Collegio Carlo Alberto

Strategie CPPI e Polizze Vita con metodo Monte Carlo

Risk Management

Alessandro Canola Gavioli[1], Pasquale Paolicelli[1], and Davide Valentini[1]

[1]Master in Insurance and Innovation

April 30, 2025

Abstract

Comprendere come calcolare la probabilità di fallimento di una strategia di Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) è fondamentale per la gestione del rischio negli investimenti. In questo report, esamineremo più da vicino i parametri chiave che influenzano la probabilità di non rispettare il floor garantito, come la frequenza di ribilanciamento (Δt) e il moltiplicatore (m).
L'obiettivo è analizzare i dati relativi a diverse simulazioni Monte Carlo, applicare i metodi appropriati per descrivere i risultati e, infine, calcolare la probabilità di fallimento in vari scenari di mercato.

Nella parte finale, procederemo a esplorare come le strategie di ribilanciamento dinamico possano influenzare la distribuzione delle perdite e migliorare la protezione del capitale, fornendo così un quadro più chiaro delle implicazioni pratiche del CPPI nella gestione patrimoniale.

Per le simulazioni Monte Carlo, abbiamo utilizzato il generatore di numeri casuali Marsenne Twister con periodo di 19937 e seed 112358.

1 Strategia CPPI e polizze sulla vita con metodo Monte Carlo

Per simulare l'evoluzione del portafoglio, il tempo viene innanzitutto discretizzato in intervalli di tempo (Δt). Per ogni intervallo di tempo, viene calcolato il valore futuro del bond privo di rischio, assumendo un interesse composto discreto.

$$B_{t+\Delta t} = B_t(1+i) \tag{1}$$

dove M rappresenta il montante calcolato come:

$$M = 1 + i = 1 + e^{r\Delta t} - 1 = e^{r\Delta t}$$

Successivamente, viene simulata la traiettoria del prezzo dell'asset rischioso S_t, utilizzando il modello di Black-Scholes. Il modello assume una distribuzione log-normale dei rendimenti e aggiorna il prezzo dell'asset ad ogni passo temporale. L'aggiornamento del prezzo si basa sul prezzo precedente, sul rendimento atteso (μ), sulla volatilità (σ) e su uno shock casuale W_t moto Browniano standard, ovvero:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Questo shock casuale introduce l'elemento di incertezza tipico dei mercati finanziari.

Il portafoglio viene diviso tra asset rischioso e privo di rischio:

$$F_t = n_s S_t + n_r R_t = E_t + D_t \tag{2}$$

All'inizio della strategia viene scelto il totale del capitale da investire F_t e il valore del capitale garantito, detto Bond Floor B_t, che corrisponde al prezzo nel tempo del Bond definito in 1. La differenza tra queste due quantità definisce il Cuscino C_t che deve rimanere positivo, altrimenti la strategia fallisce, perdiamo il capitale non garantito ed investiamo solo in Bond. Il moltiplicatore m definisce quante quote rischiose comprare una volta deciso il totale del capitale e del Bond Floor. Le quote iniziali sono calcolate dalle seguenti formule:

$$n_s = \frac{mC_0}{S_0} \quad ; \quad n_r = \frac{F_0 - mC_0}{B_0}$$

Per calcolare il valore del fondo dopo un intervallo Δt abbiamo utilizzato la formula nel discreto:

$$F_{t+\Delta t} = F_t(1+i) + mC_t\left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} - i\right)$$

I parametri utilizzati sono $\Delta t = [0.25, 0.5, 1.0]$espresso in anni, e $m = [2, 5]$, con un numero di simulazioni pari a 1,000,000.

	m	
Δt	2	5
0.25	0.00000	0.03113
0.50	0.00002	0.08689
1.00	0.00222	0.16648

Table 1: Probabilità di fallimento con 1,000,000 di simulazioni.

