GRAVITAZIONE E PROBLEMA DI KEPLERO

PROBLEMA DEI DUE CORPI

Il problema è così posto:

PROBLEMA DI KEPLERO

Due corpi di masse m_1 ed m_2 sono soggetti alla forza di gravitazione universale.
Determinare tutte le possibili orbite.

1 IMPOSTAZIONE PROBLEMA

Chiamiamo il vettore $\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|}$, cioè il versore della direzione che congiunge m_1 e m_2, $\vec{u}_{21}$ (perchè punta da 2 a 1).
Allora le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -G\frac{m_1m_2}{\|\vec{r}_1-\vec{r}_2\|}\vec{u}_{12} \text{ (I)} \\ \\ m_2\vec{a}_2 = m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -G\frac{m_1m_2}{\|\vec{r}_2-\vec{r}_1\|}\vec{u}_{21} \text{ (II)} \end{cases} \tag{1}$$

Osserviamo che la forza in (I) punta verso il corpo 1 e quella in (II) verso il corpo 2.

1.1 SCOMPOSIZIONE DEL PROBLEMA

Le forze sono solo interne, allora $\vec{p}_{TOT}$ si conserva e vale, definita $M := m_1 + m_2$:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\vec{p}_{TOT} \tag{2}$$

Per lo stesso motivo, il sistema di riferimento del CM è inerziale.
Vale quindi la pena calcolare $\vec{r}_{CM}$ e le posizioni $\vec{r}_1'$ e $\vec{r}_2'$ dei corpi rispetto al CM.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \tag{3}$$

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_2}{M}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{4}$$

E similmente:

$$\vec{r}_2' = \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{5}$$

A partire da $\vec{r}_1'$ e $\vec{r}_2'$, consideriamo ora:

$$m_1\vec{r}_1 = m_1\frac{m_2}{M}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{6}$$

E

$$m_2\vec{r}_2 = m_2\frac{m_1}{M}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{7}$$

Definiamo per comodità la massa ridotta μ:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \tag{8}$$

Deriviamo due volte (6) e troviamo l'equazione del moto *nel sistema del CM*:

$$m_1\frac{d^2\vec{r}_1'}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\mu(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{9}$$

Il membro di sinistra diventa:

$$= m_1\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}) = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - m_1\cancelto{0}{\frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2}} \tag{10}$$

Ma il membro di destra in (10) è esattamente l'equazione del moto (1).
Per cui troviamo:

$$-G\frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\vec{u}_{12} = m_1\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_1' = \mu\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{11}$$

Similmente si trova anche:

$$-G\frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2}\vec{u}_{21} = m_2\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_2' = \mu\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{12}$$

A questo punto chiamiamo $\vec{u}_{12} := \vec{u}_r$ e le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} \mu\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -G\frac{\mu M}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\vec{u}_r \\ \\ -\mu\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = G\frac{\mu M}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2}\vec{u}_r \end{cases} \tag{13}$$

Tali equazioni sono linearmente dipendenti (una è l'opposto dell'altra), cosa che avremmo potuto dedurre già in (1); ma scrivendole in questa forma abbiamo scomposto il problema nel seguente modo:

- Un moto del CM, con massa M e per cui vale $M\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ essendo il riferimento inerziale.
- Un moto di una massa μ intorno al CM.

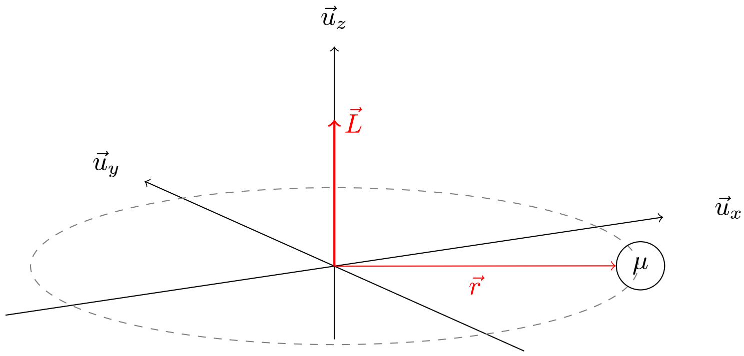
Infatti, definendo $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, ci basta considerare un'unica equazione:

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{\mu M}{\|\vec{r}\|^2}\vec{u}_r \tag{14}$$

Che rappresenta proprio il moto di una massa μ soggetta all'attrazione gravitazionale di una massa M a distanza $\|\vec{r}\|$ da essa.

