Lezione 7

Alessandro Ardizzoni

Lemma

Sia $\mathscr{R}$ una relazione d'equivalenza su un insieme A e sia $Z \subseteq A$.
Allora Z è un sistema completo di rappresentanti delle classi d'equivalenza rispetto a $\mathscr{R}$ se e solo se la seguente funzione è biiettiva

$$f : Z \to \mathscr{F}_{\mathscr{R}} = \{[a] \mid a \in A\}, \quad z \mapsto [z].$$

<u>DIMOSTRAZIONE</u>. Per definizione Z è un sistema completo di rappresentanti se e solo se

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}, \exists! z \in Z, z \in S}.$$

Dato che ogni $S \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}$ è una classe d'equivalenza, sappiamo che $z \in S \Leftrightarrow S = [z] \Leftrightarrow S = f(z)$. Pertanto possiamo riscrivere

$$\boxed{\forall S \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}, \exists! z \in Z, S = f(z)}$$

ma questo equivale a richiedere che f sia biiettiva. $\square$

Lemma

Sia $\mathscr{R}$ una relazione d'equivalenza su un insieme A e sia $Z \subseteq A$.
Allora Z è un sistema completo di rappresentanti delle classi d'equivalenza rispetto a $\mathscr{R}$ se e solo se valgono le condizioni:

1. *ogni elemento di A è in relazione con un qualche elemento di Z, in simboli $\forall a \in A, \exists z \in Z, z\mathscr{R}a$;*
2. *se due elementi di Z sono in relazione tra loro, allora sono uguali, in simboli $\forall z, z' \in Z,\ z\mathscr{R}z' \Rightarrow z = z'$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo dimostrato che $Z \subseteq A$ è un sistema completo di rappresentanti se e solo se la seguente funzione è biiettiva.

$$f : Z \to \mathscr{F}_{\mathscr{R}} = \{[a] \mid a \in A\}, \quad z \mapsto [z]$$

Ora f è biiettiva se f suriettiva ed iniettiva.
SURIETTIVA: Si traduce nella richiesta $\forall S \in \mathscr{F}_{\mathscr{R}}, \exists z \in Z, f(z) = S$ cioé $\forall a \in A, \exists z \in Z, f(z) = [a]$. Ma $f(z) = [a] \Leftrightarrow [z] = [a] \Leftrightarrow z\mathscr{R}a$ cioè 1.
INIETTIVA: Si traduce nella richiesta $\forall z, z' \in Z,\ f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$.
Ma $f(z) = f(z') \Leftrightarrow [z] = [z'] \Leftrightarrow z\mathscr{R}z'$ cioè 2.

Esercizio

Sia $\mathscr{R}$ *la relazione d'equivalenza su* $\mathbb{N}^2$ *definita da*

$$(a,b)\mathscr{R}(c,d) \quad se \quad a+b=c+d.$$

Determinare un sistema completo di rappresentanti delle classi d'equivalenza rispetto a $\mathscr{R}$.

Soluzione

Vediamo che $Z := \{(n,0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *è un sistema completo di rappresentanti. Dobbiamo verificare che*

1. *ogni elemento di* $\mathbb{N}^2$ *è in relazione con un qualche elemento di* Z;
2. *se due elementi di* Z *sono in relazione tra loro, allora sono uguali.*

1 Se $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *e* $(n,0) \in Z$ *allora*
$(n,0)\mathscr{R}(a,b) \Leftrightarrow n+0=a+b \Leftrightarrow n=a+b.$
In effetti, si ha che $(a+b,0)\mathscr{R}(a,b)$ *dove* $(a+b,0) \in Z$.
2 Siano $(m,0),(n,0) \in Z$. *Se* $(m,0)\mathscr{R}(n,0)$, *allora* $m+0=n+0$ *cioé* $m=n$. *Pertanto* $(m,0)=(n,0)$.

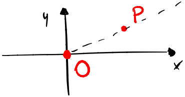
Un esempio

Consideriamo sul piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ la relazione $\mathscr{R}$ definita, per ogni $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, ponendo

$$P_1 \mathscr{R} P_2 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \text{ con } m > 0, \text{ tale che } x_1 = mx_2 \text{ e } y_1 = my_2.$$

Vediamo che $\mathscr{R}$ è una relazione d'equivalenza.

