# Geometria 1

Davide Peccioli

Anno accademico 2021-2022

Università degli studi di Torino

# Indice

20 set 2021

# 1 Matrici

Una matrice è una tabella rettangolare di numeri reali ($\in \mathbb{R}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

contiene $m \cdot n$ numeri
contiene $m$ righe
contiene $n$ colonne

$a_{ij}$ è l'elemento della matrice nella $i$-esima riga e nella $j$-esima colonna.
$a_{ij} \in \mathbb{R}$.

$A$ è una matrice $m \cdot n$. Se $m = n$ allora $A$ è una **matrice quadrata**.

Le matrici servono per:

- risolvere sistemi lineari
- studiare spazi vettoriali
- classificarre strutture geometrice (es. coniche)
- presentare funzioni (semplificandone lo studio)

$\mathbb{R}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$:

- $\mathbb{Q}^{m,n}$ è l'insieme delle matrici $m \cdot n$ le cui entrate sono elementi di $\mathbb{Q}$.

**Esempi (1.1)**

- $\mathbb{R}^{2,2}$: matrici $2 \cdot 2$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdots \in \mathbb{R}^{2,2}$$

- $\mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}$

- $\mathbb{R}^{m,1}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m,1} \qquad \text{anche } \textbf{vettori colonna}$$

- $\mathbb{R}^{1,n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,n} \qquad \text{anche } \textbf{vettori riga}$$

In $\mathbb{R}^{m,n}$ è sempre definita la **matrice nulla**, in cui tutte le entrate sono nulle. In $\mathbb{R}^{n,n}$ è sempre definita la **matrice identità**:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{1,1}$, $I = 1$
- In $\mathbb{R}^{2,2}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- In $\mathbb{R}^{3,3}$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La diagonale composta unicamente da 1 nella matrice identità è ila **diagonale principale** della matrice.

## 1.1 Somma

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

**Esempi (1.2)**

- In $\mathbb{R}^{1,1}$ la somma tra matrici coincide con la somma usuale di numeri reali.
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

**Proprietà della somma**

$(i)$ La somma è **associativa**:

$$\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

e posso scrivere $A + B + C$ senza ambiguità.

$(ii)$ La somma è **commutativa** (o abeliana):

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{m,n} \qquad A + B = B + A$$

$(iii)$ Se $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{m,n}$ è la matrice nulla ($B = \underline{0}$), allora $A + B = B + A = A$

$(iv)$ $A - A = \underline{0}$:

$$\forall A \in \mathbb{R}^{m,n} \exists - A \in \mathbb{R}^{m,n} \text{ t.c. } A - A = 0$$

**Definizione** Data $A \in \mathbb{R}^{m,n}$,

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si definisce $-A$,

$$\text{con } -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

**Notazione** In genere si scrive $A - B$ in luogo di $A + (-B)$, e si considera come una sottrazione di matrici

**Definizione** Due matrici $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ sono uguali se hanno le stesse entrate ($A = B$)

**Proprietà** $A = B \iff B - A = 0$

## 2 Gruppo

**Definizione** Siano $A, B$ due insiemi, si definisce **prodotto cartesiano**:

$$A \times B = \{(a, b) \text{ t. c. } a \in A, b \in B\}$$

in cui conta l'ordine: $(a, b) \neq_( b, a)$

$$A \times A = \{(a_1, a_2) \text{ t. c. } a_1, a_2 \in A\}$$

**Definizione** Sia $G$ un insieme. Una **operazione** in $G$ è una funzione

$$\begin{aligned} \star : G \times G &\to G \\ (g, h) &\mapsto g \star h \end{aligned}$$

**Proprietà**

($i$) L'operazione è **associativa** se $(g \star h) \star k = g \star (h \star k)$

($ii$) L'operazione ha un **elemento neutro** se

$$\exists\, e \in G \text{ t. c. } g \star e = e \star g = g,\ \forall g \in G$$

($iii$) Se $g \in G$ chiamiamo **inverso di** $g$ un elemento

$$k \in G \text{ t. c. } g \star k = k \star g = e$$

**Definizione** Un **gruppo** è un insieme $G$ con un'operazione $\star$ t. c.

1. $\star$ è associativa
2. esiste un elemento neutro
3. ogni elemento ha un inverso

**Esempi (2.1)** Sono gruppi

$$(\mathbb{R},+),\ (\mathbb{Z},+),\ (\mathbb{Q},+),$$

$$\cancel{(\mathbb{R},\cdot)}\text{: lo zero non ha un inverso,}$$

$$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot),\ (\mathbb{R}^{m,n},+)$$

**Definizione** Un gruppo $(G,\star)$ è **abeliano** se

$$g\star h=h\star g\ \forall\, g,h\in G$$

Nel caso di un gruppo abeliano l'operazione è indicata con $+$ e l'elemento neutro con 0.

$$(\mathbb{R}^{m,n},+)\text{ è un gruppo abeliano}$$

21 set 2021

# 3 Operazioni con le matrici

## 3.1 Moltiplicazione

Si può moltiplicare $\lambda\in\mathbb{R}$ con matrici $A\in\mathbb{R}^{m,n}$

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\cdots&\lambda a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda a_{m1}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$-1\cdot A=-A\qquad\text{coerente con la definizione di }-A$$

**Esempio (3.1)**

$$2\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&2&0\\-2&8&2\end{pmatrix}$$

**Osservazione (3.1)** $0\cdot A$ è la matrice nulla $\forall A\in\mathbb{R}^{m,n}$

**Proprietà del prodotto per scalari**

$(i)$ $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(ii)$ $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(iii)$ $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \qquad \forall \lambda\mu \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(iv)$ $1 \cdot A = A \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m,n}$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +)$ è un **gruppo abeliano** in cui è definita una moltiplicazione per scalari in cui valgono le proprietà *i*-*iv* (prototipo per gli spazi vettoriali).

## 3.2 Prodotto tra matrici

$$A, B \text{ t. c. } A \in \mathbb{R}^{m,n}, B \in \mathbb{R}^{n,k} \implies AB \in \mathbb{R}^{m,k}$$

Questo è definito come il prodotto **righe per colonne**. Il numero di colonne della prima matrice deve corrispondere con il numero di righe della seconda matrice.

**Definizione** Siano $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n,k}$ due matrici, siano $a_{ij}$ gli elementi di $A$ e $b_{rs}$ gli elementi di $B$ [Notazione: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{rs})$]

La matrice $A \cdot B$ è la matrice in $R^{m,k}$ il cui $ij$-esimo elemento è

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{ni} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \cdot b_{rj}$$

### 3.2.1 Prodotto tra matrici quadrate

Siano $A, B \in \mathbb{R}^{m,m}$, $AB \in \mathbb{R}^{m,m}$; in questo caso il prodotto tra matrici definisce una operazione in $\mathbb{R}^{m,m}$.

*i.* il prodotto è associativo: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m,m}$

*ii.* esiste un elemento neutro

**Proposizione *p*.i** Sia $I \in \mathbb{R}^{m,m}$ la matrice identità, $A \in \mathbb{R}^{m,m}$

$\implies A \cdot I = I \cdot A = A\ \forall A \in \mathbb{R}^{m,m}$

***dim.*** **(*p*.i)** Sia $(r_{ij})$ l'$ij$-esimo elemento della matrice $A \cdot I$ con $A = (a_{ij})$ e $I = (b_{ij})$

$$r_{ij} = \sum_{n=1}^{m} a_{in} \cdot b_{ni}$$

Si noti che $b_{kh} = 0 \ \forall k, h | k \neq h \implies$

$$r_{ij} = \sum_{n=1}^{m} a_{in} \cdot b_{ni} =$$

$$= \cancel{a_{i1} b_{1j}} + \cancel{\cdots} + a_{ij} b_{jj} + \cancel{\cdots} + \cancel{a_{in} b_{nj}} =$$

$$= a_{ij} \cdot b_{jj} = a_{ij} \cdot 1$$

$\implies r_{ij} = a_{ij}$ $\square$

In generale se $A \in \mathbb{R}^{m,m} \nexists$ un inverso per $A$, cioè non esiste $B \in \mathbb{R}^{m,m}$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = I$

**Esempio (3.2)**

- Se $A$ è la matrice nulla

  $\implies A \cdot B =$ matrice nulla $\neq I$
- Se $A$ ha una riga o una colonna nulla (ovvero fatta tutta di zeri)

  $\implies$ non è invertibile

5 ott 2021

**Teorema I** Sia $V$ uno spazio vettoriale su campo $\mathbb{K}$, e $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale:

1. se $V$ è finitamente generato $\implies W$ è finitamente generato;
2. se $V$ è finitamente generato $\implies \dim W \leq \dim V$
3. se $V$ è finitamente generato e $\dim W = \dim V \implies W = V$

***dim.*** **(I)**

1. Supponiamo che $V$ sia finitamente generato, e per assurdo che $W$ non lo sia.

   $V$ è finitamente generato $\implies V$ ha una base

   $$\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$$

   $W$ non è finitamente generato, e sia $w_1 \in W$, $w_1 \neq \underline{0}$, considero $\mathscr{L}(w_1) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1)$, altrimenti $W$ sarebbe generato da $w_1$. $\implies \exists \, w_2 \in W \wedge w_2 \notin \mathscr{L}(w_1)$.

Considero $\mathscr{L}(w_1, w_2) \subseteq W$, ma $W \neq \mathscr{L}(w_1, w_2)$, altrimenti $W$ sarebbe generato da $\{w_1, w_2\}$. $\implies$
$\implies \exists\, w_3 \in W \wedge w_3 \notin \mathscr{L}(w_1, w_2)$.

Itero il procedimento e trovo

$$\{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \subseteq W \text{ t. c. } w_{n+1} \notin \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) \implies \\ \implies \{w_1, \cdots, w_{n+1}\} \text{ è un insieme libero}$$

e contiene più elementi di una base $\mathscr{B}$. Assurdo per teorema precedente.

2. Supponiamo $V$ finitamente generato, e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. $W$ è finitamente generato (per 1.) $\implies \exists\, \mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di $W \implies \mathscr{B} \subseteq V$ è un sottoinsieme libero $\implies m \leq \dim V$ $\implies \dim W \leq \dim V$

3. Sia $W \subseteq V$ uno spazio vettoriale, con $V$ finitamente generato. $\dim W = \dim V$.

   $W$ ha una base $\mathscr{B}$ con $n$ vettori, dove $n = \dim V \implies \mathscr{B}$ è una base di $V$.

