

Analisi di un circuito RLC serie in regime sinusoidale

Bertasi Leonardo mat. 970881, Perniola Davide mat. 989409

18/05/2022

1 Abstract

In questa esperienza si è analizzato il comportamento di un circuito RLC serie in regime sinusoidale. Misurando le tensioni ai capi delle componenti è stato possibile verificare la differenza di comportamento tra di esse. A tale scopo si sono acquisiti i dati relativi a tre frequenze significative in un intorno della frequenza di risonanza attesa $f_0 = (7351 \pm 68)Hz$. Inoltre si è studiato l'andamento dell'ampiezza e della fase delle tensioni ai capi delle componenti in funzione della frequenza

2 Introduzione

Un circuito RLC serie consiste in una resistenza, una induttanza e un condensatore posti in serie. Applicando ai capi del circuito una differenza di potenziale sinusoidale $V_0 \cos wt$ ci si aspetta di osservare un preciso andamento, anch'esso sinusoidale, ai capi di ognuno degli elementi circuitali. L'unica corrente che scorre nel circuito segue la relazione (si veda appendice)

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC})] \quad (1)$$

Utilizzando la (1) si possono scrivere gli andamenti teorici della ddp ai capi della resistenza

$$V_R(t) = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC})] \quad (2)$$

dell'induttanza

$$V_L(t) = \frac{V_0 wL}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC}) + \frac{\pi}{2}] \quad (3)$$

e del condensatore

$$V_C(t) = \frac{(\frac{V_0}{wC})}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \cos [wt + (\arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC}) - \frac{\pi}{2}] \quad (4)$$

Ricordando che la pulsazione di risonanza per un circuito RLC è $w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ e che il modulo della corrente che scorre nel circuito alla frequenza di risonanza corrispondente f_0 è massimo, alla frequenza di risonanza ci si aspetta di osservare $V_R(t)$ in fase con la sorgente e massimo in ampiezza, $V_L(t)$ in anticipo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla sorgente e $V_C(t)$ in ritardo di $\frac{\pi}{2}$ rispetto alla sorgente e della stessa ampiezza di $V_C(t)$. In generale si prevede un aumento dell'ampiezza di V_L e una diminuzione dell'ampiezza di V_C proporzionale ad w , mentre per V_R l'ampiezza aumenta fino al massimo in corrispondenza di f_0 per poi decrescere sempre proporzionalmente a w .

Per quanto riguarda la fase inoltre, notando come

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} \arctan \frac{1 - w^2 LC}{wRC} = -\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

è chiaro aspettarsi, aumentando w , la decrescita della fase della tensione ai capi di ogni componente e lo stabilizzarsi di quest'ultima a 0 per $V_L(t)$, $-\frac{\pi}{2}$ per $V_R(t)$ e $-\pi$ per $V_C(t)$.

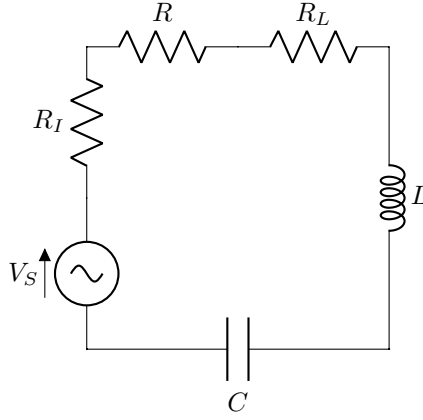


Figura 1: *Schema del circuito realizzato.*

3 Apparato sperimentale e svolgimento

Il circuito RLC è stato realizzato sulla breadboard della scheda di acquisizione NI ELVIS II ed è schematizzato in Figura 1. Esso è alimentato dal function generator di ELVIS di resistenza interna $R_I = 50\Omega$ come da specifiche della scheda. Nel circuito sono presenti, disposti in serie, una induttanza $L = (10.3 \pm 0.1)mH$, un condensatore $C = (45.5 \pm 0.4)nF$ una resistenza $R = (330.0 \pm 0.3)\Omega$ e una resistenza $R_L = (34.5 \pm 0.1)\Omega$ che tiene conto della resistenza interna dell'induttore. Tutti i valori delle componenti riportati sono stati misurati utilizzando il multimetro digitale di ELVIS. Per verificare il corretto funzionamento delle componenti è stato utilizzato un oscilloscopio, osservando così il comportamento del circuito in un intorno della frequenza di risonanza attesa. Successivamente servendosi di un programma scritto in LabView sono state acquisite le misure delle ddp ai capi del generatore, resistenza, induttanza e condensatore relative ad una frequenza $f_m = 4000Hz$, una $f_0 = 7351Hz$ e $f_M = 10000Hz$ in modo tale da evidenziare le differenze del comportamento del circuito all'interno di un ampio range di frequenze e in particolare alla frequenza di risonanza. Per far questo si è usata una frequenza di acquisizione di $5 \times 10^4 Hz$ nel primo caso, di $1 \times 10^5 Hz$ nel secondo e di $1.5 \times 10^5 Hz$ nel terzo, affinché questa si mantenga ad un valore di almeno dieci volte quello della frequenza del segnale acquisito. Infine si è studiato l'andamento della fase e dell'ampiezza della ddp ai capi delle componenti in funzione della frequenza. Per far ciò si è impostato nel function generator uno *sweep* sulla frequenza nel range compreso tra $3000Hz$ e $13000Hz$, con *step* di $100Hz$ e *step interval* di $100ms$.

