Esame giugno Matematica Discreta

quiz v1

Domanda 1. Siano $A = \{3, 4, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 8, 9\}$ e $C = \{2, 4, 5, 8, 9\}$. Allora

1. $4 \in A \cap B \cap C$
2. $A \subset B \cup C$
3. $B \cap C \subset A$
4. $A \cap B \subset C$
5. $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ **(E)**

1. 4 non appartiene all'intersezione
2. ad occhio no dato che A è più piccolo
3. B intersecato C ={5,8,9} che è diverso dal gruppo A
4. A intersecato B = {3,9} C non contiene 3
5. vero perchè = {9}

Domanda 2. L'affermazione "$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x^2+x \geq y$" è contraddetta da:

1. $(x, y) = (2, 5)$
2 $(x, y) = (-4, 10)$
3 $(x, y) = (1, 3)$ **(E)**
4. $(x, y) = (0, -1)$
5. $(x, y) = (3, 12)$

facendo 2 calcoli veloci si capisce

Domanda 3. Siano $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ le funzioni definite come $f(n) = 2n + 3$, $g(n) = 3n - 2$. Allora

1. $(g \circ f)(n) = 6n + 7$ **(E)**
2. $(g \circ f)(n) = 3n + 7$
3. $(f \circ g)(n) = 2n - 1$
4. $(g \circ f)(n) = 6n + 3$
5. $(f \circ g)(n) = 6n - 2$

calcoliamo f(g(n)) = f(3n-2) -> 2(3n-2)+3 = 6n-4+3 = 6n-1

calcoliamo g(f(n)) = g(2n+3) -> 3(2n+3)-2 = 6n+9-2 = 6n+7

Domanda 4. Quanti sono i modi di scegliere tre numeri divisibili per 3 e due numeri non divisibili per 3 compresi tra 1 e 15 inclusi?

1. $3! \cdot 2!$
2. $\binom{5}{3} \cdot \binom{10}{2}$ **(E)**
3. $15!/3! \cdot 2!$
4. $15!/10!$
5. $\binom{15}{3} \cdot \binom{15}{2}$

i numeri divisibili per 3 da 1 a 15 sono: 3,6,9,12,15 in totale 5

quindi avremo 5 su 3 possibilità

i restanti 10 non sono divisibili per 3
quindi avremo 10 su 2 possibilità

Domanda 5. La decomposizione della permutazione (5 4 2 3 6)(1 7)(1 5 3 4) in cicli disgiunti è

1. (1 4 7)(2 5)(3 6)
2. (1 7 4)(2 3)
3. (1 4 7)(5 6)
4. (1 7 4)(2 3 5 6)
5. (1 4 7)(2 3)(5 6) **(E)**

Domanda 6. Una permutazione π ha periodo 8. Allora

1. $\pi^{-1} = \pi^2$
2. $\pi^{-2} = \pi^4$
3. $\pi^{-1} = \pi^4$
4. $\pi^{-3} = \pi^5$ **(E)**
5. $\pi^{-3} = \pi^3$

molto facile basta risolvere le equazioni

Domanda 7. Di quale numero intero $442_{[8]}$ è la scrittura in base 8?

1. 222
2. 241
3. 290 **(E)**
4. 307
5. 315

per risolverlo facciamo 2x1 + 4x8+ 4x8^2
che è uguale a 2 + 32 + 256 = 290

Domanda 8. Dire quale delle seguenti coppie di numeri interi è costituita da numeri uno inverso dell'altro modulo 40.

1. $(3, 11)$
2. $(13, 21)$
3. $(26, 9)$
4. $(7, 23)$ **(E)**
5. $(25, 37)$

per trovare l'inverso dobbiamo trovare la coppia di numeri a x b ≡1 (mod 40)
(3,11) -> 3x11=33 non congruo ad 1 mod 40
(13,21) -> 13x21=273 che è congruo ad 33 mod 40
(26,9) -> 26x9=234 che è congruo a 34 mod 40
(7,23) -> 7x23=161 che è congruo a 1 mod 40
(25,37) -> 25x37=925 che è congruo a 5 mod 40

Domanda 9. Dire quali delle seguenti congruenze ha esattamente una soluzione modulo 56.

1. $20X \equiv 33 \mod 56$
2. $27X \equiv 4 \mod 56$ **(E)**
3. $24X \equiv 16 \mod 56$
4. $12X \equiv 44 \mod 56$
5. $50X \equiv 26 \mod 56$

MCD(20,56) = 4 4 non è divisore di 33

mcd(27,56) = 1 1 è divisore di 4

mcd(24,56) = 8 è divisore di 16

mcd(12,56) = 4 è divisore di 44

mcd (50,56) = 2 è divisore di 26

Domanda 10. Sia $G = \langle g \rangle$ un gruppo ciclico con 24 elementi. Dire quale dei seguenti elementi genera il sottogruppo con 8 elementi.

