Analisi Matematica 1 A

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

Indice

Parte I

Insiemi

1 Introduzione agli insiemi

Gli insiemi numerici a cui siamo abituati da sempre sono 20 set 2021

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{r = \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m, n \text{ primi tra loro}\}$$

Per l'insieme $\mathbb{Q}$ esiste una rappresentazione decimale:

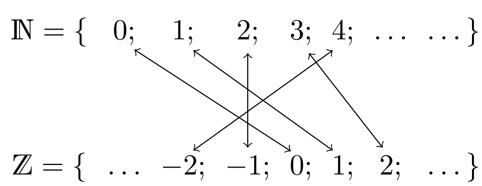
$$r = n, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_j \cdots$$

con $n \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. "$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_j \cdots$" prende il nome di allineamento periodico (o finisce o si ripete all'infinito).

1.1 Corrispondenza biunivoca

Due insiemi *finiti* possono essere messi in corrispondenza biunivoca se e solo se hanno lo stesso numero di oggetti.

1.1.1 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$



1.1.2 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

In rosso è segnato l'insieme $\mathbb{N}$, mentre in nero le coppie di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, che sono state ordinate dalle freccie rosse:

$$\begin{array}{ccccc}
00^{1} & 01^{2} & 02^{6} & 03^{7} & \dots \\
10^{3} & 11^{5} & 12^{8} & 13 & \dots \\
20^{4} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

In generale, se $K \leftrightarrow \mathbb{N}$ (dove $\leftrightarrow$ si legge "in corrispondenza biunivoca") $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&K \leftrightarrow K \times K = K^2 \\
&K \leftrightarrow K \times K \times K = K^3 \\
&K \leftrightarrow K \times K \times \cdots \times K = K^n
\end{aligned}$$

Definizione Un insieme A è detto *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$

Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ sono numerabili

1.2 Insieme $\mathbb{R}$

Proposizione *p*.i Sia d la diagonale del quadrato di lato 1, ovvero $d^2 = 2$. 21 set 2021
$d \notin \mathbb{Q}$

dim. **(*p*.i)** Assumiamo per assurdo che $d \in \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow \exists\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ primi tra loro tali che $d = \frac{m}{n}$

$\Longrightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$

$\Longrightarrow m^2 = 2n^2$

$\Longrightarrow m^2$ è pari $\Longrightarrow m$ è pari†

$\Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tale che $m = 2k$

$\Longrightarrow m^2 = 4k^2$

$\Longrightarrow 2n^2 = 4k^2$

---

† dimostrazione successiva

$\implies n^2 = 2k_2$

$\implies n^2$ è pari $\implies n$ è pari;

si ha contradizione dell'ipotesi che m, n fossero primi tra di loro (in quanto entrambi pari hanno almeno un divisore in comune, ovvero 2). $\square$

Proposizione *p*.ii $\quad m \in \mathbb{Z}$, m^2 pari $\implies m$ pari

***dim.* (*p*.ii)** Per assurdo, assumiamo m dispari

$\implies \exists\, k \in \mathbb{Z} | m = 2k + 1$

$\implies m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\implies m^2 = \underbrace{4k(k+1)}_{pari} + 1$

$\implies m^2$ è dispari.

Si ha contraddizione, pertanto m è pari. $\square$

Dal momento che si è utilizzata nelle ultime dimostrazioni, è bene aprire una parentesi sulle *dimostrazioni per assurdo*

Schema dimostrativo per assurdo

Proposizione *p*.iii (schema I) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \underset{?}{\iff} \Big((p \land \neg q) \implies \neg p\Big)$$

***dim.* (*p*.iii)**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \implies \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. $\square$

Proposizione *p*.iv (schema II) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \underset{?}{\iff} \Big((p \land \neg q) \implies q\Big)$$

dim. **(p.iv)**

p	q	$\neg q$	$p \land \neg q$	$p \implies q$	$(p \land \neg q) \implies q$
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

Proposizione p.v (schema III) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \underset{?}{\iff} (\neg q \implies \neg p)$$

dim. **(p.v)**

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

Dalle dimostrazioni precedenti (p.i) si è reso evidente che necessitiamo di un insieme numerico che permetta di risolvere il problema di trovare la diagonale di un quadrato di lato 1: infatti, questo semplice caso ci dimostra che la retta euclidea non è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Q}$, ma che anzi la retta di $\mathbb{Q}$ ha "un buco"

Vogliamo trovare X tale che $\mathbb{Q} \subseteq X$, $X \leftrightarrow$ retta

Per trovare questo insieme è necessario introdurre le *relazioni* all'interno di un insieme

1.2.1 Relazioni

Sia A un insieme generico: diciamo $\mathcal{R}$ relazione su A tale che

$$\mathcal{R} \subseteq A \times A$$

Dati $a, b \in A$ si scrive $a\mathcal{R}b \iff (a, b) \in \mathcal{R}$. Diciamo che a è in corrispondenza con b se $a\mathcal{R}b$

Proprietà

- $\mathcal{R}$ si dice *simmetrica* se $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ si dice *riflessiva* se $\forall\, a \in A$, $a\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ si dice *transitiva* se dati $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$
- $\mathcal{R}$ si dice *antisimmetrica* se dati $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b$

Definizione Una relazione $\mathcal{R}$ su A è detta *di ordine* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*

Definizione Una relazione $\mathcal{R}$ su A è detta di *ordine totale* (o anche A è totalmente ordinato rispetto ad $\mathcal{R}$) se è una relazione d'ordine e vale

$$\forall\, a, b \in A \quad a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$$

Esempi (1.1)

- A insieme delle parole del dizionario italiano, $\mathcal{R}$ ordine lessicografico

  $a, b \in A \quad a\mathcal{R}b$ se a viene prima o coincide con b nell'ordine alfabetico.

  $\mathcal{R}$ è riflessiva, transitiva e antisimmetrica, $\mathcal{R}$ è di ordine totale.

- Sia U insieme universo, $\mathscr{P}(U)$ l'insieme delle parti di U[†], $\mathcal{R}$ relazione di inclusione ($\subset$)

  $A, B \in \mathscr{P}(U)$, $A \subset B \iff \forall\, x \in A \implies x \in B$

  $\mathcal{R}$ è di ordine su $\mathscr{P}(U)$ ma non è di ordine totale

- Nell'insieme $\mathbb{Q}$ si consideri la relazione
  - minore stretto

    $a < b$ se a precede strettamente b nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea

  - minore uguale

    $a \leq b$ se a precede o coincide b nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea

[†] Si è fatto così e non si è scelto V (insieme di tutti gli insiemi) per evitare i paradossi; in particolare, vedasi *paradosso di Russel*

Si noti che

$<$ non è di ordine (non soddisfa né la proprietà riflessiva né la proprietà antisimmetrica)

$\leq$ è di ordine totale

La relazione $<$ non è di ordine in quanto

1. non soddisfa la proprietà riflessiva: ogni numero non è minore a se stesso
2. non soddisfa la proprietà di antisimmetria, in quanto non esiste nessuna coppia di numeri per cui valgano le relazioni $a < b$ e $b < a$

La relazione $\leq$ è di ordine totale, in quanto soddisfa tutte e tre le proprietà:

1. è riflessiva, in quanto ogni numero è minore o uguale a se stesso
2. è antisimmetrica, in quanto l'unico modo per cui valga la relazione $a \leq b$ e $b \leq a$ è che $a = b$
3. è transitiva, in quanto se $a \leq b$ è $b \leq c$ allora $a \leq c$
4. inoltre, per ogni coppia (non ordinata) di numeri reali, è sempre possibile stabilire almeno un ordine che permetta di soddisfare la relazione.

Definizione La relazione $\mathcal{R}$ su A è detta *relazione di equivalenza* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva.* Si indica generalmente con $x \sim y$ invece di $x\mathcal{R}y$

Una classe di equivalenza di $u \in A$ (dove u è detto "rappresentante") è

$$[u] = \{v \in A : \, v \sim u\}$$

L'insieme quoziente di A rispetto a $\sim$:

$$A/\sim := \{[u] : u \in A\}$$

Definizione Un insieme U si dice totalmente ordinato con la relazione d'ordine "$\preceq$" 22 set 2021

Consideriamo $A \subseteq U$

1. A è *limitato superiormente* se

$$\exists\, k \in U \text{ t. c. } \forall a \in A, a \preceq k$$

$\implies$ k è detto *maggiorante* di A

2. A è *limitato inferiormente* se

$$\exists\, h \in U \text{ t. c. } \forall a \in A, h \preceq a$$

$\implies$ k è detto *minorante* di A

Possono esistere infiniti maggioranti e infiniti minoranti

Definizione M è il massimo di A se M è un maggiorante ($a \preceq M \forall\, a \in A$) e $M \in A$

Definizione m è il minimo di A se m è un minorante ($m \preceq a \forall\, a \in A$) e $m \in A$

Si dice che $M = \max A$ e $m = \min A$

Esempi (1.2) Per tutti gli esempi successivi si consideri $U = \mathbb{Q}$ e $\preceq = \leq$

1. $A = \{5, 7, 9, -4, 588\}$. $\min A = -4$, $\max A = 588$

   Con $A \subseteq Q$ e A contenente un numero finito di valori

   $\implies$ A ammette max e min

2. $B = \{2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, B è limitato inferiormente

   $\implies$ $\min B = 1$, B non è limitato superiormente

3. $C = \{1 + 1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, C è limitato: $\forall\, x \in C$, $1 < x \leq 2$

   C ammette un massimo ($\max C = 2$), C non ammette un minimo

4. $D = \{1 - 1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

   $\forall\, x \in D$, $0 \leq x < 1$

   $\min D = 0$, D non ammette max

Definizione Sia U totalmente ordinato con relazione d'ordine $\preceq$, e sia $a \in U$.

- Diciamo *estremo superiore* di A ($\sup A$) il più piccolo dei maggioranti.
- Diciamo *estremo inferiore* di A ($\inf A$) il più grande dei minoranti

$\sup A = \min\{M \in U \mid \forall\, x \in A, x \preceq M\}, \quad \inf A = \max\{m \in U \mid \forall\, x \in A, m \preceq a\}$

Se esistono $\max A$ e/o $\min A$

$\implies \sup A = \max A$, $\inf A = \min A$

Esempio (1.3) Sia $C = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\max C = 2 = \sup C$

$\min C = \nexists$

$\implies$ se m è minorante di C

$\implies m \leq 1 \implies \inf C = 1.$

Sia $D = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\min D = 0 = \inf D$

$\max D = \nexists$

$\implies$ se M è maggiorante di D

$\implies M \geq 1 \implies \sup D = 1$

Esempio (1.4)

$$E = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq 0, r^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$$

- E è limitato: $\forall\, r \in E, 0 \leq r < 2$
- $\inf E = \min E = 0$
- $\sup E$? Se $x^2 < 2$

  $\implies 0 \leq x < \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Un candidato $\sup E = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

  $\implies \sup E = \nexists$

L'obiettivo, quindi, è quello di costruire un insieme numerico X (con $\mathbb{Q} \subseteq X$) con operazioni $+$ e $\cdot$ tale che ogni sottoinsieme limitato ammetta estremo superiore e inferiore.

1.2.2 Definizione assiomatica dei numeri reali

$\mathcal{R}_1$. È definita un'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indicata con il segno "+" detta *addizione* o *somma*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa);
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$ (commutativa);
- esiste un elemento in $\mathbb{R}$ indicato con 0 (zero) tale che $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ (esistenza elemento neutro per $+$);
- $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\exists *$ tale che $a + * = 0$, si indica $* = -a$, detto *inverso*, *opposto* di a (esistenza dell'inverso per $+$).

$\mathcal{R}_2$. È definita un'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indicata con il segno "$\cdot$" detta *prodotto* o *moltiplicazione*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativa);
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$ (commutativa);
- esiste un elemento in $\mathbb{R}$ indicato con 1 (uno) tale che $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$ (esistenza elemento neutro per $+$);
- $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\exists *$ tale che $a \cdot * = 1$, si indica $* = a^{-1}$, detto *inverso*, *reciproco* di a (esistenza dell'inverso per $\cdot$);
- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (distrubutiva).

$\mathcal{R}_3$. È definita in $\mathbb{R}$ una relazione di ordine totale, indicata con "$\leq$", che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \implies a + c \leq b + c$;
- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c$: $a \cdot c \leq b \cdot c$.

$\mathcal{R}_4$. Sia $A \subset R$, $A \neq \emptyset$

Se A è limitato superiormente, allora A ammette un estremo superiore.

Se A è limitato inferiormente, allora A ammette un estremo inferiore

$\mathcal{R}_1$ garantisce che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo

Queste proprietà possono essere definite anche per $\mathbb{Q}$, in cui valgono però solo le proprietà corrispondenti a $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$.

Se valgono le proprietà $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ per un qualche insieme $\mathbb{K}$, questo insieme prende il nome di *campo totalmente ordinato*.

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono campi totalmente ordinati, e $\mathbb{R}$ è un *campo ordinato completo*

1.2.3 Campi ordinati completi

Si è costruito un insieme $\mathbb{R}$ con $(+, \cdot, \geq)$, che soddisfa $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$.

- Quanti insiemi con queste proprietà esistono?
- Che relazione c'è tra di loro?
- Come li rappresentiamo?

Definizione Dati B e B' campi ordinati (soddisfano $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$), si definisce *isomorfismo* tra B e B' una relazione

$$\begin{aligned}\varphi : B &\to B' \\ a &\mapsto a' = \varphi(a)\end{aligned}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- φ è biunivoca
- $\forall a, b \in B$
  - *(i)* $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
  - *(ii)* $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
  - *(iii)* $a \leq b \implies \varphi(a) \leq \varphi(b)$

Teorema I Siano B e B' campi ordinati $(+, \cdot, \leq, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$, con B completo e B' completo

$\implies \exists$ un isomorfismo $\varphi : B \to B'$

Si dice che B è isomorfo a B' (e viceversa) poiché la relazione di isomorfismo è di equivalenza: $B \sim B'$

Non lo dimostreremo

Scelto un campo B a piacere possiamo costruire la classe di equivalenza

$$[B] = \{\text{campi ordinati completi}\}$$

$$\mathbb{R} = [B]$$

1.2.4 Rappresentazione

Modello decimale: $x \in \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$x = p, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

dove $p \in \mathbb{Z}$ e $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots]$ è un allineamento infinito di cifre tra $\{1, \cdots, 9\}$

Modello binario: $y \in \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$y = p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \cdots$$

dove $p \in \mathbb{Z}$ e $[\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \cdots]$ è un allineamento infinito di cifre tra $\{1, 2\}$

Non conta il modello che si usa; è necessario dimostrare che questi modelli soddisfino gli assiomi: fare riferimento al libro di testo.

1.2.5 Caratteristiche di $\mathbb{R}$

Osservazione (1.1)

- $\mathbb{R}$ non può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. 27 set 2021
- $\mathbb{R}$ non è numerabile (mentre $\mathbb{N} \leftrightarrow \mathbb{Z} \leftrightarrow \mathbb{Q}$ tutti numerabili).
- diciamo che gli insiemi in corrispondenza biunivoca tra di loro sono *equipotenti*.
- Gli insiemi equipotenti a $\mathbb{N}$ hanno *potenza del numerabile*.
- Gli insiemi equipotenti ad $\mathbb{R}$ hanno *potenza del continuo*.

