CORPO RIGIDO E PURO ROTOLAMENTO

IL CORPO RIGIDO

CORPO RIGIDO

E' un oggetto la cui *forma non cambia* quando soggetto a forze.
Ha una certa massa e, a differenza del punto materiale, anche una certa estensione nello spazio.

CARATTERISTICHE

Essendo *continuo*, a differenza di una collezione discreta di punti materiali, possiamo immaginarlo come un insieme di volumetti infinitesimali dV.

Se chiamiamo $\vec{r}$ la posizione di un volumetto e $dm(\vec{r})$ la sua massa, possiamo definire la densità $\rho(\vec{r})$:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV} \tag{1}$$

A questo punto, per trovare la massa totale M del corpo si deve calcolare:

$$M = \int_{\mathbf{V}} dm(\vec{r}) = \int_{\mathbf{V}} \rho(\vec{r}) dV \tag{2}$$

Spesso può essere utile approssimare un corpo rigido ad un oggetto bidimensionale (come un foglio) o unidimensionale (un filo). Tale approssimazione è giustificata dal fatto che una o due dimensioni del corpo sono ordini di grandezza più piccole rispetto all'/alle altra/e.
Conviene allora definire le seguenti quantità, analoghe della densità per un corpo tridimensionale.
Densità superficiale:

$$\rho_s(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dS} \tag{3}$$

Densità lineare:

$$\rho_l(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dL} \tag{4}$$

CENTRO DI MASSA

Come per un sistema di N punti materiali, anche per lo studio del corpo rigido è utile definire il *centro di massa*.
La definizione è del tutto analoga, trattandosi di una generalizzazione al caso di un corpo continuo:

$$\vec{r}_{CM} = \int_{\mathbf{V}} \frac{\vec{r}}{M} dm(\vec{r}) \tag{5}$$

E che riscriviamo per comodità nel seguente modo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\mathbf{V}} \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \tag{6}$$

OSSERVAZIONE

Se il corpo preso in considerazione è *omogeneo*, cioè la densità è costante al suo interno, si ha:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\mathbf{V}} \vec{r} \rho dV = \frac{1}{\cancel{\rho} V} \int_{\mathbf{V}} \vec{r} \cancel{\rho} dV = \frac{1}{V} \int_{\mathbf{V}} \vec{r} dV \tag{7}$$

Cioè, per un corpo omogeneo, il centro di massa è una caratteristica puramente geometrica.

AZIONE DELLA FORZA PESO

Ciascun volumetto dV contribuisce alla forza peso con una forza infinitesima data da:

$$d\vec{F}_p = -g dm(\vec{r}) \vec{u}_z \tag{8}$$

La forza peso totale è la risultante di questi contributi:

$$\vec{F}_p = \int_{\mathbf{V}} d\vec{F}_p = -g \int_{\mathbf{V}} dm \vec{u}_z = -Mg\vec{u}_z \tag{9}$$

A questo punto, dato che il corpo rigido ha una certa estensione, è importante calcolare il *momento* di $\vec{F}_p$: se questo fosse non nullo, il corpo ruoterebbe.
Ciascun volumetto dV contribuisce al momento totale con un momento infinitesimo dato da:

$$d\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times d\vec{F}_p = -\vec{r} \times g dm \vec{u}_z \tag{10}$$

Allora il momento totale è dato da:

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_{\mathbf{V}} d\vec{\mathcal{M}} = \int_{\mathbf{V}} (-g dm \vec{r} \times \vec{u}_z) \tag{11}$$

$$= -g \left(\int_{\mathbf{V}} \vec{r} dm \right) \times \vec{u}_z = -gM \left(\int_{\mathbf{V}} \frac{\vec{r}}{M} dm \right) \times \vec{u}_z = -gM\vec{r}_{CM} \times \vec{u}_z$$

E concludiamo allora:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r}_{CM} \times (-gM\vec{u}_z) = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_p \tag{12}$$

Cioè possiamo immaginare che la *forza peso totale* sia applicata interamente nel CM.

CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

Per il corpo rigido, allora, si ha equilibrio se sono verificate due condizioni:

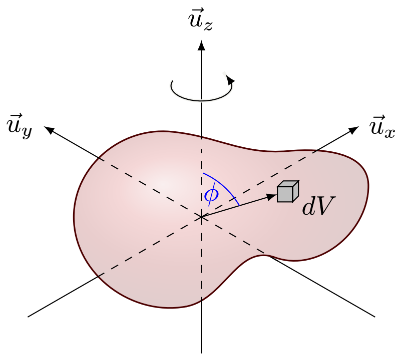
$$\begin{cases} \vec{F}_{TOT} = \vec{0} \text{ (I)} \\ \\ \vec{\mathcal{M}}_{TOT} = \vec{0} \text{ (II)} \end{cases} \tag{13}$$

MOTI DEL CORPO RIGIDO

Oltre a *traslare* come un punto materiale, il corpo rigido può anche **ruotare**.
In generale, può **traslare** e **ruotare** *contemporaneamente* (*rototraslazione*).

ROTAZIONE

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso.



Consideriamo un volumetto dV in posizione $\vec{r}$: durante la rotazione, dV compie una traiettoria circolare di raggio R attorno a $\vec{u}_z$, con $R = \|\vec{r}\| \sin\phi$.
Se supponiamo che gli assi $\vec{u}_x$ e $\vec{u}_y$ si muovano insieme al corpo, nel disegno abbiamo:

$$\vec{r} = -\|\vec{r}\| \sin(\phi)\vec{u}_y + \|\vec{r}\| \cos(\phi)\vec{u}_z \tag{14}$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|\vec{u}_x \tag{15}$$

Supponiamo che ruoti con velocità angolare $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$, e che quindi la velocità tangenziale del volumetto sia $\|\vec{v}\| = R\omega$.
Allora:

$$\vec{r} = -R\vec{u}_y + R\cot(\phi)\vec{u}_z \tag{16}$$

$$\vec{v} = R\omega\vec{u}_x \tag{17}$$

Il momento angolare sul volumetto è:

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}dm \tag{18}$$

Sostituendo $\vec{r}$ e $\vec{v}$ troviamo:

$$d\vec{L} = \underbrace{(R^2\omega dm)}_{dL_z}\vec{u}_z + \underbrace{(R^2\omega\cot(\phi)dm)}_{dL_\perp}\vec{u}_x \tag{19}$$

Per cui, a questo punto, possiamo calcolare il **momento angolare totale**:

$$\vec{L} = \int_{\mathbf{V}} d\vec{L} = \int_{\mathbf{V}} dL_z\vec{u}_z + \int_{\mathbf{V}} dL_\perp\vec{u}_\perp \tag{20}$$

Il secondo termine è generalmente complesso da calcolare, soprattutto se si considerano assi fissi per il piano di rotazione (mentre noi abbiamo assunto che seguissero la rotazione del corpo).
In presenza di *simmetrie assiali* del corpo, tuttavia, tale termine è nullo.
In tal caso si ha:

$$\vec{L} = \int_{\mathbf{V}} R^2\omega dm\vec{u}_z = \left(\int_{\mathbf{V}} R^2 dm\right)\omega\vec{u}_z \tag{21}$$

E si definisce il **momento di inerzia** lungo $\vec{u}_z$:

$$I_z = \int_{\mathbf{V}} R^2 dm = \int_{\mathbf{V}} (x^2+y^2)\rho(x,y)dV \tag{22}$$

E si ha:

$$\vec{L} = I_z\vec{\omega} \tag{23}$$

I_z è una quantità che dipende dalla geometria del corpo e dalla distribuzione della sua massa. Inoltre, è interpretabile come l'analogo rotazionale della massa inerziale.
Dal *teorema del momento angolare* ricaviamo anche:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z\vec{\alpha} \tag{24}$$

ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

Calcoliamo ora l'energia cinetica associata alla rotazione.
Partiamo dall'energia infinitesimale del volumetto:

$$dE_K = \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2 dm = \frac{1}{2}(\omega R)^2 dm \tag{25}$$

E quindi:

$$E_K = \int_{\mathbf{V}} dE_K = \frac{1}{2}\omega^2\int_{\mathbf{V}} R^2 dm = \frac{1}{2}I_z\omega^2 \tag{26}$$

⚠ **OSSERVAZIONE**

Anche da questa relazione notiamo come I_z sia una quantità analoga alla massa inerziale per la rotazione.