   Se $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_n\} \implies W = \mathscr{L}(w_1, \cdots, w_n) = V \implies W = V$ $\square$

**Osservazione (3.2)** Se $V$ è uno spazio vettoriale finitamente generato, e $\dim V = n \implies$ ogni insieme libero con $n$ elementi è una base. Infatti se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ è un insieme libero, se per assurdo esistesse $v \in V \wedge v \notin \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_n) \implies \{v_1, \cdots, v_n, v\} \subseteq V$ è un insieme libero di cardinalità $n + 1$ (ovvero con $n + 1$ elementi). Assurdo.

**Teorema II (del completamento di una base)** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di $V$ e sia $I = \{a_1, \cdots, a_l\} \subseteq V$ un sottoinsieme libero. Esiste sempre $\mathscr{B}'$ base di $V$ i cui primi $l$-elementi sono $a_1, \cdots, a_l$ e i restanti $n - l$-elementi sono elementi di $\mathscr{B}$.

$$\mathscr{B}' = \{a_1, \cdots, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}$$

***dim.*** **(II)** Applico il metodo degli scarti successivi

$l = n$ l'enunciato è banale ($I$ è già una base e non va completata);

$l < n \implies \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l) \subsetneq V$
$\implies \exists\, w_1 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_1 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l)$. Infatti, se tutti i generatori appartenenti a $\mathscr{B}$ fossero combinazioni lineari di $a_1, \cdot, a_l$, non sarebbero più tutti linearmente indipendenti. $\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1\}$ è libero.

Se $I_1$ è una base, la dimostrazione si conclude, altrimenti $\exists\, w_2 \in \mathscr{B}$ t. c. $w_2 \notin \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_l, w_2)$
$\implies I_1 = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, w_2\}$ è libero.

Se $I_2$ è una base la dimostrazione si conclude, altrimenti si itera fino a

$$I_{n-l} = \{a_1, \cdot, a_l, w_1, \cdots, w_{n-l}\} \text{ con } w_1, \cdots, w_{n-l} \in \mathscr{B}.$$

$I_{n-l}$ è libero con $n$ vettori $\implies I_{n-l}$ è una base $\square$

**Esempio (3.3)** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3}) = \{A \in \mathbb{R}^{3,3} \text{ t. c. } {}^tA = A\}$

Cerco una base. Sia $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$ generica:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \text{ con } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e sia $\mathscr{B} = \{E_1, \cdots, E_6\}$

Dato

$$I = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\left. A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$$

insieme libero, si trovino tre elementi $w_1, w_2, w_3 \in \mathscr{B}$ tali per cui $I \cup \{w_1, w_2, w_3\}$ sia una base di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{3,3})$.

$$A_1 = E_1 + 2E_2; A_2 = E_1 - E_4 + E_6; A_3 = E_2 - E_3$$

e rispetto alla base $\mathscr{B}$

$$A_1 = (1, 2, 0, 0, 0, 0), A_2 = (1, 0, 0, -1, 0, 1), A_3 = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$$
$$E_1 = (1, 0, \cdots, 0), E_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, E_6 = (0, \cdots, 0, 1)$$

Si studia l'appartenenza di $E_1 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3)$. Studio il sistema

$$E_1 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 = 1 \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$$\implies E_1 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1\}$$

Si studia l'appartenenza di $E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_2 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 1 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$\implies E_2 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies$ scarto $E_2$

Si studia l'appartenenza di $E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_3 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 1 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_4 = -\frac{1}{2} \\ \lambda_3 = -1 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \implies \text{Il sistema ha soluzione}$$

$\implies E_3 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies$ scarto $E_3$

Si studia l'appartenenza di $E_4 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1)$. Studio il sistema

$$E_4 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 1 = -\lambda_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = -1 \\ \dots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$\implies E_4 \notin \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1) \implies I_2 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4\}$

Si studia l'appartenenza di $E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4)$. Studio il sistema

$$E_5 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 E_1 + \lambda_5 E_4$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 \\ 0 = 2\lambda_1 + \lambda_3 \\ 0 = -\lambda_3 \\ 0 = -\lambda_2 + \lambda_5 \\ 1 = 0 \\ 0 = \lambda_2 \end{cases} \implies \begin{cases} 1 = 0 \\ \cdots \end{cases} \implies \text{Il sistema non ha soluzione}$$

$\implies E_5 \in \mathscr{L}(A_1, A_2, A_3, E_1, E_4) \implies I_3 = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

La soluzione è $\mathscr{B}' = \{A_1, A_2, A_3, E_1, E_4, E_5\}$

## 4 Operazioni tra sottospazi vettoriali

Sia $V$ uno spazio vettoriale su un un campo $\mathbb{K}$, e siano $W_1$ e $W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali.

Si consideri

$$W_1 \cap W_2 = \{x \mid x \in w_1 \wedge x \in w_2\}$$

**Proposizione *p*.ii** $W_1 \cap W_2$ è sempre sottospazio vettoriale

***dim.*** **(*p*.ii)** Siano $x, y \in W_1 \cap W_2$

$$\implies \left.\begin{cases} x, y \in W_1 \implies (x+y) \in W_1 \\ x, y \in W_2 \implies (x+y) \in W_2 \end{cases}\right\} \implies (x+y) \in W_1 \cap W_2$$

7 ott 2021

**Proposizione *p*.iii** Sia $V$ uno spazio vettoriale e $W, W_1$ e $W_2$ sottospazi di $V$.

Se $W$ contiene $W_1$ e $W$ contiene $W_2$ allora $W$ contiene $W_1 + W_2$ (cioè $W_1 + W_2$ è il più piccolo sottospazio di $V$ che contiene sia $W_1$ che $W_2$)

***dim.*** **(*p*.iii)** Sia $x + y \in W_1 + W_2$, $x \in W_1 \implies x \in W, y \in W_2 \implies y \in W \implies x + y \in W$, poiché $W$ è un sottospazio vettoriale. Quindi ogni $v \in W_1 + W_2$ è elemento di $W \implies W_1 + W_2 \subseteq W$.

La somma si generalizza a più sottospazi. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali, allora si definisce

$$W_1 + \cdots + W_l = \{x_1 + \cdots + x_l | x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l\} \subseteq V$$

è un sottospazio vettoriale ed è il più piccolo sottospazio che contiene tutti i $W_1, \cdots, W_l$ $\square$

**Esercizio** Si trovino somma e intersezione dei seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$

a. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = L(e_4)$

b. $W_1 = \{(x_1, x_2, 0, 0) | x : 1, x : 2 \in \mathbb{R}\}$,
$Z_2 = \{(0, x_2, 0, x_4) | x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

**Soluzione**

a. $W_1 + W_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$, $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

b. $W_1 + Z_2 = \{(x_1, x_2, 0, x_4) | x_1, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$,
$W_1 \cap Z_2 = \{(0, x_2, 0, 0) | x_2 \in \mathbb{R}\}$

**Proposizione *p*.iv** Sia $V$ spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni:

1. $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ (hanno intersezione banale)
2. ogni $v \in W_1 + W_2$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$

***dim.*** **(*p*.iv)**

1. $\implies$ 2. Suppongo $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ e considero $v \in W_1 + W_2$. Scrivo $v = x_1 + y_1$, $v = x_2 + y_2$ e dimostro che $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

$\underline{0} = v - v = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \implies x_1 - x_2 = y_2 - y_1$, $x_1 - x_2 \in W_1$ mentre $y_2 - y_1 \in W_2$. Per l'uguaglianza risulta che

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \in W_2 \implies x_1 - x_2 \in W_1 \cap W_2 \\ y_2 - y_1 \in W_1 \implies y_2 - y_1 \in W_1 \cap W_2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 - x_2 = \underline{0} \implies x_1 = x_2 \\ y_2 - y_1 = \underline{0} \implies y_1 = y_2 \end{cases}$$

2. $\implies$ 1. Suppongo che ogni $v \in W_1 + W_2$ si scriva in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W_1$ e $y \in W_2$ e dimostro che $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$

Sia $v \in W_1 \cap W_2$. Sia $v \in W_1 + W_2$, $v = x + y = x + v + y - v$, con $x + v \in W_1$, $y - v \in W_2$. Quindi se $v \neq \underline{0}$, le due scritture $v = x + y$, $v = (x + v) + (y - v)$ sono diverse e ciò non è possibile per ipotesi

$\square$

**Notazione** Se $W_1 \cap W_2 = \{\underline{0}\}$ si scrive $W_1 \oplus W_2$ invece che $W_1 + W_2$ $\oplus$ si legge "somma diretta"

**Esempio (4.1)** $\mathbb{K}^{n,n} = S(\mathbb{K}^{n,n}) \oplus A(\mathbb{K}^{n,n})$

**Esempio (4.2)** $R^2 = \mathscr{L}(e_1) \oplus \mathscr{L}(e_2)$

**Proposizione *p*.v** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Siano $W_1, \cdots, W_l \subseteq V$ sottospazi vettoriali. Sono fatti equivalenti le seguenti proposizioni

1. $W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_l) = \{\underline{0}\}$ $\forall i = 1, \cdots, l$
2. Ogni $v \in W_1 + \cdots + W_l$ si scrive in modo unico come $v = x_1 + \cdots + x_l$ con $x_1 \in W_1, \cdots, x_l \in W_l$

Se vale 1. si scrive $W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_l$

**Esempio (4.3)** Considero $V$ spazio vettoriale di dimensione finita e $\mathscr{B} = \{v1, \cdots, v_n\} \implies V = \mathscr{L}(v_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{L}(v_l)$

Sia $V$ spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, finitamente generato. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale, sia $\mathscr{B} = \{w_1, \cdots, w_l\}$ una base di $W$. Possiamo completare $\mathscr{B}$ con una base dello spazio $\mathscr{B}' = \{w_1, \cdots, w_l, v_1, \cdots, v_m\}$. Sia

$$Z = \mathscr{L}(v_1, \cdots, v_m) \subseteq V$$

un sottospazio vettoriale, e per costruzione $V = W \oplus Z$

**Osservazione (4.1)** Sia $V$ spazio vettoriale di dimensione finita con $V = W \oplus Z$ Siano $\mathscr{B} = \{w1, \cdots, w_l\}$ una base di $W$ e $C = \{z_1, \cdots, z_m\}$ una base di $Z$. Ogni elemento di $V$ si scrive in modo unico come $v = x + y$ con $x \in W$ e $y \in Z$ $\mathscr{B}$ base di $W$

$\implies$ $x$ si scrive in modo unico come $x = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l$

$\mathscr{C}$ base di $Z$ $\implies$ $y$ si scrive in modo unico come

$$y = \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies v$ si scrive in modo unico come

$$v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_l w_l + \mu_1 z_1 + \cdots + \mu_n z_n$$

$\implies B \cup C = \{w1, \cdots, w_l, z_1, \cdots, z_l\}$ è una base di $V$

$\implies \dim V = \dim W + \dim Z$

**Teorema III** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ finitamente generato. Siano $W_1, W_2 \subseteq V$ due sottospazi vettoriali t. c. $V = W_1 + W_2$. Allora

$$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Questa è la **Formula di Grassmann**.

