Analisi Matematica 1 A

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

1 Insiemi

20 set 2021

Gli insiemi numerici a cui siamo abituati da sempre sono

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$
$$\mathbb{Q} = \{r = \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m, n \text{ primi tra loro}\}$$

Per l'insieme $\mathbb{Q}$ esiste una rappresentazione decimale:

$$r = n, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_j \cdots$$

con $n \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. "$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_j \cdots$" prende il nome di allineamento periodico (o finisce o si ripete all'infinito).

1.1 Corrispondenza biunivoca

Due insiemi *finiti* possono essere messi in corrispondenza biunivoca se e solo se hanno lo stesso numero di oggetti.

1.1.1 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$

$$\mathbb{N} = \{\ 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad \dots\quad \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ \dots\quad -2;\quad -1;\quad 0;\quad 1;\quad 2;\quad \dots\}$$

1.1.2 Corrispondenza $\mathbb{N} - \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

In rosso è segnato l'insieme $\mathbb{N}$, mentre in nero le coppie di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, che sono state ordinate dalle freccie rosse:

$$\begin{array}{ccccc}
00^{1} & 01^{2} & 02^{6} & 03^{7} & \dots \\
10^{3} & 11^{5} & 12^{8} & 13 & \dots \\
20^{4} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

In generale, se $K \leftrightarrow \mathbb{N}$ (dove $\leftrightarrow$ si legge "in corrispondenza biunivoca") $\implies$

$$K \leftrightarrow K \times K = K^2$$
$$K \leftrightarrow K \times K \times K = K^3$$
$$K \leftrightarrow K \times K \times \cdots \times K = K^n$$

Definizione Un insieme A è detto *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$

Gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ sono numerabili

1.2 Insieme $\mathbb{R}$

21 set 2021

Proposizione *p*.i Sia d la diagonale del quadrato di lato 1, ovvero $d^2 = 2$. $d \notin \mathbb{Q}$

***dim.* (*p*.i)** Assumiamo per assurdo che $d \in \mathbb{Q}$

$\implies \exists\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ primi tra loro tali che $d = \frac{m}{n}$

$\implies \frac{m^2}{n^2} = 2$

$\implies m^2 = 2n^2$

$\implies m^2$ è pari $\implies m$ è pari[1]

$\implies \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tale che $m = 2k$

$\implies m^2 = 4k^2$

$\implies 2n^2 = 4k^2$

$\implies n^2 = 2k_2$

$\implies n^2$ è pari $\implies n$ è pari;

si ha contradizione dell'ipotesi che m, n fossero primi tra di loro (in quanto entrambi pari hanno almeno un divisore in comune, ovvero 2). $\square$

Proposizione *p*.ii $m \in \mathbb{Z}$, m^2 pari $\implies m$ pari

[1] dimostrazione successiva

dim. **(p.ii)** Per assurdo, assumiamo m dispari

$\implies \exists\, k \in \mathbb{Z} | m = 2k + 1$

$\implies m^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\implies m^2 = \underbrace{4k(k+1)}_{pari} + 1$

$\implies m^2$ è dispari.

Si ha contraddizione, pertanto m è pari. $\square$

Dal momento che si è utilizzata nelle ultime dimostrazioni, è bene aprire una parentesi sulle *dimostrazioni per assurdo*

Schema dimostrativo per assurdo

Proposizione p.iii (schema I) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \underset{?}{\iff} \Big((p \land \neg q) \implies \neg p\Big)$$

dim. **(p.iii)**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \implies q$	$p \land \neg q$	$(p \land \neg q) \implies \neg p$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. $\square$

Proposizione p.iv (schema II) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \underset{?}{\iff} \Big((p \land \neg q) \implies q\Big)$$

dim. **(p.iv)**

p	q	$\neg q$	$p \land \neg q$	$p \implies q$	$(p \land \neg q) \implies q$
1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

Proposizione p.v (schema III) Siano p, q preposizioni

$$(p \implies q) \underset{?}{\iff} (\neg q \implies \neg p)$$

dim. **(p.v)**

p	q	$\neg q$	$\neg p$	$p \implies q$	$\neg q \implies \neg p$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Si noti come la quinta e l'ultima colonna siano uguali. □

Dalle dimostrazioni precedenti (p.i) si è reso evidente che necessitiamo di un insieme numerico che permetta di risolvere il problema di trovare la diagonale di un quadrato di lato 1: infatti, questo semplice caso ci dimostra che la retta euclidea non è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Q}$, ma che anzi la retta di $\mathbb{Q}$ ha "un buco"

Vogliamo trovare X tale che $\mathbb{Q} \subseteq X$, $X \leftrightarrow$ retta

Per trovare questo insieme è necessario introdurre le *relazioni* all'interno di un insieme

1.2.1 Relazioni

Sia A un insieme generico: diciamo $\mathcal{R}$ relazione su A tale che

$$\mathcal{R} \subseteq A \times A$$

Dati $a, b \in A$ si scrive $a\mathcal{R}b \iff (a, b) \in \mathcal{R}$. Diciamo che a è in corrispondenza con b se $a\mathcal{R}b$

Proprietà

- $\mathcal{R}$ si dice *simmetrica* se $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ si dice *riflessiva* se $\forall\, a \in A$, $a\mathcal{R}a$

- $\mathcal{R}$ si dice *transitiva* se dati $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$
- $\mathcal{R}$ si dice *antisimmetrica* se dati $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b$

Definizione Una relazione $\mathcal{R}$ su A è detta *di ordine* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*

Definizione Una relazione $\mathcal{R}$ su A è detta di *ordine totale* (o anche A è totalmente ordinato rispetto ad $\mathcal{R}$) se è una relazione d'ordine e vale

$$\forall\, a, b \in A \quad a\mathcal{R}b \vee b\mathcal{R}a$$

Esempi (1.1)

- A insieme delle parole del dizionario italiano, $\mathcal{R}$ ordine lessicografico

  $a, b \in A \quad a\mathcal{R}b$ se a viene prima o coincide con b nell'ordine alfabetico.