- RIFLESSIVA: lo è perché $x_1 = mx_1$ e $y_1 = my_1$ per $m := 1$.
- SIMMETRICA: lo è perché da $x_1 = mx_2$ e $y_1 = my_2$ possiamo scrivere $x_2 = \frac{1}{m}x_1$ e $y_2 = \frac{1}{m}y_1$.
- TRANSITIVA: lo è perchè da $x_1 = mx_2$, $y_1 = my_2$, $x_2 = nx_3$, $y_2 = ny_3$ otteniamo $x_1 = mnx_3$, $y_1 = mny_3$.



La classe d'equivalenza di un $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ è

$$[P] = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid Q \mathscr{R} P\} = \{(mx, my) \mid m \in \mathbb{R}, m > 0\}.$$

Abbiamo dunque due casi. Se $P = O := (0,0)$ allora $[P] = \{O\}$. Se $P \neq O$, allora $[P]$ è l'insieme dei punti della semiretta uscente da O e passante per P, origine esclusa. Un insieme completo di rappresentanti è, ad esempio $\{O\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Esercizio

Sia $\mathscr{R}$ la relazione su $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ definita ponendo $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $x = (1+2n)y$. Stabilire se si tratta di una relazione d'equivalenza o di una relazione d'ordine parziale o totale.

<u>SOLUZIONE</u>. RIFLESSIVA. Riflessiva vuol dire $x\mathscr{R}x$ cioé che $\forall x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\exists n \in \mathbb{N}, x = (1+2n)x$ ma questo è vero per $n=0$. SIMMETRICA. Notiamo che, nel caso particolare in cui $x, y \in \mathbb{N}$ allora $x\mathscr{R}y$ dice che y divide x. Basta quindi dare due numeri naturali in cui uno dei due divida l'altro ma non valga il viceversa per avere che $\mathscr{R}$ non è simmetrica. In effetti $3 = (1+2\cdot 1)\cdot 1$ dice che $3\mathscr{R}1$ ma non può essere che $1\mathscr{R}3$, altrimenti ci sarebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $1 = (1+2n)3$, il che non è vero perché 1 non è multiplo di 3. Quindi non è una relazione d'equivalenza. ANTISIMMETRICA. Vediamo se è antisimmetrica, cioé se $x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$. In effetti $x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}x$ vuol dire che $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tali che $x = (1+2n)y$ e $y = (1+2m)x$. Sostituendo la seconda nella prima troviamo $x = (1+2n)(1+2m)x$ dove possiamo cancellare x (perché $x \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$) ottenendo $1 = (1+2n)(1+2m)$. Essendo questa un'uguaglianza in $\mathbb{N}$, ne deriva $1+2\overset{n=0}{n} = 1$ e quindi $x = (1+2n)y = y$.

$= (1+2\cdot 0)y$
$= 1\cdot y$
$= y$

TRANSITIVA. Vediamo che è transitiva, cioé che $x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$. Ma $x\mathscr{R}y \wedge y\mathscr{R}z$ dice che esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $x = (1+2n)y$ e $y = (1+2m)z$. Sostituendo la seconda nella prima troviamo

$$x = (1+2n)(1+2m)z = (1+2n+2m+4nm)z = (1+2(n+m+2nm))z$$

e dunque $x\mathscr{R}z$. Pertanto è anche transitiva e dunque una relazione d'ordine.

TOTALE. Se fosse d'ordine totale, due numeri primi sarebbero sempre in relazione e quindi uno dei due dividerebbe l'altro. Basta considerare 2 e 3 per negare questa eventualità. In effetti $2\not\mathscr{R}3$ e $3\not\mathscr{R}2$ e quindi la relazione d'ordine non è totale.

Esercizio (per casa)

Sia $\mathscr{R}$ data da $r\mathscr{R}s \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, r = s^n$. Dimostrare che $\mathscr{R}$ è relazione d'ordine su $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Stabilire se $\mathscr{R}$ è un ordine totale su $\mathbb{R}_{\geq 0}$ o su $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio (per casa)

Sia $\mathscr{R}$ la relazione su $\mathbb{R}^2$ definita ponendo $(x_1, y_1)\mathscr{R}(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 + y_1^2 \leq x_2^2 + y_2^2$. Stabilire se si tratta di una relazione d'ordine.

Esercizio (per casa)

Sia $\mathscr{R}$ la relazione su $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ definita ponendo $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x = (1 + 3n)y$. Stabilire se si tratta di una relazione d'equivalenza o di una relazione d'ordine parziale o totale.

