LAVORO, ENERGIA MECCANICA, MOMENTI E LEGGI DI CONSERVAZIONE

LAVORO ED ENERGIA

Consideriamo una forza $\vec{F}$, che nel caso più generale dipende dalla posizione $\vec{r}$ di un corpo, dalla sua velocità $\vec{v}$ e dal tempo t: $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$.
Definiamo il **lavoro della forza** lungo la *traiettoria del corpo* tra l'istante t_0 e t_1 come:

$$W_F = \int_{t_0}^{t_1} \left[\vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \cdot \vec{v}(t)\right] dt \tag{1}$$

In questo caso la traiettoria è quella determinata dalla stessa forza $\vec{F}$ della quale stiamo calcolando il lavoro.
E' possibile dare una definizione più *generale* del lavoro.
Per farlo, consideriamo una generica curva Γ descritta dal vettore $\vec{\gamma}(\tau)$ al variare di τ:

$$\Gamma = \left\{\left(\tau, \vec{\gamma}(\tau)\right), \tau \in [\tau_0, \tau_1]\right\} \tag{2}$$

La curva Γ *non è necessariamente la legge oraria* del corpo su cui agisce la forza.
Per questo motivo usiamo un generico parametro τ invece che t, il vettore $\vec{\gamma}(\tau)$ invece della legge oraria $\vec{r}(t)$ e la derivata $\frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau}$ invece della velocità $\vec{v}(t)$.
Definiamo allora il **lavoro di una forza lungo una generica curva** Γ come:

$$W_F[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{F}\left(\vec{\gamma}(\tau), \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau}, \tau\right) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau \tag{3}$$

PROPRIETA'

Date due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e una curva Γ vale:

$$W_{\vec{F}_1+\vec{F}_2}[\Gamma] = W_{\vec{F}_1}[\Gamma] + W_{\vec{F}_2}[\Gamma] \tag{4}$$

E questo vale proprio perchè possiamo considerare una qualsiasi curva.
Se Γ fosse dovuta essere la *legge oraria* data dalla forza considerata, avremmo avuto curve diverse nel caso avessimo considerato solo una o l'altra forza, oppure entrambe contemporaneamente.

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Poniamoci ora nel caso $\vec{\gamma}(\tau) = \vec{r}(t)$, cioè il caso in cui Γ è proprio la legge oraria del corpo sottoposto a $\vec{F}$.
Allora:

- $\frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} = \vec{v}(t)$
- $\frac{d^2\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau^2} = \vec{a}(t)$

Ma allora:

$$\vec{F}\left(\vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}, \tau\right) = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{a} \tag{5}$$

Da cui segue:

$$W_{\vec{F}}\left[\Gamma\right]\Big|_{\text{Legge oraria}} = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) dt \tag{6}$$

Che riscriviamo come:

$$W_{\vec{F}}\left[\Gamma\right]\Big|_{\text{Legge oraria}} = m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) dt \tag{7}$$

A questo punto, osserviamo che:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \tag{8}$$

Per cui possiamo riscrivere (7) come:

$$W_{\vec{F}}\left[\Gamma\right]\Big|_{\text{Legge oraria}} = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) dt \tag{9}$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)\right) dt \tag{10}$$

$$= \frac{m}{2}\left(v_x^2(t_1) - v_x^2(t_0)\right) + \frac{m}{2}\left(v_y^2(t_1) - v_y^2(t_0)\right) + \frac{m}{2}\left(v_z^2(t_1) - v_z^2(t_0)\right) \tag{11}$$

$$= \frac{m}{2}\left(v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1) + v_z^2(t_1)\right) - \frac{m}{2}\left(v_x^2(t_0) + v_y^2(t_0) + v_z^2(t_0)\right) \tag{12}$$

$$= \frac{m}{2}||\vec{v}(t_1)||^2 - \frac{m}{2}||\vec{v}(t_0)||^2 \tag{13}$$

A questo punto, definiamo l'**energia cinetica**:

$$E_K = \frac{1}{2}m||\vec{v}||^2 \tag{14}$$

E troviamo quindi la **relazione** fra **lavoro** ed **energia cinetica**:

$$W_{\vec{F}}\left[\Gamma\right]\Big|_{\text{Legge oraria}} = E_{K,1} - E_{K,0} \tag{15}$$

ⓘ TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Il lavoro di una forza su un corpo, lungo la legge oraria data dalla forza stessa, è pari alla variazione di energia cinetica del corpo.