***dim.*** **(III)** Chiamo

$$\dim V = n,\ \dim W_1 = l,\ \dim W_2 = p,\ \dim(W_1 \cap W_2) = r$$

In particolare $l, p \leq n$, $r \leq l, p$

1. $r = l \implies W_1 \cap W_2 = W_1 \implies W_1 \subseteq W_2 \implies W_1 + W_2 = W_2 = V$
2. $r = p \implies W_1 \cap W_2 = W_2 \implies W_2 \subseteq W_1 \implies W_1 + W_1 = W_1 = V$
3. si assume $r \leq l, p$ e sia

   $$\mathscr{B} = \{a_1, \cdots, a_r\} \text{ base di } W_1 \cap W_2$$

   Completo $\mathscr{B}$ con una base $\mathscr{C}$ di $W_1$,

   $$\mathscr{C} = \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l\}$$

   e completo $\mathscr{B}$ con una base $\mathscr{D}$ di $W_2$,

   $$\mathscr{D} = \{a_1, \cdots, a_r, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

   Si verifica che l'insieme

   $$\{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

   è una base di $V$. In questo modo si ottiene

   $$\dim V = l + (p - r)$$

   cioè la tesi.

Ovviamente risulta

$$\mathscr{L}(a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p) = V$$

in quanto contiene i generatori sia di $W_1$ che di $W_2$, e quindi anche della loro somma. Verifichiamo che l'insieme

$$\{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$$

sia libero. Supponiamo

$$\begin{aligned} &\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu r + 1 + b_{r+1} + \cdots + \\ &\qquad + \cdots + \mu_l b_l + \gamma_{r+1} c_{r+1} + \cdots + \gamma_p c_p = \underline{0} ** \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l) = (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \cdots - \gamma_p c_p)$$

Sia

$$\begin{aligned} c &= (-\gamma_{r+1} c_{r+1} - \cdots - \gamma_p c_p) = \\ &\qquad = (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l) \end{aligned}$$

sicuramente $c \in W_2$

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l \in W_1$$

$\implies c \in W_1 \cap W_2 = \mathscr{L}(a_1, \cdots, a_r)$

$\implies c = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r$, vado a sostituire in **

$$(\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_r a_r) + (\gamma_{r+1} c_{r+1} + \cdots + \gamma_p c_p) = \underline{0}$$

$$\implies \begin{cases} \beta_1 = \cdots = \beta_r = 0 \\ \gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0 \end{cases}$$

Ho ottenuto

$$\gamma_{r+1} = \cdots = \gamma_p = 0$$
$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r + \mu_{r+1} b_{r+1} + \cdots + \mu_l b_l = \underline{0}$$

Poiché l'insieme

$$\mathscr{C} = \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l\}$$

è libero

$\implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = \mu_{r+1} = \cdots = \mu_l = 0$

$\implies \{a_1, \cdots, a_r, b_{r+1}, \cdots, b_l, c_{r+1}, \cdots, c_p\}$ è libero

$\square$

2 nov 2021

# 5 Funzioni lineari

$V$ e $W$ spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e una funzione $F : V \to W$, $F$ è lineare se verifica $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$

**Teorema IV (di esistenza e unicità)** Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con $V$ finitamente generato.

Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di $V$ e $a_1, \cdots, a_n \in W$.

Allora esiste un'unica funzione lineare $F : V \to W$ tale che $F(v_i) = a_i$ $\forall i = 1, \cdots, n$

***dim.*** **(IV)**

Esistenza Sia $v \in V$, $v$ si scrive in modo unico come $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$ per $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

Si definisce

$$F(v) = F(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) := x_1 a_1 \cdots + x_n a_n$$

$F$ definisce una funzione $V \to W$ tale che $F(v_i) = a_i$ per $i = 1, \cdots, n$. Verifico che $F$ è lineare.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$ e dimostro che $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$

Scrivo

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

e

$$w = \sum_{r=1}^{n} y_r v_r$$

$$\lambda v + \mu w = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k) v_k$$

Quindi per come è definita $F$ risulta che

$$
\begin{aligned}
F(\lambda v + \mu w) = F\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k \mu y_k\right)v_k) = \\
= \sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k \mu y_k)a_k = \\
\lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k a_k = \\
= \lambda F(v) + \mu F(w)
\end{aligned}
$$

$\implies F$ è lineare

Unicità Supponiamo di avere due funzioni lineari $F, G : V \to W$ tali che $F(v_i) = G(v_i) = a_i \ \forall i = 1, \cdots, n$ e dimostro che $F = G$, cioè che $F(v) = G(v) \ \forall v \in V$ Possiamo scrivere $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ quindi

$$
\begin{aligned}
F(v) = F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k
\end{aligned}
$$

Inoltre

$$
\begin{aligned}
G(v) = G\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k G(v_k) \\
= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k
\end{aligned}
$$

$\implies F(v) = G(v) \ \forall v \in V$

$\implies F = V$ $\square$

## 5.1 Matrice associata ad una applicazione lineare

Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con $V, W$ entrambi finitamente generati. Supponiamo $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

Considero $F : V \to W$ lineare, e fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di $V$ e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base di $W$.

$$
\begin{gathered}
F(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k1}w_k \\
F(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k2}w_k \\
\cdots \\
F(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{kn}w_k
\end{gathered}
$$

Tutto questo determina $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, $A$ è determinata da $F, \mathscr{B}, \mathscr{C}$

Sia $v \in V$ un vettore generico $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

$$
\begin{aligned}
F(v) = F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k) = \\
= x_1F(v_1) + x_2F(v_2) + \cdots + x_nF(v_n) = \\
= x_1\sum_{k=1}^{m} a_{k1}w_k + x_2\sum_{k=1}^{m} a_{k2}w_k + \cdots + x_n\sum_{k=1}^{m} a_{kn}w_k = \\
= \sum_{k=1}^{m}(a_{k1}x_1)w_k + \sum_{k=1}^{m}(a_{k2}x_2)w_k + \cdots + \sum_{k=1}^{m}(a_{kn}x_n)w_k = \\
= \left(\sum_{r=1}^{n} a_{1r}x_r\right)w_1 + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{2r}x_r\right)w_2 + \cdots + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{mr}x_r\right)w_m
\end{aligned}
$$

Se $(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\implies \big(F(v)\big) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\implies \big(F(v)\big) = A(v)_{\mathscr{B}}$$

**Notazione** Si indica $A$ con $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$, matrice che rappresenta $F$ rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$

**Esempio (5.1)** Sia $I : V \to V$ funzione identità, e calcoliamo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I)$ dove $\mathscr{B}$ è una base fissata di $V$. Se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ risulta $I(v_i) = v_i$ $\forall i = 1, \cdots, n$

$\implies M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I) = Id$ matrice identità

**Esempio (5.2)** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3)$$

Sia $\mathscr{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, voglio trovare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

Possiamo scrivere $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Sono noti $F(1,0,0) = (3,0)$, $F(0,1,0) = (-1,2)$ e $F(0,0,1) = (0,3)$, quindi

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In generale data $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ espressa in termini della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ la matrice che rappresenta $F$ è la matrice le cui colonne sono $F(e_1), \cdots, F(e_n)$

**Esempio (5.3)** Data $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Esempio (5.4)** $F : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$: $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ e deterrmino la matrice che rappresenta $F$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^{n,n}$, $\mathscr{B} = E_{i_1 j}$ e alla base canonica di $\mathbb{K}$ $\mathscr{C} = \{1\}$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(E_{11}) & \mathrm{tr}(E_{12}) & \cdots & \mathrm{tr}(E_{1n}) & \mathrm{tr}(E_{21}) & \mathrm{tr}(E_{22}) & \cdots & \mathrm{tr}(E_{nn}) \end{pmatrix}$$

Per esempio se $n = 2$ risulta $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Esempio (5.5)** Sia $a \in V_3$ e $F : V_3 \to V_3$: $x \mapsto a \wedge x$ funzione lineare.