Esercizio (per casa)

Sia $\mathscr{R}$ la relazione su $\mathbb{R}$ definita ponendo $r\mathscr{R}s \Leftrightarrow r - s \in \mathbb{Z}$. Verificare che è una relazione di equivalenza. Dimostrare che l'intervallo $[0, 1) = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r < 1\}$ è un sistema completo di rappresentanti.

Insieme quoziente

Data una relazione d'equivalenza $\mathscr{R}$ su A le abbiamo associato la partizione $\mathscr{F}_{\mathscr{R}} := \{[a] \mid a \in A\}$ formata delle classi d'equivalenza. Questo insieme è detto l'insieme quoziente di A rispetto ad $\mathscr{R}$ e si indica più spesso con il simbolo $A/\mathscr{R}$ (si legge "A su $\mathscr{R}$"). Quindi

$$\boxed{A/\mathscr{R} = \{[a] \mid a \in A\}}.$$

Consideriamo la seguente funzione suriettiva, detta proiezione canonica

$$\pi : A \to A/\mathscr{R}, \quad a \mapsto [a].$$

Osservazione

1) In generale π non è iniettiva: infatti se $x, y \in A$, allora $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow [x] = [y] \Leftrightarrow x\mathscr{R}y$. Pertanto due elementi hanno la stessa immagine se e solo se sono confrontabili (non è detto che siano uguali).
2) Per ogni funzione f abbiamo definito $\mathscr{R}_f$ dove $x\mathscr{R}_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Se $f = \pi$, allora $x\mathscr{R}_\pi y \Leftrightarrow \pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x\mathscr{R}y$ cioè $\mathscr{R} = \mathscr{R}_\pi$. Quindi ogni relazione d'equivalenza è la relazione associata alla proiezione canonica.

Osservazione

Abbiamo visto che se $\mathscr{R}$ è una relazione d'equivalenza su un insieme A e $Z \subseteq A$, allora Z è un sistema completo di rappresentanti delle classi d'equivalenza di $\mathscr{R}$ se e solo se la funzione

$$f : Z \to \mathscr{F}_{\mathscr{R}}, \quad z \mapsto [z],$$

è una biezione. Siccome $\mathscr{F}_{\mathscr{R}} = A/\mathscr{R}$ otteniamo

$$f : Z \to A/\mathscr{R}, \quad z \mapsto [z],$$

e quindi $f = \pi_{|Z}$ dove $\pi : A \to A/\mathscr{R}, a \mapsto [a]$, è la proiezione canonica.

Studieremo ora il problema della buona definizione di funzioni il cui dominio sia un insieme quoziente. Partiamo con un paio di esercizi.

Esercizio

Sia $\mathscr{R}$ la relazione d'equivalenza su $\mathbb{Z}$ definita da $a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a$ e b sono numeri della stessa parità (cioé sono entrambi pari o entrambi dispari). Stabilire se la funzione $f : \mathbb{Z}/\mathscr{R} \to \mathbb{Z}$ definita ponendo $f(\overline{a}) = a$ è ben definita.

SOLUZIONE. Ricordiamo che $\overline{a} = [a]$. Perché f sia ben definita, cioé davvero una funzione, occorre che lo stesso elemento abbia una sola immagine. Dobbiamo cioé verificare che, $\forall x, y \in \mathbb{Z}/\mathscr{R}$, si abbia

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Ora $x \in \mathbb{Z}/\mathscr{R} \Rightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, x = \overline{a}$. Similmente $\exists b \in \mathbb{Z}, y = \overline{b}$. Quindi dobbiamo verificare che $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, si abbia

$$\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow f(\overline{a}) = f(\overline{b}) \qquad \text{cioé} \qquad \boxed{\overline{a} = \overline{b} \Rightarrow a = b}.$$

Questo però non è vero in generale: ad esempio 2 e 0 sono entrambi pari ma diversi. Pertanto $\overline{2} = \overline{0}$ ma $2 \neq 0$. Quindi f non è una funzione. □

Esercizio

Per la stessa relazione d'equivalenza di sopra, stabilire se la funzione $g : \mathbb{Z}/\mathscr{R} \to \mathbb{Z}$ definita ponendo $g(\overline{a}) = (-1)^a$ è ben definita.

