

# Geometria 1

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino



# Indice

<b>1</b>	<b>Matrici</b>	<b>5</b>
1.1	Somma . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Gruppo</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Operazioni con le matrici</b>	<b>9</b>
3.1	Moltiplicazione . . . . .	9
3.2	Prodotto tra matrici . . . . .	10
3.2.1	Prodotto tra matrici quadrate . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Operazioni tra sottospazi vettoriali</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Funzioni lineari</b>	<b>20</b>
5.1	Matrice associata ad una applicazione lineare . . . . .	22
5.2	Immagine di sottospazi vettoriali . . . . .	25
5.3	Retroimmagine di sottospazi . . . . .	27
5.4	Nucleo di una funzione lineare . . . . .	29



# 1 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare di numeri reali ( $\in \mathbb{R}$ )

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{contiene } m \cdot n \text{ numeri} \\ \text{contiene } m \text{ righe} \\ \text{contiene } n \text{ colonne} \end{array}$$

$a_{ij}$  è l'elemento della matrice nella  $i$ -esima riga e nella  $j$ -esima colonna.  
 $a_{ij} \in \mathbb{R}$ .

$A$  è una matrice  $m \cdot n$ . Se  $m = n$  allora  $A$  è una **matrice quadrata**.

Le matrici servono per:

- risolvere sistemi lineari
- studiare spazi vettoriali
- classificare strutture geometriche (es. coniche)
- presentare funzioni (semplificandone lo studio)

$\mathbb{R}^{m,n}$  è l'insieme delle matrici  $m \cdot n$ :

- $\mathbb{Q}^{m,n}$  è l'insieme delle matrici  $m \cdot n$  le cui entrate sono elementi di  $\mathbb{Q}$ .

## Esempi (1.1)

- $\mathbb{R}^{2,2}$ : matrici  $2 \cdot 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdots \in \mathbb{R}^{2,2}$$

- $\mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^{m,1}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1} \quad \text{anche } \mathbf{vettori\ colonna}$$

- $\mathbb{R}^{1,n}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n} \quad \text{anche } \mathbf{vettori riga}$$

In  $\mathbb{R}^{m,n}$  è sempre definita la **matrice nulla**, in cui tutte le entrate sono nulle. In  $\mathbb{R}^{n,n}$  è sempre definita la **matrice identità**:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In  $\mathbb{R}^{1,1}$ ,  $I = 1$

- In  $\mathbb{R}^{2,2}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In  $\mathbb{R}^{3,3}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale composta unicamente da 1 nella matrice identità è il **diagonale principale** della matrice.

## 1.1 Somma

Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

## Esempi (1.2)

- In  $\mathbb{R}^{1,1}$  la somma tra matrici coincide con la somma usuale di numeri reali.
- $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

## Proprietà della somma

(i) La somma è **associativa**:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n} \quad (A + B) + C = A + (B + C)$$

e posso scrivere  $A + B + C$  senza ambiguità.

(ii) La somma è **commutativa** (o abeliana):

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \quad A + B = B + A$$

(iii) Se  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{m,n}$  è la matrice nulla ( $B = \underline{0}$ ), allora  $A + B = B + A = A$

(iv)  $A - A = \underline{0}$ :

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \exists -A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ t. c. } A - A = 0$$

**Definizione** Data  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ ,

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si definisce  $-A$ ,

$$\text{con } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Notazione** In genere si scrive  $A - B$  in luogo di  $A + (-B)$ , e si considera come una sottrazione di matrici

**Definizione** Due matrici  $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$  sono uguali se hanno le stesse entrate ( $A = B$ )

**Proprietà**  $A = B \iff B - A = 0$

## 2 Gruppo

**Definizione** Siano  $A, B$  due insiemi, si definisce **prodotto cartesiano**:

$$A \times B = \{(a, b) \text{ t.c. } a \in A, b \in B\}$$

in cui conta l'ordine:  $(a, b) \neq (b, a)$

$$A \times A = \{(a_1, a_2) \text{ t.c. } a_1, a_2 \in A\}$$

**Definizione** Sia  $G$  un insieme. Una **operazione** in  $G$  è una funzione

$$\begin{aligned} \star : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \star h \end{aligned}$$

**Proprietà**

(i) L'operazione è **associativa** se  $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$

(ii) L'operazione ha un **elemento neutro** se

$$\exists e \in G \text{ t.c. } g \star e = e \star g = g, \forall g \in G$$

(iii) Se  $g \in G$  chiamiamo **inverso di  $g$**  un elemento

$$k \in G \text{ t.c. } g \star k = k \star g = e$$

**Definizione** Un **gruppo** è un insieme  $G$  con un'operazione  $\star$  t.c.

1.  $\star$  è associativa
2. esiste un elemento neutro
3. ogni elemento ha un inverso

**Esempi (2.1)** Sono gruppi

$$(\mathbb{R}, +), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +),$$

~~$(\mathbb{R}, \cdot)$~~ : lo zero non ha un inverso,

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R}^{m,n}, +)$$



**Definizione** Un gruppo  $(G, \star)$  è **abeliano** se

$$g \star h = h \star g \quad \forall g, h \in G$$

Nel caso di un gruppo abeliano l'operazione è indicata con  $+$  e l'elemento neutro con  $0$ .

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$  è un gruppo abeliano

### 3 Operazioni con le matrici

#### 3.1 Moltiplicazione

Si può moltiplicare  $\lambda \in \mathbb{R}$  con matrici  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-1 \cdot A = -A \quad \text{coerente con la definizione di } -A$$

**Esempio (3.1)**

$$2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

**Osservazione (3.1)**  $0 \cdot A$  è la matrice nulla  $\forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

**Proprietà del prodotto per scalari**

$$(i) \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$(ii) \quad (\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$(iii) \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$$(iv) \quad 1 \cdot A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$  è un **gruppo abeliano** in cui è definita una moltiplicazione per scalari in cui valgono le proprietà *i-iv* (prototipo per gli spazi vettoriali).