Ora, sappiamo che per il teorema dell'energia cinetica vale, per una qualche forza esterna $\vec{F}_{ext}$:

$$\mathcal{W}_{ext}\left[\Gamma_{01}\right] = E_K(t_1) - E_K(t_0) = \frac{1}{2}I_z\big(\omega(t_1)\big)^2 - \frac{1}{2}I_z\big(\omega(t_0)\big)^2 \tag{27}$$

Fissiamo t_0 e studiamo la variazione di $\mathcal{W}_{ext}$ al variare di $t := t_1$.

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I_z\big(\omega(t)\big)^2 - \frac{1}{2}I_z\big(\omega(t_0)\big)^2\right) = I_z\omega(t)\alpha(t) \tag{28}$$

Allora abbiamo:

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = I_z\frac{d\theta}{dt}\alpha dt \implies d\mathcal{W} = I_z\alpha dt \tag{29}$$

Per cui possiamo calcolare il lavoro compiuto da $\vec{F}_{ext}$:

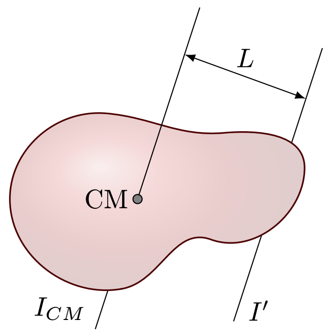
$$\mathcal{W} = \int d\mathcal{W} = \int I_z\alpha d\theta = \int \mathcal{M}d\theta \tag{30}$$

E deduciamo quindi che una forza esterna con momento non nullo compie lavoro opponendosi alla rotazione del corpo.

TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

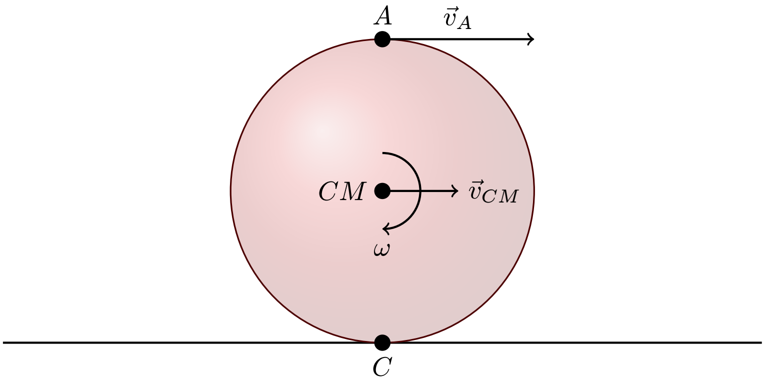
Dato un asse passante per il CM e uno parallelo ad esso, a distanza L, vale:

$$I_z' = I_{z,CM} + ML^2 \tag{31}$$



PURO ROTOLAMENTO

Consideriamo un oggetto di sezione circolare che ruota su un piano senza strisciare. Chiamiamo A il punto apicale e C il punto di contatto, come in figura:



Il corpo ruota con velocità angolare ω e il CM si sposta con $\vec{v}_{CM}$.
In C agiscono delle forze, tra cui ci aspettiamo sicuramente $\vec{F}_R$ e $\vec{F}_A$.