<u>SOLUZIONE</u>. Come nell'esercizio precedente, g è ben definita se $\forall x, y \in \mathbb{Z}/\mathscr{R},\ x = y \Rightarrow g(x) = g(y)$. Sostituendo le classi, dobbiamo dimostrare che $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{Z},\ \overline{a} = \overline{b} \Rightarrow (-1)^a = (-1)^b}$. D'altra parte se $\overline{a} = \overline{b}$ allora a e b sono numeri della stessa parità. In particolare $a - b$ è certamente un numero pari, cioé $a - b = 2k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Quindi

$$(-1)^a = (-1)^{b+2k} = (-1)^b(-1)^{2k} = (-1)^b$$

e dunque g è ben definita.

Gli esercizi precedenti mostrano che il problema della buona definizione di una funzione il cui dominio sia un quoziente sta nel fatto che la stessa classe può avere rappresentanti diversi.

Vogliamo ora trovare una caratterizzazione.

Definizione

Consideriamo una funzione $f : X \to Y$ ed una relazione d'equivalenza $\mathscr{R}$ su X. Diremo che f passa al quoziente $X/\mathscr{R}$ se esiste una funzione $\overline{f} : X/\mathscr{R} \to Y$ tale che

$$\overline{f} \circ \pi = f$$

dove $\pi : X \to X/\mathscr{R},\ x \mapsto \overline{x}$, indica la proiezione canonica.
In altre parole il seguente diagramma è commutativo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y \\
& X/\mathscr{R} \arrow[ur, dotted, "\overline{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Definizione

Diremo che $f : X \to Y$ è compatibile con $\mathscr{R}$ se elementi in relazione hanno la stessa immagine. In simboli:

$$\forall x, y \in X,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Siamo ora in grado di enunciare la caratterizzazione che cercavamo.

Proposizione

Le seguenti affermazioni sono equivalenti per $f : X \to Y$.

1. *f passa al quoziente $X/\mathscr{R}$.*
2. *La funzione $\overline{f} : X/\mathscr{R} \to Y$ definita ponendo $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ è ben definita.*
3. *f è compatibile con $\mathscr{R}$.*

Proof.

1 $\Rightarrow$ 2. Per ipotesi esiste una funzione $\overline{f} : X/\mathscr{R} \to Y$ tale che $f = \overline{f} \circ \pi$. Allora $\overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\pi(x)) = (\overline{f} \circ \pi)(x) = f(x)$, per ogni $x \in X$. Pertanto la funzione $\overline{f}$ è proprio quella in 2.

2 $\Rightarrow$ 1. Notiamo che $(\overline{f} \circ \pi)(x) = \overline{f}(\pi(x)) = \overline{f}(\overline{x}) = f(x)$ e quindi $\overline{f} \circ \pi = f$.

2 $\Leftrightarrow$ 3. Sappiamo che $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$. Pertanto $\overline{f}$ è ben definita $\Leftrightarrow \left(\forall x, y,\ \overline{x} = \overline{y} \Rightarrow \overline{f}(\overline{x}) = \overline{f}(\overline{y})\right) \Leftrightarrow \left(\forall x, y,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow f(x) = f(y)\right) \Leftrightarrow f$ è compatibile. □

Esempio

Consideriamo la relazione d'equivalenza $\mathscr{R}$ su $\mathbb{Z}$, dell'esercizio precedente, definita ponendo $a\mathscr{R}b$ se e solo se a e b hanno la stessa parità. Abbiamo dimostrato che la funzione $g : \mathbb{Z}/\mathscr{R} \to \mathbb{Z}$, definita ponendo $g(\overline{a}) = (-1)^a$, è ben definita verificando che $\forall a, b,\ \overline{a} = \overline{b} \Rightarrow (-1)^a = (-1)^b$ ma questo vuol dire esattamente che la funzione $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, a \mapsto (-1)^a$, è compatibile con $\mathscr{R}$ e quindi induce la funzione $\overline{h} : \mathbb{Z}/\mathscr{R} \to \mathbb{Z}$ che è proprio g.