ESEMPI DI CALCOLO DEL LAVORO

FORZA PESO

Consideriamo la forza peso $\vec{F}_p = -mg\vec{u}_z$ e un corpo che si muove da $\vec{r}_0$ a $\vec{r}_1$ lungo Γ.
Calcoliamo il lavoro di $\vec{F}_p$ lungo Γ:

$$W_{F_p}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (-mg\vec{u}_z) \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{16}$$

$$= -mg \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{u}_z \cdot \left(\frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau}\vec{u}_x + \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau}\vec{u}_y + \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau}\vec{u}_z \right)$$

$$= -mg \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}(\gamma_z(\tau)) d\tau \tag{17}$$

E concludiamo quindi che:

$$W_{F_p}[\Gamma] = -mg\left(\gamma_z(\tau_1) - \gamma_z(\tau_0)\right) \tag{18}$$

Ma $\gamma_z(\tau_1) = r_{z,1}$ e $\gamma_z(\tau_0) = r_{z,0}$. Cioè il lavoro della forza peso dipende *solo dai punti inziale e finale*, e **non dalla curva** Γ.

FORZA ELASTICA

Consideriamo una forza elastica lungo $\vec{u}_x$: $\vec{F}_{el} = -k\Delta x \vec{u}_x$, dove $\Delta x = r_x - x_0$ è lo spostamento della molla rispetto alla posizione di riposo x_0.
Calcoliamone il lavoro per un corpo che si muove da x_0 a x_1 lungo Γ:

$$W_{F_{el}}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(-k(\gamma_x(\tau) - x_0)\vec{u}_x\right) \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{19}$$

$$= -k \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\gamma_x(\tau) - x_0)\vec{u}_x \cdot \left(\frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau}\vec{u}_x + \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau}\vec{u}_y + \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau}\vec{u}_z \right) d\tau$$

$$= -k \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\gamma_x(\tau) - x_0) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= -k \int_{\tau_0}^{\tau_1} \gamma_x(\tau) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau + kx_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= -\frac{k}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}\gamma_x^2(\tau) d\tau + kx_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}\gamma_x(\tau) d\tau$$

$$= -\frac{k}{2}\left(\gamma_x^2(\tau_1) - \gamma_x^2(\tau_0)\right) + kx_0\left(\gamma_x(\tau_1) - \gamma_x(\tau_0)\right) \tag{20}$$

Che con qualche passaggio algebrico possiamo riscrivere come:

$$W_{F_{el}}[\Gamma] = -\frac{k}{2}(x_f - x_0)^2 + \frac{k}{2}(x_i - x_0)^2 \tag{21}$$

Dove $x_f = \gamma_x(\tau_1)$ e $x_i = \gamma_x(\tau_0)$.
Anche in questo caso il lavoro **non** dipende dalla curva Γ.

FORZA DI ATTRITO DINAMICO

Consideriamo un corpo che si muove lungo una curva Γ e soggetto ad una forza di attrito dinamico $\vec{F}_A = -\mu_d||\vec{F}_R||\vec{u}_v$.

$$W_{\vec{F}_A}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(-\mu_d F_R \vec{u}_{\frac{d\gamma}{dt}}\right) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau \tag{22}$$

$$= -\mu_d \int_{\tau_0}^{\tau_1} F_R \left|\left|\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}\right|\right| d\tau \tag{23}$$

Se assumiamo che F_R non dipenda da τ otteniamo:

$$W_{\vec{F}_A}[\Gamma] = -\mu_d F_R \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left|\left|\frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}\right|\right| d\tau \tag{24}$$

Dove l'integrale che compare è esattamente la lunghezza della curva Γ.
Allora, se il modulo della reazione vincolare è costante, si ha:

$$W_{\vec{F}_A}[\Gamma] = -\mu_d F_R \mathcal{L}(\Gamma) \tag{25}$$

In questo caso il lavoro **dipende** effettivamente dalla curva Γ, in particolare è proporzionale alla sua lunghezza.

FORZA POSIZIONALE

> **FORZA POSIZIONALE**
>
> E' una forza che dipende solamente dalla posizione del corpo su cui agisce.