  $\mathcal{R}$ è riflessiva, transitiva e antisimmetrica, $\mathcal{R}$ è di ordine totale.

- Sia U insieme universo, $\mathscr{P}(U)$ l'insieme delle parti di U[2], $\mathcal{R}$ relazione di inclusione ($\subset$)

  $A, B \in \mathscr{P}(U)$, $A \subset B \iff \forall\, x \in A \implies x \in B$

  $\mathcal{R}$ è di ordine su $\mathscr{P}(U)$ ma non è di ordine totale

- Nell'insieme $\mathbb{Q}$ si consideri la relazione

  - minore stretto

    $a < b$ se a precede strettamente b nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea

  - minore uguale

    $a \leq b$ se a precede o coincide b nell'ordine da sinistra a destra della retta euclidea

  Si noti che

  $<$ non è di ordine (non soddisfa né la proprietà riflessiva né la proprietà antisimmetrica)

---

[2] Si è fatto così e non si è scelto V (insieme di tutti gli insiemi) per evitare i paradossi; in particolare, vedasi *paradosso di Russel*

$\leq$ è di ordine totale

La relazione $<$ non è di ordine in quanto

1. non soddisfa la proprietà riflessiva: ogni numero non è minore a se stesso
2. non soddisfa la proprietà di antisimmetria, in quanto non esiste nessuna coppia di numeri per cui valgano le relazioni $a < b$ e $b < a$

La relazione $\leq$ è di ordine totale, in quanto soddisfa tutte e tre le proprietà:

1. è riflessiva, in quanto ogni numero è minore o uguale a se stesso
2. è antisimmetrica, in quanto l'unico modo per cui valga la relazione $a \leq b$ e $b \leq a$ è che $a = b$
3. è transitiva, in quanto se $a \leq b$ è $b \leq c$ allora $a \leq c$
4. inoltre, per ogni coppia (non ordinata) di numeri reali, è sempre possibile stabilire almeno un ordine che permetta di soddisfare la relazione.

Definizione La relazione $\mathcal{R}$ su A è detta *relazione di equivalenza* se soddisfa le proprietà *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*. Si indica generalmente con $x \sim y$ invece di $x\mathcal{R}y$

Una classe di equivalenza di $u \in A$ (dove u è detto "rappresentante") è

$$[u] = \{v \in A : \, v \sim u\}$$

L'insieme quoziente di A rispetto a $\sim$:

$$A/\sim := \{[u] : u \in A\}$$

22 set 2021 **Definizione** Un insieme U si dice totalmente ordinato con la relazione d'ordine "$\preceq$"

Consideriamo $A \subseteq U$

1. A è *limitato superiormente* se

$$\exists\, k \in U \text{ t. c. } \forall a \in A, a \preceq k$$

$\implies$ k è detto *maggiorante* di A

2. A è *limitato inferiormente* se

$$\exists\, h \in U \text{ t.c. } \forall a \in A, h \preceq a$$

$\implies k$ è detto *minorante* di A

Possono esistere infiniti maggioranti e infiniti minoranti

Definizione M è il massimo di A se M è un maggiorante ($a \preceq M \forall\, a \in A$) e $M \in A$

Definizione m è il minimo di A se m è un minorante ($m \preceq a \forall\, a \in A$) e $m \in A$

Si dice che $M = \max A$ e $m = \min A$

Esempi (1.2) Per tutti gli esempi successivi si consideri $U = \mathbb{Q}$ e $\preceq = \leq$

1. $A = \{5, 7, 9, -4, 588\}$. $\min A = -4$, $\max A = 588$

   Con $A \subseteq Q$ e A contenente un numero finito di valori

   $\implies A$ ammette max e min

2. $B = \{2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, B è limitato inferiormente

   $\implies \min B = 1$, B non è limitato superiormente

3. $C = \{1 + 1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, C è limitato: $\forall\, x \in C$, $1 < x \leq 2$

   C ammette un massimo ($\max C = 2$), C non ammette un minimo

4. $D = \{1 - 1/n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

   $\forall\, x \in D$, $0 \leq x < 1$

   $\min D = 0$, D non ammette max

Definizione Sia U totalmente ordinato con relazione d'ordine $\preceq$, e sia $a \in U$.

- Diciamo *estremo superiore* di A ($\sup A$) il più piccolo dei maggioranti.
- Diciamo *estremo inferiore* di A ($\inf A$) il più grande dei minoranti

$\sup A = \min\{M \in U \,|\, \forall\, x \in A, x \preceq M\}, \quad \inf A = \max\{m \in U \,|\, \forall\, x \in A, m \preceq a\}$
Se esistono $\max A$ e/o $\min A$

$\implies \sup A = \max A$, $\inf A = \min A$

Esempio (1.3) Sia $C = \{1 + 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\max C = 2 = \sup C$

$\min C = \nexists$

$\implies$ se m è minorante di C

$\implies m \leq 1 \implies \inf C = 1.$

Sia $D = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

$\min D = 0 = \inf D$

$\max D = \nexists$

$\implies$ se M è maggiorante di D

$\implies M \geq 1 \implies \sup D = 1$

Esempio (1.4)

$$E = \{r \in \mathbb{Q}; r \geq 0, r^2 < 2\} \subseteq \mathbb{Q}$$

- E è limitato: $\forall\, r \in E, 0 \leq r < 2$
- $\inf E = \min E = 0$
- $\sup E$? Se $x^2 < 2$

  $\implies 0 \leq x < \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Un candidato $\sup E = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

  $\implies \sup E = \nexists$

L'obiettivo, quindi, è quello di costruire un insieme numerico X (con $\mathbb{Q} \subseteq X$) con operazioni $+$ e $\cdot$ tale che ogni sottoinsieme limitato ammetta estremo superiore e inferiore.