Sia $\mathscr{B} = \{i, j, k\}$ base ortonormale positiva di $V_3$ e calcolo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, scriviamo $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$$\begin{aligned} F(i) = a \wedge i = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge i = -a_2 k + a_3 j \\ F(j) = a \wedge j = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge j = a_1 k - a_3 j \\ F(k) = a \wedge k = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge k = -a_1 j + a_2 i \end{aligned}$$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$, $F(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}$

Sia $\mathscr{B}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$

Si trovi $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

**Soluzione** Da risolvere

## 5.2 Immagine di sottospazi vettoriali

Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $F : V \to W$ lineare, sia $H \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $F(H)$ immagine di $H$ tramite $F$, tale che $F(H) \subseteq W$, $F(H) = \{F(h) | h \in H\}$

**Proposizione *p.vi*** $F(H)$ è sempre un sottospazio vettoriale di $W$

***dim.*** **(*p*.vi)** Siano $w_1, w_2 \in F(H)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $\lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$$\begin{aligned} w_1 \in F(H) &\implies w_1 = F(h_1) \text{per qualche } h_1 \in H \\ w_2 \in F(H) &\implies w_2 = F(h_2) \text{per qualche } h_2 \in H \end{aligned}$$

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda F(h_1) + \mu F(h_2) = F(\lambda h_1 + \mu h_2)$$

Poiché $H$ è un sottospazio vettoriale, risulta che, dato $h = \lambda h_1 + \mu h_2$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 = F(h)$ per qualche $h \in H$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$\implies F(H)$ sottospazio vettoriale di $V$ $\square$

Supponiamo $\dim H = n$, $\dim F(H) =?$

Sia $\mathscr{B} = \{h_1, \cdots, h_n\}$ base di $H$, sappiamo che $\{F(h_1), \cdots, F(h_n)\}$ è un insieme di generatori di $F(H)$

$\implies \dim F(H) \leq n$

**Esercizio** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

Sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio $H = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\}$, $\dim H = 2$

Si trovi una base di $F(H)$

**Soluzione**

1. Trovo una base di $H$, per esempio $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. Calcolo le immagini dei vettori della base

$$\begin{aligned} F(1, -1, 0) &= (2, 0, 2, -1) \\ F(0, 0, 1) &= (-1, 1, 0, -1) \end{aligned}$$

   Questi due vettori sono linearmente indipendenti, allora formano una base di $F(H)$

**Definizione** Sia $F : V \to W$ lineare, $F(V)$ (che è un sottospazio vettoriale di $W$) si dice l'immagine di $F$

**Osservazione (5.1)** $F$ è suriettiva $\iff F(V) = W \iff \dim F(V) = \dim W$ (criterio per testare la suriettività di una funzione lineare)

**Esercizio** Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$

1. Dire se $F$ è suriettiva e in caso contrario trovare $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $w \notin F(\mathbb{R}^3)$
2. Sia $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$, $H = \mathscr{L}(a, b)$. Dire se $(4, 3, -2) \in F(H)$

**Soluzione**

1. $F(\mathbb{R}^3) = \mathscr{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3))$

$$
\begin{aligned}
F(e_1) &= (2, 1, 1) \\
F(e_2) &= (2, 0, 3) \\
F(e_3) &= (0, 1, -2)
\end{aligned}
$$

   Si osserva che $F(e_1) = F(e_2) + F(e_3)$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti

   Ma $F(e_2)$ e $F(e_3)$ sono linearmente indipendenti

   $\implies F(\mathbb{R}^3)$ ha dimensioone 2, ed i vettori $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$ ne formano una base. $F$ non è suriettiva

   $w \in \mathbb{R}^3$, $w \notin F(\mathbb{R}^3) \iff w$ non è combinaziione lineare di $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$.

   Per esempio $w = (1, 0, 0)$ va bene, poiché non esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(1, 0, 0) = \lambda(2, 0, 3) + \mu(0, 1, -2)$

2. $F(H) = \mathscr{L}(F(a), F(b))$. $F(a) = (2, 2, -1)$, $F(b) = (2, 1, 1)$. $F(a), F(b)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim F = 2$

   $(4, 3, -2) \in F(H) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(4, -3, -2) = (2\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, -\lambda + \mu)$

   Il sistema non ha soluzione, pertanto $(4, 3, -2) \notin F(H)$

4 nov 2021

**Definizione** Data $F : V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali su uno stesso campo, il rango di F ($\operatorname{rank} F$) è la dimensione di $F(V)$

Se $\mathscr{B}$ è una base di $V$ e $\mathscr{C}$ è una base di $W$, ad $F$ si associa la matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ che rappresenta $F$ rispetto alle basi fissate.

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}$$

Il rango di F coincide con il rango della matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

$\implies$ tutte le matrici associate ad $F$ hanno lo stesso rango.

## 5.3 Retroimmagine di sottospazi

$F : V \to W$ applicazione lineare, sia $K \subseteq W$ un sottospazio

$$F^{-1}(K) = \{w \in K | w = F(v) \text{ per qualche } v \in V\}$$

Si noti che $F^{-1}(K) \neq \emptyset$: sicuramente $K$ contiene $\underline{0}_W$ e sappiamo che $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$.

**Proposizione *p*.vii** $F^{-1}(K)$ è sempre un sottospazio vettoriale di $V$, $\forall K \subseteq W$ sottospazio vettoriale

***dim.*** **(*p*.vii)** Fisso $v, w \in F^{-1}(K)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostro che $\lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} v \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(x) \text{ per qualche } x \in K, F(v) = x \\ w \in F^{-1}(K) \implies v = F^{-1}(y) \text{ per qualche } y \in K, F(w) = y \end{cases}$$

$$F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) = \lambda x + \mu y \in K$$

poiché $K$ è un sottospazio vettoriale

$\implies F(\lambda v + \mu w) \in K$

$\implies \lambda v + \mu w \in F^{-1}(K)$

$\implies F^{-1}(K)$ sottospazio vettoriale di $W$ $\square$

$$\dim F(H) \leq \dim H,$$
$$\text{se } K \subseteq F(V) \implies \dim F^{-1}(K) \geq \dim K$$

**Esercizio**

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_3)$$

$$K = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 | y_1 + y_2 = 0\} \ \dim K = 3$$

Si determini $F^{-1}(K)$

**Soluzione** Voglio trovare le $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tali che $F(x_1, x_2, x_3) \in K$

$$F(x_1, x_2, x_3) \in K \iff (x_1 + x_2) + 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ è l'equazione di $F^{-1}(K)$ $(\dim F^{-1}(K) = 2)$

Trovo una base di $F^{-1}(K)$

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = -3t - 2s \end{cases}$$

$$\mathscr{B} = \{(1, 0, -3), (0, 1, -2)\} \quad \text{è una base di } F^{-1}(K)$$

Altro approccio risolutivo:

Fisso una base di $K$, per esempio

$$\{w_1 = (1, -1, 0, 0), w_2 = (0, 0, 1, 0), w_3 = (0, 0, 0, 1)\}$$

$$F^{-1}(K) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | F(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -\lambda_1 \\ x_1 + x_3 = \lambda_2 \\ x_2 - x_3 = \lambda_3 \end{cases}$$

Si risolve il sistema in $x_1, x_2, x_3, x_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 2 & 1 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{si riduce per righe}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -1 & 1 & -3\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 + 2\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 + 3\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Affinché il sistema sia risolubile si deve avere

$$\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0; \qquad \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda_1 \\ -x_2 + x_3 = -3\lambda_1 \\ \lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -2\lambda_1 - \mu \\ x_2 = \mu + 3\lambda_1 \\ x_2)\mu \end{cases}$$

Da qui si deduce una base di $F^{-1}(K)$

## 5.4 Nucleo di una funzione lineare

$V, W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $F : V \to W$ lineare

$\implies \{\underline{0}_W\}$ è sottospazio vettoriale di $W$

$\implies F^{-1}(\underline{0}_W)$ sottospazio vettoriale di $V$

**Definizione** $F^{-1}(\underline{0}_W)$ si dice nucleo di $F$ (kernel di $F$) e si indica con $\ker(F)$

$$\ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\}$$

**Teorema V** $F$ è iniettiva $\iff \ker F = \underline{0}_V$

***dim.*** **(V)**

"$\implies$" Supponiamo $F$ iniettiva e sia $v \in \ker F$

$\implies F(v) = \underline{0}_W$, ma poiché $F$ è lineare risulta $F(\underline{0}_V) = \underline{0}_W$

$\implies F(v) = F(\underline{0}_V)$ e poiché $F$ è iniettiva risulta $v = \underline{0}_W$

$\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$

"$\impliedby$" Per ipotesi $\ker F = \{\underline{0}_V\}$, siano $v_1, v_2 \in V$ tali che $F(v_1) = F(v_2)$

$\implies F(v_1) - F(v_2) = \underline{0}_W$, poiché $F$ è lineare si ottiene $F(v_1 - v_2) = \underline{0}_W$

$\implies v_1 - v_2 \in \ker F$

$\implies v_1 - v_2 = \underline{0}_V$

$\implies v_1 = v_2$, quindi $F$ è iniettiva. $\square$

Supponiamo $V, W$ di dimensione finita, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, siano $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di $V$ e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base di $W$, e si consideri $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}(F)}$

$$\ker F = \{v \in V | F(v) = \underline{0}_W\} =$$
$$= \{v \in V | (F(v))_{\mathscr{C}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} =$$
$$= \{v \in V | M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)(v)_{\mathscr{B}} = \underline{0}_{\mathbb{K}^m}\} =$$
$$= \{v \in V | (v)_{\mathscr{B}} \text{ appartiene al null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\}$$

In particolare

$$\dim \ker F =$$
$$= \dim(\text{null-space di } M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)) =$$
$$= \dim V - \operatorname{rank} M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) =$$
$$= \dim V - \operatorname{rank} F$$

$$\dim V = \dim \ker F + \operatorname{rank} F$$

Questo sopra enunciato è il teorema di nullità più rango in termini di una funzione lineare.

**Esercizio** Sia $F : V \to W$ lineare. Fisso $w_0 \in W$, e definisco

$$F^{-1}(w_0) = \{v \in V | F(v) = w_0\}$$

Si diano condizioni necessarie e sufficienti affinché $F^{-1}(w_0)$ sia sottospazio.

