

# FISICA 1

## INDICE ARGOMENTI:

- 01 - INTRODUZIONE
  - ==INTERAZIONI FONDAMENTALI==
  - ==CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE==
  - ==DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE==
- 02 - PROBLEMA OSCILLAZIONI
  - ==OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO E RISONANZA==
- 03 - LAVORO, ENERGIA, MOMENTI E LEGGI DI CONSERVAZIONE
  - ==LAVORO ED ENERGIA==
  - ==LEGGI DI CONSERVAZIONE==
- 04 - SISTEMI DI RIFERIMENTO
  - ==SISTEMI INERZIALI E NON INERZIALI==
- 05 - SISTEMI DI PUNTI MATERIALI
  - ==SISTEMI DI PUNTI MATERIALI==
  - ==URTI==
- 06 - PROBLEMA DI KEPLERO
  - ==PROBLEMA DEI DUE CORPI==
- 07 - CORPO RIGIDO
  - ==IL CORPO RIGIDO==
  - ==PURO ROTOLAMENTO==
- 08 - FLUIDI
  - ==FLUIDOSTATICA==
  - ==FLUIDODINAMICA==
- 09 - TERMODINAMICA
  - ==TEMPERATURA E CALORE==
  - ==I GAS==
  - ==MACCHINE TERMICHE==
  - ==ENTROPIA==
  - ==TEORIA CINETICA DEI GAS==

## INTERAZIONI FONDAMENTALI

In fisica, le **interazioni fondamentali** sono interazioni della natura che permettono di descrivere *tutti i fenomeni fisici a tutte le scale di distanza*, e **non** sono **riconducibili** ad altre interazioni.

Ne sono state individuate quattro:

- L'interazione **gravitazionale** (responsabile dell'attrazione fra corpi con massa).
- L'interazione **elettromagnetica** (interazioni fra corpi carichi e campi elettromagnetici).
- L'interazione **debole** (responsabile dei decadimenti nucleari).
- L'interazione **forte** (tiene uniti i quark e le particelle nei nuclei atomici).

## CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

### PUNTO MATERIALE

E' un'astrazione matematica con le seguenti caratteristiche:

- **NON** ha **dimensione** (non ha un'estensione nello spazio).
- Ha una certa **massa**.

In un sistema di riferimento in 3 dimensioni, è descritto dalla sua massa e, istante per istante, dalla sua posizione:

$$\vec{r}(t) = \left( x(t), y(t), z(t) \right)$$

### VELOCITA' DEL PM

Consideriamo  $z(t)$  al variare di  $t$ .

La *velocità* lungo l'asse  $z$  ( $\vec{u}_z$ ) ci dice quanto rapidamente cambia  $z(t)$  tra due istanti vicini nel tempo:

$$v_z(t_0) \approx \frac{z(t_1) - z(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Per cui per  $t_1 - t_0$  sufficientemente piccolo abbiamo:

$$v_z(t_0) = \left. \frac{dz(t)}{dt} \right|_{t_0}$$

### ACCELERAZIONE DEL PM

Analogamente, l'*accelerazione* lungo l'asse  $z$  ci dice quanto rapidamente varia la velocità del punto materiale fra due istanti nel tempo.

Vale:

$$a_z(t_0) = \left. \frac{dv_z(t)}{dt} \right|_{t_0}$$

### ESTENSIONE AI VETTORI

Tali relazioni valgono anche per i vettori  $\vec{r}(t)$  e  $\vec{v}(t)$ .

Vale:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left( \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

## LEGGI DEL MOTO

In meccanica, le **leggi del moto** si scrivono *interamente* in termini di  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$ .

Focalizzandoci sull'asse  $z$ , se conosciamo  $z(t_0)$  e  $v_z(t_0)$ , sappiamo che vale:

$$z(t_1) \approx z(t_0) + (t_1 - t_0)v_z(t_0)$$

Possiamo iterare la procedura, trovando:

$$z(t_n) \approx z(t_0) + (t_1 - t_0)v_z(t_0) + \dots + (t_n - t_{(n-1)})v_z(t_{n-1})$$

Per  $n \rightarrow \infty$  otteniamo una somma di Riemann, da cui passiamo all'integrale:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t v_z(\tau) d\tau$$

Come prima, tale relazione vale anche per i vettori. Per cui si trova:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(\tau) d\tau$$

E similmente, per la velocità:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(\tau) d\tau$$

## MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Sia  $\vec{a}(t) = \vec{a}$  costante. Ad esempio  $\vec{a}(t) = (0, 0, -g)$ .

Vogliamo descrivere il moto di un p.m. soggetto a tale accelerazione, velocità iniziale  $\vec{v}_0$  e posizione iniziale  $\vec{r}_0$ .

Dalle equazioni di prima troviamo che vale:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

## MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Consideriamo un p.m. che si muove su un piano lungo una traiettoria circolare con velocità angolare costante  $\omega$ .

Abbiamo.

$$\vec{r}(t) = R_0 \cos(\omega(t - t_0))\vec{u}_x + R_0 \sin(\omega(t - t_0))\vec{u}_y$$

Si osservi che vale  $||\vec{r}(t)|| = R_0 \forall t$ .

Si scrive anche:

$$\vec{r}(t) = R_0 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x + R_0 \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_y$$

Dove  $\phi = -\omega t_0$  è lo *sfasamento iniziale*.

Si noti che, per  $N \in \mathbb{Z}$ , vale:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\left(t + \frac{2N\pi}{\omega}\right)$$

Il moto si ripete ogni  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .  $T$  è il **periodo** del moto.

Derivando per trovare la legge della velocità:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -R_0\omega \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_x + R_0\omega \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_y$$

E si osserva che vale  $||\vec{v}(t)|| = R_0\omega$ .

**NOTA:** la velocità è tangente alla traiettoria.

Derivando nuovamente per trovare la legge dell'accelerazione:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -R_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x - R_0\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_y$$

Notiamo che vale  $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$ .

E si osserva che vale anche  $||\vec{a}(t)|| = R_0\omega^2$ .

## MOTO ARMONICO

E' la proiezione del M.C.U. lungo un asse, per esempio  $\vec{u}_x$ .

Allora, dalle equazioni trovate sopra, sappiamo:

$$\vec{r}(t) = R_0 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x$$

$$\vec{v}(t) = -R_0\omega \sin(\omega t + \phi) \vec{u}_x$$

$$\vec{a}(t) = -R_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \vec{u}_x = -\omega^2 \vec{r}(t) \vec{u}_x$$

## VELOCITA' E ACCELERAZIONE DI UN VERSORE ROTANTE

Consideriamo un **versore** (vettore di norma 1) rotante  $\vec{u}(t)$ .

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} \approx \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t} \vec{u}_\perp$$

Dove il numeratore è la "distanza percorsa". Essendo il versore rotante, vale che tale distanza è  $\approx \Delta\theta ||\vec{u}(t)|| \approx \Delta\theta$ .

Tenendo conto di ciò e passando al limite, troviamo:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{u}_{\perp}$$

Deriviamo nuovamente per trovare l'accelerazione:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \vec{u}_{\perp} \right) \\ &= \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \vec{u}_{\perp} + \frac{d\theta(t)}{dt} \underbrace{\frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt}}_{= \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_{\perp\perp}} \end{aligned}$$

E troviamo:

$$\frac{d^2\vec{u}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \vec{u}_{\perp}(t) - \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \vec{u}(t)$$

## DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

La dinamica vuole spiegare le **cause** del moto a partire dal *principio di inerzia* e sulla base del concetto di forza.

## PRINCIPI DELLA DINAMICA

### PRIMA LEGGE DELLA DINAMICA (PRINCIPIO DI INERZIA):

Se su un corpo non agisce alcuna forza, allora questo si muove con velocità costante, eventualmente nulla.

Per formalizzare tale principio, si introducono la definizione di **forza** e la seconda legge della dinamica.

### SECONDA LEGGE DELLA DINAMICA:

La forza agente su un corpo è pari alla variazione, istante per istante, della sua quantità di moto.

Per cui si ha:

$$\frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Si osservi che se la forza è nulla, allora anche la variazione di  $\vec{p}$  è nulla, cioè il corpo si muove con  $\vec{v}$  costante (primo principio).

Assumendo che la massa sia costante troviamo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\vec{a}$$

**NOTA:**  $m$  è detta *massa inerziale*.

## INTERPRETAZIONI

1. Il secondo principio della dinamica ci fornisce una **definizione** di forza.
2. Se conosciamo la *massa* del corpo e la/le *forza/e agenti* su di esso possiamo ricavare l'**accelerazione** a cui è soggetto, e da questa la sua legge oraria.

Introduciamo infine il terzo principio della dinamica.



### TERZA LEGGE DELLA DINAMICA (PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE):

Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora B esercita una forza di modulo uguale ma verso opposto su A.

## VALIDITA' DELLE LEGGI DELLA DINAMICA

Immaginiamo di scrivere la legge oraria per il moto di un corpo rispetto a due diversi sistemi di riferimento.

Le leggi ottenute avranno la stessa forma? La forza "osservata" nei due sistemi sarà la stessa?

La risposta a entrambe le domande è **si, se i sistemi di riferimento sono inerziali**.



### SISTEMI INERZIALI

Un sistema di riferimento si dice **inerziale** se si muove con velocità costante.

Se sono inerziali, significa che si muovono a velocità costante anche uno rispetto all'altro.

Consideriamo quindi due sistemi,  $O$  e  $O'$ , e un corpo in posizione  $\vec{r}(t) = \vec{OP}(t)$  rispetto a  $O$  e  $\vec{r}'(t) = \vec{O'P}$  rispetto ad  $O'$ .

Consideriamo inoltre il vettore  $\vec{OO'}$ , distanza fra le origini dei due sistemi di riferimento. Si ha  $\vec{OO'} = \vec{d} + \vec{v}_{OO'}t$  dove  $\vec{d}$  è la distanza iniziale fra i due e  $\vec{v}_{OO'}$  è la velocità relativa fra i due sistemi.

Segue anche che:

$$\vec{OP}(t) = \vec{OO'}(t) + \vec{O'P}(t)$$

Cioè:

$$\vec{r}(t) = \vec{d} + \vec{v}_{OO'}t + \vec{r}'(t)$$

Derivando ambo i membri troviamo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{OO'} + \vec{v}'(t)$$

Derivando nuovamente:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t)$$

Allora le accelerazioni misurate nei due sistemi sono uguali (l'accelerazione è invariante).

Quindi le leggi della dinamica valgono e sono compatibili con entrambi i sistemi e le leggi orarie avranno la stessa forma.

## ESEMPI DI FORZE

### FORZA ELASTICA

$$\vec{F}_{el} = -k\vec{r}$$

Dove  $k$  è la costante elastica.

Consideriamo un corpo che può muoversi lungo una sola direzione, per esempio  $\vec{u}_x$ :

$$\vec{F}_{el,x} = -kx\vec{u}_x$$

Abbiamo:

- $F_{el} < 0$  se  $x > 0$
- $F_{el} > 0$  se  $x < 0$

La forza elastica riporta il corpo verso una posizione di equilibrio, agendo come una "forza di richiamo".

Immaginiamo di avere una generica forza di richiamo  $\vec{F}_{rich}(x)$  tale che  $\vec{F}_{rich}(0) = 0$ .

Allora possiamo dire:

$$F_{rich}(x) = 0 + \underbrace{\frac{d}{dx} F_{rich}}_{=-k} \Big|_0 x + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} F_{rich} \Big|_0 x^2 + \dots$$

Per  $x \rightarrow 0$ :

$$F_{rich}(x) = -kx + o(x^2)$$

Quindi qualsiasi forza di richiamo è approssimabile dalla forza elastica per piccole perturbazioni rispetto all'equilibrio.

**NOTA:** non è importante che la posizione di riposo sia 0.

In generale, se  $x_0$  è la posizione di riposo, abbiamo:

$$F_{el,x} = -k(x - x_0)$$

# FORZA DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Tra due corpi  $A$  e  $B$  con masse  $m_A$  e  $m_B$  vi è una forza:

$$\vec{F}_{AB} = -G \frac{m_A m_B}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{AB}$$

E vale  $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$  per il terzo principio della dinamica.

Per il secondo principio, abbiamo:

$$m_A \vec{a}_A = \vec{F}_{AB}$$

Allora troviamo:

$$\vec{a}_A = -G \frac{m_B}{\|\vec{r}_A - \vec{r}_B\|^2} \vec{u}_{AB}$$

La massa inerziale era definita dalla legge di Newton, indipendentemente dal tipo di forza considerata. E' un fatto inaspettato (e risultato sperimentale) che la stessa massa abbia anche il ruolo di "massa gravitazionale".

## FORZA PESO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE

Una persona ferma sulla superficie terrestre è in buona approssimazione soggetta alla sola forza gravitazionale terrestre.

Allora l'accelerazione sulla persona data da tale forza è:

$$\vec{a} = -G \frac{m_T}{r_T^2} \vec{u}_z$$

Dove  $m_T$  ed  $r_T$  sono, rispettivamente, la massa della terra e il raggio terrestre, e  $\vec{u}_z$  il versore della direzione centro della terra-persona.

Si trova:

$$\|\vec{a}\| \approx 9,81 \frac{m}{s^2} \stackrel{def}{=} g$$

E introduciamo la *forza-peso* sulla superficie terrestre, data da:

$$\vec{F}_P = -mg\vec{u}_z$$

## FORZA D'ATTRITO (RADENTE)

Si definisce per corpi a contatto con una **superficie**:

$$\vec{F}_a = \begin{cases} -\vec{F}_{\parallel} & \text{se } \|\vec{F}_{\parallel}\| \leq \mu_s \|\vec{F}_{\perp}\| \\ -\mu_d \|\vec{F}_{\perp}\| \vec{u}_v & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dove  $\mu_s$  è il coefficiente di attrito statico e  $\mu_d$  il coefficiente di attrito dinamico.

Se la forza parallela alla superficie non è sufficiente per contrastare l'attrito statico, il



corpo rimane fermo.

Per un corpo in movimento, invece, la forza d'attrito dinamico è proporzionale alla risultante delle forze entranti nel piano.

## FORZA D'ATTRITO (VISCOSO)

Un corpo immerso in un **fluido** (come l'aria) è soggetto, in assenza di vortici, ad una forza d'attrito (detto *attrito viscoso*):

$$\vec{F}_{visc} = -b\vec{v}$$

Dove  $b$  è il coefficiente di attrito viscoso.

Lungo  $\vec{u}_v$  si ha:

$$ma = -bv$$

Da cui:

$$a = -\frac{b}{m}v$$

Otteniamo allora l'equazione differenziale:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}v$$

Una soluzione a tale equazione è

$$v(t) = v_0 e^{\lambda t}$$

Sostituendo nell'equazione troviamo:

$$v_0 \lambda e^{\lambda t} = -\frac{b}{m} v_0 e^{\lambda t}$$

E questa relazione deve valere per qualsiasi  $t$ , quindi deve essere:

$$\lambda = -\frac{b}{m}$$

Mentre la costante  $v_0$  è fissata dalla condizione iniziale ( $v(0) = v_0$ ).

Per trovare la legge oraria associata, supponendo un moto in una direzione:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-(b/m)\tau} d\tau$$

E si trova:

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0 m}{b} \left(1 - e^{-(b/m)t}\right)$$

## EQUAZIONI DELLA DINAMICA

Abbiamo visto un esempio di equazione della dinamica per un corpo soggetto ad attrito viscoso.

In generale, le equazioni sono del tipo

$$ma = F_{TOT}$$

E quindi:

$$a = \frac{1}{m} F_{TOT}$$

Dove, come abbiamo detto,  $F_{TOT}$  dipende da  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  e  $t$ .

Troveremo quindi, nel caso più generale, un'equazione differenziale *lineare*, a *coefficienti costanti*, *affine* del tipo:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a \frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = F(t)$$

## OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO E RISONANZA

Una massa  $m$  è appesa ad una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza  $l_0$ .

La massa della molla è trascurabile. Si scomponga il moto lungo l'asse verticale (asse  $z$ ) e si tratti il problema in una dimensione.

### 1 - TRASCURIAMO LA FORZA PESO

#### 1.1 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA

Se la molla è ferma è a distanza  $l_0$  dal soffitto: scegliamo allora tale quota per fissare  $z = 0$ . Con tale scelta troviamo:

$$F_{el} = -kz$$

Da cui ricaviamo:

$$ma = -kz$$

E quindi:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}z(t) \quad (1)$$

La cui soluzione è:

$$z(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

Per determinare  $\omega$ , sostituiamo (2) in (1):

$$\frac{d^2}{dt^2}(A \cos(\omega t + \phi)) = -\frac{k}{m}A \cos(\omega t + \phi)$$

$$-\omega^2 \cancel{A \cos(\omega t + \phi)} = -\frac{k}{m} \cancel{A \cos(\omega t + \phi)}$$

E concludiamo che

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3)$$

L'equazione (1) è un'EDO di secondo grado, quindi la soluzione più generale deve dipendere da due parametri che saranno determinati dalle condizioni iniziali: nel nostro caso  $A$  e  $\phi$ .

## 1.2 DETERMINARE TALI PARAMETRI

Assumiamo che a  $t = 0$  la posizione e velocità valgano rispettivamente  $z_0$  e  $v_0$ .  
Calcoliamo  $v(t)$ :

$$v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \quad (4)$$

Ora imponiamo:

$$\begin{cases} v(0) = v_0 = -A\omega \sin(0 + \phi) \\ z(0) = z_0 = A \cos(\phi) \end{cases}$$

Dal rapporto fra le due equazioni troviamo:

$$\frac{v_0}{z_0} = -\frac{A\omega \sin \phi}{A \cos \phi} = -\omega \tan \phi$$

Da cui

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega z_0} \quad (5)$$

Dalla prima equazione, invece:

$$A \sin \phi = -\frac{v_0}{\omega}$$

Sommiamo allora i quadrati delle due equazioni trovando:

$$A^2 (\cancel{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi})^1 = \frac{v_0^2}{\omega^2} + z_0^2$$

E allora:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + z_0^2} \quad (6)$$

In (3) avremmo potuto scegliere anche  $\omega' = -\sqrt{\frac{k}{m}}$ , il che avrebbe semplicemente portato a trovare un valore diverso di  $\phi$ , che in ogni caso è arbitrario e dipende dalle condizioni al contorno.

## 2 - CONSIDERIAMO LA FORZA PESO

Sia  $l_r$  la lunghezza di riposo della molla nella posizione verticale, cioè la lunghezza tale per cui la risultante delle forze è nulla.

### 2.1 DETERMINARE LA LUNGHEZZA DI RIPOSO

L'equazione associata al problema è:

$$ma = -kz - mg \quad (7)$$

Siccome a riposo la forza sulla molla è nulla, eguagliamo (7) a 0 e troviamo:

$$z_{rip} = -\frac{m}{k}g \quad (8)$$

Il valore trovato è negativo, infatti la forza peso abbassa la posizione di riposo. Siccome avevamo fissato  $z = 0$  a distanza  $l_0$  dal soffitto, avremo:

$$l_r = l_0 + |z_{rip}| = l_0 + \frac{m}{k}g \quad (9)$$

### 2.2 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA IN QUESTO CASO

Da (7) troviamo l'equazione differenziale seguente:

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) + \frac{k}{m}z(t) = -g \quad (10)$$

Sappiamo che la soluzione di un'EDO non omogenea è data dalla soluzione dell'omogenea associata, a cui dobbiamo sommare una soluzione particolare del caso non omogeneo.

L'equazione omogenea associata, in questo caso, ha la stessa forma di (1), per cui la soluzione sarà analoga.

Una soluzione particolare, invece, è data dal caso in cui la molla è ferma nella posizione di riposo:

$$z_*(t) = z_{rip} \quad (11)$$

Notiamo infatti che (11) soddisfa (10).

Allora la soluzione al problema è:

$$z(t) = z_{rip} + A \cos(\omega t + \phi) \quad (12)$$

Che possiamo riscrivere come:

$$z(t) - z_{rip} = A \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

Definiamo  $\bar{z}(t) = z(t) - z_{rip}$  e troviamo:

$$\bar{z}(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (14)$$

Notiamo che le equazioni (14) e (2) hanno la stessa forma e differiscono solamente per la posizione di riposo, che è stata spostata dall'azione della forza peso.

Da qui in avanti lavoreremo quindi con il sistema di riferimento  $\bar{z}$  in cui  $\bar{z} = 0$  corrisponde a  $z = z_{rip}$ .

## 3 - CONSIDERIAMO L'ATTRITO VISCOSO

Consideriamo ora anche una forza di attrito viscoso che agisce sulla massa, con coefficiente d'attrito  $b$ .

### 3.1 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA

In questo caso abbiamo, ricordando che stiamo usando  $z_{rip}$  come posizione  $z = 0$ :

$$F_{TOT} = ma = -kz - bv \quad (15)$$

E otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dz(t)}{dt} + \frac{k}{m} z(t) = 0 \quad (16)$$

Chiamiamo  $\gamma = \frac{b}{2m}$  e ricordiamo che  $\frac{k}{m} = \omega^2$ . Allora l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = 0 \quad (17)$$

Proviamo una soluzione del tipo  $z(t) = Ae^{\lambda t}$ . Sostituendo in (17) e con un po' di algebra troviamo:

$$Ae^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2) = 0 \quad (18)$$

Una soluzione banale è data da  $A = 0$ .

Una soluzione non banale è data da  $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$ .

Le soluzioni a tale equazione di secondo grado in  $\lambda$  sono:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Allora la soluzione più generale sarà del tipo

$$z(t) = Be^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + Ce^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} \quad (19)$$

Che anche in questo caso dipende da due parametri, in quanto soluzione a un'EDO di secondo grado.

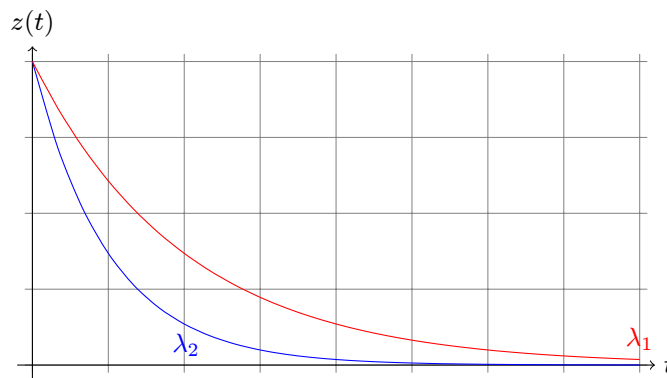
Può essere  $\gamma^2 - \omega^2 < 0$  cioè  $\frac{b^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$ . Ciò avviene se la forza d'attrito è molto piccola rispetto a quella elastica. In tal caso,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sarebbero complessi, e dovremmo imporre che la soluzione sia complessivamente reale.

### 3.1.1 CASO $\gamma > \omega$ (FORTE SMORZAMENTO)

In tal caso abbiamo:

- $\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$
- $\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

E complessivamente  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ .



Nel grafico assumiamo  $B = C$  per semplicità, ma tali parametri dipendono dalle condizioni iniziali  $z_0$  e  $v_0$ :

$$\begin{cases} z_0 = B + C \\ v_0 = \lambda_1 B + \lambda_2 C \end{cases}$$

### 3.1.2 CASO $\gamma < \omega$ (OSCILLAZIONI SMORZATE)

Siamo nel caso della nota.

Abbiamo:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}$$

Allora (19) diventa:

$$z(t) = Be^{(-\gamma + i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|})t} + Ce^{(-\gamma - i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|})t} \quad (20)$$

Che possiamo scrivere come:

$$z(t) = e^{-\gamma t} (Be^{i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t} + Ce^{-i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t}) \quad (21)$$

Dato che la soluzione è complessa, anche  $B$  e  $C$  sono complessi.

Diciamo:  $B = x + iy$  e  $C = r + iw$  con  $x, y, r, w \in \mathbb{R}$ .