## 3.2 Prodotto tra matrici

$$A, B \text{ t.c. } A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k} \implies AB \in \mathbb{R}^{m,k}$$

Questo è definito come il prodotto **righe per colonne**. Il numero di colonne della prima matrice deve corrispondere con il numero di righe della seconda matrice.

**Definizione** Siano  $A \in \mathbb{R}^{m,n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n,k}$  due matrici, siano  $a_{ij}$  gli elementi di  $A$  e  $b_{rs}$  gli elementi di  $B$  [Notazione:  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{rs})$ ]

La matrice  $A \cdot B$  è la matrice in  $\mathbb{R}^{m,k}$  il cui  $ij$ -esimo elemento è

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot b_{rj}$$

### 3.2.1 Prodotto tra matrici quadrate

Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{m,m}$ ,  $AB \in \mathbb{R}^{m,m}$ ; in questo caso il prodotto tra matrici definisce una operazione in  $\mathbb{R}^{m,m}$ .

i. il prodotto è associativo:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ ,  $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,m}$

ii. esiste un elemento neutro

**Proposizione p.i** Sia  $I \in \mathbb{R}^{m,m}$  la matrice identità,  $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

$$\implies A \cdot I = I \cdot A = A \quad \forall A \in \mathbb{R}^{m,m}$$

**dim. (p.i)** Sia  $(r_{ij})$  l' $ij$ -esimo elemento della matrice  $A \cdot I$  con  $A = (a_{ij})$  e  $I = (b_{ij})$

$$r_{ij} = \sum_{n=1}^m a_{in} \cdot b_{nj}$$

Si noti che  $b_{kh} = 0 \quad \forall k, h | k \neq h \implies$

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \sum_{n=1}^m a_{in} \cdot b_{nj} = \\ &= \cancel{a_{i1}b_{1j}} + \cancel{\dots} + a_{ij}b_{jj} + \cancel{\dots} + \cancel{a_{in}b_{nj}} = \\ &= a_{ij} \cdot b_{jj} = a_{ij} \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\implies r_{ij} = a_{ij}$$

□

In generale se  $A \in \mathbb{R}^{m,m} \nexists$  un inverso per  $A$ , cioè non esiste  $B \in \mathbb{R}^{m,m}$  tale che  $A \cdot B = B \cdot A = I$

**Esempio (3.2)**

- Se  $A$  è la matrice nulla  
 $\implies A \cdot B = \text{matrice nulla} \neq I$
- Se  $A$  ha una riga o una colonna nulla (ovvero fatta tutta di zeri)  
 $\implies$  non è invertibile

**Teorema I** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su campo  $\mathbb{K}$ , e  $W \subseteq V$  un sottospazio vettoriale:

1. se  $V$  è finitamente generato  $\implies W$  è finitamente generato;
2. se  $V$  è finitamente generato  $\implies \dim W \leq \dim V$
3. se  $V$  è finitamente generato e  $\dim W = \dim V \implies W = V$

**dim. (I)**

1. Supponiamo che  $V$  sia finitamente generato, e per assurdo che  $W$  non lo sia.

$V$  è finitamente generato  $\implies V$  ha una base

$$\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$$

$W$  non è finitamente generato, e sia  $w_1 \in W$ ,  $w_1 \neq 0$ , considero  $\mathcal{L}(w_1) \subseteq W$ , ma  $W \neq \mathcal{L}(w_1)$ , altrimenti  $W$  sarebbe generato da  $w_1$ .  
 $\implies \exists w_2 \in W \wedge w_2 \notin \mathcal{L}(w_1)$ .

Considero  $\mathcal{L}(w_1, w_2) \subseteq W$ , ma  $W \neq \mathcal{L}(w_1, w_2)$ , altrimenti  $W$  sarebbe generato da  $\{w_1, w_2\}$ .  $\implies$   
 $\implies \exists w_3 \in W \wedge w_3 \notin \mathcal{L}(w_1, w_2)$ .

Itero il procedimento e trovo

$$\begin{aligned} \{w_1, \dots, w_{n+1}\} &\subseteq W \text{ t.c. } w_{n+1} \notin \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) \implies \\ &\implies \{w_1, \dots, w_{n+1}\} \text{ è un insieme libero} \end{aligned}$$

e contiene più elementi di una base  $\mathcal{B}$ . Assurdo per teorema precedente.

2. Supponiamo  $V$  finitamente generato, e sia  $W \subseteq V$  un sottospazio vettoriale.  $W$  è finitamente generato (per 1.)  $\implies \exists \mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W \implies \mathcal{B} \subseteq V$  è un sottoinsieme libero  $\implies m \leq \dim V \implies \dim W \leq \dim V$

3. Sia  $W \subseteq V$  uno spazio vettoriale, con  $V$  finitamente generato.  $\dim W = \dim V$ .

$W$  ha una base  $\mathcal{B}$  con  $n$  vettori, dove  $n = \dim V \implies \mathcal{B}$  è una base di  $V$ .

Se  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\} \implies W = \mathcal{L}(w_1, \dots, w_n) = V \implies W = V$

□

**Osservazione (3.2)** Se  $V$  è uno spazio vettoriale finitamente generato, e  $\dim V = n \implies$  ogni insieme libero con  $n$  elementi è una base. Infatti se  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  è un insieme libero, se per assurdo esistesse  $v \in V \wedge v \notin \mathcal{L}(v_1, \dots, v_n) \implies \{v_1, \dots, v_n, v\} \subseteq V$  è un insieme libero di cardinalità  $n + 1$  (ovvero con  $n + 1$  elementi). Assurdo.