Sia $\vec{F} = f(x)\vec{u}_x$ una forza posizionale (in questo caso dipendente solo dalla posizione lungo l'asse x) e consideriamo ancora una volta una generica curva Γ.
Abbiamo:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_x(\tau))\vec{u}_x \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{26}$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_x(\tau)) \cdot \left(\frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau}\vec{u}_x + \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau}\vec{u}_y + \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau}\vec{u}_z\right) d\tau$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f\big(\gamma_x(\tau)\big) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{27}$$

Ora, sia $\mathcal{F}(x)$ una primitiva di $f(x)$, cioè $\frac{d}{dx}\mathcal{F}(x) = f(x)$.
Allora si ha:

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{F}\big(\gamma_x(\tau)\big) = f\big(\gamma_x(\tau)\big)\frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \tag{28}$$

Per cui si ha:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau}\mathcal{F}\big(\gamma_x(\tau)\big)d\tau = \mathcal{F}\big(\gamma_x(\tau_1)\big) - \mathcal{F}\big(\gamma_x(\tau_0)\big) \tag{29}$$

Cioè:

$$W_{\vec{F}} = \mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_0) \tag{30}$$

Ma $\mathcal{F}$ dipende solo da f, cioè la forza di cui vogliamo calcolare il lavoro, e non da γ o $\frac{d\gamma}{d\tau}$; per cui il lavoro **non** dipende da Γ.

> ⚠ **ATTENZIONE**
>
> Questo solo perchè la forza lungo x dipende dalla posizione lungo x stesso. Se avessimo avuto $\vec{F'} = f(x)\vec{u}_y$ avremmo trovato una dipendenza dalla curva scelta perchè l'integranda in (27) **non** avrebbe soddisfatto (28).

FORZE CONSERVATIVE

> ⓘ **DEFINIZIONE**
>
> Una forza è *conservativa* se il lavoro da essa compiuto dipende *solo* dalla posizione *iniziale* e *finale*, e **non** dal **percorso**.

E' *equivalente* dire:

$$\oint \left(\vec{F}(\vec{\gamma}) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}\right) d\tau = 0 \iff \text{F è conservativa} \tag{31}$$

Cioè F è conservativa se e solo se il lavoro da essa compiuto lungo una qualsiasi curva chiusa è nullo.

DIMOSTRAZIONE

1. Se $\vec{F}$ è conservativa, sappiamo che il lavoro compiuto dipende solo dalle posizioni iniziale e finale, e quindi, fissata una curva Γ_{01}, si ha:

$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = -W_{\vec{F}}[\Gamma_{10}]$
dove Γ_{10} è una qualsiasi curva con gli stessi punti iniziale e finale di Γ_{01}, ma scambiati.
Ma $\Gamma_{01} + \Gamma_{10}$ è un percorso chiuso (si torna al punto di partenza).
Allora $W_{\vec{F}}[\Gamma_{00}] = W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] + W_{\vec{F}}[\Gamma_{10}] = 0$.

2. Sia Γ_{01} una curva fra i punti 0 e 1 e sia Γ'_{01} una diversa curva tra gli stessi punti.
$\Gamma = \Gamma_{01} - \Gamma'_{01}$ è un percorso chiuso, per cui vale
$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau = 0$
Ma tale integrale è anche uguale a
$\int_{\Gamma_{01}} \dots d\tau - \int_{\Gamma'_{01}} \dots d\tau$
Allora segue che
$\int_{\Gamma_{01}} \dots d\tau = \int_{\Gamma'_{01}} \dots d\tau \implies W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = W_{\vec{F}}[\Gamma'_{01}]$
Cioè il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dal percorso.