Chiaramente deve essere  $z(t) \in \mathbb{R} \forall t$ . Dobbiamo allora imporre che  $z(t)$  sia uguale al suo coniugato:

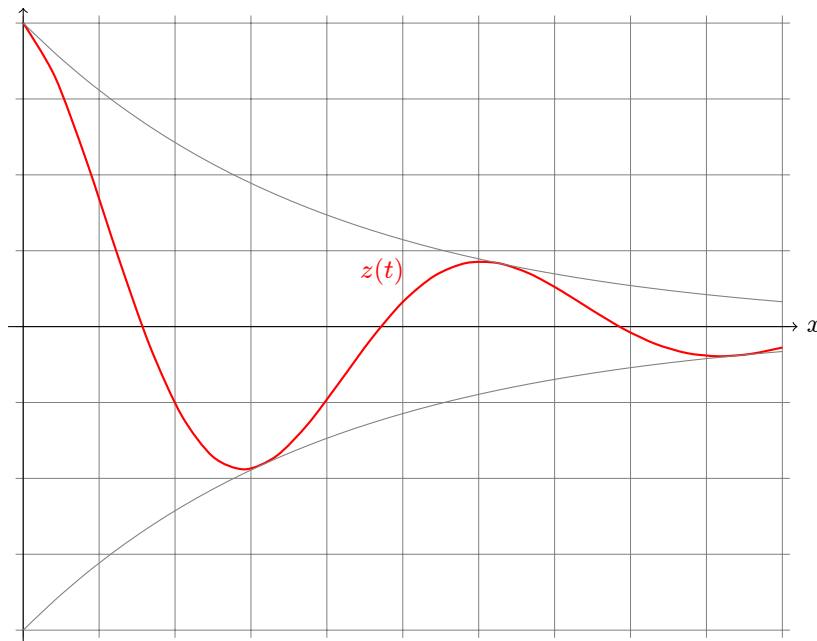
$$\bar{z}(t) = e^{-\gamma t} \left( (x - iy)e^{-i\sqrt{\dots}t} + (r - iw)e^{i\sqrt{\dots}t} \right) \quad (22)$$

Eguagliando quindi (21) e (22) troviamo  $x = r$  e  $y = -w$  e, con alcuni passaggi algebrici, arriviamo alla forma:

$$z(t) = 2A \underbrace{\left( \frac{e^{i\sqrt{\dots}t} + e^{-i\sqrt{\dots}t}}{2} \right)}_{=\cos(\dots)} + 2B \underbrace{\left( \frac{e^{-i\sqrt{\dots}t} - e^{i\sqrt{\dots}t}}{2i} \right)}_{=-\sin(\dots)} \quad (23)$$

Che, in quanto combinazione lineare di sin e cos, può essere riscritta nella forma:

$$z(t) = e^{-\gamma t} A \cos(\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}t + \phi) \quad (24)$$



## 4 - FORZA PERIODICA ESTERNA

### RISONANZA

Si può verificare quando un corpo *elastico* è soggetto a una forza periodica che amplifica le vibrazioni "naturali" del corpo stesso.

### 4.1 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA

Assumiamo che sul sistema agisca una forza esterna periodica diretta lungo l'asse  $z$  e della forma:

$$F_{ext} = F_0 \sin(\Omega t)$$

L'equazione omogenea (17) diventa:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \quad (25)$$

Ancora una volta, sappiamo che la soluzione a tale equazione sarà data dalla somma della soluzione all'equazione omogenea associata (che è proprio (17)) e di una soluzione particolare.

Non ci resta che determinare quest'ultima.

Proviamo con una del tipo:

$$z(t) = K \sin(\Omega t + \phi) \quad (26)$$

Sostituendo in (25) troviamo:

$$\begin{aligned} \sin(\Omega t) \underbrace{\left( -K\Omega^2 \cos \phi + \omega^2 K \cos \phi - 2\gamma K \Omega \sin \phi - \frac{F_0}{m} \right)}_{=A} + \\ + \cos(\Omega t) \underbrace{\left( -K\Omega^2 \sin \phi + \omega^2 K \sin \phi + 2\gamma K \Omega \cos \phi \right)}_{=B} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

E tale equazione deve valere  $\forall t$ .

In particolare, notiamo che:

- Per  $t = 0$  si ha  $B = 0$
- Per  $t = \frac{\pi}{2\Omega}$  si ha  $A = 0$

Otteniamo così delle equazioni più semplici su cui lavorare.

Alla fine troviamo:

$$\tan \phi = -\frac{2\gamma\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (28)$$

E

$$K = \frac{F_0}{m} \sqrt{\frac{1}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \quad (29)$$

La soluzione più generale al problema allora è:

$$z(t) = K \sin(\Omega t + \phi) + \underbrace{Be^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_2 t}}_{\text{caso omogeneo}} \quad (30)$$

## 4.2 RISONANZA

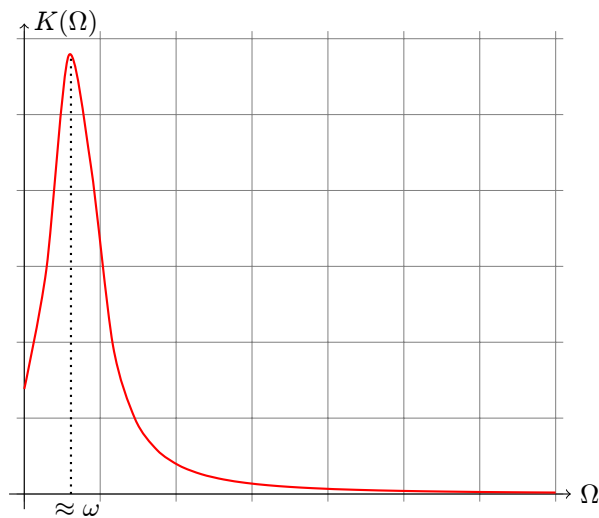
### NOTA

Per  $\gamma t \gg 1$  si ha  $|Be^{\lambda_1 t} + Ce^{\lambda_2 t}| \ll 1$  perchè esponenziale decrescente in entrambi i casi visti.

Per cui, per  $t \rightarrow \infty$  si ha  $z(t) \approx K \sin(\Omega t + \phi)$ .



Ma  $K$  **non** dipende dalle condizioni iniziali: dipende solo da  $\Omega$  e  $\omega$  (proporzionali alle frequenze di vibrazione del corpo e della forza esterna),  $F_0$  (ampiezza delle oscillazioni della forza esterna), e  $\gamma$  ed  $m$  (parametri "intrinseci" della molla).



Ma  $\gamma$  è molto piccolo, per cui possiamo dire:

$$K \approx \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \quad (31)$$

Che ci permette di intuire che il picco evidenziato nel grafico si verifica per  $\Omega \approx \omega$ . Per trovare il valore esatto di  $\Omega$  per cui  $K$  assume valore massimo, deriviamo (29) rispetto a  $\Omega$ :

$$\frac{dK}{d\Omega} = \frac{2F_0}{m} \frac{\Omega(\omega^2 - 2\gamma^2 - \Omega^2)}{((\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2)^{3/2}} \quad (32)$$

Imponendo che questa sia uguale a 0 troviamo:

- $\Omega = 0$ , caso banale per cui la forza esterna è costante.
- $\Omega^2 = \omega^2 - 2\gamma^2$ , che per  $\gamma$  piccolo coincide con la stima derivante da (31).

Abbiamo quindi la frequenza di risonanza:

$$\Omega_{ris} = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \quad (33)$$

Per cui si ha la massima ampiezza delle oscillazioni, dovuta proprio alla risonanza:

$$K_{ris} = \frac{F_0}{2m\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \quad (34)$$

Tornando a (28) e sostituendo il valore di  $\Omega_{ris}$  troviamo:

$$\tan \phi_{ris} = -\frac{2\gamma\Omega}{2\gamma^2} = -\frac{\Omega}{\gamma} \quad (35)$$

Ma essendo  $\gamma \ll \Omega$ , si ha  $\tan \phi_{ris} \rightarrow \infty$  e:

$$\phi_{ris} \approx \frac{\pi}{2} \quad (36)$$

Ciò significa che, nella situazione di risonanza, vi è uno *sfasamento* di  $90^\circ$  tra la *forza esterna* e l'*oscillazione del corpo* (*quadratura di fase*).

Ma anche lo sfasamento tra l'oscillazione e la *velocità della molla* è di  $90^\circ$  (essendo  $v(t) = \frac{d}{dt}z(t)$  ed essendo  $z(t)$  sinusoidale).

Per cui **velocità della molla** e **forza esterna** sono **in fase**, e questo fa sì che la forza esterna "spinga" la molla esattamente quando questa si sta muovendo nella stessa direzione, amplificandone le oscillazioni.

## LAVORO ED ENERGIA

Consideriamo una forza  $\vec{F}$ , che nel caso più generale dipende dalla posizione  $\vec{r}$  di un corpo, dalla sua velocità  $\vec{v}$  e dal tempo  $t$ :  $\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ .

Definiamo il **lavoro della forza** lungo la *traiettoria del corpo* tra l'istante  $t_0$  e  $t_1$  come:

$$W_F = \int_{t_0}^{t_1} [\vec{F}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) \cdot \vec{v}(t)] dt \quad (1)$$

In questo caso la traiettoria è quella determinata dalla stessa forza  $\vec{F}$  della quale stiamo calcolando il lavoro.

E' possibile dare una definizione più *generale* del lavoro.

Per farlo, consideriamo una generica curva  $\Gamma$  descritta dal vettore  $\vec{\gamma}(\tau)$  al variare di  $\tau$ :

$$\Gamma = \{(\tau, \vec{\gamma}(\tau)) , \tau \in [\tau_0, \tau_1]\} \quad (2)$$

La curva  $\Gamma$  *non è necessariamente la legge oraria* del corpo su cui agisce la forza.

Per questo motivo usiamo un generico parametro  $\tau$  invece che  $t$ , il vettore  $\vec{\gamma}(\tau)$  invece della legge oraria  $\vec{r}(t)$  e la derivata  $\frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau}$  invece della velocità  $\vec{v}(t)$ .

Definiamo allora il **lavoro di una forza lungo una generica curva**  $\Gamma$  come:

$$W_F[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{F}\left(\vec{\gamma}(\tau), \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau}, \tau\right) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau \quad (3)$$

## PROPRIETA'

Date due forze  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  e una curva  $\Gamma$  vale:

$$W_{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}[\Gamma] = W_{\vec{F}_1}[\Gamma] + W_{\vec{F}_2}[\Gamma] \quad (4)$$

E questo vale proprio perchè possiamo considerare una qualsiasi curva.

Se  $\Gamma$  fosse dovuta essere la *legge oraria* data dalla forza considerata, avremmo avuto curve diverse nel caso avessimo considerato solo una o l'altra forza, oppure entrambe contemporaneamente.

## TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

Poniamoci ora nel caso  $\vec{\gamma}(\tau) = \vec{r}(t)$ , cioè il caso in cui  $\Gamma$  è proprio la legge oraria del corpo sottoposto a  $\vec{F}$ .

Allora:

- $\frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} = \vec{v}(t)$
- $\frac{d^2\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau^2} = \vec{a}(t)$

Ma allora:

$$\vec{F}\left(\vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau}, \tau\right) = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m\vec{a} \quad (5)$$

Da cui segue:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] \Big|_{\text{Legge oraria}} = \int_{t_0}^{t_1} m\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) dt \quad (6)$$

Che riscriviamo come:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] \Big|_{\text{Legge oraria}} = m \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \vec{v}(t) dt \quad (7)$$

A questo punto, osserviamo che:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \quad (8)$$

Per cui possiamo riscrivere (7) come:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] \Big|_{\text{Legge oraria}} = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}(\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)) dt \quad (9)$$

$$= \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)) dt \quad (10)$$

$$= \frac{m}{2} (v_x^2(t_1) - v_x^2(t_0)) + \frac{m}{2} (v_y^2(t_1) - v_y^2(t_0)) + \frac{m}{2} (v_z^2(t_1) - v_z^2(t_0)) \quad (11)$$

$$= \frac{m}{2} (v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1) + v_z^2(t_1)) - \frac{m}{2} (v_x^2(t_0) + v_y^2(t_0) + v_z^2(t_0)) \quad (12)$$

$$= \frac{m}{2} \|\vec{v}(t_1)\|^2 - \frac{m}{2} \|\vec{v}(t_0)\|^2 \quad (13)$$

A questo punto, definiamo l'**energia cinetica**:

$$E_K = \frac{1}{2} m \|\vec{v}\|^2 \quad (14)$$

E troviamo quindi la **relazione fra lavoro ed energia cinetica**:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] \Big|_{\text{Legge oraria}} = E_{K,1} - E_{K,0} \quad (15)$$

Il lavoro di una forza su un corpo, lungo la legge oraria data dalla forza stessa, è pari alla variazione di energia cinetica del corpo.

## ESEMPI DI CALCOLO DEL LAVORO

### FORZA PESO

Consideriamo la forza peso  $\vec{F}_p = -mg\vec{u}_z$  e un corpo che si muove da  $\vec{r}_0$  a  $\vec{r}_1$  lungo  $\Gamma$ . Calcoliamo il lavoro di  $\vec{F}_p$  lungo  $\Gamma$ :

$$W_{F_p}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (-mg\vec{u}_z) \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &= -mg \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{u}_z \cdot \left( \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x + \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau} \vec{u}_y + \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau} \vec{u}_z \right) d\tau \\ &= -mg \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} (\gamma_z(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (17)$$

E concludiamo quindi che:

$$W_{F_p}[\Gamma] = -mg(\gamma_z(\tau_1) - \gamma_z(\tau_0)) \quad (18)$$

Ma  $\gamma_z(\tau_1) = r_{z,1}$  e  $\gamma_z(\tau_0) = r_{z,0}$ . Cioè il lavoro della forza peso dipende *solo dai punti iniziale e finale, e non dalla curva*  $\Gamma$ .

### FORZA ELASTICA

Consideriamo una forza elastica lungo  $\vec{u}_x$ :  $\vec{F}_{el} = -k\Delta x\vec{u}_x$ , dove  $\Delta x = r_x - x_0$  è lo spostamento della molla rispetto alla posizione di riposo  $x_0$ .

Calcoliamone il lavoro per un corpo che si muove da  $x_0$  a  $x_1$  lungo  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} W_{F_{el}}[\Gamma] &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} (-k(\gamma_x(\tau) - x_0)\vec{u}_x) \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (19) \\ &= -k \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\gamma_x(\tau) - x_0)\vec{u}_x \cdot \left( \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x + \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau} \vec{u}_y + \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau} \vec{u}_z \right) d\tau \\ &= -k \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\gamma_x(\tau) - x_0) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= -k \int_{\tau_0}^{\tau_1} \gamma_x(\tau) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau + kx_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= -\frac{k}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} \gamma_x^2(\tau) d\tau + kx_0 \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} \gamma_x(\tau) d\tau \\ &= -\frac{k}{2} (\gamma_x^2(\tau_1) - \gamma_x^2(\tau_0)) + kx_0 (\gamma_x(\tau_1) - \gamma_x(\tau_0)) \end{aligned} \quad (20)$$

Che con qualche passaggio algebrico possiamo riscrivere come:

$$W_{F_{el}}[\Gamma] = -\frac{k}{2}(x_f - x_0)^2 + \frac{k}{2}(x_i - x_0)^2 \quad (21)$$

Dove  $x_f = \gamma_x(\tau_1)$  e  $x_i = \gamma_x(\tau_0)$ .

Anche in questo caso il lavoro **non** dipende dalla curva  $\Gamma$ .

## FORZA DI ATTRITO DINAMICO

Consideriamo un corpo che si muove lungo una curva  $\Gamma$  e soggetto ad una forza di attrito dinamico  $\vec{F}_A = -\mu_d \|\vec{F}_R\| \vec{u}_v$ .

$$W_{\vec{F}_A}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left( -\mu_d F_R \vec{u}_{\frac{d\gamma}{d\tau}} \right) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} d\tau \quad (22)$$

$$= -\mu_d \int_{\tau_0}^{\tau_1} F_R \left\| \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} \right\| d\tau \quad (23)$$

Se assumiamo che  $F_R$  non dipenda da  $\tau$  otteniamo:

$$W_{\vec{F}_A}[\Gamma] = -\mu_d F_R \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left\| \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} \right\| d\tau \quad (24)$$

Dove l'integrale che compare è esattamente la lunghezza della curva  $\Gamma$ .

Allora, se il modulo della reazione vincolare è costante, si ha:

$$W_{\vec{F}_A}[\Gamma] = -\mu_d F_R \mathcal{L}(\Gamma) \quad (25)$$

In questo caso il lavoro **dipende** effettivamente dalla curva  $\Gamma$ , in particolare è proporzionale alla sua lunghezza.

## FORZA POSIZIONALE

### FORZA POSIZIONALE

E' una forza che dipende solamente dalla posizione del corpo su cui agisce.

Sia  $\vec{F} = f(x)\vec{u}_x$  una forza posizionale (in questo caso dipendente solo dalla posizione lungo l'asse  $x$ ) e consideriamo ancora una volta una generica curva  $\Gamma$ .

Abbiamo:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}}[\Gamma] &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_x(\tau)) \vec{u}_x \cdot \frac{d\vec{\gamma}(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_x(\tau)) \cdot \left( \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \vec{u}_x + \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau} \vec{u}_y + \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau} \vec{u}_z \right) d\tau \end{aligned} \quad (26)$$

$$= \int_{\tau_0}^{\tau_1} f(\gamma_x(\tau)) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (27)$$

Ora, sia  $\mathcal{F}(x)$  una primitiva di  $f(x)$ , cioè  $\frac{d}{dx} \mathcal{F}(x) = f(x)$ .

Allora si ha:

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(\gamma_x(\tau)) = f(\gamma_x(\tau)) \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} \quad (28)$$

Per cui si ha:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(\gamma_x(\tau)) d\tau = \mathcal{F}(\gamma_x(\tau_1)) - \mathcal{F}(\gamma_x(\tau_0)) \quad (29)$$

Cioè:

$$W_{\vec{F}} = \mathcal{F}(x_1) - \mathcal{F}(x_0) \quad (30)$$

Ma  $\mathcal{F}$  dipende solo da  $f$ , cioè la forza di cui vogliamo calcolare il lavoro, e non da  $\gamma$  o  $\frac{d\gamma}{d\tau}$ ; per cui il lavoro **non** dipende da  $\Gamma$ .

### ATTENZIONE

Questo solo perchè la forza lungo  $x$  dipende dalla posizione lungo  $x$  stesso. Se avessimo avuto  $\vec{F}' = f(x)\vec{u}_y$  avremmo trovato una dipendenza dalla curva scelta perchè l'integranda in (27) **non** avrebbe soddisfatto (28).

## FORZE CONSERVATIVE

### DEFINIZIONE

Una forza è *conservativa* se il lavoro da essa compiuto dipende *solo* dalla posizione *iniziale* e *finale*, e **non** dal **percorso**.

E' *equivalente* dire:

$$\oint \left( \vec{F}(\vec{\gamma}) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\tau} \right) d\tau = 0 \iff \vec{F} \text{ è conservativa} \quad (31)$$

Cioè  $\vec{F}$  è conservativa se e solo se il lavoro da essa compiuto lungo una qualsiasi curva chiusa è nullo.

## DIMOSTRAZIONE

1. Se  $\vec{F}$  è conservativa, sappiamo che il lavoro compiuto dipende solo dalle posizioni iniziale e finale, e quindi, fissata una curva  $\Gamma_{01}$ , si ha:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = -W_{\vec{F}}[\Gamma_{10}]$$

dove  $\Gamma_{10}$  è una qualsiasi curva con gli stessi punti iniziale e finale di  $\Gamma_{01}$ , ma scambiati.

Ma  $\Gamma_{01} + \Gamma_{10}$  è un percorso chiuso (si torna al punto di partenza).

$$\text{Allora } W_{\vec{F}}[\Gamma_{00}] = W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] + W_{\vec{F}}[\Gamma_{10}] = 0.$$

2. Sia  $\Gamma_{01}$  una curva fra i punti 0 e 1 e sia  $\Gamma'_{01}$  una diversa curva tra gli stessi punti.

$\Gamma = \Gamma_{01} - \Gamma'_{01}$  è un percorso chiuso, per cui vale

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} d\tau = 0$$

Ma tale integrale è anche uguale a

$$\int_{\Gamma_{01}} \dots d\tau - \int_{\Gamma'_{01}} \dots d\tau$$

Allora segue che

$$\int_{\Gamma_{01}} \dots d\tau = \int_{\Gamma'_{01}} \dots d\tau \implies W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = W_{\vec{F}}[\Gamma'_{01}]$$

Cioè il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dal percorso.

## FORMA GENERALE DI UNA FORZA CONSERVATIVA

Se una forza  $\vec{F}$  è conservativa, il lavoro svolto deve dipendere solo dalle posizioni iniziale e finale, per cui si ha:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(x_1, y_1, z_1) - \mathcal{F}(x_0, y_0, z_0) \quad (32)$$

Per una qualche  $\mathcal{F}(x, y, z)$ , con  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(x_1, y_1, z_1)$  estremi di  $\Gamma_{01}$ .

Riscriviamo il membro di destra di (32) nel seguente modo:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} \mathcal{F}(\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau)) d\tau \quad (33)$$

Dove abbiamo sostituito  $x, y, z$  con  $\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau)$  per seguire la curva  $\Gamma_{01}$  (chiaramente, per  $\tau = \tau_0$  si ha  $(\gamma_x(\tau_0), \gamma_y(\tau_0), \gamma_z(\tau_0)) = (x_0, y_0, z_0)$  e per  $\tau = \tau_1$   $(\gamma_x(\tau_1), \gamma_y(\tau_1), \gamma_z(\tau_1)) = (x_1, y_1, z_1)$ ).

Esplicitiamo allora l'integranda di (33):

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))} \frac{d\gamma_x(\tau)}{d\tau} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))} \frac{d\gamma_y(\tau)}{d\tau} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F}(x, y, z) \Big|_{(x,y,z)=(\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))} \frac{d\gamma_z(\tau)}{d\tau} \right] d\tau \quad (34) \end{aligned}$$

Notiamo che l'integranda è uguale al prodotto scalare seguente:

$$\vec{V} \cdot \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} \quad (35)$$

Dove:

$$\vec{V} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}(x, y, z), \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}(x, y, z), \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F}(x, y, z) \right) \Big|_{(x, y, z) = (\gamma_x(\tau), \gamma_y(\tau), \gamma_z(\tau))} \quad (36)$$

Tale vettore  $\vec{V}$  è il **gradiente** di  $\mathcal{F}$ :

$$\vec{\nabla} \mathcal{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F}, \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F} \right) \quad (37)$$

Allora (32) diventa:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{\nabla} \mathcal{F} \cdot \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (38)$$

Ma sappiamo, dalla definizione di lavoro, che:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \vec{F} \cdot \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (39)$$

Per cui, eguagliando (38) e (39) segue che:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \mathcal{F} \quad (40)$$

Allora  $\vec{F}$  è **conservativa** se è *gradiente* di una qualche funzione scalare  $\mathcal{F}$ .

Cioè, data una forza  $\vec{F}(x, y, z) = f_x(x, y, z)\vec{u}_x + f_y(x, y, z)\vec{u}_y + f_z(x, y, z)\vec{u}_z$ ,

$\vec{F}$  è conservativa se esiste una funzione  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che:

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{F} \\ f_y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{F} \\ f_z(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{F} \end{cases}$$

### CONCLUSIONE

Le forze conservative sono alcune tra le forze posizionali, e per esse vale:

$$W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0) \text{ con } \vec{F} = \vec{\nabla} \mathcal{F}.$$

## ENERGIA POTENZIALE

Abbiamo quindi visto che, per una forza conservativa:

- $W_{\vec{F}}[\Gamma_{01}] = \mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0)$  lungo una qualsiasi traiettoria. **(I)**
- $W_{\vec{F}}[\Gamma_{L.O.}] = E_K(\vec{v}_1) - E_K(\vec{v}_0)$  lungo la legge oraria sotto  $\vec{F}$ . **(II)**

Per cui, lungo la traiettoria data dalla legge oraria, devono valere sia **I** che **II**.