Obiettivo: verifichiamo che in $\mathbb{R}$

$$x^2 = 2$$

ammette soluzione (ovvero che esista la diagonale del quadrato di lato 1)

Teorema II Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, allora

$$\exists\, s \in \mathbb{R}, s > 0 \text{ t. c. } s^2 = a.$$

dim. **(II)**

- Sia $a > 1$ (ovvero $a^2 > a$), consideriamo

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \wedge x^2 < a\}$$

Verifichiamo che A è limitato superiormente da a. Se così non fosse avremmo per assurdo

$$\exists\, x \in A \,|\, x \geq a > 1$$

dunque

$$x^2 \geq a^2 \geq a$$

$\implies \exists\, x \in A$ tale che $x^2 \geq a$, contraddizione. Allora per l'assioma $\mathcal{R}_4$ (completezza)

$$\exists\, s = \sup A$$

Verifichiamo che $s^2 = a$. Ragioniamo per assurdo:

$$s^2 \neq a : \begin{cases} s^2 < a & (i) \\ \vee & \\ s^2 > a & (ii) \end{cases}$$

(i) $s^2 < a$ applichiamo lo schema per assurdo

$$s = \sup A \,\wedge\, s^2 < a \implies s \neq \sup A$$

Se troviamo $\varepsilon > 0$ tale che $(s+\varepsilon)^2 < a$ si ha $(s+\varepsilon) \in A$ ossia $s \neq \sup A$, contraddizione. Cerchiamo tale ε

Osserviamo

$$(s+\varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \leq s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon$$

se $0 < \varepsilon \leq 1$. Inoltre

$$s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon < a \iff s^2 + \varepsilon(2s+1) < a \iff 0 < \varepsilon \leq \frac{a-s^2}{2s+1}$$

Consideriamo ora

$$\varepsilon = \min\left\{1, \frac{a-s^2}{2s+1}\right\}$$

si ha

$$(s+\varepsilon)^2 = s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon < a$$

dunque $(s+\varepsilon)^2 < a$

$\implies \exists\, \varepsilon > 0$ tale che

$$(s+\varepsilon) \in A$$

$\implies s \neq \sup A$ contraddizione

(ii) $s^2 > a$ se esistesse $\varepsilon > 0$ tale che $(s-\varepsilon)^2 > a$ allora

$$\forall\, x \in A \quad x^2 < a < (s-\varepsilon)^2$$

$\implies \forall\, x \in A,\ x < s - \varepsilon,\ s \neq \sup A.$

Troviamo tale $\varepsilon > 0$

$$(s-\varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon$$

ma

$$s^2 - 2s\varepsilon > a \iff s^2 - a > 2s\varepsilon \iff 0 < \varepsilon < \frac{s^2 - a}{s_2}$$

Concludiamo dicendo che

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ t. c. } (s-\varepsilon)^2 > a$$

dunque $s \neq \sup A$, contraddizione.

Punto della situazione: se $a > 1$, allora $s = \sup A$, si ha $s^2 = a$, dunque $x^2 = a$ ammette soluzione $s = \sup A$.

- Sia $a = 1$: la soluzione ovvia di $x^2 = 1$ è $x = 1$
- Sia $a < 1$.

  Sia $b = 1/a > 1$, allora esiste $s = \sup\{x \in \mathbb{R}; x^2 < b\}$ tale che $s^2 = b$, allora
  $$1/s^2 = 1/b = a$$

$\implies \exists\, R \in \mathbb{R}$ tale che $R^2 = a$. □

Osservazione (1.2) Per cercare $\varepsilon > 0$ tale che $(s+\varepsilon)^2 < a$, $a > 1$, $s > 0$, $s^2 < a$, qualcuno avrebbe potuto pensare di svolgere i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned}(s+\varepsilon)^2 < a &\iff \\ &\iff -\sqrt{a} < s + \varepsilon < \sqrt{a} \iff -\sqrt{a} - s < \varepsilon < \sqrt{a} - s \iff \\ &\iff 0 < \varepsilon < \sqrt{a} - s\end{aligned}$$

Attenzione che la procedura è scorretta, in quanto $\sqrt{a}$ non è stata ancora definita.

Definizione In base al teorema precedentemente dimostrato possiamo affermare che: dato $a > 0$, l'equazione

$$x^2 = a$$

ammette un'unica soluzione positiva, precisamente

$$s = \sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 < a, x > 0\}$$

indichiamo tale soluzione con $\sqrt{a}$

$$\sqrt{a} = \sup\{x \in \mathbb{R}, x^2 < a, x > 0\} \tag{1.1}$$

In generale, dato $a > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\sqrt[n]{a}$ è l'unica soluzione positiva di $x^n = a$

Teorema III (caratt. estremo superiore) Dato $A \subseteq \mathbb{R}$

$$S = \sup A \quad \iff \quad \begin{cases} \forall\, x \in A,\ x \leq S \\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, x \in A \text{ t. c.} \quad S - \varepsilon < x \leq S \end{cases}$$

dim. **(III)**

"$\implies$" Per assurdo sia la seconda implicazione falsa, ossia

$$\exists\, \varepsilon > 0 \,|\, \forall\, x \in A \quad x \leq S - \varepsilon$$

allora $S - \varepsilon < S$ è maggiorante di A

$\implies$ $S \neq \sup A$ contraddizione.

"$\impliedby$" Per assurdo sia $S \neq \sup A$, allora esiste S' maggiorante di A con $S' < S$.

Poniamo $\varepsilon = S - S'$ ($S' = S - \varepsilon$), allora abbiamo che

$$\forall\, x \in A \quad x \leq S' = S - \varepsilon$$

e la seconda implicazione è negata: si ha contraddizione. $\square$

Teorema IV (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$)

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad \exists\, r \in \mathbb{Q} \text{ t. c.} \quad a < r < b \tag{1.2}$$

1.3 Spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$

Dato $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{volte}} = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\}$$

Notazione Scrivendo (a, b) conta l'ordine, in particolare

$$(a, b) \neq (b, a).$$

Scrivendo invece $\{a, b\}$ non conta l'ordine, infatti

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

Notazione Il libro di testo spesso usa il grassetto per indicare gli elementi di $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

Altre notazioni

$$\vec{x} = \overline{x} = (x_1, \cdots, x_n)$$

Noi useremo

$$x = (x_1, \cdots, x_{ne})$$

1.3.1 Operazioni su $\mathbb{R}^n$

Somma (+)

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

In $\mathbb{R}^2$ questa è la regola del parallelogramma

Proprietà della somma La somma rispetta queste proprietà:

$$
\nu_1 \begin{cases}
\bullet\ \text{commutativa;} \\
\bullet\ \text{associativa;} \\
\bullet\ \text{esistenza dell'elemento neutro} \\
\qquad \underline{0} = (0, 0, \cdots, 0); \\
\bullet\ \text{esistenza dell'opposto:} \\
\qquad \forall\, x = (x_1, \cdots, x_n) \\
\quad x \text{ ammette opposto} \\
\qquad -x = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n) \\
\quad \text{tale che } x + (-x) = \underline{0}.
\end{cases}
$$

Prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall\, x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

si definisce λx come

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

Proprietà del prodotto $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha che

$$
\nu_2 \begin{cases}
\bullet\ \lambda(\mu\, x) = (\lambda\mu)x; \\
\bullet\ 1\, x = x; \\
\bullet\ (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x; \\
\bullet\ \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.
\end{cases}
$$

ν_1 e ν_2 non saranno dimostrate.

Diciamo che $\mathbb{R}^n$, dotato di somma e prodotto per scalare è uno *spazio vettoriale* sullo scalare $\mathbb{R}$.

Definizione Dati

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
$$y = (y_1, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

diciamo *prodotto scalare* di $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \tag{1.3}$$

Attenzione

$$\begin{aligned}\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (x,y) &\mapsto \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Il prodotto scalare non è una operazione interna a $\mathbb{R}^n$.

Proprietà del prodotto scalare $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\zeta \begin{cases} 1.\ \langle x, x\rangle \geq 0;\ \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0; \\ 2.\ \langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle; \\ 3.\ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle; \\ 4.\ \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \end{cases}$$

Si dice che $\langle \bullet, \bullet \rangle$ è un'applicazione bilineare positiva da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Esempio (1.5)

$\vec{F} = (f_1, f_2, f_3)$	forza applicata ad un oggetto
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$	spostamento
$L = \langle \vec{F}, \vec{x}\rangle$	lavoro.

Definizione Dato $x \in \mathbb{R}^n$ diciamo *modulo* (norma) di x

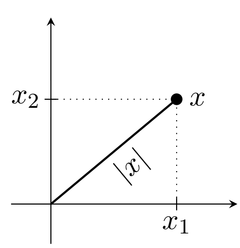
$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}. \tag{1.4}$$

Osservazione (1.3)

$$|\bullet| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R}; a \geq 0\}$$

Risulta quindi che $|-x| = |x|$.

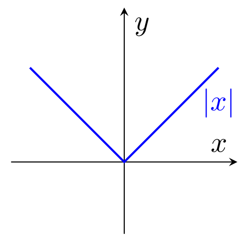
Osservazione (1.4) In $\mathbb{R}^2$, $|x|$ rappresenta la lunghezza del vettore x



Invece, per $a \in \mathbb{R}$,

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

ovvero diventa equivalente al *valore assoluto* di a.



Proprietà del modulo $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si ha

$$\eta \begin{cases} 1.\ |x| \geq 0; \quad |x| = 0 \iff x = 0 \\ 2.\ |\lambda x| = |\lambda|\,|x| \\ 3.\ |x+y| \leq |x| + |y| \text{ (disuguaglianza triangolare)} \end{cases}$$

Osservazione (1.5)

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y| \iff |x| - |y| \leq |x-y| \tag{1.5}$$

$$|y| = |(y-x)+x| \leq |x-y| + |x| \iff |x| - |y| \geq -|x-y| \tag{1.6}$$

Mettendo insieme (1.5) e (1.6) otteniamo

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n \quad -|x-y| \leq |x| - |y| \leq |x-y|$$

da cui

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x-y| \tag{1.7}$$

Ricordare che, dato $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Definizione Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ diciamo *distanza* di x da y

$$d(x,y) := |x-y| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} \tag{1.8}$$

Proprietà della distanza $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mathcal{D}\begin{cases} 1.\ d(x,y) \geq 0; \quad d(x,y)=0 \iff x=y; \\ 2.\ d(x,y) = d(y,x); \\ 3.\ d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) \text{ (disuguaglianza triangolare).} \end{cases}$$

Definizione $\mathbb{R}^n$ e ogni altro insieme dotato di somma (+), prodotto per uno scalare e norma (distanza), sono detti *spazi vettoriali normati* o *spazi vettoriali metrici.*

2 Punti di accumulazione

Definizione Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, diciamo *intorno (sferico)* di x di raggio r

$$B_r(x) = \{z \in \mathbb{R}^n;\ d(z,x) < r\} = \{z \in \mathbb{R}^n;\ |z - x| < r\} \tag{2.1}$$

Esempio (2.1) In $\mathbb{R}^2$, dato $x = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} B_r(x) &= \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2; |z - x| < r\} = \\ &= \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2; (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 < r^2\} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $B_r(x)$ è un cerchio di centro x e raggio r, escluso il bordo.

Si indica anche con $B(r,x)$, $B(x,r)$, oppure $B(x)$ se non è importante il valore del raggio.

In generale diciamo che $I(x)$ è *intorno* di x se

$$\exists\, r > 0 \text{ t.c. } B_r(x) \subseteq I(x)$$

Definizione Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, diciamo che E è *limitato* se

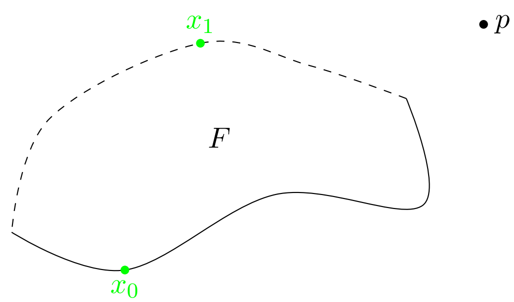
$$\exists\, R > 0 \text{ t.c. } E \subseteq B_R(\underline{0})$$

Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che x_0 è un *punto di accumulazione* per E se

$$\forall\, r > 0\, \exists\, x \in R, x \neq x_0 \text{ t.c. } x \in B_r(x_0) \tag{2.2}$$

Se x di accumulazione per $E \not\Leftrightarrow x \in E$

Esempio (2.2) Dato $E = F \cup \{p\}$



- x_0 è di accumulazione;
- x_1 è di accumulazione;
- p non è di accumulazione.

Definizione Se $x_0 \in E$, x_0 non è di accumulazione, allora x_0 è un *punto isolato* di E.

Esempio (2.3)

$$E = \Big\{x = 1 + 1/n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\Big\}$$

$\forall\, n$, x_n non è punto di accumulazione. Se $y \in E$

$\implies$ y non è di accumulazione.

$a = 1$ è l'unico punto di accumulazione per E, e $1 \notin E$.

$$|1 - x_n| = |1 - (1 + 1/n)| = 1/m$$

quindi

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n \text{ t. c. } x_n \in B_\varepsilon(1)$$

scegliendo n tale che $1/n < \varepsilon$

$\implies$ $n > 1/\varepsilon$

Esempio (2.4) $n \in \mathbb{N}$ non è punto di accumulazione, $\mathbb{N}$ non ammette alcun punto di accumulazione (vale anche per $\mathbb{Z}$). Inoltre, un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$, *finito*, non ammette punti di accumulazione.

Definizione Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non ammette alcun punto di accumulazione, si dice che E è *discreto*

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e gli insiemi finiti sono discreti. $\mathbb{Q}$ non è discreto;

numerabile $\not\Rightarrow$ discreto, ma discreto $\implies$ finito e numerabile.

Notazione Dato $E \in \mathbb{R}^n$, E' è l'insieme dei punti accumulazione di E, e prende il nome di *insieme derivato*.

$E' \neq \emptyset \iff E$ è discreto.

Proprietà x_0 è di accumulazione per E

$\iff \forall\, r > 0$, $B_r(x_0)$ contiene infiniti punti.

Dimostrazione. $\exists\, r > 0$ tale che $\exists\, x_1 \neq x_0$, $x_1 \in B_r(x_0)$

$\exists\, r_1 > 0$ tale che $x_1 \notin B_{r_1}(x_0)$, $\exists\, x_2 \in B_{r_1}(x_0)$

$\exists\, r_2 > 0$ tale che $x_1, x_2 \notin B_{r_2}(x_0)$, $\exists\, x_3 \in B_{r_2}(x_0)$

$\dots$

Procedendo in questo modo ottengo una sequenza di punti

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots \quad \forall\, n,\ x_n \in B_r(x_0) \qquad \square$$

Proprietà Dati due insieme $A, B \subseteq \mathbb{R}$, assumiamo che $\forall\, a \in A, b \in B$, $a \leq b$

$\implies \sup A \leq \inf B$

Teorema V (di Bolzano-Weierstrass) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E limitato e E infinito.

$\implies E$ ammette almeno un punto di accumulazione x_0

Osservazione (2.1) E limitato $\implies \exists\, r > 0$ tale che $E \subseteq B_r(0)$

E infinito $\iff E$ contiene infiniti punti

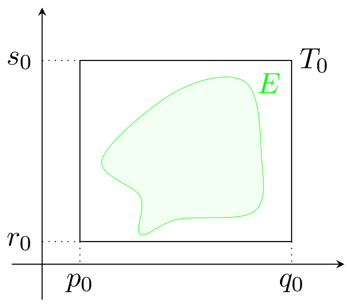
dim. **(V)** Per semplicità dimostriamo il teorema in $\mathbb{R}^2$

1^o passo Individuiamo x_0 candidato punto di accumulazione (i);

2^o passo dimostriamo che x_0 è davvero punto di accumulazione (ii).