**Soluzione**

**Esercizio** Sia $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $V, 3-$dim, $\mathscr{C} = \{w_1, w_2, w_3, w_3\}$ una base di uno spazio vettoriale $W, 4 -$ dim

Sia $g : V \to W$ la funzione lineare determinata dalle relazioni

$$\begin{cases} g(v_1) = w_1 + 2w_2 + w_3 \\ g(v_2) = w_1 + w_2 + w_4 \\ g(v_3) = w_2 + w_3 - w_4 \end{cases}$$

Si calcolino $g(V)$ e $\ker g$

**Soluzione** Possiamo calcolare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per calcolare $\ker g$ devo calcolare il null-space di $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Riduco $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g)$ per righe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

Quindi

$$\ker g = \{-\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 | \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathscr{L}(v_1 - v_2 - v_3)$$

$g(V)$ ha dimensione 2. Per esercizio si trovi una base di $g(V)$

**Notazione** Spesso l'immagine di una funzione lineare $F$ si indica con $\mathrm{Im}(F)$

**Teorema VI** Sia $F : V \to W$ una funzione lineare tra spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

$F$ è iniettiva $\iff$ $F$ porta insiemi liberi di vettori di $V$ in insiemi liberi di vettori di $W$

***dim.*** **(VI)**

" $\implies$ " Supponiamo $F$ iniettiva e sia $\{v_1, \cdots, v_l\} \subseteq V$ un insieme libero, e dimostriamo che $\{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è un insieme libero in $W$

Considero $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{K}$ tali che

$$\lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \cdots + \lambda_l F(v_l) = \underline{0}_W$$

Poiché $F$ è lineare risulta

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l) = \underline{0}_W$$

$\implies$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l \in \ker F$, ma poiché $F$ iniettiva $\ker F = \{\underline{0}_W\}$

$\implies$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = \underline{0}_V$, ma $\{v_1, \cdots, v_l\}$ è libero

$\implies$ $\lambda_1 = \cdots = \lambda_l = 0$

$\implies$ $\{F(v_1), \cdots, F(v_l)\}$ è libero

"$\impliedby$" Per ipotesi $F$ porta insiemi liberi in insiemi liberi. Si fissa $v \in V$, $v \neq \underline{0}_V$, quindi $\{v\}$ è libero

$\implies$ $\{F(v)\}$ è libero

$\implies$ $F(v) \neq \underline{0}_W$

$\implies$ $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

$\implies$ $F$ è iniettiva $\square$

**Definizione** Una funzione lineare sia iniettiva che suriettiva si dice un isomorfismo

$F : V \to W$ è un isomorfismo $\iff$ $\mathrm{Im}(F) = W$ e $\ker F = \{\underline{0}_V\}$

**Teorema VII**

1. Sia $F : V \to W$ lineare con $V, W$ finitamente generati e tali che $\dim V = \dim W$.

   $F$ è iniettiva $\iff$ $F$ è suriettiva

2. $F : V \to V$ lineare con $V$ finitamente generato è un isomorfismo $\iff$ iniettiva $\iff$ suriettiva

**Definizione** Un isomorfismo $F : V \to V$ si dice un automorfismo di $V$

***dim.*** **(VII)**

1. $\dim V = \dim W$, $\dim V = \dim \ker(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$

   $\implies \dim W = \dim \ker(F) + \dim \mathrm{Im}(F)$

   - Se $F$ è suriettiva

     $\implies \dim W = \dim \mathrm{Im}(F)$

     $\implies \dim \ker(F) = 0$

     $\implies \ker F = \{\underline{0}_V\}$

     $\implies$ F è iniettiva

   - Se $F$ è iniettiva

     $\implies \dim \ker F = 0$

     $\implies \dim W = \dim \mathrm{Im} F$

     $\implies W = \mathrm{Im} F$

     $\implies$ F è suriettiva

2. Segue dal punto 1. $\square$

**Esempio (5.6)** $V$ spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, $\mathscr{B}$ base di $V$

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{L_{\mathscr{B}}} \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

è un isomorfismo

## 5.5 Proprietà delle funzioni lineari

8 nov 2021

**Proposizione *p*.viii** La composizione di funzioni lineari è sempre una funzione lineare

***dim.* (*p*.viii)** Siano $V, W, Z$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, $F : V \to W$ $G : W \to Z$ funzioni lineari, e prendiamo

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} Z$$

ovvero $G \circ F$, quindi $G \circ F(v) = G(F(v))$

Siano $v, w \in V$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$

$$G \circ F(\lambda v + \mu w) =$$

dato che $F$ è lineare

$$= G(F(\lambda v + \mu w)) = G(\lambda F(v) + \mu F(w)) =$$

dato che $G$ è lineare

$$= \lambda G(F(v)) + \mu G(F(w))) = \lambda(G \circ F)(v) + \mu(G \circ F)(w)$$

**Proposizione *p*.ix** Siuano $V, W$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, sia $F : V \to W$ lineare biettiva ($F$ è un isomorfismo),

$$F^{-1} : W \to V \text{ è lineare}$$

Questa proprietà ci mostra quanto sia rigida la linearità di una funzione

***dim.* (*p*.ix)** $F^{-1}(a)$ è l'unico $x \in V$ tale che $F(x) = a$

Siano $a, b \in W$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$, dimostro che

$$F^{-1}(\lambda a + \mu b) = \lambda F^{-1}(a) + \mu F^{-1}(b)$$

Denoto $x = F^{-1}(a)$ e $y = F^{-1}(b)$: ciò significa $F(x) = a$ e $F(y) = b$

$$F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \lambda F(y) = \lambda a + \mu b$$

$\Longrightarrow$ per come è definita $F^{-1}$ questo implica

$$F^{-1}(\lambda a + \mu b) = \lambda x + \mu y = \lambda F^{-1}(a) + \mu F^{-1}(b)$$

$\Longrightarrow$ $F^{-1}$ è lineare $\square$

**Esempi (5.7)**

- $V = \mathbb{K}^n$, $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile,

$$F_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Se $A$ è invertibile, esiste $A^{-1} \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathrm{Id}$ dove $\mathrm{Id} \in \mathbb{K}^{n,n}$ è la matrice identita.

Posso considerare

$$F_A^{-1} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$F_{A^{-1}} \circ F_A(x) = F_{A^{-1}}(F_A(x)) = A^{-1}(Ax) = \mathrm{Id} \cdot x = x$$

$\implies$ $F_{A^{-1}} \circ F_A$ è la funzione identità $I : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

$\implies$ $F_A$ è invertibile e la sua inversa è $F_{A^{-1}}$

- Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, finitamente generato.

Fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di $V$,

$$F : V \to \mathbb{K}^n$$
$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

funzione lineare iniettiva, poiché il suo nucleo è banale; poiché $V$ e $\mathbb{K}^n$ hanno la stessa dimensione, la funzione è un isomorfismo

Si noti che

$$F(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con un unico 1 nella posizione $i$-esima, quindi la base di $V$ viene portata tramite $F$ nella base canonica di $\mathbb{K}^n$

**Definizione** Due spazi vettoriali $V, W$ sullo stesso campo $\mathbb{K}$ sono isomorfi se esiste $F : V \to W$ isomorfismo

**Proposizione *p*.x** Supponiamo che $V$ e $W$ siano due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, entrambi finitamente generati.

$V$ è isomorfo a $W$ $\iff$ $V$ e $W$ hanno la stessa dimensione

***dim.*** **(*p*.x)**

" $\implies$ " Supponiamo che esiste $F : V \to W$ isomorfismo,

$F$ iniettiva $\implies$ $\dim \operatorname{Im}(F) = \dim V$

$F$ suriettiva $\implies$ $\dim F(V) = \dim W$

$\implies$ $\dim V = \dim W$

" $\impliedby$ " Supponiamo $\dim V = \dim W = n$. Sia $\mathscr{B}$ base di $V$ e $\mathscr{C}$ base di $W$

$$\begin{aligned} F : V &\to \mathbb{K}^n \\ v &\mapsto (v)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

un isomorfismo,

$$\begin{aligned} G : W &\to \mathbb{K}^n \\ w &\mapsto (w)_{\mathscr{B}} \end{aligned}$$

un isomorfismo

$$V \xrightarrow{F} \mathbb{K}^n \xleftarrow{G} W \quad \implies \quad V \xrightarrow{F} \mathbb{K}^n \xrightarrow{G^{-1}} W$$

Considero $G^{-1} \circ F$, biettiva

$\implies$ $G^{-1} \circ F$ è un isomorfismo

$\implies$ $V, W$ sono isomorfi $\square$

## 5.6 Funzioni lineari e cambiamenti di base

Siano $V, W$ spazi vettoriali su un campo $K$, entrambi finitamente generati

$$\dim V = n, \dim W = m$$

Considero $F : V \to W$ lineare, e fisso $\mathscr{B}$ base di $V$ e $\mathscr{C}$ base di $W$.

$F$ è rappresentata da una matrice $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \in \mathbb{K}^{m,n}$ tramite la relazione

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\text{iso}"'] & W \arrow[d, "\text{iso}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "F_A"'] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Questo è un diagramma commutativo

Considero altre due base $\mathscr{B}'$ di $V$ e $\mathscr{C}'$ di $W$.

Rispetto a queste basi, ad $F$ corrisponde un'altra matrice $M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$, voglio campire come $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$ sono relazionate.

Indico $A = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $A' = M^{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(F)$

Sia $v \in V$ quindi

$$(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x \in \mathbb{K}^n$$

e

$$(v)_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = x' \in \mathbb{K}^n$$

So che $x = Px'$ con $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$. Considero $F(v) \in W$

$$(F(v))_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y \in \mathbb{K}^m$$

$$(F(v))_{\mathscr{C}'} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = y' \in \mathbb{K}^m$$

So che $y = Qy'$, con $Q$ matrice del cambiamento di base da $\mathscr{C}$ a $\mathscr{C}'$, dove $Q \in \mathbb{K}^{m,m}$ è invertibile

$$y = Ax,\ y' = A'x,\ x = Px',\ y = Qy'$$

$Qy' = Ax \implies Qy' = APx'$

$\implies y' = Q^{-1}APx'$

$\implies A'x' = Q'APx'\ \forall x' \in \mathbb{K}^n$

$\implies A' = Q^{-1}AP$

### 5.6.1 Caso particolare

$W = V$, quindi $F : V \to V$ e considero $\mathscr{C} = \mathscr{B}'$ e $\mathscr{C}' = \mathscr{B}'$ ($\implies Q = P$).

