Math the magic happen

Lorenzo Barban e Carlotta Vielmo

Università degli Studi di Trento

11 Giugno 2018

Esp card Trick

Le congruenze

Ad esempio, prendiamo **12** e **5**.
Sappiamo *non* essere multipli... Possiamo tuttavia renderli *uguali*!

$$\mathbf{12 = 1 \times 7 + 5}$$

Diciamo quindi che **12 è congruo a 5 modulo 7**.

Se invece consideriamo **15** e **6**, possiamo scrivere

$$15 = 9 \times 1 + 6$$

Quindi **15 è congruo a 6 modulo 9**.

In matematica troviamo una proposizione molto utile

Proposizione

a^p è congruo ad a modulo p.

Esempio

2048 è congruo a 2 modulo 11, se applichiamo la proposizione con $a = 2$ e $p = 11$; difatti $2^{11} = 2048$.

Iniziamo ora a studiare la matematica che sta sotto all'effetto appena visto.

Per semplicità, identifichiamo

$$\bigcirc = 1$$
$$+ = 2$$
$$\int\!\!\int\!\!\int = 3$$
$$\square = 4$$
$$\bigstar = 5$$

Il numero inizia con le carte disposte nella sequenza

1 2 3 4 5 1 2 3 4 5

posti nelle rispettive posizioni

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Notiamo che $\bigcirc$ è alla posizione 1 e 6, $+$ alla posizione 2 e 7, ...
Ogni simbolo si trova alla posizione k e $k + 5$.

Ora il mago mescola il mazzetto.

...ALT! Lo mescola davvero?

NO! O meglio, non proprio.

Semplicemente *taglia*, ovvero prende una porzione del mazzetto e lo mette sotto.
Le carte saranno in posizione diversa rispetto a prima, *ma saranno semplicemente traslate*:

$$\bigcirc = 1 \rightarrow 1 + t$$
$$+ = 2 \rightarrow 2 + t$$
$$\iiint = 3 \rightarrow 3 + t$$
$$\square = 4 \rightarrow 4 + t$$
$$\bigstar = 5 \rightarrow 5 + t$$

Esempio

Supponiamo di ottenere la sequenza

3 4 5 1 2 3 4 5 1 2

con i simboli nelle nuove posizioni

$$\iiint \to 1,\ 6$$
$$\square \to 2,\ 7$$
$$\star \to 3,\ 8$$
$$\bigcirc \to 4,\ 9$$
$$+ \to 5,\ 10$$

Le carte uguali saranno in posizioni uguali modulo 5, nonostante il taglio del mazzo!

Alla fine del numero ogni coppia di carte ha lo stesso simbolo

E' necessario che, nonostante i vari tagli,
entrambi i mazzi abbiano 5 carte con tutti i simboli diversi.

Chi ci assicura che questo funzioni sempre?

Di nuovo le **congruenze**!

Infatti, se dopo i vari tagli la sequenza è, ad esempio

3 4 5 1 2 3 4 5 1 2

e la spezziamo in due parti uguali

3 4 5 1 2 3 4 5 1 2

Ogni mazzo ha tutti i simboli diversi come voluto! Questo funziona proprio perché, ad esempio, $\square$ è alla posizione 3 e 8, quindi *prima di incontrare la carta uguale, ce ne sono proprio 5 di mezzo, perché 6 è congruo a 1 modulo 5.*

Principio di Gilbreath

Cosa dice il principio di Gilbreath?

Intuitivamente, se partiamo con un mazzo opportunamente ordinato, mescolandolo verranno mantenute determinate proprietà, in particolare verrà mantenuto un ordinamento molto simile a quello iniziale.

Esempio

Facciamo un esempio considerando come proprietà del mazzo l'alternanza di una carta nera e una carta rossa.

Partiamo col mazzo alternato e dividiamolo in due, usando la tecnica del *miscuglio di Gilbreath*, che spiegheremo fra poco.
Per il *principio di Gilbreath*, il mazzo avrà quindi la stessa proprietà iniziale: ogni due carte ci sarà una carta rossa e una carta nera.

Per passare ad una trattazione rigorosa, dobbiamo prima spiegare cosa sono un *miscuglio di Gilbreath*, una *permutazione* e una *permutazione di Gilbreath*.

Definizione

Un *miscuglio di Gilbreath* consiste nei due passi seguenti:

1) Dividere un mazzo in due senza tagliarlo a metà, bensì prendendo una carta per volta dalla cima del mazzo e mettendola sopra alla nuova pila di carte che stiamo creando.
2) Mescolare il mazzetto creato con il mazzo iniziale.

Definizione

Dati n oggetti distinti, si chiama *permutazione* ogni modo di riordinare questi n oggetti.

