

Analisi di un circuito RLC serie in regime sinusoidale

Bertasi Leonardo mat. 970881, Perniola Davide mat. 989409

18/05/2022

1 Abstract

In questa esperienza si è analizzato il comportamento di un circuito RLC serie in regime sinusoidale. Misurando le tensioni ai capi delle componenti è stato possibile verificare la differenza di comportamento tra di esse. A tale scopo sono stati acquisiti i dati relativi a tre frequenze significative in un intorno della frequenza di risonanza attesa $f_0 = (7351 \pm 68)Hz$. Inoltre si è studiato l'andamento dell'ampiezza e della fase delle tensioni ai capi delle componenti in funzione della frequenza. Da questa analisi si è ricavato il valore della frequenza di risonanza sperimentale $f_{0s} = (7562 \pm 5)Hz$. L'incompatibilità tra i due valori è spiegata dalla presenza di errori sistematici nell'acquisizione non valutabili.

2 Introduzione

Un circuito RLC serie consiste in una resistenza, una induttanza e un condensatore posti in serie. Applicando ai capi del circuito una differenza di potenziale sinusoidale $V_0 \cos wt$ ci si aspetta di osservare un preciso andamento, anch'esso sinusoidale, ai capi di ognuno degli elementi circuitali. L'unica corrente che scorre nel circuito segue la relazione

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC})] \quad (1)$$

Utilizzando la (1) si possono scrivere gli andamenti teorici della tensione ai capi della resistenza

$$V_R(t) = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC})] \quad (2)$$

dell'induttanza

$$V_L(t) = \frac{V_0 wL}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC}) + \frac{\pi}{2}] \quad (3)$$

del condensatore

$$V_C(t) = \frac{(\frac{V_0}{wC})}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC}) - \frac{\pi}{2}] \quad (4)$$

Ricordando che la pulsazione di risonanza per un circuito RLC è $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, il modulo della corrente che scorre nel circuito alla frequenza di risonanza corrispondente f_0 è massimo. A quest'ultima frequenza ci si aspetta di osservare $V_R(t)$ in fase con la sorgente e massimo in ampiezza, $V_L(t)$ in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla sorgente e $V_C(t)$ in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla sorgente e della stessa ampiezza di $V_C(t)$.

Si può esplicitare la dipendenza dell'ampiezza massima e della fase delle tensioni in funzione della pulsazione w semplicemente considerando il modulo delle ampiezze e della fase alle diverse tensioni. Ad esempio risulta

$$A_R(w) = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \quad \Phi_R(w) = \arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC} \quad (5)$$

In generale si prevede un aumento dell'ampiezza di V_L e una diminuzione dell'ampiezza di V_C proporzionale ad w , mentre per V_R l'ampiezza aumenta fino al massimo in corrispondenza di f_0 per poi decrescere sempre

proporzionalmente a w .

Per quanto riguarda la fase inoltre, notando come

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC} = -\frac{\pi}{2} \quad (6)$$

è chiaro aspettarsi, aumentando w , la decrescita della fase della tensione ai capi di ogni componente e lo stabilizzarsi di quest'ultima a 0 per $V_L(t)$, $-\frac{\pi}{2}$ per $V_R(t)$ e $-\pi$ per $V_C(t)$.