Allora troviamo:

$$\mathcal{F}(\vec{r}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_0) = E_K(\vec{v}_1) - E_K(\vec{v}_0) \quad (41)$$



Che possiamo riscrivere come:

$$E_K(\vec{v}_0) - \mathcal{F}(\vec{r}_0) = E_K(\vec{v}_1) - \mathcal{F}(\vec{r}_1) \quad (42)$$

Quindi lungo la traiettoria della *legge oraria*, sotto l'azione di una forza *conservativa* rimane costante la quantità:

$$E_K - \mathcal{F} \quad (43)$$

Definiamo allora, per una forza conservativa, l'**energia potenziale**:

$$E_P(\vec{r}) = -\mathcal{F}(\vec{r}) \quad (44)$$

Si definisce a questo punto l'*energia meccanica totale*:

$$E_{TOT}(\vec{r}, \vec{v}) = E_K(\vec{v}) + E_P(\vec{r}) \quad (45)$$

Per quanto visto in (42) e (43), l'energia meccanica totale è costante lungo la traiettoria sotto l'effetto di una forza conservativa.

#### ⚠️ NOTA

Fisicamente si misura solo la **differenza** di energia potenziale, non una "singola" energia potenziale di un corpo in un punto.  
Infatti  $\mathcal{F}$ , e quindi anche  $E_P$ , è definita a meno di una costante rispetto a  $f$ .

## ESEMPIO: ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

Sappiamo che

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}\|} \vec{u}_r$$

Quindi  $\vec{F}_{grav} = f(r) \vec{u}_r$  con:

$$f(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

E abbiamo visto che la forza gravitazionale è conservativa, quindi vale:

$$f(r) = -\frac{d}{dr} E_P(r)$$

Per cui deve essere:

$$E_{P,grav} = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (46)$$

## LEGGI DI CONSERVAZIONE

Abbiamo visto

$$W_{\vec{F}} [\Gamma_{01, \text{traiettoria}}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{dt} dt = \Delta E_K$$

Possiamo interpretare il teorema dell'energia cinetica nel seguente modo: la variazione di  $E_K$  è dovuta al lavoro di una forza, quindi se nessuna forza compie lavoro, l'energia cinetica è conservata.

Ma ci sono anche altre quantità fisiche che si comportano in questo modo.

## IMPULSO

Si definisce l'*impulso di una forza* come segue:

$$\vec{I}_{\vec{F}} [\Gamma_{01}] = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \left( \vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{dt}, t \right) dt \quad (47)$$

### TEOREMA DELL'IMPULSO

Lungo la traiettoria del moto vale:

$$\vec{I}_{\vec{F}} [\Gamma_T] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}(t_1) - \vec{p}(t_0) = \Delta \vec{p} \quad (48)$$

La variazione della quantità di moto è dovuta all'impulso di una forza. Perciò se l'impulso è nullo, si conserva la quantità di moto.

## MOMENTI

Si definisce il **momento** di una forza rispetto al polo  $O$  come segue:

$$\vec{M}_{\vec{F}, O} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (49)$$

dove  $\vec{r}$  è il *braccio* della forza, ovvero il vettore che congiunge il polo con il punto di applicazione della forza.

Consideriamo ora il seguente integrale:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{\gamma}(t_1) \times \vec{F} \left( \vec{\gamma}, \frac{d\vec{\gamma}}{dt}, t \right) dt \quad (50)$$

Lungo la traiettoria del moto diventa:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{r}(t) \times \underbrace{\frac{d}{dt}(m\vec{v}(t))}_{\vec{F}} dt = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_{\vec{F}, O} dt \quad (51)$$

Ora osserviamo che

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)) = \cancel{\vec{v}(t) \times m\vec{v}(t)}^0 + \vec{r}(t) \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}(t)) \quad (52)$$

Allora riscriviamo (51) come segue:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) dt \quad (53)$$

Definiamo allora il **momento angolare** di un punto materiale rispetto a un polo  $O$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (54)$$

Dove ancora una volta  $\vec{r}$  è il vettore che congiunge il polo  $O$  con il punto materiale. E troviamo infine, sempre lungo la traiettoria del moto:

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{M} dt = \vec{L}(t_1) - \vec{L}(t_0) = \Delta \vec{L} \quad (55)$$

Cioè una variazione di momento angolare è dovuta al momento di una forza. Perciò se nessuna forza esercita momento si ha che il momento angolare è conservato lungo il moto.

Tale enunciato è noto come **teorema del momento angolare** in *forma integrale*.

E' utile considerare la sua *forma differenziale*, che otteniamo derivando ambo i membri in (55):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (56)$$

Tale formulazione è chiaramente equivalente: anche da questa deduciamo che se il momento risultante è nullo, il momento angolare rimane costante.

## SISTEMI INERZIALI E NON INERZIALI

Abbiamo visto che i *sistemi inerziali* sono sistemi di riferimento su cui la risultante delle forze agenti è nulla, e si muovono quindi con velocità costante in modulo e direzione.

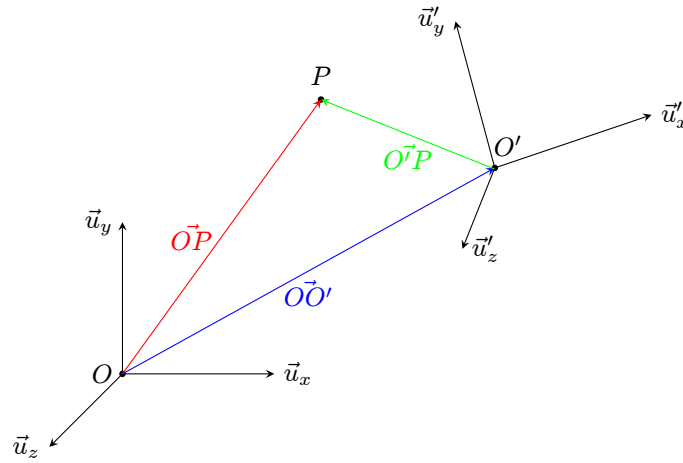
Tuttavia, esistono anche sistemi su cui agisce una forza netta non nulla e che si muovono pertanto di un moto diverso da quello rettilineo uniforme: tali sistemi sono definiti **non inerziali**.

In realtà nell'universo non esiste alcun sistema di riferimento perfettamente inerziale, e la Terra stessa, ruotando intorno al proprio asse e intorno al Sole, è un sistema non inerziale. Questo è sufficiente a giustificare il nostro interesse per lo studio di tali sistemi.

## SISTEMI NON INERZIALI

Consideriamo un riferimento inerziale  $O$  e uno non inerziale  $O'$ :

$O'$  può spostarsi rispetto a  $O$  e gli assi  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  possono ruotare.



Sia  $P$  un punto materiale. Definiamo:

- $\vec{OP}(t) = \vec{r}(t)$  la posizione di  $P$  rispetto al sistema  $O$ .
- $\vec{O'P} = \vec{r}'(t)$  la posizione di  $P$  rispetto al sistema  $O'$ .
- $\vec{OO'}(t) = \vec{r}_{OO'}(t)$  la posizione dell'origine  $O'$  rispetto ad  $O$ .

Abbiamo

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{OO'}(t) + \vec{r}'(t) \quad (1)$$

Deriviamo questa equazione per trovare la legge di trasformazione di  $\vec{v}$ .  
Per farlo, scriviamo i vettori esplicitando le loro componenti:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \quad (2)$$

$$\vec{r}_{OO'}(t) = x_{OO'}(t)\vec{u}_x + y_{OO'}(t)\vec{u}_y + z_{OO'}(t)\vec{u}_z \quad (3)$$

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{u}_x(t) + y'(t)\vec{u}_y(t) + z'(t)\vec{u}_z(t) \quad (4)$$

**OSS.** In (4) gli assi non sono fissi: possono ruotare.

Ricordiamo inoltre la derivata di un versore rotante:

$$\frac{d}{dt}\vec{u}(t) = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp(t) \quad (5)$$

Per comodità, introduciamo un vettore  $\vec{\omega}(t)$  **ortogonale al piano** di rotazione di  $\vec{u}(t)$ , di modulo  $|\frac{d\theta}{dt}|$  e tale che:

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{u}(t) \quad (6)$$

**OSS.** La direzione di  $\vec{\omega} \times \vec{u}$  è la stessa di  $\vec{u}_\perp$ .

Derivando (1) troviamo:

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \quad (7)$$

E calcolando ciascuna derivata con le informazioni (2,3,4) e (6) otteniamo:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{OO'}(t) + \vec{v}'(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t) \quad (8)$$

Oltre ai termini "banali" abbiamo trovato un terzo termine dovuto al fatto che  $O'$  ruota rispetto ad  $O$ .

Similmente, per arrivare alla legge di trasformazione dell'accelerazione, deriviamo (8), introducendo ancora una volta un vettore per comodità:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \quad (9)$$

Otteniamo alla fine:

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\vec{a}_{OO'}(t)}_{\text{Banali}} + \underbrace{\vec{\alpha}(t) \times \vec{r}'(t)}_A + \underbrace{2\vec{\omega}(t) \times \vec{v}'(t)}_B + \underbrace{\vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}'(t))}_C \quad (10)$$

Abbiamo ottenuto due termini che ci aspettavamo per la forma di (1), e altri tre termini assolutamente non banali:

- $A$  è dovuto all'accelerazione angolare di  $O'$ : scompare se questo ruota con velocità angolare costante.
- $B$  è detto *accelerazione di Coriolis* e si manifesta quando un corpo si muove con una certa velocità in un sistema di riferimento in rotazione.
- $C$  è l'*accelerazione centripeta* su un corpo in  $O'$  causata dalla rotazione del sistema stesso.

A questo punto, deduciamo che:

$$\vec{a}(t) - \vec{a}'(t) \neq 0 \quad (11)$$

Cioè le accelerazioni misurate nei due sistemi **non sono le stesse** e allora è anche vero che:

$$\vec{F}_{TOT} - \vec{F}'_{TOT} \neq 0 \quad (12)$$

Chiamiamo tale differenza **forza apparente**, per enfatizzare il fatto che è percepita solo nel sistema di riferimento non inerziale a causa del fatto che non si muove di moto rettilineo uniforme.

$$\vec{F}_{app} = \vec{F}' - \vec{F} = m(\vec{a}' - \vec{a}) \quad (13)$$

## IL SISTEMA ROTANTE TERRA

Sappiamo che la Terra *non* è un sistema inerziale, per cui siamo soggetti a forze apparenti.

Consideriamo un punto materiale *fermo* alla latitudine  $\Theta$  e un sistema di assi così orientati:

- $\vec{u}_z$  verso il cielo,
- $\vec{u}_x$  verso est,

- $\vec{u}_y$  verso nord.

Il vettore  $\vec{\omega}$  associato alla rotazione terrestre sarà pertanto:

$$\vec{\omega} = \omega \cos \Theta \vec{u}_y + \omega \sin \Theta \vec{u}_z \quad (14)$$

Con  $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$ .

Essendo il punto fermo sulla superficie, *non* risente dell'accelerazione di Coriolis, e neanche del termine dovuto all'accelerazione angolare dato che la terra ruota a velocità angolare costante.

Per cui il punto risente di una forza apparente data da:

$$\vec{F}_{app} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (15)$$

Dove  $\vec{r} = R_T \vec{u}_z$  con  $R_T \approx 6.38 \cdot 10^6 m$ .

Notiamo che tale forza è opposta alla forza *centripeta* che misurerebbe un osservatore esterno in un sistema inerziale. La forza apparente associata alla forza centripeta è la **forza centrifuga**.

Da (15) ricaviamo  $\vec{a}_{app}$ :

$$\vec{a}_{app} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \omega^2 R_T (\cos^2 \Theta \vec{u}_z - \cos \Theta \sin \Theta \vec{u}_y) \quad (16)$$

Allora abbiamo  $\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{app}$ :

$$\vec{a}' = -g\vec{u}_z + \vec{a}_{app} = -\underbrace{(g - \omega^2 R_T \cos^2 \Theta)}_{=g_{eff,z}} \vec{u}_z - \underbrace{(\omega^2 R_T \cos \Theta \sin \Theta)}_{=g_{eff,y}} \vec{u}_y \quad (17)$$

Notiamo che  $g_{eff,z} < g$ , cioè l'accelerazione di gravità da noi percepita è minore di quella "reale" a causa della forza centrifuga (apparente).

## ESPERIMENTO DI GUGLIELMINI

Per dimostrare il moto di rotazione della Terra, nel 1790 Guglielmini fece cadere delle sferette di metallo dalla sommità della torre degli Asinelli, a Bologna: se fossero state soggette alla sola forza di gravità sarebbero dovute cadere lungo una traiettoria verticale; invece, erano deviate di una certa distanza verso est.

Per semplicità, consideriamo una torre analoga posta all'equatore anziché a Bologna. Calcoliamo la deviazione rispetto alla base della torre, ricordando che per un corpo in caduta libera abbiamo:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_P + \vec{F}_{app} \implies \vec{a}' = -g\vec{u}_z - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v} \quad (18)$$

I primi due termini equivalgono a  $g_{eff}$  calcolata sopra, con  $\Theta = 0$ , mentre il terzo termine è l'accelerazione di Coriolis.

$$\vec{a}' = -(g - \omega^2 R_T) \vec{u}_z - 2\omega \vec{u}_y \times v_z(t) \vec{u}_z \quad (19)$$

Dove  $\vec{\omega}$  è solo lungo  $\vec{u}_y$  e la velocità è in buona approssimazione lungo  $\vec{u}_z$  (lungo la verticale).

Troviamo allora:

$$\vec{a}' = -g_{eff,z}\vec{u}_z - 2\omega v_z(t)\vec{u}_x \quad (20)$$

In componenti, lungo  $\vec{u}_z$ :

$$a'_z = -g_{eff,z} \Rightarrow \begin{cases} v_z(t) = -g_{eff,z}t \\ z(t) = h - \frac{1}{2}g_{eff,z}t^2 \end{cases} \quad (21)$$

Lungo  $\vec{u}_x$ :

$$a'_x = (2\omega g_{eff,z})t \Rightarrow \begin{cases} v_x(t) = \omega g_{eff,z}t^2 \\ x(t) = \frac{1}{3}\omega g_{eff,z}t^3 \end{cases} \quad (22)$$

### NOTA

Abbiamo una certa velocità lungo  $\vec{u}_x$  che dovrebbe contribuire in (18), tuttavia  $\omega$  è sufficientemente piccola in modulo da rendere trascurabile questa componente.

Per trovare la deviazione di Coriolis lungo  $\vec{u}_x$  troviamo prima il tempo di caduta  $t_c$  imponendo  $z(t_c) = 0$ :

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g_{eff,z}}} \quad (23)$$

E da questo ricaviamo  $x(t_c) = \Delta x$ :

$$\Delta x = \frac{1}{3}\omega g_{eff,z} \left( \frac{2h}{g_{eff,z}} \right)^{3/2} \quad (24)$$

L'ordine di grandezza di tale deviazione è di qualche centimetro.

## SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

### INTRODUZIONE

Abbiamo studiato leggi ed equazioni per singoli punti materiali, ma queste possono essere generalizzate a sistemi costituiti da più di un punto materiale.

Consideriamo  $N$  punti materiali con posizioni  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$  e masse  $m_1, \dots, m_n$ . Per ciascuno di essi vale:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_{TOT,i} \quad (1)$$

Per semplificare lo studio di tali sistemi, introduciamo alcune quantità:

$$M_{TOT} = M = \sum_{j=1}^N m_j \quad (2)$$

$$E_{K,TOT} = \sum_{j=1}^N E_{K,j} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j v_j^2 \quad (3)$$

$$\vec{p}_{TOT} = \sum_{j=1}^N \vec{p}_j = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j \quad (4)$$

$$\vec{L}_{TOT} = \sum_{j=1}^N \vec{L}_j = \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j \quad (5)$$

Cioè quantità che abbiamo già visto nel caso di un singolo punto materiale e che ora comprendono tutti i punti del sistema.

## CENTRO DI MASSA

Si definisce inoltre il **centro di massa** del sistema: un punto la cui posizione è la media pesata delle posizioni di ciascun punto. I pesi assegnati sono le masse dei punti stessi.

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \vec{r}_j \quad (6)$$

Derivando tale relazione possiamo trovare anche la velocità di tale punto:

$$\vec{v}_{CM} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{M} \vec{v}_j \quad (7)$$

Notiamo che, moltiplicando ambo i membri per  $M$  in (7), otteniamo:

$$M \vec{v}_{CM} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}_j = \vec{p}_{TOT} \quad (8)$$

Possiamo quindi immaginare che tutta quantità di moto sia concentrata nel centro di massa.

Derivando (8) troviamo anche:

$$M \vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^N m_j \vec{a}_j = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{TOT,j} \quad (9)$$

Che è la **legge di Newton per il centro di massa**.

## TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA



Tale legge può essere semplificata. Per farlo distinguiamo tra forze interne e forze esterne:

- Forze *interne*: esercitate da ciascun punto sugli altri  $N - 1$ .
- Forze *esterne*: tutte le altre, dovute quindi ad interazioni con l'esterno.

Per esempio, sul punto  $P_1$  avremo:

$$\vec{F}_{TOT,1} = \underbrace{\vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1} + \dots}_{\text{interne}} + \vec{F}_{ext,1} \quad (10)$$

In generale, si ha:

$$\vec{F}_{TOT,j} = \vec{F}_{ext,j} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{k,j} \quad (11)$$

Avendo definito  $\vec{F}_{j,j} = \vec{0}$ .

Allora (9) diventa:

$$\begin{aligned} M\vec{a}_{CM} &= \sum_{j=1}^N \left( \vec{F}_{ext,j} + \sum_{k=1}^N \vec{F}_{k,j} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{j=1,k=1}^N \vec{F}_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{j,k=1,j < k}^N \vec{F}_{k,j} + \sum_{j,k=1,j > k}^N \vec{F}_{k,j} + \sum_{j,k=1,j=k}^N \vec{F}_{k,j} \end{aligned} \quad (12)$$

Con un cambio di indice otteniamo:

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{a,b=1,a < b}^N \vec{F}_{b,a} + \sum_{a,b=1,a < b}^N \vec{F}_{a,b} \\ &= \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} + \sum_{a,b=1,a < b}^N (\vec{F}_{b,a} + \vec{F}_{a,b}) \end{aligned}$$

E concludiamo allora:

### TEOREMA DEL MOTO DEL CM

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ext,j} \quad (13)$$

Che è effettivamente una semplificazione di (9).

### OSSERVAZIONE

In assenza di forze esterne,  $M\vec{a}_{CM} = \vec{0}$ , per cui un sistema di riferimento solidale al C.M. è *inerziale*.

## SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL C.M.

Dato un sistema di riferimento  $O$  e uno solidale al C.M. (con assi ad orientazione fissa rispetto a quelli di  $O$ ) si ha, detti  $\vec{r}_j$  la posizione del punto di indice  $j$  rispetto ad  $O$ ,  $\vec{r}'_j$  la posizione dello stesso rispetto al sistema del CM ed  $\vec{r}_{CM}$  la posizione del CM rispetto ad  $O$ :

$$\vec{r}_j = \vec{r}'_j + \vec{r}_{CM} \quad (14)$$

## QUANTITA' DI MOTO

Ne consegue che:

$$\vec{v}_j = \vec{v}'_j + \vec{v}_{CM} \quad (15)$$

Moltiplicando ambo i membri per  $m_j$  e sommando per  $j = 1, \dots, N$  si trova:

$$\underbrace{\vec{p}_{TOT}}_{\text{in } O} = \underbrace{\vec{p}'_{TOT}}_{\text{in CM}} + \underbrace{M\vec{v}_{CM}}_{=\vec{p}_{TOT}} \quad (16)$$

Ma allora  $\vec{p}'_{TOT} = \vec{0}$  nel sistema del C.M.

## ENERGIA CINETICA

Sostituendo (15) in (3) troviamo:

$$\begin{aligned} E_{K,TOT} &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \|\vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j (\|\vec{v}'_j\|^2 + \|\vec{v}_{CM}\|^2 + 2\vec{v}'_j \cdot \vec{v}_{CM}) \\ &= E'_{K,TOT} + \frac{1}{2} M \|\vec{v}_{CM}\|^2 + \left( \sum_{j=1}^N m_j \vec{v}'_j \right) \cdot \vec{v}_{CM} \end{aligned} \quad (17)$$

E concludiamo che:

### SECONDO TEOREMA DI KONIG

$$E_{K,TOT} = E'_{K,TOT} + \frac{1}{2} M \|\vec{v}_{CM}\|^2 \quad (18)$$

# MOMENTO ANGOLARE

Fissato un polo  $P$  e un punto  $P_j$  abbiamo:

$$\vec{L}_{j,P} = (\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j \vec{v}_j \quad (19)$$

Per cui il momento angolare totale del sistema di  $N$  punti, rispetto al polo  $P$ , sarà:

$$\vec{L}_{TOT,P} = \sum_{j=1}^N (\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j \vec{v}_j \quad (20)$$

Vogliamo innanzitutto generalizzare il *teorema del momento angolare* al caso con  $N$  punti. Calcoliamo allora:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_{TOT,P} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^N (\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j \vec{v}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^N ((\vec{v}_j - \vec{v}_P) \times m_j \vec{v}_j) + \sum_{j=1}^N ((\vec{r}_j - \vec{r}_P) \times m_j \vec{a}_j) \end{aligned} \quad (21)$$

Sviluppando i prodotti e con una serie di passaggi algebrici arriviamo a:

## TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE PER UN SISTEMA DI PUNTI

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{TOT,P} = -\vec{v}_P \times \vec{p}_{TOT} + \vec{M}_{ext,TOT,P} \quad (22)$$

Per cui una variazione di momento angolare in un sistema di  $N$  punti è causata da un momento esterno (come nel caso già visto) e anche da un altro termine.

Questo si annulla se:

- Il polo è *fermo*, per cui  $\vec{v}_P = \vec{0}$ .
- Il polo *coincide con il CM*, per cui  $\vec{v}_P$  coincide con  $\vec{v}_{CM}$  e il loro prodotto vettoriale è nullo.
- Siamo *nel sistema di riferimento del CM*, per cui  $\vec{p}_{TOT} = \vec{0}$ .

## OSSERVAZIONE

Inoltre, se le forze sono solo interne si annulla anche il secondo termine.  
Per cui, se ci trovassimo nel sistema di riferimento del CM, avremmo:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{TOT} = \vec{0}$$

Ora vogliamo trovare la relazione fra:

- $\vec{L}_{TOT,O}$  , momento angolare in  $O$  rispetto all'origine del sistema.
- $\vec{L}_{TOT,O'}$  , momento angolare nel sistema del CM, rispetto al CM.

Sostituendo (14) e (15) in (5) troviamo:

$$\vec{L}_{TOT,O} = \sum_{j=1}^N \left( (\vec{r}'_j + \vec{r}_{CM}) \times m_j (\vec{v}'_j + \vec{v}_{CM}) \right) \quad (23)$$

Sviluppando i termini e con dei passaggi algebrici arriviamo a:

### PRIMO TEOREMA DI KONIG

$$\vec{L}_{TOT,O} = \vec{L}_{TOT,O'} + \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} \quad (24)$$

## URTI

Un urto fra corpi è detto **elastico** se l'energia cinetica si conserva.

Un urto *non* elastico è detto **anaelastico** e, in particolare, *completamente anaelastico* se i corpi restano attaccati.

## URTO ELASTICO

Consideriamo due corpi di masse  $m_1, m_2$  che si muovono uno verso l'altro con velocità  $v_1 > 0$  e  $v_2 < 0$ .

Dopo l'urto avranno velocità  $V_1 < 0$  e  $V_2 > 0$ .

Essendo l'urto elastico, si conserva l'energia cinetica. Inoltre, essendo le forze impulsive interne, si conserva anche la quantità di moto:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \\ m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \end{cases} \quad (25)$$

E risolvendo il sistema troviamo le velocità dopo l'urto.