Esempio:

Date 3 carte A, 2, 3, le loro permutazioni sono 6: $A23$, $A32$, $2A3$, $23A$, $3A2$, $32A$.

Definizione

Una *permutazione di Gilbreath* è una permutazione dei numeri da 1 ad n, che possono essere ottenuti attraverso il miscuglio di Gilbreath con un mazzo in cui le carte sono ordinate da 1 a n.

Vediamo con un esempio pratico cosa intendiamo.

Esempio

Prendiamo le carte ordinate

$$A \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

Usiamo il miscuglio di Gilbreath e disponiamo le carte a faccia in alto sul tavolo. Supponiamo di aver ottenuto la sequenza

$$6 \quad 5 \quad 7 \quad 4 \quad 3 \quad 8 \quad 9 \quad 2 \quad A$$

Questa è una permutazione di Gilbreath perché tutti i sottoinsiemi di questa sequenza, iniziando da quello contenente solo il 6 e allargandolo verso destra, contengono numeri consecutivi (non necessariamente in ordine)

6   6 5   6 5 7   6 5 7 4   (e via dicendo)

Esempio

Facciamo un esempio considerando come proprietà del mazzo l'alternanza di una carta nera e una carta rossa.

Partiamo col mazzo alternato e dividiamolo in due, usando la tecnica del *miscuglio di Gilbreath*. Per il *principio di Gilbreath*, il mazzo avrà quindi la stessa proprietà iniziale: ogni due carte ci sarà una carta rossa e una carta nera.

Per i più temerari

Enunciamo in modo formale la versione estesa dell'*ultimo principio di Gilbreath*.

Teorema

Per una permutazione π *di* $\{1, 2, 3, \ldots, N\}$, *le seguenti quattro proprietà sono equivalenti:*

- π *è una permutazione di Gilbreath.*
- *Per ogni* $j \in \{1, ..., N\}$, *le prime* j *carte* $\{\pi(1), \pi(2), \pi(3), \ldots, \pi(N)\}$ *sono distinte modulo* j.
- *Per ogni* $j, k \in \{1, ..., N\}$ *con* $kj \leqslant N$, *le* j *carte* $\{\pi((k-1)j+1), \pi((k-1)j+2), \ldots, \pi(kj)\}$ *sono distinti modulo* j.
- *Per ogni* $j \in \{1, ..., N\}$, *le prime* j *carte sono consecutive in* $1, 2, 3, \ldots, N$.

Ora è il vostro turno!

Che proprietà avrà usato Lorenzo nel suo mazzo per sfruttare il principio di Gilbreath e ottenere alla fine esattamente 24 carte girate, di cui 11 rosse, di cui 5 di quadri, 5 numeriche di cuori e il re di cuori?

Pensateci e, se vi viene in mente, fatecelo sapere!

5 Cards Trick by Michael Kleber

Mescoliamo il mazzo, scegliamo 5 carte *a caso*
e Marta saprà sempre indovinare l'ultima carta rimanente!

...casualità? Ne siamo sicuri?

Le carte che vengono passate in ordine da Alessandro a Marta sono dei piccoli messaggi in codice e tutto si basa sull'*ordine* con cui le carte vengono passate tra i due maghi.

In quanti modi possiamo distruibire 4 carte?

Contiamoli!

Prima carta → 4 modi diversi.
Seconda carta → 3 modi diversi.
Terza carta → 2 due modi diversi.
Quarta carta → un unico modo.

In termini numerici, abbiamo

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

modi diversi di dare le carte a Marta, ovvero 24 *possibili messaggi.*

Abbiamo un solo modo corretto fra i 24 possibili per far indovinare a Marta l'unica carta che alla fine rimarrà in mano ad Alessandro.

Come scoprire il seme?

Sfruttiamo il principio dei cassetti (*Pigeonhole Principle*)

Pigeonhole Principle

Se $n+k$, con $k>0$, oggetti sono messi in n cassetti, allora almeno un cassetto deve contenere più di un oggetto.

Esempio

Supponiamo che 5 amici vogliano partecipare ad un torneo di pallavolo,
a cui sono ammesse 4 squadre.
Supponiamo che i 5 amici vogliano giocare in squadre diverse.

Questo non è possibile!

Infatti, per il *principio dei cassetti* è impossibile suddividerli tra le varie squadre,
ne troveremo per forza una con due amici.

Perché ci è utile il *principo dei cassetti*?

Prendendo 5 carte qualsiasi, sicuramente almeno 2 avranno lo stesso seme.
Alessandro vede le 5 carte scelte dallo spettatore, invidua le 2 carte con lo *stesso seme* e passa una delle due a Marta. Quella che tiene in mano sarà quella da indovinare.

