Lezione 3

Alessandro Ardizzoni

Ricoprimenti e partizioni di un insieme

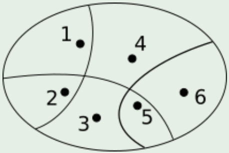
Definizione

Un ricoprimento di un insieme X è un sottoinsieme $\mathscr{F}$ dell'insieme delle parti $P(S)$ tale che $\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A = X$.

Esempio

Nel seguente diagramma abbiamo rappresentato l'insieme $\{1,2,3,4,5,6\}$.

L'insieme $\mathscr{F} = \{\{1,2\},\{2,3,5\},\{5,6\},\{3,4\},\emptyset\}$ è un suo ricoprimento perché $\{1,2\}\cup\{2,3,5\}\cup\{5,6\}\cup\{3,4\}\cup\emptyset = \{1,2,3,4,5,6\}$.



Esempio

Sia $A_n := [-n,n] = \{r\in\mathbb{R} \mid -n\leq r\leq n\}$. Abbiamo visto che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$. Pertanto $\mathscr{F} := \{A_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}$.

Definizione

Diremo che $\mathscr{F}$ è una partizione di un insieme X se

1. $\mathscr{F}$ è un ricoprimento di X, cioé $\mathscr{F} \subseteq P(X)$ e $\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = X$;
2. gli insiemi di $\mathscr{F}$ sono non vuoti: $\emptyset \notin \mathscr{F}$;
3. gli insiemi di $\mathscr{F}$ sono a due a due disgiunti: $\forall A, B \in \mathscr{F}, (A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset)$.

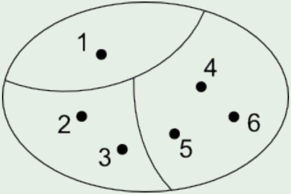
Osservazione

Per visualizzare l'idea di partizione pensiamo ad una torta (l'insieme X) suddivisa in varie fette (gli elementi di $\mathscr{F}$). Si ha allora che:

1. *l'unione delle fette forma la torta intera;*
2. *le fette non sono vuote;*
3. *le fette non hanno pezzi in comune.*

Esempio

Nel seguente diagramma abbiamo "affettato" l'insieme $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ nelle tre fette $\{1\}$, $\{2,3\}$ e $\{4,5,6\}$. L'insieme $\{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\}\}$ formato da queste fette è una partizione di X.



Esempio

1. L'insieme $\mathscr{F} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dove $A_n := \{2n, 2n+1\}$ è una partizione di $\mathbb{N}$. Notiamo che $\mathscr{F} = \{A_0, A_1, A_2, \ldots\} = \{\{0,1\},\{2,3\},\{4,5\},\ldots\}$ è ottenuto suddividendo $\mathbb{N}$ in "fette" formate da due elementi.
2. L'insieme $\mathscr{G} := \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dove $B_n := \{-n, n\}$ è una partizione di $\mathbb{Z}$. Notiamo che $\mathscr{G} = \{B_0, B_1, B_2, \ldots\} = \{\{0\},\{-1,1\},\{-2,2\},\ldots\}$.

Esempio

Il ricoprimento $\mathscr{F} := \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{R}$, dove $A_n = [-n,n]$, non è una partizione perché $A_i \cap A_j = A_m$ dove $m := \min\{i,j\}$ e quindi gli insiemi di $\mathscr{F}$ non sono a due a due disgiunti. Invece è vero che $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

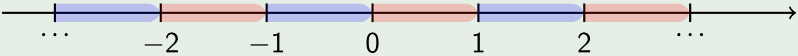
Ricordiamo che, la parte intera di un numero reale r è il numero intero

$$\lfloor r \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq r\}.$$

Ad esempio $\lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$ e $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$.

Esempio

Se $A_n := [n, n+1) = \{r \in \mathbb{R} \mid n \leq r < n+1\}$. Allora $\mathscr{F} := \{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ è una partizione di $\mathbb{R}$.



