

LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo scienze applicate

APPUNTI

Corso di Matematica Olimpionica

Davide PECCIOLI

1^a e 2^a superiore

1. *Successioni*

1.1 Aritmetiche $\rightarrow n_a = n_{a-1} + k$

- punto di partenza $\rightarrow a_0$
- ragione $\Delta a = d$

$$\{ a_0; a_0 + d; a_0 + 2d; \dots \}; a_n = a_{n-1} + d = a_0 + nd$$
$$\sum_{i=0}^n a_i = \frac{(n+1)(a_0 + a_0 + nd)}{2}$$

1.2 Geometriche $\rightarrow n_a = kn_{a-1}$

- punto di partenza $\rightarrow a_0$
- ragione $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = q$

$$\{ a_0; ka_0; k^2a_0; \dots \}; a_n = ka_{n-1} = k^n a_0$$
$$\sum_{i=0}^n a_i = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

1.2.1 Serie

Successioni protratte all'infinito

- $q \geq 1 \Rightarrow$

$$S_\infty = \sum_{i=0}^{\infty} a_0 \cdot q^i = +\infty$$

- $q < 1 \Rightarrow$

$$q^2 < q \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = a_0 \cdot \frac{1}{1 - q}$$

2. *Polinomi*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

Alcuni teoremi non dimostrati:

1. $p(x) = q(x) \Leftrightarrow a_{n_p} = a_{n_q}; a_{n-1_p} = a_{n-1_q} : \dots; a_{0_p} = a_{0_q} \forall a$
2. Se due polinomi di grado n hanno $n + 1$ punti in comune allora saranno uguali
3. $p(x) \wedge f(x) \Rightarrow p(x) = f(x) \cdot q + r$
4. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \Rightarrow p(1) = \sum_{i=0}^n a_i$
5. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \Rightarrow p(0) = a_0$
6. $p(-1)$ è uguale alla differenza tra i coefficienti delle x con esponente pari e di quelle con esponente dispari

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \wedge \{a_n = a_{2u} \vee a_n = a_{2u+1}\} \Rightarrow p(-1) = \sum_{i=0}^u a_{2i} - \sum_{i=0}^u a_{2i-1}$$

3. Calcolo combinatorio

3.1 Permutazioni

3.1.1 Semplici

Calcolare il numero di modi in cui si possono disporre n elementi senza ripetizioni

$$P_n = n!$$

Esempio. *Quanti sono gli anagrammi della parola "case"?* $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

3.1.2 Con Ripetizioni

Calcolare il numero di modi in cui si possono disporre n elementi di cui m ripetizioni

$$P_n^m = \frac{n!}{m!}$$

Esempio. *Quanti sono gli anagrammi della parola "cocomero"?*

$$\frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{40320}{12} = 3360$$

3.2 Disposizioni

3.2.1 Semplici

Calcolare il numero di modi in cui posso mettere n oggetti in k posti, senza ripetizioni, in cui l'ordine è importante

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

3.2.2 Con Ripetizioni

Calcolare il numero di modi in cui posso mettere n oggetti in k posti, con possibili ripetizioni, in cui l'ordine è importante

$$D'_{n,k} = n^k$$

3.3 Combinazioni

3.3.1 Semplici

Calcolare il numero di modi in cui si possono mettere n oggetti in k posti senza possibili ripetizioni, in cui l'ordine non è importante

- numero di sottoinsiemi fattibili con k elementi presi da n elementi totali

$$C = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

3.3.2 Con Ripetizioni

Calcolare il numero di modi in cui si possono mettere n oggetti in k posti con possibili ripetizioni, in cui l'ordine non è importante

$$C = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

3.4 Coefficiente binomiale

- $\binom{a+b}{a} = \binom{a+b}{b}$
- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$

