Matematica Discreta esami

esame febbraio 2025

Quiz

V1

Domanda 1. Siano $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{1, 4, 5, 8, 9\}$. Allora

1. $6 \in A \cup B$
2. $\{3, 4\} \in A \cup B$
3. $\{2, 8\} \subset A \cap B$
4. $\{5, 9\} = A \cap B$ **(E)**
5. $9 \subset A \cap B$

1. è sbagliata perchè il numero 6 non appare nell'unione
2. ci chiediamo se l'elemento {3,4} appartiene all'unione ovviamente no
3. l'insieme {2,8} non è contenuto nell'intersezione
4. vera 5 e 9 sono gli unici elementi presenti in entrambi gli insiemi
5. non si usa il simbolo di contenuto con singoli elementi

Domanda 2. Sia $S = \{a, c, f, h, m, t, v\}$. Quali delle seguenti è una partizione di S?

1. $\{m\} \cup \{a, c, t\} \cup \{f, h, v\}$ **(E)**
2. $\{f, m\} \cup \{a, t\} \cup \{c, v\}$
3. $\emptyset \cup \{a, f, h, m\} \cup \{c, t, v\}$
4. $\{a, c\} \cup \{c, f, h, m\} \cup \{t, v\}$
5. $\{a, h, m\} \cup \{h, t\} \cup \{c, f\}$

Una partizione di un insieme deve soddisfare tre condizioni:

Ogni sottoinsieme è non vuoto.
Gli insiemi sono disgiunti a due a due (cioè non hanno elementi in comune).
L'unione di tutti i sottoinsiemi è uguale a S.

1. vera
2. manca h
3. l'insieme vuoto non è mai partizione
4. ci sono 2 c

5. ci sono 2 h

Domanda 3. Siano $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ le funzioni $f(n) = 2n + 1$ e $g(n) = 3 - n$. Allora

1. $f \circ g(n) = 7 - 2n$ **(E)**
2. $f \circ g(n) = 5 - 2n$
3. $f \circ g(n) = 7 - n$
4. $g \circ f(n) = 4 - n$
5. $g \circ f(n) = 6 - 2n$

Analizziamo la **composizione di funzioni**. Abbiamo due funzioni:

- f(n)=2n+1
- g(n)=3−n

  Vogliamo calcolare:

- (f∘g)(n) = f(g(n))
- (g∘f)(n)= g(f(n))

molto facilmente ci calcoliamo entrambi

f(g(n)) = f(3-n) -> 2(3-n) +1 -> 6-2n+1 -> 7-2n
g(f(n)) =g(2n+1) ->3-(2n+1) -> 3-2n-1 -> -2n+2

e notiamo che la risposta giusta è la 1

Domanda 4. Dall'insieme $\{1, 2, 3, \ldots, 15, 16\}$ vogliamo scegliere 2 numeri pari e 3 numeri dispari. Quante scelte possibili ci sono?

1. $\binom{16}{5}$
2. 16^5
3. $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{3}$ **(E)**
4. $\binom{16}{2} \cdot \binom{16}{3}$
5. $8^2 \cdot 8^3$

abbiamo 16 numeri quindi 8 pari e 8 dispari quindi le combinazioni saranno 8/2! per i pari e 8/3! per i dispari la risposta corretta è la 3

Domanda 5. Sia $\pi = (3\ 7)(2\ 4\ 1\ 6) \in S_7$. Allora $\pi^7(4) =$

1. 4
2. 2 **(E)**
3. 1
4. 6
5. 7

riscriviamo il ciclo in π^7
(3 7) (2 6 1 4) il successivo di 4 è 2

Domanda 6. Sia $\pi \in S_{10}$ una permutazione di tipo $(5,3,2)$. Allora π^3 ha tipo

1. $(3,3,2)$
2. $(5,3)$
3. $(5,2)$ **(E)**
4. $(5,3,2)$
5. $(3,2)$

abbiamo un ciclo di tipo (5,3,2) quindi il ciclo 5 rimarrà invariato il ciclo 3 sarà identità quindi scompare il ciclo 2 rimane invariato quindi la risposta è la 3) (5,2)

Domanda 7. Il numero scritto in notazione binaria (base 2) 1010111 è

1. 79
2. 87 **(E)**
3. 101
4. 103
5. 105

eleviamo ad esponenti di 2 crescenti quindi avremo (1+2+4+0+16+0+64)=67

Domanda 8. Quale delle seguenti congruenze **non** ha soluzione?