### NOTA

E' più semplice risolvere il sistema ponendosi nel sistema solidale al CM e poi trasformare le quantità trovate nelle corrispondenti nel sistema originale con le leggi di trasformazione sopra viste.

## URTO COMPLETAMENTE ANAELASTICO

Consideriamo ancora una volta due corpi di masse  $m_1$  e  $m_2$  con velocità  $v_1$  e  $v_2$ ,  $v_1 > v_2$

Essendo l'urto completamente anelastico, i due corpi procederanno dopo di esso con la stessa velocità  $V$ .

In questo caso l'energia cinetica *non* si conserva, ma la quantità di moto si, essendo le forze impulsive interne.

Avremo quindi:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V \quad (26)$$

Risolvendo per  $V$  troviamo:

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = V_{CM} \quad (27)$$

L'energia dissipata nell'urto è:

$$\Delta E_K = \underbrace{E_K}_{\text{prima}} - \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2}_{\text{dopo}} \quad (28)$$

Se ci poniamo nel sistema del CM,  $V = 0$  e troviamo che l'energia dissipata è pari a quella che i due corpi avevano prima dell'urto, nel sistema del CM.

In tale riferimento, infatti, prima dell'urto i corpi si muovevano, mentre in seguito sono fermi (coincidono con il CM).

## PROBLEMA DEI DUE CORPI

Il problema è così posto:

### PROBLEMA DI KEPLERO

Due corpi di masse  $m_1$  ed  $m_2$  sono soggetti alla forza di gravitazione universale.

Determinare tutte le possibili orbite.

## 1 IMPOSTAZIONE PROBLEMA

Chiamiamo il vettore  $\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}$ , cioè il versore della direzione che congiunge  $m_1$  e  $m_2$ ,  $\vec{u}_{21}$  (perchè punta da 2 a 1).

Allora le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} \vec{u}_{12} \text{ (I)} \\ m_2 \vec{a}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|} \vec{u}_{21} \text{ (II)} \end{cases} \quad (1)$$

Osserviamo che la forza in (I) punta verso il corpo 1 e quella in (II) verso il corpo 2.

## 1.1 SCOMPOSIZIONE DEL PROBLEMA

Le forze sono solo interne, allora  $\vec{p}_{TOT}$  si conserva e vale, definita  $M := m_1 + m_2$ :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \vec{p}_{TOT} \quad (2)$$

Per lo stesso motivo, il sistema di riferimento del CM è inerziale.

Vale quindi la pena calcolare  $\vec{r}_{CM}$  e le posizioni  $\vec{r}'_1$  e  $\vec{r}'_2$  dei corpi rispetto al CM.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2 \quad (3)$$

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (4)$$

E similmente:

$$\vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (5)$$

A partire da  $\vec{r}'_1$  e  $\vec{r}'_2$ , consideriamo ora:

$$m_1 \vec{r}'_1 = m_1 \frac{m_2}{M} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (6)$$

E

$$m_2 \vec{r}'_2 = m_2 \frac{m_1}{M} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (7)$$

Definiamo per comodità la massa ridotta  $\mu$ :

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M} \quad (8)$$

Deriviamo due volte (6) e troviamo l'equazione del moto *nel sistema del CM*:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}'_1}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \mu (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (9)$$

Il membro di sinistra diventa:

$$= m_1 \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_{CM}) = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} - m_1 \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} \quad (10)$$

Ma il membro di destra in (10) è esattamente l'equazione del moto (1).

Per cui troviamo:

$$-G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \vec{u}_{12} = m_1 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_1 = \mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (11)$$

Similmente si trova anche:

$$-G \frac{m_1 m_2}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2} \vec{u}_{21} = m_2 \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}'_2 = \mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (12)$$

A questo punto chiamiamo  $\vec{u}_{12} := \vec{u}_r$  e le equazioni del moto diventano:

$$\begin{cases} \mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -G \frac{\mu M}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \vec{u}_r \\ -\mu \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = G \frac{\mu M}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \vec{u}_r \end{cases} \quad (13)$$

Tali equazioni sono linearmente dipendenti (una è l'opposto dell'altra), cosa che avremmo potuto dedurre già in (1); ma scrivendole in questa forma abbiamo scomposto il problema nel seguente modo:

- Un moto del CM, con massa  $M$  e per cui vale  $M\vec{a}_{CM} = \vec{0}$  essendo il riferimento inerziale.
- Un moto di una massa  $\mu$  intorno al CM.

Infatti, definendo  $\vec{r} := \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , ci basta considerare un'unica equazione:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G \frac{\mu M}{\|\vec{r}\|^2} \vec{u}_r \quad (14)$$

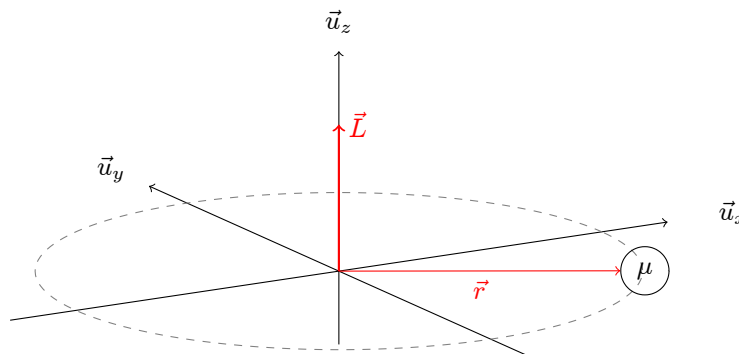
Che rappresenta proprio il moto di una massa  $\mu$  soggetta all'attrazione gravitazionale di una massa  $M$  a distanza  $\|\vec{r}\|$  da essa.

## 1.2 ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE

Dovremmo scomporre l'equazione (14) lungo le tre componenti nello spazio del vettore  $\vec{r}$ , tuttavia possiamo ragionare nel seguente modo:

l'unica forza presente è quella gravitazionale che, considerato come polo il CM, è parallela al suo braccio.

Allora il momento totale è nullo, e quindi il momento angolare rimane costante, ma ciò significa che il moto avviene su un piano (perpendicolare al vettore  $\vec{L}$ ), e quindi basta considerare le proiezioni di  $\vec{r}$  su un piano  $xy$ .



## 2 SECONDA LEGGE DI KEPLERO

Calcoliamo ora il momento angolare del corpo di massa  $\mu$ :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (15)$$

$$= r\vec{u}_r \times \mu \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = r\vec{u}_r \times \left( \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp \right)$$

E concludiamo:

$$\vec{L} = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r \times \vec{u}_\perp \quad (16)$$

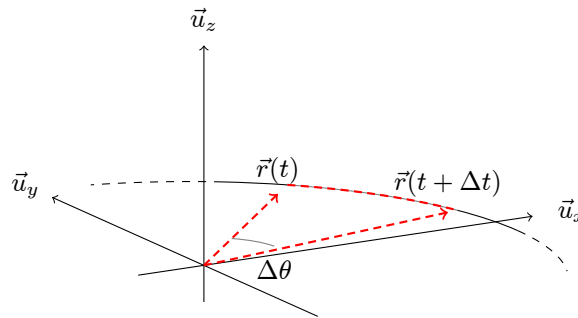
Come visto in > [1.2 ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE](#), il momento angolare è perpendicolare al piano su cui avviene il moto, individuato dai vettori  $\vec{u}_r$  e  $\vec{u}_\perp$ .

Abbiamo visto che  $\vec{L}$  è costante, per cui anche la seguente quantità deve essere costante durante il moto:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (17)$$

Possiamo dare un'interpretazione geometrica a tale quantità.

Consideriamo la posizione  $\vec{r}(t)$  di  $\mu$  al tempo  $t$  e  $\vec{r}(t + \Delta t)$  dopo un piccolo intervallo  $\Delta t$ , durante il quale ha spazzato un angolo  $\Delta\theta$ :



L'area spazzata dal vettore, evidenziata in rosso nella figura, è approssimata da:

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r (r \Delta\theta) \quad (18)$$

Per cui, per  $\Delta\theta$  sufficientemente piccoli, si ha:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad (19)$$

Definiamo a questo punto la **velocità areolare** come l'area spazzata dal vettore  $\vec{r}$  in un tempo  $t$ :

$$\frac{dA}{dt} := \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (20)$$

Siccome (17) deve rimanere costante, si ha:

## SECONDA LEGGE DI KEPLERO

La velocità areolare rimane costante lungo il moto.



# 3 ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA ALL'ORBITA

Torniamo ora a (14).

Abbiamo detto che le due equazioni non banali sono quelle relative al piano di rotazione.

## 3.1 SCOMPOSIZIONE EQUAZIONE DEL MOTO

Scomponiamo quindi  $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  lungo  $\vec{u}_r$  e  $\vec{u}_\perp$ .

Innanzitutto:

$$\frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp \quad (21)$$

E infine:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\vec{u}_r) = \underbrace{\frac{d^2 r}{dt^2}\vec{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp}_{\text{da (21)}} + \underbrace{\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{u}_\perp - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\vec{u}_r}_{\text{da (21)}} \quad (22)$$

E raccogliendo troviamo:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\vec{u}_r) = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\perp \quad (23)$$

Inoltre sappiamo che il momento angolare è costante in modulo, per cui:

$$L = \mu r^2 \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \quad (24)$$

Sostituendo in (23) troviamo allora:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\vec{u}_r) = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{2L}{\mu r^2} \frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)\vec{u}_\perp \quad (25)$$

Definiamo, per comodità:

$$k := Gm_1 m_2 = GM\mu \quad (26)$$

Possiamo finalmente scomporre (14) lungo  $\vec{u}_r$  e  $\vec{u}_\perp$ :

**LUNGO  $\vec{u}_r$ :**

$$\mu \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L^2}{\mu^2 r^3} \right) = -\frac{k}{r^2} \implies \mu \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} \quad (27)$$

**LUNGO  $\vec{u}_\perp$ :**

$$\mu \left( \frac{2L}{\mu r^2} \frac{dr}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) = 0 \implies \mu \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2L}{r^3} \frac{dr}{dt} \quad (28)$$

## 3.2 ENERGIA POTENZIALE EFFICACE

Osserviamo che (27) sembra l'equazione di un problema in *una dimensione* dovuto ad una *forza posizionale*.

Per capire meglio, calcoliamo l'energia totale per il corpo  $\mu$ :

$$E_{TOT} = E_K(\vec{v}) + E_P(\vec{r}) = \frac{1}{2}\mu\|\vec{v}\|^2 - \frac{k}{r} \quad (29)$$

Dove  $-\frac{k}{r}$  è l'energia potenziale gravitazionale.

Abbiamo allora:

$$E_{TOT} = \frac{1}{2}\mu\left\|\frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\perp\right\|^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2}_A - \frac{k}{r} \quad (30)$$

Grazie a (24) possiamo semplificare tale equazione, trovando:

$$E_{TOT} = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}_{E_{K,r}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}}_{E_{P,eff}} \quad (31)$$

Notiamo a questo punto che il termine  $A$  contribuisce insieme all'energia potenziale gravitazionale ad una *energia potenziale per il moto lungo  $r$* , che chiamiamo **energia potenziale efficace**. In particolare,  $\frac{L^2}{2\mu r^2}$  è detto *termine centrifugo*.

E' facile verificare che la forza derivante da  $E_{P,eff}$  è proprio quella in (27), infatti vale:

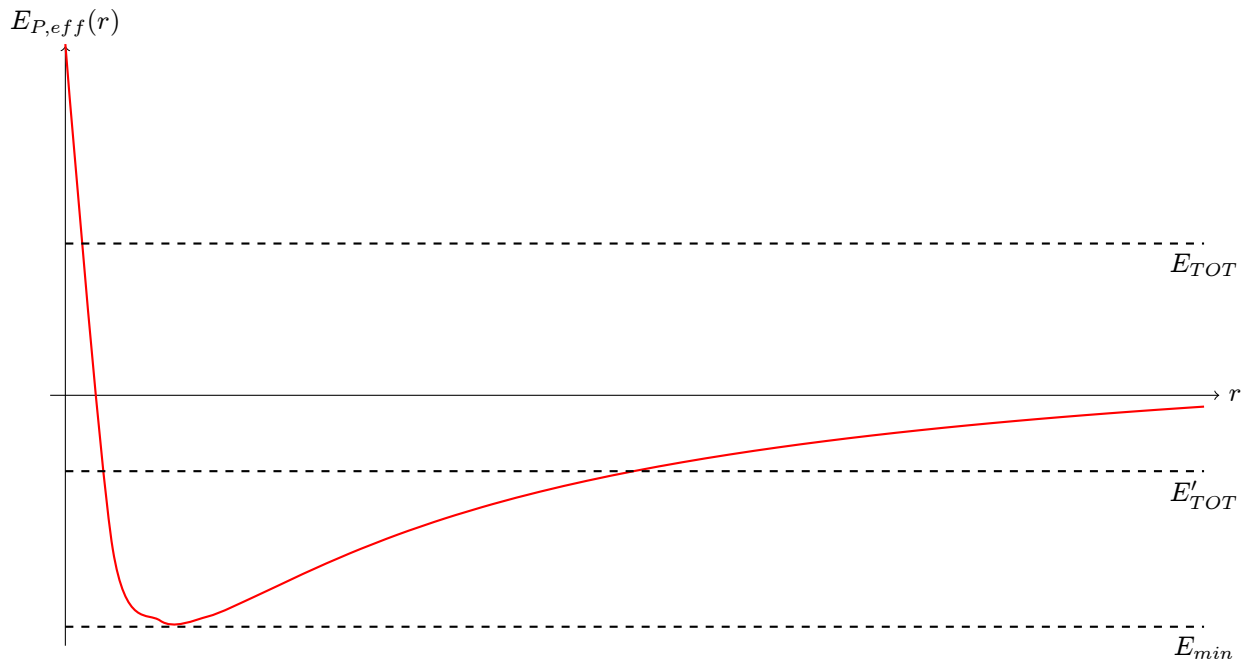
$$-\frac{d}{dr}E_{P,eff} = \frac{L^2}{\mu r^3} - \frac{k}{r^2} = F_{eff,r} \quad (32)$$

Il fatto che la forza lungo  $r$  sia gradiente della funzione scalare  $E_{P,eff}(r)$  garantisce anche che tale forza sia conservativa.

Ovviamente, deve sempre essere:

$$E_{TOT} \geq E_{P,eff} \quad (33)$$

Vediamo come si comporta  $E_{P,eff}(r)$ :



Notiamo che:

- Esiste un valore **minimo** per l'energia potenziale efficace,  $E_{min}$ .
- Se  $E_{TOT} > 0$  deve essere  $r > r_{min}$ , cioè si ha un'**orbita aperta**.
- Se  $E'_{TOT} < 0$  deve essere  $r'_{min} < r < r'_{max}$ , cioè si ha un'**orbita chiusa**.
- Se  $E_{TOT} = E_{min}$  deve essere  $r = r_{min}$ , cioè si ha un'**orbita circolare**.

### 3.2.1 ORBITA CIRCOLARE

Abbiamo visto che si ha un'orbita *circolare* se  $E_{P,eff} = E_{min}$ .

Ciò accade per  $r = r_0$ , dove  $r_0$  soddisfa:

$$\left. \frac{d}{dr} E_{P,eff} \right|_{r_0} = 0 \quad (34)$$

Allora deve essere:

$$\frac{L^2}{\mu r_0^3} - \frac{k}{r_0^2} = 0$$

Da cui otteniamo:

$$r_0 = \frac{L^2}{\mu k} \quad (35)$$

Per tale valore di  $r$  si ha che l'energia totale in un'orbita circolare è (sostituendo (35) in (31)):

$$E_{P,eff,circ} = -\frac{\mu k^2}{2L^2} \quad (36)$$

Ricordando che  $L = \mu r_0^2 \frac{d\theta}{dt}$  è costante, deduciamo che, per un'orbita circolare, anche  $\frac{d\theta}{dt}$  è costante (essendo  $r_0$  costante): definiamo  $\omega_0 := \frac{d\theta}{dt}$  e, sostituendo  $L$  in (35),

troviamo la seguente relazione:

$$r_0^3 = \frac{k}{\mu \omega_0^2} \quad (37)$$

## 4 FORMA DELLE ORBITE

Abbiamo analizzato il caso di un'orbita circolare, ma se  $r > r_0$  che forma hanno le orbite?

Per rispondere a questa domanda vogliamo  $r(\theta)$  invece di  $r(t)$  e  $\theta(t)$ .

Per la derivata della funzione composta, sappiamo che vale:

$$\frac{d}{dt} \left( r(\theta(t)) \right) = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} \quad (38)$$

Ma per noi  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2}$ , allora:

$$\frac{d}{dt} \left( r(\theta(t)) \right) = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{L}{\mu} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (39)$$

Convienne allora introdurre la variabile ausiliaria  $u := \frac{1}{r}$ .

Abbiamo allora:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta} \quad (40)$$

Derivando tale relazione troviamo:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( -\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} \quad (41)$$

E concludiamo che:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{L^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} \quad (42)$$

Per cui possiamo riscrivere (27) in termini di  $u(\theta)$ , ottenendo:

$$-\frac{L^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{L^2}{\mu} u - k \quad (43)$$

Riordinando i termini in questa equazione, otteniamo la seguente equazione differenziale in  $u(\theta)$ :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{L^2} \mu \quad (44)$$

Abbiamo già incontrato equazioni differenziali di questo tipo e sappiamo che la soluzione più generale è data da:

$$u(\theta) = \frac{k}{L^2} \mu + A \cos(\theta + \theta_0) \quad (45)$$

Era  $u = \frac{1}{r}$ , e allora l'orbita è descritta da:

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{k}{L^2}\mu + A \cos(\theta)} \quad (46)$$

Dove abbiamo scelto  $\theta_0 = 0$  dato che siamo interessati a descrivere l'orbita per ogni  $\theta$  e non ci interessa la condizione iniziale.

### ⚠ NOTA

Per  $\theta_0 = 0$  si ha che  $r(\theta)$  è minimo per  $\theta = 0$  e massimo per  $\theta = \pi$ .

Di solito (46) si scrive nella forma:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{e \cos \theta + 1} \quad (47)$$

Dove:

- $r_0 = \frac{L^2}{\mu k}$
- $e = \frac{AL^2}{\mu k}$

**OSS:** possiamo sempre considerare  $e \geq 0$ , infatti se fosse  $e < 0$  basterebbe ricordare che  $\cos(x) = -\cos(x + \pi)$  e scegliere quindi un diverso  $\theta_0$ .

## 4.1 ORBITA CIRCOLARE

Chiaramente, per  $e = 0$  ( $A = 0$ ) si ha  $r(\theta) = r_0 \forall t$  e siamo nel caso dell'orbita circolare.

**OSS:** si tratta proprio della soluzione particolare di (44).

## 4.2 ORBITA LIMITATA

Notiamo ora che, se  $0 < e < 1$ , il denominatore in (47) non si annulla mai e quindi  $r(\theta)$  è limitato e avrà un massimo e un minimo:

$$\begin{aligned} r_{max} &= \frac{r_0}{1 - e} \\ r_{min} &= \frac{r_0}{1 + e} \end{aligned} \quad (48)$$

Per trovare l'equazione cartesiana dell'orbita convertiamo le coordinate da polari a cartesiane, ricordando che  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ .

Allora  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Per cui (47) diventa:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r_0}{e \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1} \quad (49)$$

Da cui ricaviamo:

$$\left(x + \frac{er_0}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \left(\frac{r_0}{1 - e^2}\right)^2 \quad (50)$$

E che riscriviamo come:

$$\left(x + \frac{er_0}{1 - e^2}\right) \underbrace{\left(\frac{1 - e^2}{r_0}\right)^2}_{\frac{1}{a^2}} + y^2 \underbrace{\left(\frac{1 - e^2}{r_0^2}\right)}_{\frac{1}{b^2}} = 1 \quad (51)$$

Notiamo che  $\frac{1}{a^2} > 0$  e  $\frac{1}{b^2} > 0$ : allora è l'equazione di un'ellisse.

## 4.3 ORBITA ILLIMITATA

### 4.3.1 $e = 1$

In tal caso abbiamo:

$$r(\theta) = \frac{r_0}{\cos \theta + 1} \quad (52)$$

Convertendo anche questo caso in coordinate cartesiane troviamo:

$$x = \frac{r_0}{2} - \frac{y^2}{2r_0} \quad (53)$$

Che è l'equazione di una **parabola**.

#### **NOTA**

Essendo  $e$  misurato, è molto poco probabile che in natura si verifichi esattamente  $e = 1$ .

### 4.3.2 $e > 1$

Otteniamo nuovamente (51), ma questa volta, essendo  $e > 1$ , abbiamo  $\frac{1}{b^2} < 0$  e  $\frac{1}{a^2} > 0$ , perciò abbiamo l'equazione di un'**iperbole**.

## 5 CORREZIONI RELATIVISTICHE

Oggi sappiamo che la legge di gravitazione universale di Newton non è una legge fondamentale, ma è un'approssimazione della relatività generale di Einstein.

La relatività generale si basa su idee che abbiamo già incontrato: l'equivalenza tra la massa inerziale e quella gravitazionale, e l'equivalenza tra l'accelerazione gravitazionale e quella dovuta alle forze apparenti.

Nel caso del problema di Keplero, si può dimostrare che la relatività generale porta ad una correzione del potenziale gravitazionale per cui si ha:

$$E_{P,r} = -G \frac{\mu M}{r} \left( 1 + \frac{3GM}{c^2 r} + o(1/r) \right) \quad (54)$$

Allora l'equazione (27) (quella del moto lungo  $\vec{u}_r$ ) diventa:

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{d}{dr} E_{P,r} \quad (55)$$

Dove il membro di destra è sempre la derivata dell'energia potenziale efficace, ma che ora tiene conto delle correzioni relativistiche.

Si trova allora l'equazione differenziale seguente:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \underbrace{\left( 1 - 6 \frac{k^2}{c^2 L^2} \right)}_{\text{prima era 1}} u = \frac{\mu k}{L^2} \quad (56)$$

La cui soluzione è:

$$u(\theta) = A \cos \left( \underbrace{\sqrt{1 - 6 \frac{k^2}{c^2 L^2}}}_{<1} \theta - \theta_0 \right) + \frac{\mu k}{L^2 - \frac{6k^2}{c^2}} \quad (57)$$

Per cui l'orbita *non si chiude* dopo un angolo di  $2\pi$ , ma *solo dopo*:

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 6 \frac{k^2}{c^2 L^2}}} \approx 2\pi \left( 1 + 3 \frac{k^2}{c^2 L^2} \right) \quad (58)$$

Tale fenomeno è detto **precessione dell'orbita**, per cui viene definito l'*angolo di precessione*:

$$\varphi = \frac{6\pi k^2}{c^2 L^2} \quad (59)$$

La corretta previsione dell'angolo di precessione per l'orbita di Mercurio è stato uno dei primi successi della relatività generale.

## IL CORPO RIGIDO

### CORPO RIGIDO

È un oggetto la cui *forma non cambia* quando soggetto a forze.

Ha una certa massa e, a differenza del punto materiale, anche una certa estensione nello spazio.

# CARATTERISTICHE

Essendo *continuo*, a differenza di una collezione discreta di punti materiali, possiamo immaginarlo come un insieme di volumetti infinitesimali  $dV$ .

Se chiamiamo  $\vec{r}$  la posizione di un volumetto e  $dm(\vec{r})$  la sua massa, possiamo definire la densità  $\rho(\vec{r})$ :

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dV} \quad (1)$$

A questo punto, per trovare la massa totale  $M$  del corpo si deve calcolare:

$$M = \int_V dm(\vec{r}) = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (2)$$

Spesso può essere utile approssimare un corpo rigido ad un oggetto bidimensionale (come un foglio) o unidimensionale (un filo). Tale approssimazione è giustificata dal fatto che una o due dimensioni del corpo sono ordini di grandezza più piccole rispetto all'alle altra/e.