(i) Sappiamo che E è limitato

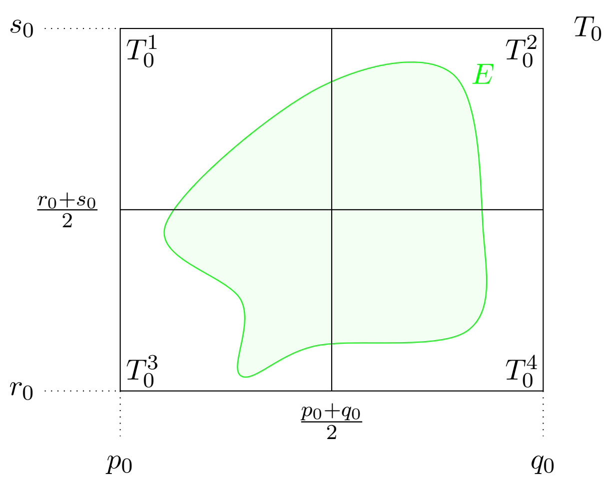
$\Longrightarrow\ \exists\, T_0 = [p_0, q_0] \times [r_0, s_0]$ tale che $E \subseteq T_0$



Dividiamo T_0 in quattro rettangoli:

$$T_0^1, T_0^2, T_0^3, T_0^4$$

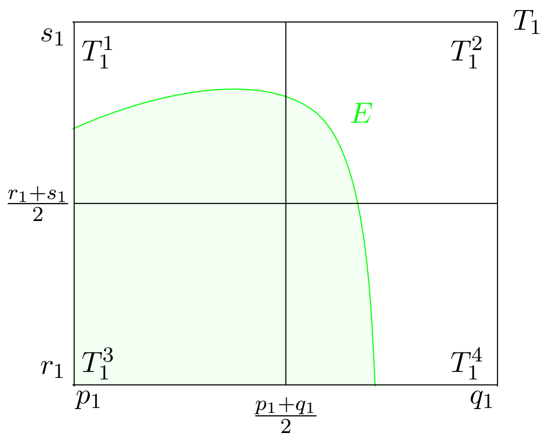
$\Longrightarrow$ almeno uno contiene infiniti punti di E. Assumiamo che sia T_0^2



Poniamo $T_1 = T_0^2$, $T_1 = [p_1, q_1] \times [r_1, s_1]$

$$p_1 = \frac{p_0 + q_0}{2} \qquad\qquad q_1 = q_0$$
$$r_1 = \frac{r_0 + s_0}{2} \qquad\qquad s_1 = s_0$$

Dividiamo T_1 in quattro rettangoli. Almeno uno contiene infiniti punti di E. Ne scegliamo uno: T_1^3.



Poniamo $T_2 = T_1^3$, $T_2 = [p_2, q_2] \times [r_2, s_2]$

$$p_2 = p_1 \qquad\qquad q_2 = \frac{p_1 + q_1}{2}$$
$$r_2 = r_1 \qquad\qquad s_2 = \frac{r_1 + s_1}{2}$$

Procediamo in questo modo, passo dopo passo: otteniamo una sequenza di rettangoli tutti contenenti infiniti punti di E:

$$\begin{aligned} T_0 &= [p_0, q_0] \times [r_0, s_0] \\ T_1 \subseteq T_0 &= [p_1, q_1] \times [r_1, s_1] \\ &\implies s_1 - r_1 = \frac{s_0 - r_0}{2},\ q_1 - p_1 = \frac{q_0 - p_0}{2} \\ &\dots \\ T_n \subseteq T_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq T_0 &= [p_n, q_n] \times [r_n, s_n] \\ &\implies s_n - r_n = \frac{s_0 - r_0}{2^n},\ q_n - p_n = \frac{q_0 - p_0}{2^n} \end{aligned}$$

Consideriamo l'insieme degli estremi destri e sinistri delle basi:

$$P = \{p_0, p_1, \cdots, p_n, \cdots\}, \qquad Q = \{q_0, q_1, \cdots, q_n, \cdots\}$$

Per costruzione, P e Q sono limitati, dunque ammettono estremo superiore e inferiore. Inoltre $\forall\, p \in P$, $\forall\, q \in Q$, $p < q$. Allora per la proprietà vista precdentemente, $\sup P \leq \inf Q$. Inoltre,

$$\forall\, n,\ p_n \leq \sup P,\ q_n \geq \inf Q$$

quindi

$$0 \leq \inf Q - \sup P \leq q_n - p_n \leq \frac{q_0 - p_0}{2^n}$$

Allora $\forall\, \varepsilon > 0$, $0 \leq \inf Q - \sup P \leq \varepsilon$: è sufficiente che

$$\frac{q_0 - p_0}{2^n} < \varepsilon$$

$\implies \inf Q = \sup P$

$$x_1 = \sup P = \inf Q$$

Ripetiamo lo stesso ragionamento sulle altezze $[r_j, s_j]$:

$$R = \{r_0, r_1, \cdots, r_n, \cdots\}$$
$$S = \{s_0, s_1, \cdots, s_n, \cdots\}$$

Allora $\inf S = \sup R = x_2$.

Quindi $x_0 = (x_1, x_2)$ è il candidato punto di accumulazione.

(ii) Dimostriamo che x_0 è di accumulazione:

$\forall\, n\ x_0 \in T_n$, ma T_n contiene infiniti punti di E. Inoltre, $T_n \subseteq T_0$.

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, T_c \subseteq B_\varepsilon(x_0)$

$\implies \forall\, \varepsilon$, B_ε contiene infiniti punti di E.

$\implies x_0$ è di accumulazione per E. $\square$

3 Topologia

Definizione Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A si dice *aperto* in $\mathbb{R}^n$ se $\forall\, x \in A\ \exists\, r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$ 4 ott 2021

Esempio (3.1) $R > 0$, sia

$$D_R = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t. c. } |x| < R\}$$

il disco di raggio R. Dimostriamo che D_R è aperto.

Dato $x \in D_R$, consideriamo $r > 0$ tale che $0 < r < R - |x|$

$\implies r + |x| < R$.

Verifichiamo che $B_r \subseteq D_R$ ossia che $\forall\, y \in B_r(x)$, $|y| < R$

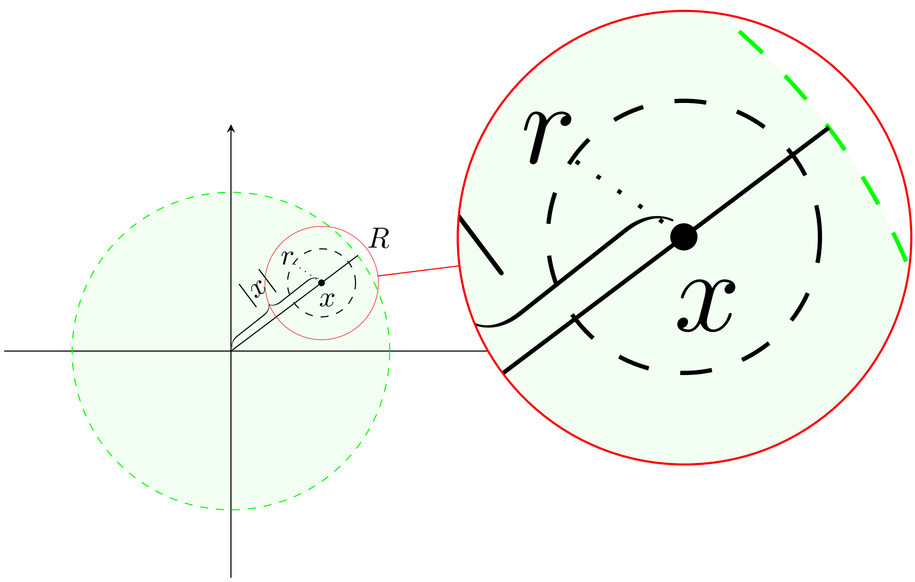
$$|y| = |y + x - x| \leq \underbrace{|y - x|}_{<r} + |x| \leq r - |x| < R$$

$\implies B_r(x) \subseteq D_R$

$\implies D_R$ è aperto.

D_R si chiamerà *disco aperto* di R, ed è aperto e non limitato.

In $\mathbb{R}^2$



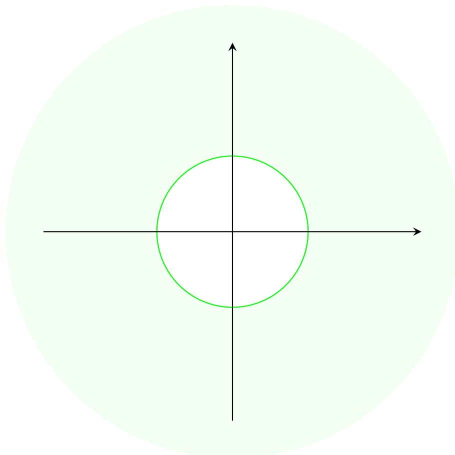
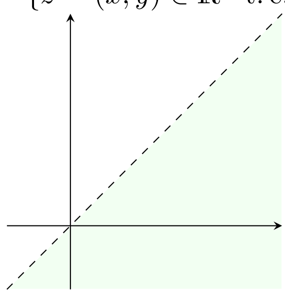


Figura 1: G_R in $\mathbb{R}^2$

Esempio (3.2) Sia $E = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \text{ t. c. } y < x\}$



$z_0 \in E$, $z_0 = (x_0, y_0)$, $y_0 < x_0$. Consideriamo la distanza di z_0 dalla retta $s : y = x$, $d(z_0, s)$

$$d(z_0, s) = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}$$

Fissato $0 < r < \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}$
$\implies B_r(z_0) \subseteq E$. E è aperto e non limitato.

Esempio (3.3) Sia $R > 0$,

$$G_R = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| \geq R\}$$

(vedasi Figura 1)

$$
\begin{aligned}
&x_0 = (R, 0, \cdots, 0) \\
&x_0 \in G_R \\
\forall\, \varepsilon > 0 \quad &\begin{aligned} x_1 &= (R+\varepsilon, 0, \cdots, 0) \subseteq G_R \\ x_2 &= (R-\varepsilon, 0, \cdots, 0) \nsubseteq G_R \end{aligned}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ G_R non è aperto.

Definizione $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è *chiuso* (in $\mathbb{R}^n$) se l'insieme A^C è aperto:

$$A^C = \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n; x \notin A\}.$$

Esempio (3.4) Dato $G_R = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq R\}$,

$$D_R = G_R^C = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < R\}$$

è aperto (vedasi esempio 3.1)

$\Longrightarrow$ G_R è chiuso.

Esempio (3.5) Sia

$$
\begin{aligned}
\overline{D_R} &= \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| \leq R\} \\
\overline{D_R^C} = \mathbb{R}^n \setminus \overline{D_R} &= \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| > R\}
\end{aligned}
$$

Sia $0 < r < |x| - R$. Consideriamo $z \in B_r(x)$

$$|z| = |z - x + x| = |x - (x - z)| \geq \Big| |x| - \underbrace{|x - z|}_{<r} \Big| \geq |x| - r > R$$

$\Longrightarrow$ $\forall\, z \in B_r(x)$, $|z| > R$

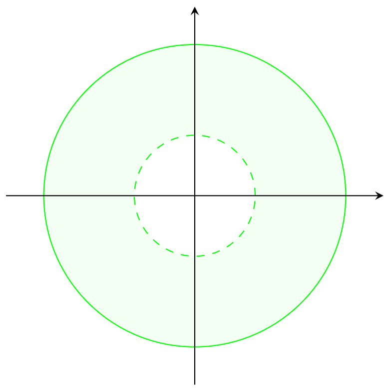
$\Longrightarrow$ $B_r(x) \subseteq \overline{D_R^C}$

$\Longrightarrow$ $\overline{D_R^C}$ è aperta

$\Longrightarrow$ $\overline{D_R}$ è chiuso.

Esempio (3.6) Dati $0 < r < R$, è definita corona circolare l'insieme:

$$C_{R,r} = \left\{ z = (x,y) \in \mathbb{R}^2; r^2 < x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}$$



$C_{R,r}$ non è aperto,

$$C_{R,r}^C = \left\{ z = (x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq r^2 \vee x^2 + y^2 > R^2 \right\}$$

$\implies C_{R,r}^C$ non è aperto.

Concludiamo che $C_{R,r}$ non è né aperto né chiuso.

Domanda

- $\emptyset$ è aperto?

  $$x \in \emptyset \implies \exists\, r > 0 \text{ t. c. } B_r(x) \subseteq \emptyset$$

  $\implies$ è sempre vera perché $x \in \emptyset$ è falsa.

  $\implies \emptyset$ è aperto.

- $\mathbb{R}^n$ è aperto? $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $\exists\, r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq \mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$

  $\implies \mathbb{R}^n$ è complementare di un insieme aperto, ovvero è chiuso.

- $\emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$

  $\implies \emptyset$ è complementare di un insieme aperto, ovvero è chiuso.

- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono sia aperti che chiusi: sono gli unici due.

Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$

- $x_0 \in E$, diciamo che x_0 è *interno* ad E se $\exists\, r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subseteq E$;
- $x_1 \in \mathbb{R}^n$, diciamo che x_1 è *esterno* ad E se x_1 è interno a $E^C = \mathbb{R}^n \setminus E$

  $\implies \exists\, r_1 > 0$ tale che $B_{r_1}(x_1) \subseteq E^C$
- $x_2 \in \mathbb{R}^n$, diciamo che x_2 è *di frontiera* per E se x_2 non è interno ad E e x_2 non è esterno ad E.

Notazione $\mathring{E}$ è l'insieme di tutti i punti interni di E:

- x_0 interno $\implies x_0 \in \mathring{E}$;
- x_0 esterno $\implies x_0 \in \mathring{E}^C$;
- x_0 di frontiera $\implies x_0 \notin \mathring{E} \wedge x_0 \notin \mathring{E}^C$

  $\implies x_0 \in \partial E$

Osservazione (3.1)

- $\partial E = \partial E^C$;
- $x_0 \in \mathring{E} \implies x_0 \in E \implies \mathring{E} \subseteq E$;
- $x_0 \in \partial E$ non abbiamo informazioni sull'appartenenza di x_0 ad E.

Proprietà (di caratterizzazione degli aperti) Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

A è aperto $\iff A = \mathring{A}$.

Dimostrazione. Dimostriamo le due implicazioni:

"$\Longleftarrow$" $\forall\, x \in A \implies x \in \mathring{A}$

$\implies \exists\, r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$

$\implies A$ è aperto.

"$\implies$" Assumiamo A aperto; $\mathring{A} \subseteq A$ sempre.