1.2.2 Definizione assiomatica dei numeri reali

$\mathcal{R}_1$. È definita un'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indicata con il segno "+" detta *addizione* o *somma*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa);
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a + b = b + a$ (commutativa);
- esiste un elemento in $\mathbb{R}$ indicato con 0 (zero) tale che $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = a$ (esistenza elemento neutro per +);

- $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $\exists *$ tale che $a + * = 0$, si indica $* = -a$, detto *inverso*, *opposto* di a (esistenza dell'inverso per $+$).

$\mathcal{R}_2$. È definita un'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, indicata con il segno "$\cdot$" detta *prodotto* o *moltiplicazione*, che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (associativa);
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$ (commutativa);
- esiste un elemento in $\mathbb{R}$ indicato con 1 (uno) tale che $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$ (esistenza elemento neutro per $+$);
- $\forall\, a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ $\exists *$ tale che $a \cdot * = 1$, si indica $* = a^{-1}$, detto *inverso*, *reciproco* di a (esistenza dell'inverso per $\cdot$);
- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (distrubutiva).

$\mathcal{R}_3$. È definita in $\mathbb{R}$ una relazione di ordine totale, indicata con "$\leq$", che soddisfa le seguenti proprietà:

- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$: $a \leq b \implies a + c \leq b + c$;
- $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c$: $a \cdot c \leq b \cdot c$.

$\mathcal{R}_4$. Sia $A \subset R$, $A \neq \emptyset$

Se A è limitato superiormente, allora A ammette un estremo superiore.

Se A è limitato inferiormente, allora A ammette un estremo inferiore

$\mathcal{R}_1$ garantisce che $(\mathbb{R}, +)$ è un gruppo

Queste proprietà possono essere definite anche per $\mathbb{Q}$, in cui valgono però solo le proprietà corrispondenti a $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$.

Se valgono le proprietà $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ per un qualche insieme $\mathbb{K}$, questo insieme prende il nome di *campo totalmente ordinato*.

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ sono campi totalmente ordinati, e $\mathbb{R}$ è un *campo ordinato completo*

1.3 Campi ordinati completi

Si è costruito un insieme $\mathbb{R}$ con $(+, \cdot, \geq)$, che soddisfa $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ e $\mathcal{R}_4$.

- Quanti insiemi con queste proprietà esistono?
- Che relazione c'è tra di loro?
- Come li rappresentiamo?

Definizione Dati B e B' campi ordinati (soddisfano $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$), si definisce *isomorfismo* tra B e B' una relazione

$$\begin{aligned} \varphi : B &\to B' \\ a &\mapsto a' = \varphi(a) \end{aligned}$$

che gode delle seguenti proprietà:

- φ è biunivoca
- $\forall a, b \in B$
  - *i.* $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
  - *ii.* $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
  - *iii.* $a \leq b \implies \varphi(a) \leq \varphi(b)$

Teorema I Siano B e B' campi ordinati $(+, \cdot, \leq, \mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$, con B completo e B' completo

$\implies$ $\exists$ un isomorfismo $\varphi : B \to B'$

Si dice che B è isomorfo a B' (e viceversa) poiché la relazione di isomorfismo è di equivalenza: $B \sim B'$

Non lo dimostreremo

Scelto un campo B a piacere possiamo costruire la classe di equivalenza

$$[B] = \{\text{campi ordinati completi}\}$$

$$\mathbb{R} = [B]$$

1.3.1 Rappresentazione

Modello decimale: $x \in \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$x = p, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$$

dove $p \in \mathbb{Z}$ e $[\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots]$ è un allineamento infinito di cifre tra $\{1, \cdots, 9\}$

Modello binario: $y \in \mathbb{R}$ si rappresenta come

$$y = p, \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n \cdots$$

dove $p \in \mathbb{Z}$ e $[\beta_1\beta_2 \cdots \beta_n \cdots]$ è un allineamento infinito di cifre tra $\{1, 2\}$

Non conta il modello che si usa; è necessario dimostrare che questi modelli soddisfino gli assiomi: fare riferimento al libro di testo

2 Limite successione

2 nov 2021

Data $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}, \mathbb{N} \to \mathbb{R}, a : n \to a_n$, $l \in \mathbb{R}*$, diciamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$

se $\forall V(l) \exists U(+\infty) n \in (\mathbb{N} intersezione D) \implies a_{n \in V(l)}$ Scriviamo $\forall V(l) \exists n_{segnato} \in N | \forall n > n_{segnato} a_n \in V(l)$

$l \in \mathbb{R}$, diciamo che $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è **convergente** a l se $\forall \varepsilon \exists n_{segnato} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{segnato} |a_n - l| < \varepsilon$

Se $l = \pm\infty$ a_n è divergente a $\pm\infty$, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \nexists$ allora $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è irregolare (o oscillante).

Esempio (2.1)

- $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n$ con $n \in \mathbb{N}$ è irregolare e limitata
- $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} = (-1)^n \cdot n$ con $n = 0, -1, 2, -3, 4, \cdots$ è irregolare e non limitata

Si dice di una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$

- $\forall \{a_n\}$ è crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente crescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$
- $\forall \{a_n\}$ è strettamente decrescente se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$

Una successione crescente o decrescente si dice monotona, se strettamente crescente o decrescente si dice strettamente monotona.