4 Risultati e discussione

4.1 Tensione in funzione del tempo

In Figura 2 sono riportate le tensioni in funzione del tempo ai capi di ogni elemento del circuito per i tre valori di frequenza scelti. Si può subito notare che gli andamenti teorici (descritti nell'introduzione) sono rispettati: considerando V_L si vede come la sua ampiezza cresca nei grafici a frequenza di risonanza e $10000Hz$ rispetto al grafico a $4000Hz$. Al contrario per V_C l'ampiezza decresce una volta superata f_0 , mentre V_R come previsto cresce fino a raggiungere un massimo a quella frequenza per poi tornare a diminuire.

Osservando il grafico alla frequenza di risonanza si nota come V_L e V_C siano sfasati di circa $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ rispettivamente e di come V_R e V_S non siano perfettamente in fase. Quest'ultimo sfasamento denota una differenza tra la frequenza di risonanza attesa e quella sperimentale. I grafici sono stati ottenuti effettuando i fit delle equazioni (2),(3),(4) ai dati sperimentali. L'incertezza sulla tensione è stata ottenuta analizzando il rumore del function generator, ovvero la deviazione standard di un campione di misure relative a un semiperiodo di un'onda quadra. In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei χ^2 ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata.

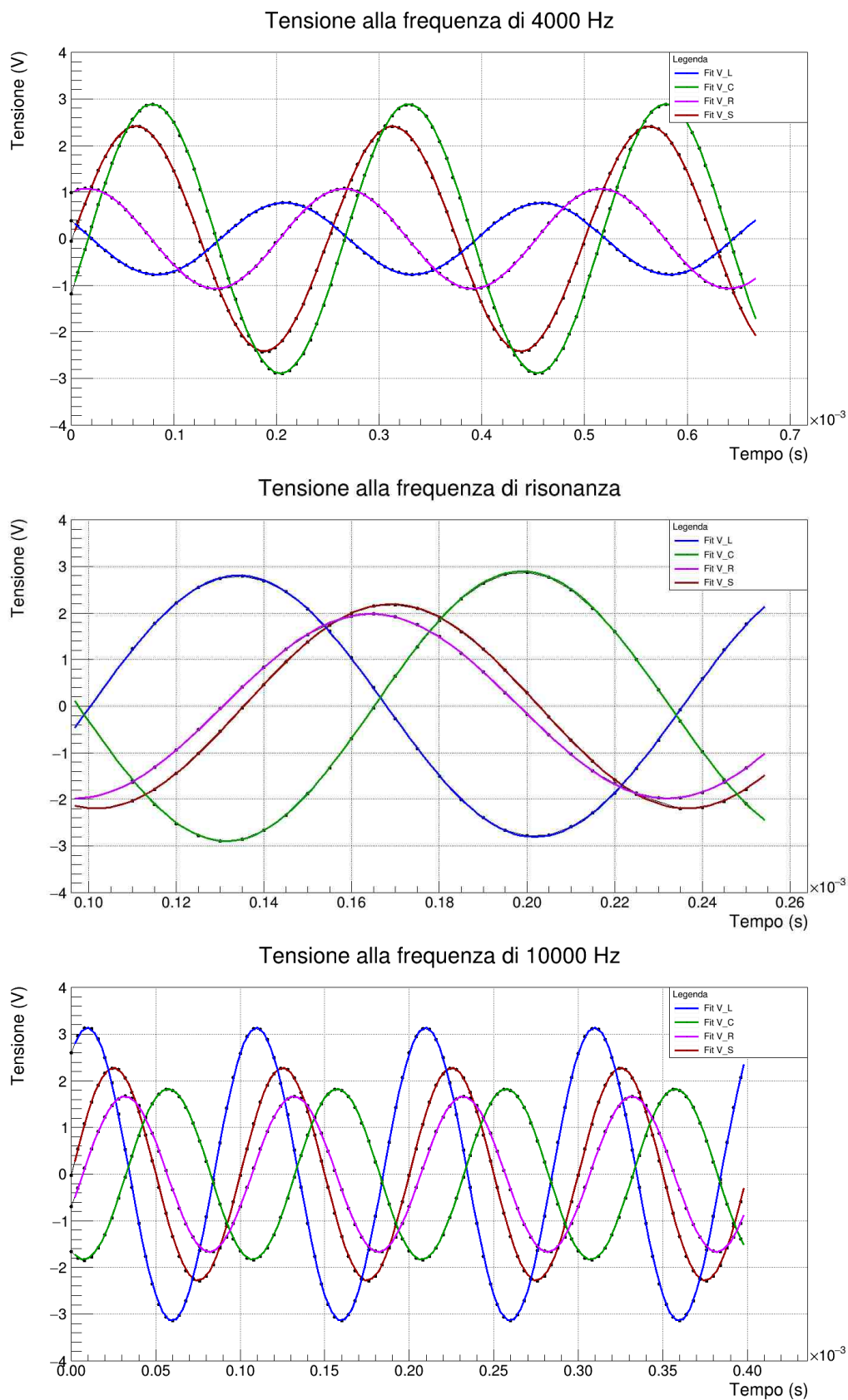


Figura 2: Confronto tra le tensioni in funzione del tempo ai capi degli elementi circuitali relativi alle tre diverse frequenze utilizzate. In alto f_m , in mezzo f_0 e in basso f_M .

