Associazione Amici della Scuola Normale Superiore
Pisa

G. Castellani M. De Felice F. Moriconi

Strategie CPPI e polizze sulla vita

Problemi di valutazione, il controllo della strategia

ANIA – Milano, 18 febbraio 2004

Indirizzo degli autori

Gilberto Castellani
Dipartimento di Scienze Attuariali e Finanziarie
Università di Roma "La Sapienza"
Via Nomentana, 41 – 00161 Roma
e-mail: gilberto.castellani@uniroma1.it

Massimo De Felice
Dipartimento di Scienze Attuariali e Finanziarie
Università di Roma "La Sapienza"
Via Nomentana, 41 – 00161 Roma
e-mail: massimo.defelice@uniroma1.it

Franco Moriconi
Dipartimento di Economia
Facoltà di Economia
Università di Perugia
Via A. Pascoli, 1 – 06100 Perugia
e-mail: moriconi@unipg.it

INDICE DEGLI ARGOMENTI

Le polizze vita basate su CPPI pongono problemi rilevanti e in forma nuova per i responsabili dell'impresa d'assicurazione: il disegno del prodotto, il profit test, il calcolo dell'embedded value, il controllo dei gestori, la comunicazione al pubblico delle caratteristiche rischio-rendimento del prodotto, la misurazione delle performance.

Possono essere rilevanti anche i problemi di utilizzazione delle CPPI nelle gestioni separate.

Nel *corso* verranno formalizzati i problemi e forniti schemi risolutivi che utilizzano le tecniche attuariali tradizionali, i modelli stocastici del mercato finanziario, le logiche del pricing, le tecniche di simulazione Monte Carlo.

Parole chiave

azioni
borrowing limit
commissioni, – di gestione
costi
cushion
embedded value
esposizione (exposure)
fallimento della strategia di gestione (shortfall), probabilità di –
fondo, – assicurativo, – di fondi
inflazione
leva finanziaria (leverage)
minimo garantito (floor, bond floor), – cliquet, – a scadenza
moltiplicatore
obbligazioni
opzione, – americana, – call, – crash, – put, – sintetica
ricalibratura
scomposizione, – call, – put
strategia, – a inseguimento, – a payoff concavo, – a payoff convesso,
  – autofinanziante, – Buy-and-Hold, – Constant Mix,
  – controvariante, – Constant Proportion Portfolio Insurance,
  – Option Based Portfolio Insurance, – Stop Loss,
  – Time Invariant Portfolio Protection
valore
vendite allo scoperto (short sales)
vincolo di bilancio
volatilità

Strumenti

modello di Black e Scholes
modello di Cox, Ingersoll e Ross
modello di Cox, Ross e Rubinstein
principio di assenza di arbitraggio
probabilità risk-neutral
simulazione Monte Carlo
teoria dei valori estremi

Preambolo

• *Origini e caratteristiche della (CP)PI*

"The link between portfolio insurance and investment strategies was first noted by Brennan and Schwartz [BrSc-1976], who pointed out that insurance companies that had guaranteed the minimum payments they would make under equity-linked life insurance policies could hedge the resulting liability by following an investment strategy derived from the Black-Scholes option-pricing model."

"Under ideal conditions, a simple portfolio insurance strategy ensures that the value of the insured portfolio, at some specified date, will not fall below some specified level."
[BrSc-1988, p. 283]

"Portfolio insurance is fundamentally different from more typical forms of insurance ... which 'pool' or 'diversify' risks. ... This means that PI must be provided using alternative techniques to the risk-pooling of traditional insurance" [Le-1994, p. 154]

1971: Harleysville Mutual Insurance Company
nel 1976: Leland, O'Brien, Rubinstein
[BrSc-1988]; [LeR-1988a], [Le-1994]

! una brillante idea teorica con grande successo pratico

Le strategie CPPI sono un tipo particolare, a "constant proportion" (CP), di "portfolio insurance" (PI); sono caratterizzate da una regola di decisione dinamica.

La CPPI è stata studiata originariamente da Black, Jones e Perold.
[BlJ-1986], [BlP-1992]

• *Due aspetti problematici*

1 – "under almost all circumstances, a simple portfolio insurance strategy is inconsistent with expected utility maximization"
[BrSo-1981]

2 – "in many circumstances, the specification of the precise date on which the insurance is to be effective is arbitrary because institutional investment portfolios typically have no predetermined final date."
[BrSc-1988, p. 283]

• *Argomenti di dibattito*

⊕ *Who should buy portfolio insurance?*

"Demand for (and supply of) portfolio insurance ... is related not to an investor's level of risk tolerance, but rather to the *rate of change* of risk tolerance as wealth increases. For example, an investor who is not very risk averse, but whose risk aversion increases rapidly with wealth, will hold a risky portfolio but acquire portfolio insurance"
[Le-1994, p. 155]; [Le-1980]

⊕ "Did portfolio insurance itself contribute to the crash? ... It's difficult to say."
[Ru-1988, pp. 38, 41], [LeR-1988b], [Lu-1988, pp. 311-315],
[Mi-1991, pp. 44-48, 57-60]

1 – Un esempio per cominciare

Caratterizzare una strategia “CPPI”

Al passare del tempo

Le componenti base di una strategia di Portfolio Insurance

Caratterizzare una strategia "CPPI"

- Sia:
  - S_t il prezzo di un titolo azionario;
  - R_t il valore di un "money-market account", che cresce al tasso annuo i, cioè:
$$R_t = R_0 \, (1+i)^t \, ;$$
  - B_t una funzione deterministica definita come:
$$B_t = b \, R_t \, ,$$
    con $b \geq 0$ fissato.

Si consideri in $t = 0$ un investimento di ammontare F_0, effettuato acquistando:

$$N_0^S \text{ quote di } S \quad \text{e} \quad N_0^R \text{ quote di } R.$$

La componente azionaria dell'investimento è data quindi da:

"*Exposure*" : $$E_0 = N_0^S \, S_0 \, ,$$

mentre la componente a tasso fisso sarà:

"*Riserva*" : $$D_0 = N_0^R \, R_0 \, ;$$

naturalmente si ha: $F_0 = E_0 + D_0$.
Il numero di quote azionarie N_0^S è scelto fissando un coefficiente:

"*Multiplier*" : $$m > 1 \, ,$$

tale che l'esposizione azionaria sia uguale alla differenza:

"*Cushion*" : $$C_0 = F_0 - B_0 \, ,$$

moltiplicata per m; cioè:

$$E_0 = m \, (F_0 - B_0) \, .$$

Si ha quindi:

$$N_0^S = m\,\frac{F_0 - B_0}{S_0}\,, \quad N_0^R = \frac{F_0 - E_0}{R_0}\,.$$

Osservazione. Dato che $B_0 = F_0 - C_0$ e $D_0 = F_0 - E_0$, si ha:

$$B_0 - D_0 = E_0 - C_0 = (m-1)\,C_0\,.$$

■

- Si ponga:

$$S_0 = 1\,, \quad R_0 = 1\,, \quad F_0 = 100\,, \quad b = 80\,, \quad m = 2\,.$$

Si ha quindi:

$$B_0 = 80\,, \quad C_0 = 20\,, \quad E_0 = 2 \times 20 = 40\,, \quad N_0^S = 40\,, \quad N_0^R = 60\,;$$

si parte perciò con una composizione azionaria del 40% (sia in valore che in numero di quote).

Al passare del tempo

Al passare del tempo, il valore S_t del titolo azionario varia in modo imprevedibile.

• *Deriva*

Se la composizione, espressa in numero di quote, viene lasciata invariata, alla fine del primo anno il livello dell'esposizione sarà:

$$E_1 = N_0^S \, S_1 \, .$$

Dato che il valore del m.m.a. diventa:

$$R_1 = R_0 \, (1+i) \, ,$$

si ha:

$$D_1 = N_0^R \, R_0 \, (1+i) \, ,$$

e:

$$B_1 = b \, R_0 \, (1+i) \, .$$

Il valore dell'investimento sarà:

$$F_1 = E_1 + D_1 = N_0^S \, S_1 + N_0^R \, R_0 \, (1+i) \, ,$$

$\longrightarrow$ la composizione azionaria, in termini di valore, risulterà aumentata (diminuita) se risulterà $S_1/S_0 > 1+i$.

Osservazione. Dato che:

$$E_1 = E_0 \, S_1/S_0 \, , \quad D_1 = D_0 \, (1+i) \, , \quad B_1 = B_0 \, (1+i) \, ,$$

richiedere $F_1 = B_1$, equivale a richiedere:

$$E_0 \, \frac{S_1}{S_0} + D_0 \, (1+i) = B_0 \, (1+i) \, ,$$

cioè:

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{B_0 - D_0}{E_0} \, (1+i) = \frac{E_0 - C_0}{E_0} \, (1+i) = \frac{m-1}{m} \, (1+i) \, .$$

Si ha quindi che per valori di S_1/S_0 minori di:

$$Q_0 := \frac{m-1}{m}\,(1+i),$$

il valore dell'investimento sarà sceso sotto il livello predeterminato $B_1 \longrightarrow$ "*shortfall*". ■

• *Ricalibratura*
Si supponga che il portafoglio di investimento venga ricalibrato (senza prelievi né contribuzioni) alla fine di ogni anno, cambiando le quote N^S e N^R in modo da:

riportare l'esposizione azionaria E a un livello
uguale a m volte il valore corrente del cushion.

Precisamente, allo scadere del primo anno (in $t = 1^+$) si sceglie il nuovo valore N_1^S in modo che:

$$E_{1^+} = N_1^S\, S_1 = m\,(F_1 - B_1)\,.$$

Si ha quindi:

$$N_1^S = m\,\frac{F_1 - B_1}{S_1}\,.$$

Il nuovo livello della componente a tasso fisso D_1^+ si ricava imponendo il vincolo di bilancio:

$$E_{1^+} + D_{1^+} = F_1\,,$$

che fornisce:

$$D_{1^+} = (1-m)\,F_1 + m\,B_1\,,$$

e la nuova quota N_1^R è data da:

$$N_1^R = \frac{D_{1^+}}{R_1} = \frac{(1-m)\,F_1 + m\,B_1}{R_0\,(1+i)}\,.$$

Osservazione. Più esplicitamente, si avrà:

$$\begin{aligned} N_1^S &= m\,\frac{F_1 - B_1}{S_1} \\ &= m\,\frac{N_0^S\,S_1 + N_0^R\,R_0\,(1+i) - b\;R_0\,(1+i)}{S_1} \\ &= m\left[N_0^S + (N_0^R - b)\,\frac{R_0\,(1+i)}{S_1}\right], \end{aligned}$$

e:

$$N_1^R = N_0^R - (N_1^S - N_0^S)\,\frac{S_1}{R_0\,(1+i)}\,.$$

Il vincolo di autofinanziamento corrisponde alla relazione:

$$(N_1^S - N_0^S)\,S_1 = -(N_1^R - N_0^R)\,R_0\,(1+i)\,.$$

■

Osservazione. Se S_1/S_0 è maggiore (uguale, minore) di $1+i$, allora N_1^S è maggiore (uguale, minore) di N_0^S.
$\longrightarrow$ strategia "**a inseguimento**". ■

• Più in generale, alla fine dell'anno k ($k = 1, 2, \ldots$) si avranno le seguenti relazioni.

– *Prima della ricalibratura*:

$$E_k = N_{k-1}^S\,S_k\,, \quad D_k = N_{k-1}^R\,R_0\,(1+i)^k\,, \quad B_k = b\,R_0\,(1+i)^k\,,$$

e:

$$F_k = N_{k-1}^S\,S_k + N_{k-1}^R\,R_0\,(1+i)^k\,.$$

– *Dopo la ricalibratura*:

$$E_{k^+} = N_k^S\, S_k = m\,(F_k - B_k)\,,$$

da cui:

$$D_{k^+} = F_k - E_{k^+}\,,$$

$$N_k^S = \frac{E_{k^+}}{S_k}\,;$$

$$N_k^R = \frac{D_{k^+}}{R_0\,(1+i)^k}\,.$$

Osservazione. Il valore Q_k di S_{k+1}/S_k per cui si ha $F_{k+1} = B_{k+1}$ è **indipendente da** k. Si ha cioè:

$$Q_k = \frac{m-1}{m}\,(1+i) = Q_0 \qquad k = 1, 2 \ldots .$$

■

Osservazione. Naturalmente si ha, per costruzione:

$$F_{k^+} = F_k\,.$$

Per il numero di quote si hanno le relazioni ricorrenti esplicite:

$$N_k^S = m\left[N_{k-1}^S + (N_{k-1}^R - b)\,\frac{R_k}{S_k}\right]\,;$$

$$N_k^R = N_{k-1}^R - (N_k^S - N_{k-1}^S)\,\frac{S_k}{R_k}\,.$$

Se S_{k+1}/S_k è maggiore (uguale, minore) di $1+i$, allora N_{k+1}^S è maggiore (uguale, minore) di $N_k^S \longrightarrow$ strategia "a inseguimento". ■

• Nella tavola 1 è illustrato lo sviluppo della strategia CPPI per una durata di 5 anni, in corrispondenza di una ipotetica evoluzione del prezzo azionario S_t ("evoluzione a") e assumendo un rendimento risk free $i = 0.03$ e un valore del moltiplicatore $m = 2$.

Il fattore e il tasso di shortfall risultano:

$$Q = \frac{m-1}{m}\,(1+i) = \frac{1}{2}\,1.03 = 0.515\,, \qquad \rho = Q - 1 = 48.5\%\,.$$

Tavola 1. $i = 0.03\,,\ m = 2$, evoluzione a.

k	S_k	R_k	B_k	C_k	E_k	D_k	N_k^S	N_k^R	F_k
0	1.000	1.000	80.000	20.000	40.000	60.000	40.000	60.000	100.000
1	0.900	1.030	82.400	15.400	36.000	61.800	40.000	60.000	97.800
1^+	0.900	1.030	82.400	15.400	30.800	67.000	34.222	65.049	97.800
2	1.000	1.061	84.872	18.360	34.222	69.010	34.222	65.049	103.232
2^+	1.000	1.061	84.872	18.360	36.720	66.512	36.720	62.694	103.232
3	1.200	1.093	87.418	25.154	44.065	68.507	36.720	62.694	112.572
3^+	1.200	1.093	87.418	25.154	50.307	62.265	41.923	56.981	112.572
4	1.300	1.126	90.041	28.591	54.499	64.133	41.923	56.981	118.632
4^+	1.300	1.126	90.041	28.591	57.182	61.450	43.986	54.597	118.632
5	1.071	1.159	92.742	17.669	47.118	63.293	43.986	54.597	110.411

• Nella tavola 2 è illustrato l'analogo sviluppo qualora la strategia fosse condotta in modo più "aggressivo", con un moltiplicatore $m = 5$. Per il fattore e per il tasso di shortfall risulta quindi:

$$Q = \frac{m-1}{m}\,(1+i) = \frac{4}{5}\,1.03 = 0.824\,, \qquad \rho = Q - 1 = 17.6\%\,.$$

È consentito il "leverage"; si assume cioè che sia permesso vendere allo scoperto unità di m.m.a. per finanziare l'acquisto di azioni, qualora il valore dell'exposure richiesto dalla strategia risulti superiore al valore del fondo d'investimento.