4. Geometria

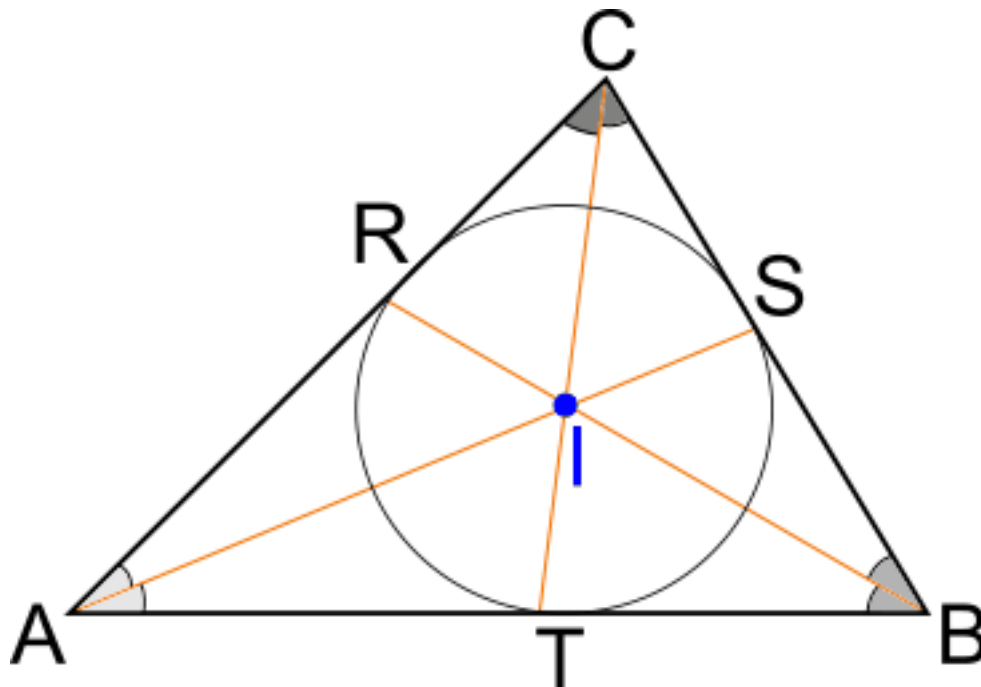
4.1 Triangoli

4.1.1 Punti Particolari

Incentro Il centro della circonferenza inscritta, *incentro*, è l'intersezione delle bisettrici.

$$p \rightarrow \text{semiperimetro} \quad r \rightarrow \overline{IT}$$

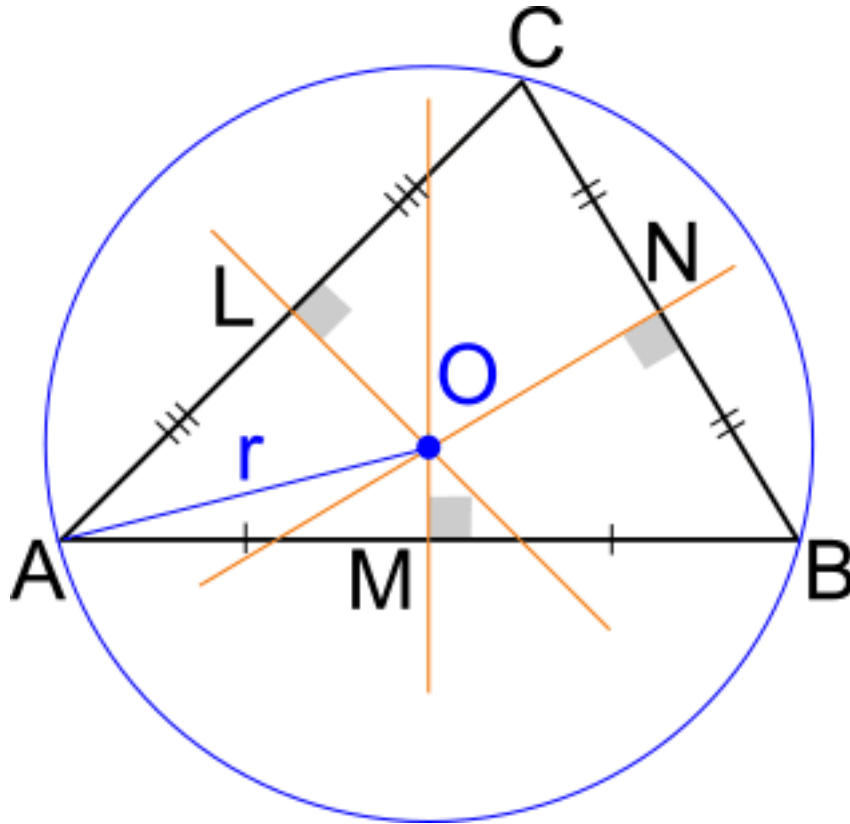
$$A_{ABC} = r \cdot p$$



Circocentro Il centro della circonferenza circoscritta, *circocentro*, è il punto d'intersezione delle assi.

