SISTEMI DI PUNTI MATERIALI E URTI

SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

INTRODUZIONE

Abbiamo studiato leggi ed equazioni per singoli punti materiali, ma queste possono essere generalizzate a sistemi costituiti da più di un punto materiale.

Consideriamo N punti materiali con posizioni $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n$ e masse $m_1, \ldots, m_n$.
Per ciascuno di essi vale:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{TOT,i} \tag{1}$$

Per semplificare lo studio di tali sistemi, introduciamo alcune quantità:

$$M_{TOT} = M = \sum_{j=1}^{N} m_j \tag{2}$$

$$E_{K,TOT} = \sum_{j=1}^{N} E_{K,j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j v_j^2 \tag{3}$$

$$\vec{p}_{TOT} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j \tag{4}$$

$$\vec{L}_{TOT} = \sum_{j=1}^{N} \vec{L}_j = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j \tag{5}$$

Cioè quantità che abbiamo già visto nel caso di un singolo punto materiale e che ora comprendono tutti i punti del sistema.

CENTRO DI MASSA

Si definisce inoltre il **centro di massa** del sistema: un punto la cui posizione è la media pesata delle posizioni di ciascun punto. I pesi assegnati sono le masse dei punti stessi.

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{M} \vec{r}_j \tag{6}$$

Derivando tale relazione possiamo trovare anche la velocità di tale punto:

$$\vec{v}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{M} \vec{v}_j \tag{7}$$

Notiamo che, moltiplicando ambo i membri per M in (7), otteniamo:

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{v}_j = \vec{p}_{TOT} \tag{8}$$

Possiamo quindi immaginare che tutta quantità di moto sia concentrata nel centro di massa.
Derivando (8) troviamo anche:

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{TOT,j} \tag{9}$$

Che è la **legge di Newton per il centro di massa**.

TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

Tale legge può essere semplificata. Per farlo distinguiamo tra forze interne e forze esterne:

- Forze *interne*: esercitate da ciascun punto sugli altri $N-1$.
- Forze *esterne*: tutte le altre, dovute quindi ad interazioni con l'esterno.

Per esempio, sul punto P_1 avremo:

$$\vec{F}_{TOT,1} = \underbrace{\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \ldots}_{\text{interne}} + \vec{F}_{ext,1} \tag{10}$$

In generale, si ha:

$$\vec{F}_{TOT,j} = \vec{F}_{ext,j} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{k,j} \tag{11}$$

Avendo definito $\vec{F}_{j,j} = \vec{0}$.
Allora (9) diventa:

$$\begin{aligned} M\vec{a}_{CM} &= \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{F}_{ext,j} + \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{k,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ext,j} + \sum_{j=1,k=1}^{N} \vec{F}_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ext,j} + \sum_{j,k=1,j<k}^{N} \vec{F}_{k,j} + \sum_{j,k=1,j>k}^{N} \vec{F}_{k,j} + \cancelto{0}{\sum_{j,k=1,j=k}^{N} \vec{F}_{k,j}} \end{aligned} \tag{12}$$

Con un cambio di indice otteniamo:

$$= \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ext,j} + \sum_{a,b=1,a<b}^{N} \vec{F}_{b,a} + \sum_{a,b=1,a<b}^{N} \vec{F}_{a,b}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ext,j} + \sum_{a,b=1,a<b}^{N} \cancelto{0}{(\vec{F}_{b,a} + \vec{F}_{a,b})}$$

E concludiamo allora:

> **TEOREMA DEL MOTO DEL CM**
>
> $$M\vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ext,j} \tag{13}$$

Che è effettivamente una semplificazione di (9).

> **OSSERVAZIONE**
>
> In assenza di forze esterne, $M\vec{a}_{CM} = \vec{0}$, per cui un sistema di riferimento solidale al C.M. è *inerziale*.

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL C.M.

Dato un sistema di riferimento O e uno solidale al C.M. (con assi ad orientazione fissa rispetto a quelli di O) si ha, detti $\vec{r}_j$ la posizione del punto di indice j rispetto ad O, $\vec{r}'_j$ la posizione dello stesso rispetto al sistema del CM ed $\vec{r}_{CM}$ la posizione del CM rispetto ad O:

$$\vec{r}_j = \vec{r}'_j + \vec{r}_{CM} \tag{14}$$

QUANTITA' DI MOTO

Ne consegue che:

$$\vec{v}_j = \vec{v}'_j + \vec{v}_{CM} \tag{15}$$

Moltiplicando ambo i membri per m_j e sommando per $j = 1, \ldots, N$ si trova:

$$\underbrace{\vec{p}_{TOT}}_{\text{in O}} = \underbrace{\vec{p}'_{TOT}}_{\text{in CM}} + \underbrace{M\vec{v}_{CM}}_{=\vec{p}_{TOT}} \tag{16}$$

Ma allora $\vec{p}'_{TOT} = \vec{0}$ nel sistema del C.M.