I risultati mostrano che la probabilità di fallimento aumenta con l'aumentare del moltiplicatore e dell'intervallo di ribilanciamento. Ad esempio, per $m = 5$ e $\Delta t = 1.0$, la probabilità di fallimento è del 16,6% mentre per $m = 2$ e $\Delta t = 0.25$ è nulla. Notiamo inoltre che i risultati ottenuti sono in accordo con quelli proposti da Castellani et al. Tuttavia vi sono delle differenze per il caso $m = 5$ e $\Delta t = 0.25$ e $m = 2$ e $\Delta t = 0.5$. Per quest'ultimo caso la spiegazione è probabilmente dovuta al fatto che il numero di simulazioni è troppo basso per la bassa probabilità dell'evento, ma con la potenza di calcolo disponibile su GoogleColab non siamo riusciti ad aumentarle, perciò il risultato è instabile.

Possiamo concludere che questi risultati sono in linea con quelli presentati da Castellani et al. e sottolineano l'importanza di calibrare i parametri della strategia in base al profilo di rischio desiderato.

2 Stima errore MC della probabilità di fallimento

Questa parte mira a stimare l'errore nel calcolo della probabilità di fallimento del portafoglio CPPI utilizzando la simulazione Monte Carlo. Il processo di simulazione viene ripetuto 10,000 volte, con 100,000 scenari simulati per ciascuna ripetizione. Il calcolo risulta essere oneroso, ed ha richiesto all'incirca 1 ora di tempo.

La probabilità di fallimento viene calcolata per ogni combinazione di parametri. Per effettuare una stima dell'errore MC commesso abbiamo ripetuto per un numero $n_{MC} = 10,000$ le $n_{sim} = 100,000$. Successivamente abbiamo guardato la distribuzione degli stimatori ottenuti, e calcolato la media e deviazione standard della distribuzione, costruendo un intervallo di confidenza. Per la stima dell'errore MC abbiamo diviso per la radice del numero di simulazioni MC: $\epsilon_{MC} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_{MC}}}$

Table 2: Probabilità di fallimento della strategia CPPI (Monte Carlo)

Δt	m	μ	std	ϵ_{MC}	CI
0.25	2	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000 ± 0.0000
0.25	5	0.0342	0.0018	0.0001	0.0342 ± 0.0018
0.50	2	0.00003	0.00006	0.00002	0.00003 ± 0.00006
0.50	5	0.0943	0.0029	0.0001	0.0943 ± 0.0029
1.00	2	0.0022	0.0005	0.00002	0.0022 ± 0.0005
1.00	5	0.1666	0.0037	0.0001	0.1666 ± 0.0037

Notiamo che come nel punto 1, le simulazioni risultano tutte in linea con quelli del paper di Castellani et al. eccetto per i casi $m = 5$ e $\Delta t = 0.25$ e $m = 2$ e $\Delta t = 0.5$ Il primo caso risulta dentro l'intervallo con 9 deviazioni standard, che, assumendo distribuzione normale centrata, risulta avere un p-value di circa 10^{-19} e dobbiamo quindi rigettare l'ipotesi nulla. Il secondo caso è ancora peggiore poiché abbiamo una standard deviation maggiore della media, il che significa che i risultati sono totalmente da rigettare, poiché il numero di simulazioni non è sufficiente a fornire una statistica rilevante.

3 Value-at-Risk CPPI vs Risky asset

Abbiamo effettuato un calcolo del Value-at-Risk nel caso di $m = 5$ e $\Delta t = 0.25$ con un intervallo di confidenza del $99,5\%$. (Il caso $m = 5$ per un valore di $F_0 = 100$ e $B_0 = 80$ corrisponde a investire solo nell'asset rischioso S_t.)