**Teorema II (del completamento di una base)** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  finitamente generato. Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e sia  $I = \{a_1, \dots, a_l\} \subseteq V$  un sottoinsieme libero. Esiste sempre  $\mathcal{B}'$  base di  $V$  i cui primi  $l$ -elementi sono  $a_1, \dots, a_l$  e i restanti  $n - l$ -elementi sono elementi di  $\mathcal{B}$ .

$$\mathcal{B}' = \{a_1, \dots, a_l, w_1, \dots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \dots, w_{n-l} \in \mathcal{B}$$

**dim. (II)** Applico il metodo degli scarti successivi

$l = n$  l'enunciato è banale ( $I$  è già una base e non va completata);

$l < n \implies \mathcal{L}(a_1, \dots, a_l) \subsetneq V$

$\implies \exists w_1 \in \mathcal{B}$  t.c.  $w_1 \notin \mathcal{L}(a_1, \dots, a_l)$ . Infatti, se tutti i generatori appartenenti a  $\mathcal{B}$  fossero combinazioni lineari di  $a_1, \dots, a_l$ , non sarebbero più tutti linearmente indipendenti.  $\implies I_1 = \{a_1, \dots, a_l, w_1\}$  è libero.

Se  $I_1$  è una base, la dimostrazione si conclude, altrimenti  $\exists w_2 \in \mathcal{B}$  t.c.  $w_2 \notin \mathcal{L}(a_1, \dots, a_l, w_1)$

$\implies I_1 = \{a_1, \dots, a_l, w_1, w_2\}$  è libero.

Se  $I_2$  è una base la dimostrazione si conclude, altrimenti si itera fino a

$$I_{n-l} = \{a_1, \dots, a_l, w_1, \dots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \dots, w_{n-l} \in \mathcal{B}.$$

$I_{n-l}$  è libero con  $n$  vettori  $\implies I_{n-l}$  è una base

□

**Esempio (3.3)**  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3}) = \{A \in \mathbb{R}^{3,3} \text{ t.c. } {}^tA = A\}$

Cerco una base. Sia  $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$  generica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} A = & a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Siano } E_1 = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ e sia } \mathcal{B} = \{E_1, \dots, E_6\} \end{aligned}$$

Dato

$$\begin{aligned} I = & \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right. \\ & A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \left. A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3}) \end{aligned}$$

insieme libero, si trovino tre elementi  $w_1, w_2, w_3 \in \mathcal{B}$  tali per cui  $I \cup \{w_1, w_2, w_3\}$  sia una base di  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ .

$$A_1 = E_1 + 2E_2; A_2 = E_1 - E_4 + E_6; A_3 = E_2 - E_3$$

e rispetto alla base  $\mathcal{B}$

$$A_1 = (1, 2, 0, 0, 0, 0), A_2 = (1, 0, 0, -1, 0, 1), A_3 = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$$

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, E_6 = (0, \dots, 0, 1)$$

Si studia l'appartenenza di  $E_1 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3)$ . Studio il sistema

$$E_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_1 \notin \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1\}$$

Si studia l'appartenenza di  $E_2 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$ . Studio il sistema

$$E_2 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$$\implies E_2 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies \text{scarto } E_2$$

Si studia l'appartenenza di  $E_3 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$ . Studio il sistema

$$E_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 1 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$$\implies E_3 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies \text{scarto } E_3$$

Si studia l'appartenenza di  $E_4 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$ . Studio il sistema

$$E_4 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 1 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_4 \notin \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4\}$$

Si studia l'appartenenza di  $E_5 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4)$ . Studio il sistema

$$E_5 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1 + \lambda_5 E_4$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_5 \\ 1 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 0 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_5 \in \mathcal{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4) \implies I_3 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$$

La soluzione è  $\mathcal{B}' = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

## 4 Operazioni tra sottospazi vettoriali

Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ , e siano  $W_1$  e  $W_2 \subseteq V$  due sottospazi vettoriali.

Si consideri

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in w_1 \wedge x \in w_2\}$$

**Proposizione p.ii**  $W_1 \cap W_2$  è sempre sottospazio vettoriale

*dim. (p.ii)* Siano  $x, y \in W_1 \cap W_2$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x, y \in W_1 \Rightarrow (x + y) \in W_1 \\ x, y \in W_2 \Rightarrow (x + y) \in W_2 \end{array} \right\} \Rightarrow (x + y) \in W_1 \cap W_2$$

□

**Proposizione p.iii** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e  $W, W_1$  e  $W_2$  sottospazi di  $V$ .

Se  $W$  contiene  $W_1$  e  $W$  contiene  $W_2$  allora  $W$  contiene  $W_1 + W_2$  (cioè  $W_1 + W_2$  è il più piccolo sottospazio di  $V$  che contiene sia  $W_1$  che  $W_2$ )

*dim. (p.iii)* Sia  $x + y \in W_1 + W_2, x \in W_1 \Rightarrow x \in W, y \in W_2 \Rightarrow y \in W \Rightarrow x + y \in W$ , poiché  $W$  è un sottospazio vettoriale. Quindi ogni  $v \in W_1 + W_2$  è elemento di  $W \Rightarrow W_1 + W_2 \subseteq W$ .