Convienne allora definire le seguenti quantità, analoghe della densità per un corpo tridimensionale.

**Densità superficiale:**

$$\rho_s(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dS} \quad (3)$$

**Densità lineare:**

$$\rho_l(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{dL} \quad (4)$$

## CENTRO DI MASSA

Come per un sistema di  $N$  punti materiali, anche per lo studio del corpo rigido è utile definire il *centro di massa*.

La definizione è del tutto analoga, trattandosi di una generalizzazione al caso di un corpo continuo:

$$\vec{r}_{CM} = \int_V \frac{\vec{r}}{M} dm(\vec{r}) \quad (5)$$

E che riscriviamo per comodità nel seguente modo:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV \quad (6)$$

## OSSERVAZIONE

Se il corpo preso in considerazione è *omogeneo*, cioè la densità è costante al suo interno, si ha:



$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{\rho V} \int_V \vec{r} \rho dV = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \quad (7)$$

Cioè, per un corpo omogeneo, il centro di massa è una caratteristica puramente geometrica.

## AZIONE DELLA FORZA PESO

Ciascun volumetto  $dV$  contribuisce alla forza peso con una forza infinitesima data da:

$$d\vec{F}_p = -g dm(\vec{r}) \vec{u}_z \quad (8)$$

La forza peso totale è la risultante di questi contributi:

$$\vec{F}_p = \int_V d\vec{F}_p = -g \int_V dm \vec{u}_z = -Mg \vec{u}_z \quad (9)$$

A questo punto, dato che il corpo rigido ha una certa estensione, è importante calcolare il *momento* di  $\vec{F}_p$ : se questo fosse non nullo, il corpo ruoterebbe.

Ciascun volumetto  $dV$  contribuisce al momento totale con un momento infinitesimo dato da:

$$d\vec{\mathcal{M}} = \vec{r} \times d\vec{F}_p = -\vec{r} \times g dm \vec{u}_z \quad (10)$$

Allora il momento totale è dato da:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= \int_V d\vec{\mathcal{M}} = \int_V (-g dm \vec{r} \times \vec{u}_z) \\ &= -g \left( \int_V \vec{r} dm \right) \times \vec{u}_z = -gM \left( \int_V \frac{\vec{r}}{M} dm \right) \times \vec{u}_z = -gM \vec{r}_{CM} \times \vec{u}_z \end{aligned} \quad (11)$$

E concludiamo allora:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{r}_{CM} \times (-gM \vec{u}_z) = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_p \quad (12)$$

Cioè possiamo immaginare che la *forza peso totale* sia applicata interamente nel CM.

## CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

Per il corpo rigido, allora, si ha equilibrio se sono verificate due condizioni:

$$\begin{cases} \vec{F}_{TOT} = \vec{0} \text{ (I)} \\ \vec{\mathcal{M}}_{TOT} = \vec{0} \text{ (II)} \end{cases} \quad (13)$$

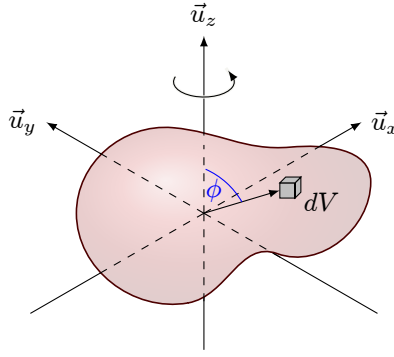
## MOTI DEL CORPO RIGIDO

Oltre a *traslare* come un punto materiale, il corpo rigido può anche **ruotare**.

In generale, può **traslare** e **ruotare contemporaneamente** (*rototraslazione*).

# ROTAZIONE

Consideriamo un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso.



Consideriamo un volumetto  $dV$  in posizione  $\vec{r}$ : durante la rotazione,  $dV$  compie una traiettoria circolare di raggio  $R$  attorno a  $\vec{u}_z$ , con  $R = \|\vec{r}\| \sin \phi$ .

Se supponiamo che gli assi  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$  si muovano insieme al corpo, nel disegno abbiamo:

$$\vec{r} = -\|\vec{r}\| \sin(\phi) \vec{u}_y + \|\vec{r}\| \cos(\phi) \vec{u}_z \quad (14)$$

$$\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{u}_x \quad (15)$$

Supponiamo che ruoti con velocità angolare  $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ , e che quindi la velocità tangenziale del volumetto sia  $\|\vec{v}\| = R\omega$ .

Allora:

$$\vec{r} = -R \vec{u}_y + R \cot(\phi) \vec{u}_z \quad (16)$$

$$\vec{v} = R\omega \vec{u}_x \quad (17)$$

Il momento angolare sul volumetto è:

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v} dm \quad (18)$$

Sostituendo  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$  troviamo:

$$d\vec{L} = \underbrace{(R^2 \omega dm) \vec{u}_z}_{dL_z} + \underbrace{(R^2 \omega \cot(\phi) dm) \vec{u}_x}_{dL_\perp} \quad (19)$$

Per cui, a questo punto, possiamo calcolare il **momento angolare totale**:

$$\vec{L} = \int_V d\vec{L} = \int_V dL_z \vec{u}_z + \int_V dL_\perp \vec{u}_\perp \quad (20)$$

Il secondo termine è generalmente complesso da calcolare, soprattutto se si considerano assi fissi per il piano di rotazione (mentre noi abbiamo assunto che seguissero la rotazione del corpo).

In presenza di *simmetrie assiali* del corpo, tuttavia, tale termine è nullo.

In tal caso si ha:

$$\vec{L} = \int_V R^2 \omega dm \vec{u}_z = \left( \int_V R^2 dm \right) \omega \vec{u}_z \quad (21)$$

E si definisce il **momento di inerzia** lungo  $\vec{u}_z$ :

$$I_z = \int_V R^2 dm = \int_V (x^2 + y^2) \rho(x, y) dV \quad (22)$$

E si ha:

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega} \quad (23)$$

$I_z$  è una quantità che dipende dalla geometria del corpo e dalla distribuzione della sua massa. Inoltre, è interpretabile come l'analogo rotazionale della massa inerziale.

Dal *teorema del momento angolare* ricaviamo anche:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha} \quad (24)$$

## ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

Calcoliamo ora l'energia cinetica associata alla rotazione.

Partiamo dall'energia infinitesimale del volumetto:

$$dE_K = \frac{1}{2} \|\vec{v}\|^2 dm = \frac{1}{2} (\omega R)^2 dm \quad (25)$$

E quindi:

$$E_K = \int_V dE_K = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V R^2 dm = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \quad (26)$$

### OSSERVAZIONE

Anche da questa relazione notiamo come  $I_z$  sia una quantità analoga alla massa inerziale per la rotazione.

Ora, sappiamo che per il teorema dell'energia cinetica vale, per una qualche forza esterna  $\vec{F}_{ext}$ :

$$\mathcal{W}_{ext} [\Gamma_{01}] = E_K(t_1) - E_K(t_0) = \frac{1}{2} I_z (\omega(t_1))^2 - \frac{1}{2} I_z (\omega(t_0))^2 \quad (27)$$

Fissiamo  $t_0$  e studiamo la variazione di  $\mathcal{W}_{ext}$  al variare di  $t := t_1$ .

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I_z (\omega(t))^2 - \frac{1}{2} I_z (\omega(t_0))^2 \right) = I_z \omega(t) \alpha(t) \quad (28)$$

Allora abbiamo:

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = I_z \frac{d\theta}{dt} \alpha dt \implies d\mathcal{W} = I_z \alpha dt \quad (29)$$

Per cui possiamo calcolare il lavoro compiuto da  $\vec{F}_{ext}$ :

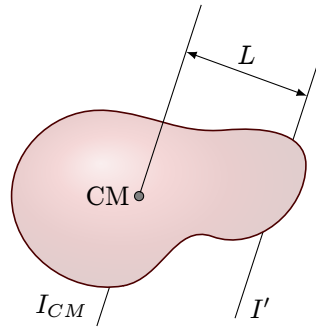
$$\mathcal{W} = \int d\mathcal{W} = \int I_z \alpha d\theta = \int \mathcal{M} d\theta \quad (30)$$

E deduciamo quindi che una forza esterna con momento non nullo compie lavoro opponendosi alla rotazione del corpo.

## TEOREMA DI HUYGENS - STEINER

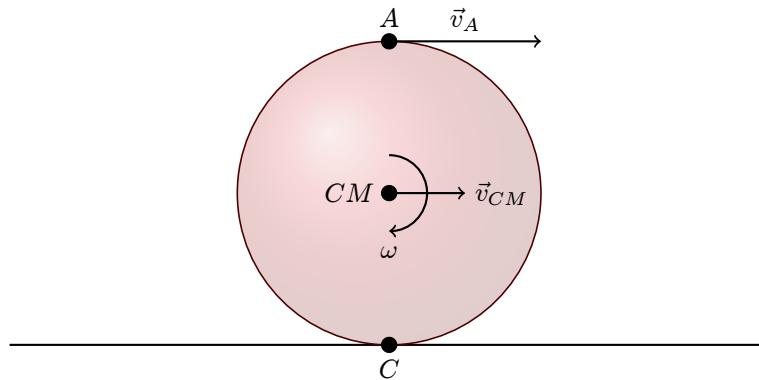
Dato un asse passante per il CM e uno parallelo ad esso, a distanza  $L$ , vale:

$$I'_z = I_{z,CM} + ML^2 \quad (31)$$



## PURO ROTOLAMENTO

Consideriamo un oggetto di sezione circolare che ruota su un piano senza strisciare. Chiamiamo  $A$  il punto apicale e  $C$  il punto di contatto, come in figura:



Il corpo ruota con velocità angolare  $\omega$  e il CM si sposta con  $\vec{v}_{CM}$ . In  $C$  agiscono delle forze, tra cui ci aspettiamo sicuramente  $\vec{F}_R$  e  $\vec{F}_A$ .

## SISTEMA SOLIDALE AL CM

Nel sistema del CM,  $A$  ruota attorno al CM con:

$$\vec{v}'_A = \vec{\omega} \times \vec{r}'_A = (\omega \vec{u}_y) \times (r \vec{u}'_z) = \omega r \vec{u}'_x \quad (32)$$

**NOTA:**  $\vec{u}_y$  è perpendicolare al piano della figura.

E similmente, abbiamo anche:

$$\vec{v}'_C = -\omega r \vec{u}'_x \quad (33)$$

# SISTEMA SOLIDALE AL PAVIMENTO

In questo sistema abbiamo invece:

$$\vec{v}_{CM} = v\vec{u}_x \quad (34)$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}_{CM} = (\omega r + v)\vec{u}_x \quad (35)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}'_C + \vec{v}_{CM} = (v - \omega r)\vec{u}_x \quad (36)$$

## CONDIZIONE PER IL PURO ROTOLAMENTO

La condizione per il puro rotolamento, cioè una rotazione senza slittamento, è che la *velocità nel punto di contatto sia nulla*.

Significa che  $C$  fa da perno per la rotazione, e quindi segue anche:

$$v_{CM} = \omega r \quad (I) \quad (37)$$

Il che ci dice proprio che la velocità del CM è dovuta proprio alla sua rotazione intorno al punto di contatto.

Derivando tale equazione si trovano anche le seguenti:

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}_{TOT} \quad (II) \quad (38)$$

$$I\vec{\alpha} = \vec{\mathcal{M}}_{TOT} \quad (III) \quad (39)$$

(I), (II) e (III) sono le equazioni del puro rotolamento.

## FORZE ESTERNE E ATTRITO

Supponiamo ora che il corpo sia soggetto ad una forza esterna  $\vec{F}_{ext}$  e ad un momento esterno  $\vec{\mathcal{M}}_{ext}$ .

Allora abbiamo:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_R + \vec{F}_A \quad (40)$$

E quindi:

$$\vec{\mathcal{M}}_{TOT} = \mathcal{M}_{ext}\vec{u}_y + \cancel{\vec{r}_C \times \vec{F}_R} + \underbrace{\vec{r}_C \times \vec{F}_A}_{=-rF_A\vec{u}_y} \quad (41)$$

Cioè:

$$\vec{\mathcal{M}}_{TOT} = (\mathcal{M}_{ext} - rF_A)\vec{u}_y \quad (42)$$

Consideriamo (II):

- Lungo  $\vec{u}_z$  (verticale) non c'è moto, per cui  $F_R = -F_{ext,\perp}$ .
- Lungo  $\vec{u}_x$ , invece, si ha:

$$Ma_{CM} = F_{ext,\parallel} + F_A \quad (43)$$

Consideriamo ora (III):

il momento totale ha solo una componente lungo  $\vec{u}_y$ , per cui:

$$I\alpha = \mathcal{M}_{ext} - rF_A \quad (44)$$

Da (43) troviamo:

$$M\alpha r = F_{ext,\parallel} + F_A \implies \alpha = \frac{F_{ext,\parallel} + F_A}{Mr} \quad (45)$$

Da (44), invece:

$$\alpha = \frac{\mathcal{M}_{ext} - rF_A}{I} \quad (46)$$

Eguagliando (45) e (46) si ha allora:

$$(F_{ext,\parallel} + F_A)I = (\mathcal{M}_{ext} - rF_A)Mr \quad (47)$$

Risolvendo per  $F_A$  troviamo:

$$F_A = \frac{Mr\mathcal{M}_{ext} - F_{ext,\parallel}I}{I + Mr^2} \quad (48)$$

E a questo punto possiamo sostituire (48) in (43) per trovare:

$$a_{CM} = \frac{r}{I + Mr^2} (\mathcal{M}_{ext} + rF_{ext,\parallel}) \quad (49)$$

#### **NOTA**

Nelle ultime due equazioni compare il termine  $I + Mr^2$ .

Grazie al teorema di Huygens-Steiner concludiamo che questo è il momento di inerzia del corpo rispetto ad un asse passante per il punto di contatto (a distanza  $r$  dal CM).

Inoltre, essendo il punto di contatto fermo, la forza di attrito è quella dovuta all'attrito statico.

Allora deve valere anche:

$$|F_A| < \mu_s |F_R| \quad (50)$$

Altrimenti si avrebbe attrito dinamico, che vorrebbe dire che il punto di contatto *non* è fermo e quindi il corpo slitta.

## FLUIDOSTATICA

Un fluido occupa un *certo volume*, ma, al contrario del corpo rigido, **non** ha una **forma definita**: assume quella del contenitore. Sono fluidi i gas e i liquidi.  
**NOTA:** Al contrario dei gas, i liquidi sono **incomprimibili**.

Se consideriamo un volumetto infinitesimale all'interno del fluido, su di esso agiscono due tipi di forze:

- Forze di **volume**, dovute al volume complessivo di fluido.
- Forze di **pressione**, esercitate dal *resto del fluido* sul volumetto.

## FORZE DI VOLUME

Tali forze comprendono la forza peso, la forza centrifuga, la forza gravitazionale... Vediamo, per esempio, la forza peso.

Sul volumetto agisce una forza peso infinitesimale data da:

$$d\vec{F}_p = -gdm\vec{u}_z = -g\rho dV\vec{u}_z \quad (1)$$

Dove  $\rho$  è la *densità del fluido*.

Allora la forza peso totale è data da:

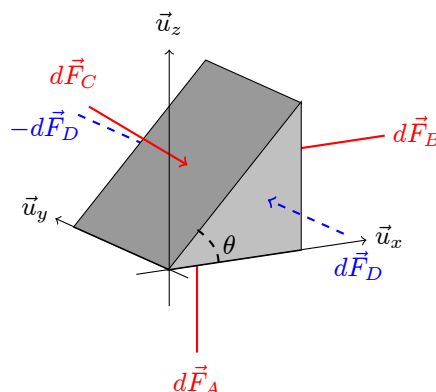
$$\vec{F}_p = \int_V d\vec{F}_p = -g\rho \int_V dV\vec{u}_z = -g\rho V\vec{u}_z \quad (2)$$

Dove  $V$  è la regione di spazio occupata dal fluido e  $V$  il suo volume totale.

## FORZE DI PRESSIONE

Dato un certo  $dV$ , il resto del fluido esercita una certa forza ortogonale alla superficie di  $dV$  stesso.

Consideriamo la seguente figura esemplificativa, con facce ben definite:



Siccome il corpo è all'equilibrio (è fermo), le forze evidenziate in blu sono uguali ed opposte; possiamo allora soffermarci su  $d\vec{F}_A, d\vec{F}_B, d\vec{F}_C$ .

Ci aspettiamo che tali forze siano in qualche modo proporzionali alle superfici delle facce: più estesa è la superficie e più fluido esercita una forza su di essa.

Scriviamo allora:

$$d\vec{F}_A = p_A dS_A \vec{u}_z \quad (3)$$

$$d\vec{F}_B = -p_B dS_B \vec{u}_x \quad (4)$$

$$d\vec{F}_C = p_C dS_C (-\cos \theta \vec{u}_z + \sin \theta \vec{u}_x)$$

Dove abbiamo introdotto i coefficienti di proporzionalità  $p_A, p_B, p_C$ .

Tali coefficienti, tuttavia, *non* sono *indipendenti*. Essendo  $dV$  in equilibrio, infatti, deve valere:

$$d\vec{F}_A + d\vec{F}_B + d\vec{F}_C = \vec{0} \quad (5)$$

Inoltre, anche  $dS_A, dS_B, dS_C$  sono legate dalla geometria del problema e si ha:

$$\begin{aligned} dS_A &= \cos \theta dS_C \\ dS_B &= \sin \theta dS_C \end{aligned} \quad (6)$$

Allora l'equazione (5) diventa:

$$p_A \cos \theta dS_C \vec{u}_z - p_B \sin \theta dS_C \vec{u}_x + p_C \sin \theta dS_C \vec{u}_x - p_C \cos \theta dS_C \vec{u}_z = \vec{0} \quad (7)$$

Che riscriviamo come:

$$(p_A - p_C) \cos \theta dS_C \vec{u}_z + (p_C - p_B) \sin \theta dS_C \vec{u}_x = \vec{0} \quad (8)$$

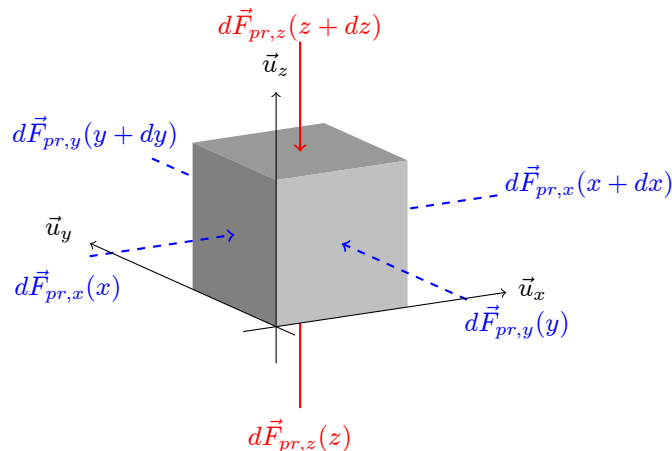
Ma allora deve essere:

$$p_A = p_B = p_C := p \quad (9)$$

Chiamiamo  $p$  **pressione**: è la forza per unità di superficie (era infatti  $dF = p dS$ ).

## PRESSIONE IN PRESENZA DELLA FORZA PESO

Consideriamo un volumetto  $dV$  come in figura, soggetto anche alla forza peso:





Esattamente come prima, essendo il volumetto in equilibrio e non essendoci alcuna forza esterna lungo  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$ , le forze evidenziate in blu sono uguali ed opposte lungo le rispettive direzioni.

Concludiamo allora che la pressione *non varia* lungo  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$ .

Per cui:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}p(x, y, z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}p(x, y, z) &= 0\end{aligned}\quad (10)$$

Lo stesso **non** si può dire lungo  $\vec{u}_z$ : lungo questa direzione agisce infatti anche la forza peso.

Per cui, lungo  $\vec{u}_z$ , deve essere:

$$dF_{pr,z}(z) + dF_{pr,z}(z + dz) + dF_p = 0 \quad (11)$$

Da cui segue:

$$p(z)dS_z - p(z + dz)dS_z - g\rho dV = 0 \quad (12)$$

Ma  $dV = dS_z dz$ .

Allora:

$$(p(z) - p(z + dz) - g\rho dz)dS_z = 0 \quad (13)$$

A questo punto, ricordiamo che  $p(z + dz) = p(z) + \frac{\partial}{\partial z}p(x, y, z)dz$  e otteniamo:

$$\cancel{p(z)} - \cancel{p(z)} - \frac{\partial}{\partial z}p dz - g\rho dz = 0 \quad (14)$$

E allora:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (15)$$

Da cui ricaviamo:

### LEGGE DI STEVINO

$$p(z) = -g\rho z + p_0 \quad (16)$$

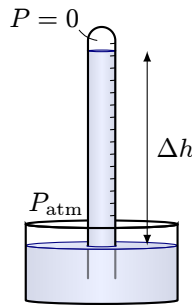
### NOTA

Se il fluido è soggetto alla sola forza peso, diretta lungo  $\vec{u}_z$ , allora la pressione varia solo lungo  $\vec{u}_z$  ed è costante lungo le altre.

In generale, tuttavia,  $p$  potrebbe variare anche lungo  $\vec{u}_x$  e  $\vec{u}_y$  se vi fossero delle forze agenti lungo tali direzioni.

# ESPERIMENTO DI TORRICELLI

Capovolgendo un tubo (chiuso ad un'estremità) pieno di un fluido in una vasca contenente altro fluido, si osserva che nel tubo rimane una colonna di fluido alta  $\Delta h$  rispetto al pelo del contenuto della vasca.



**NOTA:** nella parte alta del tubo rimane il vuoto, a pressione nulla.

Torricelli eseguì questo esperimento usando del *mercurio* come fluidi, misurando

$$\Delta h = 760 \text{ mm} \quad (17)$$

## INTERPRETAZIONE

Scelti due punti alla stessa quota, le pressioni saranno uguali per la legge di Stevino. Scegliamo allora un punto sul pelo dell'acqua, fuori dal tubo, e uno alla stessa quota ma all'interno del tubo.

Nel primo punto la pressione è quella atmosferica, mentre nel secondo è quella data dalla colonna di mercurio, e queste sono uguali.

Per cui:

$$p_{atm} = 760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm} \quad (18)$$

Conoscendo  $\Delta h$ ,  $g$  e  $\rho_{Hg}$  troviamo:

$$p_{atm} = \rho g \Delta h \approx 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (19)$$

## PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Consideriamo un fluido e concentriamo la nostra attenzione su una regione di volume  $V$ , su cui agiscono forze di pressione dovute al resto del fluido e la forza peso.

Abbiamo visto che all'equilibrio lungo  $\vec{u}_z$  vale:

$$F_{pr} = -g\bar{\rho}V \quad (20)$$

Dove  $\bar{\rho}$  è la densità media del fluido nella regione considerata.

Se *sostituissimo* questa porzione di fluido con un ugual volume di una sostanza *diversa* di densità media  $\rho'$ ,  $F_{pr}$  rimarrebbe invariata perchè dipende solo dal fluido circostante (che non è stato modificato in alcun modo), mentre la *forza peso cambierebbe* perchè dipende dalla massa della sostanza.

Allora avremmo:

$$F_{TOT} = F_{pr} + F_p = g(\bar{\rho} - \rho')V \quad (21)$$

Dove  $V$  è la porzione sommersa del volume del corpo.

Notiamo che la componente seguente

$$F_A = g\bar{\rho}V \quad (22)$$

rappresenta una spinta verso l'alto dovuta alla massa di fluido spostata ( $\bar{\rho}V$ ) dal corpo, ed è detta **spinta di Archimede**.

All'equilibrio si ha:

$$g\bar{\rho}V_s = g\rho'V_{tot} \quad (23)$$

Dove il membro di sinistra è la spinta di Archimede data dal volume sommerso  $V_s$  e il membro di destra è la forza peso subita dal corpo.