SISTEMA SOLIDALE AL CM

Nel sistema del CM, A ruota attorno al CM con:

$$\vec{v}'_A = \vec{\omega} \times \vec{r}'_A = (\omega \vec{u}'_y) \times (r\vec{u}'_z) = \omega r \vec{u}'_x \tag{32}$$

NOTA: $\vec{u}_y$ è perpendicolare al piano della figura.
E similmente, abbiamo anche:

$$\vec{v}'_C = -\omega r \vec{u}'_x \tag{33}$$

SISTEMA SOLIDALE AL PAVIMENTO

In questo sistema abbiamo invece:

$$\vec{v}_{CM} = v\vec{u}_x \tag{34}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_{CM} = (\omega r + v)\vec{u}_x \tag{35}$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}'_C + \vec{v}_{CM} = (v - \omega r)\vec{u}_x \tag{36}$$

CONDIZIONE PER IL PURO ROTOLAMENTO

La condizione per il puro rotolamento, cioè una rotazione senza slittamento, è che la *velocità nel punto di contatto sia nulla*.
Significa che C fa da perno per la rotazione, e quindi segue anche:

$$v_{CM} = \omega r \;\; \text{(I)} \tag{37}$$

Il che ci dice proprio che la velocità del CM è dovuta proprio alla sua rotazione intorno al punto di contatto.
Derivando tale equazione si trovano anche le seguenti:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{TOT} \;\; \text{(II)} \tag{38}$$

$$I\vec{\alpha} = \vec{\mathcal{M}}_{TOT} \;\; \text{(III)} \tag{39}$$

(I), (II) e (III) sono le equazioni del puro rotolamento.

FORZE ESTERNE E ATTRITO

Supponiamo ora che il corpo sia soggetto ad una forza esterna $\vec{F}_{ext}$ e ad un momento esterno $\vec{\mathcal{M}}_{ext}$.
Allora abbiamo:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_R + \vec{F}_A \tag{40}$$

E quindi:

$$\vec{\mathcal{M}}_{TOT} = \mathcal{M}_{ext}\vec{u}_y + \cancelto{0}{\vec{r}_C \times \vec{F}_R} + \underbrace{\vec{r}_C \times \vec{F}_A}_{=-rF_A\vec{u}_y} \tag{41}$$

Cioè:

$$\vec{\mathcal{M}}_{TOT} = (\mathcal{M}_{ext} - rF_A)\vec{u}_y \tag{42}$$

Consideriamo (II):

- Lungo $\vec{u}_z$ (verticale) non c'è moto, per cui $F_R = -F_{ext,\perp}$.
- Lungo $\vec{u}_x$, invece, si ha:

$$Ma_{CM} = F_{ext,\parallel} + F_A \tag{43}$$

Consideriamo ora (III):
il momento totale ha solo una componente lungo $\vec{u}_y$, per cui:

$$I\alpha = \mathcal{M}_{ext} - rF_A \tag{44}$$

Da (43) troviamo:

$$M\alpha r = F_{ext,\parallel} + F_A \implies \alpha = \frac{F_{ext,\parallel} + F_A}{Mr} \tag{45}$$

Da (44), invece:

$$\alpha = \frac{\mathcal{M}_{ext} - rF_A}{I} \tag{46}$$

Eguagliando (45) e (46) si ha allora:

$$(F_{ext,\parallel} + F_A)I = (\mathcal{M}_{ext} - rF_A)Mr \tag{47}$$

Risolvendo per F_A troviamo:

$$F_A = \frac{Mr\mathcal{M}_{ext} - F_{ext,\parallel}I}{I + Mr^2} \tag{48}$$

E a questo punto possiamo sostituire (48) in (43) per trovare:

$$a_{CM} = \frac{r}{I + Mr^2}(\mathcal{M}_{ext} + rF_{ext,\parallel}) \tag{49}$$

> ⚠ **NOTA**
>
> Nelle ultime due equazioni compare il termine $I + Mr^2$.
> Grazie al teorema di Huygens-Steiner concludiamo che questo è il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il punto di contatto (a distanza r dal CM).

Inoltre, essendo il punto di contatto fermo, la forza di attrito è quella dovuta all'attrito statico.
Allora deve valere anche:

$$|F_A| < \mu_s |F_R| \tag{50}$$

Altrimenti si avrebbe attrito dinamico, che vorrebbe dire che il punto di contatto *non è fermo* e quindi il corpo slitta.