Un predicato $P(n)$ è verificato definitivamente se $\exists n_{segnato} \forall n \leq n_{segnato}$ $P(n)$ è vero

Valgono per $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ i seguenti teoremi

- Teorema di unicità del Limite
- Teorema di permanenza del segno

- Teorema di limitatezza:

  Teorema II

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \implies \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ è convergente e limitata}$$

- Teorema del confronto
- Teorema di esistenza del Limite per successioni definitivamente monotone

  Teorema III $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente crescente

  $\implies$ ammette limite in $\mathbb{R}*$

  Precisamente se

  - $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e limitata

    $\implies$ è convergente
  - $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ è definitivamente monotona e non limitata

    $\implies$ è divergente

Teorema IV Principio di Archimede $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a, b > 0$

$\implies \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$

dim. **(IV)** Utilizziamo la funzione parte intera:

$x \in \mathbb{R}$ si dice $[x] = \max_{n\in\mathbb{Z}}\{n \leq x\}$

Si verifica che $\forall x \in \mathbb{R}$, $[x] < x \leq [x] + 1$

Se $x \geq 0$, $[x] \geq 0$, $[x] \in \mathbb{R}$

Considerato $x = \frac{b}{a}$

$$\left[\frac{b}{a}\right] \leq \frac{b}{a} < \left[\frac{b}{a}\right] + 1$$

Posto $n_{segnato} = \left[\frac{b}{a}\right] + 1 \in \mathbb{N}$

$$\frac{b}{a} < n_{segnato} \implies n_{segnato}a > b$$

Osserviamo che posto $a = 1$ si ha che $\forall b \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > b$

2.1 Applicazione del Principio di Archimede

Verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$, vogliamo verificare che definitivamente $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{R}$ allora per il principio di archimede

$$\exists n_{segnato} \in \mathbb{N}, n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$$

Allora $\forall n \geq n_{segnato}$, $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\implies \frac{1}{n} \leq \varepsilon$ dunque $\frac{1}{n} < \varepsilon$ definitivamente

Dunque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Teorema V Disugualiganza di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1$$

si ha che

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

dim. **(V)** Dimostrazione per induzione

$$P(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx, x > -1$$

1. $P(0)$

$$1 + x > 0\, (1+x)^0 = 1 = 1 + n0$$

   P(0) è vera

2. Assumiamo vera P(n)

2.2 Limiti

Progressione geometrica

$$q \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} q^n =?, n \in \mathbb{N}$$

- $q > 1, q = 1+p$ con $p > 0$ $q^n = (1+p)^n \geq 1+np$ per la disuguaglianza di Bernoulli

  $1 + np \to +\infty$ per $n \to +\infty$

  Per confronto
  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

- $q = 1$ $q^n = 1$ $\forall n$
  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$$

- $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$

  $\implies |q| = \frac{1}{1+p}$ con $p > 0$

  $$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+p)^n} \leq \frac{1}{1+np}$$

  $1 + np \to +\infty$ per $n \to +\infty$

  $\implies \frac{1}{1+np} \to 0$

  Per confronto

  $$\lim_{n\to+\infty} |q^n| = 0 \implies \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

- $q = -1$

  q^n è irregolare e limitata

- $q < -1$
  $$q^n = (-1)^n |q|^n$$

  ma $|q| > 1$ quindi $|q|^n \to +\infty$ per $n \to +\infty$, e quindi q^n è irregolare non limitata

Riassumendo

$$q^n \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & q > 1 \\ \text{convergente a } 1 & q = 1 \\ \text{convergente a } 0 & |q| < 1 \\ \text{irregolare limitata} & q = -1 \\ \text{irregolare non limitata} & q < -1 \end{cases}$$

Esercizio Posto $q \in \mathbb{R}$ e

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} q^k$$

calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} b_n$$

Soluzione Da risolvere

Teorema VI Sia $f : D \to \mathbb{R}$: $x \to f(x)$, $x_0 \in D'$ e $x_0 \in \mathbb{R}*$, $l \in \mathbb{R}*$

Allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (A)

$\iff$

per ogni successione $a : \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a valori in $D \setminus \{x_0\}$

$a_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0 \implies f(a_n) \xrightarrow{n \to +\infty} l)$ (B)

dim. **(VI)**

(A) $\implies$ (B) Sappiamo che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ ovvero

$$\forall V(l) \exists U(x_0) | x \in U \wedge x \in V landx \neq x_0 \implies f(x) \in V(l)(1)$$

Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$ con $a_n \in D$ e $a_n \neq x_0$ ossia

$$\exists n_{segnato} \in \mathbb{N} \forall n \geq n_{segnato} a_n \in D \wedge a_n \neq x_0 \wedge a_n \in U(x_0)$$

allora $f(a_n) \in V(l)(2)$

Concludendo unendo (1) e (2)

$$\forall V(l) \exists n_{segnato} \in \mathbb{N} | \forall n > n_{segnato} f(a_n) \in V(l)$$

ossia

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = l$$

(B) $\implies$ (A) Procediamo per assurdo: verificando $\neg A \implies \neg B$

$\neg B$: esiste una successione $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ tale che $a_n \in D \setminus \{x_0\}$ per cui $a_n \overset{\rightarrow}{\longrightarrow}$

Consideriamo $\delta = 1$ $\exists x_1\, 0 < |x - x_0| < 1 \wedge f(x_1) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{2}$ $\exists x_2\, 0 < |x_2 - x_0| < 1 \wedge f(x_2) \notin V(l)$

Consideriamo $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists x_n\, 0 < |x_n - x_0| < 1 \wedge f(x_n) \notin V(l)$