Si trova allora:

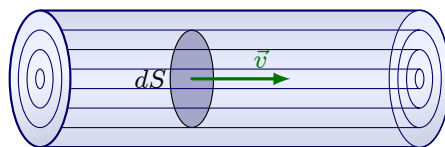
$$\frac{V_s}{V_{tot}} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \quad (24)$$

Per cui la percentuale di volume sommerso sarà tanto maggiore quanto più alta è la densità del corpo in rapporto a quella del fluido.

## FLUIDODINAMICA

### LAVORO DELLE FORZE DI PRESSIONE

Consideriamo un fluido che si muove in un tubo sotto l'azione di una forza di pressione, come in figura:



Calcoliamo il lavoro di tale forza di pressione.

Cominciamo con il lavoro della pressione infinitesima  $d\vec{F}_{pr}$  sulla superficie  $dS$ :

$$d\mathcal{W} = d\vec{F}_{pr} \cdot \vec{v}dt = p dS \vec{u}_x \cdot \frac{dx}{dt} \vec{u}_x dt = p dS \frac{dx}{dt} dt = p dS dx \quad (25)$$

Dove abbiamo considerato una velocità parallela alla parete del tubo e all'asse  $\vec{u}_x$

Ma  $dS dx = dV$ , ( $dV$  è il volume che ha attraversato  $dS$  nel tempo  $dt$ ) per cui:

$$\mathcal{W} = \int_V d\mathcal{W} = \int_V p dV \quad (26)$$

$p$  è in buona approssimazione costante nella regione infinitesima  $dV$ , ma **non lo** è in tutto  $V$ .

## FLUSSO E PORTATA

Consideriamo ora un fluido, e più in particolare un liquido, che si muove di un moto più generico rispetto a quello dell'esempio precedente. Scelto un volumetto  $dV$ , chiamiamo **linea di flusso** la traiettoria che esso segue.

Per il nostro studio ci limiteremo al caso in cui il fluido è in **regime stazionario**.

### REGIME STAZIONARIO

Moto di un fluido non soggetto ad attriti e le cui *linee di flusso non si intersecano mai*.

**NOTA:** Le linee di flusso si intersecano in presenza di vortici (*turbolenza*).

Definiamo allora la **portata**, ovvero la quantità di fluido che passa attraverso una superficie in un determinato tempo:

$$q = \int_S v dS \quad (27)$$

Consideriamo un volume infinitesimo  $dV_1$  attraversato dal fluido con velocità  $v_1$ : allora abbiamo:

$$dV_1 = dS_1 dx_1 = dS_1 v_1 dt \quad (28)$$

Immaginiamo di seguire il moto di tale volume fino ad un punto in cui la sezione considerata è  $dS_2$  e la sua velocità è  $v_2$ .

$$dV_2 = dS_2 v_2 dt \quad (29)$$

Essendo i liquidi incompressibili, deve essere  $dV_1 = dV_2$ , allora:

$$dS_1 v_1 dt = dS_2 v_2 dt \implies dS_1 v_1 = dS_2 v_2 \implies q_1 = q_2 \quad (30)$$

E concludiamo che la *portata è costante lungo il flusso*.

## GENERALIZZAZIONE LEGGE DI STEVINO

Dal teorema dell'energia cinetica, sappiamo che vale:

$$\mathcal{W}_{tot} = \Delta E_K \quad (31)$$

Nel caso di un fluido, abbiamo  $\mathcal{W}_{tot} = \mathcal{W}_{pr} + \mathcal{W}_{vol}$ .

Allora otteniamo:

$$pdV + \underbrace{g\rho dV dz}_m = \Delta E_K \quad (32)$$

Nel caso statico,  $\Delta E_K = 0$  e troviamo quindi:

$$p dV = -g\rho dz dV \quad (33)$$

E integrando:

$$p(z) = -g\rho z + p_0 \quad (34)$$

Che è esattamente la *legge di Stevino*.

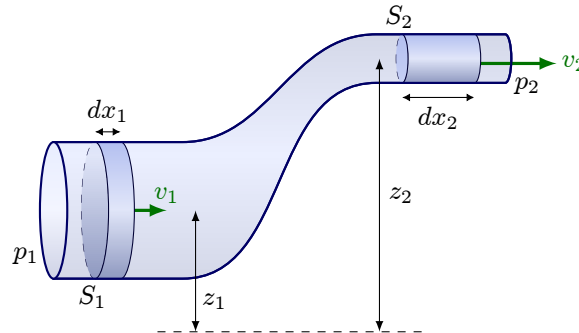
Per cui abbiamo dimostrato che, nel caso **statico**, la legge di Stevino e il *teorema dell'energia cinetica* sono **equivalenti**.

## TEOREMA DI BERNOULLI

Possiamo dedurre qualcosa anche dal caso *non statico*?

Per verificarlo, consideriamo  $dV$  lungo il flusso:

- $dV = dx_1 dS_1$  varia in  $dV = dx_2 dS_2$ .
- La quota  $z_1$  varia in  $z_2$ .
- La velocità  $v_1$  varia in  $v_2$ .
- La pressione  $p_1$  varia in  $p_2$ .



Per il teorema dell'energia cinetica, abbiamo:

$$p_1 dV - p_2 dV + dm g z_1 - dm g z_2 = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 \quad (35)$$

Che riscriviamo come:

$$p_1 dV - p_2 dV + \rho dV g z_1 - \rho dV g z_2 = \frac{1}{2} \rho dV v_2^2 - \frac{1}{2} \rho dV v_1^2 \quad (36)$$

Semplificando e riordinando, troviamo:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (37)$$

Ovvero:

### TEOREMA DI BERNOULLI

La quantità

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$$

è **costante** lungo il flusso.

## PRINCIPIO DI VENTURI

Dal teorema di Bernoulli, se consideriamo una quota  $z$  costante, troviamo che vale:

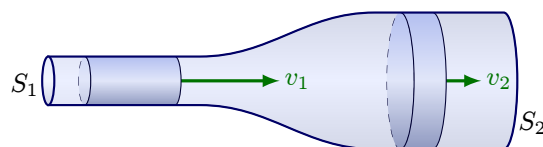
### PRINCIPIO DI VENTURI

La quantità

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2$$

è **costante** lungo il flusso.

Consideriamo ora il *tubo di Venturi*, ovvero un tubo con sezioni di ampiezza diversa in punti diversi:



In regime stazionario, la portata è costante e si ha quindi:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \implies v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 \quad (38)$$

Per il principio di Venturi vale anche:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (39)$$

Da cui troviamo:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( \left( \frac{S_1}{S_2} \right)^2 - 1 \right) < 0 \quad (40)$$

Cioè la pressione è maggiore nel punto di sezione  $S_2$ .

Aumentando la sezione del tubo, diminuisce la velocità del fluido e aumenta la sua

pressione.

# TEMPERATURA E CALORE

## TEMPERATURA

E' un fatto intuitivo che, ponendo due corpi a temperature diverse a contatto, il più caldo si raffredda (e viceversa) fino a raggiungere un equilibrio.

### PRINCIPIO ZERO DELLA TERMODINAMICA

Due corpi sono in **equilibrio termico** se hanno la stessa temperatura.

## CALORE

In particolare, il corpo caldo *cede calore* al corpo freddo, che lo *assorbe*.  
Per convenzione:

- $Q > 0$  se il calore è **assorbito**.
- $Q < 0$  se il calore è **ceduto**.

### NOTA

Un corpo *ha una temperatura e scambia calore*.  
**Non ha calore**, in modo analogo all'energia e al lavoro.

## CALORE SPECIFICO

Si trova che la quantità di calore necessaria ad aumentare la temperatura di un corpo da  $T_0$  a  $T_0 + dT$  è data da:

$$dQ = c(T_0)mdT \quad (1)$$

Dove  $m$  è la massa del corpo e  $c(T_0)$  è il **calore specifico**:

$$c(T_0) = \frac{1}{m} \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{T_0} \quad (2)$$

E' *sempre positivo* ed è una proprietà che *dipende dal materiale*; inoltre, è approssimativamente costante al variare di  $T_0$ .

Per cui si ha che il calore scambiato da due corpi  $A$  e  $B$  a temperature  $T_A$  e  $T_B$  è dato da:

$$Q_{AB} = \int_{T_A}^{T_B} dQ = cm \int_{T_A}^{T_B} dT = cm(T_B - T_A) \quad (3)$$

## CAPACITA' TERMICA

Consideriamo due corpi 1 con  $(m_1, c_1, T_1)$  e 2 con  $(m_2, c_2, T_2)$ , con  $T_2 > T_1$ .

Mettendoli a contatto, raggiungeranno la temperatura di equilibrio  $T_e$  e si avrà:

$$Q_1 = c_1 m_1 (T_e - T_1) \quad (4)$$

$$Q_2 = c_2 m_2 (T_2 - T_e) \quad (5)$$

Chiaramente, vale  $T_1 < T_e < T_2$ .

Inoltre, dato che il calore ceduto da 2 è lo stesso che viene assorbito da 1, vale:

$$Q_1 + Q_2 = 0 \quad (6)$$

E si trova allora:

$$T_e = \frac{c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \quad (7)$$

Notiamo che la temperatura  $T_e$  è la media pesata delle temperature  $T_1$  e  $T_2$ , dove i pesi sono dati dalla quantità  $mc$ .

Definiamo allora la **capacità termica**:

$$C := cm \quad (8)$$

## TERMOMETRI

Una sonda con capacità termica  $C_s$  molto piccola rispetto alla capacità termica del corpo ( $C_c$ ) di cui si vuole misurare la temperatura, misura:

$$T_e = \frac{C_s T_s + C_c T_c}{C_s + C_c} \approx T_c \quad (9)$$

Questo permette di costruire termometri e definire scale di temperatura:

- **CELSIUS**: a  $0^\circ\text{C}$  l'acqua gela, a  $100^\circ\text{C}$  bolle.
- **KELVIN**: un intervallo di un grado è uguale ad uno in gradi celsius, ma lo zero è posto a  $0\text{ K} = -273,15^\circ\text{C}$ .

Definita la scala *celsius*, si definisce anche l'unità di misura del calore:

la **caloria**, che corrisponde al calore necessario ad aumentare la temperatura di 1kg di acqua da  $14,5^\circ\text{C}$  a  $15,5^\circ\text{C}$ .

## CALORE LATENTE

Se un corpo allo stato **solido** si trova alla *temperatura di fusione*, il calore fornito **non fa aumentare la sua temperatura**, ma viene "impiegato" per *fondere il corpo*.



La temperatura tornerà ad *aumentare* solo *dopo aver fornito una certa quantità di calore*  $Q_f$ , data da:

$$Q_f = \lambda m \quad (10)$$

Dove  $\lambda$  è detto **calore latente di fusione**.

#### **NOTA**

Lo stesso avviene anche per il processo inverso: se il corpo allo stato liquido si trova alla temperatura di solidificazione (è uguale alla temperatura di fusione) dovrebbe cedere la stessa quantità  $Q_f$  di calore prima che la sua temperatura cominci a diminuire.

## SCAMBIO ATTRAVERSO UNA BARRIERA

Dati due corpi a contatto tramite una barriera di spessore  $dx$  e superficie  $dS$ , la quantità di calore scambiato è data da:

$$dQ = -K \frac{dT}{dx} dS dt \quad (11)$$

Dove  $K$  è la **conducibilità termica** del materiale di cui è composta la barriera.

## SISTEMI TERMODINAMICI

Un sistema termodinamico può essere un oggetto, una massa di materia o una regione dello spazio che viene studiata dal punto di vista termodinamico: vale a dire studiandone il lavoro compiuto e gli scambi di calore al suo interno e, eventualmente, anche con l'ambiente esterno.

Un sistema termodinamico può essere:

- **APERTO** se scambia materia, calore e lavoro con l'ambiente esterno.
- **CHIUSO** nel caso contrario.
- **ADIABATICO** se scambia *solo lavoro* con l'ambiente esterno.
- **ISOLATO** se *non scambia niente* con un sistema esterno.

#### **NOTA**

L'unico sistema *veramente isolato* è l'**universo** intero, perchè non è presente un sistema ad esso esterno.

Qualsiasi altro sistema non è mai propriamente isolato.

## EQUILIBRIO DI UN SISTEMA TERMODINAMICO

In meccanica abbiamo visto che un sistema è in *equilibrio* se  $\vec{F}_{tot} = \vec{0}$  e  $\vec{M}_{tot} = \vec{0}$ .

In termodinamica, invece, diciamo che un sistema è in **equilibrio** se  $dQ = 0$ .

Un sistema all'equilibrio è inoltre identificato da:

- Una temperatura  $T$ .
- Una pressione  $p$ .
- Un volume  $V$ .

Queste tre quantità *non sono indipendenti*: esiste una funzione per cui si ha

$$f_{eq}(p, V, T) = 0 \quad (12)$$

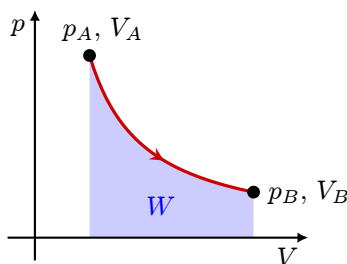
Tale condizione è detta **equazione di stato** e verrà trattata in seguito.

**NOTA:** la maggior parte dei casi di studio in termodinamica riguarda i fluidi e, più in particolare, i gas.

## PIANO DI CLAPEYRON

In termodinamica, è utile studiare le trasformazioni nel piano  $(p, V)$ , detto *piano di Clapeyron*.

Vediamo perchè considerando una generica trasformazione termodinamica tra due stati di equilibrio  $A$  e  $B$ :



Sappiamo che il lavoro delle forze di pressione lungo tale trasformazione è dato da:

$$\mathcal{W}_{\Gamma_{AB}} = \int_{\Gamma_{AB}} p dV \quad (13)$$

Allora, come possiamo notare anche dalla figura,  $\mathcal{W}_{\Gamma_{AB}}$  corrisponde all'area sottesa alla curva  $\Gamma_{AB}$  della trasformazione.

## TRASFORMAZIONI TERMODINAMICHE

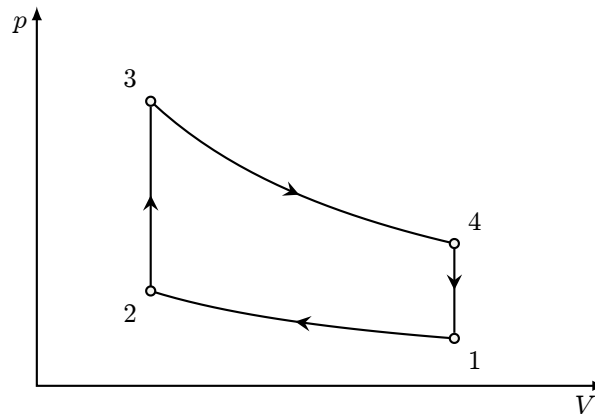
A questo punto, è bene classificare le trasformazioni termodinamiche.

- Tra di esse, le **quasi statiche** avvengono con sufficiente lentezza da far sì che ogni loro *stato intermedio* sia, in buona approssimazione, di equilibrio.
  - Tra queste, poi, alcune sono **reversibili**, cioè possono avvenire anche in verso opposto.

Sul piano di Clapeyron, le trasformazioni *reversibili* sono indicate con una linea *continua*, quelle irreversibili con una linea tratteggiata.

## CICLI TERMODINAMICI

Un ciclo è una *sequenza di trasformazioni* che riporta il sistema allo **stato iniziale**.



Se *tutte* le trasformazioni sono *reversibili*, il ciclo si dice **reversibile**.

## LAVORO DI UN CICLO

Il lavoro prodotto (o subito) durante un ciclo è dato dalla somma dei lavori delle singole trasformazioni.

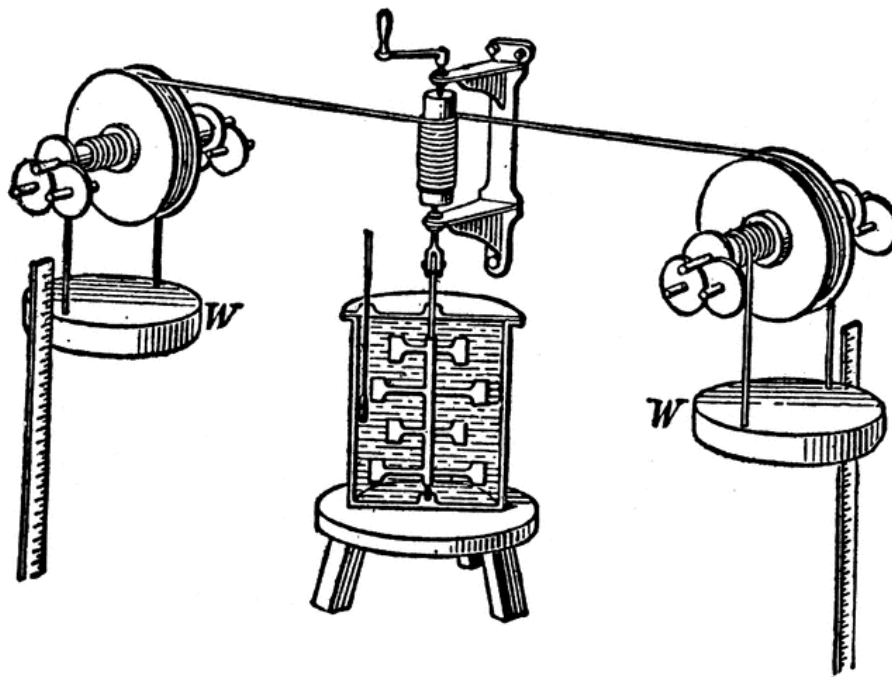
Nel piano di Clapeyron è, graficamente, l'area racchiusa dal ciclo con segno:

- **Negativo** se il ciclo è percorso in verso *antiorario*.
- **Positivo** se il ciclo è percorso in verso *orario*.

## ESPERIMENTO DI JOULE ED ENERGIA INTERNA

Un importante esperimento sul calore fu eseguito da James Joule.

L' "apparecchiatura" utilizzata è riportata dalla figura di seguito:



Si tratta di un contenitore pieno d'acqua, al cui interno è presente un mulinello azionato da un perno che viene messo in moto dalla caduta di due masse poste ai lati e attaccate a delle corde arrotolate attorno al perno stesso.

Il lavoro compiuto dalle due masse durante la caduta è:

$$\mathcal{W}_p = 2mg\Delta h \quad (14)$$

Misurando la temperatura dell'acqua prima della caduta delle masse e dopo che il perno avesse smesso di girare, Joule osservò che la temperatura dell'acqua era aumentata di  $\Delta T$  e che tale variazione era proporzionale a  $\mathcal{W}$ .

Joule identificò allora l'**energia interna**  $U$  e affermò che, nel caso di un *sistema adiabatico* come quello considerato (il contenitore era adiabatico), valeva:

$$\Delta U = U_B - U_A = -\mathcal{W}_{AB} \quad (15)$$

**NOTA:** in questo caso  $\mathcal{W}_{AB} = -\mathcal{W}_p$  perchè il lavoro compiuto dalle masse è invece subito dall'acqua.

Più in generale, quindi anche per sistemi non adiabatici, si ha:

### PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$$\Delta U = Q_{AB} - \mathcal{W}_{AB}$$

Concludiamo quindi che **il calore è una forma di energia**.

Notiamo anche che  $\Delta U$  dipende solo dagli stati in  $A$  e  $B$ , per cui l'*energia interna* è una *funzione di stato*.

### FUNZIONE DI STATO

E' una quantità/proprietà di un corpo che *dipende solo* dallo **stato** in cui si trova il corpo.

## I GAS

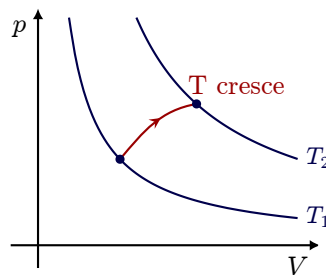
Per il nostro studio, considereremo i cosiddetti **gas ideali**, caratterizzati dalle seguenti proprietà:

- *Non sono troppo freddi.*
- *Sono abbastanza rarefatti.*
- *Obbediscono ad alcune leggi sperimentali.*

**NOTA:** tali leggi valgono proprio alla luce delle prime due assunzioni.

## LEGGE DI BOYLE

Durante una trasformazione **isoterma** (a temperatura costante) *reversibile*, il prodotto  $pV$  rimane costante.

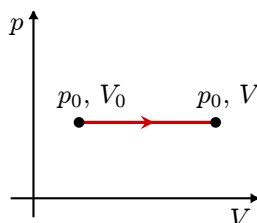


## LEGGE DI GAY-LUSSAC

Durante una trasformazione **isobara** (a pressione costante) *reversibile*, si osserva che vale:

$$V = V_0(1 + \alpha(T - T_0)) \quad (1)$$

Dove  $V_0$  e  $T_0$  sono volume e temperatura di riferimento, e  $\alpha$  è una costante.



Chiaramente,  $V$  deve essere positivo, per cui imponiamo che (1) sia maggiore di zero e troviamo:

$$T > -\frac{1}{\alpha} + T_0 \quad (2)$$

La quantità  $-\frac{1}{\alpha} + T_0$  è lo **zero assoluto** (0 K) e quindi  $T_0$  è la temperatura di riferimento della scala scelta.

Lavorando con la scala *celsius* si ha:

- $T_0 = 0^\circ \text{C}$
- $\alpha = \frac{1}{273,15^\circ \text{C}}$

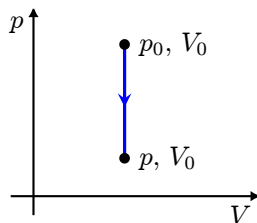
**OSS:** A  $T = 0 \text{ K}$  si avrebbe  $V = 0$  che non ha senso fisico. Questo è uno dei motivi per cui si fissa lo zero kelvin in questo punto.

## LEGGE ISOCORA

Durante una trasformazione **isocora** (a volume costante) *reversibile*, si osserva che vale:

$$p = p_0(1 + \beta(T - T_0)) \quad (3)$$

E si trova che  $\alpha = \beta$  con un ragionamento analogo al precedente.



Se misuriamo la temperatura in Kelvin,  $V(T)$  e  $p(T)$  sono lineari (come in qualsiasi altra scala), ma si annullano proprio a  $T = 0 \text{ K}$ , per cui abbiamo:

- $V(T) = \alpha V_0 T$
- $p(T) = \alpha p_0 T$

## LEGGE DI AVOGADRO

Due gas ideali che occupano lo stesso volume  $V$  e si trovano alla stessa temperatura  $T$  e pressione  $p$  consistono dello stesso numero di molecole.

Si introduce allora la **mole**:

$$1 \text{ mol} = N_A \text{ molecole} = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ molecole} \quad (4)$$

Questo ci aiuta a fissare un riferimento standard:

- Scegliamo  $T_0 = 0^\circ \text{C}$ .
- Scegliamo poi  $p_0 = p_{atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .
- A questo punto consideriamo una mole di gas a  $T_0$  e  $p_0$  scelti e misuriamo  $V_0$ , trovando  $V_{mol} = 22,4 \text{ l} = 0,0224 \text{ m}^3$ , detto anche *volume molare*.

## EQUAZIONE DI STATO DEI GAS IDEALI

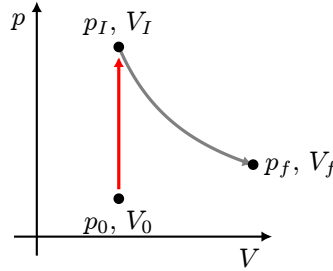
Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il fatto che all'equilibrio esiste una relazione  $f_{eq}$  per cui si ha:

$$f_{eq}(p, V, T) = 0 \quad (5)$$

Vogliamo trovare tale relazione per i *gas ideali* a partire dalle leggi presentate sopra.

Per farlo, consideriamo  $n$  moli di un gas a  $p = p_0$ ,  $T = T_0$  e  $V_0 = nV_{mol}$ .

Con una serie di trasformazioni, vogliamo portare il gas dallo stato  $(p_0, V_0, T_0)$  allo stato generico  $(p_f, V_f, T_f)$ .