3 Apparato sperimentale e svolgimento

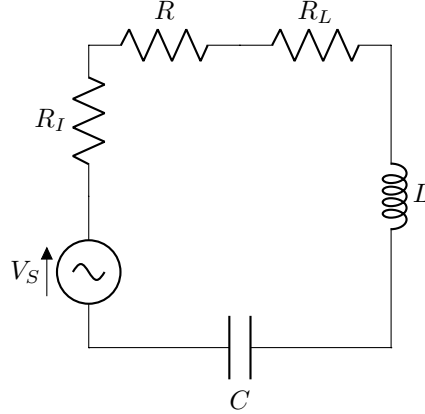


Figura 1: *Schema del circuito realizzato.*

Il circuito RLC è stato realizzato sulla breadboard della scheda di acquisizione NI ELVIS II ed è schematizzato in Figura 1. Esso è alimentato dal function generator di ELVIS di resistenza interna $R_I = 50\Omega$ come da specifiche della scheda. Nel circuito sono presenti, disposti in serie, una induttanza $L = (10.3 \pm 0.1)mH$, un condensatore $C = (45.5 \pm 0.4)nF$ una resistenza $R = (330.0 \pm 0.3)\Omega$ e una resistenza $R_L = (34.5 \pm 0.1)\Omega$ che tiene conto della resistenza interna dell'induttore. Tutti i valori delle componenti riportati sono stati misurati utilizzando il multimetro digitale di ELVIS. Per verificare il corretto funzionamento delle componenti è stato utilizzato un oscilloscopio, osservando così il comportamento del circuito in un intorno della frequenza di risonanza attesa. Successivamente servendosi di un programma scritto in LabView sono state acquisite le misure delle tensioni ai capi del generatore, resistenza, induttanza e condensatore relative ad una frequenza $f_m = 4000Hz$, una $f_0 = 7351Hz$ e $f_M = 10000Hz$ in modo tale da evidenziare le differenze del comportamento del circuito all'interno di un ampio range di frequenze e in particolare alla frequenza di risonanza. Per far questo si è usata una frequenza di acquisizione di $50000Hz$ nel primo caso, di $100000Hz$ nel secondo e di $150000Hz$ nel terzo, affinché questa si mantenga ad un valore di almeno dieci volte quello della frequenza del segnale acquisito. Infine si è studiato l'andamento della fase e dell'ampiezza della tensione ai capi delle componenti in funzione della frequenza. Per far ciò si è impostato nel function generator uno *sweep* sulla frequenza nel range compreso tra $3000Hz$ e $13000Hz$, con *step* di $100Hz$ e *step interval* di $1000ms$.

4 Risultati e discussione

4.1 Tensione in funzione del tempo

In Figura 2 sono riportate le tensioni in funzione del tempo ai capi di ogni elemento del circuito per i tre valori di frequenza scelti. Si può subito notare che gli andamenti teorici (descritti nell'introduzione) sono rispettati: considerando V_L si vede come la sua ampiezza cresca nei grafici a frequenza di risonanza e $10000Hz$ rispetto al grafico a $4000Hz$. Al contrario per V_C l'ampiezza decresce una volta superata f_0 , mentre V_R come previsto cresce fino a raggiungere un massimo a quella frequenza per poi tornare a diminuire.

Osservando il grafico alla frequenza di risonanza si nota come V_L e V_C siano sfasati di circa $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ rispettivamente e di come V_R e V_S non siano perfettamente in fase. Quest'ultimo sfasamento denota una differenza tra la frequenza