Allora abbiamo costruito una successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tale che $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ e $f(x_n) \notin V(l)$

inoltre $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{segnato} | \forall n > n_{segnato} 0 < |x_n - x_0| < \varepsilon$ ($n_{segnato} > \frac{1}{\varepsilon}$)

ossia $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} x_0$

Abbiamo costruto una successione $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ e $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$

ossia abbiamo ottenuto che $\neg B$ è vera

2.3 Confronti tra infiniti

1. Dati $a > 1$ e $n \in \mathbb{N}$ osserviamo che

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{a^n} = \frac{\sqrt{n}}{(1+h)^n} \leq$$
$$\leq \frac{\sqrt{n}}{1+hn} \leq \frac{\sqrt{n}}{hn} =$$
$$= \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ allora per confronto

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{a^n} = 0$$

ovvero

$$\sqrt{n} = o(a^n)_{n \to +\infty}$$

2. Dato $a > 1$

$$0 \leq \frac{n}{a^n} = \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n}\right)^2$$

ma $\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{a})^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n = o(a^n)_{n\to+\infty}$$

3. Dato $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$0 \le \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n}\right)^k$$

ma $\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Dato che $a > 1$ e $\sqrt[k]{a} > 1$ concludiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

ovvero

$$n^k = o(a^n)_{n\to+\infty}$$

4.

3 Costante di Nepero

8 nov 2021

Consideriamo la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = 1^{+\infty}$$

è una forma indeterminata

Verifichiamo la convergenza:

1. a_n è crescente
2. a_n è superiormente limitata
3. applichiamo il teorema di esistenza del limite per le succesioni monotone

1. $a_1 = 2$, per $n \geq 2$ stimiamo il rapporto

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} =$$

$$= \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{1+n}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^n(\frac{n}{n-1})^{-1}} =$$

$$= \frac{(\frac{1+n}{n})^n(\frac{n-1}{n})^n}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(\frac{n^2-1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} =$$

$$= \frac{(1-\frac{1}{n^2})^n}{\frac{n-1}{n}} = **$$

Applico la disuguaglianza di Bernoulli

$$\frac{1}{n^2} < 1, -\frac{1}{n^2} > -1$$

$$\implies (1-\frac{1}{n^2}) \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

$\implies ** \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$

Quindi $\forall n \geq 2$, $a_n \geq a_{n-1}$, quindi a_n è crescente definitivamente

2. Dimostriamo ora che a_n è limitata superiormente.

Consideriamo $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ $(a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}\ )$

Verifichiamo che b_n è decrescente.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \cdots = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}$$

Stimiamo $(1+\frac{1}{n^2-1})^n$; per qualsiasi $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2-1} > 0$, e posso applicare Bernoulli:

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^n \geq 1 - \frac{n}{n^2-1} \geq 1 + \frac{n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n}$$

Ottengo quindi che

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n} \leq \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

Quindi $\forall n \geq 2$, $b_n < b_{n-1}$, quindi b_n decrescente definitivamente, ma $b_2 = 4 \implies b_n \leq 4$ definitivamente

Poiché $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ si ha a_n crescente e $a_n \leq 4$ definitivamente

3. Dunque, per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone limitate, otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sup\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \in \mathbb{R}$$

(esiste ed è un numero reale), e lo chiamiamo e, detta costante di Nepero $\square$

Quindi

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Osserviamo che

$$a_1 = 2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 4$$

Una prima stima di e risulta essere

$$2 \leq e \leq 4$$

Con opportuni algoritmi di approssimazione si stima che

$$e = 2,7182818284\ldots$$

Osservazione (3.1) $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (dimostrazione sul libro di testo)

Proposizione *p*.vi

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Lemma *l*.i Sia $x_n \xrightarrow{n\to+\infty} \pm\infty$ allora

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

dim. **(p.vi)** Applicando il teorema di relazione, a partire dal lemma (l.i) si ottiene

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

dim. **(l.i)**

1. $x_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$, ricordiamo $[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$
2. ... $\square$

4 Continuità

Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ $x_0 \in D'$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

Diciamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t. c. } 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

Il valore di l non è in alcun modo legato ad $f(x_0)$

Consideriamo $x_0 \in D$

Esempi (4.1)

- $f(x) = x^2$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$$
- $\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$
$$\lim_{x \to 0} \text{sgn}(x) = \nexists$$
$$\lim_{x \to 0^+} \text{sgn}(x) = 1 \neq \text{sgn}(0) = 0$$
$$\lim_{x \to 0^-} \text{sgn}(x) = -1 \neq \text{sgn}(0) = 0$$

-
- $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Definizione Consideriamo $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

con $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$

Diciamo che f è continua in $x_0 \in D$ se

a. x_0 punto isolato di D

b. $x_0 \in D'$ e vale una delle seguenti affermazioni tra di loro equivalenti:

i. $\forall V(f(x_0))\ \exists U(x_0)$ tale che $x \in U \cap D$

$\implies f(x) \in V$

ii. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|x - x_0| < \delta$

$\implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

iii. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

iv. data $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ a valori in D tale che $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$ allora

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Lemma *l*.ii Le quattro affermazioni precedenti sono equivalenti

dim. (*l*.ii)

i. $\iff$ *ii.* è ovvio

ii. $\implies$ *iii.* è ovvio

iii. $\iff$ *iv.* per il teorema di relazione

iii. $\implies$ *ii.* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ vale

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \land x \neq x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

se $x = x_0$ $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$

$\implies \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \ |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ossia f continua in x_0 $\square$

Diciamo che f è continua in $E \subseteq D$ se $\forall x_0 \in E$ f è continua in x_0

Esempi (4.2) In generale dati $f : D \to \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$, e $x_0 \in D$ se si ha

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da destra} \\ \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \text{ si dice che } f \text{ è continua da sinistra} \end{cases}$$

9 nov 2021

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \iff \lim_{h \to 0} f(x_0+h) - f(x_0) = 0$$

Esempio (4.3) Verifichiamo che $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\sin x$ è continua in x_0. Sappiamo che $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$.