1. Con un'isocora reversibile raggiungiamo un punto intermedio  $I$  che abbia la stessa temperatura del punto finale. Si avrà quindi:

- $p_I = p_0 \alpha T_f$
- $V_I = V_0 = nV_{mol}$
- $T_I = T_f$

2. Con un'isoterma reversibile, raggiungiamo il punto finale, ricordando che vale  $p_f V_f = p_I V_I = p_0 \alpha T_f nV_{mol}$ .

Troviamo allora, per uno stato generico  $(p, V, T)$ :

$$pV = n(\alpha p_0 V_{mol})T \quad (6)$$

Definiamo la *costante dei gas ideali*:

$$R := \alpha p_0 V_{mol} \quad (7)$$

E concludiamo che la  $f_{eq}$  che cercavamo è:

$$f_{eq} = pV - nRT = 0 \implies pV = nRT \quad (8)$$

Tale relazione è detta **equazione di stato dei gas ideali** e vale *all'equilibrio*.

## ENERGIA INTERNA DI UN GAS IDEALE

Consideriamo un gas in una porzione di un contenitore di volume  $V$ , a contatto con un fluido a temperatura  $T$ .

Immaginiamo che, aprendo una valvola, il gas sia libero di espandersi in tutto il contenitore, occupando un volume  $V' = V + \Delta V$ .

Se il sistema è isolato, si ha:

$$\begin{aligned} Q_{\text{gas}} + Q_{\text{fluido}} &= 0 \\ \Delta U_{\text{gas}} + \Delta U_{\text{fluido}} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

La prima relazione è ovvia per un sistema isolato.

Per quanto riguarda la seconda, basta notare che il fluido non compie/subisce alcun lavoro dato che il suo volume rimane costante; e anche il gas non compie/subisce lavoro in quanto si espande in uno spazio che prima era vuoto. Allora la seconda relazione segue dal primo principio della termodinamica.

Eseguendo tale esperimento, si osserva che la temperatura del fluido *non è variata*, per cui il fluido è nello stesso stato di partenza e si ha:

$$\Delta U_{\text{fluido}} = 0 \quad (10)$$

Ma allora deve essere anche:

$$\Delta U_{\text{gas}} = 0 \quad (11)$$

Tuttavia, in questo processo sono cambiati sia  $V_{\text{gas}}$  che  $p_{\text{gas}}$ , per cui per un gas ideale  $\Delta U$  dipende **solo da**  $T$ , essendo funzione di stato.

## CALORE SPECIFICO DEI GAS IDEALI

Abbiamo visto che il *calore specifico* ci dice come varia  $T$  se forniamo calore  $Q$  a una certa quantità di materia.

Per solidi e liquidi si usa il calore specifico *per unità di massa*.

Per i gas usiamo il calore specifico *per numero di moli*.

Tuttavia, è importante considerare il fatto che possiamo fornire calore ad un gas a *pressione costante* oppure a *volume costante*.

Definiamo allora:

$$c_V := \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \bigg|_{V \text{ costante}} \quad (12)$$

$$c_p := \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \bigg|_{p \text{ costante}} \quad (13)$$

### ⚠ NOTA

Ci aspettiamo una differenza fra i due perchè a  $p$  costante *parte del calore* è usato per far *espandere il gas* (compiendo lavoro  $p dV$ ).

Questa porzione di energia **non** contribuisce quindi a far *aumentare la temperatura* del gas.

## RELAZIONE DI MEYER

Sappiamo che:

$$\frac{dU}{dT} \bigg|_{p \text{ cost}} = \frac{dU}{dT} \bigg|_{V \text{ cost}} \quad (14)$$



Inoltre:

$$dU = dQ - dW \quad (15)$$

Sappiamo anche:

$$\left. \frac{dW}{dT} \right|_{V \text{ cost}} = 0 \neq \left. \frac{dW}{dT} \right|_{p \text{ cost}} \quad (16)$$

E infine sappiamo che:

$$pV = nRT \implies \frac{d}{dT}(pV) = nR \quad (17)$$

A questo punto abbiamo tutto quello che ci serve per trovare una relazione fra  $c_p$  e  $c_V$ . Innanzitutto:

$$\begin{aligned} nc_V &= \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{V \text{ cost}} = \left. \frac{dU + dW}{dT} \right|_{V \text{ cost}} \\ &= \left. \frac{dU}{dT} \right|_{V \text{ cost}} + \left. \frac{dW}{dT} \right|_{V \text{ cost}} \end{aligned}$$

Per cui troviamo:

$$nc_V = \left. \frac{dU}{dT} \right|_{V \text{ cost}} \quad (18)$$

Ma abbiamo visto che  $\frac{dU}{dT}$  non dipende da  $V$  o  $p$ , per cui è anche vero che:

$$\begin{aligned} nc_V &= \left. \frac{dU}{dT} \right|_{p \text{ cost}} \\ &= \left. \frac{dQ - dW}{dT} \right|_{p \text{ cost}} = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{p \text{ cost}} - \left. \frac{dW}{dT} \right|_{p \text{ cost}} \\ &= \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{p \text{ cost}} - p \left. \frac{dV}{dT} \right|_{p \text{ cost}} = \left. \frac{dQ}{dT} \right|_{p \text{ cost}} - \underbrace{\left. \frac{d(pV)}{dT} \right|_{p \text{ cost}}}_{=nR} \end{aligned}$$

E concludiamo quindi:

$$nc_V = nc_p - nR \quad (19)$$

Da cui ricaviamo la:

 **RELAZIONE DI MEYER**

$$c_V = c_p - R \quad (20)$$

Spesso è utile considerare il **rapporto di compressione**  $\gamma$ :

$$\gamma := \frac{c_p}{c_V} \quad (21)$$

E' un numero puro che si misura sperimentalmente.

Inoltre si ha:

- $\gamma = \frac{5}{3}$  per *gas monoatomici*.
- $\gamma = \frac{7}{5}$  per *gas biatomici*.

## TRASFORMAZIONI DEI GAS IDEALI

Vediamo le trasformazioni più importanti per i gas ideali, sia reversibili che non, considerando uno stato iniziale  $A$  e uno stato finale  $B$ .

### ISOTERMA

Vale  $dT = 0$ .

- Se **irreversibile** non conosciamo  $p(V)$ .
- Se **reversibile** vale l'equazione di stato dei gas, per cui troviamo  $p = \frac{nRT}{V}$ .

In ogni caso (anche se irreversibile)  $U$  dipende solo da  $T$ , per cui:

$$dT = 0 \implies dU = 0 \implies dQ = dW \quad (22)$$

E, se la trasformazione è reversibile, possiamo calcolare:

$$Q_{AB} = W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \quad (23)$$

### ISOBARA

Vale  $dp = 0$ , per cui sarà rappresentata da una linea orizzontale sul piano di Clapeyron, sia che essa sia reversibile che non.

In ogni caso vale:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = p \int_{V_A}^{V_B} dV = p(V_B - V_A) \quad (24)$$

Per calcolare  $\Delta U$ :

$$\Delta U = \int_A^B dU = \int_{T_A}^{T_B} n c_V dT \quad (25)$$

Se la trasformazione è irreversibile, non sappiamo come varia  $T$ , per cui possiamo concludere solo:

$$\Delta U = n c_V (T_B - T_A) \quad (26)$$

Per cui se non conosciamo le temperature in  $A$  e  $B$ , o come varia  $T$  da  $A$  a  $B$ , non possiamo calcolare  $\Delta U$ .

Se invece è reversibile, possiamo anche trovare  $T(V)$  e quindi  $dT$ :

$$T = \frac{pV}{nR} \implies dT = \frac{pdV}{nR} \quad (27)$$

E allora possiamo calcolare  $\Delta U$  anche nel seguente modo:

$$\Delta U = nc_V \int_{V_A}^{V_B} \frac{p}{nR} dV = \frac{c_V p}{R} (V_B - V_A) \quad (28)$$

## ISOCORA

Vale  $dV = 0$  (e quindi  $d\mathcal{W} = 0$ ) e allora sarà rappresentata sul piano di Clapeyron con una linea verticale sul piano sia che essa sia reversibile che non.

Inoltre, per il primo principio, si ha:

$$\Delta U = Q_{AB} \quad (28)$$

Per cui segue anche:

$$\left. \frac{dU}{dT} = \frac{dQ}{dT} \right|_{V \text{ cost}} = nc_V \quad (29)$$

E troviamo quindi

$$\Delta U = Q_{AB} = nc_V (T_B - T_A) \quad (30)$$

Analogamente al caso precedente, se la trasformazione è irreversibile non possiamo sapere come varia  $T$  in funzione di  $p$ .

Se reversibile, invece, troviamo:

$$T = \frac{Vp}{nR} \implies dT = \frac{V}{nR} dp \quad (31)$$

Il che ci permette di calcolare  $\Delta U$  e  $Q_{AB}$ .

## ADIABATICA

Vale  $dQ = 0$ , e quindi, per il primo principio, si ha:

$$dU = -d\mathcal{W} \implies \Delta U = -\mathcal{W}_{AB} \quad (32)$$

E allora:

$$\mathcal{W}_{AB} = -\Delta U = -nc_V (T_B - T_A) \quad (33)$$

In questo caso variano sia  $p$ , che  $V$ , che  $T$ ; per cui *non conosciamo*  $p(V)$ :

$$nc_V dT = dU = -d\mathcal{W} = -pdV \quad (34)$$

Infatti da questa relazione *non* è possibile ricavare  $p$ ,  $V$  o  $T$  in funzione di una delle altre due.

Se la trasformazione è reversibile, tuttavia, sappiamo che  $p = \frac{nRT}{V}$  e allora troviamo:

$$nc_V dT = -\frac{nRT}{V} dV \implies \frac{dT}{T} = -\frac{R}{c_V} \frac{dV}{V} \quad (35)$$

Per cui, integrando ambo i membri, troviamo:

$$\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = -\frac{R}{c_V} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Sostituendo  $R = c_P - c_V$  si arriva a:

$$\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = -(\gamma - 1) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Da cui ricaviamo:

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-(\gamma-1)} \quad (36)$$

E concludiamo che, lungo un'*adiabatica reversibile*, vale:

$$TV^{\gamma-1} = \text{cost} \quad (37)$$

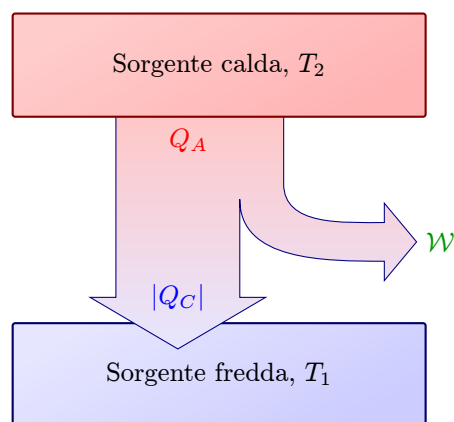
E quindi anche:

$$pV^{\gamma} = \text{cost} \quad (38)$$

## MACCHINE TERMICHE

### MACCHINA TERMICA

E' un oggetto che compie un *ciclo termodinamico* **estraendo calore** da una *sorgente calda*, grazie al quale **produce lavoro**, **cedendo** tuttavia **calore** ad una *sorgente fredda*.



La figura schematizza il funzionamento di una macchina termica che lavora con due sorgenti a  $T_1$  e  $T_2$ :

- $Q_A$  è il calore assorbito dalla macchina.
- $\mathcal{W}$  è il lavoro prodotto da un ciclo.
- $|Q_C|$  è il calore ceduto alla sorgente fredda ( $Q_C$  è negativo).

# RENDIMENTO

Siccome le macchine termiche lavorano con cicli termodinamici, per uno di questi cicli si ha:

$$\Delta U = Q_A - |Q_C| - \mathcal{W} = 0 \quad (1)$$

Per cui troviamo:

$$\mathcal{W} = Q_A - |Q_C| \quad (2)$$

Come si può intuire anche dalla figura.

Idealmente, vorremmo che il *rapporto fra  $\mathcal{W}$  e  $Q_A$  sia maggiore possibile*: vogliamo cioè convertire la più alta % possibile di  $Q_A$  in lavoro, *riducendo al minimo il calore ceduto* alla sorgente fredda, che è invece *sprecato*.

Definiamo allora il **rendimento**  $\eta$  di una macchina termica:

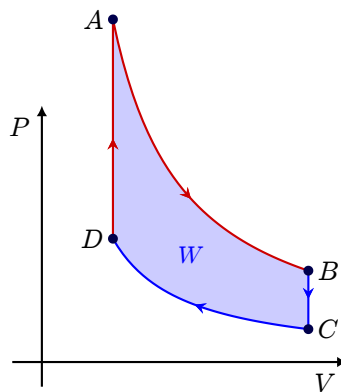
$$\eta = \frac{\mathcal{W}}{Q_A} = \frac{Q_A - |Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \quad (3)$$

E, chiaramente, vale sempre:

$$\eta \in [0, 1] \quad (4)$$

## CICLO DI STIRLING

Consideriamo una macchina termica che sfrutta il ciclo di Stirling, rappresentato di seguito:



Il ciclo consiste di 2 isoterme e 2 isocore:

- *AB espansione isoterma* reversibile.
- *BC raffreddamento isocoro* reversibile.
- *CD compressione isoterma* reversibile.
- *DA riscaldamento isocoro*.

Abbiamo:

- $T_A = T_B = T_2$

- $T_C = T_D = T_1$
- $V_B = V_C = V_2$
- $V_D = V_A = V_1$

Vogliamo determinare il rendimento  $\eta$ .

Calcoliamo allora  $\mathcal{W}$  e  $Q_A$ .

## TRASFORMAZIONE AB

La trasformazione è isoterma, per cui  $\mathcal{W}_{AB} = Q_{AB}$  e, in particolare, abbiamo:

$$\mathcal{W}_{AB} + Q_{AB} = nRT_2 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) > 0 \quad (5)$$

Allora il gas assorbe calore e compie lavoro.

## TRASFORMAZIONE BC

La trasformazione è isocora, per cui  $\mathcal{W}_{BC} = 0$  e  $\Delta U = Q_{BC}$ .

Quindi abbiamo:

$$Q_{BC} = nc_V(T_1 - T_2) < 0 \quad (6)$$

Allora il gas cede calore e non compie lavoro.

## TRASFORMAZIONE CD

La trasformazione è isoterma, per cui  $\mathcal{W}_{CD} = Q_{CD}$  e abbiamo:

$$\mathcal{W}_{CD} = Q_{CD} = nRT_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) < 0 \quad (7)$$

Allora il gas cede calore e subisce lavoro.

## TRASFORMAZIONE DA

La trasformazione è isocora, per cui  $\mathcal{W}_{DA} = 0$  e  $\Delta U = Q_{DA}$

Perciò abbiamo:

$$Q_{DA} = nc_V(T_2 - T_1) > 0 \quad (8)$$

## RENDIMENTO DEL CICLO

Per cui il lavoro totale è:

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_{AB} + \mathcal{W}_{CD} = nR(T_2 - T_1) \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) \quad (9)$$

E il calore assorbito è:

$$Q_A = Q_{AB} + Q_{DA} = nRT_2 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) + nc_V(T_2 - T_1) \quad (10)$$

Calcoliamo allora il rendimento del ciclo e troviamo:

$$\eta = \frac{\mathcal{W}}{Q_A} = \frac{R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) (T_2 - T_1)}{RT_2 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) + c_V(T_2 - T_1)} \quad (11)$$

Osserviamo a questo punto che  $Q_{DA} = -Q_{BC}$ .

Se potessimo riutilizzare il calore ceduto in  $BC$  per alimentare il ciclo, non avremmo bisogno di fornire  $Q_{DA}$ .

Allora sarebbe  $Q_A = Q_{AB}$ , e in tal caso troveremmo:

$$\eta_{rev} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (12)$$

Che è maggiore di quanto trovato prima, ma come si realizza un ciclo di questo tipo?

La soluzione consiste nell'implementare un **rigeneratore**, ovvero lavorare con delle *sorgenti intermedie* fra  $T_1$  e  $T_2$ .

In questo modo, invece che raffreddare il gas da  $T_2$  a  $T_1$ , lo raffredderemmo da  $T_2$  a  $T_{i,1}$ , poi  $T_{i,2}$  e così via fino a  $T_{i,N}$ .

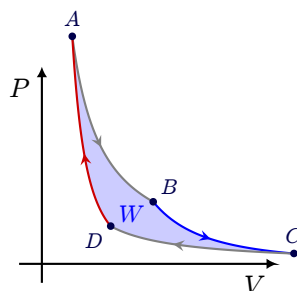
Nella trasformazione  $DA$ , invece, riutilizzeremmo le stesse sorgenti in ordine inverso da  $T_1$  a  $T_2$  potendo così riutilizzare il calore ceduto in  $BC$  invece che lasciare che si disperda.

### ⚠️ NOTA

Utilizzando queste sorgenti intermedie, stiamo sostanzialmente scomponendo le due isocore in tante trasformazioni tra stati più "vicini" gli uni agli altri; cioè stiamo rallentando le trasformazioni in modo da renderle **quasi statiche** e quanto più vicine possibile a delle trasformazioni *reversibili*.

## CICLO DI CARNOT

Studiamo ora una macchina che lavora con il ciclo di Carnot, rappresentato di seguito:



Il ciclo è così composto:

- *AB espansione isoterma.*
- *BC espansione **adiabatica**.*
- *CD compressione isoterma.*
- *DA compressione **adiabatica**.*

Supponiamo che tutte e quattro le trasformazioni siano reversibili e calcoliamo il rendimento  $\eta$  a partire dai seguenti dati:

- $T_A = T_B = T_2$
- $T_C = T_D = T_1$

## TRASFORMAZIONE AB

E' una trasformazione isoterma, per cui  $Q_{AB} = \mathcal{W}_{AB}$ .

Allora:

$$Q_{AB} = \mathcal{W}_{AB} = nRT_2 \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) > 0 \quad (13)$$

## TRASFORMAZIONE BC

E' una trasformazione adiabatica, per cui  $Q_{BC} = 0$  e  $\Delta U = -\mathcal{W}_{BC}$ .

Allora:

$$\mathcal{W}_{BC} = nc_V(T_2 - T_1) > 0 \quad (14)$$

## TRASFORMAZIONE CD

E' una trasformazione isoterma, per cui  $Q_{CD} = \mathcal{W}_{CD}$ .

Allora:

$$Q_{CD} = \mathcal{W}_{CD} = nRT_1 \ln \left( \frac{V_D}{V_C} \right) < 0 \quad (15)$$

## TRASFORMAZIONE DA

E' una trasformazione adiabatica, per cui  $Q_{DA} = 0$  e  $\Delta U = \mathcal{W}_{DA}$ .

Allora:

$$\mathcal{W}_{DA} = nc_V(T_1 - T_2) < 0 \quad (16)$$

## RENDIMENTO DEL CICLO

Per calcolare il rendimento, osserviamo che i volumi *non sono indipendenti*: sono infatti legati dalle seguenti relazioni

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \implies T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1} \quad (17)$$

$$T_D V_D^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \implies T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1} \quad (18)$$



Troviamo allora che vale:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} \quad (19)$$

Per cui abbiamo:

$$Q_A = Q_{AB} \quad (20)$$

E:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \mathcal{W}_{AB} + \mathcal{W}_{CD} + \cancel{\mathcal{W}_{BC}} + \cancel{\mathcal{W}_{DA}} \\ &= nRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nRT_1 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = nR(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \end{aligned} \quad (21)$$

Per cui possiamo calcolare il rendimento del ciclo:

$$\eta = \frac{\mathcal{W}}{Q_A} = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (22)$$

E notiamo che il rendimento del ciclo di *Carnot* e quello del ciclo di *Stirling* (nell'ipotesi che entrambi siano reversibili) sono *uguali*.

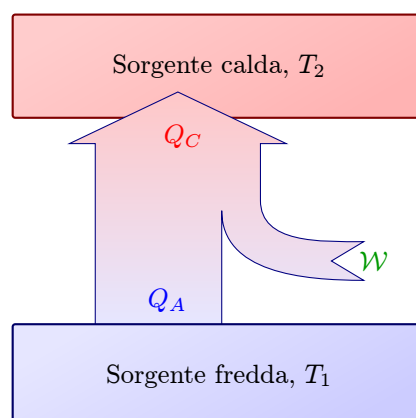
Possiamo quindi intuire che esiste un limite al rendimento massimo di un ciclo; prima di dimostrarlo introduciamo però altre informazioni.

## MACCHINE FRIGORIFERE

### MACCHINA FRIGORIFERA

Una macchina frigorifera *assorbe* calore  $Q_A > 0$  da una sorgente *fredda* e **cede calore**  $Q_C$  ad una **sorgente calda**. Chiaramente, trattandosi di un processo *non spontaneo*, una macchina frigorifera *necessita di lavoro* fornito dall'esterno anzichè produrlo come una macchina termica.

Di seguito lo schema di funzionamento di una macchina frigorifera:



Per una macchina termica si definisce l'**efficienza**  $\xi$ , analoga del rendimento:

$$\xi = \frac{Q_A}{\mathcal{W}} \quad (23)$$

L'efficienza ci dice quanto calore riusciamo ad assorbire dalla sorgente calda in rapporto al lavoro fornito.

I cicli di Stirling e di Carnot termici sono eseguiti in verso opposto rispetto alla loro controparte termica. Allora, usando i risultati trovati in precedenza, abbiamo:

$$\xi_{C,S} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad (24)$$

**OSS:** l'efficienza è tanto più alta quanto più simili sono  $T_2$  e  $T_1$ .

## SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

### Enunciato di CLAUSIUS

E' **impossibile** realizzare un *processo termodinamico* il cui **solo risultato** sia il *trasferimento di calore* da **un corpo caldo verso uno freddo**.

### Enunciato di KELVIN - PLANCK

E' **impossibile** realizzare un *processo termodinamico* il cui **solo risultato** sia la *produzione di lavoro* da **una sola sorgente** a temperatura costante.

E i due enunciati sono equivalenti.

## DIMOSTRAZIONE

### Warning

Vogliamo dimostrare  $KP \Leftrightarrow C$ .  
Per farlo, dimostriamo  $KP \text{ falso} \Leftrightarrow C \text{ falso}$ .

### KP FALSO $\implies$ C FALSO

Assumiamo che  $KP$  sia falso.

Allora esiste una macchina termica  $M$  che assorbe calore  $Q_1$  da una sorgente a temperatura  $T_1$ , producendo lavoro  $\mathcal{W}$ .

Collegiamo allora  $M$  ad una macchina frigorifera  $F$  che assorbe il lavoro  $\mathcal{W}$  prodotto da  $M$ , calore  $Q_A$  dalla stessa sorgente  $T_1$  e cede calore  $Q_C$  ad una sorgente a temperatura  $T_2$ .

Il risultato complessivo è una macchina  $M'$  ( $M + F$ ) che trasferisce calore dalla sorgente  $T_1$  a  $T_2$ , cioè viola l'enunciato di Clausius.

## C FALSO $\implies$ KP FALSO

Assumiamo che  $C$  sia falso.

Allora esiste una macchina  $M$  che assorbe calore  $Q_A$  da una sorgente a temperatura  $T_1$  e cede calore  $Q_C = -Q_A$  ad una sorgente a temperatura più alta  $T_2$ , senza utilizzare lavoro esterno.

Consideriamo ora una macchina termica  $M'$  che lavora fra le stesse temperature e colleghiamola ad  $M$ .

Il risultato complessivo è una macchina  $M + M'$  che produce lavoro attingendo solo da  $T_2$  (perchè tutto il calore ceduto da  $M'$  alla sorgente  $T_1$  viene reimmesso in  $T_2$  dalla macchina  $M$ ), cioè viola l'enunciato di Kelvin-Planck.

## TEOREMA DI CARNOT

Sia  $C$  una *macchina di Carnot reversibile* e  $X$  un'altra macchina *non necessariamente reversibile*.

