

本节内容

纠错编码

(海明校验码)

本节总览

海明码

基本思想

求解步骤

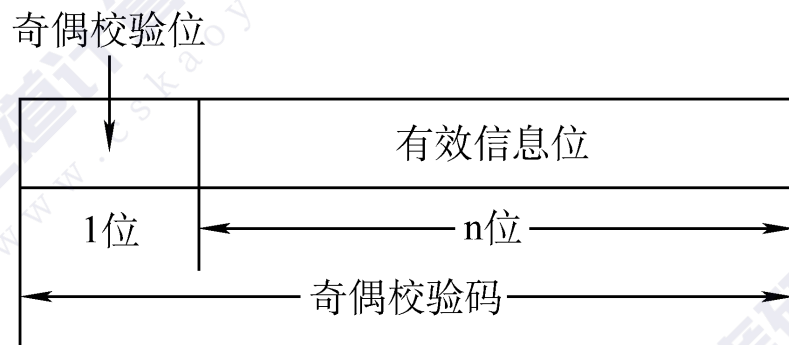
年份	中文译名	姓名	贡献领域
1966年	艾伦·佩利	Alan J. Perlis	高级程序设计技巧，编译器构造
1967年	莫里斯·威尔克斯	Maurice V. Wilkes	存储程序式计算机EDSAC，程序库
1968年	理查德·卫斯里·汉明	Richard Hamming	数值方法，自动编码系统，错误检测和纠错码
1969年	马文·明斯基	Marvin Minsky	人工智能
1970年	詹姆斯·维尔金森	James H. Wilkinson	数值分析，线性代数，倒退错误分析

海明校验码思路简介

奇校验码：整个校验码（有效信息位和校验位）中“1”的个数为奇数。

偶校验码：整个校验码（有效信息位和校验位）中“1”的个数为偶数。

1个校验位之只能携带
2种状态信息（对/错）



偶校验：1010 \rightarrow 01010，能发现奇数位错误，但无法确定是哪一位出错。

海明码设计思路：将信息位分组进行偶校验 \rightarrow 多个校验位

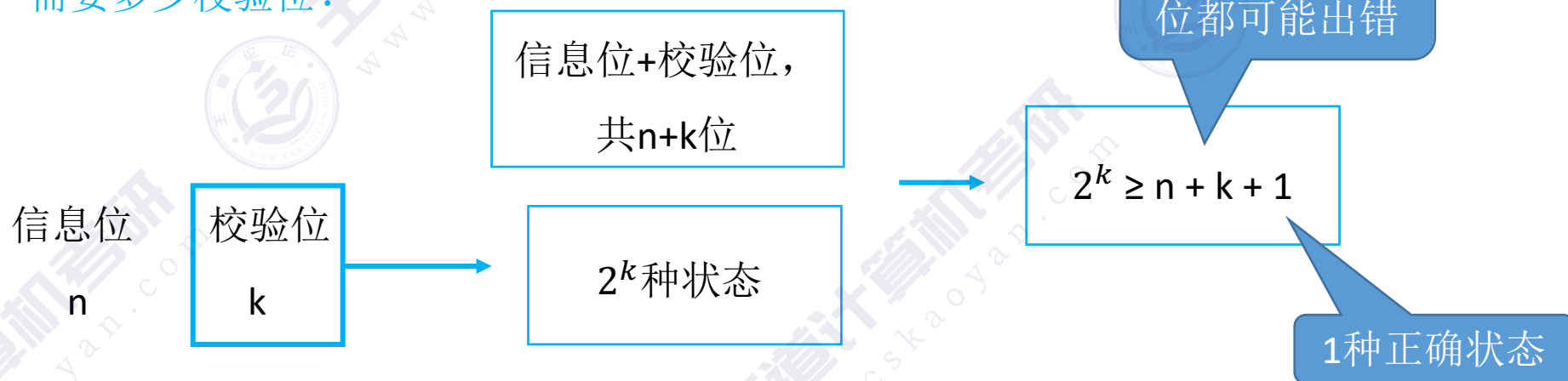
\rightarrow 多个校验位标注出错位置

多个校验位能携带多种状态信息，（对/错，错在哪）

海明校验码思路简介

海明码设计思路：将信息位分组进行偶校验 → 多个校验位
→ 多个校验位标注出错位置

需要多少校验位？



n	1	2-4	5-11	12-26	27-57	58-120
k	2	3	4	5	6	7

海明码求解步骤

信息位：1010

1. 确定海明码的位数： $2^k \geq n + k + 1$

$n = 4 \rightarrow k = 3$

设信息位 $D_4D_3D_2D_1$ (1010)，共4位，校验位 $P_3P_2P_1$ ，共3位，对应的海明码为 $H_7H_6H_5H_4H_3H_2H_1$ 。

2. 确定校验位的分布

H_7	H_6	H_5	H_4	H_3	H_2	H_1
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