Tavola 2. $i = 0.03\,,\ m = 5$, evoluzione a.

k	S_k	R_k	B_k	E_k	D_k	N_k^S	N_k^R	F_k
0	1.000	1.000	80.000	100.000	0.000	100.000	0.000	100.000
1	0.900	1.030	82.400	90.000	0.000	100.000	00005	90.000
1^+	0.900	1.030	82.400	38.000	52.000	42.222	50.485	90.000
2	1.000	1.061	84.872	42.222	53.560	42.222	50.485	95.782
2^+	1.000	1.061	84.872	54.551	41.231	54.551	38.864	95.782
3	1.200	1.093	87.418	65.461	42.468	54.551	38.864	107.929
3^+	1.200	1.093	87.418	102.556	5.373	85.463	4.917	107.929
4	1.300	1.126	90.041	111.102	5.534	85.463	4.917	116.637
4^+	1.300	1.126	90.041	132.981	-16.344	102.293	-14.522	116.637
5	1.071	1.159	92.742	109.576	-16.834	102.293	-14.522	92.742

• Nella tavola 3 è illustrato lo sviluppo della strategia CPPI con moltiplicatore $m = 2$ e tasso $i = 0.03$, in corrispondenza di una evoluzione del prezzo azionario ("evoluzione b") che conduce al raggiungimento del bond floor alla fine del primo anno, a causa di una caduta dello stock price per un fattore esattamente uguale a $Q = 0.515$ ($\rho = 48.5\%$).
La strategia resta "catturata" dal bond floor, nel senso che il portafoglio di investimento rimane completamente congelato sul m.m.a.

Tavola 3. $i = 0.03\,,\; m = 2$, evoluzione b.

k	S_k	R_k	B_k	E_k	D_k	N_k^S	N_k^R	F_k
0	1.000	1.000	80.000	40.000	60.000	40.000	60.000	100.000
1	0.515	1.030	82.400	20.600	61.800	0.000	80.000	82.400
1^+	0.515	1.030	82.400	0.000	82.400	0.000	80.000	82.400
2	0.800	1.061	84.872	0.000	84.872	0.000	80.000	84.872
2^+	0.800	1.061	84.872	0.000	84.872	0.000	80.000	84.872
3	1.000	1.093	87.418	0.000	87.418	0.000	80.000	87.418
3^+	1.000	1.093	87.418	0.000	87.418	0.000	80.000	87.418
4	1.200	1.126	90.041	0.000	90.041	0.000	80.000	90.041
4^+	1.200	1.126	90.041	0.000	90.041	0.000	80.000	90.041
5	1.300	1.159	92.742	0.000	92.742	0.000	80.000	92.742

• Nella tavola 4 la stessa strategia CPPI (con moltiplicatore $m = 2$ e tasso $i = 0.03$) è sviluppata in corrispondenza di una evoluzione del prezzo azionario ("evoluzione c") che conduce al superamento del bond floor ("*shortfall*"). Il superamento è causato da una caduta dello stock price del 50% (superiore quindi al valore limite $\rho = 48.5\%$) nel corso del primo anno.
Si assume che non sia permesso vendere allo scoperto titoli azionari (come richiederebbe un valore negativo del cushion): dopo lo shortfall il portafoglio di investimento viene totalmente immobilizzato in unità del m.m.a. La strategia, quindi, resta "intrappolata" sotto il livello del bond floor, senza possibilità di recuperare la perdita dovuta al superamento.

Tavola 4. $i = 0.03$, $m = 2$, evoluzione c.

k	S_k	R_k	B_k	E_k	D_k	N_k^S	N_k^R	F_k
0	1.000	1.000	80.000	40.000	60.000	40.000	60.000	100.000
1	0.500	1.030	82.400	20.000	61.800	0.000	79.417	81.800
1^+	0.500	1.030	82.400	0.000	81.800	0.000	79.417	81.800
2	0.800	1.061	84.872	0.000	84.254	0.000	79.417	84.254
2^+	0.800	1.061	84.872	0.000	84.254	0.000	79.417	84.254
3	1.000	1.093	87.418	0.000	86.782	0.000	79.417	86.782
3^+	1.000	1.093	87.418	0.000	86.782	0.000	79.417	86.782
4	1.200	1.126	90.041	0.000	89.385	0.000	79.417	89.385
4^+	1.200	1.126	90.041	0.000	89.385	0.000	79.417	89.385
5	1.300	1.159	92.742	0.000	92.067	0.000	79.417	92.067

Le componenti base di una strategia di Portfolio Insurance

Si consideri un fondo di investimento, con valore di mercato F_t al tempo t.

Il fondo è diviso in due componenti:

- un "fondo gestito", composto da un numero N_t^S di "*active asset*", con valore di mercato S_t; il valore del fondo gestitoè:

  $$E_t = N_t^S \, S_t \, ;$$

  E_t è detta anche "esposizione" (*exposure*);
- un "fondo riserva", composto da un numero N_t^R di "*reserve asset*", con valore di mercato R_t; il valore del fondo riserva è:

  $$D_t = N_t^R \, R_t \, .$$

Si ha quindi:

$$F_t = E_t + D_t = N_t^S \, S_t + N_t^R \, R_t \, .$$

Si consideri anche:

- un fondo con valore B_t; il livello B_t rappresenta il valore in t del minimo garantito (*floor* o *bond floor*);
- una strategia di gestione "*autofinanziante*", descritta, al variare del tempo, dalla coppia:

  $$\left(N_t^S, \, N_t^R\right) \; ;$$

  le quote N_t^S e N_t^R sono riaggiustate secondo la regola:

  $$E_t = m \, C_t \, , \quad \text{con} \quad C_t := F_t - B_t \quad \text{e} \quad m > 1 \ \text{fissato.}$$

– La componente riserva D_t è un fondo non rischioso, nel senso che replica con buona approssimazione un fissato profilo di liabilities; si può intendere come un “fondo obbligazionario dedicato”.

– La componente gestita E_t è un fondo rischioso, nel senso che ha valore futuro imprevedibile. Si può pensare come un portafoglio azionario; ha rendimento atteso maggiore di quello del fondo riserva. Nelle applicazioni pratiche il fondo riserva è un portafoglio con livello di rischiosità trascurabile rispetto a quella del fondo gestito.

– Idealmente, il valore B_t del bond floor è non rischioso (deterministico). Nelle applicazioni pratiche B_t è il valore di mercato di un fondo con rischiosità molto bassa.
Per esempio: $B_t = B_0\, e^{r_t t}$, dove r_t è il tasso a breve di mercato in t.
Spesso B_t ha richiosità paragonabile a D_t.

– Una strategia è autofinanziante quando il valore F_t del portafoglio che ne risulta è interamente reinvestito, senza ulteriori versamenti né prelievi, nel fondo gestito e nel fondo riserva.
Deve cioè aversi:

$$\begin{aligned} F_{t+\Delta t} &= N_t^S\, S_{t+\Delta t} + N_t^R\, R_{t+\Delta t} \\ &= N_{t+\Delta t}^S\, S_{t+\Delta t} + N_{t+\Delta t}^R\, R_{t+\Delta t}\,. \end{aligned}$$

Dato che:

$$N_t^S = \frac{E_t}{S_t}\,, \quad N_t^R = \frac{F_t - E_t}{R_t}\,,$$

una strategia di gestione può essere impostata definendo le regole di calcolo dell’esposizione E_t.

2 – Una classificazione delle strategie di gestione del portafoglio

Lo schema stock/bond

Strategie Buy-and-Hold

Strategie Constant Mix

Strategie BH vs strategie CM

Strategie Constant Proportion

La Constant Proportion Portfolio Insurance

Strategie BH vs strategie CPPI

Le strategie CP in sintesi

L'Option Based Portfolio Insurance

Nel modello di Black e Scholes

L'evoluzione del payoff

L'evoluzione dell'esposizione

L'OBPI secondo la scomposizione put

Strategie Stop Loss

Lo schema stock/bond

Il fondo di investimento F_t sia formato da una componente azionaria ("stock") e da una componente obbligazionaria ("bond"). Sia:

S_t: prezzo in t di una unità di stock,

R_t: prezzo in t di una unità di bond,

e sia:

N_t^S: numero di unità di stock detenute al tempo t,

N_t^R: numero di unità di bond detenute al tempo t.

Si ha:

$E_t = N_t^S\, S_t$: valore degli "stock",

$D_t = N_t^R\, R_t$: valore dei "bond".

Quindi:

$$F_t = E_t + D_t = N_t^S\, S_t + N_t^R\, R_t\,.$$

La *quota azionaria* in t può essere definita in termini di numero di quote:

$$\alpha_t^N := \frac{N_t^S}{N_t^S + N_t^R}\,,$$

o in termini di valore:

$$\alpha_t^V := \frac{E_t}{F_t}\,.$$

• al tempo 0

Il portafoglio è costituito al tempo 0 acquistando:

$$N_0^S \geq 0 \text{ unità di stock e } N_0^R \geq 0 \text{ unità di bond.}$$

Per semplicità, si assuma:

$$N_0^S + N_0^R = 1\,,$$

e

$$S_0 = R_0 = 100\,,$$

per cui:

$$F_0 = N_0^S\, S_0 + N_0^R\, R_0 = 100\,.$$

Si ha quindi:

$$N_0^S = \alpha_0^N = \alpha_0^V\,.$$

• evoluzione dei prezzi

Si assume:

- per R_t evoluzione deterministica con "tasso" r:

$$R_t = R_0\, e^{r\,t}\,;$$

- per S_t evoluzione stocastica.

Osservazione. Il modello standard per S_t è lognormale:

$$S_t = S_0\, e^{\mu\, t + \sigma \sqrt{t}\, \varepsilon_t}\,, \quad \text{con} \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)\,.$$

Più propriamente, S_t è un *moto browniano geometrico*, descritto dalla $S_t = S_0\, e^{\mu\, t + \sigma\, Z_t}$, dove Z_t è il moto browniano standard. ■

• diagrammi di payoff:

$$F_t \text{ in funzione di } S_t$$

$\leftarrow$ descrivono le performance del portafoglio in funzione delle performance del mercato azionario.

• diagrammi di esposizione:

$$E_t \text{ in funzione di } F_t$$

$\leftarrow$ descrivono il valore dell'investimento azionario in funzione del valore dei "total assets".

Tipicamente, nei diagrammi di payoff e di esposizione si pone, per semplicità, $r = 0$.
[PS-1988]

Strategie Buy-and-Hold

In una strategia “Buy-and-Hold” (BH) il numero di quote acquisite in $t = 0$ viene lasciato inalterato nel tempo (strategia “do nothing”):

$$N_t^S = N_0^S, \quad N_t^R = N_0^R, \quad t > 0\,.$$

Si ha quindi:

$$F_t = N_0^S\, S_t + N_0^R\, R_t\,.$$

La quota azionaria è costante in termini di quote:

$$\alpha_t^N = \alpha_0^N\,,$$

ma varia in termini di valore:

$$\alpha_t^V = \frac{1}{1 + \frac{N_0^R}{N_0^S}\frac{R_t}{S_t}}\,.$$

Dato che $N_0^S + N_0^R = 1$, si ha:

$$F_t = \alpha_0^N\, S_t + (1 - \alpha_0^N)\, R_t\,.$$

Assumendo inoltre $r = 0$ si ha la funzione di **payoff**:

$$F_t = \alpha_0^N\, S_t + (1 - \alpha_0^N)\, R_0$$

(che è del tipo $y = ax + b$), e la funzione di **esposizione**:

$$E_t = F_t - (1 - \alpha_0^N)\, R_0$$

(del tipo $y = x - b$).

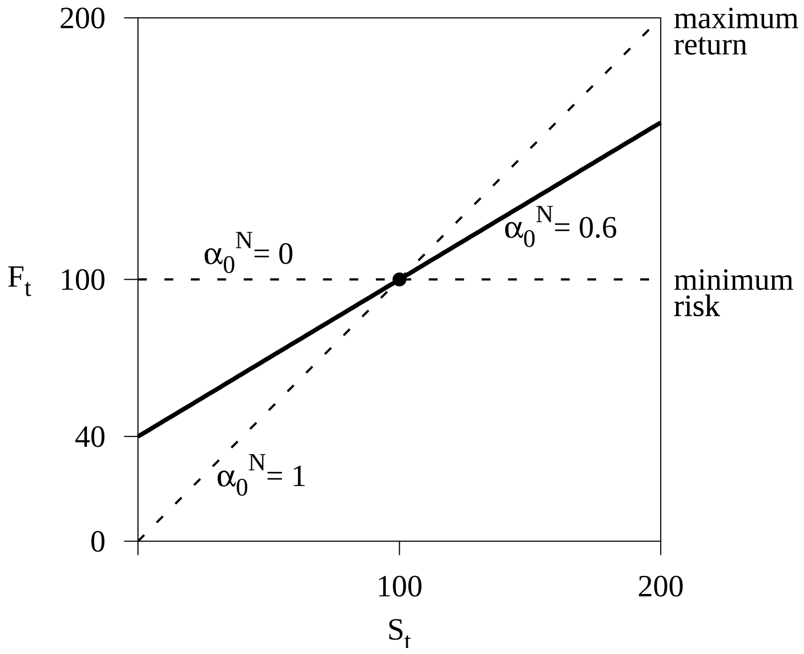
Osservazione. Il livello deterministico:

$$D_t = (1 - \alpha_0^N)\, R_t\,,$$

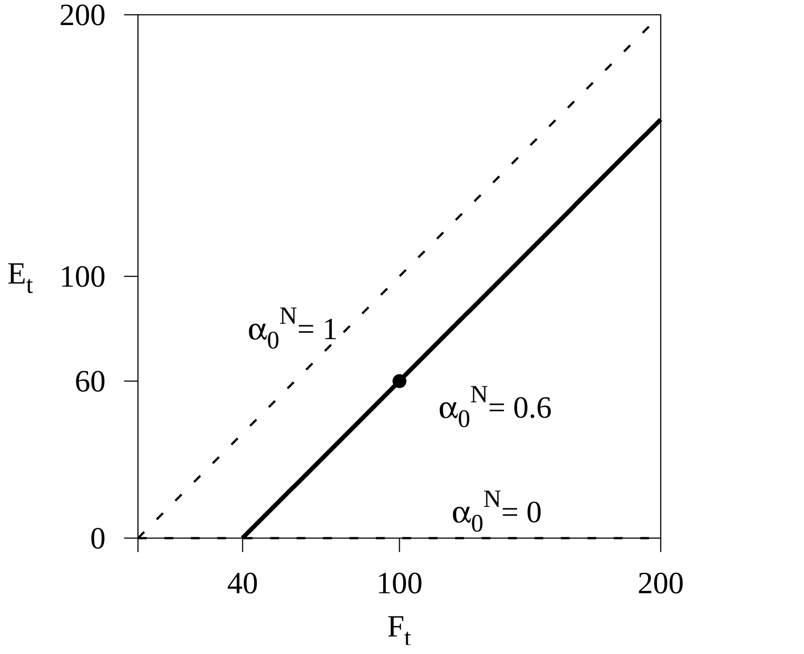
costituisce un floor per il valore F_t del fondo. Le opportunità di apprezzamento sono potenzialmente illimitate. ■

Per $S_0 = R_0 = 100$ e $\alpha_0^N = 0.6$ si hanno i seguenti diagrammi.