1. g^9 **(E)**
2. g^{10}
3. g^6
4. g^{11}
5. g^2

ordine del gruppo |G|=24

faccio l'mcd tra (24,8) = 8 ora divido 24/8 = 3

ora guardo tutti gli mcd delle varie souzioni

mcd(9,24) = 3 giusta

mcd(10,24) = 2

mcd(6,24) = 6

mcd(11,24) = 1

mcd(2,24) = 2

problemi

Versione A

Siano S, T insiemi tali che $|S| = 17$, $|T| = 21$, $|S \cup T| = 33$.

a) (Punti 3) Calcolare $|S \cap T|$, e determinare la cardinalità dell'insieme:

$$U = \{(x, y) \in S \times T \mid x \neq y\}$$

◆ a) Calcolare $|S \cap T|$

Usiamo la **formula dell'unione** tra insiemi finiti:

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$$

Sostituendo i valori:

$$33 = 17 + 21 - |S \cap T| \Rightarrow 33 = 38 - |S \cap T| \Rightarrow |S \cap T| = 38 - 33 = \boxed{5}$$

◆ b) Calcolare la cardinalità dell'insieme:

$$U = \{(x, y) \in S \times T \mid x \neq y\}$$

Passo 1: Calcolare la cardinalità di $S \times T$

$$|S \times T| = |S| \cdot |T| = 17 \cdot 21 = 357$$

Passo 2: Trovare quante **coppie (x, y)** con $x = y$

Affinché $x = y$ in $S \times T$, deve essere:

- $x = y \in S \cap T$

Quindi ci sono tante coppie $(x, y) \in S \times T$ con $x = y$ quante sono le **elementi comuni tra S e T**:

$$|\{(x, y) \in S \times T \mid x = y\}| = |S \cap T| = 5$$

Passo 3: Calcolare $|U|$

$$|U| = \text{tutte le coppie} - \text{quelle con } x = y = 357 - 5 = \boxed{352}$$

b) (Punti 4) Quanti sono i sottoinsiemi di S aventi intersezione non vuota con T? Quanti di questi hanno cardinalità 3?

◆ Sottoinsiemi di S con intersezione **non vuota** con T

- **Tutti i sottoinsiemi di S:**

$$2^{17} = 131072$$

- **Quelli che NON contengono elementi di T** (cioè sottoinsiemi di $S \setminus T$):

$$2^{12} = 4096$$

- Quindi:

$$\boxed{2^{17} - 2^{12} = 131072 - 4096 = 126976}$$

🔹 Quanti sottoinsiemi di **cardinalità 3** hanno intersezione non vuota con T

- Totale sottoinsiemi di 3 elementi di S:

$$\binom{17}{3} = 680$$

- Quelli con **nessun elemento in** T (cioè solo da $S \setminus T$, che ha 12 elementi):

$$\binom{12}{3} = 220$$

- Quindi:

$$\boxed{680 - 220 = 460}$$

c) (Punti 4) Quante sono le funzioni $f : S \to T$ tali che $f(x) = x$ per ogni $x \in S \cap T$? Quante di queste sono iniettive?

Cerchiamo il numero di **funzioni** $f : S \to T$ tali che:

$$f(x) = x \quad \text{per ogni } x \in S \cap T$$

In altre parole: su quei **5 elementi in comune tra S e T**, la funzione deve essere **l'identità**.

✳️ Scomposizione:

Dividiamo S in due parti:

- $A = S \cap T$ → 5 elementi → **fissati**: $f(x) = x$
- $B = S \setminus T$ → 12 elementi → **liberi**: possiamo scegliere $f(x) \in T$

Totale elementi di S: $|A| + |B| = 5 + 12 = 17$

🔹 Quante funzioni $f : S \to T$ **con la condizione** $f(x) = x$ per ogni $x \in A$?

- Su A: la funzione è **completamente determinata** (solo 1 possibilità)
- Su B: per ciascuno dei 12 elementi possiamo scegliere un'immagine **arbitraria in** T

$$\Rightarrow \text{Numero di funzioni} = |T|^{12} = 21^{12}$$

✅ **Risposta:** $\boxed{21^{12}}$

🔹 Quante di queste funzioni sono **iniettive**?

Ora vogliamo che f sia **iniettiva** (cioè: valori distinti per elementi distinti).

Analisi:

- Su $A = S \cap T$, abbiamo già imposto che $f(x) = x$. Quindi l'immagine **di quei 5 elementi** è già fissata:

$$f(A) = A \subseteq T$$

- Per la parte $B = S \setminus T$, abbiamo 12 elementi da mappare **iniettivamente in** $T \setminus A$ (perché non possiamo riutilizzare i 5 valori già usati da A)
- Quindi:
  - Da 12 elementi (dominio B)
  - A $|T \setminus A| = 21 - 5 = 16$ valori distinti disponibili

🧠 Quante applicazioni iniettive da 12 elementi in un insieme di 16?

È una **disposizione senza ripetizione**:

$$D_{16}^{12} = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdots 5 = \frac{16!}{(16-12)!} = \frac{16!}{4!}$$

✅ **Risposta:** $\boxed{\frac{16!}{4!}}$

Si consideri la permutazione

$$\sigma = (9\ 5)(7\ 2\ 4)(5\ 4\ 6)(2\ 3\ 6\ 8\ 1) \in S_9.$$

a) (Punti 4) Determinare tipo, periodo e parità di σ.