$\mathbb{Z}$ per definizione

Infatti $\bigcup_{n \in \cancel{\mathbb{N}}} [n, n+1) \subseteq \mathbb{R}$ e preso $r \in \mathbb{R}$ allora $r \in [n, n+1)$ dove $n := \lfloor r \rfloor$. Quindi $\mathscr{F}$ è un ricoprimento. Chiaramente $A_n \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e quindi $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Infine se $i \neq j$ è chiaro che $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Esempio

Posso avere partizioni distinte?

Le possibili partizioni dell'insieme $X = \{1, 2, 3\}$ sono:

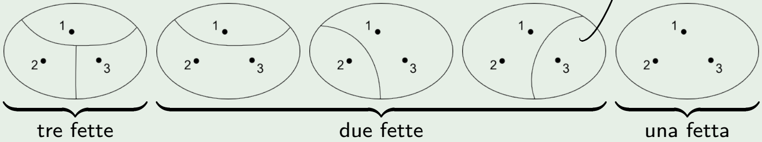
- $\mathscr{F}_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ dove le "fette" sono tre.
- $\mathscr{F}_2 = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$ dove le "fette" sono due.
- $\mathscr{F}_3 = \{\{2\}, \{1, 3\}\}$ dove le "fette" sono due.
- $\mathscr{F}_4 = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$ dove le "fette" sono due.
- $\mathscr{F}_5 = \{\{1, 2, 3\}\}$ dove la "fetta" è una sola.

chiamato anche "singoletto"

$\mathcal{F}_5 \neq X$

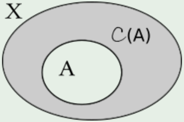
$X \in \mathcal{F}_5$

$X \notin \mathcal{F}_5$



Esempio

Se $A \subseteq X$ allora $\mathscr{F} = \{A, \mathscr{C}(A)\}$ è un ricoprimento di X.
E' una partizione esattamente quando $\emptyset \neq A \neq X$.



Esempio

Vediamo un paio di esempi di carattere geometrico.

- L'insieme delle rette del piano passanti per l'origine non è una partizione di $\mathbb{R}^2$. E' vero che nessuna di esse è vuota e che la loro unione è tutto il piano, ma non sono a due a due disgiunte: passano tutte per l'origine. $\rightsquigarrow$ é un ricoprimento
- L'insieme delle rette parallele all'asse delle x è invece una partizione di $\mathbb{R}^2$: nessuna è vuota, la loro unione è tutto il piano e due rette distinte, essendo parallele, non si toccano e quindi non hanno punti in comune.

Esercizio

Stabilire se $\mathscr{F} = P(A)$ è un ricoprimento o partizione di un insieme A.

SOLUZIONE. Osserviamo che $\bigcup_{B \in P(A)} B = A$. Infatti $\forall B \in P(A), B \subseteq A \Rightarrow \bigcup_{B \in P(A)} B \subseteq A$. Inoltre $A \in P(A)$ e quindi $A \subseteq \bigcup_{B \in P(A)} B$. Quindi $P(A)$ è un ricoprimento di A.
Non è però una partizione di A perché $\emptyset \in P(A)$.

Esercizio

Stabilire se $\mathscr{F} = P(A) \setminus \{\emptyset\}$ è un ricoprimento o partizione di un insieme A con almeno due elementi.

SOLUZIONE. $P(A) \setminus \{\emptyset\}$, è ancora un ricoprimento di A come sopra ma non contiene $\emptyset$. Però i suoi elementi non sono a due a due disgiunti. Infatti, se $a \in A$ allora $\{a\} \neq A$ (perché A contiene almeno due elementi) e $\{a\} \cap A = \{a\} \neq \emptyset$. Quindi $P(A) \setminus \{\emptyset\}$ non è una partizione di A.