1. $27X \equiv 18 \bmod 45$
2. $35X \equiv 10 \bmod 45$
3. $16X \equiv 15 \bmod 45$
4. $22X \equiv 30 \bmod 45$
5. $21X \equiv 16 \bmod 45$ **(E)**

mcm di (a,c)/b (a= 27x , b= 18 c= 45)

1. mcm(27,45) = 9 9/18 quindi ha soluzione
2. mcm(35,45)= 5 5/45 quindi ha soluzione
3. mcm (16,45)= 1 1/15 quindi ha soluzione
4. mcm(22,45)= 1 1/30 quindi ha soluzione
5. mcm(21,45)=3 3 non è divisore di 16 quindi non ha soluzione

Domanda 9. Quanti sono i generatori del gruppo $(\mathbb{Z}_{117}, +)$?

1. 54
2. 66
3. 70
4. 72 **(E)**
5. 82

✅ Step 2: Calcoliamo $\varphi(117)$

Fattorizziamo:

$$117 = 3 \times 3 \times 13 = 3^2 \cdot 13$$

Usiamo la formula di Eulero:

$$\varphi(117) = 117 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{13}\right) = 117 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{13}$$

Calcolo:

$$117 \cdot \frac{2}{3} = 78 \quad \text{e} \quad 78 \cdot \frac{12}{13} = \frac{936}{13} = 72$$

Domanda 10. Di una certa classe $\overline{x} \in \mathbb{Z}_{19}$ sappiamo che $\overline{x}^2 = \overline{6}$ e $\overline{x}^3 = \overline{8}$. Allora $\overline{x} =$

1. $\overline{3}$
2. $\overline{7}$
3. $\overline{14}$ **(E)**
4. $\overline{5}$
5. $\overline{12}$

dobbiamo trovare:

$$x^2 \equiv 6$$

e

$$x^3 \equiv 8$$

andiamo a tentativi esempio 14:

calcoliamo 14 x 14 / 19 = 10 con resto

ora calcoliamo il resto 10x19= 190

196-190 da resto 6

facciamo ora la stessa cosa per la nostra seconda soluzione

14x14x14 / 19 = 144 con resto 8

Domanda 6. Sia $\pi \in S_{10}$ una permutazione di tipo $(6, 2, 2)$. Allora π^2 ha tipo

1. $(3, 3)$ **(E)**
2. $(6, 2, 2)$
3. $(3, 2, 2)$
4. (6)
5. $(3, 3, 2, 2)$

fai attenzione !

risposte aperte

a) [3 punti] Sapendo che $125 = 5^3$, determinare tre coppie distinte (a, b) di elementi non nulli in $\mathbb{Z}_{125}$ il cui prodotto ab è nullo.

dobbiamo trovare 3 coppie di zero-divisori
quindi dobbiamo controllare che 125 / ab
quindi bisogna trovare a e b **non multipli di 125**, ma tali che il **loro prodotto** sia **multiplo di 125**.
esempio:

1. 25 e 5
2. 25 e 10
3. 25 e 15

b) [4 punti] Provare che la classe di resto $[3]_{125}$ appartiene a $\mathbb{Z}_{125}^{\times}$ e calcolarne l'inverso. Determinare il resto della divisione per 125 di 3^{3199}.

- **Step 1 – Verifica se l'elemento è invertibile modulo n

mcd (3,125)=1 quindi è invertibile

- **Step 2 – Trova l'inverso di 3 modulo 125

Per trovare l'inverso di 3 modulo 125, dobbiamo risolvere l'equazione:
3x ≡ 1 (mod 125)
Utilizziamo l'algoritmo di Euclide esteso:
- 125 = 41 *3 + 2*
- *3 = 1* 2 + 1
- 2 = 2 *1 + 0*
applichiamo bezout:
1 = 3 - 1 2
1 = 3 - 1 *(125 - 41* 3)
1 = 42 *3 - 1* 125
Quindi l'inverso di 3 modulo 125 è 42.

questo risponde alla prima parte della domanda ovvero calcolare l'inverso

ora determiniamo il resto della divisione per 125 di 3^3199

step 3 calcoliamo il φ di 125
φ(125) = 125 * (1 - 1/5) = 100
step 4 calcoliamo 3199 mod 100
3199 mod 100 = 99

step 5 calcoliamo 3^99 mod 125
notiamo che 3^99 ≡ 3^-1 mod 125 = 42
quindi il resto della divisione di 3^3199 per 125 è 42.

c) [4 punti] Per ognuna delle congruenze

$$12x \equiv 16 \mod 500, \qquad 6x \equiv 3 \mod 500$$

dire se ammette soluzione e in caso affermativo risolverla.