1.2 ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE

Dovremmo scomporre l'equazione (14) lungo le tre componenti nello spazio del vettore $\vec{r}$, tuttavia possiamo ragionare nel seguente modo:
l'unica forza presente è quella gravitazionale che, considerato come polo il CM, è parallela al suo braccio.
Allora il momento totale è nullo, e quindi il momento angolare rimane costante, ma ciò significa che il moto avviene su un piano (perpendicolare al vettore $\vec{L}$), e quindi basta considerare le proiezioni di $\vec{r}$ su un piano xy.



2 SECONDA LEGGE DI KEPLERO

Calcoliamo ora il momento angolare del corpo di massa μ:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{15}$$

$$= r\vec{u}_r \times \mu \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = r\vec{u}_r \times \left(\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp \right)$$

E concludiamo:

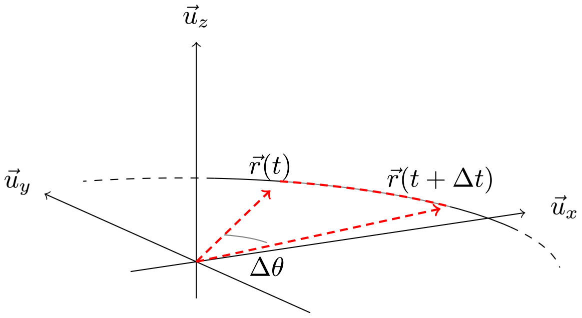
$$\vec{L} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r \times \vec{u}_\perp \tag{16}$$

Come visto in > 1.2 ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE, il momento angolare è perpendicolare al piano su cui avviene il moto, individuato dai vettori $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\perp$.

Abbiamo visto che $\vec{L}$ è costante, per cui anche la seguente quantità deve essere costante durante il moto:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} \tag{17}$$

Possiamo dare un'interpretazione geometrica a tale quantità.
Consideriamo la posizione $\vec{r}(t)$ di μ al tempo t e $\vec{r}(t + \Delta t)$ dopo un piccolo intervallo Δt, durante il quale ha spazzato un angolo $\Delta\theta$:



L'area spazzata dal vettore, evidenziata in rosso nella figura, è approssimata da:

$$\Delta A \approx \frac{1}{2}r(r\Delta\theta) \tag{18}$$

Per cui, per $\Delta\theta$ sufficientemente piccoli, si ha:

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \tag{19}$$

Definiamo a questo punto la **velocità areolare** come l'area spazzata dal vettore $\vec{r}$ in un tempo t:

$$\frac{dA}{dt} := \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{20}$$

Siccome (17) deve rimanere costante, si ha:

> **SECONDA LEGGE DI KEPLERO**
>
> La velocità areolare rimane costante lungo il moto.

3 ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA ALL'ORBITA

Torniamo ora a (14).
Abbiamo detto che le due equazioni non banali sono quelle relative al piano di rotazione.

3.1 SCOMPOSIZIONE EQUAZIONE DEL MOTO

Scomponiamo quindi $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ lungo $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\perp$.
Innanzitutto:

$$\frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp \tag{21}$$

E infine:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\vec{u}_r) = \underbrace{\frac{d^2r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp} + \underbrace{\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\perp - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r} \tag{22}$$

E raccogliendo troviamo:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\vec{u}_r) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\perp \tag{23}$$

Inoltre sappiamo che il momento angolare è costante in modulo, per cui:

$$L = \mu r^2\frac{d\theta}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \tag{24}$$

Sostituendo in (23) troviamo allora:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\vec{u}_r) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{2L}{\mu r^2}\frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\perp \tag{25}$$

Definiamo, per comodità:

$$k := Gm_1m_2 = GM\mu \tag{26}$$

Possiamo finalmente scomporre (14) lungo $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_\perp$:

LUNGO $\vec{u}_r$:

$$\mu\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3}\right) = -\frac{k}{r^2} \implies \mu\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \tag{27}$$

LUNGO $\vec{u}_\perp$:

$$\mu\left(\frac{2L}{\mu r^2}\frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = 0 \implies \mu\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2L}{r^3}\frac{dr}{dt} \tag{28}$$