校验位 P_i 放在海明位号为 2^{i-1} 的位置上

信息位按顺序放到其余位置

确定校
验位
数量

确定校
验位
的
分布

求校验
位的
值

检错
纠
错

海明码求解步骤

信息位：1010

1. 确定海明码的位数： $2^k \geq n + k + 1$

$n = 4 \rightarrow k = 3$

设信息位 $D_4D_3D_2D_1$ (1010)，共4位，校验位 $P_3P_2P_1$ ，共3位，对应的海明码为 $H_7H_6H_5H_4H_3H_2H_1$ 。

2. 确定校验位的分布

H_7	H_6	H_5	H_4	H_3	H_2	H_1
D_4	D_3	D_2	P_3	D_1	P_2	P_1
1	0	1		0		

校验位 P_i 放在海明位号为 2^{i-1} 的位置上

信息位按顺序放到其余位置

3. 求校验位的值

\oplus ：异或

$$0 \oplus 0 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1$$

$$1 \oplus 0 = 1$$

$$1 \oplus 1 = 0$$

相当于偶校验

$H_3 : 3 \rightarrow 011$

$H_5 : 5 \rightarrow 101$

$H_6 : 6 \rightarrow 110$

$H_7 : 7 \rightarrow 111$

三个分组，分别进行偶校验

$$P_1 = H_3 \oplus H_5 \oplus H_7 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 \\ = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$P_2 = H_3 \oplus H_6 \oplus H_7 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 \\ = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$P_3 = H_5 \oplus H_6 \oplus H_7 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 \\ = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

海明码求解步骤

信息位：1010

1. 确定海明码的位数： $2^k \geq n + k + 1$

$n = 4 \rightarrow k = 3$

设信息位 $D_4D_3D_2D_1$ (1010)，共4位，校验位 $P_3P_2P_1$ ，共3位，对应的海明码为 $H_7H_6H_5H_4H_3H_2H_1$ 。

2. 确定校验位的分布

H_7	H_6	H_5	H_4	H_3	H_2	H_1
D_4	D_3	D_2	P_3	D_1	P_2	P_1
1	0	1	0	0	1	0

校验位 P_i 放在海明位号为 2^{i-1} 的位置上

信息位按顺序放到其余位置

3. 求校验位的值

$H_3 : 3 \rightarrow 011$

$H_5 : 5 \rightarrow 101$

$H_6 : 6 \rightarrow 110$

$H_7 : 7 \rightarrow 111$

三个分组，分别进行偶校验

$$P_1 = H_3 \oplus H_5 \oplus H_7 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 \\ = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$P_2 = H_3 \oplus H_6 \oplus H_7 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 \\ = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$P_3 = H_5 \oplus H_6 \oplus H_7 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 \\ = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

4. 纠错

$$S_1 = P_1 \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_4$$

$$S_2 = P_2 \oplus D_1 \oplus D_3 \oplus D_4$$

$$S_3 = P_3 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4$$

海明码求解步骤

信息位：1010

1. 确定海明码的位数： $2^k \geq n + k + 1$

$n = 4 \rightarrow k = 3$

设信息位 $D_4D_3D_2D_1$ (1010)，共4位，校验位 $P_3P_2P_1$ ，共3位，对应的海明码为 $H_7H_6H_5H_4H_3H_2H_1$ 。

2. 确定校验位的分布

H_7	H_6	H_5	H_4	H_3	H_2	H_1
D_4	D_3	D_2	P_3	D_1	P_2	P_1
1	0	1	0	0	1	0

校验位 P_i 放在海明位号为 2^{i-1} 的位置上

信息位按顺序放到其余位置

3. 求校验位的值

$$P_1 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$P_2 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$P_3 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

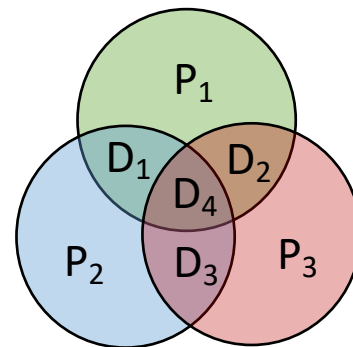
4. 纠错

校验方程：

$$S_1 = P_1 \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_4$$

$$S_2 = P_2 \oplus D_1 \oplus D_3 \oplus D_4$$

$$S_3 = P_3 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4$$



接收到：1010010

$$S_1 = P_1 \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$S_2 = P_2 \oplus D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$S_3 = P_3 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

无错误

接收到：1010000

$$S_1 = P_1 \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$S_2 = P_2 \oplus D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$S_3 = P_3 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

第010位出错

低
高

海明码求解步骤-格式变化

信息位：1010

1. 确定海明码的位数： $2^k \geq n + k + 1$

$n = 4 \rightarrow k = 3$

设信息位 $D_4D_3D_2D_1$ （1010），共4位，校验位 $P_3P_2P_1$ ，共3位，对应的海明码为 $H_7H_6H_5H_4H_3H_2H_1$ 。

2. 确定校验位的分布

H_7	H_6	H_5	H_4	H_3	H_2	H_1
D_4	D_3	D_2	P_3	D_1	P_2	P_1
1	0	1	0	0	1	0

校验位 P_i 放在海明位号为 2^{i-1} 的位置上

信息位按顺序放到其余位置

3. 求校验位的值

$$P_1 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$P_2 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$P_3 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