La somma si generalizza a più sottospazi. Siano  $W_1, \dots, W_l \subseteq V$  sottospazi vettoriali, allora si definisce

$$W_1 + \dots + W_l = \{x_1 + \dots + x_l \mid x_1 \in W_1, \dots, x_l \in W_l\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale ed è il più piccolo sottospazio che contiene tutti i  $W_1, \dots, W_l$  □

**Esercizio** Si trovino somma e intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^4$

- $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}, W_2 = L(e_4)$
- $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) \mid x_1 : 1, x_2 : 2 \in \mathbb{R}\},$   
 $Z_2 = \{(0, x_2, 0, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

**Soluzione**

- $W_1 + W_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) \mid x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}, W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$
- $W_1 + Z_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) \mid x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\},$   
 $W_1 \cap Z_2 = \{(0, x_2, 0, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$



**Proposizione p.iv** Sia  $V$  spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  e  $W_1, W_2 \subseteq V$  due sottospazi. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni:

1.  $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$  (hanno intersezione banale)
2. ogni  $v \in W_1 + W_2$  si scrive in modo unico come  $v = x + y$  con  $x \in W_1$  e  $y \in W_2$

*dim. (p.iv)*

1.  $\implies$  2. Suppongo  $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$  e considero  $v \in W_1 + W_2$ . Scrivo  $v = x_1 + y_1$ ,  $v = x_2 + y_2$  e dimostro che  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$

$\underline{0} = v - v = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \implies x_1 - x_2 = y_2 - y_1$ ,  $x_1 - x_2 \in W_1$  mentre  $y_2 - y_1 \in W_2$ . Per l'uguaglianza risulta che

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 - x_2 \in W_2 \implies x_1 - x_2 \in W_1 \cap W_2 \\ y_2 - y_1 \in W_1 \implies y_2 - y_1 \in W_1 \cap W_2 \end{cases} \\ & \implies \begin{cases} x_1 - x_2 = \underline{0} \implies x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = \underline{0} \implies y_1 = y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

2.  $\implies$  1. Suppongo che ogni  $v \in W_1 + W_2$  si scriva in modo unico come  $v = x + y$  con  $x \in W_1$  e  $y \in W_2$  e dimostro che  $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

Sia  $v \in W_1 \cap W_2$ . Sia  $v \in W_1 + W_2$ ,  $v = x + y = x + v + y - v$ , con  $x + v \in W_1$ ,  $y - v \in W_2$ . Quindi se  $v \neq \underline{0}$ , le due scritture  $v = x + y$ ,  $v = (x + v) + (y - v)$  sono diverse e ciò non è possibile per ipotesi

□

**Notazione** Se  $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$  si scrive  $W_1 \oplus W_2$  invece che  $W_1 + W_2 \oplus$  si legge “somma diretta”

**Esempio (4.1)**  $\mathbb{K}^{n,n} = S(\mathbb{K}^{n,n}) \oplus A(\mathbb{K}^{n,n})$

**Esempio (4.2)**  $R^2 = \mathcal{L}(e_1) \oplus \mathcal{L}(e_2)$

**Proposizione p.v** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ . Siano  $W_1, \dots, W_l \subseteq V$  sottospazi vettoriali. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni

1.  $W_i \cap (W_1 + \dots + W_{i-1} + W_{i+1} + \dots + W_l) = \{\underline{0}\} \quad \forall i = 1, \dots, l$

2. Ogni  $v \in W_1 + \dots + W_l$  si scrive in modo unico come  $v = x_1 + \dots + x_l$  con  $x_1 \in W_1, \dots, x_l \in W_l$

Se vale 1. si scrive  $W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_l$

**Esempio (4.3)** Considero  $V$  spazio vettoriale di dimensione finita e  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \implies V = \mathcal{L}(v_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{L}(v_l)$

Sia  $V$  spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ , finitamente generato. Sia  $W \subseteq V$  un sottospazio vettoriale, sia  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_l\}$  una base di  $W$ . Possiamo completare  $\mathcal{B}$  con una base dello spazio  $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_l, v_1, \dots, v_m\}$ . Sia

$$Z = \mathcal{L}(v_1, \dots, v_m) \subseteq V$$

un sottospazio vettoriale, e per costruzione  $V = W \oplus Z$

**Osservazione (4.1)** Sia  $V$  spazio vettoriale di dimensione finita con  $V = W \oplus Z$  Siano  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_l\}$  una base di  $W$  e  $\mathcal{C} = \{z_1, \dots, z_m\}$  una base di  $Z$ . Ogni elemento di  $V$  si scrive in modo unico come  $v = x + y$  con  $x \in W$  e  $y \in Z$   $\mathcal{B}$  base di  $W$

$\implies x$  si scrive in modo unico come  $x = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_l w_l$

$\mathcal{C}$  base di  $Z \implies y$  si scrive in modo unico come

$$y = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_m z_m$$

$\implies v$  si scrive in modo unico come

$$v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_l w_l + \mu_1 z_1 + \dots + \mu_m z_m$$

$\implies \mathcal{B} \cup \mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_l, z_1, \dots, z_m\}$  è una base di  $V$

$\implies \dim V = \dim W + \dim Z$

**Teorema III** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$  finitamente generato. Siano  $W_1, W_2 \subseteq V$  due sottospazi vettoriali t.c.  $V = W_1 + W_2$ . Allora

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Questa è la **Formula di Grassmann**.

**dim. (III)** Chiamo  $\dim V = n$ ,  $\dim W_1 = l$ ,  $\dim W_2 = p$ ,  $\dim(W_1 \cap W_2) = r$

In particolare  $l, p \leq n$ ,  $r \leq l, p$

1.  $r = l \implies W_1 \cap W_2 = W_1 \implies W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 + W_2 = W_2 = V$
2.  $r = p \implies W_1 \cap W_2 = W_2 \implies W_2 \subseteq W_1 \implies W_1 + W_2 = W_1 = V$
3. si assume  $r \leq l, p$  e sia

$$\mathcal{B} = \{a_1, \dots, a_r\} \text{ base di } W_1 \cap W_2$$

Completo  $\mathcal{B}$  con una base  $\mathcal{C}$  di  $W_1$ ,

$$\mathcal{C} = \{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l\}$$

e completo  $\mathcal{B}$  con una base  $\mathcal{D}$  di  $W_2$ ,

$$\mathcal{D} = \{a_1, \dots, a_r, c_{r+1}, \dots, c_p\}$$

Si verifica che l'insieme

$$\{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l, c_{r+1}, \dots, c_p\}$$

è una base di  $V$ . In questo modo si ottiene

$$\dim V = l + (p - r)$$

cioè la tesi.