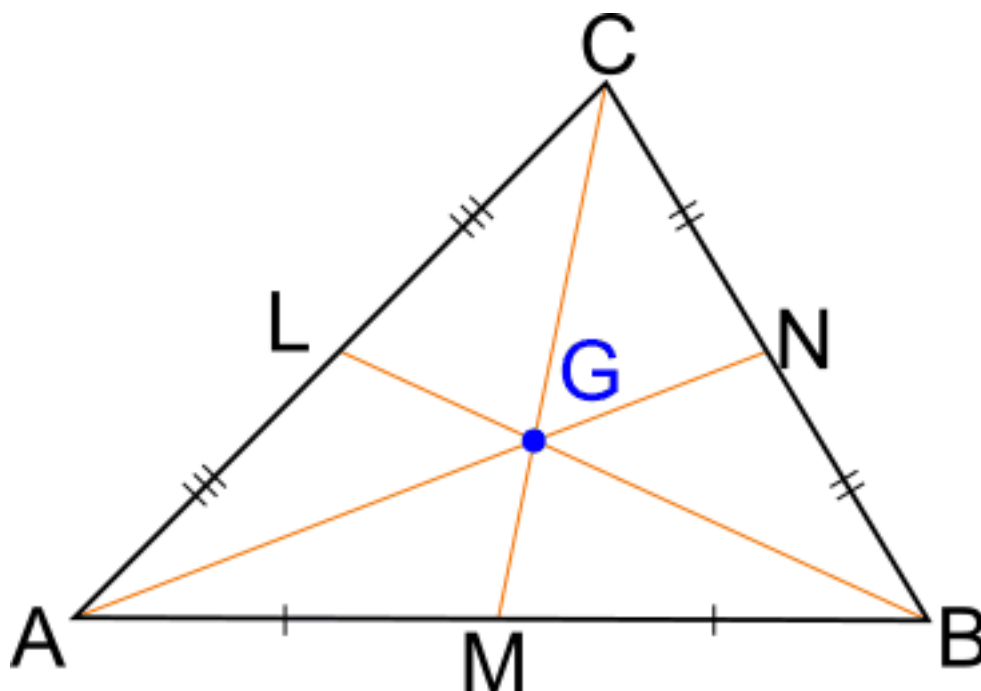
$R \rightarrow$ raggio circonferenza circoscritta $\overline{AB} = a$ $\overline{BC} = b$ $\overline{AC} = c$