BH: payoff



BH: exposure



Strategie Constant Mix

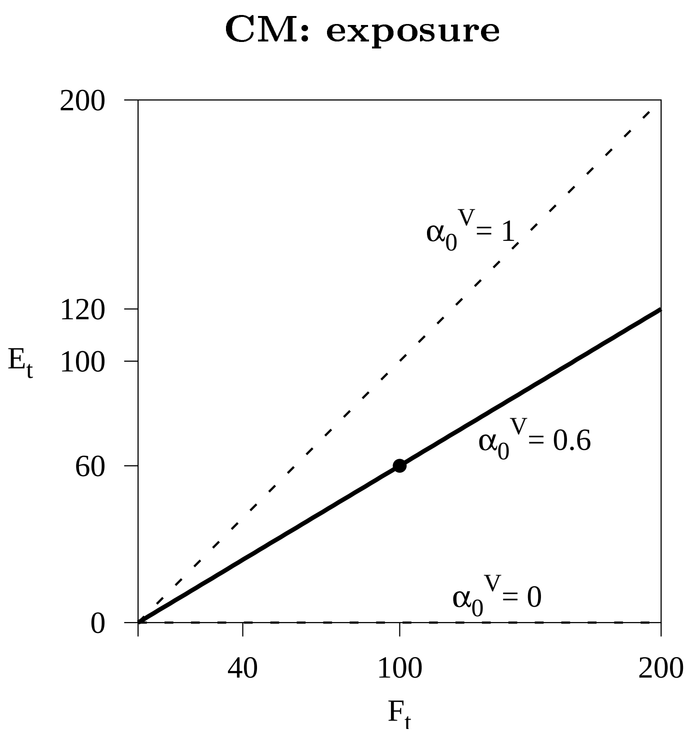
In una strategia "Constant Mix" (CM) viene mantenuta costante la quota azionaria in termini di valore:

$$\alpha_t^V = \alpha_0^V , \quad t > 0 .$$

La funzione di esposizione è quindi:

$$E_t = \alpha_0^V F_t .$$

Per $\alpha_0^V = 0.6$ si ha il diagramma di esposizione:



Si tratta di una strategia dinamica: quando S_t varia (in modo diverso da R_t) bisogna *ricalibrare* il portafoglio:

rialzo di S_t: vendita di azioni

ribasso di S_t: acquisto di azioni

$\longrightarrow$ strategia "**controvariante**".

Strategia effettiva: ricalibrature al discreto. Per es.: ricalibrare quando il mercato azionario si muove di almeno il 10%.

Strategie BH vs strategie CM

- Movimenti di mercato unidirezionali

Con:

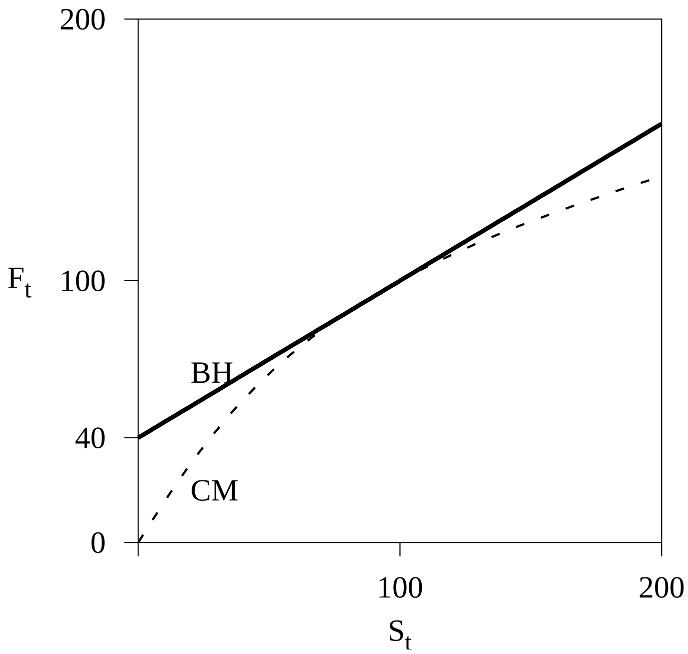
S_t da $S_0 = 100$ a $+\infty$, ininterrottamente,

oppure:

S_t da $S_0 = 100$ a 0, ininterrottamente,

e ricalibrature a $\Delta S_t / S_t = 10\%$:

BH vs CM: payoff

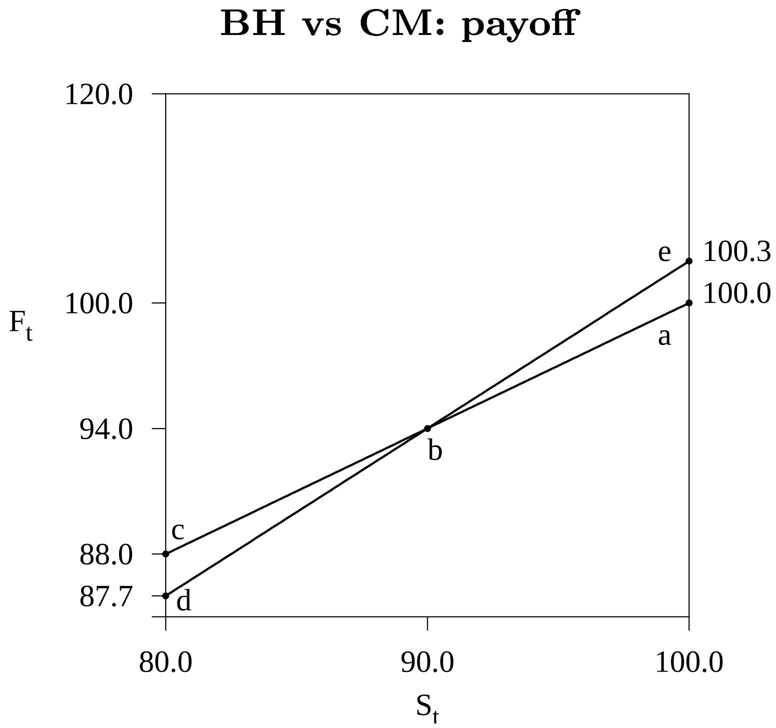


• Movimenti di mercato oscillanti (reversal)

Con:

S_t da $S_0 = 100$ a 90, quindi di nuovo a 100,

e ricalibrature a $\Delta S_t / S_t = 10\%$:



• La BH è una strategia "**lineare**" (perché è statica);
la CM è una strategia "**concava**" (perché è controvariante).

• In linea di principio, ceteris paribus, per un fissato orizzonte temporale T:

· se il mercato in T torna vicino al suo livello di partenza, è favorita la strategia CM;

· se il mercato in T finisce lontano dal livello di partenza, è favorita la strategia BH.

Strategie Constant Proportion

In una strategia "Constant Proportion" (CP), si definisce un *moltiplicatore*:

$$m \geq 0\,,$$

e un *bond floor* B_t, e si gestisce il portafoglio in modo da avere:

$$E_t = m\,(F_t - B_t)\,, \quad t \geq 0\,,$$

si gestisce cioè il portafoglio in modo che l'esposizione azionaria sia sempre proporzionale al "cushion":

$$C_t = F_t - B_t\,.$$

Si assume:

$$B_t = B_0\,e^{r\,t}\,,$$

e:

$$B_0 < F_0\,.$$

• Una strategia BH è un caso particolare di strategia CP (per $r = 0$). Ponendo:

$$m = 1 \quad \text{e} \quad B_0 = D_0\,,$$

si ha:

$$E_t = F_t - D_0\,, \quad t \geq 0\,.$$

• Una strategia CM è un caso particolare di strategia CP. Ponendo:

$$m \in (0, 1) \quad \text{e} \quad B_0 = 0\,,$$

si ha $E_t = m\,F_t$, cioè:

$$\alpha_t^V = m\,, \quad t \geq 0\,.$$

La Constant Proportion Portfolio Insurance

Una "Constant Proportion Portfolio Insurance" (CPPI) è una strategia CP con moltiplicatore maggiore di 1:

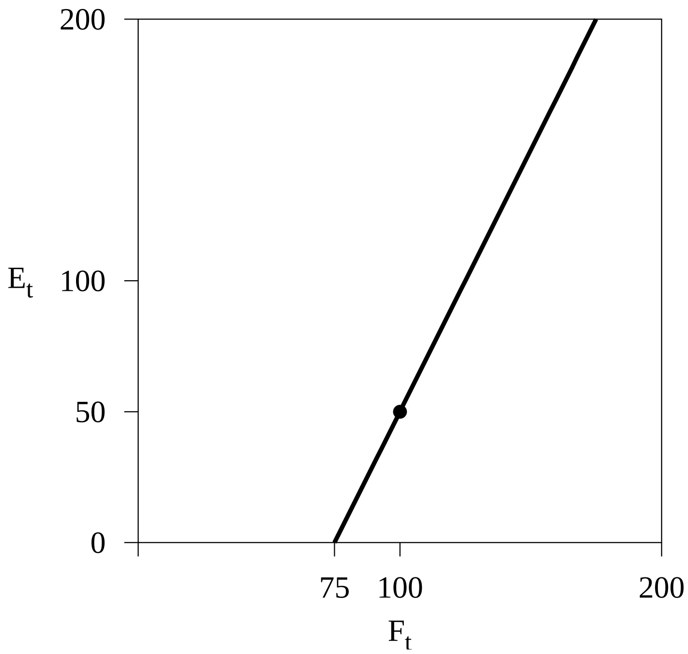
$$m > 1\,.$$

Esempio – Per $m = 2$, $B_0 = 75$, ($S_0 = R_0 = 100$, $r = 0$), si ha:

$$E_t = 2\,F_t - 150$$

(che implica $\alpha_0^N = \alpha_0^V = 0.5$).

CP: exposure



Borrowing limit. Per valori abbastanza grandi di m, può accadere che sia $m\,(F_t - B_t) > F_t$, il che richiederebbe un investimento azionario superiore al valore dei total asset. Se questo leverage non è consentito, la definizione di CPPI va modificata nella:

$$E_t = \min\{m\,(F_t - B_t),\, F_t\}\,, \quad m > 1\,.$$

$\rightarrow$ si raggiunge il "borrowing limit" quando $m\,C_t = F_t$, cioè quando $F_t = B_t\,m/(m-1)$.

Strategie BH vs strategie CPPI

Esempio – Sia $m = 2$, $B_0 = 75$, ($S_0 = R_0 = 100,\ r = 0$).

• Movimenti di mercato unidirezionali

Con:

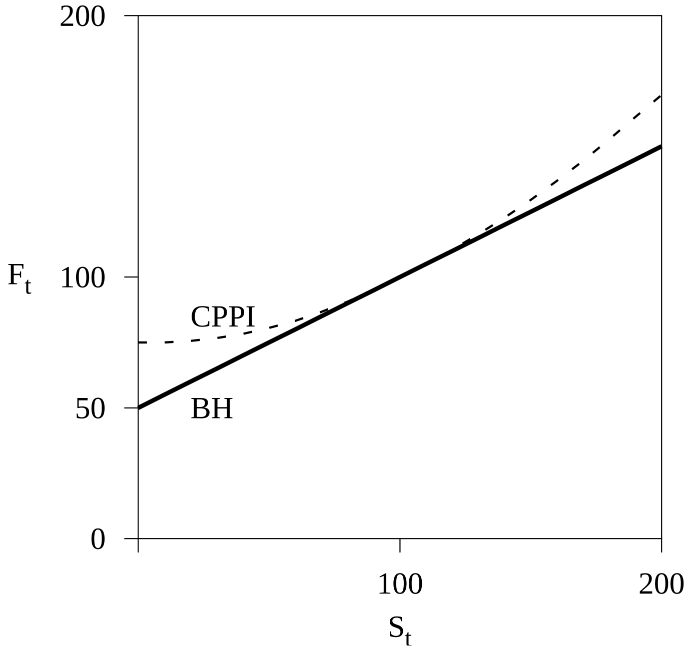
S_t da $S_0 = 100$ a $+\infty$, ininterrottamente,

oppure:

S_t da $S_0 = 100$ a 0, ininterrottamente,

e ricalibrature a $\Delta S_t / S_t = 10\%$:

BH vs CPPI: payoff

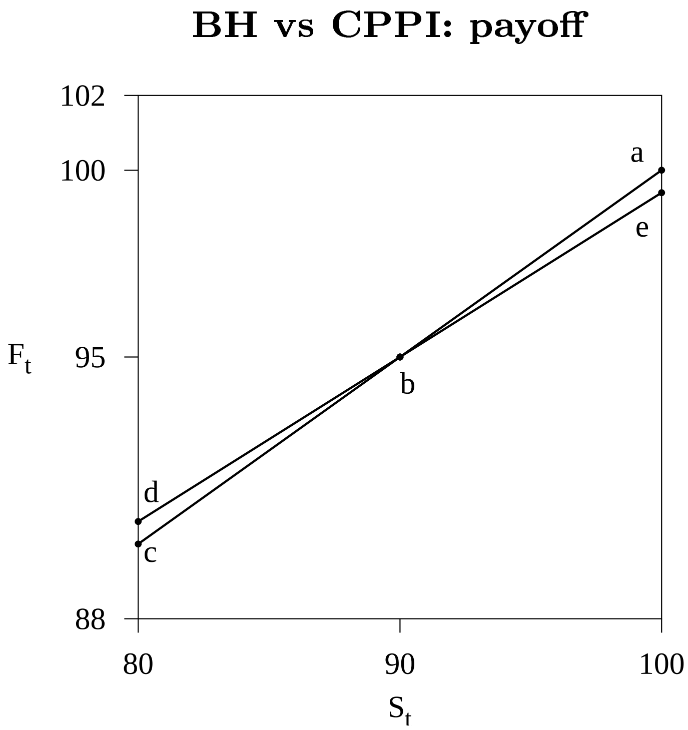


• Movimenti di mercato oscillanti (reversal)

Con:

S_t da $S_0 = 100$ a 90, quindi di nuovo a 100,

e ricalibrature a $\Delta S_t / S_t = 10\%$:



• Se il mercato azionario si apprezza [deprezza] (più del bond floor), il cushion aumenta [decresce], e va pertanto aumentato [diminuito] il numero di quote azionarie.