3.2 ENERGIA POTENZIALE EFFICACE

Osserviamo che (27) sembra l'equazione di un problema in *una dimensione* dovuto ad una *forza posizionale*.
Per capire meglio, calcoliamo l'energia totale per il corpo μ:

$$E_{TOT} = E_K(\vec{v}) + E_P(\vec{r}) = \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2 - \frac{k}{r} \tag{29}$$

Dove $-\frac{k}{r}$ è l'energia potenziale gravitazionale.
Abbiamo allora:

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}\mu\|\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp\|^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_{A} - \frac{k}{r} \tag{30}$$

Grazie a (24) possiamo semplificare tale equazione, trovando:

$$E_{TOT} = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{E_{K,r}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}}_{E_{P,eff}} \tag{31}$$

Notiamo a questo punto che il termine A contribuisce insieme all'energia potenziale gravitazionale ad una *energia potenziale per il moto lungo* r, che chiamiamo **energia potenziale efficace**. In particolare, $\frac{L^2}{2\mu r^2}$ è detto *termine centrifugo*.
E' facile verificare che la forza derivante da $E_{P,eff}$ è proprio quella in (27), infatti vale:

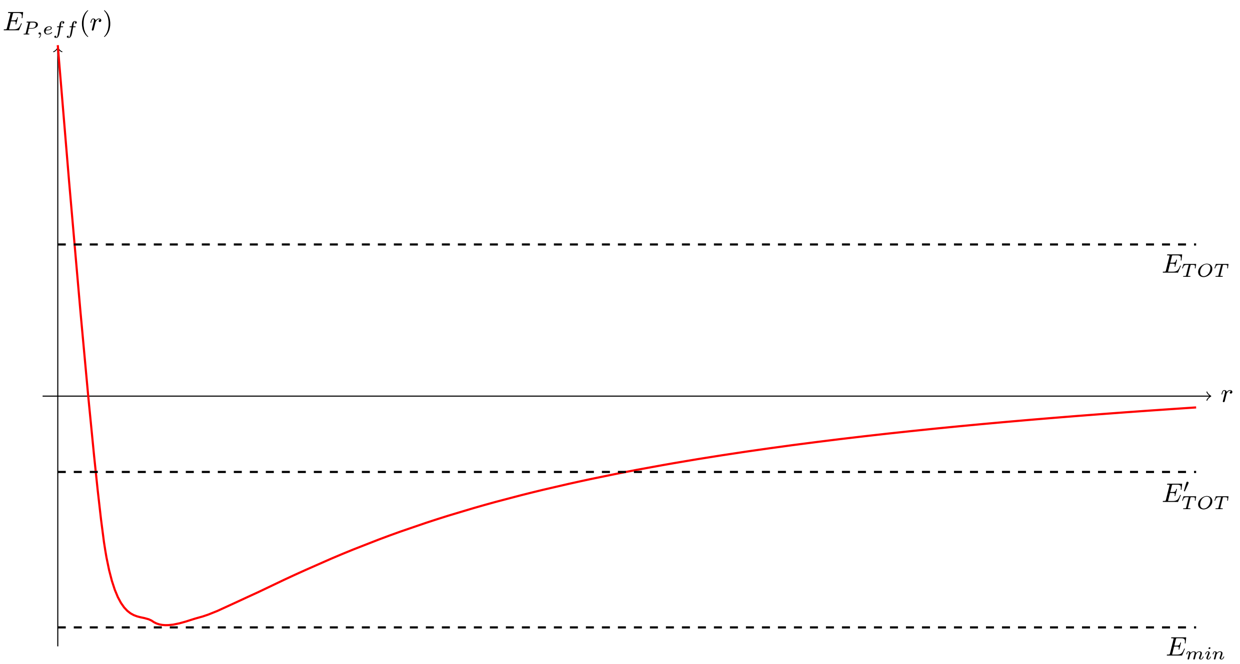
$$-\frac{d}{dr}E_{P,eff} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} = F_{eff,r} \tag{32}$$

Il fatto che la forza lungo r sia gradiente della funzione scalare $E_{P,eff}(r)$ garantisce anche che tale forza sia conservativa.