Ovviamente risulta

$$\mathcal{L}(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l, c_{r+1}, \dots, c_p) = V$$

in quanto contiene i generatori sia di  $W_1$  che di  $W_2$ , e quindi anche della loro somma. Verifichiamo che l'insieme

$$\{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l, c_{r+1}, \dots, c_p\}$$

sia libero. Supponiamo

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \mu_r + 1 + b_{r+1} + \dots + \\ + \dots + \mu_l b_l + \gamma_{r+1} c_{r+1} + \dots + \gamma_p c_p = \underline{0} * * \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \dots + \mu_l b_l) = (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \dots - \gamma_p c_p)$$

2 novembre 2021

Sia

$$\begin{aligned} c &= (-\gamma_{r+1}c_{r+1} - \cdots - \gamma_p c_p) = \\ &= (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l) \end{aligned}$$

sicuramente  $c \in W_2$

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l \in W_1$$

$$\implies c \in W_1 \cap W_2 = \mathcal{L}(a_1, \dots, a_r)$$

$$\implies c = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r, \text{ vado a sostituire in } **$$

$$(\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r) + (\gamma_{r+1} c_{r+1} + \cdots + \gamma_p c_p) = \underline{0}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0 \\ \gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0 \end{cases}$$

Ho ottenuto

$$\begin{aligned} \gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p &= 0 \\ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l &= \underline{0} \end{aligned}$$

Poiché l'insieme

$$\mathcal{C} = \{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l\}$$

è libero

$$\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \cdots = \mu_l = 0$$

$$\implies \{a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_l, c_{r+1}, \dots, c_p\} \text{ è libero}$$

□

## 5 Funzioni lineari

$V$  e  $W$  spazi vettoriali sullo stesso campo  $\mathbb{K}$  e una funzione  $F : V \rightarrow W$ ,  $F$  è lineare se verifica  $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v, w \in V$

**Teorema IV (di esistenza e unicità)** Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$  con  $V$  finitamente generato.

Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base di  $V$  e  $a_1, \dots, a_n \in W$ .

Allora esiste un'unica funzione lineare  $F : V \rightarrow W$  tale che  $F(v_i) = a_i$   $\forall i = 1, \dots, n$

*dim.* (IV)

Esistenza Sia  $v \in V$ ,  $v$  si scrive in modo unico come  $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n$  per  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$

Si definisce

$$F(v) = F(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n) := x_1a_1 + \dots + x_na_n$$

$F$  definisce una funzione  $V \rightarrow W$  tale che  $F(v_i) = a_i$  per  $i = 1, \dots, n$ . Verifico che  $F$  è lineare.

Siano  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  e  $v, w \in V$  e dimostro che  $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$

Scrivo

$$v = \sum_{k=1}^n x_k v_k$$

e

$$w = \sum_{r=1}^n y_r v_r$$

$$\lambda v + \mu w = \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k) v_k$$

Quindi per come è definita  $F$  risulta che

$$\begin{aligned} F(\lambda v + \mu w) &= F\left(\sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k) v_k\right) = \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda x_k + \mu y_k) a_k = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n x_k a_k + \mu \sum_{k=1}^n y_k a_k = \\ &= \lambda F(v) + \mu F(w) \end{aligned}$$

$\implies F$  è lineare

Unicità Supponiamo di avere due funzioni lineari  $F, G : V \rightarrow W$  tali che  $F(v_i) = G(v_i) = a_i \ \forall i = 1, \dots, n$  e dimostro che  $F = G$ , cioè che  $F(v) = G(v) \ \forall v \in V$  Possiamo scrivere  $v = \sum_{k=1}^n x_k v_k$  quindi

$$\begin{aligned} F(v) &= F\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k F(v_k) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k a_k \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} G(v) &= G\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k G(v_k) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k a_k \end{aligned}$$

$$\implies F(v) = G(v) \ \forall v \in V$$

$$\implies F = G$$

□

## 5.1 Matrice associata ad una applicazione lineare

Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$  con  $V, W$  entrambi finitamente generati. Supponiamo  $\dim V = n$  e  $\dim W = m$ .

Considero  $F : V \rightarrow W$  lineare, e fisso  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$  e  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W$ .

$$\begin{aligned}
F(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m = \sum_{k=1}^m a_{k1}w_k \\
F(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m = \sum_{k=1}^m a_{k2}w_k \\
&\vdots \\
F(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m = \sum_{k=1}^m a_{kn}w_k
\end{aligned}$$

Tutto questo determina  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$ ,  $A$  è determinata da  $F, \mathcal{B}, \mathcal{C}$

Sia  $v \in V$  un vettore generico  $v = \sum_{k=1}^n x_k v_k$ ,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
F(v) &= F\left(\sum_{k=1}^n x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k F(v_k) = \\
&= x_1 F(v_1) + x_2 F(v_2) + \cdots + x_n F(v_n) = \\
&= x_1 \sum_{k=1}^m a_{k1}w_k + x_2 \sum_{k=1}^m a_{k2}w_k + \cdots + x_n \sum_{k=1}^m a_{kn}w_k = \\
&= \sum_{k=1}^m (a_{k1}x_1)w_k + \sum_{k=1}^m (a_{k2}x_2)w_k + \cdots + \sum_{k=1}^m (a_{kn}x_n)w_k = \\
&= \left(\sum_{r=1}^n a_{1r}x_r\right)w_1 + \left(\sum_{r=1}^n a_{2r}x_r\right)w_2 + \cdots + \left(\sum_{r=1}^n a_{mr}x_r\right)w_m
\end{aligned}$$

$$\text{Se } (v)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\implies (F(v)) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\implies (F(v)) = A(v)_{\mathcal{B}}$$

