Lezione 4

Alessandro Ardizzoni

Funzioni iniettive, suriettive e biiettive

Una funzione $f : A \to B$ si dice iniettiva se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte tramite f. In simboli

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad \Big(a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Big).$$

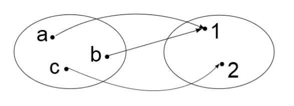
Per contrapposizione, questo equivale a richiedere che

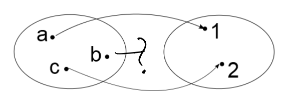
$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad \Big(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \Big).$$

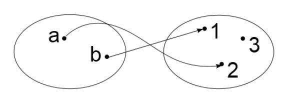
Un sinonimo di "funzione iniettiva" è iniezione.

Esercizio

Stabilire quali tra i seguenti grafi individua una iniezione.







Soluzione

Trattiamoli uno alla volta.

- *Il primo grafo è una funzione non iniettiva: a, b sono diversi con la stessa immagine.* $a \neq b \rightsquigarrow f(a) = f(b)$
- *Il secondo grafo non è neppure una funzione: b non ha immagine.*
- *Il terzo grafo è una funzione iniettiva: elementi diversi hanno immagini diverse cioé in ogni elemento del codominio può entrare una sola freccia (arriva "al più" una freccia).*

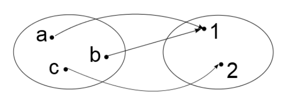
Una funzione $f : A \to B$ è suriettiva se ogni elemento di B è immagine di qualche elemento di A. In simboli:

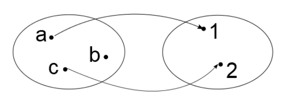
$$\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a).$$

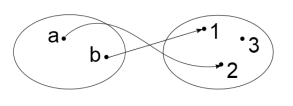
Un sinonimo di "funzione suriettiva" è suriezione.

Esercizio

Stabilire se i seguenti grafi (quelli di prima) rappresentano una suriezione.







Soluzione

- *Il primo grafo è una funzione suriettiva: ogni elemento del codominio è colpito da una freccia (cioé arriva "almeno" una freccia).*
- *Il secondo grafo non è neppure una funzione.*
- *Il terzo grafo è una funzione non suriettiva: 3 non è un'immagine.*

Una funzione $f : A \to B$ è biiettiva se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva. Un sinonimo di "funzione biiettiva" è biiezione.

Lemma

Una funzione $f : A \to B$ è biiettiva $\Leftrightarrow$ ogni elemento di B ha esattamente una controimmagine, in simboli

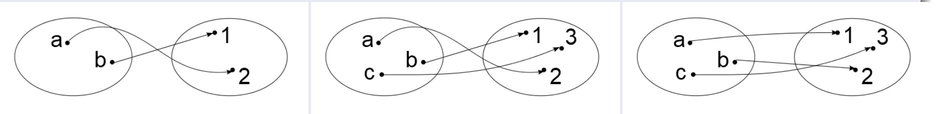
$$\forall b \in B, \exists! a \in A, b = f(a). \tag{1}$$

Proof.

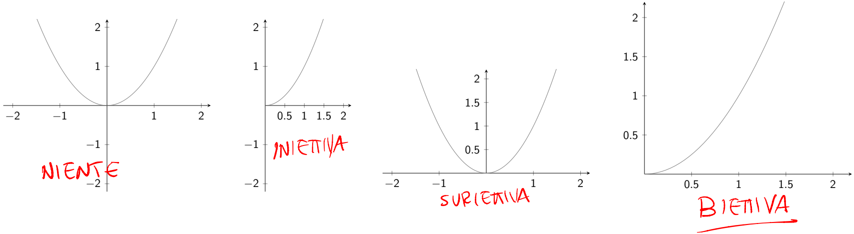
($\Rightarrow$) Se f è biiettiva allora è suriettiva cioé $\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a)$. Vediamo che a è unico. Se $\exists a' \in A$ con $b = f(a')$, allora $f(a') = f(a)$. Dato f iniettiva, segue $a' = a$ e dunque a è unico.
($\Leftarrow$) Supponiamo che valga (1) e dimostriamo che f è biiettiva cioé contemporaneamente iniettiva e suriettiva.
SURIETTIVA: sia $b \in B$; dobbiamo dimostrare che b è un'immagine. Ora, per (1), $\exists! a \in A, b = f(a)$; dunque b è immagine di a.
INIETTIVA: siano $a_1, a_2 \in A$ tali che $f(a_1) = f(a_2)$; dobbiamo dimostrare che $a_1 = a_2$. Chiamiamo $b := f(a_1) = f(a_2)$. Applicando (1) sappiamo che b è immagine di un solo elemento. Allora $a_1 = a_2$. □

