SISTEMI DI RIFERIMENTO

SISTEMI INERZIALI E NON INERZIALI

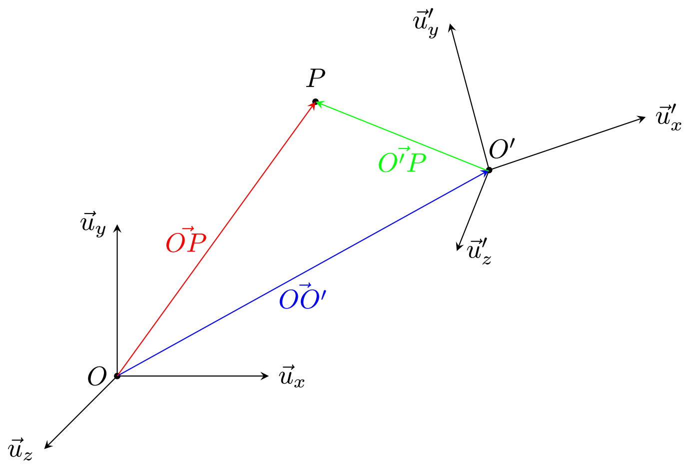
Abbiamo visto che i *sistemi inerziali* sono sistemi di riferimento su cui la risultante delle forze agenti è nulla, e si muovono quindi con velocità costante in modulo e direzione.

Tuttavia, esistono anche sistemi su cui agisce una forza netta non nulla e che si muovono pertanto di un moto diverso da quello rettilineo uniforme: tali sistemi sono definiti **non inerziali**.

In realtà nell'universo non esiste alcun sistema di riferimento perfettamente inerziale, e la Terra stessa, ruotando intorno al proprio asse e intorno al Sole, è un sistema non inerziale. Questo è sufficiente a giustificare il nostro interesse per lo studio di tali sistemi.

SISTEMI NON INERZIALI

Consideriamo un riferimento inerziale O e uno non inerziale O':
O' può spostarsi rispetto a O e gli assi $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ possono ruotare.



Sia P un punto materiale. Definiamo:

- $\vec{OP}(t) = \vec{r}(t)$ la posizione di P rispetto al sistema O.
- $\vec{O'P} = \vec{r}'(t)$ la posizione di P rispetto al sistema O'.
- $\vec{OO'}(t) = \vec{r}_{OO'}(t)$ la posizione dell'origine O' rispetto ad O.

Abbiamo

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{OO'}(t) + \vec{r}'(t) \tag{1}$$

Deriviamo questa equazione per trovare la legge di trasformazione di $\vec{v}$.
Per farlo, scriviamo i vettori esplicitando le loro componenti:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \tag{2}$$

$$\vec{r}_{OO'}(t) = x_{OO'}(t)\vec{u}_x + y_{OO'}(t)\vec{u}_y + z_{OO'}(t)\vec{u}_z \tag{3}$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{u}_x(t) + y'(t)\vec{u}_y(t) + z'(t)\vec{u}_z(t) \tag{4}$$

OSS. In (4) gli assi non sono fissi: possono ruotare.
Ricordiamo inoltre la derivata di un versore rotante:

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp(t) \tag{5}$$

Per comodità, introduciamo un vettore $\vec{\omega}(t)$ **ortogonale al piano** di rotazione di $\vec{u}(t)$, di modulo $|\frac{d\theta}{dt}|$ e tale che:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{u}(t) \tag{6}$$

OSS. La direzione di $\vec{\omega} \times \vec{u}$ è la stessa di $\vec{u}_\perp$.
Derivando (1) troviamo:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \tag{7}$$

E calcolando ciascuna derivata con le informazioni (2,3,4) e (6) otteniamo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{OO'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) \tag{8}$$

Oltre ai termini "banali" abbiamo trovato un terzo termine dovuto al fatto che O' ruota rispetto ad O.
Similmente, per arrivare alla legge di trasformazione dell'accelerazione, deriviamo (8), introducendo ancora una volta un vettore per comodità:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \tag{9}$$

Otteniamo alla fine:

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\vec{a}_{OO'}(t) + \vec{a}'(t)}_{\text{Banali}} + \underbrace{\vec{\alpha}(t) \times \vec{r}'(t)}_{A} + \underbrace{2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)}_{B} + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times \big(\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t)\big)}_{C} \tag{10}$$

Abbiamo ottenuto due termini che ci aspettavamo per la forma di (1), e altri tre termini assolutamente non banali:

- A è dovuto all'accelerazione angolare di O': scompare se questo ruota con velocità angolare costante.
- B è detto *accelerazione di Coriolis* e si manifesta quando un corpo si muove con un certa velocità in un sistema di riferimento in rotazione.
- C è l'*accelerazione centripeta* su un corpo in O' causata dalla rotazione del sistema stesso.

