PROBLEMA OSCILLAZIONI

OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO E RISONANZA

Una massa m è appesa ad una molla di costante elastica k e lunghezza l_0.
La massa della molla è trascurabile. Si scomponga il moto lungo l'asse verticale (asse z) e si tratti il problema in una dimensione.

1 - TRASCURIAMO LA FORZA PESO

1.1 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA

Se la molla è ferma è a distanza l_0 dal soffitto: scegliamo allora tale quota per fissare $z = 0$. Con tale scelta troviamo:

$$F_{el} = -kz$$

Da cui ricaviamo:

$$ma = -kz$$

E quindi:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} z(t) \tag{1}$$

La cui soluzione è:

$$z(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{2}$$

Per determinare ω, sostituiamo (???) in (???):

$$\frac{d^2}{dt^2}(A\cos(\omega t + \phi)) = -\frac{k}{m} A\cos(\omega t + \phi)$$

$$-\omega^2 \cancel{A\cos(\omega t + \phi)} = -\frac{k}{m} \cancel{A\cos(\omega t + \phi)}$$

E concludiamo che

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

L'equazione (???) è un'EDO di secondo grado, quindi la soluzione più generale deve dipendere da due parametri che saranno determinati dalle condizioni iniziali: nel nostro caso A e ϕ.

1.2 DETERMINARE TALI PARAMETRI

Assumiamo che a $t = 0$ la posizione e velocità valgano rispettivamente z_0 e v_0.
Calcoliamo $v(t)$:

$$v(t) = \frac{dz(t)}{dt} - A\omega \sin(\omega t + \phi) \tag{4}$$

Ora imponiamo:

$$\begin{cases} v(0) = v_0 = -A\omega \sin(0 + \phi) \\ \\ z(0) = z_0 = A\cos(\phi) \end{cases}$$

Dal rapporto fra le due equazioni troviamo:

$$\frac{v_0}{z_0} = -\frac{A\omega \sin\phi}{A\cos\phi} = -\omega \tan\phi$$

Da cui

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega z_0} \tag{5}$$

Dalla prima equazione, invece:

$$A\sin\phi = -\frac{v_0}{\omega}$$

Sommiamo allora i quadrati delle due equazioni trovando:

$$A^2 \cancelto{1}{(\sin^2\phi + \cos^2\phi)} = \frac{v_0^2}{\omega^2} + z_0^2$$

E allora:

$$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + z_0^2} \tag{6}$$

> ⚠ **NOTA**
>
> In (???) avremmo potuto scegliere anche $\omega' = -\sqrt{\frac{k}{m}}$, il che avrebbe semplicemente portato a trovare un valore diverso di ϕ, che in ogni caso è arbitrario e dipende dalle condizioni al contorno.

2 - CONSIDERIAMO LA FORZA PESO

Sia l_r la lunghezza di riposo della molla nella posizione verticale, cioè la lunghezza tale per cui la risultante delle forze è nulla.

2.1 DETERMINARE LA LUNGHEZZA DI RIPOSO

L'equazione associata al problema è:

$$ma = -kz - mg \tag{7}$$

Siccome a riposo la forza sulla molla è nulla, eguagliamo (???) a 0 e troviamo:

$$z_{rip} = -\frac{m}{k}g \tag{8}$$

Il valore trovato è negativo, infatti la forza peso abbassa la posizione di riposo.
Siccome avevamo fissato $z = 0$ a distanza l_0 dal soffitto, avremo:

$$l_r = l_0 + |z_{rip}| = l_0 + \frac{m}{k}g \tag{9}$$

2.2 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA IN QUESTO CASO

Da (???) troviamo l'equazione differenziale seguente:

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) + \frac{k}{m}z(t) = -g \tag{10}$$

Sappiamo che la soluzione di un'EDO non omogenea è data dalla soluzione dell'omogena associata, a cui dobbiamo sommare una soluzione particolare del caso non omogeneo.
L'equazione omogenea associata, in questo caso, ha la stessa forma di (???), per cui la soluzione sarà analoga.
Una soluzione particolare, invece, è data dal caso in cui la molla è ferma nella posizione di riposo:

$$z_\star(t) = z_{rip} \tag{11}$$

Notiamo infatti che (???) soddisfa (???).
Allora la soluzione al problema è:

$$z(t) = z_{rip} + A\cos(\omega t + \phi) \tag{12}$$

Che possiamo riscrivere come:

$$z(t) - z_{rip} = A\cos(\omega t + \phi) \tag{13}$$

Definiamo $\bar{z}(t) = z(t) - z_{rip}$ e troviamo:

$$\bar{z}(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{14}$$

Notiamo che le equazioni (???) e (???) hanno la stessa forma e differiscono solamente per la posizione di riposo, che è stata spostata dall'azione della forza peso.
Da qui in avanti lavoreremo quindi con il sistema di riferimento $\bar{z}$ in cui $\bar{z} = 0$ corrisponde a $z = z_{rip}$.