In questo caso la formula implica $A' = P^{-1}AP$ dove $P$ è la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$

**Definizione** Due matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ sono simili se esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrice invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

**Esercizio** Siano $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ matrici simili

$\implies \det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

**Soluzione** Supponiamo $A, B$ simili, allora esiste $P \in \mathbb{K}^{n,n}$ invertibile tale che $B = P^{-1}AP$

Per il teorema di Binet:

$$\det B = \det(P^{-1}) \det A \det P = \det A$$

Poi

$$\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}PA) = \operatorname{tr} A$$

Poiché $P$ e $P^{-1}$ hanno rango $n$, risulta

$$\operatorname{rank}(P^{-1}AP) = \operatorname{rank} A$$

**Esercizio** Si verifichi che la similitudine (la proprietà di due matrici di essere simili) in $\mathbb{K}^{n,n}$ è una relazione di equivalenza

**Soluzione** Indico con $\sim$ la relazione

$$A \sim B \text{ se esiste } P \in \mathbb{K}^{n,n} \text{ invertibile} \mid B = P^{-1}AP$$

- $\sim$ è riflessiva, $A = (\mathrm{Id})^{-1}A \cdot \mathrm{Id} \implies A \sim A$
- $\sim$ è simmetrica, infatti, se $A \sim B$

  $\implies B = P^{-1}AP$

  $\implies A = PBP^{-1}$

  $\implies B \sim A$
- Supponiamo $A \sim B$ e $B \sim C$ e dimostro $A \sim C$

$$A \sim B \implies B = P^{-1}AP \quad B \sim C \implies C = Q^{-1}BQ$$

  $\implies C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$

  $\implies A \sim C$ $\square$

**Esercizio** In $\mathbb{R}^3$ considero la base canonica $\mathscr{B} = e_1, e_2, e_3$ e la base data dai tre vettori

$$v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, 0, -2)$$

1. Si verifichi che $\mathscr{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ sia una base di $\mathbb{R}^3$
2. Sia $F$ la funzione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ determinata dalle relazioni

$$\begin{aligned} F(v_1) &= v_1 + v_2 \\ F(v_2) &= 2v_1 - v_2 \\ F(v_3) &= -v_2 + v_3 \end{aligned}$$

   Si trovi la matrice che rappresenta $F$ rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ e la matrice che rappresenta $F$ rispetto alla base canonica $\mathscr{B}$

**Soluzione**

1. Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
si noti che $\det A \neq 0$, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti, ovvero sono una base

2. $$M^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$: per quanto visto oggi $M^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F) = P^{-1}M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)P$
$\implies M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = PM^{\mathscr{C},\mathscr{C}}(F)P^{-1}$

**Definizione** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $F : V \to V$ lineare. Se $\mathscr{B}$ è la base fissata di $V$, allora $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, si definisce
$$\det F = \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F))$$
e
$$\operatorname{tr} F = \operatorname{tr}(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F))$$

Per un risultato precedente, $\operatorname{tr} F$ e $\det F$ sno ben definiti, ovvero non dipendono dalla base fissata, mentre $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$ sì

**Attenzione** Esistono matrici $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$ tali che $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\det A = \det B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ ma non simili

**Esempio (5.8)**
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

Notiamo che $\det A = \det B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, ma $A$ e $B$ non sono simili, infatti
$$P^{-1}AP = \mathrm{Id}\, \forall P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), B \neq \mathrm{Id}$$

## 5.7 Spazio delle funzioni lineari

### 5.7.1 Somma di funzioni lineari

Siano $V, W$ spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$. Siano $F, G : V \to W$ lineari. Si introduce

$$\begin{aligned} F + G : V &\to W \\ v &\mapsto F(v) + G(v) \end{aligned}$$

funzione da $V$ in $W$

**Esercizio** Si dimostri che $F + G$ è funzione lineare

**Soluzione** Da fare

### 5.7.2 Prodotto per scalari di funzioni lineari

Si introduce inoltre, se $\lambda \in \mathbb{K}$, la funzione

$$\begin{aligned} \lambda F : V &\to W \\ v &\mapsto \lambda F \end{aligned}$$

**Esercizio** Si dimostri che $\lambda F$ è funzione lineare

**Soluzione** Da fare

---

Indico con

$$L(V, W) = \{F : V \to W | F \text{ lineare}\}$$

$L(V, W)$ eredita una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dove il vettore nullo di $L(V, W)$ è la funzione costante

$$\begin{aligned} 0_{L(V,W)} : V &\to W \\ v &\mapsto \underline{0}_W \end{aligned}$$

9 nov 2021 Suppongo che $V$ e $W$ abbiano dimensione finita, $\dim V = n, \dim W = m$. Fisso $\mathscr{B}$ base di $V$ e $\mathscr{C}$ base di $W$, ogni $F \in L(V, W)$ induce la matrice $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \in \mathbb{K}^{m,m}$

Abbiamo quindi una funzione

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}} : L(V, W) \to \mathbb{K}^{m,m}$$

**Esercizio** La funzione $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali:

- $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è lineare cioè

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F+G) = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) + M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(G)$$
$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda F) = \lambda M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$$

- $\ker(M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}) = \underline{0}_{L(V,W)} \implies M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è iniettiva
- $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ è suriettiva, cioè

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}\Bigg(L(V,W)\Bigg) = \mathbb{K}^{m,n}$$

**Soluzione** Da fare

## 5.8 Composizione di funzioni lineari

Siano $V, W, Z$ spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$.

$$V \xrightarrow{F} W \xrightarrow{G} Z \implies G \circ F : V \to Z \text{ è lineare}$$

Supponiamo che $V, W, Z$ abbiano dimensione finita. Siano $\mathscr{B}$ una base di $V$, $\mathscr{C}$ una base di $W$ e $\mathscr{D}$ una base di $Z$. Abbiamo $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$ e $M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G)$ matrici, con

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}} = (F(v))_{\mathscr{C}} \text{ e } M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G) \cdot (w)_{\mathscr{C}} = (G(v))_{\mathscr{D}}$$

Considero

$$\Big((G \circ F)(v)\Big)_{\mathscr{D}} = \Big(G(F(v))\Big)_{\mathscr{D}} =$$
$$= M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G) \cdot (F(v))_{\mathscr{C}} =$$
$$= M^{\mathscr{C},\mathscr{D}}(G) \cdot M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) \cdot (v)_{\mathscr{B}}$$

cioè la matrice che rappresenta $G \circ F$ rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{D}$ è il prodotto della matrice che rappresenta $G$ per la matrice che rappresenta $F$

**Esercizio** Siano $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ le funzioni lineari definite come

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

$$H \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 3x_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$$

Si determini (se esiste) una funzione lineare $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $H = G \circ F$

**Soluzione** $F$ è rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$

$H$ è rappresentata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Sia $C$ la matrice che rappresenta $G$

$\implies$ $C$ soddisfa $B = C \cdot A$ con $B$ e $A$ note e $C$ matrice incognita. Studio il sistema matriciale, che posso scrivere nella forma ${}^tB = {}^tAX$, con $X = {}^tC$

**Osservazione (5.2)** Siano $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, $B \in \mathbb{K}^{p,m}$, con $BA \in \mathbb{K}^{p,n}$. Si noti che

$$\operatorname{rank} BA \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

Motivazione geometrica: $A$ induce

$$\begin{aligned} F_A : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^m \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

e $\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im}(F_A)$

$B$ induce

$$\begin{aligned} F_B : \mathbb{K}^m &\to \mathbb{K}^p \\ x &\mapsto Bx \end{aligned}$$

e $\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im}(F_B)$

$BA$ induce

$$\begin{aligned} F_{BA} : \mathbb{K}^n &\to \mathbb{K}^p \\ x &\mapsto BAx \end{aligned}$$

e $\operatorname{rank} BA = \dim \operatorname{Im}(F_{BA})$

Ma $\operatorname{Im}(F_{BA}) \subseteq \operatorname{Im}(F_B)$, perché $F_{BA} = F_B \circ F_A$:

$$\mathbb{K}^n \xrightarrow{F_A} \mathbb{K}^m \xrightarrow{F_B} \mathbb{K}^p$$

$\implies \dim \operatorname{Im}(F_{BA}) \subseteq \dim \operatorname{Im}(F_B) \implies$

$$\operatorname{rank} BA \leq \operatorname{rank} B$$

Si noti che $\ker F_A \subseteq \ker F_{BA}$; per il teorema del rango

$$n - \operatorname{rank} A \leq n - \operatorname{rank} BA$$

$\implies \operatorname{rank} BA \leq \operatorname{rank} A$

Ottengo quindi che

$$\operatorname{rank} BA \leq \min\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\}$$

**Definizione** Sia $V$ uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $F : V \to V$ lineare (un automorfismo). $F$ è *nilpotente* se $\exists k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}_{k-\text{volte}} = 0$$

con $0 : V \to V$ funzione identicamente nulla

**Esempio (5.9)**

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F$ è lineare e $F \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F$ è nilpotente.

$F$ è rappresentata dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, infatti $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Definizione** Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ tale che $A^k$ è la amtrice nulla per qualche $k \in \mathbb{N}$ si dice nilpotente

**Definizione** Data $F : V \to V$ lineare nilpotente, $F$ ha grado di nilpotenza $k$ se

$$\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{k-\text{volte}} = 0 \wedge \underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{k-1-\text{volte}} \neq 0$$

**Esercizio** Si trovi una funzione $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nilpotente con grado di nilpotenza 2

**Soluzione** Da fare

---

$F : V \to V$ lineare con $V$ di dimensione finita. Possiamo usare il teorema di nullità più rango:

$$\dim V = \dim \ker(F) + \dim(\operatorname{Im}(F))$$

ma in generale

$$V \neq \ker(F) + \operatorname{Im}(F)$$

# 6 Spazi vettoriali Euclidei

Si consideri $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

**Definizione** Un prodotto scalare su $V$ è una funzione $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:

1. $v \cdot w = w \cdot v$ (simmetria)
2. $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$
3. $(\lambda v) \cdot w = \lambda(v \cdot w)$
4. $v \cdot v \geq 0$ e $v \cdot v = 0$ se e solo se $v = \underline{0}$ ($\cdot$ è definito positivo)

Si noti che $\cdot$ è lineare in ogni componente

**Esempio (6.1)** In $V_3$ è definito il prodotto scalare $v \cdot w = ||v||\,||w|| \cos \hat{vw}$. "$\cdot$" definisce un prodotto scalare in $V_3$

**Conseguenza** Su ogni spazio vettoriale di dimensione finita esiste un prodotto scalare, infatti se $V$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita, si fissa una base $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ si definisce per $x, y \in V$

$$x \cdot y = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

**Esempio (6.2)** Anche $\mathbb{R}^{m,n}$ ha un prodotto scalare canonico, dato da

$$A \cdot B := \mathrm{tr}({}^t B \cdot A)$$

1. Per le proprietà della traccia $\mathrm{tr}({}^t B \cdot A) = \mathrm{tr}({}^t({}^t B \cdot A)) = \mathrm{tr}({}^t AB) = B \cdot A$

   $\implies$ $\cdot$ è simmetrico

2. $$(A + C) \cdot B = \mathrm{tr}({}^t B(A + C)) = \mathrm{tr}({}^t BA) + \mathrm{tr}({}^t BC) = A \cdot B + C \cdot B$$

   $\implies$ la proprietà 2 è verificata

3. $$(\lambda A) \cdot B = \mathrm{tr}({}^t B(\lambda A)) = \lambda\, \mathrm{tr}({}^t BA) = \lambda A \cdot B$$