Esercizio (per casa) ESERCIZIO

Stabilire se $\mathscr{F} = \{(n, n+1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento o partizione dell'insieme $\mathbb{R}_{>0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$. $\mathbb{R}^+$

numeri pari

numeri dispari

Esercizio

Stabilire se $\mathscr{F} = \{A_0, A_1\}$ *dove* $A_0 := \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *e* $A_1 := \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$ *è un ricoprimento o partizione di un insieme* $\mathbb{Z}$.

SOLUZIONE. Siccome $A_0 \cup A_1 = \mathbb{Z}$ allora $\{A_0, A_1\}$ è ricoprimento di $\mathbb{Z}$. Chiaramente $A_0 \neq \emptyset \neq A_1$ e $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Quindi $\{A_0, A_1\}$ è partizione di $\mathbb{Z}$.

Esercizio (per casa) ESERCIZIO

Stabilire se $\mathscr{F} = \{A_0, A_1, A_2\}$ *è ricoprimento o partizione di* $\mathbb{Z}$ *dove* $A_i := \{3n + i \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Classe di un elemento

Consideriamo una partizione $\mathscr{F}$ di un insieme X.
Sia $x \in X$. Poiché $\bigcup_{A \in \mathscr{F}} A = X$, si avrà $x \in \bigcup_{A \in \mathscr{F}} A$.
Per definizione di unione, esisterà un $A \in \mathscr{F}$ tale che $x \in A$.
Siccome gli insiemi della partizione sono a due a due disgiunti, non ci potrà essere alcun altro insieme della partizione contenente x.

In simboli abbiamo dimostrato che

$$\forall x \in X, \exists! A \in \mathscr{F}, x \in A.$$

L'unico insieme A di $\mathscr{F}$ contenete x si indica con il simbolo $[x]$ e prende il nome di classe di x.
Diremo anche che x rappresenta A o che x è un rappresentante di A.

Esempio

Scriviamo le classi $[1], [2]$ e $[3]$ degli elementi di $X = \{1,2,3\}$ per ciascuna delle possibili partizioni di X.

non é un numero, é un INSIEME di elementi

Partizione	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$\mathscr{F}_1 = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
$\mathscr{F}_2 = \{\{1\},\{2,3\}\}$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
$\mathscr{F}_3 = \{\{2\},\{1,3\}\}$	$\{1,3\}$	$\{2\}$	$\{1,3\}$
$\mathscr{F}_4 = \{\{3\},\{1,2\}\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$
$\mathscr{F}_5 = \{\{1,2,3\}\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$

E' chiaro da questo esempio che

i) • la classe di un elemento dipende dalla scelta della particolare partizione;

ii) • una stessa classe può avere più di un rappresentante (tanti quanti sono i suoi elementi);

iii) • classi diverse possono contenere un numero diverso di elementi.

Esercizio (per casa) ESERCIZIO

In ciascuno dei seguenti casi calcolare

$$\bigcap_{i\in I} A_i \qquad e \qquad \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Stabilire poi, motivando la risposta, se $\mathscr{F} = \{A_i \mid i \in I\}$ *sia un ricoprimento e/o partizione dell'insieme* X.

1. $X = \mathbb{N}$, $I = \{0,1,2\}$, $A_i = \{3q + i \mid q \in \mathbb{N}\}$.
2. $X = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{N}$, $A_i = \{ki \mid k \in \mathbb{N}\}$.
3. $X = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{Z}$, $A_i = [i, i+1]$.
4. $X = \mathbb{Q}$, $I = \mathbb{Z}$, $A_i = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \neq i\} = \mathbb{Q} \setminus \{i\}$.
5. $X = \mathbb{N}$, $I = \mathbb{N}$, $A_i = \{i^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \neq 0\}$.

Corrispondenze

Consideriamo degli insiemi A e B.

Una corrispondenza (o relazione binaria) da A in B è un qualunque sottoinsieme $\mathscr{R}$ del prodotto cartesiano $A \times B$. Quindi $\mathscr{R} \subseteq A \times B$.