Per $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) - \sin(x_0) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \Bigg(\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0 \Bigg) =$$

$$= \lim_{h \to 0} \Bigg(\sin x_0 (\cos h - 1) + \sin h \cos x_0 \Bigg) =$$

Dato che $\sin h \xrightarrow{h \to 0} 0$

$$= \sin x_0 \lim_{h \to 0} \Bigg(\cos h - 1 \Bigg) = 0$$

Allora $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$\implies$ $\sin x$ continua su $\mathbb{R}$. Allo stesso modo si verifica che $\cos x$ è continua su $\mathbb{R}$

Proprietà (Algebra delle funzioni continue) Date $f, g : D \to \mathbb{R}$, con $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, f, g continue in x_0, allora $\forall a \in \mathbb{R}$ si ha che $af + g$ è continua in x_0

Inoltre

- fg continua in x_0
- se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ continua in x_0
- $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ è continua in x_0

Teorema VII (Continuità della funzione composta) Sia $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $g : f(D) \to \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0 e g continua in $f(x_0)$

$\implies g \circ f$ è continua in x_0

dim. **(VII)**

$$\forall\, V(g(f(x_0)))\, \exists\, W(f(x_0)) \text{ tale che } \forall y \in W \cap f(D)$$

$\implies g(y) \in V$

$\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D \implies f(x) \in W$

Allora $\exists U(x_0)$ tale che $\forall x \in U \cap D$ $g(f(x)) \in V$

$\implies g \circ f$ è continua in x_0

Proprietà Date $f : D \to \mathbb{R}$, x_0 di accumulazione per D, $g : E \to \mathbb{R}$, con $f(D) \subseteq E$, assumiamo

i.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in E$$

ii. g continua in l, $l \in \mathbb{R}$

$\implies \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(l)$

Allora, date *i.* e *ii.*, si ha

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)$$

Si dimostra che sono continue nel loro dominio

- i polinomi
- le frazioni algebriche
- le funzioni esponenziali
- le funzioni logaritmiche
- le funzioni goniometriche e le loro inverse

Tutte queste funzioni sono dette "funzioni elementari"

Attenzione Data $f : D \to \mathbb{R}$, f invertibile su D, e f continua su D $\not\Rightarrow$ f^{-1} sia continua du $f(D)$

Esempio (4.4) La funzione è analiticamente definita come

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

Notiamo che $D = [0, 1] \cup (2, 3]$, e che f sia continua nel suo dominio.

$$f(D) = [0, 2]$$

Invertendola:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Quindi f^{-1} non è continua su $f(D)$, in particolare non è continua in $x_0 = 1$

Proprietà Data $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo,
se f è invertibile e continua su I
$\implies$ f^{-1} è continua su $J = f(I)$

4.1 Discontinuità

Consideriamo $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ e f continua in $D \setminus \{x_0\}$

Diciamo che:

1. x_0 è una *discontinuità eliminabile* se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \wedge l \neq f(x_0)$$

Esempio (4.5)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, vale

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \in \mathbb{R} \neq 0$$

Quindi $x_0 = 0$ è discontinuità eliminabile

2. x_0 è detto *salto* o *punto di salto* se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = n \in \mathbb{R}$$
$$l \neq n$$

Si definisce *ampiezza del salto* la grandezza

$$s = l - n$$

Esempio (4.6) Data

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 1$

Esempio (4.7) Data

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

si ha che $x_0 = 0$ è salto. $s = 2$

Notazione Nel Pagani Salsa i punti di salto sono detti discontinuità di prima specie

Notazione Nella terminologia a lezione, si intendono sia i salti che le discontinuità eliminabili come discontnuità di prima specie

3. x_0 è *discontinuità di seconda specie* se si verifica una delle seguenti condizioni

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\,\infty$$
$$\mp\,\infty$$
$$+\,\infty$$
$$-\,\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \nexists$$

4.2 Prolungamento per continuità di una funzione

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D'$.

Assumiamo che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

Diciamo *prolungamento per continuità* di f in x_0 la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ è continua in x_0

Ovviamente se $x_0 \in D$ e f continua in x_0 allora

$$\tilde{f}(x) = f(x)$$

Esempi (4.8)

- Consideriamo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

  f non è continua in 0, con una discontinuità elimiinabile

$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = x^2$$

Questo è il prolungamento per continuità di f

- Consideriamo
$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}$$
Si ha che $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. f è continua nel suo dominio.
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$
Allora
$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
è il prolungamento per continuità di f in 0; $\tilde{f}$ è continua su $\mathbb{R}$

- Consideriamo $f(x) = x^x$. Si ha che $D = \text{dom} f = (0; +\infty)$.