Quindi, in una CPPI:

un rialzo di S_t richiede l'acquisto di azioni

un ribasso di S_t richiede una vendita di azioni

$\longrightarrow$ strategia "**a inseguimento**"

$\longrightarrow$ strategia a payoff **convesso**.

• Nel caso ideale di ricalibratura continua, F_t non può mai scendere sotto il bond floor. (Se si tende a B_t, il fondo tende a essere totalmente investito in bond.)

• Con ricalibrature al discreto, il prezzo azionario S_t deve cadere per più di un fattore $(m-1)/m$ (se $r=0$) entro un intervallo di ricalibratura perché il floor possa essere superato.

• Una CPPI dà buone performance nel caso di mercati in forte rialzo; nel caso di mercati "oscillanti" una CPPI può soffrire degli stessi problemi di una CM.

Le strategie CP in sintesi

- Strategie BH
  - · CP con $m = 1$ e $B_0 = F_0$;
  - · strategia statica;
  - · payoff lineare;
  - · protezione dal downside risk; upside potential illimitato.

- Strategie CM
  - · CP con $m \in (0, 1)$ e $B_0 = 0$;
  - · strategia "controvariante";
  - · payoff concavo;
  - · elevato downside risk; cattive performance in un mercato espansivo; possono essere favorite in un mercato stazionario e oscillante$^{(!)}$.

- Strategie CPPI
  - · CP con $m > 1$;
  - · strategia "a inseguimento";
  - · payoff convesso;
  - · buona protezione dal downside risk; buone performance in un mercato espansivo; possono essere sfavorite in un mercato oscillante$^{(!)}$.

! Le performance relative delle diverse strategie di investimento possono essere definite solo in riferimento a movimenti di mercato "stilizzati".
L'alta complessità dei movimenti di mercato reali non consente di effettuare una vera graduatoria di efficacia.

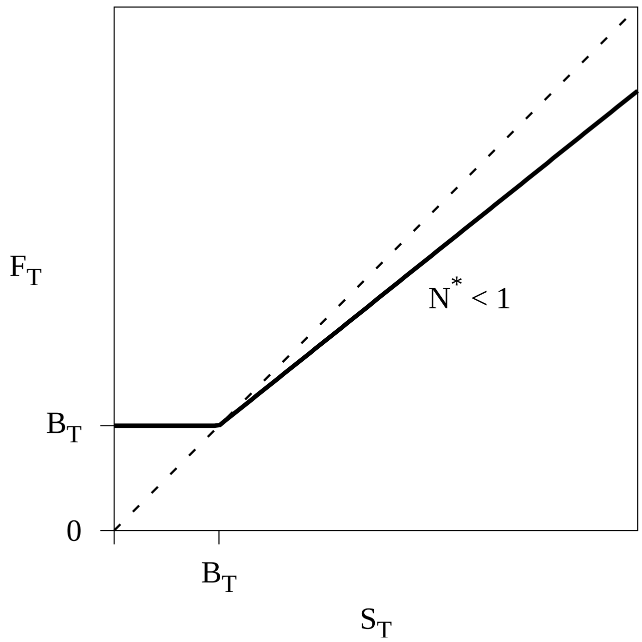
L'Option Based Portfolio Insurance

In una strategia di "Option Based Portfolio Insurance" (OBPI), si fissa un orizzonte temporale (scadenza) T e un floor a scadenza B_T, e si richiede il payoff finale:

$$F_T = \max\{N^* S_T, B_T\},$$

con N^* fissato. Si richiede quindi un payoff convesso (a scadenza, lineare a tratti).

OBPI: payoff



Il payoff F_T si può esprimere usando la "scomposizione call":

$$\begin{aligned} F_T &= B_T + [N^* S_T - B_T]^+ \\ &= B_T + N^* [S_T - K]^+, \end{aligned}$$

essendo:

$$K := \frac{B_T}{N^*}.$$

• In $t = 0$ si ha:

$$
\begin{aligned}
F_0 &= V(0; F_T) \\
&= B_T\, e^{-r\,T} + N^*\, V\left(0; [S_T - K]^+\right)\ ,
\end{aligned}
$$

cioè:

$$
F_0 = B_0 + N^*\ EC_0\,,
$$

essendo:

$$
B_0 := B_T\ e^{-r\,T} \quad \text{e} \quad EC_0 := V\left(0; [S_T - K]^+\right)\ .
$$

$\Longrightarrow$ la strategia OBPI parte:

· investendo B_0 in zcb con scadenza T, e

· investendo il cushion in opzioni call europee su S_t, con scadenza T e strike $K = B_T/N^*$ (se ne possono acquistare N^*).

Nel modello di Black e Scholes

Nel modello standard – alla Black e Scholes – si ha:

$$EC_0 = S_0\,\Phi(d_0) - K\,e^{-r\,T}\,\Phi(d_0^*)\,,$$

con:

$$d_0 := \frac{\log(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)\,T}{\sigma\,\sqrt{T}}\,,$$

$$d_0^* := d_0 - \sigma\,\sqrt{T}\,.$$

Si ha quindi:

$$\begin{aligned} F_0 &= B_0 + N^*\,EC_0 \\ &= B_0 + N^*\left[S_0\,\Phi(d_0) - K\,e^{-r\,T}\,\Phi(d_0^*)\right] \\ &= B_0 + N^*\,S_0\,\Phi(d_0) - B_0\,\Phi(d_0^*)\,, \end{aligned}$$

cioè:

$$F_0 = N^*\,S_0\,\Phi(d_0) + B_0\,\Phi(-d_0^*)\,.$$

$\Longrightarrow$ la strategia OBPI parte:
- · acquistando $\Phi(-d_0^*)$ zcb con scadenza T e valore facciale B_T, e
- · acquistando $N^*\,\Phi(d_0)$ azioni.

La componente riserva è:

$$D_0 = \Phi(-d_0^*)\,B_0\,,$$

e l'esposizione azionaria è:

$$E_0 = N^*\,\Phi(d_0)\,S_0\,.$$

Osservazione. Per un dato livello iniziale d'investimento F_0 e per un fissato orizzonte T, la scelta di B_0 implica $N^* \, EC_0 = F_0 - B_0$. Data la situazione di mercato (cioè i livelli di r e σ), il numero di opzioni da acquistare si ricava quindi risolvendo l'equazione:

$$N^* = \frac{F_0 - B_0}{EC_0}$$

(dove EC_0, secondo la formula di Black e Scholes, è funzione non lineare di N^* attraverso l'espressione di K nelle funzioni d_0 e d_0^*). La forma del payoff a scadenza F_T resta specificata di conseguenza.
■

Osservazione. Dato che l'esposizione azionaria in 0 è definita come $E_0 = N_0^S \, S_0$, risulta:

$$N_0^S = N^* \, \Phi(d_0) \, ;$$

quindi, dato che è $\Phi(d_0) < 1$, il numero di quote azionarie da acquistare effettivamente è minore di N^*. ■

• In $t \in [0, T]$

Si ha:

$$\begin{aligned} F_t &= V(t; F_T) \\ &= B_0\, e^{r\,t} + N^*\, V\left(t; [S_T - K]^+\right)\,, \end{aligned}$$

cioè:

$$F_t = B_t + N^*\, EC_t\,,$$

essendo:

$$B_t := B_0\, e^{r\,t} \quad \text{e} \quad EC_t := V\left(t; [S_T - K]^+\right)\,.$$

Nel modello di Black e Scholes si ha:

$$EC_t = S_t\, \Phi(d_t) - K\, e^{-r\,(T-t)}\, \Phi(d_t^*)\,,$$

con:

$$\begin{aligned} d_t &:= \frac{\log(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)\,(T-t)}{\sigma\,\sqrt{T-t}}\,, \\ d_t^* &:= d_t - \sigma\,\sqrt{T-t}\,. \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F_t &= B_t + N^*\, EC_t \\ &= B_t + N^*\left[S_t\, \Phi(d_t) - K\, e^{-r\,(T-t)}\, \Phi(d_t^*)\right] \\ &= B_t + N^*\, S_t\, \Phi(d_t) - B_t\, \Phi(d_t^*)\,, \end{aligned}$$

cioè:

$$F_t = N^*\, S_t\, \Phi(d_t) + B_t\, \Phi(-d_t^*)\,.$$

La componente riserva è:

$$D_t = \Phi(-d_t^*)\, B_t\,,$$

e l'esposizione azionaria è:

$$E_t = N^*\, \Phi(d_t)\, S_t\,.$$

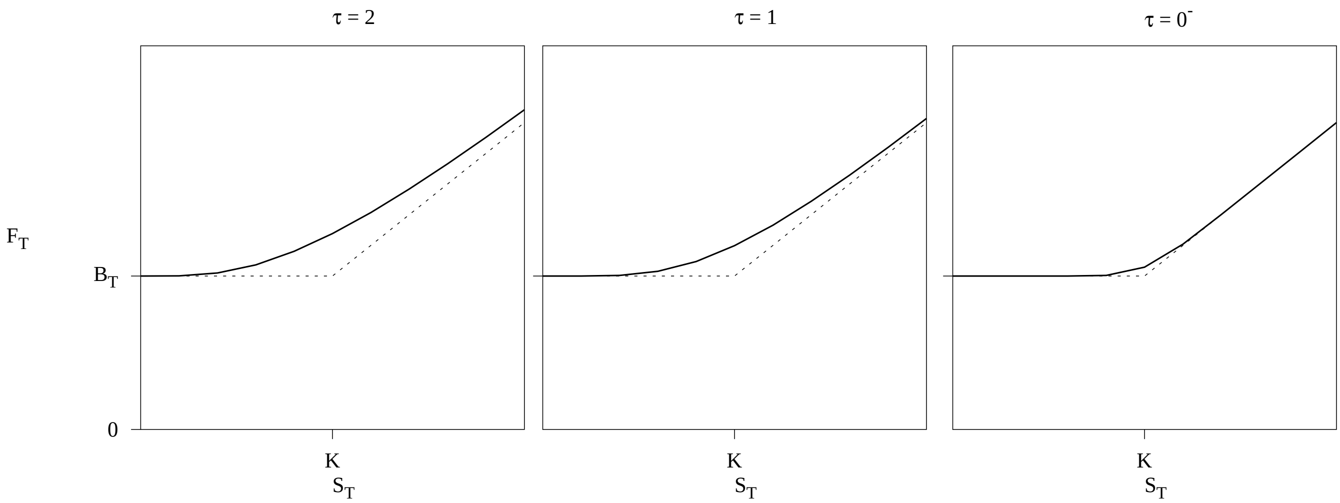
L'evoluzione del payoff

Al passare del tempo, la funzione di payoff di una OBPI, definita dalla:

$$F_t = N^* \, S_t \, \Phi(d_t) + B_t \, \Phi(-d_t^*) \, ,$$

tende "dall'alto" al payoff (lineare a tratti) richiesto a scadenza.

OBPI: payoff
(al variare di $\tau = T - t$)



L'evoluzione dell'esposizione

Dato che l'esposizione azionaria in t è definita come $S_t = N_t^S \, S_t$, si ha:

$$N_t^S = N^* \, \Phi(d_t) \, .$$

• Risulta che $\Phi(d_t)$ è funzione non decrescente di S_t; quindi, in una OBPI:

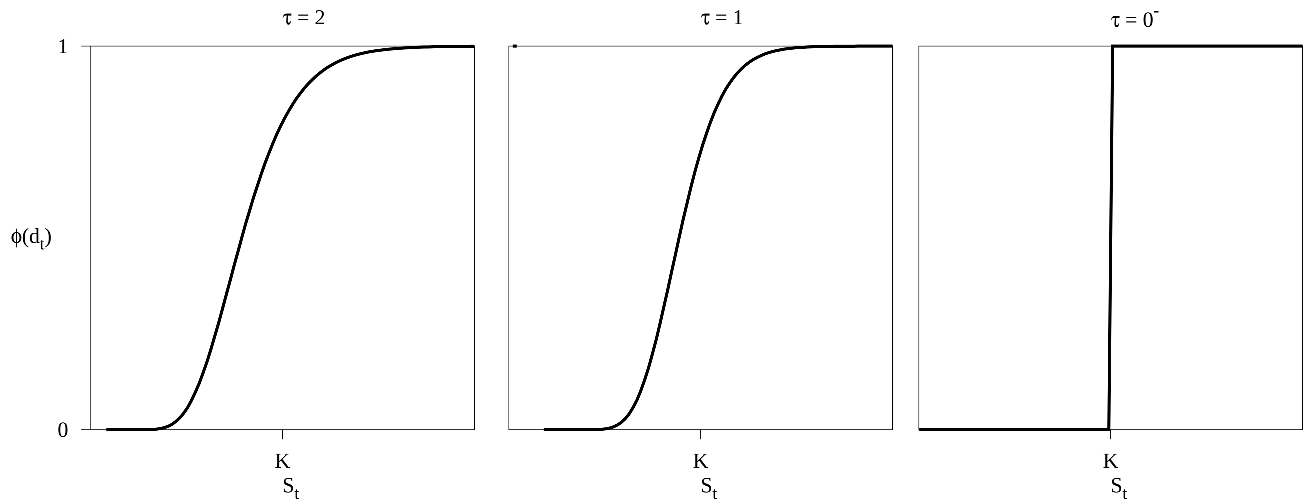
un rialzo di S_t richiede l'acquisto di azioni

un ribasso di S_t richiede una vendita di azioni

$\longrightarrow$ strategia "a inseguimento"

$\longrightarrow$ strategia a payoff convesso.