$\forall\, x \in A$, $\exists r > 0$ tale che $B_r(x) \subseteq A$

$\implies x$ è interno

$\implies A \subseteq \mathring{A}$ □

Teorema VI (di caratterizzazione dei chiusi) Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, le seguenti proprietà sono equivalenti

(i) E è chiuso;

(ii) $\partial E \subseteq E$;

(iii) $E' \subseteq E$, dove con E' indichiamo tutti i punti di accumulazione di E.

dim. **(VI)**

$(i) \implies (ii)$ E chiuso $\implies \partial E \subseteq E$

$\forall\, x \in \partial E$, $x \notin \mathring{E}^C$, ma $\mathring{E}^C$ è aperto

$\implies \mathring{E} = \mathring{E}^C$

$\implies x \in E$

$\implies \partial E \subseteq E$

$(ii) \implies (iii)$ $\partial E \subseteq E \implies E' \subseteq E$

$$\forall\, x \in E', \forall\, r > 0\, \exists\, y \neq x \in E, y \in B_r(x)$$

osserviamo che $x \in E' \implies x \notin \mathring{E^C}$, infatti se per assurdo $x \in \mathring{E^C}$

$$\exists\, r > 0 \text{ t. c. } B_r(x) \subseteq E^C \implies B_r(x) \cap E = \emptyset$$

$\implies x \notin E'$

- caso a: $x \in \partial E$, visto che $\partial E \subseteq E$

  $\implies$ se $x \in E'$, allora $x \in E$

- caso b: $x \in \mathring{E} \implies x \in E$

  Se $x \in E'$, allora $x \in E$

Ne risulta che $E' \subseteq E$

$(iii) \implies (i)$

4 Lipsum

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Fusce mauris. Vestibulum luctus nibh at lectus. Sed bibendum, nulla a faucibus semper, leo velit ultricies tellus, ac venenatis arcu wisi vel nisl. Vestibulum diam. Aliquam pellentesque, augue quis sagittis posuere, turpis lacus congue quam, in hendrerit risus eros eget felis. Maecenas eget erat in sapien mattis porttitor. Vestibulum porttitor. Nulla facilisi. Sed a turpis eu lacus commodo facilisis. Morbi fringilla, wisi in dignissim interdum, justo lectus sagittis dui, et vehicula libero dui cursus dui. Mauris tempor ligula sed lacus. Duis cursus enim ut augue. Cras ac magna. Cras nulla. Nulla egestas. Curabitur a leo. Quisque egestas wisi eget nunc. Nam feugiat lacus vel est. Curabitur consectetuer.

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.

Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio. In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

Parte II

Funzioni e Successioni

5 Limiti delle successioni

2 nov 2021

Data $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a : n \to a_n$, $l \in \mathbb{R}*$, diciamo che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

se $\forall V(l) \exists U(+\infty) n \in (\mathbb{N} intersezione D) \implies a_{n \in V(l)}$ Scriviamo $\forall V(l) \exists \overline{n} \in N \,|\, \forall n > \overline{n} a_n \in V(l)$

$l \in \mathbb{R}$, diciamo che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è **convergente** a l se $\forall\, \varepsilon \exists \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall n > \overline{n} |a_n - l| < \varepsilon$

Se $l = \pm\infty$ a_n è divergente a $\pm\infty$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \nexists$ allora $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è irregolare (o oscillante).

Esempio (5.1)

- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è irregolare e limitata
- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n \cdot n$ con $n = 0, -1, 2, -3, 4, \cdots$ è irregolare e non limitata

Si dice di una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

- $\forall\{a_n\}$ è crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$
- $\forall\{a_n\}$ è strettamente crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$
- $\forall\{a_n\}$ è decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$
- $\forall\{a_n\}$ è strettamente decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$

Una successione crescente o decrescente si dice monotona, se strettamente crescente o decrescente si dice strettamente monotona.

Un predicato $P(n)$ è verificato definitivamente se $\exists\overline{n}\forall n \leq \overline{n}$ $P(n)$ è vero

Valgono per $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i seguenti teoremi

- Teorema di unicità del Limite
- Teorema di permanenza del segno
- Teorema di limitatezza:

  Teorema VII

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ è convergente e limitata}$$

- Teorema del confronto
- Teorema di esistenza del Limite per successioni definitivamente monotone

  Teorema VIII $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente crescente

  $\implies$ ammette limite in $\mathbb{R}*$

  Precisamente se

– $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e limitata

$\implies$ è convergente

– $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e non limitata

$\implies$ è divergente

Teorema IX (Principio di Archimede) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a, b > 0$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$

***dim.* (IX)** Utilizziamo la funzione parte intera:

$x \in \mathbb{R}$ si dice $[x] = \max_{n \in \mathbb{Z}}\{n \leq x\}$

Si verifica che $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] < x \leq [x] + 1$

Se $x \geq 0$, $[x] \geq 0$, $[x] \in \mathbb{R}$

Considerato $x = \frac{b}{a}$

$$\left[\frac{b}{a}\right] \leq \frac{b}{a} < \left[\frac{b}{a}\right] + 1$$

Posto $\overline{n} = \left[\frac{b}{a}\right] + 1 \in \mathbb{N}$

$$\frac{b}{a} < \overline{n} \implies \overline{n}a > b$$

Osserviamo che posto $a = 1$ si ha che $\forall b \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > b$

Applicazione del Principio di Archimede Verifichiamo che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo verificare che definitivamente $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ allora per il principio di archimede

$$\exists \overline{n} \in \mathbb{N}, \overline{n} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora $\forall n \geq \overline{n}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\implies$ $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ dunque $\frac{1}{n} < \varepsilon$ definitivamente

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Teorema X (Disugualiganza di Bernoulli)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

si ha che

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

dim. **(X)** Dimostrazione per induzione

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx, x > -1$$

1. $P(0)$

$$1 + x > 0 \, (1+x)^0 = 1 = 1 + n0$$

   P(0) è vera

2. Assumiamo vera $P(n)$ e verifichiamo $P(n+1)$

$$\begin{gathered} P(n): \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx \quad \wedge \quad x > -1 \\ (1+x) \cdot (1+x)^n \geq 1 + nx \cdot (1+x) \\ (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) \\ (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x \end{gathered}$$

   Dunque $P(n+1)$:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$$

   è verificata

Allora per induzione

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx \quad \wedge \quad x > -1$$

Esempio (5.2) Progressione geometrica

$$q \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} q^n =?, n \in \mathbb{N}$$

- $q > 1, q = 1+p$ con $p > 0$ $q^n = (1+p)^n \geq 1+np$ per la disuguaglianza di Bernoulli

  $1 + np \to +\infty$ per $n \to +\infty$

  Per confronto
  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

- $q = 1$ $q^n = 1$ $\forall n$
  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$$

- $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$

  $\implies |q| = \frac{1}{1+p}$ con $p > 0$
  $$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np}$$

  $1 + np \to +\infty$ per $n \to +\infty$

  $\implies \frac{1}{1+np} \to 0$

  Per confronto
  $$\lim_{n\to+\infty} |q^n| = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

- $q = -1$

  q^n è irregolare e limitata

- $q < -1$
  $$q^n = (-1)^n |q|^n$$
  ma $|q| > 1$ quindi $|q|^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, e quindi q^n è irregolare non limitata

Riassumendo

$$q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q > 1 \\ \text{convergente a } 1 & q = 1 \\ \text{convergente a } 0 & |q| < 1 \\ \text{irregolare limitata} & q = -1 \\ \text{irregolare non limitata} & q < -1 \end{cases}$$

Esercizio Posto $q \in \mathbb{R}$ e

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} b_n$$

Soluzione Da risolvere

Teorema XI (di relazione) Sia $f : D \to \mathbb{R}$: $x \to f(x)$, $x_0 \in D'$ e $x_0 \in \mathbb{R}*$, $l \in \mathbb{R}*$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ **(A)**

$\iff$

per ogni successione $a : \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a valori in $D \setminus \{x_0\}$

$a_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n \to +\infty} l$ **(B)**

dim. **(XI)**

(A) $\implies$ (B) Sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ovvero

$$\forall V(l) \, \exists U(x_0) \, | \, x \in U \, \wedge \, x \in V \, \wedge \, x \neq x_0 \implies f(x) \in V(l) \tag{5.1}$$

Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$ con $a_n \in D$ e $a_n \neq x_0$ ossia

$$\exists \overline{n} \in \mathbb{N} \, | \, \forall n \geq \overline{n}, \, a_n \in D \, \wedge \, a_n \neq x_0 \, \wedge \, a_n \in U(x_0)$$

allora

$$f(a_n) \in V(l) \tag{5.2}$$

Concludendo, unendo (5.1) e (5.2):

$$\forall V(l) \exists \overline{n} \in \mathbb{N} | \forall n > \overline{n} f(a_n) \in V(l)$$

ossia

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

(B) $\implies$ (A) Procediamo per assurdo: verificando $\neg A \implies \neg B$

$\neg B$: esiste una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ per cui $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$ con $a_n \neq x_0$, e $f(a_n) \nrightarrow l$

Abbiamo ipotizzato $\neg$(A), ossia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq l$$

ossia

$$\exists\, V(l) \,|\, \forall\, U(x_0)\, \exists\, x \in U \,\wedge\, x \in D \,\wedge\, x \neq x_0 \text{ t. c. } f(x) \notin V(l)$$

Ci poniamo nel caso particolare $x_0 \in \mathbb{R}$ (il caso $x_0 = \pm\infty$ funziona analogamente).

$\neg$(A) $\implies$

$$\exists\, V(l) \,|\, \forall\, \delta > 0\, \exists\, x \,|\, 0 < |x - x_0| < \delta \,\wedge\, x \in D \,\wedge\, f(x) \notin V(l)$$

Consideriamo $\delta = 1\ \exists\, x_1\, 0 < |x - x_0| < 1 \wedge f(x_1) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{2}\ \exists\, x_2\, 0 < |x_2 - x_0| < 1 \wedge f(x_2) \notin V(l)$

...

Consideriamo $\delta = \frac{1}{n}\ \exists\, x_n\, 0 < |x_n - x_0| < 1 \wedge f(x_n) \notin V(l)$

...

Allora abbiamo costruito una successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tale che $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ e $f(x_n) \notin V(l)$

inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} | \forall n > \overline{n} 0 < |x_n - x_0| < \varepsilon$ $(\overline{n} > \frac{1}{\varepsilon})$

ossia $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$

Abbiamo costruto una successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ e $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

ossia abbiamo ottenuto che $\neg B$ è vera

5.1 Confronti tra infiniti

1. Dati $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$ osserviamo che

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{a^n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq$$
$$\leq \frac{\sqrt{n}}{1+hn} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} =$$
$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ allora per confronto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$$

ovvero

$$\sqrt{n} = o(a^n)_{n \to +\infty}$$

2. Dato $a > 1$

$$0 \leq \frac{n}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \right)^2$$

ma $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Otteniamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n = o(a^n)_{n \to +\infty}$$

3. Dato $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$0 \leq \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k$$

ma $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Dato che $a > 1$ e $\sqrt[k]{a} > 1$ concludiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n^k = o(a^n)_{n \to +\infty}$$

4.

6 Costante di Nepero

8 nov 2021

Consideriamo la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1^{+\infty}$$

è una forma indeterminata

Verifichiamo la convergenza:

1. a_n è crescente
2. a_n è superiormente limitata
3. applichiamo il teorema di esistenza del limite per le succesioni monotone

1. $a_1 = 2$, per $n \geq 2$ stimiamo il rapporto

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} =$$
$$= \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n(\frac{n}{n-1})^{-1}} =$$
$$= \frac{(\frac{1+n}{n})^n(\frac{n-1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} =$$
$$= \frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = **$$

Applico la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{1}{n^2} < 1, -\frac{1}{n^2} > -1$$

$$\implies (1-\frac{1}{n^2}) \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$\implies ** \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$

Quindi $\forall n \geq 2$, $a_n \geq a_{n-1}$, quindi a_n è crescente definitivamente

2. Dimostriamo ora che a_n è limitata superiormente.

Consideriamo $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $(a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}\ )$

Verifichiamo che b_n è decrescente.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \cdots = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}$$

Stimiamo $(1+\frac{1}{n^2-1})^n$; per qualsiasi $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2-1} > 0$, e posso applicare Bernoulli:

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Ottengo quindi che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Quindi $\forall n \geq 2$, $b_n < b_{n-1}$, quindi b_n decrescente definitivamente, ma $b_2 = 4 \implies b_n \leq 4$ definitivamente

Poiché $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ si ha a_n crescente e $a_n \leq 4$ definitivamente

3. Dunque, per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate, otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \in \mathbb{R}$$

(esiste ed è un numero reale), e lo chiamiamo e, detta costante di Nepero □

Quindi

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Osserviamo che

$$a_1 = 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

Una prima stima di e risulta essere

$$2 \leq e \leq 4$$

Con opportuni algoritmi di approssimazione si stima che

$$e = 2,7182818284\ldots$$

Osservazione (6.1) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (dimostrazione sul libro di testo)

Proposizione *p*.vi

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Lemma *l*.i Sia $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \pm\infty$ allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

***dim.* (*p*.vi)** Applicando il teorema di relazione, a partire dal lemma (*l*.i) si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

***dim.* (*l*.i)**

1. $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$, ricordiamo $[x_n] \le x_n \le [x_n]+1$

$$\frac{1}{[x_n]+1} < \frac{1}{x_n} \le \frac{1}{[x_n]}$$
$$1+\frac{1}{[x_n]+1} < 1+\frac{1}{x_n} \le 1+\frac{1}{[x_n]}$$
$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]}}_{\alpha_n} \le 1+\frac{1}{x_n} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]+1}}_{\beta_n}$$

$$\beta_n = \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

notando che $[x_n] \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$. Ne risulta che $\beta_n \xrightarrow{n\to+\infty} e$.

$$\alpha_n = \left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]+1}\right)^{[x_n]+1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x_n]}\right)^{-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Ne risulta che $\alpha_n \xrightarrow{n\to+\infty} e$.

Dunque, data $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

per il teorema del confronto

2. $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} -\infty$, $y_n = -x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \infty$

$$\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{-y_n} =$$
$$= \left(\frac{y_n-1}{y_n}\right)^{-y_n} = \left(\frac{y_n}{y_n-1}\right)^{y_n} = \left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n} =$$
$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)^{y_n-1}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} e} \underbrace{\left(1+\frac{1}{y_n-1}\right)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

poiché $(y_n-1) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$.

Dunque, data $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} -\infty$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

3. La proprietà

$$\lim_{x_n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

discende direttamente da 1. e 2.