Quindi, appena Marta riceverà la prima carta, saprà subito il **seme** di quella finale.

Come scoprire il valore?

Ci rimangono 3 carte. Vediamo la disposizione corretta.

- Ordiniamole in ordine crescente e associamo ad ognuna due possibili valori: alla più bassa +1 e +2, a quella intermedia +3 e +4, alla più alta +5 e +6. *Consegniamo la carta che contiene il valore della distanza fra la prima data e quella da indovinare*, così Marta sarà indecisa soltanto fra due carte. Ad esempio, se le consegniamo la carta intermedia, Marta saprà che dovrà aggiungere +3 o +4 al valore della prima carta consegnata.

- Ci rimangono due carte da consegnare. Abbiamo due modi possibili di consegnarle. *Se diamo come prima carta quella di valore più alto, allora Marta capirà di dover sommare alla carta scelta il primo dei due valori* (ovvero $1, 3, 5$).
  Se invece passa la carta di valore più basso, allora Marta sommerà uno tra i secondi valori (ovvero $2, 4, 6$).

In questo modo, nel momento in cui avrà tutte e 3 le carte in mano,
Marta riuscirà a scoprire l'esatto valore della carta!

Esempio

Supponiamo di avere

$7\spadesuit \quad 3\spadesuit \quad 2\diamondsuit \quad 5\heartsuit \quad 8\clubsuit$

Alessandro consegna

1) per prima carta $3\spadesuit$ $\longrightarrow$ Marta sa che la carta è $\spadesuit$
2) per seconda carta $5\heartsuit$
3) per terza carta $8\clubsuit$
4) per quarta carta $2\diamondsuit$

Nel momento in cui Marta riceve le ultime tre carte,
capisce che $5\heartsuit$ è quella intermedia
e quindi aggiunge $+3$ o $+4$ a $3\spadesuit$. Ora sa che la carta è o $6\spadesuit$ o $7\spadesuit$.
Riceve $8\clubsuit$ (che è maggiore di $2\diamondsuit$) e capisce che la carta è $7\spadesuit$.

Problema!

Dalla nostra spiegazione emergono due problemi. Come li risolvereste?

1) Come fare se le due carte dello stesso seme distano più di 6?
(Un piccolo suggerimento: fate riferimento alla matematica spiegata nei precenti effetti).
2) Come fare per ordinare le ultime tre carte se dovessero essere dello stesso valore ma di semi differenti?
(Esempio: $8\diamondsuit \quad 8\clubsuit \quad 8\heartsuit$).

Problema!

Dalla nostra spiegazione emergono due (anzi, tre) problemi. Come li risolvereste?

1) Come fare se le due carte dello stesso seme distano più di 6?
(Un piccolo suggerimento: fate riferimento alla matematica spiegata nei precenti effetti).
2) Come fare per ordinare le ultime tre carte se dovessero essere dello stesso valore ma di semi differenti?
(Esempio: $8\diamondsuit$ $8\clubsuit$ $8\heartsuit$).
3) La parte reale di ogni radice non banale di $\zeta(s)$ (zeta di Riemann) è sempre $\frac{1}{2}$?

(In particolare, nel caso risolveste l'ultimo, fatelo sapere prima a noi, mi raccomando ;))

Le sequenze di De Bruijn

Come si svolge l'effetto?

Il mago parte con un mazzo opportunamente ordinato.

I 5 spettatori tagliano ripetutamente il mazzo.

Uno per uno ogni spettatore sceglie una carta.

Il mago è in grado di indovinare *tutte* e 5 le carte, servendosi di poche domande.

A livello pratico

La domanda veramente rilevante è:
Quanti hanno visto una carta rossa?

A livello pratico

Quanti hanno visto una carta rossa?

Consideriamo

0 = *carta nera*

1 = *carta rossa*

e scriviamo una sequenza di 0 e 1 a seconda delle risposte che sentiamo. Ad esempio se sentiamo *rossa, nera, rossa, rossa, nera* scriviamo

1 0 1 1 0

Come indovinare la *prima* carta dalla sequenza di numeri che abbiamo ottenuto?

Usiamo questa legenda per il *seme*:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 1 & \rightarrow & \heartsuit \\
1 & 0 & \rightarrow & \diamondsuit \\
0 & 1 & \rightarrow & \spadesuit \\
0 & 0 & \rightarrow & \clubsuit
\end{array}
$$

La sequenza che avevamo considerato come esempio era 1 0 1 1 0, quindi il nostro seme sarà $\diamondsuit$.

Usiamo il codice binario per il *valore*:

Il numero 1 1 0 è scritto in codice binario, cioè usando solamente le cifre 0 e 1. Possiamo scriverlo usando le cifre da 1 a 8 come

$$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 6$$

La nostra *prima* carta sarà il $6\diamondsuit$.