Osserivamo che
$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^l = 1$$
dove
$$l = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \cdots = 0$$
La funzione $\tilde{f}$
$$\tilde{f}(x) \begin{cases} x^x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$
è l'estensione per continuità di $f(x)$ in $x_0 = 0$. $\tilde{f}$ è continua su $[0; +\infty)$

5 Successioni

5.1 Un limite notevole

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\alpha = 0 \implies$ il limite vale 1

- $\alpha > 0$; ricordiamo che
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(1+\varepsilon)^n} = 0$$
Allora $\forall\, \varepsilon > 0$
$$-(1-\varepsilon)^n < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$
definitivamente

Ma è facile vedere
$$1 < n^\alpha < (1+\varepsilon)^n$$
definitivamente

$\implies\ 1 < \sqrt[n]{n^\alpha} < 1+\varepsilon$ definitivamente

Per $\varepsilon \to 0$ si ha che
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

- $\alpha < 0$
$$\sqrt[n]{n^\alpha} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^{-\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}}$$
Ma $\sqrt[n]{n^\beta} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$, con $\beta = -\alpha > 0$ Quindi
$$\frac{1}{\sqrt[n]{n^\beta}} = 1$$

Ne segue che $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$$

5.2 Sottosuccessioni

Si ha l'obiettivo di indagare più a fondo il comportamento delle successioni irregolari

Esempi (5.1)

1. Si consideri
$$a_n = (-1)^n = 1, -1, 1, -1$$
   - con gli indici pari
$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1, 1, 1 \qquad n \in \mathbb{N}$$
     si ha che $a_{2n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

- con gli indici dispari

$$a_{2n+} = (-1)^{2n+1} = -1, -1, .1 \qquad n \in \mathbb{N}$$

si ha che $a_{2n+1} \xrightarrow{n \to +\infty} -1$

Definizione Sia $a : \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ successione a valori reali. Consideriamo una successione di indici

$$\begin{aligned} k : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto k_n \end{aligned}$$

con k strettamente crescente, ovvero

$$k_n < k_{n+1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Diciamo *sottosuccessione di a* la successione

$$b_n = a_{k_n}$$

Concretamente per costruire $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ cancelliamo ad $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ una quantità infinita di termini lasciando gli altri invariati.

Ogni successione è sottosuccessione di se stessa, basta prendere $k_n = n$

Esercizio Dati

$$a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$
$$b_n = n\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

estrarre le possibili sottosuccessioni regolari

Soluzione DA FARE

15 nov 2021

Teorema VIII (legame limite successione e sottosuccessione) Consideriamo $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $l \in \mathbb{R}*$,

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l$$

$\iff$ ogni sottosuccessione di a_n ammette una sottosuccessione che tende a l

dim. **(VIII)**

" $\implies$ " La prima implicazione è vera, pertanto

$$\forall V(l)\, \exists \overline{n} \forall n \geq \overline{n} :\ a_n \in V(l)$$

Sia $n \to k_n$ crescente, e $b_n = a_{k_n}$, allora

$$\exists \overline{\overline{n}} \forall n \geq \overline{\overline{n}} :\ k_n \geq \overline{n}$$

allora $b_n = a_{k_n} \in V(l)$.

Dunque

$$\forall V(l)\, \exists \overline{\overline{n}} \in \mathbb{N} \text{ t. c. } \forall n > \overline{\overline{n}} :\ b_n \in V(l)$$

$\implies \lim_{n\to+\infty} b_n = l$

Abbiamo anche dimostrato che $a_n \xrightarrow{n\to\infty} l$ implica che qualsiasi sua sottosuccessione $b_{k_n} \to l$

" $\impliedby$ " Assumiamo vera la seconda implicazione, e procedendo per assurdo assumiamo vera la negazione della prima implicazione, ossia

$$\forall V(l) \forall n \in \mathbb{N} \exists n' \geq n | a_{n'} \notin V(l)$$

Consideriamo $n = 1$; $\exists n_1' > 1$ tale che $a_{n_1'} \notin V(l)$; $k_1 = n_1'$

Consideriamo $n = k_1 + 1$; $\exists n_2' \geq k_1 + 1 > k_1$ tale che $a_{n_2'} \notin V(l)$; $k_2 = n_2'$

Consideriamo $n = k_2 + 1$; $\exists n_3' \geq k_2 + 1 > k_1$ tale che $a_{n_3'} \notin V(l)$; $k_3 = n_3'$

...

Otteniamo una successione di indici

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto k_n$$

strettamente crescente, e una successione $b_n = a_{k_n}$ tale che

$$\exists V(l) | \forall n, b_n \notin V(l)$$

Allora b_n non può ammettere sottosuccessioni che tendono a l

$\implies$ abbiamo dimostrato la negazione della seconda implicazione, partendo dalla negazione della prima, ovvero la prima implicazione implica la seconda $\square$

5.3 Successioni a valori in $\mathbb{R}^n$

$$\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \quad a_k = (a_1^k, a_2^k, a_3^k, \cdots, a_n^k) \in \mathbb{R}^n$$

Esempio (5.2) Fissato $x \in \mathbb{R}^n$,

$$a_k = kx = (kx_1, kx_2, kx_3, \cdots, kx_n)$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è convergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq \overline{k} : \quad \underbrace{|a_k - l|}_{\left(\sum_{j=1}^{n}(a_j^k - l)^2\right)^{1/2}} \quad < \varepsilon$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori vettoriali è divergente a $l \in \mathbb{R}^n$ se

$$\forall\, M > 0\, \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq \overline{k} : \, |a_k| > M$$

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ si dice irregolare (oscillante) se non è né convergente né divergente

Osservazione (5.1) Per $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ vale il teorema di legame tra limiti di successione e sottosuccessioni

Valgono tutti i teoremi sui limiti che non coinvolgono l'ordinamento del codominio. (In particolare, non si definiscono le successioni monotone, e quindi non vale il teorema sui limiti delle successioni monotone)

Proposizione *p*.vii Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $y \in \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

Se y è di accumulazione per E

$\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E, con $x_k \neq y\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ e tale che

$$\lim_{k \to +\infty} x_k = y$$

dim. **(*p*.vii)**

caso 1. $y \in \mathbb{R}^n$: $y \in E'$, si ha

$$\forall\, r > 0 \exists x \in E, x \neq y, x \in B_r(y)$$

Consideriamo $k = 1, 2, 3, \dots$; possiamo determinare $x_k \in E$, con $x_k \neq y$ e $x_k \in B_{1/k}(y)$

