

Osservazione (1.2) In generale A e A' non hanno lo stesso determinante, infatti

$$A' = {}^tPAP \qquad \det(A') = \det^2(P)\det(A)$$

Definizione $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono congruenti se $\exists P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ tale che $B = {}^tPAP$

Esercizio Essere congruenti è una relazione di equivalenza

Soluzione Dimostrare l'affermazione

[3] poiché $A = {}^tA$

Definizione Matrici congruenti possono avere determinanti diversi, ma se B e A sono congruenti hanno lo stesso rango.

Si definisce il *rango* di una forma bilineare come il rango di una sua qualsiasi matrice associata rispetto ad un base.

1.2 Forme quadratiche

Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$

$$B(V, \mathbb{K}) = \{\xi : V \times V \,|\, \xi \text{ è bilineare}\}$$

$B(V, \mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, con la struttura data da

$$(\lambda\xi + \mu\eta)(v, w) := \lambda\xi(v, w) + \mu\eta(v, w) \tag{2}$$

con $\lambda\xi + \mu\eta \in B(V, \mathbb{K})$, e $\xi, \eta \in B(V, \mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Si definiscono

$$\begin{aligned} B_S(V, \mathbb{K}) &= \{\xi \in B(V, \mathbb{K}) \,|\, \xi \text{ è simmetrica}\} \\ B_A(V, \mathbb{K}) &= \{\xi \in B(V, \mathbb{K}) \,|\, \xi \text{ è antisimmetrica}\} \end{aligned}$$

$B_S(V, \mathbb{K})$ e $B_A(V, \mathbb{K})$ sottospazi vettoriali in $B(V, \mathbb{K})$

Definizione Se $\mathbb{K}$ è un campo si definisce la caratteristica di $\mathbb{K}$ come il più piccolo naturale n tale che $n \neq 0$ e

$$n - \text{volte} 1 + 1 + \cdots + 1 = 0 \tag{3}$$

Per convenzione si dice che $\mathbb{K}$ ha caratteristica 0 se n non esiste

Esempio (1.1) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ hanno caratteristica 0, mentre $\mathbb{Z}_2$ ha caratteristica 2.

Se $\mathbb{K}$ ha caratteristica 2

$$x = -x \nRightarrow x = 0$$

D'ora in avanti si assume che $\mathbb{K}$ non abbia caratteristica 2.

Risulta $B_S(V, \mathbb{K}) \cap B_A(V, \mathbb{K}) = \{\underline{0}\}$, infatti se $\xi \in B_S(V, \mathbb{K}) \cap B_A(V, \mathbb{K})$ allora

$$\xi(v, w) = -\xi(v, w) \,\forall\, v, w \in V \implies \xi(v, w) = 0 \in \mathbb{K}$$

Inoltre

$$B(V, \mathbb{K}) = B_S(V, \mathbb{K}) \oplus B_A(V, \mathbb{K}) \tag{4}$$

infatti se $\xi \in B(V, \mathbb{K})$

$$\xi(v,w) = \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) + \xi(w,v)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) - \xi(w,v)\Big) \forall\, v, w \in V$$

Si definiscono

$$\begin{aligned} \xi_s &:= \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) + \xi(w,v)\Big),\ \xi_s \in B_S(V, \mathbb{K}) \\ \xi_a &:= \frac{1}{2}\Big(\xi(v,w) - \xi(w,v)\Big),\ \xi_a \in B_A(V, \mathbb{K}) \end{aligned}$$

$\implies \xi = \xi_a + \xi_s$

$\implies$ la somma è diretta.

Definizione Sia $\xi \in B_S(V, \mathbb{K})$, ξ induce

$$\begin{aligned} Q_\xi : V &\to \mathbb{K} \\ v &\mapsto \xi(v,v) \end{aligned}$$

Q_ξ si dice la *forma quadratica* associata a ξ

Esempio (1.2) Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale Euclideo, e $\xi(v,w) = v \cdot w$ $\implies Q_\xi(v) = ||v||^2$

Osservazione (1.3)

1. Si può estendere la nozione di forma quadratica su $B(V, \mathbb{K})$ tramite $Q_\xi(v) = \xi(v,v)$, in questo modo $Q_\xi = Q_{\xi_s}$
2. $Q_{\lambda\xi + \mu\eta} = \lambda Q_\xi + \mu Q_\eta$
3. $Q_\xi(\lambda v) = \lambda^2 Q_\xi(v)$
4. Se $Q_\xi = Q_\eta \implies \xi = \eta$, cioè la forma quadratica di una forma bilineare simmetrica determina la forma bilineare simmetrica

   Dimostrazione.

   $$\begin{aligned} Q_\xi(v+w) &= \xi(v+w, v+w) = \\ &= \xi(v,v) + \xi(w,w) + \xi(v,w) + \xi(w,v) = \\ &= Q_\xi(v) + Q_\xi(w) + 2\xi(v,w) \end{aligned}$$

   Quindi

   $$(5)\ \xi(v,w) = \frac{1}{2}\Big(Q_\xi(v+w) - Q_\xi(v) - Q_\xi(w)\Big) \qquad \square$$

Definizione Sia V spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\xi \in B_S(V, \mathbb{K})$, Q_ξ.

Fissiamo $\mathscr{B}$ base di V, $M^{\mathscr{B}}(\xi) \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice associata. $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ si dice anche la matrice associata a Q_ξ, e il rango di $M^{\mathscr{B}}(\xi)$ è per definizione il rango di Q_ξ.

Sia $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, sia $v \in V$ e $X = (v)_{\mathscr{B}}$ con $X \in \mathbb{K}^n$.

$$Q_\xi(v) = {}^tXM^{\mathscr{B}}(\xi)X = \sum_{i,j}^{n} X_iX_ja_{ij}$$

dove $(a_{ij}) = M^{\mathscr{B}}(\xi)$.

Dal punto di vista algebrico Q_ξ è un polionmio di secondo grado omogeneo nelle componenti di v.

Esempio (1.3) Sia $\mathscr{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e $\xi \in B_S(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tale che

$$M^{\mathscr{B}}(\xi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo $Q_\xi(X)$

$$\begin{aligned} Q_\xi(X) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} &= \\ = x_1(3x_1 + x_2 - 2x_3) + x_2(x_1 - x_3) + x_3(-2x_1 - x_2 + x_3) &= \\ = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 1x_3^2 + 0x_2^2 & \end{aligned}$$

Osservazione (1.4) Si noti che i coefficienti dei quadrati sono gli elementi sulla diagonale. Vale come regola generale che, data $M^{\mathscr{B}}(\xi) = (a_{ij})$, $X = (x_1, \cdots, x_n)$, $Q_\xi(X)$ è un polinomio tale che

- gli elementi a_{ii} sono i coefficienti di x_i^2;
- gli elementi a_{ij}, con $i \neq j$, moltiplicati per due, sono i coefficienti del prodotto x_ix_j.