Per indicarla, scriveremo anche

(much better)

$$\boxed{\mathscr{R} : A \to B} \quad \text{oppure} \quad A \xrightarrow{\mathscr{R}} B.$$

L'insieme A è detto dominio della corrispondenza mentre l'insieme B è detto codominio della corrispondenza.

Se $(a, b) \in \mathscr{R}$, diremo equivalentemente che

- a è in corrispondenza con b;
- b è una immagine di a (tramite $\mathscr{R}$);
- a è una controimmagine di b (tramite $\mathscr{R}$).

Grafo di adiacenza di una corrispondenza.

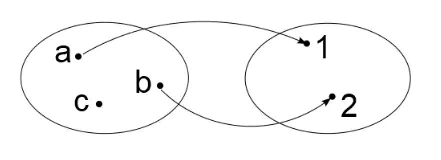
Siano A e B degli insiemi. Possiamo rappresentare una corrispondenza $\mathscr{R} : A \to B$ graficamente nel modo seguente. Disegniamo i diagrammi di Eulero-Venn di A e B. Poi, se $a \in A$ è in corrispondenza con $b \in B$, cioè se $(a, b) \in \mathscr{R}$, allora si disegna una freccia che parte da a e arriva in b. Quello che si ottiene è il grafo di adiacenza di $\mathscr{R}$.

Esempio

Consideriamo $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ e $\mathscr{R} = \{(a, 1), (b, 2)\} \subseteq A \times B$.

- Poiché $(a, 1) \in \mathscr{R}$, dobbiamo disegnare una freccia da a in 1.
- Poiché $(b, 2) \in \mathscr{R}$, dobbiamo disegnare una freccia da b in 2.

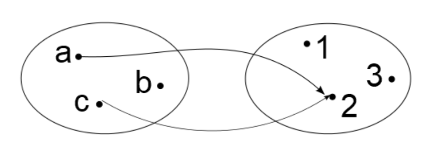
Pertanto il grafo di adiacenza di $\mathscr{R}$ è



pacchetto latex diagrammi Eulero-Venn?

Esempio

Viceversa da un grafo di adiacenza come il seguente



possiamo riconoscere la corrispondenza da $A = \{a, b, c\}$ in $B = \{1, 2, 3\}$ data da $\mathscr{R} = \{(a, 2), (c, 2)\}$.

Funzioni.

Una funzione da un insieme A in un insieme B è una corrispondenza $f : A \to B$ (quindi $f \subseteq A \times B$) tale che ogni elemento di A abbia una ed una sola immagine in B. In simboli scriveremo:

$$\forall a \in A, \exists! b \in B, (a, b) \in f.$$

Siccome l'elemento b di sopra è unico e dipende esclusivamente da f ed a possiamo indicarlo con il simbolo $f(a)$ che si legge "f valutato in a" o "valore di f in a" o "f di a" o "l'immagine di a tramite f".

Sappiamo che una controimmagine di b è un elemento $a \in A$ tale che $(a, b) \in f$ cioé tale che $f(a) = b$.

Essendo f una corrispondenza si ha $f \subseteq A \times B$. Quando riguardiamo f come un sottoinsieme di $A \times B$ diremo che f è il grafico o grafo della funzione. Talvolta, per distinguere la funzione dal suo grafico, si usano lettere maiuscole come F, G, Γ per indicare quest'ultimo.