(1 4 6 8) (2 3 9 5 7) ha tipo (4 5) periodo = mcm (4,5) = 20 ed è dispari

b) (Punti 3) Determinare, se esiste, un intero $k \geq 0$ tale che $\sigma^k(6) = 6$ e $\sigma^k(9) = 2$.

Vogliamo determinare se esiste un intero $k \geq 0$ tale che:

$$\sigma^k(6) = 6 \quad \text{e} \quad \sigma^k(9) = 2$$

🔹 σ^k(6) = 6

Questo accade **quando** σ^k lascia fisso 6.

Ma 6 si trova in un ciclo di lunghezza 4, quindi:

$$\sigma^k(6) = 6 \iff k \equiv 0 \mod 4$$

✅ Serve: $k \equiv 0 \mod 4$

🔹 σ^k(9) = 2

Nel ciclo $(2\ 3\ 9\ 5\ 7)$, guarda la posizione di 9 → è la **terza**.

Ciclo:

$$2 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 9 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 2$$

Quindi per tornare **da 9 a 2**, servono **2 passi in avanti**:

- $\sigma(9) = 5$
- $\sigma^2(9) = 7$
- $\sigma^3(9) = 2$

➡️ Serve: $\sigma^3(9) = 2$

✅ Quindi: $k \equiv 3 \mod 5$

🔍 Ora risolviamo il sistema:

Trova un $k \geq 0$ tale che:

$$\begin{cases} k \equiv 0 \mod 4 \\ k \equiv 3 \mod 5 \end{cases}$$

risposta finale k=8

c) (Punti 4) Dimostrare che la funzione

$$\begin{aligned} f : \langle \sigma \rangle &\longrightarrow \mathbb{Z}_{12} \\ f(\sigma^t) &\longmapsto \overline{3t} \end{aligned}$$

è ben definita ed è un omomorfismo. Determinare im(f) e $\ker(f)$.

✅ 1. È ben definita?

Sì, se $\sigma^t = \sigma^s \Rightarrow f(\sigma^t) = f(\sigma^s)$, cioè:

$$\sigma^t = \sigma^s \Rightarrow 3t \equiv 3s \mod 12$$

🧠 Osservazione:

$\langle\sigma\rangle$ è **ciclico di ordine** $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{mcm}(5,4) = 20$

Quindi:

$$\sigma^t = \sigma^s \iff t \equiv s \mod 20$$

Dunque f è **ben definita** se:

$$t \equiv s \mod 20 \Rightarrow 3t \equiv 3s \mod 12$$

Semplifichiamo:

$$t \equiv s \mod 20 \Rightarrow 3(t-s) \equiv 0 \mod 12 \Rightarrow 3(t-s) \text{ è multiplo di } 12$$

Ma $t - s$ è multiplo di 20, quindi:

$$3(t-s) \equiv 0 \mod 12 \iff 3 \cdot 20 = 60 \equiv 0 \mod 12$$

✅ **60 è multiplo di 12**, quindi la funzione è ben definita!

✅ 2. È un omomorfismo?

Verifichiamo:

$$f(\sigma^t \cdot \sigma^s) = f(\sigma^{t+s}) = 3(t+s) \mod 12 = 3t + 3s \mod 12 = f(\sigma^t) + f(\sigma^s)$$

✅ Quindi è **un omomorfismo di gruppi**.

🎯 3. **Determinare** Im(f) e Ker(f)

🔸 Im(f) = Immagine

L'immagine è l'insieme dei valori $f(\sigma^t) = 3t \mod 12$ al variare di $t \in \mathbb{Z}_{20}$

Quindi:

$$\mathrm{Im}(f) = \{3t \mod 12 \mid t \in \mathbb{Z}_{20}\}$$

Considera i multipli di 3 modulo 12:

$$3t \mod 12 = \{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$$

(Infatti $3 \cdot t \mod 12$ ripete questi 4 valori mentre t va da 0 a 19.)

➡️ Immagine = $\langle 3 \rangle \subseteq \mathbb{Z}_{12}$, che ha **ordine 4**

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{0,\ 3,\ 6,\ 9\} \cong \mathbb{Z}_4}$$

🔸 Ker(f) = Nucleo

Il nucleo è l'insieme degli elementi in $\langle \sigma \rangle$ mandati in 0:

$$\ker(f) = \{\sigma^t \in \langle \sigma \rangle \mid f(\sigma^t) = 3t \equiv 0 \mod 12\}$$

Cioè:

$$3t \equiv 0 \mod 12 \Rightarrow t \equiv 0 \mod 4$$

Quindi:

$$\ker(f) = \{\sigma^0, \sigma^4, \sigma^8, \sigma^{12}, \sigma^{16}\}$$

Sono 5 elementi → è un sottogruppo di ordine 5

$$\boxed{\ker(f) = \langle \sigma^4 \rangle \cong \mathbb{Z}_5}$$