**Notazione** Si indica  $A$  con  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$ , matrice che rappresenta  $F$  rispetto alle basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$

**Esempio (5.1)** Sia  $I : V \rightarrow V$  funzione identità, e calcoliamo  $M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(I)$  dove  $\mathcal{B}$  è una base fissata di  $V$ . Se  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  risulta  $I(v_i) = v_i \forall i = 1, \dots, n$

$$\implies M^{\mathcal{B},\mathcal{B}}(I) = Id \text{ matrice identità}$$

**Esempio (5.2)** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3)$$

Sia  $\mathcal{B}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{C}$  la base canonica di  $\mathbb{R}^2$ , voglio trovare  $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F)$

$$\text{Possiamo scrivere } F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Sono noti  $F(1, 0, 0) = (3, 0)$ ,  $F(0, 1, 0) = (-1, 2)$  e  $F(0, 0, 1) = (0, 3)$ , quindi

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In generale data  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  espressa in termini della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$  la matrice che rappresenta  $F$  è la matrice le cui colonne sono  $F(e_1), \dots, F(e_n)$

**Esempio (5.3)** Data  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Si ha

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio (5.4)**  $F : \mathbb{K}^{n,n} \rightarrow \mathbb{K}$ :  $A \mapsto \text{tr}(A)$  e determino la matrice che rappresenta  $F$  rispetto alla base canonica di  $\mathbb{K}^{n,n}$ ,  $\mathcal{B} = E_{ij}$  e alla base canonica di  $\mathbb{K}$   $\mathcal{C} = \{1\}$

Si ha

$$M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} \text{tr}(E_{11}) & \text{tr}(E_{12}) & \dots & \text{tr}(E_{1n}) & \text{tr}(E_{21}) & \text{tr}(E_{22}) & \dots & \text{tr}(E_{nn}) \end{pmatrix}$$

Per esempio se  $n = 2$  risulta  $M^{\mathcal{B},\mathcal{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



**Esempio (5.5)** Sia  $a \in V_3$  e  $F : V_3 \rightarrow V_3$ :  $x \mapsto a \wedge x$  funzione lineare.

Sia  $\mathcal{B} = \{i, j, k\}$  base ortonormale positiva di  $V_3$  e calcolo  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(F)$ , scriviamo  $a = a_1i + a_2j + a_3k$

$$F(i) = a \wedge i = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge i = -a_2k + a_3j$$

$$F(j) = a \wedge j = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge j = a_1k - a_3i$$

$$F(k) = a \wedge k = (a_1i + a_2j + a_3k) \wedge k = -a_1j + a_2i$$

Si ha

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2,2}$ ,  $F(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}$

Sia  $\mathcal{B}$  base canonica di  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathcal{C}$  base canonica di  $\mathbb{R}^{2,2}$

Si trovi  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$

**Soluzione** Da risolvere

## 5.2 Immagine di sottospazi vettoriali

Siano  $V$  e  $W$  spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$  e sia  $F : V \rightarrow W$  lineare, sia  $H \subseteq V$  sottospazio vettoriale,  $F(H)$  immagine di  $H$  tramite  $F$ , tale che  $F(H) \subseteq W$ ,  $F(H) = \{F(h) | h \in H\}$

**Proposizione p.vi**  $F(H)$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $W$

**dim. (p.vi)** Siano  $w_1, w_2 \in F(H)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  e dimostriamo che  $\lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$$w_1 \in F(H) \implies w_1 = F(h_1) \text{ per qualche } h_1 \in H$$

$$w_2 \in F(H) \implies w_2 = F(h_2) \text{ per qualche } h_2 \in H$$

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda F(h_1) + \mu F(h_2) = F(\lambda h_1 + \mu h_2)$$

Poiché  $H$  è un sottospazio vettoriale, risulta che, dato  $h = \lambda h_1 + \mu h_2$

$$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 = F(h) \text{ per qualche } h \in H$$

$$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$$

$$\implies F(H) \text{ sottospazio vettoriale di } V$$

□

Supponiamo  $\dim H = n$ ,  $\dim F(H) = ?$

Sia  $\mathcal{B} = \{h_1, \dots, h_n\}$  base di  $H$ , sappiamo che  $\{F(h_1), \dots, F(h_n)\}$  è un insieme di generatori di  $F(H)$

$$\implies \dim F(H) \leq n$$

**Esercizio** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  la funzione lineare data da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

Sia  $H \subseteq \mathbb{R}^3$  il sottospazio  $H = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\}$ ,  $\dim H = 2$

Si trovi una base di  $F(H)$

**Soluzione**

1. Trovo una base di  $H$ , per esempio  $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. Calcolo le immagini dei vettori della base

$$F(1, -1, 0) = (2, 0, 2, -1)$$

$$F(0, 0, 1) = (-1, 1, 0, -1)$$

Questi due vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base di  $F(H)$

**Definizione** Sia  $F : V \rightarrow W$  lineare,  $F(V)$  (che è un sottospazio vettoriale di  $W$ ) si dice l'immagine di  $F$

**Osservazione (5.1)**  $F$  è suriettiva  $\iff F(V) = W \iff \dim F(V) = \dim W$  (criterio per testare la suriettività di una funzione lineare)

**Esercizio** Sia  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$

1. Dire se  $F$  è suriettiva e in caso contrario trovare  $w \in \mathbb{R}^3$  tale che  $w \notin F(\mathbb{R}^3)$
2. Sia  $a = (1, 0, 1)$ ,  $b = (0, 1, 1)$ ,  $H = \mathcal{L}(a, b)$ . Dire se  $(4, 3, -2) \in F(H)$

**Soluzione**

$$1. F(\mathbb{R}^3) = \mathcal{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3))$$

$$F(e_1) = (2, 1, 1)$$

$$F(e_2) = (2, 0, 3)$$

$$F(e_3) = (0, 1, -2)$$

Si osserva che  $F(e_1) = F(e_2) + F(e_3)$ , quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti

Ma  $F(e_2)$  e  $F(e_3)$  sono linearmente indipendenti

$\implies F(\mathbb{R}^3)$  ha dimensione 2, ed i vettori  $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$  ne formano una base.  $F$  non è suriettiva

$w \in \mathbb{R}^3, w \notin F(\mathbb{R}^3) \iff w$  non è combinazione lineare di  $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$ .