Osservazione

Se $f : A \to B$ *è una biiezione, allora, nel suo grafo di adiacenza, da ogni punto del dominio esce esattamente una freccia ed in ogni punto del codominio ne entra esattamente una come in questi esempi.*



Mostriamo con l'esempio della parabola come una funzione dipenda strettamente da dominio, codominio e grafico. Se cambia uno di questi ingredienti cambia l'intera funzione. Poniamo $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.



1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ non è suriettiva (nessun numero negativo è un'immagine) e non è iniettiva ($f(1) = f(-1)$).
2. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ non è suriettiva (come in 1). Però è iniettiva: se $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ sono tali che $f(a_1) = f(a_2)$, allora $(a_1)^2 = (a_2)^2$. Pertanto $a_1 = \pm a_2$. Siccome $a_1 \geq 0$ e $a_2 \geq 0$, dovrà essere $a_1 = a_2$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ è suriettiva: se $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ allora $\sqrt{b}$ ha senso e $f(\sqrt{b}) = b$. Però non è iniettiva (come in 1). $\sqrt{-a}$ non ha senso!
4. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$ è sia iniettiva (come in 2) sia suriettiva (come in 3). Pertanto è biiettiva.

Esercizio

Si consideri la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, n \mapsto \frac{n+5}{4}$. *Stabilire se è ben definita, iniettiva e suriettiva.*

Soluzione

BEN BEFINITA. Dobbiamo verificare se f *è davvero una funzione. Poiché* $\forall n \in \mathbb{Z}, \frac{n+5}{4} \in \mathbb{Q}$, *le immagini stanno davvero in* $\mathbb{Q}$. *Inoltre ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *ha esattamente un'immagine, cioé* $\frac{n+5}{4}$. *Pertanto* f *è una funzione.*
INIETTIVA. Vediamo se, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, *vale* $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$. *In effetti:*

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \frac{a+5}{\cancel{4}} = \frac{b+5}{\cancel{4}} \Rightarrow a + \cancel{5} = b + \cancel{5} \Rightarrow a = b.$$

SURIETTIVA. Vediamo se, $\forall q \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{Z}, q = f(n)$ *cioé* $q = \frac{n+5}{4}$. *Ma sappiamo bene che non tutte le frazioni hanno 4 al denominatore. Ad esempio se* $q = \frac{1}{3}$ *ed esistesse* $n \in \mathbb{Z}$ *tale che* $q = \frac{n+5}{4}$, *allora*

per assurdo

$$\frac{1}{3} = \frac{n+5}{4} \Rightarrow 4 = 3(n+5) \Rightarrow 4 = 3n + 15 \Rightarrow -3n = 11 \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

il che è assurdo perché 11 *non è divisibile per* 3. *Quindi* f *non è suriettiva.*

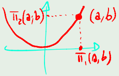
Esercizio (per casa)

Ripetere l'esercizio precedente per la funzione $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, n \mapsto \frac{n^2+3}{2}$.

Esempi

Vediamo delle funzioni speciali. Qui A e B sono insiemi non vuoti.