   $\implies$ la proprietà 3 è verificata

4. $A \cdot A = \mathrm{tr}({}^t AA)$;

**Esempio (6.3)** Si consideri lo spazio vettoriale

$$\mathbb{R}_n[x] = \{p \in \mathbb{R}[x] | \deg p \leq n\}$$

spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione $n+1$

Se $p, q \in \mathbb{R}_n[x]$ possiamo scrivere $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$

Si definisce $p \cdot q$ come

$$p \cdot q := \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$$

**Definizione** Uno *spazio vettoriale euclideo* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita in cui è stato fissato un prodotto scalare, indicato generalmente con $(V, \cdot)$

In uno spazio vettoriale euclideo è definita la norma di un vettore come

$$||v|| = \sqrt{v \cdot v}$$

$||v||$ definisce una funzione $||v|| : V \to \mathbb{R}_+$ dove $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 0\}$. Si noti che

$$||\lambda v|| = \sqrt{(\lambda v) \cdot (\lambda v)} = \sqrt{\lambda^2 v \cdot v} = |\lambda| \sqrt{v \cdot v} = |\lambda| \, ||v||$$

**Esempio (6.4)** Su $\mathbb{R}^3$ si consideri il prodotto scalare

$$x \cdot y = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 5x_3 y_3.$$

Rispetto a questo prodotto scalare risulta

$$||x|| = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2}.$$

**Definizione** Due vettori $v, w$ in uno spazio vettoriale euclideo sono *ortogonali* se $v \cdot w = 0$

**Esercizio** In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare

$$x \cdot y = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 5x_3 y_3$$

si trovino tutti i vettori ortogonali a $(1, 1, 0)$

**Soluzione** Da fare

**Proposizione *p*.xi** La norma associata ad un prodotto scalare ha le seguenti proprietà: 11 nov 2021

1. $||v|| \geq 0$ e $||v|| = 0 \iff v = \underline{0}$
2. $||\lambda v|| = |\lambda|||v||$
3. Teorema di Pitagora:
   Siano $v, w \in V$. $vw = 0 \iff ||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$
4. Disuguaglianza di Cauchy-Swartz: $|v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

   L'uguaglianza vale $\iff$ $v$ e $w$ sono linearmente dipendenti
5. Disuguaglianza triangolare: $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

**Osservazione (6.1)** $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 1.

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \cdot y = xy$, dove a destra vi è la moltiplicazione in $\mathbb{R}$. $\cdot$ è un prodotto scalare.

Si noti che

$$||x|| = \sqrt{x * x} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La 5. è coerente con la disuguaglianza triangolare soddisfatta dal valore assoluto in $\mathbb{R}$

***dim.*** **(*p*.xi)**

1. 2. già viste

3. si considera $||v + w||^2$

$$\begin{aligned} ||v + w||^2 = (v + w) \cdot (v + w) = \\ = v \cdot v + v \cdot w + w \cdot v + W \cdot w = \\ = ||v||^2 + 2v \cdot w + ||w||^2 \end{aligned}$$

   Segue la proprietà

4. Sicuramente la formula vale se $v = \underline{0}$ o $w = \underline{0}$. Supponiamo $v, w \neq \underline{0}$.
   Per $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $p(\lambda) = ||\lambda v + w||^2$

$$p(\lambda) = (\lambda v + w) \cdot (\lambda v + w) = \lambda^2 ||v||^2 + 2\lambda v \cdot w + ||w||^2$$

$$\implies p(\lambda) \in \mathbb{R}_2[\lambda]$$

   Sappiamo che $p(\lambda) \geq 0 \; \forall \, \lambda \in \mathbb{R}$

$\implies$ il suo $\Delta$ soddisfa $\Delta \leq 0$.

$$\Delta = 4(v \cdot w)^2 - 4||v||^2||w||^2$$

Si ottiene che $(v \cdot w)^2 \leq ||v||^2||w||^2$

$\implies$ $|v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

Vale l'uguaglianza $\iff$ $\Delta = 0$, quindi se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ per cui $p(\lambda) = 0$

$p(\lambda) = 0 \iff ||\lambda v + w|| = 0 \iff \lambda v + w = \underline{0}$

$\iff$ $v$ e $w$ sono linearmente dipendenti

5. $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2\, v \cdot w$.

   Per Cauchy-Swartz $|v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

   $\implies$ $-||v||\,||w|| \leq |v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

   $\implies$ $||v + w||^2 \leq ||v||^2 + ||w||^2 + 2\,||v||\,||w|| = (||v||\,||w||)^2$

   $\implies$ $||v + w|| \leq ||v||\,||w||$ $\square$

**Applicazione di Cauchy-Swartz** Siano $v, w \in V$, $v, w \neq 0$: so che $|v \cdot w| \leq ||v||\,||w||$

$$\implies -1 \leq \frac{v \cdot w}{||v||\,||w||} < 1$$

$\implies$ $\exists\, \theta \in [0, \pi]$ tale che $\frac{v \cdot w}{||v||\,||w||} = \cos\theta$

$$\theta = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}\right)$$

$\theta$ è per definizione l'angolo tra $v$ e $w$, e dipende dal prodotto scalare considerato

**Osservazione (6.2)**

- Se considero $V_3$, il prodotto scalare è stato definito come $v \cdot w = ||v|| \cdot ||w|| \cdot \cos \hat{vw}$. Anche in questo caso l'angolo che formano i due vettori è
$$\hat{vw} = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{||v|| \cdot ||w||}\right)$$
- Se $v, w \in V$ e $v, w \neq 0$ si dicono ortogonali se $v \cdot w = 0 \iff$ l'angolo formato dai due vettori sia $\frac{\pi}{2}$

**Definizione** Se $A$ è un insieme si definisce una *distanza* su $A$ come una funzione $d : A \times A \to \mathbb{R}_+$ che soddisfa le seguenti proprietà

1. $d(a, b) = 0 \iff a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (Disuguaglianza triangolare)

$(A, d)$ si dice uno *spazio metrico.*

**Esempio (6.5)** $\mathbb{R}$ con la distanza $d(x, y) = |x - y|$

Se $(V, \cdot)$ è uno spazio vettoriale euclideo si definisce $d : V \times V \to \mathbb{R}_+$

$$d(v, w) = ||v - w||.$$

Per la proposizione precedente $d$ definisce una distanza su $V$

**Definizione** Se $v \in V$ con $v \neq \underline{0}$, il versore di $v$ è il vettore

$$\text{vers}(v) := \frac{v}{||v||}$$

**Osservazione (6.3)** $||\text{vers}(v)|| = \left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \frac{||v||}{||v||} = 1$

$v$ ha la stessa direzione, stesso verso di $v$ ma norma 1

## 6.1 Basi ortogonali e Basi ortonormali

$(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base.

- $\mathscr{B}$ è ortogonale se $v_i \cdot v_j = 0 \; \forall \, i \neq j$
- $\mathscr{B}$ è ortonormale se è ortogonale e tutti i vettori della base hanno norma 1

$$v_i \cdot v_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

In generale si scrive $\delta_{ij}$ per indicare

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

e prende il nome di "Delta di Knonecker"

**Esempi (6.6)**

- La base canonica in $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard ($x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$)
- In $\mathbb{R}^{m,n}$ la base canonica $E_{ij}$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare:

$$A \cdot B = \operatorname{tr}({}^t BA)$$

**Esercizio** In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare

$$x \cdot y = 5x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$$

si trovi una base ortonormale

**Soluzione** $\mathscr{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} e_1 \cdot e_1 &= 5 \\ e_1 \cdot e_2 &= 0 \\ e_1 \cdot e_3 &= 0 \\ e_2 \cdot e_2 &= 3 \\ e_2 \cdot e_3 &= 0 \\ e_3 \cdot e_3 &= 4 \end{aligned}$$

$\mathscr{B}$ è una base ortogonale, ma non ortonormale.

$$\mathscr{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} e_1, \frac{1}{\sqrt{3}} e_2, \frac{1}{2} e_3 \right\}$$

è una base ortonormale

**Esercizio** Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo, sia $\{v_1, \cdots, v_l\} \subseteq V$ tale che $v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \; \forall \, i, j = 1, \cdots, l$

Si dimostri che $\{v_1, \cdots, v_l\}$ sia sempre libero.

($\implies l \leq \dim V$, $l = \dim V \iff \{v_1, \cdots, v_l\}$ è una base)

**Soluzione** Suppongo

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l = 0$$

e dimostro $\lambda_i = 0 \; \forall \, i = 1, \cdots, l$

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_l v_l) \cdot v_i = 0$$
$$\lambda_1 v_1 v_i + \lambda_2 v_2 v_i + \cdots + \lambda_l v_l v_i = 0$$

$\implies \lambda_i = 0$

$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_3 = 0$ □

Sia $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo e $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale di $V$ rispetto a $\cdot$

Sia $v \in V$,

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$

quindi

$$v \cdot e_r = \sum_{k=1}^{n} x_k (e_k e_r)$$

$\implies x_r = v \cdot e_r$

Rispetto ad una base ortonormale ogni $v$ si scrive come

$$v = \sum_{k=1}^{n} (v \cdot e_k) e_k$$

**Teorema VIII (Gram-Schmidt)** Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale Euclideo e sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base.