FORMA GENERALE DI UNA FORZA CONSERVATIVA

Se una forza $\vec{F}$ è conservativa, il lavoro svolto deve dipendere solo dalle posizioni iniziale e finale, per cui si ha:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{F}(x_0, y_0, z_0) \tag{32}$$

Per una qualche $\mathcal{F}(x, y, z)$, con (x_0, y_0, z_0) e (x_1, y_1, z_1) estremi di Γ_{01}.
Riscriviamo il membro di destra di (32) nel seguente modo:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}\big(\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau)\big) d\tau \tag{33}$$

Dove abbiamo sostituito x, y, z con $\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau)$ per seguire la curva Γ_{01} (chiaramente, per $\tau = \tau_0$ si ha $\big(\gamma_x(\tau_0), \gamma_y(\tau_0), \gamma_z(\tau_0)\big) = (x_0, y_0, z_0)$ e per $\tau = \tau_1$ $\big(\gamma_x(\tau_1), \gamma_y(\tau_1), \gamma_z(\tau_1)\big) = (x_1, y_1, z_1)$).
Esplicitiamo allora l'integranda di (33):

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \Bigg[& \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}(x, y, z) \bigg|_{(x,y,z) = (\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))} \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}(x, y, z) \bigg|_{(x,y,z) = (\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))} \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau} + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F}(x, y, z) \bigg|_{(x,y,z) = (\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))} \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau} \Bigg] d\tau \end{aligned} \tag{34}$$

Notiamo che l'integranda è uguale al prodotto scalare seguente:

$$\vec{V} \cdot \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} \tag{35}$$

Dove:

$$\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}(x,y,z), \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{F}(x,y,z), \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F}(x,y,z) \right)\Big|_{(x,y,z)=(\gamma_x(\tau),\gamma_y(\tau),\gamma_z(\tau))} \tag{36}$$

Tale vettore $\vec{V}$ è il **gradiente** di $\mathcal{F}$:

$$\vec{\nabla}\mathcal{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F} \right) \tag{37}$$

Allora (32) diventa:

$$W_{\vec{F}}\left[\Gamma_{01}\right] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{\nabla}\mathcal{F} \cdot \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{38}$$

Ma sappiamo, dalla definizione di lavoro, che:

$$W_{\vec{F}}\left[\Gamma_{01}\right] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{F} \cdot \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau \tag{39}$$

Per cui, eguagliando (38) e (39) segue che:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\mathcal{F} \tag{40}$$

Allora $\vec{F}$ è **conservativa** se è *gradiente* di una *qualche funzione scalare* $\mathcal{F}$.

Cioè, data una forza $\vec{F}(x,y,z) = f_x(x,y,z)\vec{u}_x + f_y(x,y,z)\vec{u}_y + f_z(x,y,z)\vec{u}_z$,
$\vec{F}$ è conservativa se esiste una funzione $\mathcal{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{F} \\ f_y(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\mathcal{F} \\ f_z(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\mathcal{F} \end{cases}$$

> **CONCLUSIONE**
>
> Le forze conservative sono alcune tra le forze posizionali, e per esse vale:
> $W_{\vec{F}}\left[\Gamma_{01}\right] = \mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0)$ con $\vec{F} = \vec{\nabla}\mathcal{F}$.

ENERGIA POTENZIALE

Abbiamo quindi visto che, per una forza conservativa:

- $W_{\vec{F}}\left[\Gamma_{01}\right] = \mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0)$ lungo una qualsiasi traiettoria. $(\mathbf{I})$
- $W_{\vec{F}}\left[\Gamma_{L.O.}\right] = E_K(\vec{v}_1) - E_K(\vec{v}_0)$ lungo la legge oraria sotto $\vec{F}$. $(\mathbf{II})$

Per cui, lungo la traiettoria data dalla legge oraria, devono valere sia $\mathbf{I}$ che $\mathbf{II}$.
Allora troviamo:

$$\mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0) = E_K(\vec{v}_1) - E_K(\vec{v}_0) \tag{41}$$

Che possiamo riscrivere come:

$$E_K(\vec{v}_0) - \mathcal{F}(\vec{r}_0) = E_K(\vec{v}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_1) \tag{42}$$

Quindi lungo la traiettoria della *legge oraria*, sotto l'azione di una forza *conservativa* rimane costante la quantità:

$$E_K - \mathcal{F} \tag{43}$$

Definiamo allora, per una forza conservativa, l'**energia potenziale**:

$$E_P(\vec{r}) = -\mathcal{F}(\vec{r}) \tag{44}$$

Si definisce a questo punto l'*energia meccanica totale*:

$$E_{TOT}(\vec{r}, \vec{v}) = E_K(\vec{v}) + E_P(\vec{r}) \tag{45}$$

Per quanto visto in (42) e (43), l'energia meccanica totale è costante lungo la traiettoria sotto l'effetto di una forza conservativa.