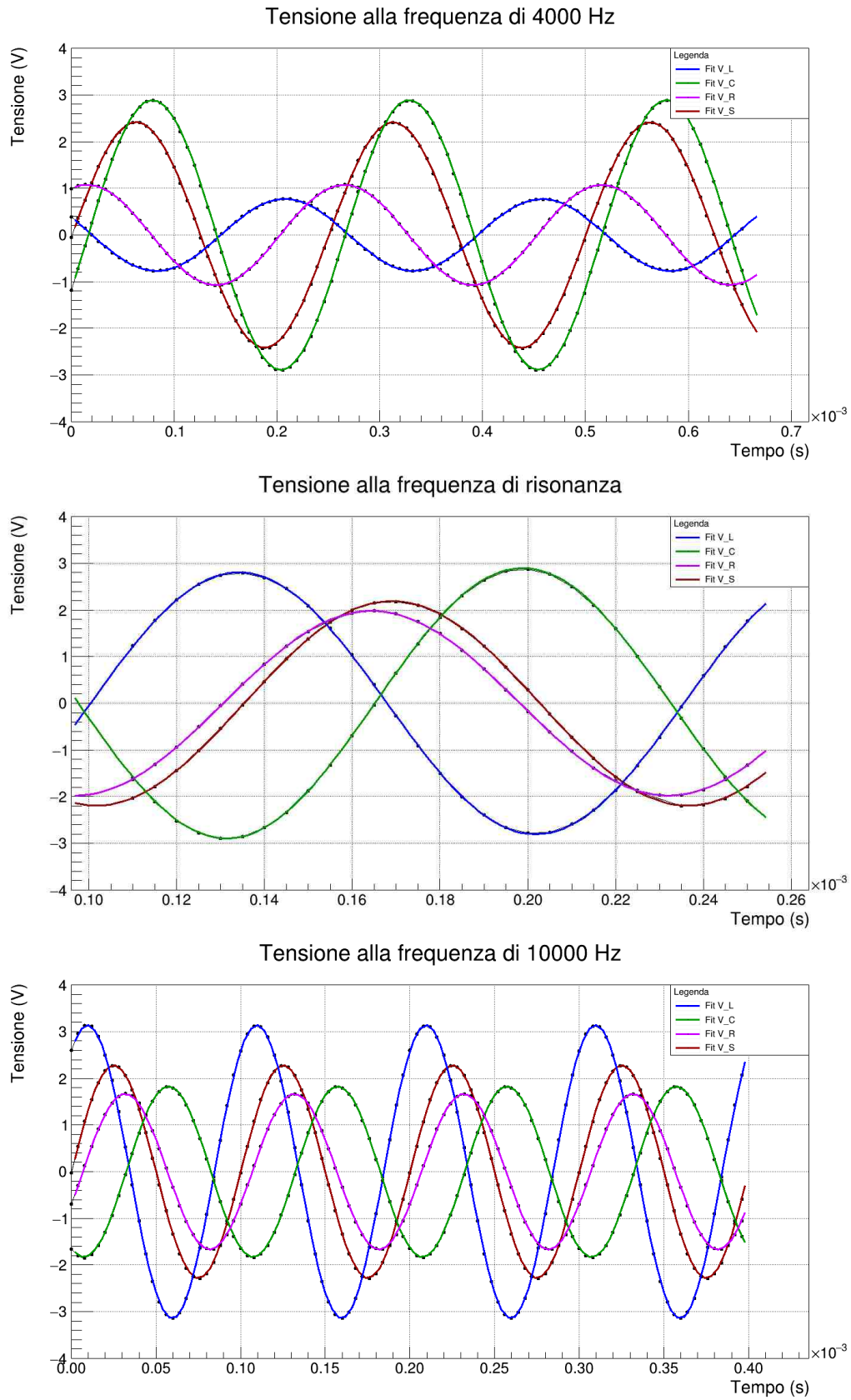


Figura 2: Confronto tra le tensioni in funzione del tempo ai capi degli elementi circuitali relativi alle tre diverse frequenze utilizzate. In alto f_m , in mezzo f_0 e in basso f_M . Sull'asse x il tempo è nel formato ($10^{-3}s$), come scritto in basso a destra nel grafico.

di risonanza attesa e quella sperimentale. I grafici sono stati ottenuti effettuando i fit delle equazioni (2),(3),(4) ai dati sperimentali. L'incertezza sulla tensione è stata ottenuta analizzando il rumore del function generator, ovvero la deviazione standard di un campione di misure relative a un semiperiodo di un'onda quadra. In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata.

$\tilde{\chi}^2$	V_S	V_R	V_C	V_L
4000Hz	25.2	3.02	30.6	5.34
7351Hz	9.68	8.31	15.7	15.6
10000Hz	15.3	4.49	16.5	7.01

Tabella 1: Valori del $\tilde{\chi}^2$ per la tensione di ciascuna componente nei tre casi analizzati

4.2 Analisi dell'ampiezza

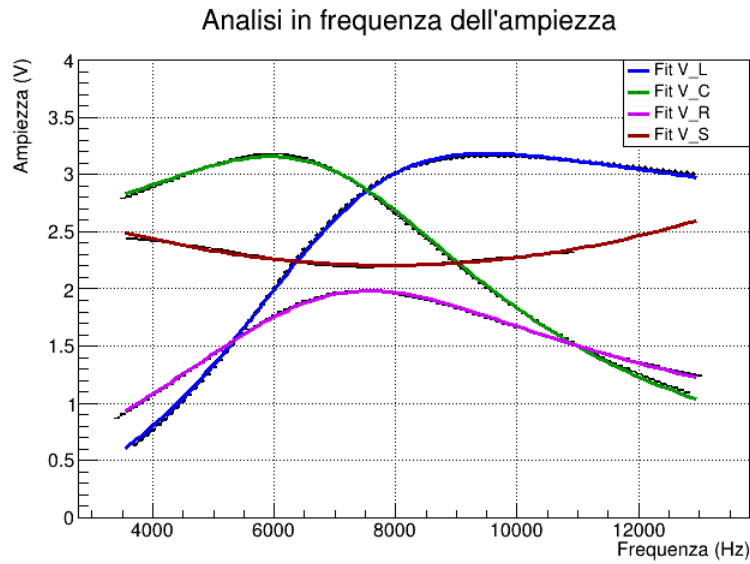


Figura 3: Ampiezza massima della tensione in funzione della frequenza per ogni componente del circuito.