OBPI: delta
(al variare di $\tau = T - t$)



• $\Phi(d_t)$ cambia con t, quindi in una OBPI l'esposizione è time-dependent.
Precisamente, dato che $F_t = E_t + D_t$ e $D_t = \Phi(-d_t^*)\, B_t$, si ricava:

$$E_t = (F_t - B_t) + B_t\, \Phi(d_t^*)\, ;$$

in una CPPI, invece, E_t dipende solo dal cushion $F_t - B_t$.

• Data la forma di $\Phi(d_t)$ al passare del tempo, una OBPI produce comunque mix estremi a scadenza.

L'OBPI secondo la scomposizione put

Si può anche usare la rappresentazione:

$$\begin{aligned} F_t &= V(t; F_T) \\ &= N^* \left(S_T + V\left(t; [K - S_T]^+\right)\right) \\ &= N^* \left(S_t + EP_t \right), \end{aligned}$$

essendo:

$$EP_t := V\left(t; [K - S_T]^+\right) ,$$

il prezzo in t di una put europea su S_t, con strike K e maturity T (put "protettiva").

Nel modello di Black e Scholes:

$$EP_t = K\, e^{-r\,(T-t)}\, \Phi(-d_t^*) - S_t\, \Phi(-d_t)\,.$$

Naturalmente si ha:

$$\begin{aligned} F_t &= N^* \left(S_t + EP_t \right) \\ &= N^* \left[S_t + K\, e^{-r\,(T-t)}\, \Phi(-d_t^*) - S_t\, \Phi(-d_t) \right] \\ &= N^*\, S_t \left[1 - \Phi(-d_t) \right] + N^*\, K\, e^{-r\,(T-t)}\, \Phi(-d_t^*)\,, \end{aligned}$$

cioè ancora:

$$F_t = N^*\, S_t\, \Phi(d_t) + B_t\, \Phi(-d_t^*)\,.$$

Osservazione. Una strategia "Synthetic Put Option" (SPO) consiste nell'affiancare effettivamente all'investimento azionario S_t una put sintetica, replicata cioè assumendo una posizione long in bond e una posizione short in stock, secondo le regole del delta hedging [BlR-1987]. ■

Strategie Stop Loss

In una strategia di “Stop Loss” (SL), si fissa un bond floor B_t, con $B_0 < F_0$, e si investe l’intero ammontare del fondo in stock, per annullare completamente l’esposizione non appena F_t raggiunge B_t. Quindi:

$$E_t = F_t\,, \quad \text{per} \quad t < t^*\,,$$
$$E_t = 0\,, \quad \text{per} \quad t \geq t^*\,,$$

essendo t^* il primo istante in cui $F_t \leq B_t$.

3 – Le strategie “Constant Proportion Portfolio Insurance”

Componenti e logica di gestione

In una "Constant Proportion Portfolio Insurance" (CPPI) viene definito:

- un "fondo gestito", con valore E_t ("exposure"),
- un "fondo riserva", con valore D_t,
- un "bond floor", con valore B_t,
- un moltiplicatore $m > 1$;

la strategia di gestione consiste nel calibrare il fondo d'investimento:

$$F_t = E_t + D_t = N_t^S \, S_t + N_t^R \, R_t \, ,$$

in modo che il valore del fondo gestito E_t si mantenga uguale a un multiplo m della differenza ("cushion") $C_t = F_t - B_t$:

$$E_t = m \, (F_t - B_t) \, , \quad t \geq 0 \, .$$

Obiettivo della CPPI: garantire che sia $F_t \geq B_t$ per ogni t salvaguardando le possibilità di guadagno in un mercato rialzista.

Osservazione Il bond floor va definito sia nel livello B_t che nella composizione.
Per es., il bond floor può essere espresso come numero b di quote del fondo riserva: $B_t = b \, R_t$: è definito sia il livello che la composizione.
Per es., il livello B_t può essere definito come una funzione di F_t: va ancora specificata la composizione. ∎

$\oplus$ La CPPI garantisce che $F_t \geq B_t$ soltanto se i riaggiustamenti sono effettuati con continuità e i valori del fondo gestito, del fondo riserva e del bond floor non subiscono salti.

$\oplus$ Se in un istante t^* è $F_{t^*} = B_{t^*}$ (e quindi $E_{t^*} = 0$) per la prima volta, la strategia ha raggiunto il bond floor. Per qualsiasi $t > t^*$ si avrà $F_t = D_t$.

$\Longrightarrow$ Una volta specificate le caratteristiche del fondo gestito, le strategie CPPI possono ancora differenziarsi notevolmente per la scelta del fondo riserva e della forma del floor.

I passi della strategia

La realizzazione di una strategia CPPI con passo di ricalibratura Δt si può sintetizzare nei seguenti passi:

1 – calcolo del NAV

$$F_t = N^S_{t-\Delta t}\, S_t + N^R_{t-\Delta t}\, R_t\,;$$

2 – calcolo del cushion

$$C_t = F_t - B_t\,;$$

3 – calcolo dell'esposizione

$$E_t = m\, C_t\,;$$

4 – calcolo delle quote di composizione

$$N^S_t = \frac{E_t}{S_t}, \quad N^R_t = \frac{F_t - E_t}{S_t}\,.$$

Caratterizzare strategie CPPI

Alcuni esempi:

a) $R_t = e^{r\,t}, \quad B_t = B_0\, e^{r\,t}, \quad r \geq 0,\, B_0 > 0\,.$

b) $R_t = v(t,T), \quad B_t = B_0\, v(t,T), \quad B_0 > 0,\, T \geq t\,;$
essendo $v(t,T)$ il valore in t di uno zcb unitario con scadenza in T.

c) $R_t = w(t,T;c,f), \quad B_t = B_0\, w(t,T;c,f), \quad B_0 > 0,\, T \geq t\,;$
essendo $w(t,T;c,f)$ è il valore in t di un cb con valore di rimborso unitario, scadenza T, cedola c pagata f volte all'anno.

d) R_t quota di fondo monetario, $\quad B_t = (B_0/R_0)\, R_t, \quad B_0 > 0\,.$

e) R_t qualsiasi, $\quad B_t = k \max\{F_\tau\}_{0 \leq \tau \leq t}, \quad 0 < k \leq 1\,.$

f) R_t quota di fondo monetario, $\; B_t = B_0\, v(t,T),\; B_0 > 0,\; T \geq t\,.$

$\oplus$ La (a) è la CPPI "standard" [BlJ-1987], [DeVM-1994].

$\oplus$ Le strategie (a), (d), (e) possono essere realizzate senza un prefissato orizzonte temporale; le strategie (b), (c) e (f) hanno naturalmente termine in T.

$\oplus$ La strategia (e) è detta anche "Time Invariant Portfolio Protection", TIPP [EsK-1988].

Moltiplicatore

Dato che l'exposure:

$$E_t = m\, C_t\,,$$

costituisce la componente più rischiosa del portafoglio d'investimento F_t, il moltiplicatore m definisce l'aggressività della strategia:
a parità di cushion, tanto più grande è m tanto più grande è l'esposizione.

Leva finanziaria

Anche se m e B_0 sono scelti in modo che $m\, C_0 \leq F_0$, può accadere che risulti $m\, C_t > F_t$ per qualche $t > 0$; quindi l'attuazione della strategia richiederebbe la vendita alla scoperto del fondo riserva (o un finanziamento) per l'importo $m\, C_t - F_t \longleftarrow$ *leva finanziaria*, *leverage*.

Tipicamente si pone un limite superiore (*borrowing limit*) alla leva imponendo all'esposizione un valore massimo ammissibile uguale a lF_t, con $1 \leq l < m$. La definizione della strategia diventa quindi:

$$E_t = \min\{m\, C_t,\, l\, F_t\}\,, \quad 1 \leq l < m\,;$$

il coefficiente l è il cosiddetto *maximum leverage ratio*.

- Per le polizze unit-linked tipicamente è $l = 1$ (leva nulla).

La CPPI standard nel tempo continuo

Se la CPPI standard è effettuata nel tempo continuo, cioè se i riaggiustamenti delle quote sono effettuati in ogni istante, e se il processo $\{S_t\}$ è a traiettorie continue, allora la strategia è efficace, ovvero è garantita la disuguaglianza:

$$F_t \geq B_t \ \text{ per ogni } \ t\,.$$

Più in generale, si può dimostrare che il cushion C_t soddisfa l'equazione:

$$dC_t = m\,C_t \frac{dS_t}{S_t} - m\,C_t\,dt + (r\,F_t\,dt - dB_t)\ .$$

Nel modello standard si ipotizza che il valore degli asset gestiti segua un processo lognormale.
Precisamente, si assume che S_t sia un moto browniano geometrico descritto dall'equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu\,S_t\,dt + \sigma\,S_t\,dZ_t\,. \qquad (*)$$

In questo caso è possibile risolvere l'equazione del cushion e ottenere l'espressione del valore, in un generico istante t, del portafoglio di investimento costituito all'istante 0; si ha:

$$F_t = C_0\,e^{\,[r+m\,(\mu-r)-m^2\,\sigma^2/2]\,t+m\,\sigma\,Z_t} + B_0\,e^{r\,t}\,,$$

dove Z_t è il moto browniano standard. Si ricava quindi che:

- Il valore del portafoglio di investimento è descritto dalla somma di una componente deterministica e di una componente stocastica.
  La componente deterministica cresce con intensità r.
  La componente stocastica segue un processo lognormale con media istantanea $r + m(\mu - r)$ e volatilità istantanea $m\sigma$.
- Il valore atteso e la varianza (al tempo 0) del valore del portafoglio di investimento sono:

$$\mathbf{E}_0\,[F_t] = C_0\,e^{\,[r+m(\mu-r)]\,t} + B_0\,e^{rt}\,,$$

$$\mathbf{V}_0\,[F_t] = C_0^2\,e^{\,2\,[r+m(\mu-r)]\,t}\left(e^{m^2\sigma^2 t} - 1\right)\,.$$

Dato che per la $(*)$ è:

$$S_t = S_0\, e^{(\mu-\sigma^2/2)\,t+\sigma\, Z_t}\,,$$

si può anche scrivere:

$$F_t = C_0 \left(\frac{S_t}{S_0}\right)^m e^{\,-(m-1)\,(r+m\,\sigma^2/2)\,t} + B_0\, e^{r\,t}\,.$$

Quindi:

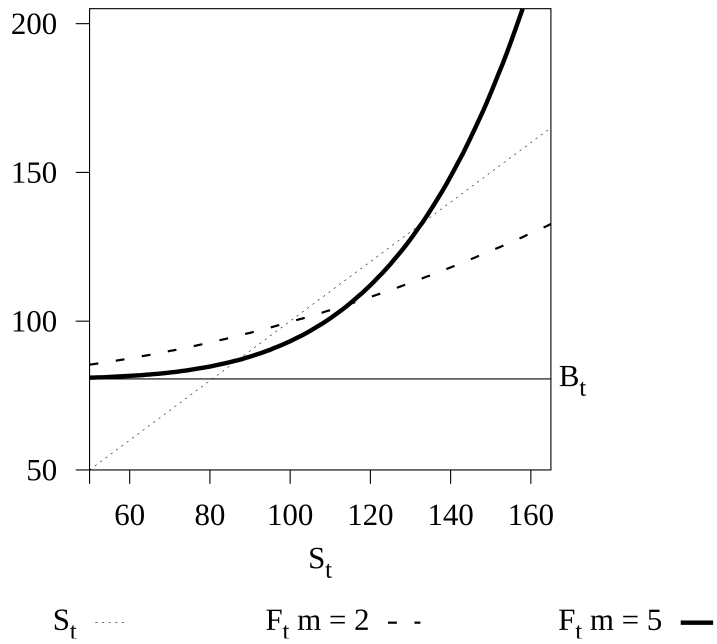
- Il valore F_t del portafoglio di investimento in un generico istante t è indipendente dalla traiettoria del sottostante, ma dipende solo dal suo valore corrente S_t.
- Anche se il valore del sottostante dovesse annullarsi, si avrebbe comunque $F_t = B_0\, e^{r\,t}$.
- La componente stocastica di F_t è determinata dall'apprezzamento di S_t, attraverso il fattore $(S_t/S_0)^m$, attenuato dal fattore di abbattimento:
$$e^{-(m-1)\,(r+m\,\sigma^2/2)\,t}\,.$$

Osservazione. Si può dimostrare che la CPPI standard è interpretabile in termini di una opzione americana perpetua di tipo call [BlP-1992]. ■

Esempio – CPPI standard, ricalibratura al continuo.

Sia: $t = 0.25\,,\ F_0 = S_0 = 100\,,\ B_0 = 80\,,\ C_0 = 20\,;$
$r = 0.03\,,\ \sigma = 0.25\,,\ \mu = 0.08\,.$

CPPI standard: payoff



Per il valore atteso e la varianza (al tempo 0) del valore del portafoglio di investimento si ha:

		$m=2$	$m=5$		$m=2$	$m=5$
	$S_{0.25}$	$F_{0.25}$	$F_{0.25}$	$S_{0.5}$	$F_{0.5}$	$F_{0.5}$
$\mathbf{E}_0$:	102.02	101.26	102.05	104.08	102.55	104.21
$\mathbf{V}_0$:	163.90	27.53	219.89	343.87	60.65	626.74
$\sqrt{\mathbf{V}}_0$:	12.80	5.25	14.83	18.54	7.79	25.03

■

La CPPI realizzata al discreto

In pratica una CPPI va realizzata nel tempo discreto: i riaggiustamenti delle quote sono effettuati a intervalli di tempo finiti (a esempio, ogni giorno).
Si consideri una CPPI standard.
Sia Δt l'intervallo di tempo tra due ricalibrature successive e sia $i = e^{r\Delta t} - 1$ il tasso di interesse per il periodo $[t,\, t+\Delta t]$; dato che:

$$D_{t+\Delta t} = D_t\,(1+i)\,,$$

e:

$$E_{t+\Delta t} = m\,C_t\,\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\,,$$

si può ricavare la relazione:

$$F_{t+\Delta t} = F_t\,(1+i) + m\,C_t\left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} - i\right)\,. \qquad (*)$$

• *Lo "shortfall"*

Sia $F_t > B_t$. Se il prezzo degli *active assets* subisce una caduta abbastanza forte tra t e $t+\Delta t$, può accadere che la strategia fallisca, cioè che si abbia $F_{t+\Delta t} \leq B_{t+\Delta t}$ (*"shortfall"*).
Al tempo t, si definisca la *probabilità di fallimento*, o *di shortfall*, φ_t come la probabilità condizionata:

$$\varphi_t := \mathbf{P}_t\big(F_{t+\Delta t} \leq B_{t+\Delta t}\,|\,F_t > B_t\big)\,.$$

– *Fattore di shortfall.* La probabilità φ_t può essere espressa introducendo il "fattore di shortfall" Q_t, definito come:

Q_t: *il valore di* $S_{t+\Delta t}/S_t$ *per cui è* $F_{t+\Delta t} = B_{t+\Delta t}$.