Esiste $\mathscr{B}' = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale di $(V, \cdot)$ tale che

$$\mathscr{L}(v_1, \cdots, v_k) = \mathscr{L}(e_1, \cdots, e_k) \quad \forall\, k = 1, \cdots, n$$

***dim.*** **(VIII)** La dimostrazione corrisponde all'*algoritmo di Gram-Schmidt* $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Per $e_1$ non ho facoltà di scelta:

$$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$$

Sia $e_2' = v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1$, si noti che $e_2' \cdot e_1 = v_2 \cdot e_1 - v_2 \cdot 1 = 0$

$e_2'$ è ortogonale a $e_1$; $\mathscr{L}(e_1, e_2') = \mathscr{L}(v_1, v_2)$. Ad $e_2'$ manca solo la proprietà di avere norma 1

A questo punto si può definire $e_2$ come

$$e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1}{||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1||}$$

Itero fino ad ottenere

$$e_j = \frac{v_j - \sum_{i=1}^{j-1}(v_j \cdot e_i)e_i}{||v_j - \sum_{i=1}^{j-1}(v_j \cdot e_i)e_i||}$$

15 nov 2021 **Esercizio** In $\mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathscr{B} = v_1, v_2, v_3$,

$$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 1, 2).$$

Si applichi l'algoritmo per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k$$

**Soluzione** $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$, con $||v_1|| = \sqrt{2}$: quindi

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$e_2 = \frac{v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1}{||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1||}$; $v_2 \cdot e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

$$v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1 =$$

$$= (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(-1, 2, 1)$$

$$||v_2 - (v_2 \cdot e_1)e_1|| = \frac{1}{2}||(-1, 2, 1)|| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\implies e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$$

$e_3 = \frac{v_3-(v_3\cdot e_2)e_2-(v_3\cdot e_1)e_1}{||v_3-(v_3\cdot e_2)e_2-(v_3\cdot e_1)e_1||}$; $v_3 \cdot e_1 = 4/\sqrt{2}$; $v_3 \cdot e_2 = 2/\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} v_3 - (v_3 \cdot e_2)e_2 - (v_3 \cdot e_1)e_1 &= \\ &= (2,1,2) - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1) - \frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \\ &= (2,1,2) - \frac{1}{3}(-1,2,1) - 2(1,0,1) = \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = \\ &= \frac{1}{3}(1,1,-1) \end{aligned}$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

$\implies \{e_1, e_2, e_3\}$ base ortonormale.

## 6.2 Matrici ortogonali

**Definizione** Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A$ si dice ortogonale se ${}^tA = A^{-1}$ (ortogonale $\implies$ invertibile)

**Proposizione *p*.xii** Valgono le seguenti proprietà:

1. se $A$ è ortogonale $\implies$ $A^{-1}$ è ortogonale
2. se $A$ è ortogonale $\implies$ ${}^tA$ è ortogonale
3. se $A, B$ sono ortogonali $\implies$ $AB$ è ortogonale
4. se $A \in \mathrm{O}(n) \implies \det(A) \in \{-1, 1\}$

Indico con

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n,n} | A \text{ è ortogonale}\} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

**Definizione** Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Un sottoinsieme $H$ di $G$ è un sottogruppo se

$$h^{-1} \in H \,\forall\, h \in H \quad \text{e} \quad h_1 \cdot h_2 \in H \,\forall\, h_1, h_2 \in H$$

Le prime due proprietà implicano che $\mathrm{O}(n)$ è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

***dim.*** ***(p.xii)***

1. $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies {}^tA = A^{-1}$

   $\implies A = {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

   $\implies A^{-1} \in \mathrm{O}(n)$

2. $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies A{}^tA = \mathrm{Id}$

   $\implies {}^tA$ è invertibile e $A$ è la sua inversa

3. $A, B$ ortogonali

   $\implies A{}^tA = \mathrm{Id}$ e $B{}^tB = \mathrm{Id}$

   $\implies AB{}^t(AB) = AB{}^tB{}^tA = A{}^tA = \mathrm{Id}$

   $\implies AB{}^t(AB) = \mathrm{Id}$

   $\implies AB \in \mathrm{O}(n)$

4. Se $A \in \mathrm{O}(n)$

   $\implies A{}^tA = \mathrm{Id}$

   $\implies \det({}^tAA) = 1$

   $\overset{\text{Binet}}{\implies} \det({}^tA)\det(A) = 1$

   $\implies (\det(A))^2 = 1$

   $\implies \det(A) \in \{-1, 1\}$

Ne risulta che

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\} \amalg \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = -11\}$$

con $\amalg$ "unione disgiunta"

Si indica con $\mathrm{SO}(n) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}$ sottogruppo di $\mathrm{O}(n)$, detto *delle matrici ortogonali speciali*, infatti se $A, B \in \mathrm{SO}(n)$

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = 1$

  $\implies A \in \mathrm{SO}(n)$;

- $\det(AB) = \det A \det B = 1$

  $\implies A, B \in \mathrm{SO}(n)$

**Teorema IX** Sia $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Sono fatti equivalenti:

1. $A \in \mathrm{O}(n)$
2. Le righe di $A$, $R_1, \cdots, R_n$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico
3. Le colonne di $A$, $C_1, \cdots, C_n$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico

***dim.*** **(IX)**

$2 \iff 3$ poiché $A \in \mathrm{O}(n) \iff {}^tA \in \mathrm{O}(n)$

$2 \iff 1$ Infatti $A \in \mathrm{O}(n) \iff A{}^tA = \mathrm{Id}$, $A = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} R_1 & \cdots & R_n \end{pmatrix}$

$(A{}^tA)_{ij} = R_i \cdot R_j$ dove $\cdot$ è il prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^n$.

Quindi

$A{}^tA = \mathrm{Id} \iff R_i \cdot R_j = \delta_{ij}$

$\iff \{R_1, \cdots, R_n\}$ base ortonormale di $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ $\square$

Descriviamo $\mathrm{O}(2)$ e $\mathrm{SO}(2)$

Descrivo tutte le basi ortonormali di $(\mathbb{R}^2, \cdot)$, una base ortonormale è della forma $\mathscr{B} = \{e_1, e_2\}$ con $||e_1|| = ||e_2|| = 1$, e $e_1 \cdot e_2 = 0$

Fissiamo $e_1$. Sia $\alpha$ l'angolo tra $e_1$ e l'asse $x$

$\implies e_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

Per $e_2$ ho solo le due possibilità:

- $e_2 = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$
- $e_2 = (\sin\alpha, -\cos\alpha)$

Ogni $A \in \mathrm{O}(2)$ è della forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

oppure

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}(2)$$

**Teorema X** Considero $(V, \cdot)$ spazio vettoriale Euclideo, e $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ base ortonormale. Sia $\mathscr{B}'$ una seconda base

$\mathscr{B}'$ è ortonormale $\iff$ la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}'$ è ortogonale

***dim.*** **(X)** $\mathscr{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ ortonormale, $\mathscr{B}' = \{v_1, \cdots, v_n\}$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j \, \forall\, i = 1, \cdots, n$$

$\mathscr{B}'$ è ortonormale se e solo se

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} \, \forall\, i, j = 1, \cdots, n$$

Risulta

$$v_i \cdot v_j = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k\right) \cdot \left(\sum_{s=1}^{n} a_{js} e_s\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} a_{ik} a_{js} \underbrace{e_k e_s}_{\delta_{ks}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

Quindi $\mathscr{B}'$ è ortonormale

$\iff \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$

$\iff$ le righe della matrice $A = (a_{ij})$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico

$\underset{\text{per il teorema}}{\iff}$ $A$ è ortogonale

$\iff$ la matrice del cambiamento di base da $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}' \in \mathrm{O}(n)$ $\square$

**Esercizio** Si trovi in $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico una base ortonormale il cui primo vettore sia

$$u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**Soluzione** Approccio risolutivo: trovo $v$ in $\mathbb{R}^3$ ortogonale a $u$, con $||v|| = 1$ e quindi si considera $z$ come $z = u \wedge v$

$\implies \{u, v, z\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

# 7 Orientazione di uno spazio vettoriale (reale)

Sia $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ finitamente generato, siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ due basi e sia $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice del cambiamento di base $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

$\implies \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) \neq 0$

$\implies$ ci sono due possibilità:

1. $\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$: si dice che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ hanno la stessa orientazione
2. $\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) < 0$: si dice che $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ hanno orientazione opposta

**Esempio (7.1)** Consideriamo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Le basi di $\mathbb{R}$ sono del tipo $\mathscr{B} = \{t_0\}$, con $t_0 \neq 0$

$\implies \mathscr{B} = \{t_0\}$ e $\mathscr{B}' = \{t_0'\}$ hanno la stessa orientazione

$\iff t_0$ e $t_0'$ hanno lo stesso segno

---

Sia $V$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ finitamente generato. $\mathrm{Basi}(V)$ insieme di tutte le basi di $V$. In $\mathrm{Basi}(V)$ si considera la relazione $\sim$ dove due basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ sono in relazione

$\iff$ hanno la stessa orientazione

$$\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \iff \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$$

**Proposizione *p*.xiii** $\sim$ è una relazione di equivalenza e nel quoziente $\mathrm{Basi}(B)/\sim$ ci sono solo due classi

**Esempio (7.2)** $\mathrm{Basi}(\mathbb{R}) = \Big\{\{t_0\} \,|\, t_0 \neq 0\Big\}$, $\{t_0\} \sim \{t_0'\} \iff t_0$ e $t_0'$ hanno lo stesso segno.

$\sim$ è una relazione di equivalenza, e $\mathrm{Basi}(R)/\sim$ consta di sole due classi, infatti, prendendo le classi

$$[\{1\}], [\{-1\}],$$

una qualsiasi base $\{t_0\}$ o è in relazione con $[\{1\}]$ o con $[\{-1\}]$

***dim.*** **(*p*.xiii)** Idea della dimostrazione: dimostro che $\sim$ è riflessiva, simmetrica e transitiva.

- $\sim$ riflessiva, infatti se $\mathscr{B} \in \text{Basi}(V)$ si ha che $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \text{Id}$

  $\Longrightarrow \det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} = 1$

  $\Longrightarrow \mathscr{B} \sim \mathscr{B}$

- $\sim$ simmetrica, infatti siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}' \in \text{Basi}(V)$, supponiamo $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$, cioè $\det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}} > 0$

  $\Longrightarrow (v)_{\mathscr{B}} = M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v)_{\mathscr{B}'} \ \forall\, v \in V$

  $\Longleftrightarrow (v)_{\mathscr{B}'} = (M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}(v)_{\mathscr{B}} \ \forall\, v \in V$, cioè $M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = (M^{\mathscr{B},\mathscr{B}})^{-1}$

  $\Longrightarrow \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}}) = \frac{1}{\det M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}} > 0$

  $\Longrightarrow \mathscr{B}' \sim \mathscr{B}$

- $\sim$ transitiva, infatti siano $\mathscr{B}, \mathscr{B}', \mathscr{B}'' \in \text{Basi}(V)$ con

  - $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}' \iff \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) > 0$
  - $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}'' \iff \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) > 0$

  $$\det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}''}) = \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \cdot M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) = \overset{\text{Binet}}{=} \det(M^{\mathscr{B},\mathscr{B}'}) \cdot \det(M^{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}) > 0 \quad \square$$