1 Funzioni lineari

V e W spazi vettoriali sullo stesso campo $\mathbb{K}$ e una funzione $F : V \to W$, F è lineare se verifica $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$

Teorema I (di esistenza e unicità) Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con V finitamente generato.

Sia $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base di V e $a_1, \cdots, a_n \in W$.

Allora esiste un'unica funzione lineare $F : V \to W$ tale che $F(v_1) = a_1$ $\forall i = 1, \cdots, n$

dim. **(I)**

Esistenza Sia $v \in V$, v si scrive in modo unico come $v = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$ per $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

Si definisce

$$F(v) = F(x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n) := x_1a_1 \cdots + x_na_n$$

F definisce una funzione $V \to W$ tale che $F(v_1) = a_1$ per $i = 1, \cdots, n$. Verifico che F è lineare.

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $v, w \in V$ e dimostro che $F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w)$

Scrivo

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$$

e

$$w = \sum_{r=1}^{n} y_r v_r$$

$$\lambda v + \mu w = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k \mu y_k) v_k$$

Quindi per come è definita F risulta che

$$F(\lambda v + \mu w) = F\left(\sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k \mu y_k\right)v_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(\lambda x_k \mu y_k)a_k =$$

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} y_k a_k =$$

$$= \lambda F(v) + \mu F(w)$$

$\implies F$ è lineare

Unicità Supponiamo di avere due funzioni lineari $F, G : V \to W$ tali che $F(v_i) = G(v_i) = a_i$ $\forall i = 1, \cdots, n$ e dimostro che $F = G$, cioè che $F(v) = G(v)$ $\forall v \in V$ Possiamo scrivere $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$ quindi

$$F(v) = F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$$

Inoltre

$$G(v) = G\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k G(v_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k a_k$$

$\implies F(v) = G(v)$ $\forall v \in V$

$\implies F = V$

2 Matrice associata ad una applicazione lineare

Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ con V, W entrambi finitamente generati. Supponiamo $\dim V = n$ e $\dim W = m$.

Considero $F : V \to W$ lineare, e fisso $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base di V e $\mathscr{C} = \{w_1, \cdots, w_n\}$ base di W.

$$
\begin{aligned}
F(v_1) &= a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k1}w_k \\
F(v_2) &= a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \cdots + a_{m2}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{k2}w_k \\
&\cdots \\
F(v_n) &= a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m = \sum_{k=1}^{m} a_{kn}w_k
\end{aligned}
$$

Tutto questo determina $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m,n}$, A è determinata da $F, \mathscr{B}, \mathscr{C}$

Sia $v \in V$ un vettore generico $v = \sum_{k=1}^{n} x_k v_k$, $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$

$$
\begin{aligned}
F(v) = F\left(\sum_{k=1}^{n} x_k v_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} x_k F(v_k) = \\
&= x_1F(v_1) + x_2F(v_2) + \cdots + x_nF(v_n) = \\
&= x_1 \sum_{k=1}^{m} a_{k1}w_k + x_2 \sum_{k=1}^{m} a_{k2}w_k + \cdots + x_n \sum_{k=1}^{m} a_{kn}w_k = \\
&= \sum_{k=1}^{m} (a_{k1}x_1)w_k + \sum_{k=1}^{m} (a_{k2}x_2)w_k + \cdots + \sum_{k=1}^{m} (a_{kn}x_n)w_k = \\
&= \left(\sum_{r=1}^{n} a_{1r}x_r\right)w_1 + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{2r}x_r\right)w_2 + \cdots + \left(\sum_{r=1}^{n} a_{mr}x_r\right)w_m
\end{aligned}
$$

Se $(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\implies \big(F(v)\big) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\implies \big(F(v)\big) = A(v)_{\mathscr{B}}$$

Notazione Si indica A con $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$, matrice che rappresenta F rispetto alle basi $\mathscr{B}$ e $\mathscr{C}$

Esempio (2.1) Sia $I : V \to V$ funzione identità, e calcoliamo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I)$ dove $\mathscr{B}$ è una base fissata di V. Se $\mathscr{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ risulta $I(v_i) = v_i \ \forall i = 1, \cdots, n$

$\implies M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(I) = Id$ matrice identità

Esempio (2.2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 - x_2, 2x_2 + 3x_3)$$

Sia $\mathscr{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$, voglio trovare $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

Possiamo scrivere $F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Sono noti $F(1,0,0) = (3,0)$, $F(0,1,0) = (-1,2)$ e $F(0,0,1) = (0,3)$, quindi

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In generale data $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ espressa in termini della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ la matrice che rappresenta F è la matrice le cui colonne sono $F(e_1), \cdots, F(e_n)$

Esempio (2.3) Data $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$: $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (4x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3)$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio (2.4) $F : \mathbb{K}^{n,n} \to \mathbb{K}$: $A \mapsto (A)$ e deterrmino la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{K}^{n,n}$, $\mathscr{B} = E_{i_1j}$ e alla base canonica di $\mathbb{K}$ $\mathscr{C} = \{1\}$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix}(E_{11}) & (E_{12}) & \cdots & (E_{1n}) & (E_{21}) & (E_{22}) & \cdots & (E_{nn})\end{pmatrix}$$

Per esempio se $n = 2$ risulta $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Esempio (2.5) Sia $a \in V_3$ e $F : V_3 \to V_3$: $x \mapsto a \wedge x$ funzione lineare.