Esempio

Sia $f : X \to Y$ una funzione. Consideriamo la relazione d'equivalenza associata $\mathscr{R}_f$ definita su X ponendo $x\mathscr{R}_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
Questo ci dice che f è compatibile con $\mathscr{R}_f$. Pertanto la funzione

$$\overline{f} : X/\mathscr{R}_f \to Y \text{ definita ponendo } \overline{f}(\overline{x}) = f(x),$$

è ben definita. Inoltre è iniettiva. Infatti, per ogni $x_1, x_2 \in X$, si ha che

$$\overline{f}(\overline{x_1}) = \overline{f}(\overline{x_2}) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1\mathscr{R}_f x_2 \Rightarrow \overline{x_1} = \overline{x_2}.$$

Esercizio

Sia $\mathscr{R}$ la relazione su $\mathbb{Q}$ definita ponendo $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4(x-y)$. *Provare che $\mathscr{R}$ è una relazione d'equivalenza. Determinare la classe d'equivalenza di* 0 *e quella di* 1. *Stabilire se le funzioni* $f_1, f_2 : \mathbb{Q}/\mathscr{R} \to \mathbb{Q}$ *definite ponendo* $f_1(\overline{x}) = x^2 - 4x + 3$ *e* $f_2(\overline{x}) = x^2 + 4x + 3$ *sono ben definite.*

<u>SOLUZIONE</u>. Vediamo che $\mathscr{R}$ è una relazione d'equivalenza.
RIFLESSIVA: $x\mathscr{R}x \Leftrightarrow x^2 - x^2 = 4(x-x)$, ma questo è vero $\forall x$.
SIMMETRICA: $x\mathscr{R}y \Rightarrow x^2 - y^2 = 4(x-y) \Rightarrow y^2 - x^2 = 4(y-x) \Rightarrow y\mathscr{R}x$.
TRANSITIVA: $x\mathscr{R}y \ \wedge \ y\mathscr{R}z \Rightarrow x^2 - y^2 = 4(x-y) \ \wedge \ y^2 - z^2 = 4(y-z)$.
Sommando termine a termine otteniamo $x^2 - z^2 = 4(x-z)$, cioé $x\mathscr{R}z$.
CLASSI DI 0 e 1. Per definizione $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x\mathscr{R}0\}$. Ora
$x\mathscr{R}0 \Leftrightarrow x^2 - 0^2 = 4(x-0) \Leftrightarrow x^2 = 4x \Leftrightarrow x = 0, 4$. Pertanto $\overline{0} = \{0, 4\}$.
Invece $x\mathscr{R}1 \Leftrightarrow x^2 - 1^2 = 4(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$. Pertanto
$\overline{1} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x\mathscr{R}1\} = \{1, 3\}$.
Ora f_1 è ben definita se, per ogni $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Q}/\mathscr{R}$, si ha $\overline{x} = \overline{y} \Rightarrow f_1(\overline{x}) = f_1(\overline{y})$
cioé se $x^2 - y^2 = 4(x-y) \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = y^2 - 4y + 3$. Ma sono addirittura equivalenti.

Invece per la buona definizione di $f_2 : \mathbb{Q}/\mathscr{R} \to \mathbb{Q}, f_2(\overline{x}) = x^2 + 4x + 3$, dobbiamo vedere se $x^2 - y^2 = 4(x - y) \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = y^2 + 4y + 3$. Quest'ultima equivale a $x^2 - y^2 = 4(y - x)$. Se l'implicazione fosse vera, si avrebbe $4(x - y) = x^2 - y^2 = 4(y - x)$ da cui $4(x - y) = 4(y - x)$ e quindi $x = y$ il che non è vero per ogni x e y. Quindi f_2 non è ben definita. $\square$

Esercizio

Per ogni $r \in \mathbb{R}$ consideriamo la parte intera $\lfloor r \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq r\}$ e definiamo $r\mathscr{R}s \Leftrightarrow \lfloor r \rfloor = \lfloor s \rfloor$. Dimostrare che $\mathscr{R}$ è una relazione d'equivalenza. Descrivere le classi d'equivalenza ed individuare un sistema completo di rappresentanti. Determinare una biiezione tra $\mathbb{R}/\mathscr{R}$ e $\mathbb{Z}$.

<u>SOLUZIONE</u>. E' immediato verificare che $\mathscr{R}$ è una relazione d'equivalenza. Sia $\mathbb{R}/\mathscr{R} = \{\overline{r} \mid r \in \mathbb{R}\}$ l'insieme delle classi di equivalenza. Dato $r \in \mathbb{R}$, ricordiamo che $\overline{r} = \{s \in \mathbb{R} \mid s\mathscr{R}r\} = \{s \in \mathbb{R} \mid \lfloor s \rfloor = \lfloor r \rfloor\}$. Vediamo che $\overline{r} = [n, n+1)$ dove $n := \lfloor r \rfloor$. In effetti $s \in \overline{r}$ significa $\lfloor s \rfloor = \lfloor r \rfloor = n$. Ma allora $n \leq s < n+1$ cioé $s \in [n, n+1)$. Quindi $\overline{r} \subseteq [n, n+1)$. Viceversa, dato $s \in [n, n+1)$, allora $\lfloor s \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq s\} = n = \lfloor r \rfloor$ e quindi $s \in \overline{r}$. Pertanto $\overline{r} = [n, n+1)$ come voluto.