Per esempio  $w = (1, 0, 0)$  va bene, poiché non esistono  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tali che  $(1, 0, 0) = \lambda(2, 0, 3) + \mu(0, 1, -2)$

2.  $F(H) = \mathcal{L}(F(a), F(b))$ .  $F(a) = (2, 2, -1), F(b) = (2, 1, 1)$ .  $F(a), F(b)$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\dim F = 2$

$(4, 3, -2) \in F(H) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tali che  $(4, -3, -2) = (2\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, -\lambda + \mu)$

Il sistema non ha soluzione, pertanto  $(4, 3, -2) \notin F(H)$

**Definizione** Data  $F : V \rightarrow W$  applicazione lineare tra spazi vettoriali su uno stesso campo, il rango di  $F$  ( $\text{rank } F$ ) è la dimensione di  $F(V)$

Se  $\mathcal{B}$  è una base di  $V$  e  $\mathcal{C}$  è una base di  $W$ , ad  $F$  si associa la matrice  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$  che rappresenta  $F$  rispetto alle basi fissate.

$$(F(v))_{\mathcal{C}} = M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) \cdot (v)_{\mathcal{B}}$$

Il rango di  $F$  coincide con il rango della matrice  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$

$\implies$  tutte le matrici associate ad  $F$  hanno lo stesso rango.

**5.3 Retroimmagine di sottospazi**

$F : V \rightarrow W$  applicazione lineare, sia  $K \subseteq W$  un sottospazio

$$F^{-1}(K) = \{w \in K | w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\}$$

Si noti che  $F^{-1}(K) \neq \emptyset$ : sicuramente  $K$  contiene  $\underline{0}_W$  e sappiamo che  $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$ .

**Proposizione p.vii**  $F^{-1}(K)$  è sempre un sottospazio vettoriale di  $V$ ,  $\forall K \subseteq W$  sottospazio vettoriale

**dim. (p.vii)** Fisso  $v, w \in F^{-1}(K)$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  e dimostro che  $\lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} v \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(x) \text{ per qualche } x \in K, F(v) = x \\ w \in F^{-1}(K) \implies w = F^{-1}(y) \text{ per qualche } y \in K, F(w) = y \end{cases}$$

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) = \lambda x + \mu y \in K$$

poiché  $K$  è un sottospazio vettoriale

$$\implies F(\lambda v + \mu w) \in K$$

$$\implies \lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$$

$$\implies F^{-1}(K) \text{ sottospazio vettoriale di } W$$

□

$$\dim F(H) \leq \dim H,$$

$$\text{se } K \subseteq F(V) \implies \dim F^{-1}(K) \geq \dim K$$

### Esercizio

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$$

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1 + y_2 = 0\} \quad \dim K = 3$$

Si determini  $F^{-1}(K)$

**Soluzione** Voglio trovare le  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  tali che  $F(x_1, x_2, x_3) \in K$

$$F(x_1, x_2, x_3) \in K \iff (x_1 + x_2) + 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$  è l'equazione di  $F^{-1}(K)$  ( $\dim F^{-1}(K) = 2$ )

Trovo una base di  $F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = -3t - 2s \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\} \quad \text{è una base di } F^{-1}(K)$$

Altro approccio risolutivo:

Fisso una base di  $K$ , per esempio

$$\{w_1 = (1, -1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$F^{-1}(K) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

per qualche  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -\lambda_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda_2 \\ x_2 - x_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Si risolve il sistema in  $x_1, x_2, x_3, x_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 2 & 1 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{si riduce per righe}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -1 & 1 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 + 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 + 3\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Affinché il sistema sia risolubile si deve avere

$$\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0; \quad \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ -x_2 + x_3 = -3\lambda_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2\lambda_1 - \mu \\ x_2 = \mu + 3\lambda_1 \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

Da qui si deduce una base di  $F^{-1}(K)$

## 5.4 Nucleo di una funzione lineare

$V, W$  spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ ,  $F : V \rightarrow W$  lineare

$$\implies \{0_W\} \text{ è sottospazio vettoriale di } W$$

$$\implies F^{-1}(0_W) \text{ sottospazio vettoriale di } V$$

**Definizione**  $F^{-1}(\underline{0}_W)$  si dice nucleo di  $F$  (kernel di  $F$ ) e si indica con  $\ker(F)$

$$\ker F = \{v \in V \mid F(v) = \underline{0}_W\}$$

**Teorema V**  $F$  è iniettiva  $\iff \ker F = \underline{0}_V$

*dim.* (V)