3 - CONSIDERIAMO L'ATTRTITO VISCOSO

Consideriamo ora anche una forza di attrito viscoso che agisce sulla massa, con coefficiente d'attrito b.

3.1 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA

In questo caso abbiamo, ricordando che stiamo usando z_{rip} come posizione $z = 0$:

$$F_{TOT} = ma = -kz - bv \tag{15}$$

E otteniamo l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dz(t)}{dt} + \frac{k}{m}z(t) = 0 \tag{16}$$

Chiamiamo $\gamma = \frac{b}{2m}$ e ricordiamo che $\frac{k}{m} = \omega^2$. Allora l'equazione diventa:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = 0 \tag{17}$$

Proviamo una soluzione del tipo $z(t) = Ae^{\lambda t}$. Sostituendo in (???) e con un po' di algebra troviamo:

$$Ae^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2) = 0 \tag{18}$$

Una soluzione banale è data da $A = 0$.
Una soluzione non banale è data da $\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0$.
Le soluzioni a tale equazione di secondo grado in λ sono:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$$

Allora la soluzione più generale sarà del tipo

$$z(t) = Be^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} + Ce^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})t} \tag{19}$$

Che anche in questo caso dipende da due parametri, in quanto soluzione a un'EDO di secondo grado.

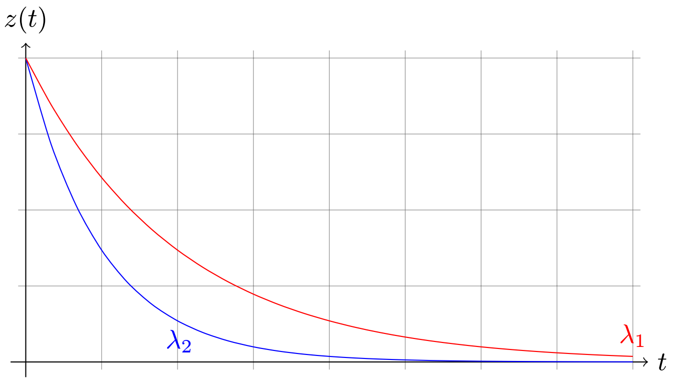
> ⚠ **NOTA**
>
> Può essere $\gamma^2 - \omega^2 < 0$ cioè $\frac{b^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$. Ciò avviene se la forza d'attrito è molto piccola rispetto a quella elastica. In tal caso, λ_1 e λ_2 sarebbero complessi, e dovremmo imporre che la soluzione sia complessivamente reale.

3.1.1 CASO $\gamma > \omega$ (FORTE SMORZAMENTO)

In tal caso abbiamo:

- $\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$

- $\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} < 0$
  E complessivamente $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.



Nel grafico assumiamo $B = C$ per semplicità, ma tali parametri dipendono dalle condizioni iniziali z_0 e v_0:

$$\begin{cases} z_0 = B + C \\ v_0 = \lambda_1 B + \lambda_2 C \end{cases}$$

3.1.2 CASO $\gamma < \omega$ (OSCILLAZIONI SMORZATE)

Siamo nel caso della nota.
Abbiamo:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|}$$

Allora (???) diventa:

$$z(t) = Be^{(-\gamma + i\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|})t} + Ce^{(-\gamma - i\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|})t} \tag{20}$$

Che possiamo scrivere come:

$$z(t) = e^{-\gamma t}\left(Be^{i\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}t} + Ce^{-i\sqrt{|\gamma^2-\omega^2|}t}\right) \tag{21}$$

Dato che la soluzione è complessa, anche B e C sono complessi.
Diciamo: $B = x + iy$ e $C = r + iw$ con $x, y, r, w \in \mathbb{R}$.
Chiaramente deve essere $z(t) \in \mathbb{R}\ \forall t$. Dobbiamo allora imporre che $z(t)$ sia uguale al suo coniugato:

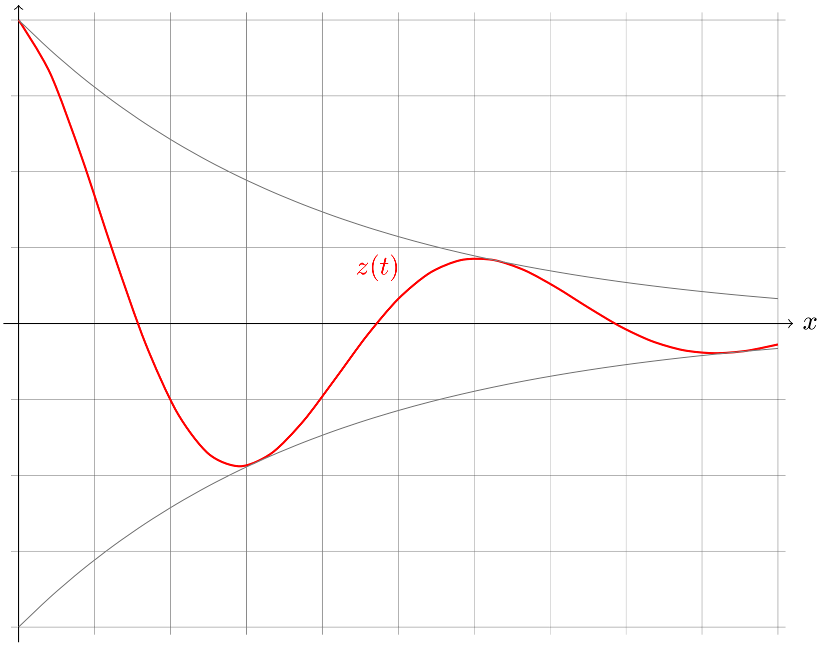
$$\bar{z}(t) = e^{-\gamma t}\left((x - iy)e^{-i\sqrt{\dots}t} + (r - iw)e^{i\sqrt{\dots}t}\right) \tag{22}$$

Eguagliando quindi (???) e (???) troviamo $x = r$ e $y = -w$ e, con alcuni passaggi algebrici, arriviamo alla forma:

$$z(t) = 2A\underbrace{\left(\frac{e^{i\sqrt{\dots}t} + e^{-i\sqrt{\dots}t}}{2}\right)}_{=\cos(\dots)} + 2B\underbrace{\left(\frac{e^{-i\sqrt{\dots}t} - e^{i\sqrt{\dots}t}}{2i}\right)}_{=-\sin(\dots)} \tag{23}$$

Che, in quanto combinazione lineare di $\sin$ e $\cos$, può essere riscritta nella forma:

$$z(t) = e^{-\gamma t} A \cos(\sqrt{|\gamma^2 - \omega^2|} t + \phi) \tag{24}$$



4 - FORZA PERIODICA ESTERNA

RISONANZA

Si può verificare quando un corpo *elastico* è soggetto a una forza periodica che amplifica le vibrazioni "naturali" del corpo stesso.

4.1 DETERMINARE LA LEGGE ORARIA

Assumiamo che sul sistema agisca una forza esterna periodica diretta lungo l'asse z e della forma:

$$F_{ext} = F_0 \sin(\Omega t)$$

L'equazione omogenea (???) diventa:

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dz(t)}{dt} + \omega^2 z(t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \tag{25}$$

Ancora una volta, sappiamo che la soluzione a tale equazione sarà data dalla somma della soluzione all'equazione omogenea associata (che è proprio (???)) e di una soluzione particolare.
Non ci resta che determinare quest'ultima.
Proviamo con una del tipo:

$$z(t) = K \sin(\Omega t + \phi) \tag{26}$$

Sostituendo in (???) troviamo:

$$
\begin{gathered}
\sin(\Omega t)\underbrace{\left(-K\Omega^2\cos\phi+\omega^2K\cos\phi-2\gamma K\Omega\sin\phi-\frac{F_0}{m}\right)}_{=A}+ \\
+\cos(\Omega t)\underbrace{\left(-K\Omega^2\sin\phi+\omega^2K\sin\phi+2\gamma K\Omega\cos\phi\right)}_{=B}=0
\end{gathered}
\tag{27}
$$

E tale equazione deve valere $\forall t$.
In particolare, notiamo che:

- Per $t=0$ si ha $B=0$
- Per $t=\frac{\pi}{2\Omega}$ si ha $A=0$

Otteniamo così delle equazioni più semplici su cui lavorare.
Alla fine troviamo:

$$
\tan\phi=-\frac{2\gamma\Omega}{\omega^2-\Omega^2} \tag{28}
$$

E

$$
K=\frac{F_0}{m}\sqrt{\frac{1}{(\omega^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}} \tag{29}
$$

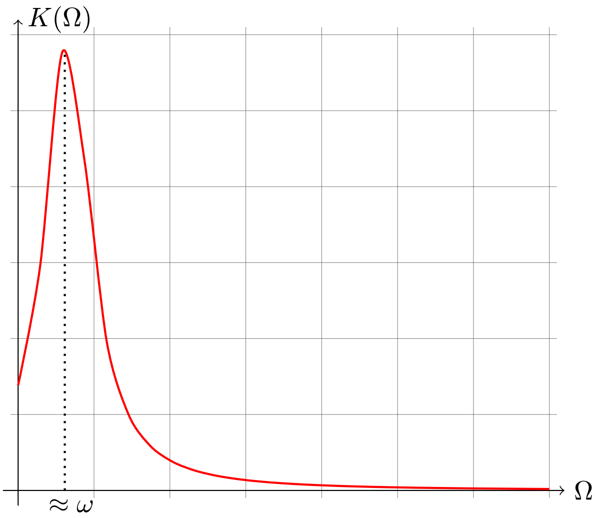
La soluzione più generale al problema allora è:

$$
z(t)=K\sin(\Omega t+\phi)+\underbrace{Be^{\lambda_1 t}+Ce^{\lambda_2 t}}_{\text{caso omogeneo}} \tag{30}
$$

4.2 RISONANZA

> ⚠ **NOTA**
>
> Per $\gamma t\gg 1$ si ha $|Be^{\lambda_1 t}+Ce^{\lambda_2 t}|\ll 1$ perchè esponenziale decrescente in entrambi i casi visti.
> Per cui, per $t\to\infty$ si ha $z(t)\approx K\sin(\Omega t+\phi)$.

Ma K **non** dipende dalle condizioni iniziali: dipende solo da Ω e ω (proporzionali alle frequenze di vibrazione del corpo e della forza esterna), F_0 (ampiezza delle oscillazioni della forza esterna), e γ ed m (parametri "intrinsechi" della molla).



Ma γ è molto piccolo, per cui possiamo dire:

$$K \approx \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \Omega^2} \tag{31}$$

Che ci permette di intuire che il picco evidenziato nel grafico si verifica per $\Omega \approx \omega$. Per trovare il valore esatto di Ω per cui K assume valore massimo, deriviamo (???) rispetto a Ω:

$$\frac{dK}{d\Omega} = \frac{2F_0}{m} \frac{\Omega(\omega^2 - 2\gamma^2 - \Omega^2)}{((\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2)^{3/2}} \tag{32}$$

Imponendo che questa sia uguale a 0 troviamo:

- $\Omega = 0$, caso banale per cui la forza esterna è costante.
- $\Omega^2 = \omega^2 - 2\gamma^2$, che per γ piccolo coincide con la stima derivante da (???).

Abbiamo quindi la frequenza di risonanza:

$$\Omega_{ris} = \sqrt{\omega^2 - 2\gamma^2} \tag{33}$$

Per cui si ha la massima ampiezza delle oscillazioni, dovuta proprio alla risonanza:

$$K_{ris} = \frac{F_0}{2m\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \tag{34}$$

Tornando a (???) e sostituendo il valore di Ω_{ris} troviamo:

$$\tan \phi_{ris} = -\frac{2\gamma\Omega}{2\gamma^2} = -\frac{\Omega}{\gamma} \tag{35}$$

Ma essendo $\gamma \ll \Omega$, si ha $\tan \phi_{ris} \to \infty$ e:

$$\phi_{ris} \approx \frac{\pi}{2} \tag{36}$$

Ciò significa che, nella situazione di risonanza, vi è uno *sfasamento* di 90° tra la *forza esterna* e l'*oscillazione del corpo* (*quadratura di fase*).

Ma anche lo sfasamento tra l'oscillazione e la *velocità della molla* è di 90° (essendo $v(t) = \frac{d}{dt}z(t)$ ed essendo $z(t)$ sinusoidale).
Per cui **velocità della molla** e **forza esterna** sono **in fase**, e questo fa si che la forza esterna "spinga" la molla esattamente quando questa si sta muovendo nella stessa direzione, amplificandone le oscillazioni.