7 Continuità

Sia $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in D'$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

Diciamo $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

$$\iff \quad \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \text{ t. c. } 0 < |x-x_0| < \delta \implies |f(x)-l| < \varepsilon$$

Il valore di l non è in alcun modo legato ad $f(x_0)$

Consideriamo $x_0 \in D$

Esempi (7.1)

- $f(x) = x^2$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$

- $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) = \nexists$$
$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq \operatorname{sgn}(0) = 0$$

- $H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$
$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 0 = H(0)$$
$$\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0)$$

- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Definizione Consideriamo $D \subseteq \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$
con $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$

Diciamo che f è continua in $x_0 \in D$ se *a.* x_0 punto isolato di D

b. $x_0 \in D'$ e vale una delle seguenti affermazioni tra di loro equivalenti:

(*i*) $\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0)$ tale che $x \in U \cap D$

$\implies f(x) \in V$

(*ii*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$

$\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(*iii*) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

(*iv*) data $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a valori in D tale che $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Lemma *l.*ii Le quattro affermazioni precedenti sono equivalenti

dim. (*l.*ii)

i. $\iff$ *ii.* è ovvio

ii. $\implies$ *iii.* è ovvio

iii. $\iff$ *iv.* per il teorema di relazione

iii. $\implies$ *ii.* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ vale

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \wedge x \neq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

se $x = x_0$ $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

$\implies \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 :\ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ossia f continua in x_0 □

Diciamo che f è continua in $E \subseteq D$ se $\forall x_0 \in E$ f è continua in x_0

Esempi (7.2) Funzioni continue nel loro dominio

- $f(x) = x$
- $f(x) = x^{\alpha}$
- $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$
- $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

In generale dati $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $x_0 \in D$ se si ha

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da destra} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da sinistra} \end{cases}$$

9 nov 2021

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$$

Esempio (7.3) Verifichiamo che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\sin x$ è continua in x_0. Sappiamo che $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

Per $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) - \sin(x_0) = \\ = \lim_{h \to 0} \Big(\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0 \Big) = \\ = \lim_{h \to 0} \Big(\sin x_0 (\cos h - 1) + \sin h \cos x_0 \Big) =$$

Dato che $\sin h \xrightarrow{h \to 0} 0$

$$= \sin x_0 \lim_{h \to 0} \Big(\cos h - 1 \Big) = 0$$

Allora $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$\implies \sin x$ continua su $\mathbb{R}$. Allo stesso modo si verifica che $\cos x$ è continua su $\mathbb{R}$

Proprietà (Algebra delle funzioni continue) Date $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, f, g continue in x_0, allora $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha che $af + g$ è continua in x_0

Inoltre

- fg continua in x_0
- se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ continua in x_0
- $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ è continua in x_0

Teorema XII (Continuità della funzione composta) Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $g : f(D) \to \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$

$\implies g \circ f$ è continua in x_0

dim. **(XII)**

$$\forall V(g(f(x_0)))\, \exists W(f(x_0)) \text{ tale che } \forall y \in W \cap f(D)$$

$\implies g(y) \in V$

$\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D \implies f(x) \in W$

Allora $\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D$ $g(f(x)) \in V$

$\implies g \circ f$ è continua in x_0

Proprietà Date $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per D, $g : E \to \mathbb{R}$, con $f(D) \subseteq E$, assumiamo

(*i*)
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in E$$

(*ii*) g continua in l, $l \in \mathbb{R}$

$\implies \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)$

Allora, date *i.* e *ii.*, si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

Si dimostra che sono continue nel loro dominio

- i polinomi
- le frazioni algebriche
- le funzioni esponenziali
- le funzioni logaritmiche
- le funzioni goniometriche e le loro inverse

Tutte queste funzioni sono dette "funzioni elementari"

Attenzione Data $f : D \to \mathbb{R}$, f invertibile su D, e f continua su D $\not\Rightarrow$ f^{-1} sia continua du $f(D)$

Esempio (7.4) La funzione è analiticamente definita come

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Notiamo che $D = [0, 1] \cup (2, 3]$, e che f sia continua nel suo dominio.

$$f(D) = [0, 2]$$

Invertendola:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quindi f^{-1} non è continua su $f(D)$, in particolare non è continua in $x_0 = 1$

Proprietà Data $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo,

se f è invertibile e continua su I

$\implies$ f^{-1} è continua su $J = f(I)$

7.1 Discontinuità

Consideriamo $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ e f continua in $D \setminus \{x_0\}$

Diciamo che:

1. x_0 è una *discontinuità eliminabile* se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \wedge l \neq f(x_0)$$

Esempio (7.5)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R} \neq 0$$

Quindi $x_0 = 0$ è discontinuità eliminabile

2. x_0 è detto *salto* o *punto di salto* se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = n \in \mathbb{R}$$
$$l \neq n$$

Si definisce *ampiezza del salto* la grandezza

$$s = l - n$$

Esempio (7.6) Data

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 1$

Esempio (7.7) Data

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 2$

Notazione Nel Pagani Salsa i punti di salto sono detti discontinuità di prima specie

Notazione Nella terminologia a lezione, si intendono sia i salti che le discontinuità eliminabili come discontnuità di prima specie

3. x_0 è *discontinuità di seconda specie* se si verifica una delle seguenti condizioni

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \begin{aligned} &\pm\infty \\ &\mp\infty \\ &+\infty \\ &-\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to x_0^{+}} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to x_0^{-}} f(x) = \nexists$$

7.2 Prolungamento per continuità di una funzione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'$.

Assumiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Diciamo *prolungamento per continuità* di f in x_0 la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in x_0

Ovviamente se $x_0 \in D$ e f continua in x_0 allora

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

Esempi (7.8)

- Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

  f non è continua in 0, con una discontinuità elimiinabile

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = x^2$$

Questo è il prolungamento per continuità di f

- Consideriamo

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$

Si ha che $\mathrm{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è continua nel suo dominio.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Allora

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è il prolungamento per continuità di f in 0; $\tilde{f}$ è continua su $\mathbb{R}$

- Consideriamo $f(x) = x^x$. Si ha che $D = \mathrm{dom} f = (0; +\infty)$.

Osserivamo che

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^l = 1$$

dove

$$l = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \cdots = 0$$

La funzione $\tilde{f}$

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

è l'estensione per continuità di $f(x)$ in $x_0 = 0$. $\tilde{f}$ è continua su $[0; +\infty)$

8 Successioni

8.1 Un limite notevole

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\alpha = 0 \implies$ il limite vale 1

- $\alpha > 0$; ricordiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$

  Allora $\forall\, \varepsilon > 0$

$$-(1-\varepsilon)^n < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$

  definitivamente

  Ma è facile vedere

$$1 < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$

  definitivamente

  $\implies 1 < \sqrt[n]{n^\alpha} < 1+\varepsilon$ definitivamente

  Per $\varepsilon \to 0$ si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

- $\alpha < 0$

$$\sqrt[n]{n^\alpha} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{-\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}}$$

  Ma $\sqrt[n]{n^\beta} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$, con $\beta = -\alpha > 0$ Quindi

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}} = 1$$

Ne segue che $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

8.2 Sottosuccessioni

Si ha l'obiettivo di indagare più a fondo il comportamento delle successioni irregolari

Esempi (8.1)

1. Si consideri

$$a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1$$

   - con gli indici pari

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, 1, 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

     si ha che $a_{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

- con gli indici dispari

$$a_{2n+} = (-1)^{2n+1} = -1, -1, .1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

si ha che $a_{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} -1$

Definizione Sia $a : \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ successione a valori reali. Consideriamo una successione di indici

$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto k_n \end{aligned}$$

con k strettamente crescente, ovvero

$$k_n < k_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Diciamo *sottosuccessione di a* la successione

$$b_n = a_{k_n}$$

Concretamente per costruire $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ cancelliamo ad $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una quantità infinita di termini lasciando gli altri invariati.

Ogni successione è sottosuccessione di se stessa, basta prendere $k_n = n$

Esercizio Dati

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$
$$b_n = n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

estrarre le possibili sottosuccessioni regolari

Soluzione DA FARE

15 nov 2021

Teorema XIII (legame limite successione e sottosuccessione) Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $l \in \mathbb{R}*$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

$\iff$ ogni sottosuccessione di a_n ammette una sottosuccessione che tende a l

dim. **(XIII)**

" $\implies$ " La prima implicazione è vera, pertanto

$$\forall\, V(l)\, \exists\, \overline{n}\, \forall\, n \geq \overline{n} :\ a_n \in V(l)$$

Sia $n \to k_n$ crescente, e $b_n = a_{k_n}$, allora

$$\exists\, \overline{\overline{n}}\, \forall\, n \geq \overline{\overline{n}} :\ k_n \geq \overline{n}$$

allora $b_n = a_{k_n} \in V(l)$.

Dunque

$$\forall\, V(l)\, \exists\, \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} \text{ t. c. } \forall\, n > \overline{\overline{n}} :\ b_n \in V(l)$$

$\implies \lim_{n\to+\infty} b_n = l$

Abbiamo anche dimostrato che $a_n \xrightarrow{n\to\infty} l$ implica che qualsiasi sua sottosuccessione $b_{k_n} \to l$

" $\impliedby$ " Assumiamo vera la seconda implicazione, e procedendo per assurdo assumiamo vera la negazione della prima implicazione, ossia

$$\forall\, V(l) \forall\, n \in \mathbb{N} \exists n' \geq n | a_{n'} \notin V(l)$$

Consideriamo $n = 1$; $\exists n_1' > 1$ tale che $a_{n_1'} \notin V(l)$; $k_1 = n_1'$

Consideriamo $n = k_1 + 1$; $\exists n_2' \geq k_1 + 1 > k_1$ tale che $a_{n_2'} \notin V(l)$; $k_2 = n_2'$

Consideriamo $n = k_2 + 1$; $\exists n_3' \geq k_2 + 1 > k_1$ tale che $a_{n_3'} \notin V(l)$; $k_3 = n_3'$

...

Otteniamo una successione di indici

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto k_n \end{aligned}$$

strettamente crescente, e una successione $b_n = a_{k_n}$ tale che

$$\exists\, V(l) | \forall\, n, b_n \notin V(l)$$

Allora b_n non può ammettere sottosuccessioni che tendono a l

$\implies$ abbiamo dimostrato la negazione della seconda implicazione, partendo dalla negazione della prima, ovvero la prima implicazione implica la seconda $\square$

8.3 Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$

$$\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \quad a_k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, \cdots, a_n^k) \in \mathbb{R}^n$$

Esempio (8.2) Fissato $x \in \mathbb{R}^n$,

$$a_k = kx = (kx_1, kx_2, kx_3, \cdots, kx_n)$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è convergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \overline{k} \in \mathbb{N} \, \forall k \geq \overline{k} : \quad \underbrace{|a_k - l|}_{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^k - l)^2\right)^{1/2}} \quad < \varepsilon$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è divergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall M > 0 \, \exists \overline{k} \in \mathbb{N} \, \forall k \geq \overline{k} : \, |a_k| > M$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ si dice irregolare (oscillante) se non è né convergente né divergente

Osservazione (8.1) Per $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ vale il teorema di legame tra limiti di successione e sottosuccessioni

Valgono tutti i teoremi sui limiti che non coinvolgono l'ordinamento del codominio. (In particolare, non si definiscono le successioni monotone, e quindi non vale il teorema sui limiti delle successioni monotone)

Proposizione *p*.vii Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $y \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

Se y è di accumulazione per E

$\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E, con $x_k \neq y \; \forall k \in \mathbb{N}$ e tale che

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = y$$

***dim.* (*p*.vii)**

caso 1. $y \in \mathbb{R}^n$: $y \in E'$, si ha

$$\forall r > 0 \exists x \in E, x \neq y, x \in B_r(y)$$

Consideriamo $k = 1, 2, 3, \dots$; possiamo determinare $x_k \in E$, con $x_k \neq y$ e $x_k \in B_{1/k}(y)$

Abbiamo ottenuto una successione $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \overline{k}\,|\,\forall\, k \geq \overline{k} : x_k \in B_{1/k}(y) \subset B_{1/\overline{k}}(y) \subset B_\varepsilon(y)$

Allora $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$, $x_k \neq y$

caso 2. $y = \infty$, $y \in E'$

$$\forall\, M > 0 \exists x \in E : |x| > M$$

Per $k = 1, 2, 3, \dots$ consideriamo $x_k \in E$, con $|x_k| \geq k$ allora

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq \overline{k} : |x_k| \geq k \geq \overline{k} > M$$

$\implies x_k \to \infty$ $\square$

Teorema XIV (di Bolzano-Weierstrass per le successioni) Data $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ (valori vettoriali), si ha che

se $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata

$\implies \exists\{a_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ sottosuccessione tale che a_{h_k} è *convergente* a $l \in \mathbb{R}$

Ogni successione limitata ammette sempre una sottosuccessione convergente

dim. **(XIV)** Indichiamo con $E = \{a_k\}$ = insieme dei valori della successione. E è limitato per ipotesi;

caso 1. assumiamo che E abbia un numero infinito di elementi.

$\implies$ per il teorema di Bolzano-Weiesrtrass sui sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}^n \implies E$ ammette almeno un punto di accumulazione $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$\implies \exists\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E, tale che $b_k \xrightarrow{k\to+\infty} \lambda$

Ma $E \equiv$ i valori di $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$

dunque b_k è sottosuccessione di a_k.

Allora esiste una sottosuccessione di a_k convergente.

caso 2. assumiamo che E abbia un numero finito di elementi.

$\implies$ esisterà sicuramente un valore di E assunto infinite volte dalla successione $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Sia $a_k = l$ per infiniti indici.

Consideriamo $b_k = l, \forall\, k \in \mathbb{N}$, b_k è successioni a valori in E, ed essendo costante: $b_k \xrightarrow{k \to +\infty} l$, dunque b_n è convergente $\square$

Osservazione (8.2) Il teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni utilizza il teorema di Bolzano-Weierstrass per gli insiemi in $\mathbb{R}^n$. Dunque è necessaria la completezza di $\mathbb{R}$

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ed è limitata $\implies$ $\{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ed è limitata $\implies$ $\{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ ed è limitata $\implies$ $\{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ed è limitata $\not\Rightarrow$ $\{a_n\}$ convergente

8.3.1 Successioni e chiusura di $E \subset \mathbb{R}^n$

Si ricorda che la chiusura è

$$\overline{E} = E \cup \delta E$$

Proprietà Data $E \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$

$y \in \overline{E} \iff \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} y$

Dimostrazione. Procediamo spezzando le due implicazioni

"$\implies$" Ricordiamo che $\overline{E} = E \cup E'$

$y \in \overline{E} = E \cup E'$

- se $y \in E$, allora consideriamo $x_k \equiv y \in E$ si ha $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} y$
- se $y \in E'$ e $y \notin E$, per la proposizione (p.vii), $\exists \, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} y$

"$\impliedby$" Assumiamo per assurdo che esista $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} y$ e $y \notin \overline{E}$, con $x_k \in E$.

$\overline{E}$ è un insieme chiuso, allora $(\overline{E})^C$ è aperto, ovvero $\exists\, r > 0$ tale che $B_r(y) \subset (\overline{E})^C$

Allora $B_r(y) \cap \overline{E} = \emptyset$, allora poiché $E \subset \overline{E}$

$$\exists\, r > 0 : \; B_r(y) \cap E = \emptyset$$

allora qualsiasi successione a valori in E non può convergere a y, dunque neghiamo $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$, si ha contraddizione, dunque

$$y \in \overline{E}$$ □

Teorema XV Dato $E \in \mathbb{R}^n$

E è chiuso **(A)**

$\iff$ se esiste $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$ allora $y \in E$ **(B)**

Equivalentemente:

E è chiuso **(A)**

$\iff$ tutte le sue successioni convergenti hanno limite in E stesso **(B)**

***dim.* (XV)**

"$\implies$" E è chiuso. Ricordiamo che E è chiuso $\iff$ $E = \overline{E}$

Allora per proprietà precedente

$$\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset E \wedge x_k \to y \implies y \in \overline{E} = E$$

"$\impliedby$" Ricordiamo che E chiuso $\iff$ $E' \subset E$. Dimostriamo che $E' \subset E$.

Consideriamo $y \in E'$, $\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset E$, con $x_k \neq y$, $x_k \to y$, allora per (B), $y \in E$

Dunque $E' \subset E$, ed E chiuso □

8.4 Successioni di Cauchy

Definizione Sia $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$. Questa successione è detta *successione di Cauchy* (o successione fondamentale) se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \overline{k} \in \mathbb{N} \,|\, \forall \, k, m \geq \overline{k} : |a_k - a_m| < \varepsilon$$

O, equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \overline{k} \in \mathbb{N} \, \forall \, k > \overline{k} \, \forall \, p \in \mathbb{N} : |a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$$

(Definitivamente $|a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$)

Intuitivamente, da un certo punto in poi i valori della successione di Cauchy sono vicini a piacere

Studieremo il legame tra l'essere di Cauchy l'essere convergente.