设信息位 $D_1D_2D_3D_4$ （1010），共4位，校验位 $P_1P_2P_3$ ，共3位，对应的海明码为 $H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7$ 。

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7
P_1	P_2	D_1	P_3	D_2	D_3	D_4
		1		0	1	0

$$P_1 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$P_2 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$P_3 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

海明码求解步骤-格式变化

信息位：1010

1. 确定海明码的位数： $2^k \geq n + k + 1$

$n = 4 \rightarrow k = 3$

设信息位 $D_4D_3D_2D_1$ (1010)，共4位，校验位 $P_3P_2P_1$ ，共3位，对应的海明码为 $H_7H_6H_5H_4H_3H_2H_1$ 。

2. 确定校验位的分布

H_7	H_6	H_5	H_4	H_3	H_2	H_1
D_4	D_3	D_2	P_3	D_1	P_2	P_1
1	0	1	0	0	1	0

校验位 P_i 放在海明位号为 2^{i-1} 的位置上

信息位按顺序放到其余位置

3. 求校验位的值

$$P_1 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0$$

$$P_2 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

$$P_3 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

设信息位 $D_1D_2D_3D_4$ (1010)，共4位，校验位 $P_1P_2P_3$ ，共3位，对应的海明码为 $H_1H_2H_3H_4H_5H_6H_7$ 。

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7
P_1	P_2	D_1	P_3	D_2	D_3	D_4
1	0	1	1	0	1	0

$$P_1 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$P_2 = D_1 \oplus D_3 \oplus D_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

$$P_3 = D_2 \oplus D_3 \oplus D_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

补充

无法区分到底是1位错还是2位错

海明码的检错、纠错能力:

纠错能力——1位
检错能力——2位

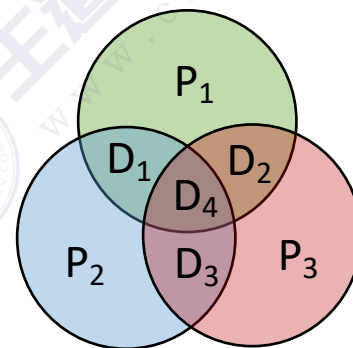
H ₇	H ₆	H ₅	H ₄	H ₃	H ₂	H ₁
D ₄	D ₃	D ₂	P ₃	D ₁	P ₂	P ₁
1	0	1	0	0	1	0

校验方程:

$$S_1 = P_1 \oplus D_1 \oplus D_2 \oplus D_4$$

$$S_2 = P_2 \oplus D_1 \oplus D_3 \oplus D_4$$

$$S_3 = P_3 \oplus D_2 \oplus D_3 \oplus D_4$$



H ₈	H ₇	H ₆	H ₅	H ₄	H ₃	H ₂	H ₁
P _全	D ₄	D ₃	D ₂	P ₃	D ₁	P ₂	P ₁
1	1	0	1	0	0	1	0

$S_3 S_2 S_1 = 000$ 且全体偶校验成功 → 无错误

$S_3 S_2 S_1 \neq 000$ 且全体偶校验失败 → 有1位错, 纠正即可

$S_3 S_2 S_1 \neq 000$ 且全体偶校验成功 → 有2位错, 需重传

(需加上“全校验位”, 对整体进行偶校验)

知识回顾

海明码

基本思想

分组偶校验，多个校验位可反映出错位置

确定校验位个数（k 个校验位，n 个信息位）

$$2^k \geq n + k + 1$$

确定校验位分布

P1,P2,P3...分别在 1,2,4,8,16...

空出来的其他位置依次填入信息位

求解步骤

求校验位

将信息位的位置序号用 k 位二进制数表示出来

校验位 P_i 与 位置序号第 i 位为 1 的信息位
归为同一组，进行偶校验

对 P1,P2,P3...所属各分组进行异或（相当于分组偶校验）
求得 S1,S2,S3...

纠错

S3 S2 S1 = 000 说明无错误

S3 S2 S1 \neq 000，则其值反映出错位置

补充

海明码有 1 位纠错，2 位检错能力

为了区分 1 位错和 2 位错，还需添加“全校验位”对整体进行偶校验

注意：有的题目位置编号可能是从小到大的，但处理方法雷同

Richard Hamming 演讲选段



早年，我在攻克一个又一个难题，成功的多，失败的少。可是，周五解决了一个问题回到家里后，我却并不快活，反而很沮丧。我看到生活就是一个问题接着一个问题又接着另一个问题。

想了相当长一阵子后，我决定以另一种方式干活：**你的工作要成为别人工作的基石！**于是别人就会说："看哪，我站在他的肩膀之上，我看得更远了。"

科学的本质是积累！我再也不去做相互孤立的问题，除非它能代表某一类问题的共性。我决不再去解决单一的问题。

你要么让人们在你的成果上有所建树，要么别人不得不把你干的活从头再来复制一遍。