ENERGIA CINETICA

Sostituendo (15) in (3) troviamo:

$$E_{K,TOT} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} m_j \|\vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}\| \tag{17}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j \left(\|\vec{v}'_j\|^2 + \|\vec{v}_{CM}\|^2 + 2\vec{v}'_j \cdot \vec{v}_{CM}\right)$$

$$= E'_{K,TOT} + \frac{1}{2}M\|\vec{v}_{CM}\|^2 + \cancelto{\vec{p}'_{TOT}=\vec{0}}{\left(\sum_{j=1}^{N} m_j\vec{v}_j\right)} \cdot \vec{v}_{CM}$$

E concludiamo che:

SECONDO TEOREMA DI KONIG

$$E_{K,TOT} = E'_{K,TOT} + \frac{1}{2}M\|\vec{v}_{CM}\|^2 \tag{18}$$

MOMENTO ANGOLARE

Fissato un polo P e un punto P_j abbiamo:

$$\vec{L}_{j,P} = (\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j\vec{v}_j \tag{19}$$

Per cui il momento angolare totale del sistema di N punti, rispetto al polo P, sarà:

$$\vec{L}_{TOT,P} = \sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_j - \vec{r}_p) \times m_j\vec{v}_j \tag{20}$$

Vogliamo innanzitutto generalizzare il *teorema del momento angolare* al caso con N punti. Calcoliamo allora:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{TOT,P} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^{N}(\vec{r}_j - \vec{r}_p) \times m_j\vec{v}_j\right) \tag{21}$$

$$= \sum_{j=1}^{N}\left((\vec{v}_j - \vec{v}_P) \times m_j\vec{v}_j\right) + \sum_{j=1}^{N}\left((\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j\vec{a}_j\right)$$

Sviluppando i prodotti e con una serie di passaggi algebrici arriviamo a:

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE PER UN SISTEMA DI PUNTI

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{TOT,P} = -\vec{v}_P \times \vec{p}_{TOT} + \vec{M}_{ext,TOT,P} \tag{22}$$

Per cui una variazione di momento angolare in un sistema di N punti è causata da un momento esterno (come nel caso già visto) e anche da un altro termine.
Questo si annulla se:

- Il polo è *fermo*, per cui $\vec{v}_P = \vec{0}$.

- Il polo *coincide con il CM*, per cui $\vec{v}_P$ coincide con $\vec{v}_{CM}$ e il loro prodotto vettoriale è nullo.
- Siamo *nel sistema di riferimento del CM*, per cui $\vec{p}_{TOT} = \vec{0}$.

⚠ **OSSERVAZIONE**

Inoltre, se le forze sono solo interne si annulla anche il secondo termine.
Per cui, se ci trovassimo nel sistema di riferimento del CM, avremmo:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{TOT} = \vec{0}$$

Ora vogliamo trovare la relazione fra:

- $\vec{L}_{TOT,O}$, momento angolare in O rispetto all'origine del sistema.
- $\vec{L}_{TOT,O'}$, momento angolare nel sistema del CM, rispetto al CM.

Sostituendo (14) e (15) in (5) troviamo:

$$\vec{L}_{TOT,O} = \sum_{j=1}^{N} \Big((\vec{r}'_j + \vec{r}_{CM}) \times m_j(\vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}) \Big) \tag{23}$$

Sviluppando i termini e con dei passaggi algebrici arriviamo a:

PRIMO TEOREMA DI KONIG

$$\vec{L}_{TOT,O} = \vec{L}_{TOT,O'} + \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} \tag{24}$$

URTI

Un urto fra corpi è detto **elastico** se l'*energia cinetica si conserva*.
Un urto *non* elastico è detto **anaelastico** e, in particolare, *completamente anaelastico* se i corpi restano attaccati.

URTO ELASTICO

Consideriamo due corpi di masse m_1, m_2 che si muovono uno verso l'altro con velocità $v_1 > 0$ e $v_2 < 0$.
Dopo l'urto avranno velocità $V_1 < 0$ e $V_2 > 0$.
Essendo l'urto elastico, si conserva l'energia cinetica. Inoltre, essendo le forze impulsive interne, si conserva anche la quantità di moto:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \\ m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2 \end{cases} \tag{25}$$

E risolvendo il sistema troviamo le velocità dopo l'urto.

⚠ NOTA

> E' più semplice risolvere il sistema ponendosi nel sistema solidale al CM e poi trasformare le quantità trovate nelle corrispondenti nel sistema originale con le leggi di trasformazione sopra viste.

URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO

Consideriamo ancora una volta due corpi di masse m_1 e m_2 con velocità v_1 e v_2, $v_1 > v_2$
.
Essendo l'urto completamente anaelastico, i due corpi procederanno dopo di esso con la stessa velocità V.
In questo caso l'energia cinetica *non* si conserva, ma la quantità di moto si, essendo le forze impulsive interne.
Avremo quindi:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V \tag{26}$$

Risolvendo per V troviamo:

$$V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = V_{CM} \tag{27}$$

L'energia dissipata nell'urto è:

$$\Delta E_K = \underbrace{E_K}_{\text{prima}} - \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2}_{\text{dopo}} \tag{28}$$

Se ci poniamo nel sistema del CM, $V = 0$ e troviamo che l'energia dissipata è pari a quella che i due corpi avevano prima dell'urto, nel sistema del CM.
In tale riferimento, infatti, prima dell'urto i corpi si muovevano, mentre in seguito sono fermi (coincidono con il CM).