$\tilde{\chi}^2$	V_S	V_R	V_C	V_L
4000Hz	25.2	3.02	30.6	5.34
7351Hz	9.68	8.31	15.7	15.6
10000Hz	15.3	4.49	16.5	7.01

Tabella 1: Valori del $\tilde{\chi}^2$ per la tensione di ciascuna componente nei tre casi analizzati

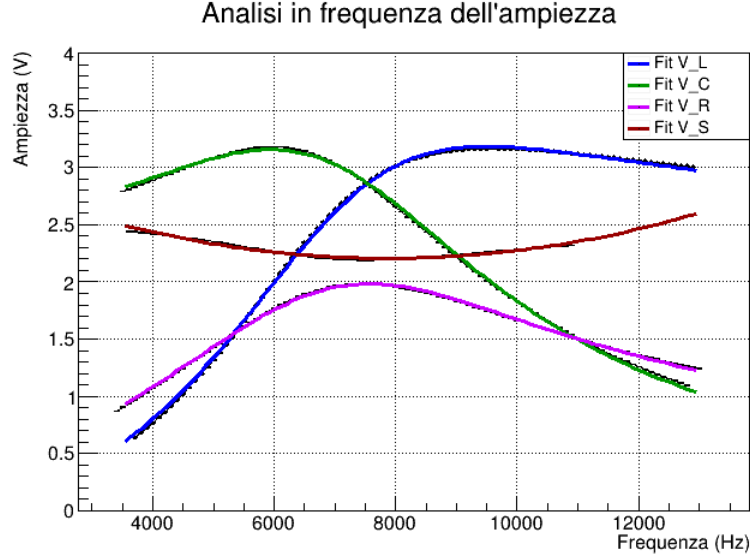


Figura 3: Ampiezza della tensione in funzione della frequenza per ogni componente del circuito.

4.2 Analisi dell'ampiezza

In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata. In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata. In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata.

4.3 Analisi della fase

In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata. In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata. In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata.

5 Conclusioni

In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata. In Tabella 1 sono riportati i risultati numerici dei $\tilde{\chi}^2$ ottenuti dai fit. I valori risultano relativamente grandi rispetto al valore ottimale 1 in quanto l'incertezza totale sulla tensione è probabilmente sottostimata.

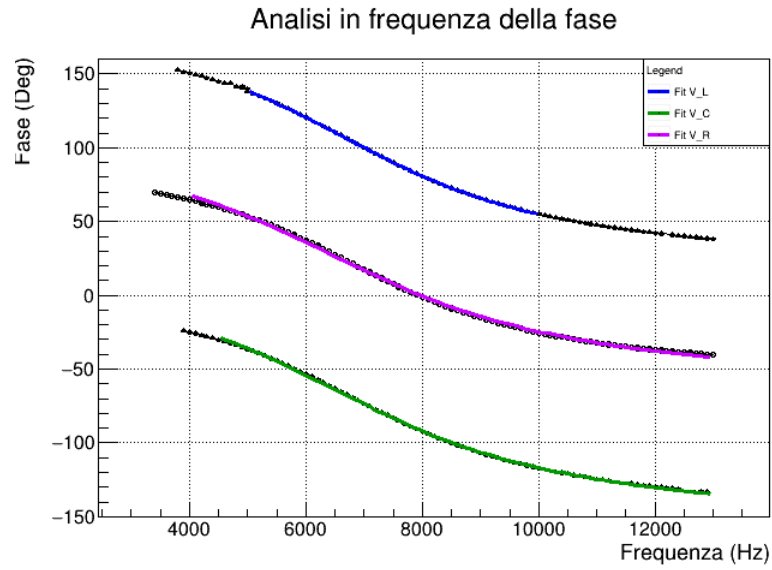


Figura 4: *Fase della tensione in funzione della frequenza per ogni componente del circuito.*

6 Appendice

- Per ricavare la (1) è necessario risolvere l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = V_0 \cos wt$$

Dalla teoria è noto come essa abbia soluzione nella forma $I_0 \cos(wt + \phi)$