Si ha:

$$\varphi_t = \mathbf{P}_t\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \leq Q_t \,\middle|\, F_t > B_t\right)\,.$$

Sottraendo $B_{t+\Delta t}$ da ambo i membri della relazione $(*)$, e ricordando che è $B_{t+\Delta t} = B_t\,(1+i)$, si ottiene:

$$C_{t+\Delta t} = C_t \left[(1+i) + m \left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} - i \right) \right] .$$

Per $S_{t+\Delta t}/S_t = Q_t$ deve aversi $C_{t+\Delta t} = 0$, cioè:

$$(1+i) + m\,[Q_t - (1+i)] = 0\,,$$

da cui si ricava:

$$Q_t = (1+i)\,\frac{m-1}{m}\,.$$

! Il fattore di shortfall Q_t dipende solo da m e da i (che però è funzione crescente di Δt)
$\longrightarrow$ fissate le caratteristiche di S_t, tanto più grande è Δt tanto più elevata è la probabilità che la strategia fallisca.

– *Soglia di shortfall.* In alternativa, lo shortfall può essere definito in termini di tasso; la "soglia di shortfall" può essere definita come:

ρ_t: *il valore di* $(S_{t+\Delta t} - S_t)/S_t$ *per cui è* $F_{t+\Delta t} = B_{t+\Delta t}$.

Dato che $\rho_t = Q_t - 1$ si ha:

$$\rho_t = i - \frac{1+i}{m}\,.$$

In questo caso φ_t resta definita dalla:

$$\varphi_t = \mathbf{P}_t \left(\frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \le \rho_t \,\middle|\, F_t > B_t \right) .$$

$\longrightarrow$ fissate le caratteristiche di S_t, tanto più la strategia è aggressiva (m grande) tanto più bassa è la soglia di shortfall e tanto più elevata è la probabilità che la strategia fallisca.

Osservazione. La probabilità di fallimento aumenta all'aumentare della volatilità degli asset gestiti. ■

– *Tempo d'attesa, tempo medio.*

Il tempo atteso (o tempo medio) allo shortfall si può definire come l'aspettativa:

$$\overline{\tau} = \mathbf{E}_0[\tau]\,,$$

della variabile aleatoria (tempo d'attesa):

$$\tau = \min\left\{ t:\ \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} \leq Q \right\}\,.$$

Per una strategia con Δt costante, si ha anche:

$$\tau = \nu\,\Delta t\,,$$

dove:

$$\nu = \min\left\{ k:\ \frac{S_{k\,\Delta t}}{S_{(k-1)\Delta t}} \leq Q \right\}\,,$$

è il numero di periodi di ricalibratura fino a quello (incluso) in cui si ha shortfall.

Osservazione. Anche la CPPI discreta può essere interpretata e confrontata con un strategia basata sulla replica dei minimi garantiti con opzioni (strategie OBPI) [BeP-2002], [CeC-2003]. ■

Esempio – Sulle probabilità di fallimento nel modello standard.

L'ipotesi di moto browniano geometrico alla base del modello standard:

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dZ_t\,,$$

equivale ad assumere che:

$$\log \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \sim \mathcal{N}\Big((\mu - \sigma^2/2)\,\Delta t,\, \sigma\sqrt{\Delta t} \Big)\,.$$

Si ricava quindi:

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \mathbf{P}_t \left(\log \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \le \log Q_t \right) \\ &= \mathbf{P}_t \left(\varepsilon_t \le \frac{\log Q_t - (\mu - \sigma^2/2)\,\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right)\,, \end{aligned}$$

con $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$. Quindi si ha:

$$\varphi_t = \Phi \left(\frac{\log Q_t - (\mu - \sigma^2/2)\,\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right)\,.$$

Si assuma:

$$i = 0.03\,, \quad \sigma = 0.25\,, \quad \mu = 0.08\,;$$

si ha:

	$m = 2$	$m = 5$
$Q_t =$	0.515	0.824
$\rho_t =$	−0.485	−0.176

e si ricava:

		$m = 2$	$m = 5$
per $\Delta t = 0.25$:	$\varphi_t =$	0.00000	0.04986
per $\Delta t = 0.50$:	$\varphi_t =$	0.00005	0.10879
per $\Delta t = 1.00$:	$\varphi_t =$	0.00219	0.16619

Esempio – Sul tempo atteso al fallimento nel modello standard.

Si consideri una strategia con intervalli di ricalibratura Δt costanti. Date le caratteristiche del moto browniano geometrico, gli eventi:

$$\frac{S_{k\,\Delta t}}{S_{(k-1)\Delta t}} \leq Q\,,$$

sono indipendenti e hanno tutti uguale probabilità, data da:

$$\varphi = \Phi\left(\frac{\log Q - (\mu - \sigma^2/2)\,\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)\;;$$

quindi la probabilità che lo shortfall accada per la prima volta durante il k-esimo periodo è data da:

$$p_k = (1-\varphi)^{k-1}\,\varphi\,.$$

Si consideri una strategia con durata $T = n\,\Delta t$, cioè con n periodi alla scadenza. Dato che la probabilità che non si abbia shortfall entro la scadenza è:

$$q_n = (1-\varphi)^n\,,$$

il valor medio di ν è dato da:

$$\begin{aligned}\overline{\nu}_n = \mathbf{E}_0[\nu] &= \sum_{k=1}^{n} k\,p_k + n\,q_n \\ &= \frac{\varphi}{1-\varphi}\sum_{k=1}^{n} k\,(1-\varphi)^k + n\,(1-\varphi)^n\,.\end{aligned}$$

Per le proprietà delle progressioni geometriche, si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(1-\varphi)^k = \frac{1-\varphi}{\varphi}\left[\frac{1-(1-\varphi)^n}{\varphi} - n\,(1-\varphi)^n\right]\;;$$

per cui si ottiene:

$$\overline{\nu}_n = \frac{1-(1-\varphi)^n}{\varphi}\,.$$

In particolare, per una strategia con durata potenzialmente illimitata si ha:

$$\overline{\nu}_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1-\varphi)^n}{\varphi} = \frac{1}{\varphi}\,.$$

Il tempo atteso allo shortfall risulta quindi:

$$\overline{\tau}_n = \overline{\nu}_n\,\Delta t = \frac{1-(1-\varphi)^n}{\varphi}\,\Delta t\,,$$

per una strategia con durata n, e:

$$\overline{\tau}_\infty = \overline{\nu}_\infty\;\Delta t = \frac{\Delta t}{\varphi}\,,$$

nel caso di durata illimitata.

Naturalmente, per valori grandi di Δt la misura di tempo atteso $\overline{\tau}$ potrà risultare poco precisa, dato l'errore di "granularità".

Assumendo ancora:

$$i = 0.03\,,\quad \sigma = 0.25\,,\quad \mu = 0.08\,,$$

si ricava, per $n = \infty$:

		$m = 2$	$m = 5$
per $\Delta t = 0.25$:	$\overline{\tau}_\infty =$	7.767.185	5.014
per $\Delta t = 0.50$:	$\overline{\tau}_\infty =$	10.046	4.596
per $\Delta t = 1.00$:	$\overline{\tau}_\infty =$	457	6.017

Per una strategia con $T = 5$ anni si ha invece:

		$m = 2$	$m = 5$
per $\Delta t = 0.25$:	$\overline{\tau}_{20} =$	5.000	3.211
per $\Delta t = 0.50$:	$\overline{\tau}_{10} =$	4.999	3.143
per $\Delta t = 1.00$:	$\overline{\tau}_5 =$	4.978	3.592

■

Alcune questioni di rilevanza pratica

• *Esclusione di short sales*
È possibile che il cushion C_t diventi negativo, il che richiederebbe la vendita allo scoperto di asset gestiti
$\longrightarrow$ per evitare short selling la strategia CPPI viene definita in pratica dalla regola:

$$E_t = \big[\min\{m\,C_t,\, l\,F_t\}\big]^+ .$$

• *Rischio di shortfall*
Il rischio relativo al fallimento della strategia può essere coperto in diversi modi; tra i più diffusi:

· acquisto di opzioni-out-of-the-money (*crash options*)

· aggiunta di un *risk margin RM* al cushion:

$$C_t = F_t - (B_t + RM).$$

Nella pratica esistono molte varianti della CPPI, anche piuttosto complesse.
Il livello di aggressività (m) della strategia, così come la scelta del fondo riserva, del bond floor, delle caratteristiche del fondo gestito e delle modalità di copertura del rischio di fallimento della strategia dipendono dalle particolari esigenze di gestione.
Di solito tutte le grandezze che determinano il valore del portafoglio sono ottenute tramite metodi simulativi.

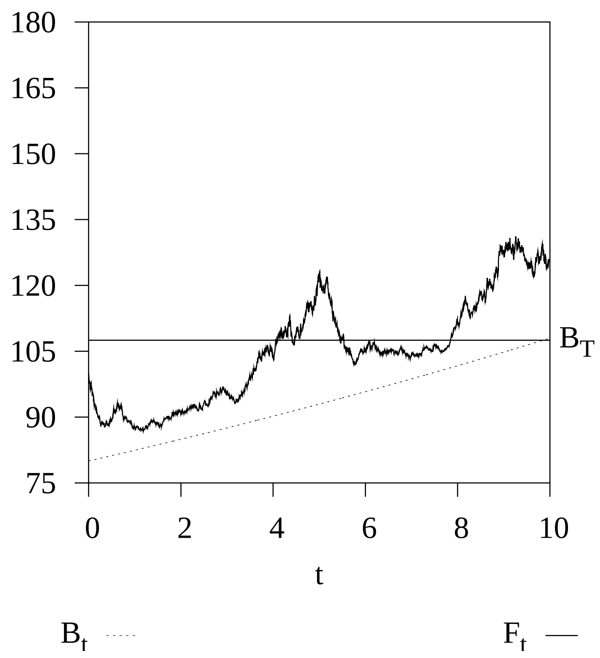
Osservazione. Vista la natura del rischio di fallimento della strategia appaiono proficue le tecniche di simulazione che utilizzano la teoria dei valori estremi [BeP-2002]. ■

Spesso la strategia CPPI è utilizzata per garantire un minimo a scadenza e un rendimento distribuito come flusso cedolare; in questo caso occorrono dei meccanismi che garantiscano la possibilità di pagamento delle cedole, senza intaccare il minimo garantito a scadenza anche quando il portafoglio dovesse andare in bond floor.

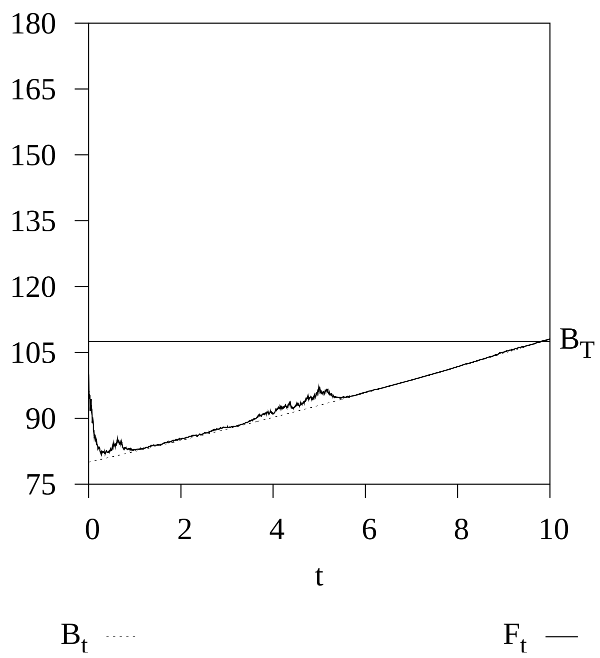
Esempio – Strategie simulate.

CPPI standard, ricalibratura giornaliera:
$T = 10\,,\ F_0 = 100\,,\ S_0 = 100\,,\ B_0 = 80\,,\ C_0 = 20\ r = 0.03\,;$
traiettoria simulata da una lognormale con $\sigma = 0.25\,,\ \mu = 0.08\,.$ ■

CPPI standard: $m = 2$**,** $\rho = 50\%$



CPPI standard: $m = 5$**,** $\rho = 20\%$



CPPI con scadenza fissata - floor: zcb

Si consideri un contratto di investimento in un fondo con valore F_t; l'investimento iniziale è F_0 e il contratto è caratterizzato da una scadenza $T > 0$ e da un valore minimo M garantito a scadenza; viene cioè garantito il payoff finale:

$$G_T = \max\{F_T,\, M\}\,.$$

Il minimo si può esprimere come $M = \beta\, F_0$, cioè come una percentuale $\beta > 0$ dell'investimento iniziale; spesso si pone $\beta = 1$.
Il minimo M si può anche interpretare come il valore di rimborso Z_T di uno zcb con scadenza in T; naturalmente il valore in $t \in [0, T]$ di questo zcb è $Z_t = v(t, T)\, M$.

La caratterizzazione completa del contratto richiede che sia specificato lo stile di gestione del fondo d'investimento. Si assuma che venga adottata una strategia CPPI in cui, una volta precisate le caratteristiche degli asset gestiti S_t, si pone:

$$B_t = R_t = v(t, T)\, M\,.$$

Al tempo 0 si ha:

$$C_0 = F_0 - B_0 = F_0 - v(0, T)\, M\,,$$

per cui il cushion è tanto più ampio quanto maggiore è la durata T (e ovviamente tanto più basso è il livello garantito M.)
Una volta scelto il moltiplicatore m, si ha:

$$E_0 = m\, C_0\,, \quad N_0^S = \frac{E_0}{S_0}\,, \quad N_0^R = \frac{F_0 - E_0}{v(0, T)\, M}\,.$$

Dato che $C_t = F_t - Z_t$, l'evoluzione del cushion dipende sia dall'incertezza del fondo gestito E_t che dall'incertezza relativa ai tassi di interesse.