- La funzione $\mathrm{Id}_A : A \to A, a \mapsto a$, è detta identità di A ed è biiettiva.
- Se $A \subseteq B$ allora la funzione $i : A \to B, a \mapsto a$, è detta inclusione o immersione o iniezione canonica.
- Se $f : A \to B$ è una funzione ed $S \subseteq A$, allora $f_{|S} : S \to B, s \mapsto f(s)$, è detta la restrizione di f ad S.
- Se $f : A \to B$ è una funzione ed $S \subseteq B$ è tale che $\forall a \in A$ si abbia $f(a) \in S$, allora $f^{|S} : A \to S, a \mapsto f(a)$, è detta la corestrizione di f ad S.
- Le funzioni $\pi_1 : A \times B \to A, (a,b) \mapsto a$, e $\pi_2 : A \times B \to B, (a,b) \mapsto b$, sono dette le proiezioni canoniche su A e B (sono entrambe suriettive). (tipo proiezioni ortogonali)



Composizione di corrispondenze e funzioni

Consideriamo due corrispondenze $f : B \to C$ e $g : A \to B$ come in figura dove il codominio di g coincide con il dominio di f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dotted, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

f composto g

$\boxed{F \circ G = F(G)}$

Definiamo la composizione o corrispondenza composta $f \circ g : A \to C$

$$f \circ g := \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in g \ \wedge \ (b, c) \in f\}.$$

Se consideriamo due funzioni $f : B \to C$ e $g : A \to B$, dove il codominio di g coincide col dominio di f, sono in particolare corrispondenze, e possiamo considerarne la corrispondenza composta che si può riscrivere

$$\begin{aligned} f \circ g :=& \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B,\ g(a) = b \ \wedge \ f(b) = c\} \\ =& \{(a, c) \in A \times C \mid f(g(a)) = c\}. \end{aligned}$$

non dimostrato ma banale

Questa corrispondenza è ancora una funzione detta funzione composta.

Con la notazione che usiamo per le funzioni possiamo allora scrivere

$$f \circ g : A \to C, \quad a \mapsto f(g(a)).$$

In altre parole l'immagine tramite $f \circ g$ è per definizione

$$(f \circ g)(a) := f\big(g(a)\big).$$

$\Longrightarrow$ NON CAMBIA L'ORDINE

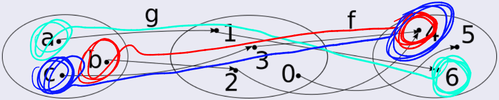
In pratica si calcola

- prima l'immagine di a tramite g ottenendo l'elemento $g(a) \in B$,
- poi l'immagine di $g(a)$ tramite f ottenendo l'elemento $f\big(g(a)\big) \in C$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \stackrel{g}{\to} & B & \stackrel{f}{\to} & C \\ a & \mapsto & g(a) & \mapsto & f(g(a)) \end{array}$$

Esercizio

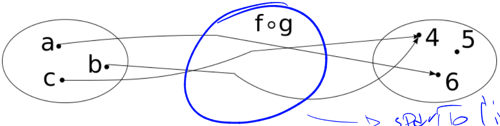
Calcolare la composizione delle seguenti funzioni:



SOLUZIONE. Indichiamo con $g : \{a, b, c\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ la funzione di sinistra e con $f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6\}$ quella di destra.
Dobbiamo calcolare $f \circ g : \{a, b, c\} \to \{4, 5, 6\}$. Si ha che

$$(f \circ g)(a) = f\big(g(a)\big) = f(1) = 6;$$
$$(f \circ g)(b) = f\big(g(b)\big) = f(2) = 4;$$
$$(f \circ g)(c) = f\big(g(c)\big) = f(3) = 4.$$

In definitiva otteniamo il seguente grafo in cui abbiamo conservato gli insieme $\{a, b, c\}$ e $\{4, 5, 6\}$, e tutte le frecce che partono dal primo e arrivano nel secondo.