Ovviamente, deve sempre essere:

$$E_{TOT} \geq E_{P,eff} \tag{33}$$

Vediamo come si comporta $E_{P,eff}(r)$:



Notiamo che:

- Esiste un valore **minimo** per l'energia potenziale efficace, E_{min}.
- Se $E_{TOT} > 0$ deve essere $r > r_{min}$, cioè si ha un'**orbita aperta**.
- Se $E'_{TOT} < 0$ deve essere $r'_{min} < r < r'_{max}$, cioè si ha un'**orbita chiusa**.
- Se $E_{TOT} = E_{min}$ deve essere $r = r_{min}$, cioè si ha un'**orbita circolare**.

3.2.1 ORBITA CIRCOLARE

Abbiamo visto che si ha un'orbita *circolare* se $E_{P,eff} = E_{min}$.
Ciò accade per $r = r_0$, dove r_0 soddisfa:

$$\frac{d}{dr}E_{P,eff}\bigg|_{r_0} = 0 \tag{34}$$

Allora deve essere:

$$\frac{L^2}{\mu r_0^3} - \frac{k}{r_0^2} = 0$$

Da cui otteniamo:

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu k} \tag{35}$$

Per tale valore di r si ha che l'energia totale in un'orbita circolare è (sostituendo (35) in (31)):

$$E_{P,eff,circ} = -\frac{\mu k^2}{2L^2} \tag{36}$$

Ricordando che $L = \mu r_0^2 \frac{d\theta}{dt}$ è costante, deduciamo che, per un'orbita circolare, anche $\frac{d\theta}{dt}$ è costante (essendo r_0 costante): definiamo $\omega_0 := \frac{d\theta}{dt}$ e, sostituendo L in (35), troviamo la seguente relazione:

$$r_0^3 = \frac{k}{\mu \omega_0^2} \tag{37}$$

4 FORMA DELLE ORBITE

Abbiamo analizzato il caso di un'orbita circolare, ma se $r > r_0$ che forma hanno le orbite?
Per rispondere a questa domanda vogliamo $r(\theta)$ invece di $r(t)$ e $\theta(t)$.
Per la derivata della funzione composta, sappiamo che vale:

$$\frac{d}{dt}\Big(r\big(\theta(t)\big)\Big) = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} \tag{38}$$

Ma per noi $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$, allora:

$$\frac{d}{dt}\Big(r\big(\theta(t)\big)\Big) = \frac{L}{\mu r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{39}$$

Conviene allora introdurre la variabile ausiliaria $u := \frac{1}{r}$.
Abbiamo allora:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\theta} \tag{40}$$

Derivando tale relazione troviamo:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} \tag{41}$$

E concludiamo che:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta} \tag{42}$$

Per cui possiamo riscrivere (27) in termini di $u(\theta)$, ottenendo:

$$-\frac{L^2}{\mu}\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu}u - k \tag{43}$$

Riordinando i termini in questa equazione, otteniamo la seguente equazione differenziale in $u(\theta)$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{L^2}\mu \tag{44}$$

Abbiamo già incontrato equazioni differenziali di questo tipo e sappiamo che la soluzione più generale è data da:

$$u(\theta) = \frac{k}{L^2}\mu + A\cos(\theta + \theta_0) \tag{45}$$

Era $u = \frac{1}{r}$, e allora l'orbita è descritta da:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{k}{L^2}\mu + A\cos(\theta)} \tag{46}$$

Dove abbiamo scelto $\theta_0 = 0$ dato che siamo interessati a descrivere l'orbita per ogni θ e non ci interessa la condizione iniziale.

> ⚠ **NOTA**
>
> Per $\theta_0 = 0$ si ha che $r(\theta)$ è minimo per $\theta = 0$ e massimo per $\theta = \pi$.

Di solito (46) si scrive nella forma:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{e\cos\theta + 1} \tag{47}$$

Dove:

- $r_0 = \frac{L^2}{\mu k}$
- $e = \frac{AL^2}{\mu k}$

  OSS: possiamo sempre considerare $e \geq 0$, infatti se fosse $e < 0$ basterebbe ricordare che $\cos(x) = -\cos(x + \pi)$ e scegliere quindi un diverso θ_0.

4.1 ORBITA CIRCOLARE

Chiaramente, per $e = 0$ ($A = 0$) si ha $r(\theta) = r_0$ $\forall t$ e siamo nel caso dell'orbita circolare.