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4A_{ABC}}$$

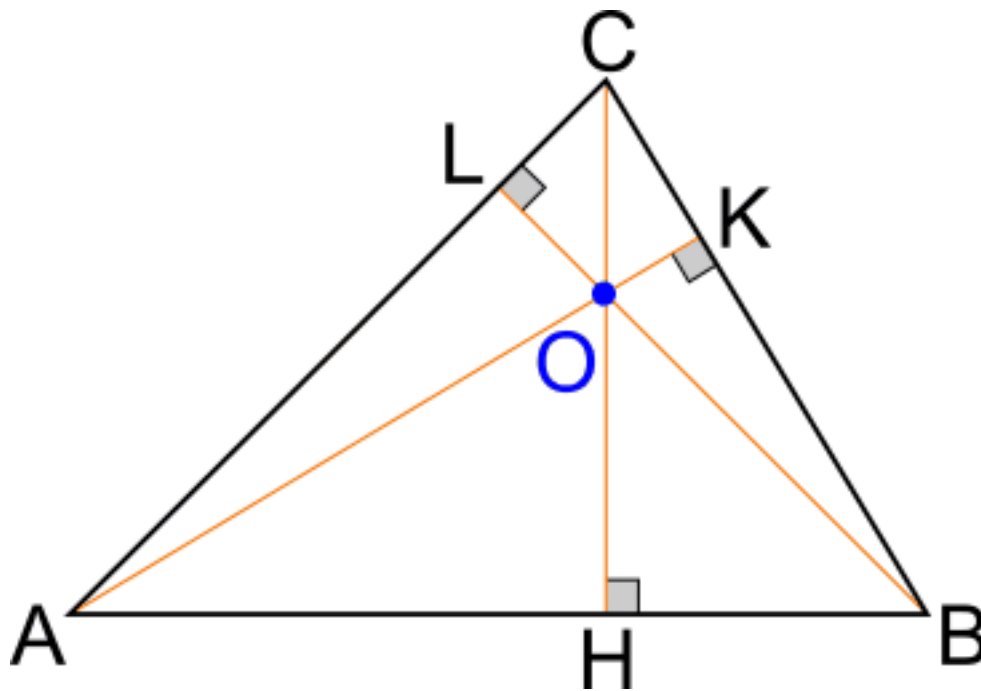


Baricentro Il punto d'incontro delle mediane, il *baricentro*, è sempre interno

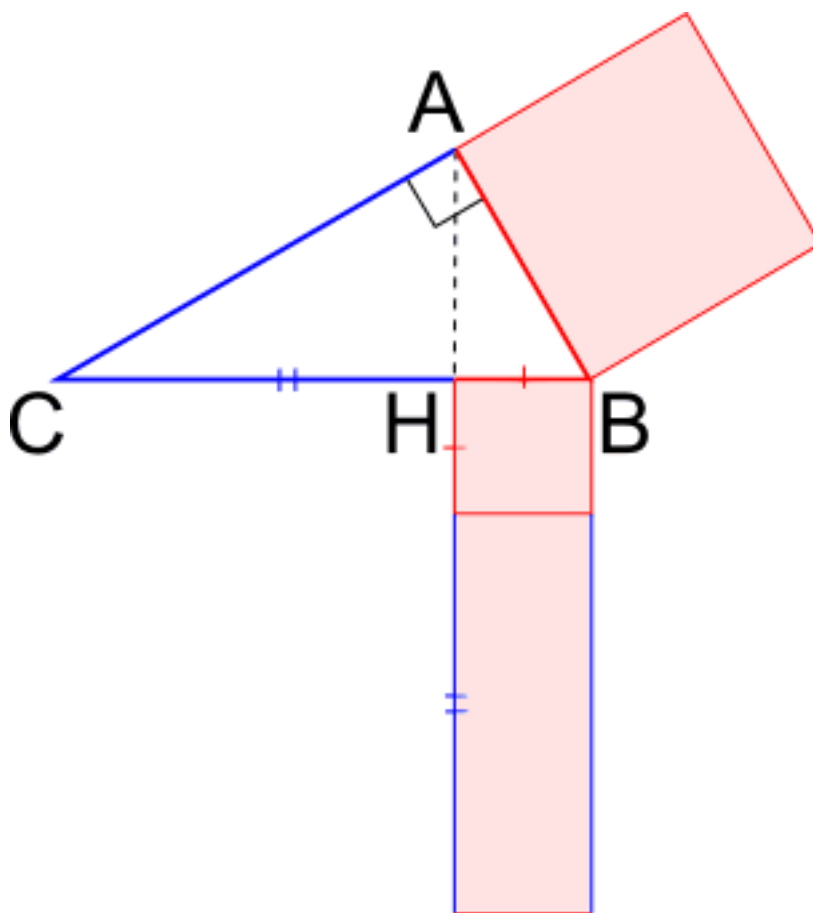
$$\overline{AG} = 2\overline{GN} \quad \overline{BG} = 2\overline{GL} \quad \overline{CG} = 2\overline{GM}$$