Sia $\mathscr{B} = \{i, j, k\}$ base ortonormale positiva di V_3 e calcolo $M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F)$, scriviamo $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

$$\begin{gathered}
F(i) = a \wedge i = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge i = -a_2 k + a_3 j \\
F(j) = a \wedge j = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge j = a_1 k - a_3 j \\
F(k) = a \wedge k = (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \wedge k = -a_1 j + a_2 i
\end{gathered}$$

Si ha

$$M^{\mathscr{B},\mathscr{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{2,2}$, $F(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b+c & 0 \end{pmatrix}$

Sia $\mathscr{B}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$ e $\mathscr{C}$ base canonica di $\mathbb{R}^{2,2}$

Si trovi $M^{\mathscr{B},\mathscr{C}}(F)$

Soluzione Da risolvere

3 Immagine di sottospazi vettoriali

Siano V e W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $F : V \to W$ lineare, sia $H \subseteq V$ sottospazio vettoriale, $F(H)$ immagine di H tramite F, tale che $F(H) \subseteq W$, $F(H) = \{F(h) | h \in H\}$

Proposizione *p*.i) $F(H)$ è sempre un sottospazio vettoriale di W

dim. **(*p*.i)** Siano $w_1, w_2 \in F(H)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e dimostriamo che $\lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$$\begin{aligned} w_1 \in F(H) &\implies w_1 = F(h_1)\text{per qualche } h_1 \in H \\ w_2 \in F(H) &\implies w_2 = F(h_2)\text{per qualche } h_2 \in H \end{aligned}$$

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda F(h_1) + \mu F(h_2) = F(\lambda h_1 + \mu h_2)$$

Poiché H è un sottospazio vettoriale, risulta che, dato $h = \lambda h_1 + \mu h_2$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 = F(h)$ per qualche $h \in H$

$\implies \lambda w_1 + \mu w_2 \in F(H)$

$\implies F(H)$ sottospazio vettoriale di V

Supponiamo $\dim H = n$, $\dim F(H) =?$

Sia $\mathscr{B} = \{h_1, \cdots, h_n\}$ base di H, sappiamo che $\{F(h_1), \cdots, F(h_n)\}$ è un insieme di generatori di $F(H)$

$\implies \dim F(H) \leq n$

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la funzione lineare data da

$$F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, x_2 - x_3)$$

Sia $H \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio $H = \{(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\}$, $\dim H = 2$

Si trovi una base di $F(H)$

Soluzione

1. Trovo una base di H, per esempio $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. Calcolo le immagini dei vettori della base

$$\begin{aligned} F(1, -1, 0) &= (2, 0, 2, -1) \\ F(0, 0, 1) &= (-1, 1, 0, -1) \end{aligned}$$

Questi due vettori sono linearmente indipendendenti, allora formano una base di $F(H)$

Definizione Sia $F : V \to W$ lineare, $F(V)$ (che è un sottospazio vettoriale di W) si dice l'immagine di F

Osservazione (3.1) F è suriettiva $\iff F(V) = W \iff \dim F(V) = \dim W$ (criterio per testare la suriettività di una funzione lineare)

Esercizio Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y, z) = (2x + 2y, x + z, x + 3y - 2z)$

1. Dire se F è suriettiva e in caso contrario trovare $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $w \notin F(\mathbb{R}^3)$
2. Sia $a = (1, 0, 1)$, $b = (0, 1, 1)$, $H = \mathscr{L}(a, b)$. Dire se $(4, 3, -2) \in F(H)$

Soluzione

1. $F(\mathbb{R}^3) = \mathscr{L}(F(e_1), F(e_2), F(e_3))$

$$F(e_1) = (2, 1, 1)$$
$$F(e_2) = (2, 0, 3)$$
$$F(e_3) = (0, 1, -2)$$

   Si osserva che $F(e_1) = F(e_2) + F(e_3)$, quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti

   Ma $F(e_2)$ e $F(e_3)$ sono linearmente indipendenti

   $\implies F(\mathbb{R}^3)$ ha dimensioone 2, ed i vettori $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$ ne formano una base. F non è suriettiva

   $w \in \mathbb{R}^3$, $w \notin F(\mathbb{R}^3) \iff w$ non è combinaziione lineare di $(2, 0, 3), (0, 1, -2)$.

   Per esempio $w = (1, 0, 0)$ va bene, poiché non esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(1, 0, 0) = \lambda(2, 0, 3) + \mu(0, 1, -2)$

2. $F(H) = \mathscr{L}(F(a), F(b))$. $F(a) = (2, 2, -1)$, $F(b) = (2, 1, 1)$. $F(a), F(b)$ sono linearmente indipendenti, quindi $\dim F = 2$

   $(4, 3, -2) \in F(H) \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $(4, -3, -2) = (2\lambda + 2\mu, 2\lambda + \mu, -\lambda + \mu)$

   Il sistema non ha soluzione, pertanto $(4, 3, -2) \notin F(H)$