Lemma *l*.iii Data $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, 16 nov 2021

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è di Cauchy $\implies$ $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata

dim. **(*l*.iii)** Consideriamo $\varepsilon = 1$:

$$\exists\, \varkappa > 0 : \forall\, k > \varkappa$$

si ha $|a_k - a_\varkappa| < 1$, $\forall\, k \geq \varkappa$

$$|a_k - a_\varkappa| \geq ||a_k| - |a_\varkappa||$$

Allora per $k > \varkappa$

$$||a_k| - |a_\varkappa|| < 1$$

$$|a_\varkappa| - 1 < |a_k| < |a_\varkappa| + 1$$

Consideriamo

$$m = \min\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_\varkappa|, |a_\varkappa| - 1\}$$
$$M = \max\{|a_0|, |a_1|, \cdots, |a_\varkappa|, |a_\varkappa| + 1\}$$

Dunque $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$m < |a_k| < M$$

$\implies$ $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata $\square$

Teorema XVI (Criterio di convergenza di Cauchy per le successioni) Data $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$, si ha

a_k convergente $\iff$ a_k è di Cauchy

dim. **(XVI)**

"$\implies$" $\{a_k\}$ è convergente, allora

$$\exists\, l \in \mathbb{R}^n$$

tale che

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \overline{k} : \forall\, k > \overline{k} : |a_k - l| < \varepsilon$$

possiamo scrivere

$$|a_k - a_m| \leq |a_k - l| + |a_m - l|$$

$$\exists\,\overline{k}\,\forall\,k,m \geq \overline{k}:$$

$$|a_k - l| < \varepsilon/2$$
$$|a_m - l| < \varepsilon/2$$

ossia

$$|a_k - a_m| \leq |a_k - l| + |a_m - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\implies \{a_n\}$ è di Cauchy

" $\Longleftarrow$ " $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è di Cauchy

$\underbrace{\implies}_{Lemma}$ $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata

$\underbrace{\implies}_{B-W}$ ammette una sotosuccessione convergente, ossia esiste $h_k \in \mathbb{N}$, $\{a_{h_k}\}$ è convergente, ossia $\exists\, l \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall\,\varepsilon\,\exists\overline{k}:\,\forall\,k > \overline{k}:\,|a_{h_k} - l| < \varepsilon/2$$

Osserviamo

$$|a_k - l| \leq |a_k - a_{h_k}| + |a_{h_k} - l|$$

Poiché la successione è di Cauchy

$$\exists\,\overline{\overline{k}}:\,\forall\,m,h > \overline{\overline{k}}:\,|a_m - a_h| < \varepsilon$$

$$\exists\,\overline{\overline{\overline{k}}}:\,\forall\,k \geq \overline{\overline{\overline{k}}}:\,h_k > \overline{\overline{k}}$$

Allora preso

$$\varkappa = \max\{\overline{k}, \overline{\overline{k}}, \overline{\overline{\overline{k}}}\}$$

Otteniamo $\forall\,k \geq \varkappa$

$$|a_k - l| \leq \overbrace{|a_k - a_{h_k}|}^{<\varepsilon/2} + \overbrace{|a_{h_k} - l|}^{<\varepsilon/2} < \varepsilon$$

Osservazione (8.3) Nella dimostrazione si è usato il Teorema di Bolzano-Weirestrass, ossia la completezza di $\mathbb{R}$, dunque il criterio di convergenza di Cauchy non vale per successioni a valori in $\mathbb{Q}$ o in $\mathbb{Q}^n$.

9 Teoremi per le funzioni continue

Notazione Un punto x_0 tale che $f(x_0) = 0$ è detto *zero* di f

Teorema XVII (Teorema di esistenza degli zeri) Consideriamo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, e assumiamo f continua su $[a, b]$, e assumiamo che $f(a)f(b) < 0$

$\implies \exists\, c \in (a, b) \,|\, f(c) = 0$

dim. **(XVII)** Assumiamo $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

Poniamo $a_0 = a$ e $b_0 = b$; consideriamo il punto medio $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

Abbiamo tre possibilità sul segno di $f(c_0)$:

1. $f(c_0) > 0$: poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$;
2. $f(c_0) < 0$: poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$;
3. $f(c_0) = 0$: la dimostrazione è terminata ponendo $c = c_0$: $f(c) = 0$.

Consideriamo $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$

Abbiamo tre possibilità sul segno di $f(c_1)$:

1. $f(c_1) > 0$: poniamo $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$;
2. $f(c_1) < 0$: poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$;
3. $f(c_1) = 0$: la dimostrazione è terminata ponendo $c = c_1$: $f(c) = 0$.

Procedendo in questo modo, vi sono due possibilità

- $\exists\, n$ tale che $f(c_n) = 0$: $c = c_n$ e $f(c) = 0$;
- si ottengono due successioni a valori reali in $[a, b]$, che chiamiamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ tali che:
  - $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ crescente e $\forall\, n$, $a_n \leq b_0 = b$;
  - $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ decrescente e $\forall\, n$, $b_n \geq a_0 = a$;
  - $\forall\, n$, $a_n \leq b_n$

  Otteniamo inoltre una sequenza di intervalli $[a_n, b_n]$ tali che

  $$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \cdots$$

  Inoltre

  $$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2}\ \forall\, n$$

allora

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Si verifica che $a_n \longrightarrow l$, in quanto a_n crescente e limitata superiormente, e $b_n \longrightarrow m$, in quanto b_n è decrescente e limitata inferiormente: allora

$$\forall\, n:\; a_n \leq l,\, b_n \geq m$$

allora

$$\forall\, n:\; 0 \leq m - l \leq b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

$\implies m - l = 0$

$\implies m = l.$

Poniamo $c = m = l$, e consideriamo c candidato zero della funzione. Verifichiamo che vale $f(c) = 0$.

Infatti,

$$\forall\, n \quad f(a_n) > 0 \quad f(b_n) < 0$$

inoltre

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c)$$

perché f continua e vale il teorema di relazione, e

$$\lim_{n \to +\infty} f(b_n) = f(c).$$

Inoltre

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \geq 0$$

per il teorema di permanenza del segno, e

$$\lim_{n \to +\infty} f(b_n) \leq 0.$$

Risulta quindi che $\begin{cases} f(c) \geq 0 \\ f(c) \leq 0 \end{cases}$

$\implies f(c) = 0$ $\square$

Osservazione (9.1) Sotto l'ipotesi f continua su un intervallo $[a, b]$, c, lo zero c non è unico.

Osservazione (9.2) Il teorema vale solo su intervalli

Esempio (9.1) Preso

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ -1 & x \in [c, d] \end{cases}$$

con $b \lneqq c$, vale che $f(a) > 0$, $f(d) < 0$, f è continua su $[a, b] \cup [c, d] = D$, $\nexists\, c \in D$ tale che $f(c) = 0$

Osservazione (9.3) Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, l'ipotesi di f continua non è eliminabile

Teorema XVIII (dei valori intermedi) Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, continua su (a, b); indichiamo

$$i = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \qquad s = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

con $i, s \in \mathbb{R}^*$

$\implies \forall\, \lambda \in (i, s)$, $\exists\, c \in (a, b)$ tale che $f(c) = \lambda$

dim. **(XVIII)** Prendiamo $\lambda \in (i, s)$.

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a, b) \text{ t. c. } i < \underbrace{f(x_1)}_{m} < \lambda < \underbrace{f(x_2)}_{M} < s.$$

Consideriamo $g(x) = f(x) - \lambda$: g continua su (a, b), e $g(x_1) < 0$ e $g(x_2) > 0$; inoltre $x_1, x_2 \in (a, b)$, quindi g contiua su $[x_1, x_2]$ oppure $[x_2, x_1]$.

Allora, per il teorema di esistenza degli zeri, si ha che

$$\exists\, c \text{ tra } x_1, x_2 \text{ t. c. } g(c) = 0$$

ossia

$$f(c) - \lambda = 0 \implies f(c) = \lambda$$

Corollario Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua su (a, b), $a, b \in \mathbb{R}^*$; si indica con

$$i = \inf_{x \in (a,b)} f(x) \qquad s = \sup_{x \in (a,b)} f(x)$$

con $i, s \in \mathbb{R}^*$, si ha che

$$f\Big((a,b)\Big) = (i,s)$$

Possiamo dire che f continua mappa intervalli in intervalli, ovvero

$$f(I) = J$$

con $J = (i,s)$, e

$$i = \inf_{x \in I} f(x) \qquad s = \sup_{x \in I} f(x)$$

22 nov 2021

Esempio (9.2)

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Entrambe le funzioni sono continue in $(0,1)$: $\forall\, x_0 \in (0,1)$,

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 \text{ t. c. } |x - x_0| < \delta \qquad \begin{cases} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \end{cases}$$

f. fissiamo $x_0 \in (0,1)$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| &\underset{x \in (0,1)}{=} \\ &\le \underbrace{(|x| + |x_0|)}_{\le 2} \cdot |x - x_0| \le 2|x - x_0| \end{aligned}$$

Preso $\delta < \varepsilon/2$ si ha che

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Ne risulta che δ non dipende da $x_0 \in (0,1)$

g. fissiamo $x_0 \in (0,1)$, fissiamo $\varepsilon > 0$

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \iff |1/x - 1/x_0| < \varepsilon$$

$$\underset{x \in (0,1)}{\iff} \tfrac{|x - x_0|}{x\, x_0} < \varepsilon$$

Consideriamo $x \in (x_0 - x_0/2, x_0 + x_0/2) = (x_0/2, 3x_0/2)$, $x \in B_{\frac{x_0}{2}}(x_0)$ ha $\delta = x_0/2$, otteniamo

Riassumiamo:

g. $\forall\, x_0 \in (0,1)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon)$ tale che

$$\forall\, x \quad |x - x_0| < \delta \implies |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$$

f. $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$ tale che

$$\begin{matrix} \forall\, x_0 \in (0, x_1) \\ \forall\, x \in (0,1) \end{matrix} \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f è *uniformemente continua* in $(0,1)$

Definizione Data

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con $D \subseteq \mathbb{R}$, diciamo che f è *uniformemente continua su* D se

$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t. c. $\forall\, x_0, x \in D \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Esercizio Verificare che su $[0, +\infty)$ $f(x) = e^{-x}$ è uniformemente continua e $g(x) = e^x$ non è uniformemente continua.

Soluzione Verificare per esercizio

Osservazione (9.4) Sia

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con $E \subseteq \mathbb{R}$.

Indichiamo con *diamentro* di E

$$\mathrm{diam} E = \sup_{x,y \in E} \{|x - y|\}$$

Indichiamo con *oscillazione* di f in E

$$\omega_E(f) = \sup_{x,y \in E} \{|f(x) - f(y)|\}$$

Sia ha che f è uniformemente continua $\iff$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \text{ t. c. } \mathrm{diam} E < \delta \implies \omega_E(f) < \varepsilon$$

10 Successioni e topologia in $\mathbb{R}^n$

Breve riassunto:

1. E limitato

   $\Longrightarrow$ ogni successione a valori in E ammette sottosuccessioni convergenti

2. E chiuso

   $\Longleftrightarrow$ il limite di una successione a valori in E, se esiste, appartiene ad E

Definizione Dato $K \subseteq \mathbb{R}^n$ diciamo K *sequenzialmente compatto* (o compatto per successioni) $\forall \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in K ammette una sottosuccessione $\{x_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ convergente a $y \in K$

$K \subseteq \mathbb{R}$ è compatto se ogni sua successione ammette una sottosuccessione convergente in K stesso

Esempi (10.1)

1. $E = \{1 + 1/x, x \in \mathbb{R}, |x| \geq 1\}$, E limitato, non chiuso.

   Consideriamo $x_k = 1 + 1/k \xrightarrow{k \to +\infty} 1 \notin E$

   $\Longrightarrow$ ogni sua sottosuccessione $x_{h_k} \xrightarrow{k \to +\infty} 1 \notin E$

   $\Longrightarrow$ E non è compatto.

2. $A = \{\cos k\pi/2\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{0, 1, -1\}$

3. $I = [-1, 1]$, chiuso e limitato. I è limitato

   $\Longrightarrow$ $\forall\, x_k$ ammette $x_{h_k} \xrightarrow{k \to +\infty} l \in \mathbb{R}$. Inoltre I è chiuso

   $\Longrightarrow$ $l \in I$

   $\Longrightarrow$ I è compatto.

4. $J = [0, +\infty)$, chiuso non limitato. Sia $x_k = k$ a valori in J.

   $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty$

   $\Longrightarrow$ ogni sua sottosuccessione $x_{h_k} \xrightarrow{k \to +\infty} +\infty \notin J$

   $\Longrightarrow$ J non è compatto

Teorema XIX (caratt. degli insiemi compatti) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$,

K è sequenzialmente compatto

$\iff$ K è chiuso e limitato.

dim. **(XIX)**

"$\Longleftarrow$" Assumiamo K limitato

$\implies \forall \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in K ammette $\{x_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$, $x_{h_k} \xrightarrow{k\to+\infty} l \in \mathbb{R}^n$

Inoltre, poiché K è chiuso si ha $l \in K$

$\implies$ K è compatto sequenzialmente.

"$\implies$" K compatto.

1. Verifichiamo che K è limitato; per assurdo assumiamo K non limitato

   $\implies \forall\, k \in \mathbb{N}, \exists\, x_k \in K$ tale che $|x_k| > k$

   Sia ora $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in K data dagli x_k visti sopra.

   $|x_k| \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$ (x_k è divergente a ∞)

   $\implies$ ogni sua sottosuccessione $\{x_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ diverge a ∞

   $\implies$ K non è compatto.

   Abbiamo dimostrato che K compatto

   $\implies$ K è limitato.

2. Verifichiamo che K è chiuso; usiamo la proprietà

   $$K \text{ è chiuso} \iff \delta K \subseteq K$$

   Sia $z \in \delta K$. Per definizione di frontiera $\forall\, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\ \exists\, x_k \in K$ tale che $x_k \in B_{1/k}(z)$

   Sia $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ la successione così ottenuta. $\implies$

   $$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \overline{k} \,|\, \forall\, k \geq \overline{k} \quad x_k \in B_{1/k}(z) \subseteq B_{1/\overline{k}}(z) \subseteq B_\varepsilon(z)$$

   dunque $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} z \in \delta K$

Osserviamo che poiché K è compatto esiste una sottosuccessione $\{x_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ di $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ che converge a $w \in K$, ossia

$$\{x_{h_k}\}_{k=0}^{\infty} \xrightarrow{k \to +\infty} w \in K.$$

Poiché $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} z$ si ha che ogni sua sottosuccessione converge a z.

Allora $x_{h_k} \to w$, $x_{h_k} \to z$

$\implies$ per il teorema di unicità del limite, $w = z$

$\implies$ $z \in K$

$\implies$ $\delta K \subseteq K$

$\implies$ K è chiuso. $\square$

In $\mathbb{R}^n$ sono sequenzialmente compatti tutti e soli gli insiemi chiusi e limitati.

Esempi (10.2)

- $[a, b]$ compatto;
- $[a, b), (a, b]$ non compatti (non chiusi);
- $[a, +\infty), (-\infty, a]$ non compatti (non limitati);
- $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t. c. } |x - x_0| \leq r\}$ compatta;
- $B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t. c. } |x - x_0| < r\}$ non compatta (non chiusa);
- $B_r^c = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t. c. } |x - x_0| \geq r\}$ non compatta (non limitata).