→ sparito l'insieme

Il seguente esercizio mostra che in generale $f \circ g \neq g \circ f$ anche se f e g hanno lo stesso dominio e codominio.

Esercizio

Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x+1$.
Calcolare $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *e dimostrare che* $f \circ g \neq g \circ f$.

<u>SOLUZIONE</u>. Dato che f e g hanno il dominio e codominio uguali, possiamo in questo caso calcolare sia $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo

$$(f \circ g)(x) \overset{\text{def.}\circ}{=} f\big(g(x)\big) \overset{\text{def.}g}{=} f(x+1) \overset{\text{def.}f}{=} (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1;$$

$$(g \circ f)(x) \overset{\text{def.}\circ}{=} g\big(f(x)\big) \overset{\text{def.}f}{=} g(x^2) \overset{\text{def.}g}{=} x^2 + 1.$$

Notiamo subito che

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 1 = x^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Ad esempio $(f \circ g)(1) = 4$ e $(g \circ f)(1) = 2$ e quindi l'immagine di 1 è diversa tramite $f \circ g$ e $g \circ f$. Pertanto queste due funzioni, pur avendo lo stesso dominio e codominio, sono diverse.

Esercizio (per casa)

Calcolare $g \circ f$ *nei casi seguenti.*

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, n \mapsto n^2$, *e* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+5$.
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, n \mapsto \frac{n}{2}$, *e* $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, q \mapsto e^q$ *(esponenziale).*

Proposizione (Associatività della composizione)

La composizione di funzioni è associativa, cioé date delle funzioni $X \xrightarrow{h} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{f} T$, *si ha che* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Proof.

Le due funzioni $(f \circ g) \circ h$ e $f \circ (g \circ h)$ hanno entrambe dominio X e codominio T. Resta da vedere che hanno la stessa immagine $\forall x \in X$:

$$\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = (f \circ g)(h(x)) = f\big(g(h(x))\big),$$

$$\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\big(g(h(x))\big).$$

$\square$

Proposizione

1. *La composizione di funzioni iniettive è iniettiva.*
2. *La composizione di funzioni suriettive è suriettiva.*
3. *La composizione di funzioni biiettive è biiettiva.*

Soluzione

Consideriamo due funzioni $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ *e la loro composizione* $X \xrightarrow{f \circ g} Z$.
1 *Se* f *e* g *sono iniettive, dobbiamo dimostrare che* $f \circ g$ *è iniettiva cioé che* $\forall x_1, x_2 \in X$ *si ha che* $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. *In effetti*

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \overset{def. \circ}{\Rightarrow} f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \overset{f \text{ iniet.}}{\Rightarrow} g(x_1) = g(x_2) \overset{g \text{ iniet.}}{\Rightarrow} x_1 = x_2.$$

2 *Se* f *e* g *sono suriettive e* $z \in Z$, *per suriettività di* f, $\exists y \in Y, z = f(y)$. *Ora, per suriettività di* g, $\exists x \in X, g(x) = y$. *Quindi* $z = f(y) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$. *Pertanto* $f \circ g$ *è suriettiva.*
3 *Segue da 1 e 2, e dal fatto che una funzione è biiettiva se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.*

Abbiamo visto che, se due funzioni sono iniettive, suriettive o biiettive, lo stesso vale per la loro composizione.
Vediamo cosa possiamo dire del viceversa.

Proposizione

Siano $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ delle funzioni.

1. *Se $f \circ g$ è iniettiva allora g è iniettiva.*
2. *Se $f \circ g$ è suriettiva allora f è suriettiva.*
3. *Se $f \circ g$ è biiettiva allora f è suriettiva e g è iniettiva.*

<u>SOLUZIONE</u>. 1 Supponiamo $g(x_1) = g(x_2)$ e dimostriamo $x_1 = x_2$:

$$g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \overset{f \circ g \text{ iniet.}}{\Rightarrow} x_1 = x_2.$$

2 Sia $z \in Z$ e mostriamo che esiste $y \in Y$ tale che $z = f(y)$.

$$f \circ g \text{ su.} \Rightarrow \exists x \in X, z = (f \circ g)(x) \Rightarrow z = f(\underbrace{g(x)}_{y}).$$

3 segue dai due punti precedenti.