Allora abbiamo:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_C &= \eta_C Q_{A,C} \\ \mathcal{W}_X &= \eta_X Q_{A,X}\end{aligned}\tag{25}$$

Siccome  $C$  è reversibile, possiamo compiere lo stesso ciclo in verso opposto e trasformarla in una macchina frigorifera. Chiamiamo tale macchina  $CF$ .

Ora colleghiamo  $CF$  e  $X$ , in modo che parte del lavoro prodotto da  $X$  alimenti  $CF$  e assumendo  $|Q_{A,X}| = |Q_{A,C}|$ .

Allora lo scambio netto con  $T_2$  è nullo, infatti il calore assorbito da  $X$  viene poi reimmesso da  $CF$ .

Il risultato complessivo è una macchina  $M$  che ha uno scambio di calore netto con la sorgente  $T_1$  dato dalla somma del calore assorbito da  $CF$  e quello ceduto da  $X$ , pari a  $Q_{A,M} = -Q_{C,C} + Q_{C,X}$ .

Per cui  $M$  assorbe calore dalla sorgente  $T_1$  e produce lavoro  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_X - \mathcal{W}_C$ .

Ma per il secondo principio, tale macchina *non può esistere*, per cui deve essere:

$$\mathcal{W}_X - \mathcal{W}_C \leq 0\tag{26}$$

Cioè il lavoro deve essere assorbito o comunque nullo.

Troviamo allora:

$$\frac{\mathcal{W}_X}{Q_{A,X}} - \frac{\mathcal{W}_C}{Q_{A,X}} \leq 0\tag{27}$$

Da cui:

$$\eta_X - \eta_C \leq 0 \implies \eta_X \leq \eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (28)$$

Supponendo  $X$  reversibile potremmo ripetere lo stesso ragionamento con la sua versione frigorifera  $XF$  e  $C$ , trovando in quel caso:

$$\eta_C \leq \eta_X \quad (29)$$

Per cui concludiamo che il rendimento di una macchina reversibile che opera tra due sorgenti a temperature  $T_1$  e  $T_2$  deve valere:

$$\eta_{rev} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (30)$$

E per una macchina irreversibile  $X$  deve essere:

$$\eta_X < \eta_C \quad (31)$$

### NOTA

Come avevamo intuito in seguito allo studio del ciclo di Carnot, esiste effettivamente un limite al rendimento massimo di una macchina termica, che viene eguagliato solo nel caso in cui la macchina sia reversibile.

## ENTROPIA

Abbiamo visto che, per una generica macchina  $X$  e una macchina  $C$  operante il ciclo di Carnot fra le stesse sorgenti, vale:

$$\eta_X = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_C \quad (1)$$

Da cui ricaviamo:

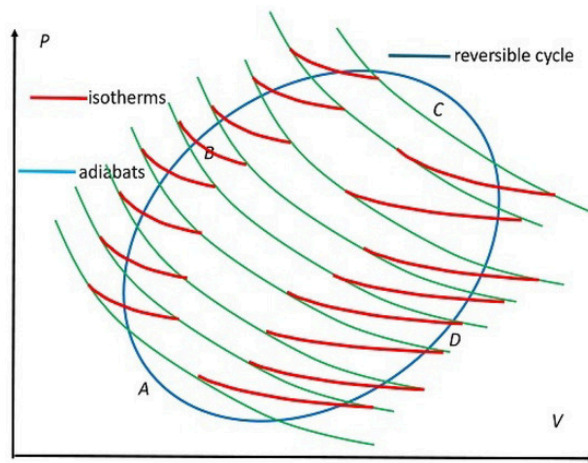
$$\frac{Q_C}{Q_A} \leq -\frac{T_1}{T_2} \implies \frac{Q_C}{T_1} + \frac{Q_A}{T_2} \leq 0 \quad (2)$$

Con l'uguaglianza che vale se la macchina è reversibile.

## TEOREMA DI CLAUSIUS

Vogliamo generalizzare (2) lungo un ciclo completamente generico, che potenzialmente opera con più di due sorgenti.

Per farlo, dato un ciclo qualsiasi, lo approssimiamo con  $N$  cicli di Carnot, come in figura:



Durante le trasformazioni adiabatiche non vi è scambio di calore e, inoltre, il lavoro prodotto da due adiabatiche appartenenti allo stesso ciclo di Carnot è uguale ed opposto (Vedi > [CICLO DI CARNOT](#)).

Per cui è come se stessimo *approssimando il ciclo con  $N$  isoterme* fra le temperature  $T_1$  e  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ,... fino a  $T_{2N-1}$  e  $T_{2N}$ .

Per ognuno degli  $N$  cicli possiamo quindi usare la relazione (2), ottenendo:

$$\frac{Q_{2j+1}}{T_{2j+1}} + \frac{Q_{2j+2}}{T_{2j+2}} \leq 0 \quad (3)$$

Con  $j = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Sommando ciascuna di queste disequazioni troviamo:

$$\sum_{k=1}^{2N} \frac{Q_k}{T_k} \leq 0 \quad (4)$$

Per  $N \rightarrow \infty$  l'approssimazione diventa sempre più fedele al ciclo di partenza e la somma discreta in (4) passa all'integrale e segue quindi:

### TEOREMA DI CLAUSIUS

Lungo un generico ciclo termodinamico vale la seguente disequazione:

$$\int_{\Gamma_{\text{ciclo}}} \frac{dQ}{T} \leq 0 \quad (5)$$

Dove l'uguaglianza vale se il ciclo è reversibile.

## ENTROPIA

Consideriamo due trasformazioni termodinamiche fra gli stati  $A$  e  $B$ :

- $\Gamma_{AB,rev}$  reversibile.
- $\Gamma'_{AB,rev}$  reversibile.

Possiamo invertire una delle due e comporle per ottenere un ciclo, per esempio

$$\Gamma_{\text{ciclo}} = \Gamma_{AB,rev} - \Gamma'_{AB,rev} \quad (6)$$

Allora, per il teorema di Clausius, troviamo:

$$0 = \int_{\Gamma_{\text{ciclo}}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} - \int_{\Gamma'_{AB,rev}} \frac{dQ}{T}$$

E quindi:

$$\int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma'_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} \quad (7)$$

Per cui tale quantità *non dipende* da  $\Gamma$ , ma solo dagli stati iniziale e finale.

Introduciamo quindi la *funzione di stato* **entropia**:

$$\Delta S = \int_{\Gamma_{rev}} \frac{dQ}{T} \quad (8)$$

#### **NOTA**

1. Si misura la variazione di entropia, non l'entropia di un singolo stato.
2. La variazione di entropia tra due stati  $A$  e  $B$  si calcola lungo un processo reversibile, per definizione.

## PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA

Consideriamo ancora due trasformazioni termodinamiche tra gli stati  $A$  e  $B$ , di cui una irreversibile:

- $\Gamma_{AB,rev}$  *reversibile*.
- $\Gamma_{AB,irr}$  *irreversibile*.

Ancora una volta, componiamole per ottenere un ciclo:

$$\Gamma_{\text{ciclo}} = -\Gamma_{AB,rev} + \Gamma_{AB,irr} \quad (9)$$

Per il teorema di Clausius, abbiamo:

$$0 > \int_{\Gamma_{\text{ciclo}}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{AB,irr}} \frac{dQ}{T} - \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{AB,irr}} \frac{dQ}{T} - \Delta S_{AB} \quad (10)$$

Per cui segue:

$$\Delta S_{AB} > \int_{\Gamma_{AB,irr}} \frac{dQ}{T} \quad (11)$$

Cioè la variazione di entropia fra gli stati  $A$  e  $B$  è maggiore della quantità  $\frac{dQ}{T}$  integrata lungo una *qualsiasi trasformazione irreversibile* tra  $A$  e  $B$ .

Poniamoci ora in un **sistema isolato**. Siccome non vi è scambio di calore con l'esterno,  $dQ = 0$  durante qualsiasi processo riguardante il sistema.

Allora (11) diventa:

$$\Delta S_{AB} > 0 \quad (12)$$

Cioè il *processo irreversibile* ha causato un *aumento dell'entropia del sistema*.

Se anziché considerare una trasformazione irreversibile ne avessimo considerata una reversibile, in (10) avremmo trovato l'uguaglianza e concluso:

$$\Delta S_{AB} = 0 \quad (13)$$

Possiamo quindi enunciare il seguente principio:

### PRINCIPIO DI AUMENTO DELL'ENTROPIA

In un **sistema isolato**, a seguito di una trasformazione termodinamica del sistema, si ha:

$$\Delta S \geq 0 \quad (14)$$

Con l'uguaglianza che vale nel caso in cui la trasformazione sia reversibile.

A questo punto vale la pena fare una considerazione sulle trasformazioni adiabatiche. Sia  $\Gamma_{AB}$  un'adiabatica.

Se fosse reversibile, avremmo:

$$\Delta S_{AB} = \int_{\Gamma_{AB,rev}} \frac{dQ^0}{T} = 0 \quad (15)$$

Se invece fosse irreversibile, dovremmo trovare una trasformazione reversibile lungo cui calcolare l'integrale. Tuttavia, per il principio di aumento dell'entropia avremmo in questo caso:

$$\Delta S_{AB} > 0 \quad (16)$$

Ma l'entropia è una *funzione di stato*, per cui da (15) e (16) segue che i due stati  $A$  e  $B$  sono collegati o da un'adiabatica *reversibile*, o da un'adiabatica *irreversibile*, ma non da entrambe.

Questo ci fa capire che, fissato uno stato di partenza  $A$ , determinati stati "destinazione" sono **irraggiungibili con determinate trasformazioni**.

## ENTROPIA E LAVORO SPRECATO

Consideriamo due serbatoi termici alle temperature  $T_1$  e  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ) che scambiano calore  $Q$ .

Calcoliamo  $\Delta S$  per ciascuno dei due:

$$\Delta S^{(1)} = \int_{\Gamma_{rev}} \frac{dQ}{T} = \int_{isot. rev} \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T_1} > 0 \quad (17)$$

Dove abbiamo scelto di calcolare  $\Delta S$  lungo un'*isoterma* perchè trattiamo i serbatoi come *serbatoi ideali*, ovvero con una capacità termica infinita, tale da non farne variare la temperatura.

Similmente, troviamo:

$$\Delta S^{(2)} = -\frac{Q}{T_2} < 0 \quad (18)$$

A questo punto, la variazione totale di entropia del sistema dopo tale processo irreversibile è:

$$\Delta S^{(irr)} = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)} = Q \left( \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} \right) > 0 \quad (19)$$

Immaginiamo ora di mediare lo scambio di calore fra i serbatoi con una macchina termica reversibile di rendimento  $\eta_C$ , che assorbe calore  $Q$  dal serbatoio a temperatura  $T_2$ , producendo così lavoro  $\mathcal{W}$  e cedendo una parte  $Q_C$  del calore assorbito al serbatoio a temperatura  $T_1$ . Abbiamo quindi:

$$\mathcal{W} = \eta_C Q = \frac{T_2 - T_1}{T_2} Q \quad (20)$$

Nel caso precedente avevamo trovato (19), in cui possiamo sostituire (20), trovando allora:

$$\Delta S^{(irr)} = \frac{\mathcal{W}}{T_2}$$

Questo ci dice che la variazione di entropia è legata al *lavoro sprecato* che avremmo potuto ottenere dal processo termodinamico se avessimo sfruttato il calore scambiato per alimentare una macchina di Carnot.

## VARIAZIONE DI ENTROPIA IN UN GAS IDEALE

In generale, si ha:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{d\mathcal{W}}{T} \quad (21)$$

Dove la seconda eguaglianza è data dal primo principio.

Sappiamo che per un gas ideale vale  $dT = n c_V dT$ .

Inoltre l'entropia si calcola lungo una trasformazione reversibile, lungo la quale vale quindi  $pV = nRT$ .

Allora riscriviamo (21):



$$dS = \frac{nc_V dT}{T} + \frac{nR dV}{V} \quad (22)$$

Per cui troviamo che la variazione di entropia tra due stati  $A$  e  $B$  per un gas ideale è data da:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \left( \frac{nc_V dT}{T} + \frac{nR dV}{V} \right) = \int_{T_A}^{T_B} \frac{nc_V}{T} dT + \int_{V_A}^{V_B} \frac{nR}{V} dV \quad (23)$$

E quindi:

$$\Delta S = nc_V \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right) + nR \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \quad (24)$$

A questo punto, ricordiamo che, valendo l'equazione di stato, si ha  $\frac{T_A}{T_B} = \frac{p_B V_B}{p_A V_A}$ .

Per cui troviamo:

$$\Delta S = nc_V \ln \left( \frac{p_B V_B}{p_A V_A} \right) + nR \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) = nc_V \ln \left( \frac{p_B}{p_A} \right) + nc_p \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \quad (25)$$

$$\Delta S = nc_V \left( \ln \left( \frac{p_B}{p_A} \right) + \frac{c_p}{c_V} \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \right) = nc_V \ln \left( \frac{p_B V_B^{\gamma}}{p_A V_A^{\gamma}} \right) \quad (26)$$

Ma sappiamo che:

$$\frac{p_B V_B^{\gamma}}{p_A V_A^{\gamma}} = 1 \iff \text{AB adiabatica reversibile} \quad (27)$$

Per cui concludiamo che:

$$\Delta S_{AB}^{\text{gas}} = 0 \iff \text{A e B collegati da un'adiabatica rev.} \quad (28)$$

### ⚠️ NOTA

Questo vale per il gas. La *differenza* tra una trasformazione *reversibile* e una *irreversibile* è nella variazione di entropia del **sistema**, che è data dalla somma dei  $\Delta S$  per il gas e per l'ambiente.

Se la trasformazione è reversibile, si avrà  $\Delta S^{\text{gas}} + \Delta S^{\text{amb}} = 0$ , se irreversibile tale quantità sarà invece positiva.

## PIANO (T,S)

Spesso può essere utile studiare le trasformazioni anche nel piano  $(T, S)$  oltre che nel piano  $(p, V)$ .

Dato un ciclo  $\Gamma_{\text{ciclo}}$  nel piano  $(T, S)$  abbiamo:

$$\int_{\Gamma_{\text{ciclo}}} T dS = \int_{\Gamma_{\text{ciclo}}} T \frac{dQ}{T} = \int_{\Gamma_{\text{ciclo}}} dQ = Q_{\text{ciclo}} \quad (29)$$

In maniera analoga all'area racchiusa da un ciclo sul piano  $(p, V)$  che corrispondeva al lavoro totale prodotto/subito dal ciclo.

Per un gas ideale:

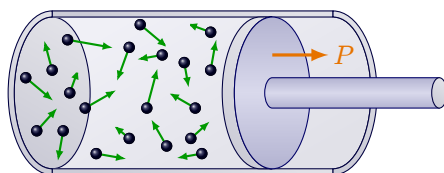
- Lungo un'**isoterma** vale  $dT = 0$ , per cui la trasformazione è rappresentata da una *retta orizzontale*.
- Lungo un'**adiabatica reversibile** vale  $dQ = 0$  (quindi  $dS = 0$ ) e la trasformazione è rappresentata da una *retta verticale*.

## TEORIA CINETICA DEI GAS

Vogliamo dare un'interpretazione microscopica a  $p, T, U, S$ .

### PRESSIONE

La pressione è data dagli *urti* delle particelle di gas contro le *pareti del contenitore* e, in figura, contro il *pistone*.



Consideriamo l'urto di una *singola particella* contro il pistone, assumendo che sia elastico.

Allora abbiamo le velocità  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$ , rispettivamente prima e dopo l'urto:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (v_x, v_y, v_z) \\ \vec{v}' &= (-v_x, v_y, v_z)\end{aligned}\tag{1}$$

Per cui l'*impulso assorbito* dal pistone è:

$$\vec{\mathcal{I}} = \Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = -2mv_x\vec{u}_x\tag{2}$$

Se l'intervallo medio fra un urto ed il successivo è  $\Delta t$ , la forza media esercitata da una *particella sul pistone* è data da:

$$\|\vec{F}_x\| = \frac{\|\Delta\vec{p}\|}{\Delta t}$$

Ma  $\Delta t = \frac{2\Delta x}{v_x}$ , per cui troviamo:

$$\|\vec{F}_x\| = \frac{mv_x^2}{\Delta x}\tag{3}$$

Per trovare la pressione sul pistone, dividiamo il risultato ottenuto per la superficie della parete:

$$p = \frac{mv_x^2}{\Delta x} \frac{1}{\Delta y \Delta z} = \frac{mv_x^2}{V} \quad (4)$$

Consideriamo ora  $n$  moli di molecole del gas, ovvero  $N = nN_A$  particelle.

La pressione totale sarà data dal contributo di ciascuna di esse:

$$p_{tot} = \sum_{j=1}^N \frac{mv_{x,j}^2}{V} = \frac{mN}{V} \sum_{j=1}^N \frac{v_{x,j}^2}{N} = \frac{mN}{V} \overline{v_x^2} \quad (5)$$

Dove  $\overline{v_x^2}$  è la media dei  $v_{x,j}^2$ .

A questo punto, per semplificare il risultato notiamo che:

$$\overline{E_K} = \sum_{j=1}^N \frac{\frac{1}{2} m \|\vec{v}_j\|^2}{N} = \frac{1}{2} m \sum_{j=1}^N \frac{v_{x,j}^2 + v_{y,j}^2 + v_{z,j}^2}{N} \quad (6)$$

Siccome *non esiste una direzione privilegiata*, ci aspettiamo che la velocità abbia la **stessa distribuzione** lungo le tre direzioni (**isotropia**), ovvero:

$$\sum_{j=1}^N \frac{v_{x,j}^2}{N} = \sum_{j=1}^N \frac{v_{y,j}^2}{N} = \sum_{j=1}^N \frac{v_{z,j}^2}{N} \quad (7)$$

Allora troviamo:

$$\overline{E_K} = \frac{1}{2} m \left( 3 \sum_{j=1}^N \frac{v_{x,j}^2}{N} \right) = \frac{3}{2} m \overline{v_x^2} \quad (8)$$

Per cui:

$$\overline{v_x^2} = \frac{2}{3} \frac{\overline{E_K}}{m} \quad (9)$$

E, sostituendo (9) in (5), concludiamo che:

$$p_{tot} = \frac{2N}{3V} \overline{E_K} \quad (10)$$

La pressione è quindi legata all'*energia cinetica media per unità di volume*.

## TEMPERATURA

Consideriamo un gas all'equilibrio, per cui vale quindi l'equazione di stato. Sostituendo la relazione ricavata per  $p_{tot}$  (10), troviamo:

$$\underbrace{p_{tot} V = \frac{2N}{3} \overline{E_K}}_{(10)} = nRT \quad (11)$$

Ricordando che  $N = nN_A$ :

$$\frac{2}{3} N_A \overline{E_K} = RT \quad (12)$$

Introduciamo a questo punto la **costante di Boltzmann**  $k_B$ :

$$k_B = \frac{R}{N_A} \quad (13)$$

### ⚠️ NOTA

$R$  era una costante *macroscopica*, mentre  $k_B$  è una costante *microscopica* che descrive singole particelle.

A questo punto troviamo:

$$T = \frac{2}{3} \frac{\overline{E_K}}{k_B} \quad (14)$$

Cioè anche la temperatura è legata all'energia cinetica media delle particelle che compongono il gas.

Considerando invece la relazione inversa:

$$\overline{E_K} = \frac{3}{2} k_B T \quad (15)$$

Notiamo che l'energia cinetica media del gas (e quindi la sua energia interna) dipende esclusivamente dalla temperatura:

$$U = \sum_{j=1}^N E_{K,j} = N \overline{E_K} = \frac{3}{2} N k_B T \quad (16)$$

## GRADI DI LIBERTA'

Ricordiamo la definizione di  $c_V$ :

$$c_V = \left. \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \right|_{V \text{ cost}} \quad (17)$$

Ma allora, derivando (16), otteniamo:

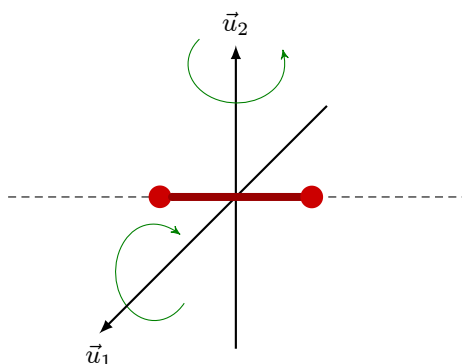
$$c_V = \frac{1}{n} \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} \cancel{n} \cancel{N_A} \frac{R}{\cancel{N_A}} = \frac{3}{2} R \quad (18)$$

Ma  $c_V = \frac{3}{2} R$  valeva per **gas monoatomici**, non in generale.

Per cui nel derivare (16) dobbiamo aver assunto, ad un certo punto, che il gas fosse monoatomico.

L'assunzione è stata fatta in (8), nel calcolo dell'energia cinetica media: abbiamo infatti considerato solo l'*energia cinetica di traslazione* e ignorato qualsiasi forma di *rotazione*, che è proprio il caso di un gas monoatomico.

Se il gas fosse stato biatomico potrebbe anche compiere un moto rotatorio che risulterebbe combinazione di rotazioni attorno a due assi di riferimento, come nella figura seguente:



### GRADI DI LIBERTA'

I gradi di libertà si riferiscono al numero di variabili indipendenti necessarie per descrivere completamente lo stato di un corpo. In altre parole, indicano quante coordinate o parametri sono necessari per definire la posizione e il movimento del corpo.

- Un gas *monoatomico* ha quindi **tre gradi di libertà**, perchè può muoversi liberamente lungo le *tre direzioni dello spazio* (e assumiamo che non ruoti perchè possiamo approssimare le sue particelle con un punto materiale).
- Un gas *biatomico*, invece, ha **cinque gradi di libertà**: tre di traslazione e due di rotazione.

E' possibile inoltre dimostrare che vale il seguente teorema:

### T. EQUIPARTIZIONE ENERGIA

L'energia è equamente distribuita fra i vari *gradi di libertà* di un sistema.

Nel caso di un gas *biatomico*, per esempio, si ha:

$$\frac{1}{2}m\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}m\overline{v_z^2} = \frac{1}{2}I_1\overline{\omega_1^2} = \frac{1}{2}I_2\overline{\omega_2^2} \quad (19)$$

In generale, per un gas con  $g$  gradi di libertà, troviamo:

$$\overline{E_K} = \frac{1}{2}g\overline{mv_x^2} \quad (20)$$

Da cui si ricava:

$$c_V = \frac{1}{2}gR \quad (21)$$

$$c_p = c_V + R = \frac{g+2}{2}R \quad (22)$$

E dal loro rapporto si trova che effettivamente:

- $\gamma = \frac{5}{3}$  per gas monoatomici ( $g = 3$ ).
- $\gamma = \frac{7}{5}$  per gas biatomici ( $g = 5$ ).

## ENTROPIA

Spesso l'entropia viene associata al "grado di disordine" di un sistema, ma questa è una semplificazione.

In realtà, l'entropia è una *misura del numero di stati microscopici* (ovvero delle configurazioni delle particelle) che risultano *accessibili* ad uno specifico stato macroscopico.

L'equazione di Boltzmann descrive tale relazione:

$$S = k_B \ln W \quad (23)$$

Dove  $W$  è il numero di stati accessibili al sistema, cioè il numero di configurazioni in cui esso può trovarsi.

## TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Sappiamo che:

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (24)$$

Se  $T \rightarrow 0$  ci aspetteremmo quindi che l'entropia aumenti notevolmente.

Contrariamente a ciò, in realtà, si ha:

### TERZO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

$$S \rightarrow 0 \text{ per } T \rightarrow 0 \quad (25)$$

Che è consistente con (23).

A temperature basse, infatti, *diminuisce il numero di stati accessibili al sistema*, per cui  $W$  diminuisce e così anche l'entropia.

Questo ci dice inoltre che  $dQ \rightarrow 0$  *più velocemente* di quanto non lo faccia  $T$ , cioè a *temperature particolarmente basse* risulta notevolmente difficile scambiare calore.