10.1 Continuità e compattezza in $\mathbb{R}^n$

Continuità Sia

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \qquad f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

Diciamo che f è continua su D se

$$\forall\, x_0 \in D\, \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0 \text{ t. c. } \forall\, x \in D \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Osservazione (10.1) f è continua su D se tutte le funzioni componenti $f_1(x), \cdots, f_m(x)$ sono continue su D.

Teorema XX Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K compatto sequenzialmente. Consideriamo $f : K \to \mathbb{R}^m$ continua su tutto K

$\implies$ $f(K)$ è un insieme sequenzialmente compatto in $\mathbb{R}^m$

L'immagine continua di un compatto è compatta.

dim. **(XX)** Consideriamo $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ successione a valori in $f(K)$. 23 nov 2021

$$y_k \in f(K) \iff \exists\, x_k \in K \text{ t. c. } y_k = f(x_k)$$

Consideriamo ora la successione $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ così ottenuta, a valori in K: K è compatto in $\mathbb{R}^n$

$\implies$ $\exists\, l \in K$, $\exists \{x_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ sottosuccessione di $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ tale che

$$x_{h_k} \xrightarrow{k \to +\infty} l \in K$$

Consideriamo $y_{h_k} = f(x_{h_k})$: $\{y_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ è sottosuccessione di $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$

$$\lim_{k \to +\infty} y_{h_k} = \lim_{k \to +\infty} f(x_{h_k}) =$$

$$\overset{\dagger}{=} f(\lim_{k \to +\infty} x_{h_k}) = f(l) \in f(K)$$

Allora considerata $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ successione a valori in $f(K)$

$$\exists\, y_{h_k} \xrightarrow{k \to +\infty} f(l) \in f(K)$$

$\implies$ $f(K)$ è compatto.

Definizione Dato $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

diciamo che

† per la continuità di f su K

- x_M è punto di massimo assoluto di f su D se

$$\forall\, x \in D \quad f(x) \leq f(x_M).$$

Si indica inoltre $M = f(x_M)$ come valore massimo di f su D.

- x_m è punto di minimo assoluto di f su D se

$$\forall\, x \in D \quad f(x) \geq f(x_M).$$

Si indica inoltre $m = f(x_m)$ come valore minimo di f su D

Teorema XXI (di Weierstrass) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$, K compatto sequenzialmente. Data $f : K \to \mathbb{R}$ continua su K

$\implies \exists\, x_M$ punto di massimo assoluto di f su K, e $\exists\, x_m$ punto di minimo assoluto di f su K.

dim. **(XXI)** K compatto in $\mathbb{R}^n$, $H = f(K)$ compatto in $\mathbb{R}$. Dunque $H \subseteq \mathbb{R}$ chiuso e limitato in $\mathbb{R}$: H ammette

$$s = \sup H \in \mathbb{R}$$
$$i = \inf H \in \mathbb{R}$$

Concentriamoci su s; abbiamo verificato che se $s = \sup H$ allora ci sono due possibilità

- s isolato $\implies$ $s \in H$
- s di accumulazione per H,

  $\overset{\dagger}{\implies} s \in H$

Concludiamo allora che $s \in H$, ma allora per definizione

$$s = M = \max H \quad \wedge \quad \exists\, x_M \text{ t.c. } f(x_M) = M.$$

Dunque esiste x_M punto di massimo. Lo stesso si ripete con $i = \inf H$.

$i = \min H = m$, $m \in H$

$\implies \exists\, x_m$ t.c. $f(x_m) = m$

$\implies x_m$ è un punto di minimo $\square$

† perché H è chiuso

Osservazione (10.2) Dato $D \subseteq \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

f continua su D, allora dato $[a, b] \subseteq D$

$$\exists\, x_m \in [a, b] \text{ punto di minimo di } f \text{ su } [a, b]$$
$$\exists\, x_M \in [a, b] \text{ punto di massimo di } f \text{ su } [a, b]$$

Teorema XXII (dei valori intermedi sui compatti) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

$\implies$ f assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo.

Dati

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

vale che

$$\forall\, \lambda \in [m, M] \quad \exists\, c \in [a, b] \text{ t. c. } f(c) = \lambda$$

dim. **(XXII)** f continua su $[a, b]$

$\implies$ f ammette valor massimo M e valor minimo m. Poniamo

$$x_M \mid f(x_M) = M \qquad x_m \mid f(x_m) = m$$

Sia $\lambda \in [m, M]$, e consideriamo $g(x) = f(x) - \lambda$. g è continua su $[a, b]$, e in particolar modo g continua su $[x_m, x_M]$ o su $[x_M, x_m]$

$$\exists\, c \in \begin{matrix} [x_m, x_M] \\ [x_M, x_m] \end{matrix} \quad \text{t. c. } g(c) = 0 \implies f(x) = \lambda$$

10.2 Legame tra uniforme continuità e compattezza

Teorema XXIII (di Heine-Cantor) Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, sia $f : K \to \mathbb{R}^m$ e f continua su K

$\implies$ f è uniformemente continua su K.

Le funzioni continue sui compatti sono ivi uniformemente continue.

dim. **(XXIII)** Per assurdo assumiamo che f sia continua su K e che f non sia assolutamente continua su K.

$$\exists\,\overline{\varepsilon} > 0 \text{ t. c. } \forall\,\delta > 0\,\exists\,x_\delta, z_\delta \in K \qquad |x_\delta - z_\delta| < \delta \,\wedge\, |f(x_\delta) - f(z_\delta)| \geq \overline{\varepsilon}.$$

Diamo a δ i valori $1, 1/2, \cdots, 1/k$ allora

$$\exists\,\overline{\varepsilon} > 0\,\forall\,k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\,\exists\,x_k, z_k \in K$$
$$\text{t. c. } |x_\delta - z_\delta| < 1/k \,\wedge\, |f(x_\delta) - f(z_\delta)| \geq \overline{\varepsilon}.^{\textbf{(A)}}$$

Consideriamo le successioni a valori in K ottenute dagli x_k e z_k sopra considerati, a valori in K

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \qquad \{z_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

K compatto in $\mathbb{R}^n$, allora esiste una sottosuccesssione di $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ tale che $x_{h_k} \xrightarrow{k\to+\infty} x \in K$.

Consideriamo $\{z_{h_k}\}$ la sottosuccessione di $\{z_k\}$ ottenuta con gli stessi indici h_k.

Osserviamo che

$$|z_{h_k} - x| \leq \underbrace{|z_{h_k} - x_{h_k}|}_{\text{def. } \leq 1/k} + \underbrace{|x_{h_k} - x|}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$$

Allora $z_{h_k} \xrightarrow{k\to+\infty} x$

Stimiamo

$$|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| \leq |f(x_{h_k}) - f(x)| + |f(x) - f(z_{h_k})|.$$

Poiché f continua su K

$$f(x_{h_k}) \xrightarrow{k\to+\infty} f(x)$$
$$f(z_{h_k}) \xrightarrow{k\to+\infty} f(x)$$

allora

$$|f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| \xrightarrow{k\to+\infty} 0$$

$\Longrightarrow$

$$\forall\,\varepsilon > 0 \exists\,\overline{k}\,|\,\forall\,k > \overline{k} \quad |f(x_{h_k}) - f(z_{h_k})| < \varepsilon$$

Questo nega la condizione (A), dunque f non può essere non uniformemente continua

Concludiamo che, dato K compatto

$$f \text{ continua su } K \quad \wedge \quad f \text{ non uniformemente continua su } K$$

$\implies f$ uniformemente continua su K: contraddizione

Dunuqe f continua su K

$\implies f$ uniformemente continua su K. $\square$

Proprietà K compatto di $\mathbb{R}^n$, $f : K \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva (e quindi invertibile)

$\implies f^{-1} : f(K) \to K$ è continua su $f(K)$.

Definizione Data $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^m$ indichiamo con

$$f^{-1}(E) = \{x \in D;\, f(x) \in E\}$$

chiamato *controimmagine* di E

Teorema XXIV (caratt. delle funzioni continue) Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

f è continua su $\mathbb{R}^n$

$\iff \forall\, E \subseteq \mathbb{R}^m$, E aperto, si ha che $f^{-1}(E)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$.

11 Derivata

Esempio (11.1) Data

$$\begin{aligned} f : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Si ha che $x_0, x_1 \in I$, $P_0 = (x_0, f(x_0))$, $P_1 = (x_1, f(x_1))$.

Indichiamo con s la secante al grafico tra P_0 e P_1, di equazione

$$y = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{m,\ \text{pendenza}^{\dagger}}(x - x_0)$$

Cosa accade quando $x_1 \to x_0$? Si ha che $P_1 \to P_0$ e che $s \to r$, che intuitivamente è la retta tangenta al grafico in P_0.

Esempio (11.2) Consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq x_0 \\ 2 & x > x_0 \end{cases}$$

In questo caso quando $x \to x_0$, $P_1 \to P_2 \neq P_1$, e $s \to r$ retta verticale.

Intuitivamente r non è la tangente in P_0.

Esempio (11.3) Sia $h(x)$ una funzione, dal grafico:

Quando $x_1 \to x_0$, $P_1 \to P_2$, ma $s \to r$ che non è "tangente".

Si ha l'obiettivo di dare una definizione che

- distingua il primo esempio dagli altri
- dare una definizione rigorosa di tangente in P_0

Definizione Data $f : I \to \mathbb{R}$, fissiamo $x_0 \in I$, diciamo rapporto incrementale di f centrato in x_0, la quantità

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si osservi che è il coefficiente angolare della secante tra $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x, f(x))$

† o coefficiente angolare

Definizione Diciamo che f è *derivabile* in x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}$$

Indichiamo

$$L = f'(x_0)$$

detta *derivata* di f in x_0.

Diciamo *tangente* si f in x_0 la retta r di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

da cui $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare (pendenza) della tangente al grafico in x_0.

Esempio (11.4) $f(x) = x^2$, $x_0 \in \mathbb{R}$, 29 nov 2021

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h_2 - \cancel{x_0^2}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}}(2x_0 + h) = 2x_0$$

$f(x) = x^2$ è derivabile $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$. La retta tangente è

$$y = 2x_0\, x - x_0^2$$

Esempio (11.5)

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \qquad \operatorname{dom} H = \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$$

f continua e derivabile ovunque, H non è continua e non è derivabile in $x_0 = 0$

Teorema XXV Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. f derivabile in x_0

$\Longrightarrow$ f continua in x_0

dim. **(XXV)** $\quad f$ continua in x_0

$$\iff \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \iff \lim_{h\to 0}\Big(f(x_0) - f(x_0)\Big) = 0$$

Dimostriamo che vale se f è derivabile in x_0

$$\lim_{h\to 0}\Big(f(x_0) - f(x_0)\Big) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\to f'(x_0)\in\mathbb{R}} \cdot h = 0$$

Quindi f derivabile in x_0 implica f continua, dunque f non continua in x_0 implica f non derivabile in x_0.

Si ha che f continua in x_0 *non* implica f derivabile in x_0

Esempio (11.6)

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

f continua in $x_0 = 0$.

$$\lim_{x\to h^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +1$$
$$\lim_{x\to h^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$$

ovvero la funzione non è derivabile per $x_0 = 0$

Osservazione (11.1) $\quad f(x) = |x|$ non è derivabile in $x_0 = 0$ e

$$\lim_{x\to h^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +1$$
$$\lim_{x\to h^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -1$$

La funzione $|x|$ ammette in $x_0 = 0$ limite destro e sinistro del rapporto incrementale.

Definizione $\quad$ Consideriamo $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f è derivabile da destra (sinistra) in x_0 se

$$\lim_{x\to h^\pm} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \begin{cases} m \in \mathbb{R} & h \to 0^+ \\ l \in \mathbb{R} & h \to 0^- \end{cases}$$

Diciamo x_0 *punto angoloso.*

Si dirà $m = f'_+(x_0)$ *derivata destra* in x_0 e $l = f'_-(x_0)$ *derivata sinistra* in x_0

Osservazione (11.2) f è derivabile in $x_0 \in \operatorname{dom} f$

$\iff$ f è derivabile da destra e da sinistra in x_0 e $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

Proprietà $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, x_0 punto angoloso per f

$\implies$ f continua in x_0

Dimostrazione.

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = \lim_{h\to 0^\pm} h \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\substack{\xrightarrow{h\to 0^+} f'_+(x_0) \in \mathbb{R} \\ \xrightarrow{h\to 0^-} f'_-(x_0) \in \mathbb{R}}} = 0 \qquad \square$$

Esempio (11.7) Consideriamo

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ è un punto di salto. H non è derivabile in $x_0 = 0$, è possibile che ammetta derivata destra e sinistra?

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{H(0+h) - H(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

H ammette derivata destra in $x_0 = 0$, $H'_+(0) = 0$.

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{H(0+h) - H(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{0-1}{h} = +\infty$$

H non ammette derivata sinistra in $x_0 = 0$.

Osservazione (11.3) Se x_0 è un punto di discontinuità di prima specie (eliminabile o salto) f non può ammettere in x_0 sia derivata destra che derivata sinistra.

Proprietà (Algebra delle derivate) Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$, consideriamo $x \in I$, f, g derivabili in x. Allora si ha

(i) $f + g$ è derivabile in x,

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

(ii) fg è derivabile in x,

$$(fg)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

(regola di Leibniz)

(iii) $k \in \mathbb{R}$, kf derivabile in x,

$$(kf)'\, x = k\, f'(x)$$

(iv) se $g(x) \neq 0$ allora f/g è derivabile in x e vale

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}.$$

Dimostrazione. □

Osservazione (11.4) Le proprietà (i) e (iii) garantiscono che l'inisme delle funzioni derivabili su x è uno spazio vettoriale su campo reale. Vale

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

Definizione Data $f : I \to \mathbb{R}$ diciamo f derivabile su I se $\forall\, x \in I$, f derivabile in x

Possiamo scrivere il rapporto incrementale $\forall\, x \in I$

$$\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = L \in \mathbb{R}$$

diciamo f derivabile 2 volte in x, e

$$f''(x) = L$$

detta *derivata seconda* di f in x.

Assunta f'' derivabile su tutto I possiamo allo stesso modo definire

$$f'''(x)$$

Se f derivabile $n-1$ volte su I, definiamo la derivata n-esima di f in $x \in I$

$$f^{(n)} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

se tale limite esiste.

Notazione Si indica

$$\begin{aligned} f'(x) = \dot{f} = D(f(x)) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \\ f''(x) = \ddot{f} = D^2(f(x)) &= \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} \\ f'''(x) = D^3(f(x)) &= \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3} \\ f^{(n)}(x) = D^n(f(x)) &= \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n} \end{aligned}$$

11.1 Derivate di funzioni elementari

- Sia $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. 30 nov 2021

  $$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{x^\alpha (1 + h/x)^\alpha - x^\alpha}{h} &= x^\alpha \lim_{h \to 0} \frac{(1+h/x)^\alpha - 1}{(h/x) \cdot x} = \\ & x^{\alpha-1} \lim_{h \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

  Abbiamo effettuato una sostituzione: $t = h/x$, mentre l'ultimo è un limite notevole

- Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} =$$
$$= e^x$$

Vale quindi $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$D(e^x) = e^x \tag{11.1}$$

Di verifica inoltre che

$$a > 0 \qquad D(a^x) = a^x \ln x \tag{11.2}$$

- Sia $f(x) = \ln x$, $x > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln[x(1+h/x)]-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{\ln x}+\ln(1+h/x)]-\cancel{\ln x}}{x(h/x)} =$$
$$\frac{1}{x}\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{x}$$

Sostituendo $t = h/x$, e ricordando che $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$

- Sia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h+x)-\sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\, \cos h + \sin h\, \cos x - \sin(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right) =$$
$$= \cos x \tag{11.3}$$

11.2 Prima formula dell'incremento finito

Osservazione (11.5) Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x \in I$, assumiamo f derivabile in x.