> ⚠ **NOTA**
>
> Fisicamente si misura solo la **differenza** di energia potenziale, non una "singola" energia potenziale di un corpo in un punto.
> Infatti $\mathcal{F}$, e quindi anche E_P, è definita a meno di una costante rispetto a f.

ESEMPIO: ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Sappiamo che

$$\vec{F}_{grav} = -G\frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}\|}\vec{u}_r$$

Quindi $\vec{F}_{grav} = f(r)\vec{u}_r$ con:

$$f(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

E abbiamo visto che la forza gravitazionale è conservativa, quindi vale:

$$f(r) = -\frac{d}{dr}E_P(r)$$

Per cui deve essere:

$$E_{P,grav} = -G\frac{m_1 m_2}{r} \tag{46}$$

LEGGI DI CONSERVAZIONE

Abbiamo visto

$$W_{\vec{F}}\left[\Gamma_{01,\text{traiettoria}}\right]=\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}\cdot\frac{d\gamma}{dt}dt=\Delta E_K$$

Possiamo interpretare il teorema dell'energia cinetica nel seguente modo:
la variazione di E_K è dovuta al lavoro di una forza, quindi se nessuna forza compie lavoro, l'energia cinetica è conservata.

Ma ci sono anche altre quantità fisiche che si comportano in questo modo.

IMPULSO

Si definisce l'*impulso di una forza* come segue:

$$\vec{I}_{\vec{F}}\left[\Gamma_{01}\right]=\int_{t_0}^{t_1}\vec{F}\left(\vec{\gamma},\frac{d\vec{\gamma}}{dt},t\right)dt \tag{47}$$

TEOREMA DELL'IMPULSO
Lungo la traiettoria del moto vale:

$$\vec{I}_{\vec{F}}\left[\Gamma_{T}\right]=\int_{t_0}^{t_1}\frac{d\vec{p}}{dt}dt=\vec{p}(t_1)-\vec{p}(t_0)=\Delta\vec{p} \tag{48}$$

La variazione della quantità di moto è dovuta all'impulso di una forza. Perciò se l'impulso è nullo, si conserva la quantità di moto.

MOMENTI

Si definisce il **momento** di una forza rispetto al polo O come segue:

$$\vec{M}_{\vec{F},O}=\vec{r}\times\vec{F} \tag{49}$$

dove $\vec{r}$ è il *braccio* della forza, ovvero il vettore che congiunge il polo con il punto di applicazione della forza.
Consideriamo ora il seguente integrale:

$$\int_{t_0}^{t_1}\vec{\gamma}(t_1)\times\vec{F}\left(\vec{\gamma},\frac{d\vec{\gamma}}{dt},t\right)dt \tag{50}$$

Lungo la traiettoria del moto diventa:

$$\int_{t_0}^{t_1}\vec{r}(t)\times\underbrace{\frac{d}{dt}\big(m\vec{v}(t)\big)}_{\vec{F}}dt=\int_{t_0}^{t_1}\vec{M}_{\vec{F},O}dt \tag{51}$$

Ora osserviamo che

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{r}(t)\times m\vec{v}(t)\big)=\cancelto{0}{\vec{v}(t)\times m\vec{v}(t)}+\vec{r}(t)\times\frac{d}{dt}\big(m\vec{v}(t)\big) \tag{52}$$

Allora riscriviamo (51) come segue:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})dt \tag{53}$$

Definiamo allora il **momento angolare** di un punto materiale rispetto a un polo O:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \tag{54}$$

Dove ancora una volta $\vec{r}$ è il vettore che congiunge il polo O con il punto materiale.
E troviamo infine, sempre lungo la traiettoria del moto:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{M}dt = \vec{L}(t_1) - \vec{L}(t_0) = \Delta\vec{L} \tag{55}$$

Cioè una variazione di momento angolare è dovuta al momento di una forza. Perciò se nessuna forza esercita momento si ha che il momento angolare è conservato lungo il moto.

Tale enunciato è noto come **teorema del momento angolare** in *forma integrale*.
E' utile considerare la sua *forma differenziale*, che otteniamo derivando ambo i membri in (55):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{56}$$

Tale formulazione è chiaramente equivalente: anche da questa deduciamo che se il momento risultante è nullo, il momento angolare rimane costante.