- **Step 1 – Calcolo del MCD**

mcd(12 500)= 4 , 4 è divisore di 16 quindi ammette soluzione
mcd (6 500)= 2 , 2 non è divisore di 3 quindi non ammette soluzione

- **Step 2 – Dividiamo tutto per il MCD**

3x ≡ 4 mod 125

- **Step 3 – Troviamo l'inverso**

noi lo abbiamo calcolato già prima ed è 42

- **Step 4 – Moltiplichiamo entrambi i membri per l'inverso**

3x *42* ≡ *4* 42 mod 125
x ≡ 168 mod 125 = x ≡ 43 mod 125

- **Step 5 – Tornare modulo 500 (d = 4 soluzioni)**

dato che l'mcd è 4 abbiamo 4 possibili soluzioni
x ≡ 43 mod 125
x ≡ 43 + 125k mod 500
con k = 0, 1, 2, 3
quindi per trovare le soluzioni dovremo moltiplicare 125 per k e sommare 43
le soluzioni sono:
43, 168, 293, 418

PROBLEMA 2

Si consideri l'insieme $X = \mathbb{Z}_5^\times \times \mathbb{Z}_5$, con l'operazione definita da

$$(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b).$$

Si dia per noto che $(X, *)$ è un gruppo con elemento neutro $(\overline{1}, \overline{0})$.

a) [4 punti] Calcolare

$$(\overline{2}, \overline{3}) * (\overline{1}, \overline{4}), \quad (\overline{1}, \overline{4}) * (\overline{2}, \overline{3}), \quad (\overline{2}, \overline{3})^3, \quad (\overline{2}, \overline{3})^{-1}.$$

noi sappiamo che l'identità è (1,0)
procediamo a risolvere le operazioni:

(2; 3) ∘ (1; 4) = (2x1,2x4+3)= (2,11) però siamo in Z5 quindi (2,1)
(1,4)) ∘ (2,3) = (1x2,1x3+4)= (2,7) però siamo in Z5 quindi (2,2)
notiamo che non commuta infatti
(2,3) ∘ (1,4) ≠ (1,4) ∘ (2,3)

(2,3)^3 = (2,3) ∘ (2,3) ∘ (2,3) = (2x2, 2x3+3) = (4,9) però siamo in Z5 quindi (4,4)
(4,4)) ∘ (2,3) = (4x2, 4x3+4) = (8,16) però siamo in Z5 quindi (3,1)

(2,3)^-1 = (2,3) ∘ (a,b) = (1,0)
dobbiamo trovare a e b tali che:
2a ≡ 1 mod 5
2b+3 ≡ 0 mod 5
troviamo che a=3
troviamo che b=1

b) [4 punti] Dire quali dei due seguenti sottoinsiemi di X sono sottogruppi, motivando la risposta:

$$H_1 = \mathbb{Z}_5^\times \times \{\overline{0}\}, \quad H_2 = \mathbb{Z}_5^\times \times \{\overline{1}\}$$

- Verifica per H1=Z 5 × {0}

1. Contiene l'identità?
   Sì, contiene l'identità (1,0).
2. Chiusura rispetto all'operazione:
   prendiamo 2 elementi qualsiasi (a,0) e (c,0)
   (a,0) ∘ (c,0) = (ac, *0+0)* = *(a*c, 0), che è ancora in H1.
3. Chiusura rispetto agli inversi:
   Per ogni elemento (a,0), esiste l'inverso (a^-1,0) tale che:
   (a,0) ∘ (a^-1,0) = (1,0).

quindi ogni elemento ha un inverso in H1.
quindi h1 è un sottogruppo

- Verifica per H2={0} × Z 5

1. Contiene l'identità?
   no, non contiene l'identità (1,0) dato che il secondo componente è 0
2. Chiusura rispetto all'operazione:
   prendiamo 2 elementi qualsiasi (a,1) e (c,1)
   (a,1) ∘ (c,1) = (ac, *a+1)* = *(a*c, a+1) dato che il secondo componente può assumere valori diversi da 1 l'operazione non è chiusa
3. Chiusura rispetto agli inversi:
   non serve verificarlo
   quindi H2 non è un sottogruppo

c) [3 punti] Dire se $(X, *)$ è abeliano, e spiegare perché il gruppo $(X, *)$ non è isomorfo al prodotto diretto (gruppo prodotto) $\mathbb{Z}_5^\times \times \mathbb{Z}_5$.

- Verifichiamo se è abeliano

nel punto precedente abbiamo visto che non commuta quindi non è abeliano

- spieghiamo perchè non è isomorfo

dato che abbiamo 1 gruppo abeliano e 1 non abeliano non possono essere isomorfi