Abbiamo quindi calcolato la Loss per ogni simulazione come differenza tra l'investimento in asset rischioso E_t e B_t. Da questa distribuzione abbiamo calcolato il percentile dell'estremità sinistra corrispondente allo $0,5\%$. Per ogni step temporale di $\Delta t = 0,25$ abbiamo un valore del VaR, fino ad arrivare a fine dell'anno dopo 4 step. Ad ogni step aggiorniamo quindi le quote del portafoglio con la seguente relazione:

$$n_s^t = \frac{mC_{t-\Delta t}}{S_{t-\Delta t}} \quad ; \quad n_r^t = \frac{F_{t-\Delta t} - mC_{t-\Delta t}}{B_{t-\Delta t}}$$

ed il Fondo viene sempre calcolato con l'equazione 2. Risulterà quindi che le quote sono calcolate con i vecchi prezzi, ed il fondo è il prodotto dei nuovi prezzi e delle vecchie quote. I risultati sono i seguenti:

Δt	VaR al $99,5\%$
0.25	-7.25
0.5	-7.86
0.75	-8.47
1.0	-9.09

Table 3: Value-at-Risk (VaR) al 99,5% del portafoglio con aggiornamento delle quote

Abbiamo infine confrontato il valore ottenuto con quello invece che si avrebbe se avessimo investito tutto nell'asset rischioso S_t senza mai ribilanciare il portafoglio. Il valore ottenuto nel caso di non ribilanciamento è invece pari a VaR $= -27.31$. Questo valore indica che c'è una probabilità del 0,5% che il portafoglio con quote costanti perda più di 27.31 unità monetarie in un anno. Il VaR per il portafoglio con quote costanti (-27.31) è significativamente più negativo rispetto ai valori di VaR per il portafoglio con ribilanciamento dinamico. Questo suggerisce che il portafoglio con quote costanti è esposto a un rischio di perdita molto maggiore in scenari avversi. Notiamo dunque che la strategia CPPI è molto vantaggiosa poiché ci permette di avere un capitale a rischio minore, non rinunciando però alla possibilità di ritorni aggiuntivi rispetto ad un asset privo di rischio.

4 Probabilità fallimento modello di Kou.

Abbiamo inizialmente simulato la traiettoria dell'asset rischioso S_t che segua il modello a salti di Kou. Abbiamo quindi utilizzato i parametri per l'intensità e frequenza di salto come quelli proposti nel paper di Cont et al per lo Shangai Composite.

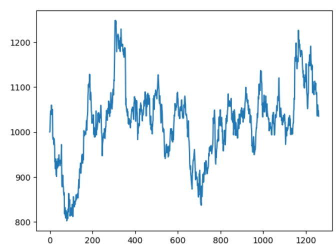

Figure 1: Esempio di andamento del prezzo dell'asset.

Abbiamo successivamente tentato due approcci diversi per il problema.

Nel primo caso abbiamo provato a gestire ogni singola strategia marcando con 1 i casi in cui il portafoglio fallisce in un determinato istante di tempo. In questo modo, otteniamo un vettore riga di dimensione n_{sim} per ciascuno degli N passi temporali. Combinando questi vettori si costruisce una matrice di fallimento, dove ogni colonna rappresenta una traiettoria e ogni riga un istante temporale.

Successivamente, abbiamo definito la probabilità di fallimento come la frazione di colonne (cioè traiettorie) la cui somma è diversa da zero, ovvero quelle che presentano almeno un fallimento durante l'intero orizzonte. Questa definizione, però, portava a risultati controintuitivi: ad esempio, una probabilità di fallimento di circa il 23% anche per il caso $m = 2$, che dovrebbe essere più conservativo.

Il secondo approccio è stato quello di considerare solo le singole probabilità di fallimento per ogni strategia a ogni step. Il problema, a nostro avviso, risiede nel fatto che una traiettoria può fallire in uno step ma recuperare in quelli successivi. In tal caso, non teniamo conto del fatto che il fallimento, una volta avvenuto, dovrebbe compromettere l'intera strategia. Le probabilità di fallimento successive non risultano quindi condizionate al fallimento già avvenuto, generando una stima errata. Considerando le probabilità all'ultimo step per il caso $m = 2$ si ottiene un valore di circa 11%, che cresce considerando m maggiori.