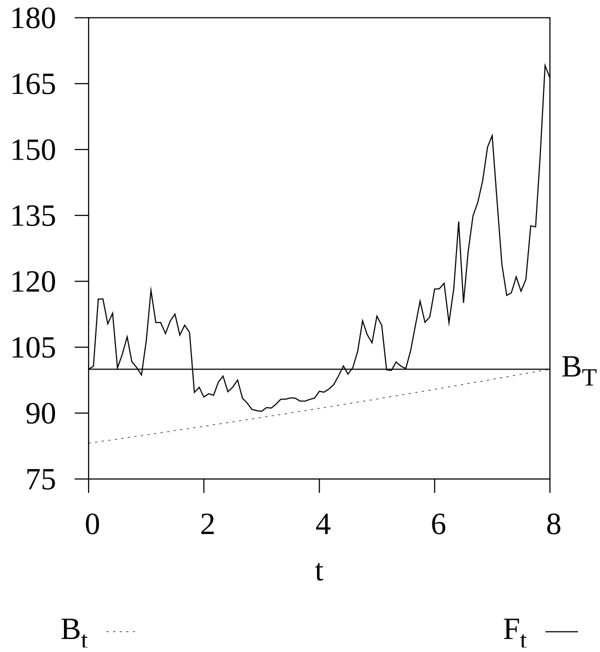
Esempio – CPPI con scadenza fissata, ricalibratura mensile.

Si ponga:

- $T = 8,\ F_0 = 100,\ S_0 = 100,\ B_T = 100,\ m = 5,\ \Delta t = 1/12;$
- commissioni$= 0.6\%\,,\ r = 0.03,\ B_0 = 82.87,\ \rho = 19.80\%\,;$
- traiettorie simulate da una lognormale con $\sigma = 0.25,\ \mu = 0.08.$ ■

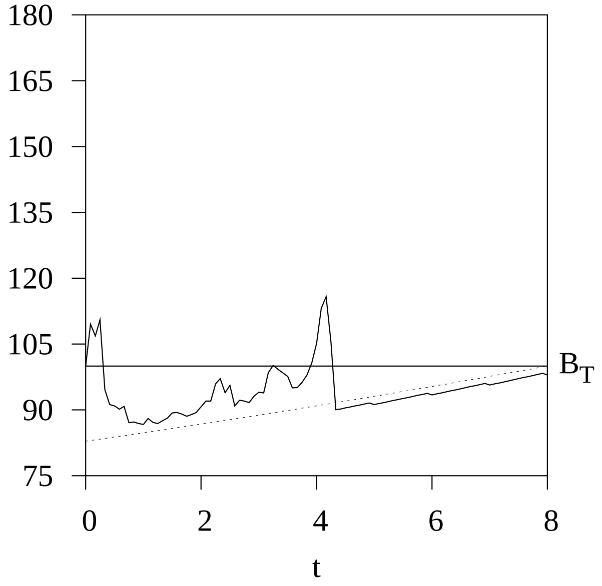
$RM = 0\%\,,\ C_0 = 17.13\,,\ \alpha_0^V = 85.67\%$

traiettoria favorevole



$$RM = 0\%\,,\ C_0 = 17.13\,,\ \alpha_0^V = 85.67\%$$

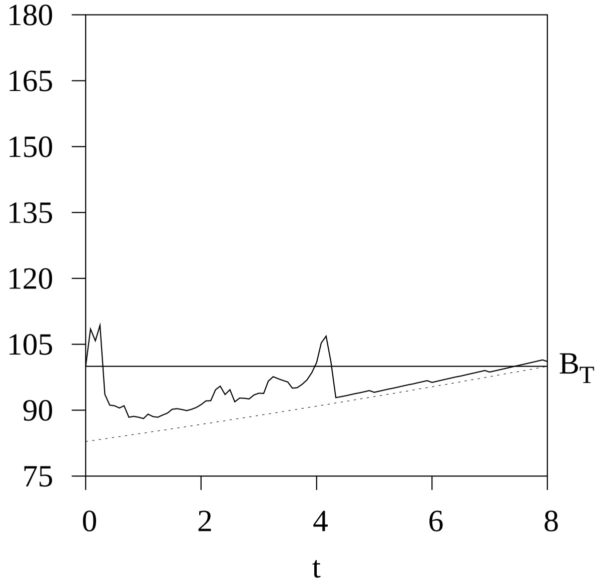
traiettoria sfavorevole



B_t ······ F_t —

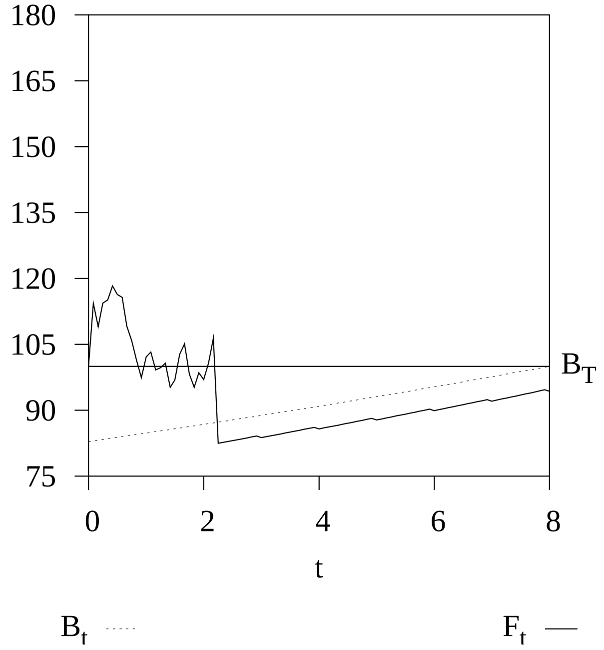
$$RM = 2\%\,,\ C_0 = 13.13\,,\ \alpha_0^V = 65.67\%$$

traiettoria sfavorevole

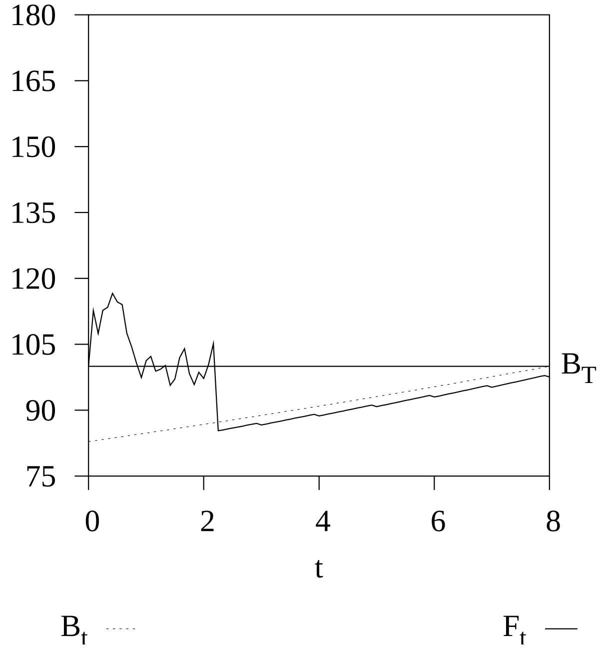


B_t ······ F_t —

$$RM = 0\%\,,\ C_0 = 17.13\,,\ \alpha_0^V = 85.67\%$$
traiettoria molto sfavorevole



$$RM = 2\%\,,\ C_0 = 13.13\,,\ \alpha_0^V = 65.67\%$$
traiettoria molto sfavorevole



Il problema della valutazione

• *Il caso ideale*
Si consideri una CPPI in cui è $B_t = D_t$ e $B_0 < F_0$.
In condizioni ideali (assenza di costi di transazione e di stacco di commissioni, mercato efficiente) il valore V_0 del contratto coincide con l'investimento iniziale:

$$V_0 = F_0 \,.$$

Osservazione. Anche con riferimento a una CPPI definita sulla scadenza T e che garantisce il payoff $G_T = \max\{F_T,\, M\}$, si ha:

$$V(0; G_T) = F_0 \,,$$

se $v(0,T)\, M < F_0$.
Diverso sarebbe il caso di un contratto che garantisse a scadenza il payoff $G_T^* = \max\{N^* S_T,\, M\}$; si avrebbe:

$$V(0; G_T^*) = N^* S_0 + EP_0 \,,$$

essendo $EP_0 = V(0; [M - N^* S_T]^*) > 0$ il costo, positivo, dell'opzione put protettiva
$\longrightarrow$ poiché il risultato S_T è indipendente dalla presenza del minimo garantito, il valore del contratto è maggiore dell'investimento iniziale $N^* S_0$, dato che a questo importo va aggiunto il costo della garanzia di minimo. ■

[CDFM-2004]

• *Il caso "con frizioni"*

Nei casi reali, l'apprezzamento del fondo d'investimento è esposto a "frizioni" di varia natura; tipicamente, commissioni di gestione e spese amministrative.

Nei casi in cui una CPPI è usata come il "sottostante" di una polizza di assicurazione, le commissioni possono essere ulteriormente scomposte in una quota dovuta ai gestori e una quota trattenuta dall'assicuratore.

Se $V_0^f > 0$ rappresenta il valore in 0 di tutte le frizioni, si ha:

$$V_0 = F_0 - V_0^f \,.$$

Utilizzando la scomposizione in spese (s), commissioni ai gestori (g) e commissioni all'assicuratore (a), si ha:

$$V_0 = F_0 - V_0^s - V_0^g - V_0^a \,.$$

Osservazione. Il valore V_0^a rappresenta il valore degli utili futuri per l'assicuratore, cioè l'embedded value della polizza. ■

In alcuni casi è previsto anche un reddito periodico retrocesso all'assicurato, tipicamente sotto forma di cedole. In questo caso, se V_0^x rappresenta il valore di questo flusso cedolare, si ha:

$$V_0 = F_0 - V_0^s - V_0^g - V_0^a - V_0^x \,.$$

La struttura delle spese e delle commissioni

Le polizze assicurative basate su strategie CPPI hanno solitamente una struttura commissionale piuttosto complessa.

Tipicamente, la componente gestita E_t del fondo d'investimento F_t (*fondo assicurativo*) è a sua volta un "fondo di fondi" (*fondi elementari*), gestiti da operatori professionali con lo stile tipico dei fondi comuni.
Il fondo assicurativo F_t, calibrato secondo una strategia CPPI, può essere gestito da un operatore professionale specializzato, oppure dalla compagnia stessa.

In generale, quindi, possono aversi (almeno) due livelli commissionali:

· commissioni sui fondi elementari,
· commissioni sul fondo assicurativo.

Ciascuna di queste due componenti potrà a sua volta essere scomposta in una quota trattenuta dal gestore e una quota incassata dalla compagnia.

Per quanto riguarda le spese, oltre agli usuali costi amministrativi sarà presente, in genere, anche il costo per il rischio di shortfall, dovuto come compenso alla parte (gestore o compagnia) sulla quale grava contrattualmente l'impegno di garantire il conseguimento del minimo.
Spesso questo costo è caricato in modo implicito, includendo un risk margin RM nella definizione stessa del cushion, ponendo cioè $C_t = F_t - B_t - RM$.
In altri casi, meno frequenti, il rischio di shortfall è coperto ricorrendo all'acquisto di opzioni protettive (crash options).

Il pagamento di commissioni al gestore e/o alla compagnia è, tipicamente, previsto anche nel caso in cui la strategia dovesse andare in bond floor; la natura di questo portafoglio dovrà quindi essere opportunamente definita.

Per es., nelle CPPI con scadenza fissata e minimo garantito a scadenza il bond floor viene spesso definito come un coupon bond, le cui cedole consentono il prelievo delle commissioni previste.

Scomposizione del valore

In un generico istante t, la struttura di spese e commissioni conduce a una scomposizione del valore F_t dell'investimento che può essere riassunta schematicamente come:

$$F_t = V_t + V_t^x + V_t^s + V_t^{g'} + V_t^{a'} + V_t^{g''} + V_t^{a''} + V_t^c \,,$$

dove:

- V_t è il valore del contratto,
- V_t^x è il valore delle cedole che andranno all'assicurato,
- V_t^s è il valore delle spese,
- $V_t^{g'}$ è il valore delle commissioni di gestione sui fondi elementari, trattenute da terzi,
- $V_t^{a'}$ è il valore delle commissioni di gestione sui fondi elementari, trattenute dall'assicuratore,
- $V_t^{g''}$ è il valore delle commissioni di gestione sul fondo assicurativo, trattenute da terzi,
- $V_t^{a''}$ è il valore delle commissioni di gestione sul fondo assicurativo, trattenute dall'assicuratore,
- V_t^c è il costo delle coperure per la garanzia di minimo.

Nella logica attuariale, F_t è la riserva di bilancio in t. In linea di principio, la componente:

- $V_t + V_t^x$ è di competenza dell'assicurato (è la "riserva stocastica"),
- $V_t^{g'} + V_t^{g''}$ è di competenza di gestori terzi,
- $V_t^{a'} + V_t^{a''}$ è di competenza della compagnia (costituisce l'embedded value della polizza),
- $V_t^s + V_t^c$ definisce una voce di spesa.

Dal punto di vista del controllo, è rilevante l'analisi delle evoluzioni delle componenti di valore.

Un esempio di valutazione

Si consideri un fondo assicurativo gestito con strategia CPPI con le caratteristiche:

- $T = 3\,,\ F_0 = 100\,,\ M = F_0\,,\ m = 5$;
- B_t : coupon bond con cedole annue del 2% e valore di rimborso M;
- $R_t = B_t$;
- ricalibratura: giornaliera quando $\left|\frac{E_{t+} - E_t}{E_t}\right| > 2\%$;
- copertura del rischio di shortfall: roll-over di opzioni europee a un mese sul fondo gestito e 80% out-of-the-money.

Commissioni e spese:

- $g' = 1.00\%\,,\ a' = 0.5\%$ annuo sul gestito;
- $g'' = 0.1\%\,,\ a'' = 0.25\%$ annuo su F_0;
- cedola retrocessa: 1.25% annuo su F_0;
- costo copertura e spese: 0.3% e 0.1% annuo su F_0.

Per la valutazione è stato considerato un modello bivariato in cui il fondo gestito segue un processo lognormale; per l'evoluzione dei tassi di interesse è stata ipotizzata la dinamica del modello di Cox, Ingersoll e Ross.
La valutazione è stata effettuata con metodo Monte Carlo in ambiente risk neutral.