Una funzione è univocamente determinata dal suo dominio, codominio ed immagine di ogni elemento del dominio.
In altre parole vale il seguente

Criterio (di uguaglianza di funzioni)

Due funzioni f e g sono uguali se hanno

- *stesso dominio A,*
- *stesso codominio B,*
- *$f(a) = g(a)$ per ogni $a \in A$.*

Più rigorosamente dovremmo definire una funzione come una terna ordinata (A, B, f) dove A è il dominio, B il codominio ed $f \subseteq A \times B$ è il grafico della funzione.

questa è la funzione

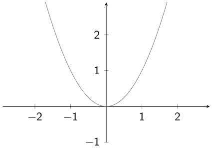
questo è il grafico

Notazione per le funzioni

Possiamo definire una funzione descrivendo l'immagine di ogni elemento del dominio. Ad esempio consideriamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui grafico è

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y\}.$$

Se rappresentiamo i punti di questo insieme in un sistema di assi cartesiani otteniamo il ben noto grafico di una parabola.



Ora $(x, y) \in f \Leftrightarrow x^2 = y$ e quindi possiamo dire che

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ponendo $f(x) = x^2$.

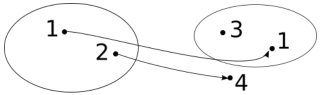
Scriveremo anche più brevemente

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \text{oppure} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2.$$

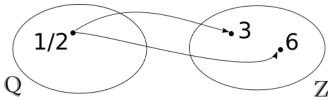
Il problema della buona definizione

Quando, come sopra, definiamo una funzione descrivendo l'immagine di ogni elemento del suo dominio, possono insorgere dei problemi: essa può non essere ben definita, cioé non essere di fatto una funzione. Ad esempio:

1. $f : \{1,2\} \to \{1,3\}$ definita ponendo $f(x) = x^2$ non è ben definita: un'immagine esce dal codominio. Infatti $f(2) = 4 \notin \{1,3\}$.



2. $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ definita ponendo $f(\frac{a}{b}) = a + b$ non è ben definita: c'è un elemento del dominio che ha immagini distinte. Infatti $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ma $f(\frac{1}{2}) = 3$ e $f(\frac{2}{4}) = 6$ sono diversi.



Osservazione

L'ultima corrispondenza considerata, si scrive più rigorosamente come

$$f = \{(\tfrac{a}{b}, a+b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}.$$

Non è una funzione perché $(\frac{1}{2}, 6) = (\frac{2}{4}, 2+4) \in f$ *e* $(\frac{1}{2}, 3) = (\frac{1}{2}, 1+2) \in f$ *e quindi l'elemento* $\frac{1}{2}$ *del dominio ha due immagini.*

Esercizio ESERCIZIO

Sia $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ *la corrispondenza*

$$g := \{(\tfrac{a}{b}, a+b) \mid a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mathrm{MCD}(a, b) = 1\}.$$

Stabilire se si tratta di una funzione.

Esercizio ESERCIZIO

Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *la corrispondenza* $f := \{(a-b, a \cdot b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Stabilire se si tratta di una funzione.

Osservazione

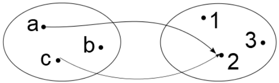
Notiamo che in Analisi, NON si richiede ad una funzione di essere definita su tutti gli elementi del suo dominio.
Prima si introduce la funzione attraverso la sua regola di calcolo, ad esempio $f(x) = \sqrt{x}$, e solo dopo si individua l'insieme dei numeri in cui questa espressione ha senso, cioé il dominio di esistenza della funzione, in questo caso $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.

In Algebra invece si scrive direttamente

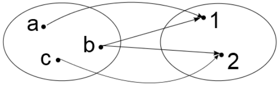
$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sqrt{x}.$$

Esempi e non-esempi

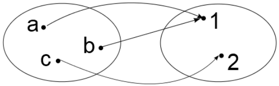
Vediamo quali tra i seguenti grafi individuano una funzione.
Notiamo che tutti e tre i grafi individuano una corrispondenza.



La prima corrispondenza non è una funzione: l'elemento b non ha immagine.



La seconda corrispondenza non è una funzione: l'immagine di b non è solo una.



La terza corrispondenza è una funzione: ogni elemento del dominio ha esattamente un'immagine (da ogni elemento esce una ed un'unica freccia).