Osservazione

Siano $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ *delle funzioni. Allora*

- $f \circ g$ *iniettiva* $\not\Rightarrow$ f *iniettiva;*
- $f \circ g$ *suriettiva* $\not\Rightarrow$ g *suriettiva;*
- $f \circ g$ *biiettiva* $\not\Rightarrow$ f *e* g *biiettive.*

Per verificarlo, basta considerare il seguente esempio:

$$f : \{1,2\} \to \{1\}, y \mapsto 1, \quad g : \{1\} \to \{1,2\}, 1 \mapsto 1, \quad f \circ g : \{1\} \to \{1\}, 1 \mapsto 1.$$

Infatti $f \circ g$ *è iniettiva e suriettiva e quindi biiettiva. Invece* f *non è iniettiva e* g *non è suriettiva. Pertanto sono entrambe non biiettive.*

Esercizio (per casa)

Dimostrare i seguenti fatti dove $g, g' : X \to Y$ *e* $f, f' : Y \to Z$ *sono funzioni.*

1. *Se* f *è iniettiva è cancellabile a sinistra:* $f \circ g = f \circ g' \Rightarrow g = g'$.
2. *Se* g *è suriettiva è cancellabile a destra:* $f \circ g = f' \circ g \Rightarrow f = f'$.

Corrispondenza opposta

L'opposta di una corrispondenza $\mathscr{R} : A \to B$ è la corrispondenza $\mathscr{R}^{\mathrm{op}} : B \to A$ così definita

$$\mathscr{R}^{\mathrm{op}} := \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \mathscr{R}\}.$$

In altre parole

$$(b,a) \in \mathscr{R}^{\mathrm{op}} \Leftrightarrow (a,b) \in \mathscr{R}.$$

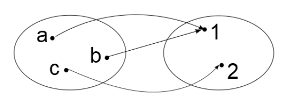
Si noti che dominio e codominio di $\mathscr{R}^{\mathrm{op}}$ sono scambiati rispetto ad $\mathscr{R}$.

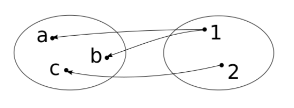
Osservazione

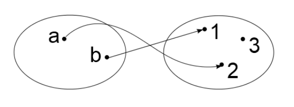
Abbiamo visto come rappresentare graficamente una corrispondenza $\mathscr{R} : A \to B$ tra insiemi finiti: si deve disegnare una freccia da a in b se $(a,b) \in \mathscr{R}$. In tal caso si avrà $(b,a) \in \mathscr{R}^{\mathrm{op}}$ e quindi nel corrispondente grafo di $\mathscr{R}^{\mathrm{op}}$ la freccia dovrà andare da b ad a, cioé in verso opposto.

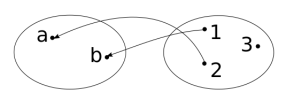
Esempio

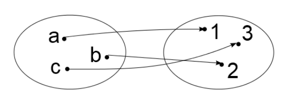
Nei seguenti esempi a sinistra è disegnata la corrispondenza $\mathscr{R}$ e alla sua destra la corrispondenza opposta $\mathscr{R}^{\mathrm{op}}$ ottenuta rovesciando le frecce.

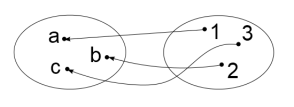












Notiamo che nei primi due esempi $\mathscr{R}$ è una funzione mentre $\mathscr{R}^{\mathrm{op}}$ no. Quindi, la corrispondenza opposta di una funzione esiste sempre, ma non è sempre una funzione. Nel terzo esempio $\mathscr{R}$ e $\mathscr{R}^{\mathrm{op}}$ sono entrambe funzioni.