OSS: si tratta proprio della soluzione particolare di (44).

4.2 ORBITA LIMITATA

Notiamo ora che, se $0 < e < 1$, il denominatore in (47) non si annulla mai e quindi $r(\theta)$ è limitato e avrà un massimo e un minimo:

$$r_{max} = \frac{r_0}{1-e} \tag{48}$$

$$r_{min} = \frac{r_0}{1+e}$$

Per trovare l'equazione cartesiana dell'orbita convertiamo le coordinate da polari a cartesiane, ricordando che $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$.
Allora $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
Per cui (47) diventa:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{r_0}{e\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1} \tag{49}$$

Da cui ricaviamo:

$$\left(x+\frac{er_0}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \left(\frac{r_0}{1-e^2}\right)^2 \tag{50}$$

E che riscriviamo come:

$$\left(x+\frac{er_0}{1-e^2}\right)\underbrace{\left(\frac{1-e^2}{r_0}\right)^2}_{\frac{1}{a^2}} + y^2\underbrace{\left(\frac{1-e^2}{r_0^2}\right)}_{\frac{1}{b^2}} = 1 \tag{51}$$

Notiamo che $\frac{1}{a^2} > 0$ e $\frac{1}{b^2} > 0$: allora è l'equazione di un'**ellisse**.

4.3 ORBITA ILLIMITATA

4.3.1 $e = 1$

In tal caso abbiamo:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{\cos\theta + 1} \tag{52}$$

Convertendo anche questo caso in coordinate cartesiane troviamo:

$$x = \frac{r_0}{2} - \frac{y^2}{2r_0} \tag{53}$$

Che è l'equazione di una **parabola**.

⚠ NOTA

Essendo e misurato, è molto poco probabile che in natura si verifichi esattamente $e = 1$.

4.3.2 $e > 1$

Otteniamo nuovamente (51), ma questa volta, essendo $e > 1$, abbiamo $\frac{1}{b^2} < 0$ e $\frac{1}{a^2} > 0$, perciò abbiamo l'equazione di un'**iperbole**.

5 CORREZIONI RELATIVISTICHE

Oggi sappiamo che la legge di gravitazione universale di Newton non è una legge fondamentale, ma è un'approssimazione della relatività generale di Einstein.
La relatività generale si basa su idee che abbiamo già incontrato: l'equivalenza tra la massa inerziale e quella gravitazionale, e l'equivalenza tra l'accelerazione gravitazionale e quella dovuta alle forze apparenti.
Nel caso del problema di Keplero, si può dimostrare che la relatività generale porta ad una correzione del potenziale gravitazionale per cui si ha:

$$E_{P,r} = -G\frac{\mu M}{r}\left(1 + \frac{3GM}{c^2 r} + o(1/r)\right) \tag{54}$$

Allora l'equazione (27) (quella del moto lungo $\vec{u}_r$) diventa:

$$\mu\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{d}{dr}E_{P,r} \tag{55}$$

Dove il membro di destra è sempre la derivata dell'energia potenziale efficace, ma che ora tiene conto delle correzioni relativistiche.
Si trova allora l'equazione differenziale seguente:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \underbrace{\left(1 - 6\frac{k^2}{c^2 L^2}\right)}_{\text{prima era 1}} u = \frac{\mu k}{L^2} \tag{56}$$

La cui soluzione è:

$$u(\theta) = A\cos\left(\underbrace{\sqrt{1 - 6\frac{k^2}{c^2 L^2}}}_{<1}\theta - \theta_0\right) + \frac{\mu k}{L^2 - \frac{6k^2}{c^2}} \tag{57}$$

Per cui l'orbita *non si chiude* dopo un angolo di 2π, ma *solo dopo*:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 6\frac{k^2}{c^2 L^2}}} \approx 2\pi\left(1 + 3\frac{k^2}{c^2 L^2}\right) \tag{58}$$

Tale fenomeno è detto **precessione dell'orbita**, per cui viene definito l'*angolo di precessione*:

$$\varphi = \frac{6\pi k^2}{c^2 L^2} \tag{59}$$

La corretta previsione dell'angolo di precessione per l'orbita di Mercurio è stato uno dei primi successi della relatività generale.