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$
$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = 0$$

Poniamo

$$\varepsilon(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \tag{11.4}$$

Vale $\operatorname{dom} \varepsilon(h) = \operatorname{dom} f \setminus \{0\}$. Notiamo che $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, quindi $\varepsilon(h)$ è estendibile per continuità in $h = 0$.

Possiamo scrivere che f è derivabile in x

$\iff \exists\, \varepsilon(h)$ continua in $I(0)$, con

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

tale che

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)\, h + h\, \varepsilon(h) \tag{11.5}$$

Questa è la prima formula dell'*incremento finito*.

Equivalentemente, poiché $\lim_{h \to 0} \big(h\, \varepsilon(h)\big)/h = 0$ si ha

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)\, h + o(h) \tag{11.6}$$

Teorema XXVI (di derivazione delle funzioni composte) Consideriamo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, e consideriamo $g : E \to \mathbb{R}$, con $f(D) \subseteq E$. Assumiamo f derivabile in $x \in D$, e g derivabile in $y = f(x) \in E$.

Allora $w = g \circ f$ è derivabile in x e vale

$$w'(x) = g'(f(x))\, f'(x) \tag{11.7}$$

La (11.7) prende il nome di *chain rule*.

dim. **(XXVI)** f derivabile in x, poniamo $y = f(x)$, e assumiamo g derivabile in y.

$$\exists\, \varepsilon(k) \xrightarrow{k \to 0} 0 \,|\, g(y+k) - g(y) = g'(y)\, k + k\, \varepsilon(k) \tag{11.8}$$

Poniamo $k = f(x+h) - f(x) \xrightarrow{h \to 0} 0$, si ha allora

$$k = f(x+h) - y$$

e, poiché f continua in x

$$y + k = f(x+h)$$

Sostituiamo in (11.8)

$$g\Big(f(x+h)\Big) - g\Big(f(x)\Big) = g'(y)\,k + k\,\varepsilon_k$$

dunque, sostituendo e dividendo per h

$$\frac{g\Big(f(x+h)\Big) - g\Big(f(x)\Big)}{h} =$$

$$= g'\Big(f(x)\Big)\underbrace{\frac{\Big(f(x+h)-f(x)\Big)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)} + \underbrace{\frac{\Big(f(x+h)-f(x)\Big)}{h}}_{\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\in\mathbb{R}} \underbrace{\varepsilon(k)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}$$

allora

$$\lim_{h\to 0} \frac{g\Big(f(x+h)\Big) - g\Big(f(x)\Big)}{h} = g'(f(x))\,f'(x)$$

Esempio (11.8) Consideriamo $f(x) = \ln(\sin x)$, con $x \in (0,\pi)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x}\cos x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

In generale, se $f(x) = \ln g(x)$, $x \in \operatorname{dom} f$, $g(x) > 0$, vale

$$f'(x) = \frac{1}{g(x)}\,g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Esercizio Calcolare

$$D(\ln|x|)$$

Soluzione Da svolgere

Teorema XXVII (di derivazione della funzione inversa) Sia

$$f : I \to \mathbb{R}$$

I intervallo, f invertibile su I (strettamente monotona su I), indichiamo $J = f(I)$, e assumiamo f derivabile in $x_0 \in I$, e $f'(x_0) \neq 0$, allora posto $y_0 = f(x_0)$, si ha che la funzinoe inversa

$$f^{-1} : J \to I$$

è derivabile in y_0 e vale

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{11.9}$$

Esempio (11.9) Sia $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$

$$f^{-1}(0) = 0$$
$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

$f^{-1}(y)$ è derivabile per qualsiasi $y \neq 0$. Osserivamo che in $y = 0$ la tangente a $y = \sqrt[3]{x}$ è verticale, dunque $\sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0.

Applicazione Sia $f(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, e $f^{-1} = \arctan x$

$$\begin{aligned} f'(x) = D(\tan x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \\ &= 1 + \tan^2 x > 0 \end{aligned}$$

Poniamo $y = \tan x$, f^{-1} derivabile in y

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Dunque

$$D(\arctan x) = \frac{1}{1 + x^2} \tag{11.10}$$

Applicazione Sia $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Consideriamo $f^{-1} = \arcsin x$

$$f'(x) = D(\sin x) = \cos x \neq 0 \text{ per } x \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

Posto $y = f(x) = \sin x$, $\arcsin y$ è derivabile per $y \neq \pm 1 = f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x}$$

Osserviamo che

$$\cos^2 x + \sin^2 x) = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x)$$
$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x)}$$
$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \cos x = +\sqrt{1 - \sin^2 x)}$$

Quindi

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Allora

$$\forall\, x \in (-1,1) \quad D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{11.11}$$

Inoltre

$$\forall\, x \in (-1,1) \quad D(\arccos x) = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}} \tag{11.12}$$

11.3 Studio dei punti di dubbia derivabilità

Sia $f : I \to \mathbb{R}$, assumiamo f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$

L'obiettivo è studiare la derivabilità in x_0

Teorema XXVIII (di Darboux) Sia $f : I \to \mathbb{R}$, , assumiamo f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, f continua in x_0 e esistano

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = l \in \mathbb{R}^*$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*$$

Allora

1. se $l = m \in \mathbb{R}$

   $\implies f$ è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l = m$;

2. se $l, m \in \mathbb{R}$, $l \neq m$

   $\implies f$ è derivabile da destra e sinistra in x_0 e si ha

   $$f'_+(x) = l \qquad f'_-(x) = m;$$

3. se anche solo uno tra m e l è $\pm\infty$;

   $\implies f$ non è derivabile in x_0.

Se

$$\lim_{x \to x_0} f'(x_0) = \nexists$$

(al di fuori dei casi precedenti) l'esistenza di $f'(x_0)$ varia da caso a caso.

Esempi (11.10)

1. Sia $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, f continua in 0

$$x \neq 0 \qquad f'(x) = \sin\frac{1}{x} + x \cos x \frac{1}{x^2} = \underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\dagger} + \underbrace{\cos x \frac{1}{x}}_{\ddagger}$$

2. Sia $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, g continua in 0.

$$x \neq 0 \qquad g'(x) = \underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} - \underbrace{\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}}_{\S}$$

Esercizio Studiare la derivabilità in $x_0 = 0$ di

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ \alpha x & x < 0 \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

Soluzione Da risolvere

Definizione Data $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, f continua in x_0, se 1 dic 2021

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$$

allora x_0 è un *flesso a tangente verticale.*

In x_0 la tangente al grafico è verticale

Esempio (11.11) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x)_{x\neq 0} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

† oscilla tra ± 1 per $x \to 0$
‡ oscilla tra $\pm\infty$ per $x \to 0$
§ oscilla tra ± 1 per $x \to 0$

Definizione Data $f : I \to \mathbb{R}$, f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, f continua in x_0, se

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f'(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \begin{pmatrix} -\infty \\ +\infty \end{pmatrix}$$

allora x_0 è detto *cuspide.*

Osservazione (11.6) È fondamentale che f sia continua in x_0, altrimenti può succedere che

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$$

e f non derivabile in x_0.

Esempio (11.12) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ non è derivabile in $x_0 = 0$, ma

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} 2x = 0 \in \mathbb{R}$$

12 Funzione convessa

Definizione Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è *convesso* se $\forall\, x, y \in E$, il segmento $[x, y] \subseteq E$. 7 dic 2021

Si noti che in $\mathbb{R}^n$ un segmento $[x, y]$ è definito come

$$[x, y] := x + ty$$

al variare di $t \in [0, 1]$.

Definizione Data $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, diciamo *epigrafo* (o epigrafico), l'insieme

$$\operatorname{Epi} f = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t. c. } x \in I, y \geq f(x)\Big\}$$

Diciamo che una funzione f è convessa su I, se $\operatorname{Epi}(f)$ è convesso in $\mathbb{R}^2$

Poniamo adesso nel caso in cui f sia derivabile su I.

Teorema XXIX (di caratt. delle funzioni convesse) Sia $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I, allora sono equivalenti le seguenti proprietà:

1. f convessa su I;
2. $\forall\, x_0, x \in I,\ f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;
3. f' è crescente su I.

dim. **(XXIX)** Dimostreremo che 1. $\implies$ 2. $\implies$ 3. $\implies$ 1.

1. $\implies$ 2. Consideriamo f convessa su I, e fissiamo $x_0, x \in I$, con $x_0 < x$. È noto che $\forall\, t \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
f\Big((1-t)x_0 + tx\Big) &\le (1-t)f(x_0) + t\,f(x) \\
f(x_0 - tx_0 + tx) &\le f(x_0) - t\,f(x_0) + t\,f(x) \\
f\Big(x_0 + t(x-x_0)\Big) &\le f(x_0) + t\Big(f(x) - f(x_0)\Big) \\
f\Big(x_0 + t(x-x_0)\Big) - f(x_0) &\le t\,\Big(f(x) - f(x_0)\Big)
\end{aligned}
$$

Per $t \in (0,1)$ dividiamo per $t(x-x_0) > 0$

$$\frac{f\Big(x_0 + t(x-x_0)\Big) - f(x_0)}{t(x-x_0)} \le \frac{\cancel{t}\,\Big(f(x) - f(x_0)\Big)}{\cancel{t}(x-x_0)}$$

Posto $h = t(x-x_0)$ abbiamo che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \le \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)}$$

Quando $t \to 0 \implies h \to 0$, quindi questa proprietà è valida definitivamente per $h \to 0$.

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} \underset{\dagger}{\le} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)}$$

$\implies f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

2. $\implies$ 3. Noi sappiamo che f è derivabile su I, e $f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

Allora si ha che fissati $x_0, x \in I$, con $x_0 < x$,

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{>0}$$

inoltre vale anche (scambiando x e x_0)

$$f(x_0) \ge f(x) + f'(x)\underbrace{(x_0-x)}_{<0}.$$

$\dagger$ per permanenza del segno

Allora abbiamo che

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x_0) - f(x) \geq f'(x)(x_0 - x) \implies f(x) - f(x_0) \leq f'(x)(x - x_0).$$

Otteniamo quindi, dalla seconda equazione:

$$f'(x) \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'(x).$$

Allora per $x < x_0$ generico in I si ha

$$f'(x_0) \leq f'(x)$$

$\implies$ per genericità di $x_0, x \in I$, $x < x_0$, f' è crescente su I.

3. $\implies$ 1. Data f' crescente su I, dobbiamo far vedere che

$\forall\, t \in [0,1], \forall\, x_0, x \in I$

$$f\Big((1-t)x_0 + tx\Big) \leq (1-t)f(x_0) + t\, f(x) \tag{12.1}$$

(12.1) è ovviamente vera per $t = 0 \wedge t = 1$

Consideriamo ora $t \in (0,1)$. Preso

$$z_t = (1-t)\, x_0 + t\, x = x - t\, x_0 + t\, x = x_0 + t\,(x - x_0)$$

Dato $t \in (0,1)$, assumendo $x_0 < x$, vale che $x_0 < z_t < x$.

Applichiamo il Teorema di Lagrange agli intervalli $I_1 = [x_0, z_t]$ e $I_2 = [z_t, x]$, in quanto f derivabile (e quindi continua) su I_1, I_2.

Allora $\exists\, z \in I_1$ e $w \in I_2$ tale che

$$f'(z) = \frac{f(z_t) - f(x_0)}{(z_t - x_0)} \qquad f'(w) = \frac{f(x) - f(z_t)}{(x - z_t)}$$

$$f'(z) = \frac{f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0)}{\cancel{x_0} + t\,(x - x_0) - \cancel{x_0}} \tag{12.2}$$

$$f'(w) = \frac{f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)}{x - x_0 - t\,x + t\,x_0} = \frac{f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)}{(1-t)(x - x_0)} \tag{12.3}$$

Da (12.2) otteniamo che

$$f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0) = t\, f'(z)\,(x - x_0). \tag{12.4}$$

Da (12.3) otteniamo che

$$f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) = (1 - t)\, f'(w)\,(x - x_0) \tag{12.5}$$

Moltiplichiamo (12.4) per $(1 - t)$ e (12.5) per t

$$(1-t)\Big[f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0)\Big] = \underbrace{t\,(1-t)}_{>0}\, f'(z)\,\underbrace{(x - x_0)}_{>0}$$

$$t\Big[f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)\Big] = \underbrace{t\,(1-t)}_{>0}\, f'(w)\,\underbrace{(x - x_0)}_{>0}.$$

Inoltre $z \in [x_0, z_t]$, $w \in [z_t, x]$

$\implies z < w$

$\implies f'(z) \le f'(w)$, in quanto per ipotesi f' è crescente.

Allora si ha, per $x_0 < x$

$$(1-t)\Big[f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big) - f(x_0)\Big] \le$$
$$\le t\Big[f(x) - f\Big(x_0 + t\,(x - x_0)\Big)\Big]$$

Con banali passaggi algebrici si ottiene

$$f\Big((1-t)\,x_0 + t\,x\Big) \le (1-t)\,f(x_0) + t\,f(x)$$

ossia f convessa su I.

Per $x < x_0$ si fanno passaggi simili. □

Teorema XXX (test della derivata seconda) Data f derivabile due volte su I, f è convessa su I

$\iff f''(x) \ge 0 \;\forall\, x \in I$.

dim. **(XXX)** È sufficiente applicare il test della derivata prima ad f'. □

Definizione $f : I \to \mathbb{R}$ è detta *concava* se $g := -f$ è convessa.

f derivabile su I è concava

$\iff$ la tangente in ogni punto giace sopra il grafico;

$\iff$ f' è decrescente (e se f derivabile due volte $\iff$ $f''(x) \leq 0 \; \forall x \in I$).

Definizione Sia $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{I}$, f derivabile in x_0, x_0 è un *punto di flesso* per f

- se f convessa in $(x_0 - \delta, x_0)$ e f concava in $(x_0, x_0 + \delta)$, ed è detto *flesso discendente*;
- se f concava in $(x_0 - \delta, x_0)$ e f convessa in $(x_0, x_0 + \delta)$, ed è detto *flesso ascendente.*

Attenzione In x_0 punto di flesso, la tangente in x_0 attraversa (taglia) il grafico.

Definizione Se la tangente è orizzontale in x_0 ($f'(x_0) = 0$), x_0 è detto *flesso a tangente orizzontale.*

Attenzione Per definire il flesso la funzione deve essere derivabile in quel punto.

Caso particolare: f derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, continua in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$$

x_0 è detto flesso a tangente verticale.

In x_0 flesso a tangente verticale, la tangente è verticale e taglia il grafico.

Proprietà Data $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, $x_0 \in I$, f derivabile due volte in x_0. Allora vale

x_0 è punto di flesso (non verticale)

$\implies$ $f''(x_0) = 0$

Dimostrazione. Si applica il teorema di Fermat a f' □

I candidati punti di flesso (se f è derivabile due volte) sono i punti con $f''(x_0) = 0$.

Attenzione $\quad f''(x) = 0 \not\Rightarrow x_0$ punto di flesso

Esempio (12.1) Sia $f(x) = x^4$,

$$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2$$

Si ha che $f''(x) = 0 \iff x = 0$.

Quindi $x = 0$ è punto di minimo e non di flesso.