Ciò dimostra che $\mathbb{R}/\mathscr{R} \subseteq \{[n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
Per vedere l'altra inclusione, basta osservare che, se $n \in \mathbb{Z}$ allora $n = \lfloor n \rfloor$ e quindi $[n, n+1) = \overline{n} \in \cancel{\mathscr{F}}$. Pertanto l'insieme delle classi di equivalenza è

$\mathbb{R}/\mathcal{R}$

$$\mathbb{R}/\mathscr{R} = \{[n, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Un sistema completo di rappresentanti è $\mathbb{Z}$ perché da ogni classe $[n, n+1)$ stiamo pescando esclusivamente l'elemento n. Un'altro sistema completo è $\{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Troviamo ora la biiezione.

MODO 1. Siccome $\mathbb{Z}$ è un sistema completo di rappresentanti sappiamo che $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathscr{R}, n \mapsto \overline{n}$, è una biiezione.
MODO 2. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad r \mapsto \lfloor r \rfloor.$$

Essa è compatibile con $\mathscr{R}$. Infatti $r\mathscr{R}s$ se e solo se $\lfloor r \rfloor = \lfloor s \rfloor$ cioé $f(r) = f(s)$. Pertanto f passa al quoziente, e quindi $\overline{f} : \mathbb{R}/\mathscr{R} \to \mathbb{Z}, \overline{r} \mapsto \lfloor r \rfloor$ è una funzione.
SURIETTIVA: Se $n \in \mathbb{Z}$ allora $n = \lfloor n \rfloor = \overline{f}(\overline{n})$ e dunque $\overline{f}$ è suriettiva.
INIETTIVA: Si ha $\overline{f}(\overline{r}) = \overline{f}(\overline{s}) \Rightarrow \lfloor r \rfloor = \lfloor s \rfloor \Rightarrow r\mathscr{R}s \Rightarrow \overline{r} = \overline{s}$.
Pertanto $\overline{f}$ è iniettiva, dunque biiettiva. $\square$

Esercizio

Sia $\mathscr{R}$ la relazione d'equivalenza dell'esercizio precedente. Dire se le seguenti funzioni sono ben definite:

$$\alpha : \mathbb{R}/\mathscr{R} \to \mathbb{R}/\mathscr{R}, \overline{r} \mapsto \overline{r-(1/2)} \quad e \quad \beta : \mathbb{R}/\mathscr{R} \to \mathbb{R}/\mathscr{R}, \overline{r} \mapsto \overline{r-5}.$$

Soluzione

Notiamo che $\alpha = \overline{f}$ *dove* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathscr{R}, r \mapsto \overline{r-(1/2)}$. *Sappiamo che* $\overline{f}$ *è una funzione* $\Leftrightarrow$ f *è compatibile con* $\mathscr{R}$. *Dobbiamo quindi vedere che* $\forall r, s \in \mathbb{R}$ *vale* $r\mathscr{R}s \Rightarrow f(r) = f(s)$ *cioé* $\lfloor r \rfloor = \lfloor s \rfloor \Rightarrow \overline{r-(1/2)} = \overline{s-(1/2)}$ *cioé* $\lfloor r \rfloor = \lfloor s \rfloor \Rightarrow \lfloor r-(1/2) \rfloor = \lfloor s-(1/2) \rfloor$. *Questo non è vero. Ad esempio* $\lfloor 3/2 \rfloor = 1 = \lfloor 1 \rfloor$ *ma* $\lfloor 3/2 - 1/2 \rfloor = 1 \neq 0 = \lfloor 1-(1/2) \rfloor$. *Quindi* α *non è una funzione.*
Similmente, β *risulta essere ben definita se e solo se* $\lfloor r \rfloor = \lfloor s \rfloor \Rightarrow \lfloor r-5 \rfloor = \lfloor s-5 \rfloor$ *per ogni* $r, s \in \mathbb{R}$, *ma questo è vero perché* $\lfloor r-5 \rfloor = \lfloor r \rfloor - 5$ *e* $\lfloor s-5 \rfloor = \lfloor s \rfloor - 5$. *Pertanto* β *è una funzione.*