Abbiamo ottenuto una successione $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \overline{k} \,|\, \forall\, k \geq \overline{k} : x_k \in B_{1/k}(y) \subset B_{1/\overline{k}}(y) \subset B_\varepsilon(y)$

Allora $x_k \xrightarrow{k \to +\infty} y$, $x_k \neq y$

caso 2. $y = \infty$, $y \in E'$

$$\forall\, M > 0 \exists x \in E : |x| > M$$

Per $k = 1, 2, 3, \dots$ consideriamo $x_k \in E$, con $|x_k| \geq k$ allora

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists \overline{k} \in \mathbb{N}\, \forall\, k \geq \overline{k} : |x_k| \geq k \geq \overline{k} > M$$

$\implies x_k \to \infty$ $\square$

Teorema IX (di Bolzano-Weierstrass per le successioni) Data $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$ (valori vettoriali), si ha che

se $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ è limitata

$\implies \exists \{a_{h_k}\}_{k=0}^{\infty}$ sottosuccessione tale che a_{h_k} è *convergente* a $l \in \mathbb{R}$

Ogni successione limitata ammette sempre una sottosuccessione convergente

dim. **(IX)** Indichiamo con $E = \{a_k\}$ = insieme dei valori della successione. E è limitato per ipotesi;

caso 1. assumiamo che E abbia un numero infinito di elementi.

$\implies$ per il teorema di Bolzano-Weiesrtrass sui sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}^n \implies E$ ammette almeno un punto di accumulazione $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$\implies \exists \{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E, tale che $b_k \xrightarrow{k \to +\infty} \lambda$

Ma $E \equiv$ i valori di $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$

dunque b_k è sottosuccessione di a_k.

Allora esiste una sottosuccessione di a_k convergente.

caso 2. assumiamo che E abbia un numero finito di elementi.

$\implies$ esisterà sicuramente un valore di E assunto infinite volte dalla successione $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Sia $a_k = l$ per infiniti indici.

Consideriamo $b_k = l, \forall\, k \in \mathbb{N}$, b_k è successioni a valori in E, ed essendo costante: $b_k \xrightarrow{k\to+\infty} l$, dunque b_n è convergente $\square$

Osservazione (5.2) Il teorema di Bolzano-Weierstrass per le successioni utilizza il teorema di Bolzano-Weierstrass per gli insiemi in $\mathbb{R}^n$. Dunque è necessaria la completezza di $\mathbb{R}$

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}^n$ ed è limitata $\implies \{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ ed è limitata $\implies \{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ ed è limitata $\implies \{a_n\}$ convergente

Se $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ed è limitata $\not\Rightarrow \{a_n\}$ convergente

5.3.1 Successioni e chiusura di $E \in \mathbb{R}^n$

Si ricorda che la chiusura è

$$\overline{E} = E \cup \delta E$$

Proprietà Data $E \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}$

$y \in \overline{E} \iff \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$

Dimostrazione. Procediamo spezzando le due implicazioni

"$\implies$" Ricordiamo che $\overline{E} = E \cup E'$

$y \in \overline{E} = E \cup E'$

- se $y \in E$, allora consideriamo $x_k \equiv y \in E$ si ha $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$
- se $y \in E'$ e $y \notin E$, per la proposizione (p.vii), $\exists\, \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$

"$\impliedby$" Assumiamo per assurdo che esista $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$ e $y \notin \overline{E}$, con $x_k \in E$.

$\overline{E}$ è un insieme chiuso, allora $(\overline{E})^C$ è aperto, ovvero $\exists\, r > 0$ tale che $B_r(y) \subset (\overline{E})^C$

Allora $B_r(y) \cap \overline{E} = \emptyset$, allora poiché $E \subset \overline{E}$

$$\exists\, r > 0 : \; B_r(y) \cap E = \emptyset$$

allora qualsiasi successione a valori in E non può convergere a y, dunque neghiamo $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$, si ha contraddizione, dunque

$$y \in \overline{E} \qquad \square$$

Teorema X Dato $E \in \mathbb{R}^n$

(A) E è chiuso

(B) $\iff$ se esiste $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in E tale che $x_k \xrightarrow{k\to+\infty} y$ allora $y \in E$

Equivalentemente:

(A) E è chiuso

(B) $\iff$ tutte le sue successioni convergenti hanno limite in E stesso

dim. **(X)**

"$\implies$" E è chiuso. Ricordiamo che E è chiuso $\iff$ $E = \overline{E}$

Allora per proprietà precedente

$$\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset E \wedge x_k \to y \implies y \in \overline{E} = E$$

"$\impliedby$" Ricordiamo che E chiuso $\iff$ $E' \subset E$. Dimostriamo che $E' \subset E$.

Consideriamo $y \in E'$, $\implies \exists \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset E$, con $x_k \neq y$, $x_k \to y$, allora per (B), $y \in E$

Dunque $E' \subset E$, ed E chiuso $\square$

Definizione Sia $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ a valori in $\mathbb{R}^n$. Questa successione è detta *successione di Cauchy* (o successione fondamentale) se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \overline{k} \in \mathbb{N} \mid \forall \, k, m \geq \overline{k} \, |a_k - a_m| < \varepsilon$$

O, equivalentemente

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \overline{k} \in \mathbb{N} \, \forall \, k > \overline{k} \, \forall \, p \in \mathbb{N} \, |a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$$

(Definitivamente $|a_k - a_{k+p}| < \varepsilon$)

Intuitivamente, da un certo punto in poi i valori della successione di Cauchy sono vicini a piacere

Studieremo il legame tra l'essere di Cauchy l'essere convergente.