Le componenti di valore risultano:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= 92.24\,;\\
V_0^x &= \ \ 3.46\,;\\
V_0^{g'} + V_0^{g''} &= \ \ 1.68\,;\\
V_0^{a'} + V_0^{a''} &= \ \ 1.51\,;\\
V_0^S + V_0^C &= \ \ 1.11\,.
\end{aligned}
$$

I passi della strategia

La realizzazione di una strategia CPPI con passo di ricalibratura Δt si può sintetizzare nei seguenti passi:

1 – calcolo del NAV

$$F_t = N^S_{t-\Delta t}\, S_t + N^R_{t-\Delta t}\, R_t\, ;$$

2 – calcolo del cushion

$$C_t = F_t - B_t\, ;$$

3 – calcolo dell'esposizione

$$E_t = \big[\min\{m\, C_t,\, F_t\}\big]^+\, ;$$

4 – calcolo delle quote di composizione

$$N^S_t = \frac{E_t}{S_t}, \quad N^R_t = \frac{F_t - E_t}{R_t}\, .$$

Il controllo della strategia

Per esercitare il controllo della strategia il consiglio di amministrazione deve verificare:

· il rispetto del benchmark;

· la conformità del fondo riserva;

· l'esposizione, quindi le quote di composizione;

· le modalità di "stacco" della commissione di gestione.

• Poichè la strategia è dinamica, il controllo deve essere esercitato "giornalmente".

Un esempio di CPPI con floor sull'inflazione

Per la gestione di fondi pensione potrebbe essere rilevante garantire almeno il tasso di inflazione; ciò può essere fatto con una strategia CPPI in cui il fondo riserva sia agganciato al livello dei prezzi al consumo, ovvero:

$$R_t = \frac{P_t}{P_0}\,,$$

dove P_t è il livello dei prezzi al consumo all'epoca t.

Il floor dovrebbe dunque essere definito come:

$$B_t = F_0 \frac{P_t}{P_0}\,.$$

Per lo stacco delle commissioni di gestione e per la copertura del rischio di fallimento si possono adottare le solite modalità.

⊕ Per realizzare la strategia è necessaria la disponibilità di titoli indicizzati all'inflazione.

CPPI per le gestioni separate delle polizze tradizionali?

In lineea di principio la logica CPPI sembra adeguata alle "gestioni separate" cui sono indicizzate le polizze tradizionali rivalutabili.

$\oplus$ protezione del rendimento minimo garantito senza rinunciare alle opportunità di mercato

$\ominus$ la logica "cliquet" delle polizze tradizionali impone un'orizzonte strategico annuale
$\longrightarrow$ se il minimo garantito non è abbastanza basso rispetto ai tassi di mercato non si ha un cushion adeguato a consentire margini di manovra significativi

In questo tipo di applicazioni ha senso scegliere gli active asset come un fondo a rischiosità contenuta (fondo "bilanciato", con quota azionaria non elevata).

La logica cliquet richiede di riaggiustare il bond floor all'inizio di ogni anno, per "consolidare" il livello raggiunto dal fondo.

Una possibile schematizzazione

• *Active assets*

Il fondo gestito produce un'esposizione:

$$E_t := N_t^S \left[\alpha\, S_t + (1-\alpha)\, W_t\right], \quad 0 \le \alpha \le 1\,,$$

dove:

S_t è un indice di capitalizzazione azionario,

W_t è un indice di capitalizzazione obbligazionario,

α è il numero di quote azionarie, fissato.

$\longrightarrow$ strategia "B&H", con:

S_t processo lognormale con volatilità σ;

W_t montante generato da una strategia di compra-vendita, ad intervalli di tempo di lunghezza θ prefissata, di coupon bond con duration (di Macaulay) prefissata $D \ge \theta$;
i prezzi di compra-vendita sono generati per simulazione con un modello di Cox, Ingersoll e Ross (CIR) univariato.

• *Reserve assets*

Il fondo riserva è costituito da un roll-over di BOT a 1 anno.

• *Bond floor*

Se F_t è il valore del fondo di riferimento all'inizio dell'anno t, si pone:

$$B_t = F_t\,(1+i_{\min})\, v(t,\, t{+}1)\,,$$

dove $i_{\min}$ è il tasso annuo minimo garantito e Δt è l'intervallo di ricalibratura, nell'anno.
A ogni data di ricalibratura si pone:

$$B_{t+k\,\Delta t} = F_t\,(1+i_{\min})\, v(t+k\Delta t,\, t{+}1)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, 1/\Delta t - 1\,.$$

I prezzi $v(t,s)$ sono generati per simulazione con un modello di CIR.

• *Exposure*

$$E_t = \min\{m\,(F_t - B_t),\, F_t\}\,.$$

Esempio

- Polizze di capitalizzazione pura a premio unico rivalutabili, con
  - · durata: $n = 1, 2, \dots, 10$ anni;
  - · capitale iniziale assicurato: $C_0 = 100$;
  - · rendimento annuo minimo garantito (tasso tecnico): $i_{\min} = 1.5\%$;
  - · coefficiente di retrocessione: $\beta = 80\%$.
- Caratteristiche della gestione
  - · montante obbligazionario W_t: $D = 4$ anni, $\theta = 3$ mesi;
  - · montante azionario S_t: M.B.G. con $\sigma = 20\%$;
  - · quota azionaria: $\alpha = 20\%$;
  - · periodo di ricalibratura: $\Delta t = 3$ mesi.
- Simulazione
  - · 5000 iterazioni (in ambiente risk-neutral) del modello bivariato CIR-BS con correlazione.
- Ambiente di valutazione
  - · situazione di mercato al 31/12/2003 (modello CIR calibrato sulle quotazioni correnti dei tassi swap e degli interest rate cap).

Tassi di mercato
($t = 31/12/2003$)

τ	$i(t,\, t+\tau)$
1	2.33
2	2.78
3	3.16
4	3.47
5	3.73
6	3.94
7	4.12
8	4.28
9	4.41
10	4.52

- Cushion iniziale

  Per $F_0 = 100$:

$$C_0 = F_0 - B_0 = 100 \times (1 - 1.015 \times 1.0233^{-1})$$
$$= 100 \times (1 - 0.9919) = 0.81\,.$$

Si ha quindi $E_0 = F_0$ ("full exposure") se si sceglie $m = 123$.

- Per riferimento: strategia tradizionale, congelata sugli active asset.

Valori prestazioni

τ	R_t	V_t	E_t	B_t	P_t
1	98.5222	99.1983	-0.67615	98.0560	1.14233
2	97.0662	97.9728	-0.90665	95.9408	2.03206
3	95.6317	96.4467	-0.81500	93.7617	2.68496
4	94.2184	94.8178	-0.59936	91.5763	3.24153
5	92.8260	93.1642	-0.33822	89.4460	3.71820
6	91.4542	91.3735	0.08070	87.2866	4.08695
7	90.1027	89.5927	0.51000	85.1454	4.44724
8	88.7711	87.8466	0.92454	83.0809	4.76572
9	87.4592	86.0936	1.36558	81.0304	5.06321
10	86.1667	84.4109	1.75579	79.0764	5.33451

R_t : riserva tecnica
V_t : riserva stocastica
E_t : embedded value (VBIF: $E_t = R_t - V_t$)
B_t : valore base
P_t : valore della put (garanzia di minimo: $P_t = V_t - B_t$)

[DFM-2002]

Esempio (continuazione) – Strategia CPPI con $m = 2$.

Valori medi sulle traiettorie

τ	$\%N_t^R$	$\#shtfl$	$\#fullexp$
1	98.3845	0.0000	0
2	96.5942	0.0002	0
3	95.2762	0.0000	0
4	94.2886	0.0000	0
5	93.5937	0.0000	0
6	93.1362	0.0000	0
7	92.7121	0.0000	0
8	92.4340	0.0000	0
9	92.2519	0.0000	0
10	92.0629	0.0000	0

Valori prestazioni

τ	R_t	V_t	E_t	B_t	P_t
1	98.5222	98.0326	0.48961	98.0326	0
2	97.0662	95.9434	1.12273	95.9429	0.000501726
3	95.6317	93.7844	1.84728	93.7839	0.000509200
4	94.2184	91.6118	2.60663	91.6113	0.000496671
5	92.8260	89.4450	3.38106	89.4445	0.000508727
6	91.4542	87.2695	4.18468	87.2690	0.000496989
7	90.1027	85.1371	4.96556	85.1366	0.000484083
8	88.7711	83.0451	5.72604	83.0446	0.000472460
9	87.4592	80.9736	6.48566	80.9731	0.000461651
10	86.1667	78.9484	7.21830	78.9480	0.000460411

Esempio (continuazione) – Strategia CPPI con $m = 50$.

Valori medi sulle traiettorie

τ	$\%N_t^R$	$\#shtfl$	$\#fullexp$
1	68.8236	0.4058	0.4324
2	55.9892	0.4368	1.3436
3	45.0000	0.3314	2.0638
4	39.1677	0.2742	2.4586
5	34.7002	0.2404	2.6794
6	31.9035	0.1976	2.8208
7	29.9692	0.1836	2.9084
8	29.2680	0.1748	2.9658
9	27.5605	0.1714	3.0012
10	25.6663	0.1498	3.0694

Valori prestazioni

τ	R_t	V_t	E_t	B_t	P_t
1	98.5222	98.4055	0.11668	98.0416	0.36385
2	97.0662	96.6717	0.39444	95.9522	0.71953
3	95.6317	94.7766	0.85505	93.7554	1.02125
4	94.2184	92.8705	1.34797	91.5885	1.28199
5	92.8260	90.9871	1.83898	89.4832	1.50381
6	91.4542	88.9922	2.46205	87.2985	1.69364
7	90.1027	87.0358	3.06686	85.1625	1.87333
8	88.7711	85.1080	3.66316	83.0719	2.03608
9	87.4592	83.2076	4.25160	81.0164	2.19122
10	86.1667	81.3837	4.78298	79.0557	2.32807

Esempio (continuazione) – Strategia CPPI con $m = 123$.

Valori medi sulle traiettorie

τ	$\%N_t^R$	$\#shtfl$	$\#fullexp$
1	62.1027	1.3604	1.2326
2	50.1456	0.8106	2.5668
3	39.5605	0.5380	2.9478
4	34.0099	0.4192	3.1300
5	29.8168	0.3494	3.2512
6	27.1394	0.2940	3.3324
7	25.3225	0.2720	3.3796
8	24.6626	0.2520	3.4108
9	23.3186	0.2464	3.4390
10	21.4386	0.2070	3.4860

Valori prestazioni

τ	R_t	V_t	E_t	B_t	P_t
1	98.5222	98.8207	-0.29853	98.0624	0.75834
2	97.0662	97.2925	-0.22637	95.9750	1.31754
3	95.6317	95.5295	0.10215	93.7772	1.75233
4	94.2184	93.7210	0.49743	91.6082	2.11278
5	92.8260	91.9209	0.90514	89.5069	2.41397
6	91.4542	89.9920	1.46220	87.3247	2.66728
7	90.1027	88.0962	2.00645	85.1913	2.90494
8	88.7711	86.2236	2.54747	83.1042	3.11941
9	87.4592	84.3670	3.09225	81.0433	3.32365
10	86.1667	82.5832	3.58348	79.0849	3.49839

Riferimenti bibliografici

- di base

[BlP] Black, F., Perold, A.R.
1992 *Theory of constant proportion portfolio insurance*, Journal of Economic Dynamics and Control, 16, 403-426.

[CDFM] Castellani, G., De Felice, M., Moriconi, F.
2004 *Strategie CPPI, polizze vita e fondi pensione. Problemi di valutazione, il controllo della strategia*, Mefop, Working paper, in progress.

[DFM] De Felice, M., Moriconi, F.
2002 *Finanza dell'assicurazione sulla vita. Principî per l'asset-liability management e per la misurazione dell'embedded value*, Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, LXV, 1-2.

[Le] Leland, H.E.
1994 *Portfolio insurance*, The New Palgrave Dictionary of Money & Finance, London, The Macmillan Press Limited.

[LeR] Leland, H.E., Rubinstein, M.
1988a *The evolution of portfolio insurance*, in: D.L. Luskin, ed., *Portfolio insurance: a guide to dynamic hedging*, New York, Wiley.

[PS] Perold, A.F., Sharpe, W.F.
1988 *Dynamic Strategies for Asset Allocation*, Financial Analysts Journal, 44, 16-27.

- per approfondimenti

[BeP] Bertrand, P., Prigent, J-L.
2002 *Portfolio Insurance Strategies: OBPI versus CPPI*, THEMA, working paper.

[BlJ] Black, F., Jones, R.
1987 *Simplifying Portfolio Insurance*, Journal of Portfolio Management, 14, 48-51.

[BlR] Black, F., Rouhani, R.
1987 *Constant Proportion Portfolio Insurance and the synthetic put option: a comparison*, Goldman Sachs.
1989 *Constant proportion portfolio insurance and the synthetic put option: a comparison*, in: F.J. Fabozzi (ed.), *Institutional Investor focus on Investment Management*, Cambridge Mass., Ballinger, 695-708.

[BrSc] Brennan, M., Schwartz, E.

1976 *The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee*, Journal of Financial Economics, 2, 195-213.

1988 *Time invariant portfolio insurance strategies*, Journal of Finance, XLIII, 283-299.

[BrSo] Brennan, M., Solanki, R.

1981 *Optimal portfolio insurance*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 16, 279-300.

[CeC] Cesari, R., Cremonini, D.

2003 *Benchmarking, portfolio insurance and technical analysis: a Monte Carlo comparison of dynamic strategies of asset allocation*, Journal of Economic Dynamics and Control, 27, 987-1011.

[DeVM] De Vitry, T., Moulin, S.

1994 *Aspects théoriques de l'assurance de portefeuille avec plancher*, Banque et Marchs, n. 11, 21-27.

[EsK] Estep, T., Kritzman, M.

1988 *TIPP: insurance without complexity*, Journal of Portfolio Management, 1988.

[GeL] Gennotte, G., Leland, H.

1990 *Market Liquidity, Hedging, and Crashes*, American Economic Review, 80, 999-1021.

[Le] Leland, H.E.

1980 *Who Should Buy Portfolio Insurance?*, Journal of Finance, XXXV, 581-594.

[LeR] Leland, H.E., Rubinstein, M.

1988b *Comments on the Market Crash: Six Months After*, Journal of Economic Perspectives, 2, 45-50.

[Lu] Luskin, D.L.

1988 *After the Fall*, in: D.L. Luskin, ed., *Portfolio insurance: a guide to dynamic hedging*, New York, Wiley.

[Mi] Miller, M.H.

1991 *Financial Innovation and Market Volatility*, Cambridge, Blackwell.

[Ru] Rubinstein, M.

1988 *Portfolio insurance and the market crash*, Financial Analysts Journal, 44, 38-47.

[RuL] Rubinstein, M., Leland, H.E.

1981 *Replicating options with positions in stock and cash*, Financial Analysts Journal, 37, 63-72.