Ortocentro Il punto d'incontro delle altezze, l'*ortocentro*

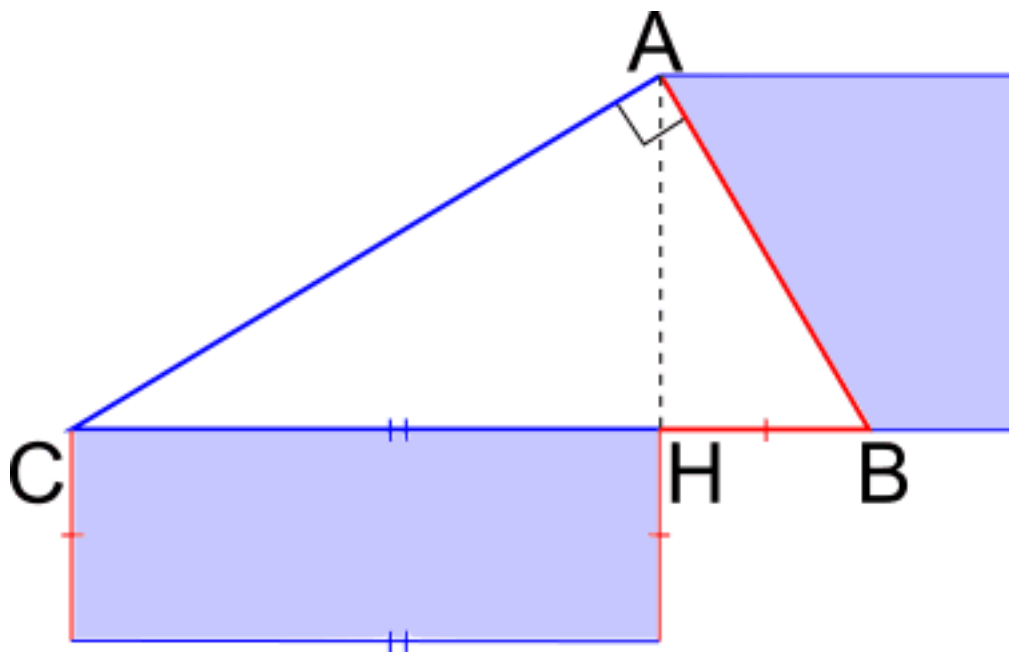


4.1.2 Teoremi



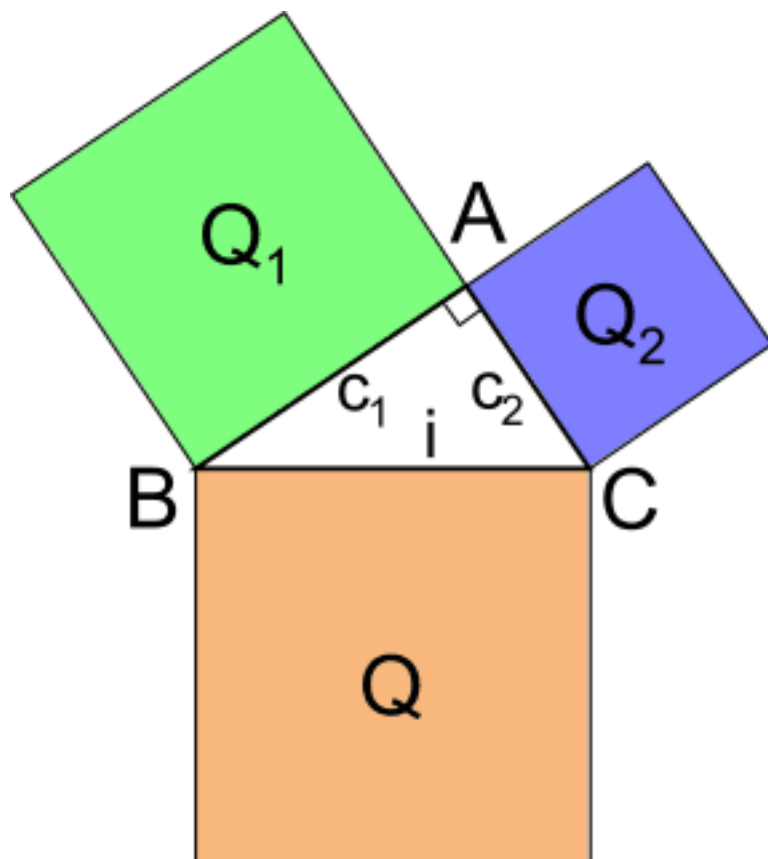
I Teorema di Euclide. *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente come dimensioni l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa*

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB} \cdot \overline{BH} \quad \overline{HB} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{CB}$$



II Teorema di Euclide. *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per dimensioni le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stesso*

$$\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH} \quad \overline{CH} : \overline{AH} = \overline{AH} : \overline{BH}$$



Teorema di Pitagora. *In un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti*

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2$$

4.1.3 Formule

Formula di Erone Siano a, b, c i lati di un triangolo, e p il semiperimetro dello stesso. Sarà possibile trovare l'area (A) di questo triangolo utilizzando la seguente formula:

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Terne Pitagoriche Considerando il Teorema di Pitagora: $a^2 + b^2 = c^2$, ecco le formule necessarie per calcolare le terne pitagoriche