"  $\implies$  " Supponiamo  $F$  iniettiva e sia  $v \in \ker F$

$$\implies F(v) = \underline{0}_W, \text{ ma poich\'e } F \text{ \'{e} lineare risulta } F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$$

$$\implies F(v) = F(\underline{0}_V) \text{ e poich\'e } F \text{ \'{e} iniettiva risulta } v = \underline{0}_V$$

$$\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$$

"  $\impliedby$  " Per ipotesi  $\ker F = \{\underline{0}_V\}$ , siano  $v_1, v_2 \in V$  tali che  $F(v_1) = F(v_2)$

$$\implies F(v_1) - F(v_2) = \underline{0}_W, \text{ poich\'e } F \text{ \'{e} lineare si ottiene } F(v_1 - v_2) = \underline{0}_W$$

$$\implies v_1 - v_2 \in \ker F$$

$$\implies v_1 - v_2 = \underline{0}_V$$

$$\implies v_1 = v_2, \text{ quindi } F \text{ \'{e} iniettiva.}$$

□

Supponiamo  $V, W$  di dimensione finita,  $\dim V = n$  e  $\dim W = m$ , siano  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  base di  $V$  e  $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$  base di  $W$ , e si consideri  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)$

$$\begin{aligned} \ker F &= \{v \in V \mid F(v) = \underline{0}_W\} = \\ &= \{v \in V \mid (F(v))_{\mathcal{C}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ &= \{v \in V \mid M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)(v)_{\mathcal{B}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} = \\ &= \{v \in V \mid (v)_{\mathcal{B}} \text{ appartiene al null-space di } M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)\} \end{aligned}$$

In particolare

$$\begin{aligned} \dim \ker F &= \\ &= \dim(\text{null-space di } M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F)) = \\ &= \dim V - \text{rank } M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(F) = \\ &= \dim V - \text{rank } F \end{aligned}$$

$$\dim V = \dim \ker F + \operatorname{rank} F$$

Questo sopra enunciato è il teorema di nullità più rango in termini di una funzione lineare.

**Esercizio** Sia  $F : V \rightarrow W$  lineare. Fisso  $w_0 \in W$ , e definisco

$$F^{-1}(w_0) = \{v \in V | F(v) = w_0\}$$

Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché  $F^{-1}(w_0)$  sia sottospazio.

**Soluzione**

**Esercizio** Sia  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  una base di uno spazio vettoriale  $V, 3\text{-dim}$ ,  $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$  una base di uno spazio vettoriale  $W, 4\text{-dim}$

Sia  $g : V \rightarrow W$  la funzione lineare determinata dalle relazioni

$$\begin{cases} g(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3 \\ g(v_2) = w_1 + w_2 + w_4 \\ g(v_3) = w_2 + w_3 - w_4 \end{cases}$$

Si calcolino  $g(V)$  e  $\ker g$

**Soluzione** Possiamo calcolare  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$

$$M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare  $\ker g$  devo calcolare il null-space di  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$ , cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco  $M^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g)$  per righe:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\xrightarrow[R_3 \rightarrow R_3 - R_1]{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi

$$\ker g = \{-\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathcal{L}(v_1 - v_2 - v_3)$$

$g(V)$  ha dimensione 2. Per esercizio si trovi una base di  $g(V)$

**Notazione** Spesso l'immagine di una funzione lineare  $F$  si indica con  $\text{Im}(F)$

**Teorema VI** Sia  $F : V \rightarrow W$  una funzione lineare tra spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ .

$F$  è iniettiva  $\iff F$  porta insiemi liberi di vettori di  $V$  in insiemi liberi di vettori di  $W$

*dim.* (VI)

"  $\implies$  " Supponiamo  $F$  iniettiva e sia  $\{v_1, \dots, v_l\} \subseteq V$  un insieme libero, e dimostriamo che  $\{F(v_1), \dots, F(v_l)\}$  è un insieme libero in  $W$

Considero  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{K}$  tali che

$$\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \dots + \lambda_l F(v_l) = \underline{0}_W$$

Poiché  $F$  è lineare risulta

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_l v_l) = \underline{0}_W$$



$\implies \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l \in \ker F$ , ma poiché  $F$  iniettiva  $\ker F = \{0_W\}$

$\implies \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = 0_W$ , ma  $\{v_1, \dots, v_l\}$  è libero

$\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$

$\implies \{F(v_1), \dots, F(v_l)\}$  è libero

" $\Leftarrow$ " Per ipotesi  $F$  porta insiemi liberi in insiemi liberi. Si fissa  $v \in V$ ,  $v \neq 0_V$ , quindi  $\{v\}$  è libero

$\implies \{F(v)\}$  è libero

$\implies F(v) \neq 0_W$

$\implies \ker F = \{0_V\}$

$\implies F$  è iniettiva

□

**Definizione** Una funzione lineare sia iniettiva che suriettiva si dice un isomorfismo

$F : V \rightarrow W$  è un isomorfismo  $\iff \text{Im}(F) = W$  e  $\ker F = \{0_V\}$

### Teorema VII

1. Sia  $F : V \rightarrow W$  lineare con  $V, W$  finitamente generati e tali che  $\dim V = \dim W$ .

$F$  è iniettiva  $\iff F$  è suriettiva

2.  $F : V \rightarrow V$  lineare con  $V$  finitamente generato è un isomorfismo  $\iff$  iniettiva  $\iff$  suriettiva

**Definizione** Un isomorfismo  $F : V \rightarrow V$  si dice un automorfismo di  $V$

### dim. (VII)

1.  $\dim V = \dim W$ ,  $\dim V = \dim \ker(F) + \dim \text{Im}(F)$

$\implies \dim W = \dim \ker(F) + \dim \text{Im}(F)$

- Se  $F$  è suriettiva

$\implies \dim W = \dim \text{Im}(F)$

$$\implies \dim \ker(F) = 0$$

$$\implies \ker F = \{0_V\}$$

$$\implies F \text{ è iniettiva}$$

- Se  $F$  è iniettiva

$$\implies \dim \ker F = 0$$

$$\implies \dim W = \dim \operatorname{Im} F$$

$$\implies W = \operatorname{Im} F$$

$$\implies F \text{ è suriettiva}$$

2. Segue dal punto 1.

□

**Esempio (5.6)**  $V$  spazio vettoriale su un campo  $\mathbb{K}$ ,  $\mathcal{B}$  base di  $V$

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{L_{\mathcal{B}}} \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

è un isomorfismo