A questo punto, deduciamo che:

$$\vec{a}(t) - \vec{a}'(t) \neq 0 \tag{11}$$

Cioè le accelerazioni misurate nei due sistemi **non sono le stesse** e allora è anche vero che:

$$\vec{F}_{TOT} - \vec{F}'_{TOT} \neq 0 \tag{12}$$

Chiamiamo tale differenza **forza apparente**, per enfatizzare il fatto che è percepita solo nel sistema di riferimento non inerziale a causa del fatto che non si muove di moto rettilineo uniforme.

$$\vec{F}_{app} = \vec{F}' - \vec{F} = m(\vec{a}' - \vec{a}) \tag{13}$$

IL SISTEMA ROTANTE TERRA

Sappiamo che la Terra *non* è un sistema inerziale, per cui siamo soggetti a forze apparenti.

Consideriamo un punto materiale *fermo* alla latitudine Θ e un sistema di assi così orientati:

- $\vec{u}_z$ verso il cielo,
- $\vec{u}_x$ verso est,
- $\vec{u}_y$ verso nord.

Il vettore $\vec{\omega}$ associato alla rotazione terrestre sarà pertanto:

$$\vec{\omega} = \omega \cos\Theta \vec{u}_y + \omega \sin\Theta \vec{u}_z \tag{14}$$

Con $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$.
Essendo il punto fermo sulla superficie, *non* risente dell'accelerazione di Coriolis, e neanche del termine dovuto all'accelerazione angolare dato che la terra ruota a velocità angolare costante.
Per cui il punto risente di una forza apparente data da:

$$\vec{F}_{app} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \tag{15}$$

Dove $\vec{r} = R_T \vec{u}_z$ con $R_T \approx 6.38 \cdot 10^6 m$.
Notiamo che tale forza è opposta alla forza *centripeta* che misurerebbe un osservatore esterno in un sistema inerziale. La forza apparente associata alla forza centripeta è la **forza centrifuga**.
Da (15) ricaviamo $\vec{a}_{app}$:

$$\vec{a}_{app} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 R_T (\cos^2\Theta \vec{u}_z - \cos\Theta \sin\Theta \vec{u}_y) \tag{16}$$

Allora abbiamo $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{app}$:

$$\vec{a}' = -g\vec{u}_z + \vec{a}_{app} = -\underbrace{\left(g - \omega^2 R_T \cos^2\Theta\right)}_{=g_{eff,z}}\vec{u}_z - \underbrace{\left(\omega^2 R_T \cos\Theta \sin\Theta\right)}_{=g_{eff,y}}\vec{u}_y \tag{17}$$

Notiamo che $g_{eff,z} < g$, cioè l'accelerazione di gravità da noi percepita è minore di quella "reale" a causa della forza centrifuga (apparente).

ESPERIMENTO DI GUGLIELMINI

Per dimostrare il moto di rotazione della Terra, nel 1790 Guglielmini fece cadere delle sferette di metallo dalla sommità della torre degli Asinelli, a Bologna: se fossero state soggette alla sola forza di gravità sarebbero dovute cadere lungo una traiettoria verticale; invece, erano deviate di una certa distanza verso est.

Per semplicità, consideriamo una torre analoga posta all'equatore anzichè a Bologna. Calcoliamo la deviazione rispetto alla base della torre, ricordando che per un corpo in caduta libera abbiamo:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_P + \vec{F}_{app} \implies \vec{a}' = -g\vec{u}_z - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v} \tag{18}$$

I primi due termini equivalgono a g_{eff} calcolata sopra, con $\Theta = 0$, mentre il terzo termine è l'accelerazione di Coriolis.

$$\vec{a}' = -(g - \omega^2 R_T)\vec{u}_z - 2\omega\vec{u}_y \times v_z(t)\vec{u}_z \tag{19}$$

Dove $\vec{\omega}$ è solo lungo $\vec{u}_y$ e la velocità è in buona approssimazione lungo $\vec{u}_z$ (lungo la verticale).
Troviamo allora:

$$\vec{a}' = -g_{eff,z}\vec{u}_z - 2\omega v_z(t)\vec{u}_x \tag{20}$$

In componenti, lungo $\vec{u}_z$:

$$a'_z = -g_{eff,z} \implies \begin{cases} v_z(t) = -g_{eff,z}t \\ z(t) = h - \frac{1}{2}g_{eff,z}t^2 \end{cases} \tag{21}$$

Lungo $\vec{u}_x$:

$$a'_x = (2\omega g_{eff,z})t \implies \begin{cases} v_x(t) = \omega g_{eff,z}t^2 \\ x(t) = \frac{1}{3}\omega g_{eff,z}t^3 \end{cases} \tag{22}$$

> ⚠ **NOTA**
>
> Abbiamo una certa velocità lungo $\vec{u}_x$ che dovrebbe contribuire in (18), tuttavia ω è sufficientemente piccola in modulo da rendere trascurabile questa componente.

Per trovare la deviazione di Coriolis lungo $\vec{u}_x$ troviamo prima il tempo di caduta t_c imponendo $z(t_c) = 0$:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g_{eff,z}}} \tag{23}$$

E da questo ricaviamo $x(t_c) = \Delta x$:

$$\Delta x = \frac{1}{3}\omega g_{eff,z}\left(\frac{2h}{g_{eff,z}}\right)^{3/2} \tag{24}$$

L'ordine di grandezza di tale deviazione è di qualche centimetro.