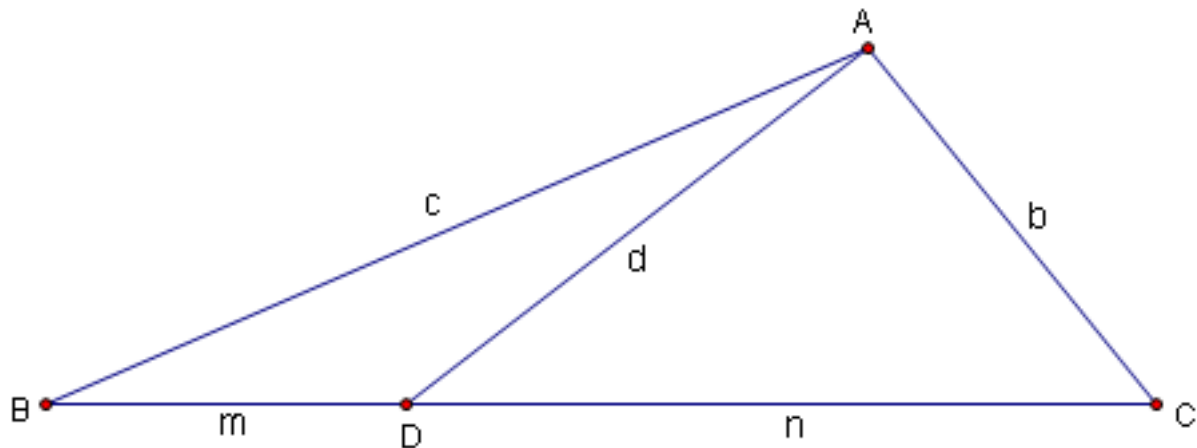
$$\underbrace{a = m; \quad b = \frac{(m+1)(m-1)}{2}; \quad c = \frac{(m^2+1)}{2}}_{b; c \in \mathbb{N} \forall m | m = 2q \wedge q \notin \mathbb{N}}$$

$$b; c \in \mathbb{N} \forall m | m = 2q \wedge q \notin \mathbb{N}$$

$$\underbrace{a = 2m; \quad b = (m+1)(m-1); \quad c = (m^2+1)}_{b; c \in \mathbb{N} \forall m | m = 2q \wedge q \in \mathbb{N}}$$

$$b; c \in \mathbb{N} \forall m | m = 2q \wedge q \in \mathbb{N}$$

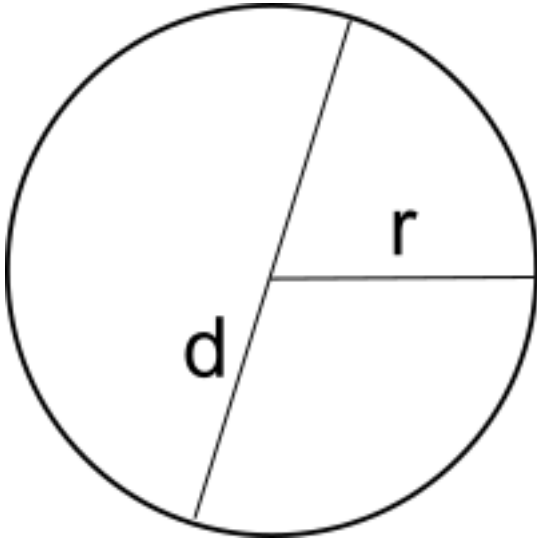
Teorema di Stewart Questo teorema è riassumibile dalla frase: "a **man** and his **dad** put a bomb (**bmb**) in the sink (**cnc**)"



$$man + dad = bmb + cnc$$

$$man + ad^2 = mb^2 + nc^2$$

4.2 Circonferenza e cerchio



Formule

$$2p = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2$$

4.2.1 Poligoni inscritti

Sia n il numero di lati del poligoni inscritto in una circonferenza di raggio r , e l_n la lunghezza del lato del poligono

$$l_3 = r \cdot \sqrt{3} \quad l_4 = r \cdot \sqrt{2} \quad l_6 = r$$

5. Teoria dei numeri

5.1 Classi di resto

$$a : b = q \text{ con resto } r \implies b \text{ DIV } a = q$$

$$a = b \cdot q + r \quad \text{b MOD a=r}$$

$$b \text{ MOD } a = r \implies [b]_a = [r]_a \rightarrow \text{Queste sono classi di resto.}$$

Per qualsiasi intero n esistono $n - 1$ classi di resto *modulo* n

$$n = [0]; \dots; [n - 1] \quad \text{ESEMPIO: } 7 = [0]; [1]; \dots; [6] \\ [-1]$$

Operazioni con le classi di resto

Somma, sottrazione e prodotto Le prime tre operazioni base della matematica si comportano in maniera abbastanza prevedibile anche utilizzando le classi di resto; ecco qualche esempio.

Stiamo lavorando modulo 7

$$[1] + [4] = 5$$

$$[6] + [6] = [12] = [5]$$

$$[3] - [1] = [2]$$

$$[1] \cdot [4] = [4]$$

$$[6] \cdot [6] = [36] = [1]$$

$$[-1] \cdot [-1] = [1]$$