Il grafico in Figura 3 permette di osservare contemporaneamente gli andamenti dell'ampiezza massima della tensione di ciascuna componente in base alla frequenza. Si può notare che le curve di V_L e V_C verificano la tendenza riscontrata nell'analisi della tensione in funzione del tempo. Infatti la prima cresce fino a un massimo poco dopo f_0 e la seconda, successivamente a un massimo poco prima di f_0 , decresce. È importante osservare come l'ampiezza di V_S non rimanga costante ma abbia un minimo intorno a f_0 . Al contrario V_R ha un massimo in un intorno della frequenza di risonanza attesa. Questo conferma quanto detto nel paragrafo precedente: è possibile ricavare un valore sperimentale per la frequenza di risonanza differente da f_0 . Questo valore è stato calcolato in corrispondenza del massimo dell'ampiezza di V_R e risulta $f_0s = (7562 \pm 5)Hz$. Anche in questo caso l'errore sull'ampiezza è un errore casuale ottenuto da un campione di dati ricavato misurando l'ampiezza a frequenza fissata. Anche in questo caso i valori del $\tilde{\chi}^2$ riportati in Tabella 2 risultano relativamente elevati a causa di una probabile sottostima dell'incertezza totale.

$\tilde{\chi}^2$	V_R	V_C	V_L
Ampiezza	11.2	30.7	25.12
Fase	15.7	6.20	5.99

Tabella 2: Valori del $\tilde{\chi}^2$ per la tensione di ciascuna componente per il fit in frequenza

4.3 Analisi della fase

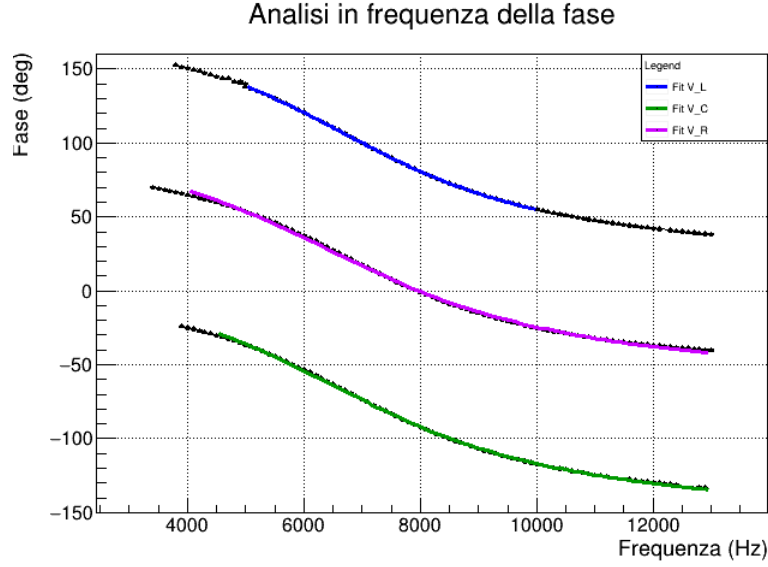


Figura 4: *Fase della tensione in funzione della frequenza per ogni componente del circuito.*

Dal grafico in Figura 4 è possibile verificare il comportamento previsto nella (6). Infatti si osserva come la fase di V_L tenda a 0, quella di V_R tenda a $-\frac{\pi}{2}$ e quella di V_C tenda a $-\pi$ all'aumentare della frequenza. Analizzando i dati si evince che la curva di V_R raggiunge il valore 0 in un intorno di f_0s . Quest'ultimo risultato può essere stato condizionato da un errore sistematico della scheda ELVIS II durante il campionamento: i segnali dei diversi canali di acquisizione vengono misurati sequenzialmente e pertanto l'ultimo canale acquisirà con un ritardo Δt rispetto al primo. In riferimento alla Tabella 3 valgono le stesse considerazioni sull'incertezze del paragrafo precedente.

5 Conclusioni

L'esperimento ha fornito risultati contrastanti: sebbene il comportamento atteso del circuito ha trovato buon riscontro nel fit dei dati sperimentali alle curve teoriche, l'analisi in frequenza ha evidenziato una significativa differenza tra $f_0 = (7351 \pm 68)Hz$ e $f_0s = (7562 \pm 5)Hz$. Questo ad esempio si traduce in uno sfasamento tra V_S e V_R a f_0 come si nota in Figura 2. È possibile ipotizzare che questa discordanza sia dovuta ad alcuni effetti sistematici dovuti alla scelta delle componenti del circuito e alla scheda ELVIS. Infatti l'utilizzo di una resistenza $R = (330.0 \pm 0.3)\Omega$ di valore comparabile con quello della resistenza interna del function generator $R_I = 50\Omega$ può aver condizionato in maniera non trascurabile le misure di V_R . Inoltre la scheda di acquisizione riceve i segnali dei diversi canali sequenzialmente ad intervalli di Δt , fattore che può aver determinato un ulteriore errore sistematico per le misurazioni.