Come indovinare le *successive* carte?

Dalla prima sequenza di numeri otteniamo la sequenza per la seconda carta

dove $(1+1)_2$ significa scrivere:

0 quando otteniamo 2 oppure 0
1 quando otteniamo 1

A questo punto abbiamo le prime due sequenze, che vengono lette col metodo spiegato prima.

$$1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \rightarrow \quad 6\diamondsuit$$

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \rightarrow \quad 4\spadesuit$$

Lo stesso metodo si applica alle rimanenti 3 carte.

Perché funziona?

Che cosa ci assicura che queste sequenze di 0 e 1 ci diano esattamente quelle carte?

Le sequenze di *De Bruijn*

Definizione

Una *sequenza di De Bruijn di ordine* k è una successione di lunghezza 2^k di 0 e 1 tale che ogni sottoinsieme di k cifre compare una volta sola.

Esempio

Se $k = 2$, la sequenza

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

è di De Bruijn, perchè i sottoinsiemi sono 01, 11, 10 e sono tutti diversi tra loro.

La sequenza

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

non è di De Bruijn poichè i sottoinsiemi 01, 11, 11 non sono tutti diversi.

In particolare, siamo sicuri che se 0110 va bene, anche 1100, 1001, 0011 vanno bene.

Sorgono spontanee due domande:

- Esistono *sempre* delle sequenze di de Bruijn per ogni k? Se sì, come le costruiamo?
- Come mai queste sequenze sono importanti per l'effetto?

Esistono *sempre* delle sequenze di de Bruijn per ogni k?

Sì, Le sequenze di de Bruijn esistono sempre.
Non solo, possiamo anche sapere quante sono per ogni valore di k

$$2^{2^{k-1}-k}$$

Sfortunatamente però questo risultato non ci dà nessuna indicazione su *come* costruirle.

Come mai queste sequenze sono importanti per l'effetto?

Il nostro scopo è trovare un modo per associare ad ogni carta del mazzo un'unica sequenza (ad esempio 10110) che ci permetta di identificare non solo la prima carta, ma anche le successive, sfruttando la domanda "Quante carte rosse ci sono?".

Le sequenze di *De Bruijn* fanno al caso nostro!

Applichiamo la definizione di sequenza di *De Bruijn* con $k = 5$:

Una *sequenza di de Bruijn di ordine* 5 è una successione di lunghezza $2^5 = 32$ di 0 e 1 tale che ogni sottoinsieme di 5 cifre compare una volta sola

Il mago usa un mazzo di 32 carte (4 semi, 8 carte per ogni seme)
ed è sicuro di poterle ordinare (considerando solo il colore)
in modo che l'intero mazzo sia una sequenza di *De Bruijn* di carte rosse (1) e nere (0).

Quindi, per definizione di sequenza di *De Bruijn*, è sicuro che ad ogni carta corrispondano esattamente 5 cifre *uniche* ("ogni sottoinsieme di 5 cifre compare una volta sola").

Come procedere?

A questo punto il mazzo è diventato una sequenza di 0 e 1.
Vengono prese 5 carte consecutive e ci viene detto quante (in ordine) sono rosse.

Non ci resta che definire la chiave di lettura che avevamo dato inizialmente.

Per le prime due cifre definiamo

$$1 \quad 1 \quad \rightarrow \quad \heartsuit$$

$$1 \quad 0 \quad \rightarrow \quad \diamondsuit$$

$$0 \quad 1 \quad \rightarrow \quad \spadesuit$$

$$0 \quad 0 \quad \rightarrow \quad \clubsuit$$

da cui otteniamo il seme.

Per le successive cifre decidiamo di leggerle come se fossero scritte in codice binario, cioè 0 e 1, e otteniamo il valore della carta.

Una volta stabilita la carta da cui partire, il gioco è fatto!
Noi per semplicità abbiamo posto
0 0 0 0 0 → 8♣

Abbiamo costruito il nostro mazzo e ora, qualsiasi gruppo di 5 carte consecutive scegliamo, siamo sicuri di poterle indovinare solamente chiedendo:

"Quante carte rosse sono presenti?"

Homework!

Questo numero non necessita di un mazzo per essere impostato,
ma solo dei buoni vecchi *CARTA e PENNA!* (E un po' di pazienza)
Potete provare voi stessi ad impostare un mazzo in questo modo,
magari anche più grande, per riuscire ad indovinare anche più di 5 carte!

Per chi preferisse il computer anziché carta e penna, vi suggeriamo di provare ad implementare un programma che vi restituisca esattamente il valore e il seme delle 5 (o più) carte che volete indovinare, dando come input il numero di carte rosse presenti.