Tema 1

Enero 2015

1.1. Dados los campos vectoriales $\vec{a} = x\,\vec{u}_x - y\,\vec{u}_y$ y $\vec{b} = r\,\vec{u}_r - z\,\vec{u}_z$, donde r es la distancia al eje Z:

1) Probar que el campo vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ es solenoidal.
2) Obtener la proyección del campo vectorial $\nabla\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$ en la dirección del campo $\vec{a}$, para cualquier punto del espacio.

Junio 2017

1.2. Las funciones potenciales asociadas a dos campos vectoriales, $\vec{a}$ y $\vec{b}$, son respectivamente:

$$f = 3y^2x \quad \text{y} \quad g = r^4\cos^2\theta\left(\cos^2\varphi - \cos^2\theta\cos^2\varphi\right),$$ siendo $\vec{r}$ el vector de posición.

Demostrar que existe un vector $\vec{v}$, tal que $\vec{a}\times\vec{b} = \nabla\times\vec{v}$

Junio 2013

1.3. Dado el campo vectorial $\vec{b} = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{u}_x + r\cos\theta\,\vec{u}_z$, donde $\vec{r}$ es el vector de posición y θ el ángulo que forma $\vec{r}$ con el eje Z, calcular, de forma razonada y justificando todos los desarrollos, $\nabla\cdot\vec{b}$ y $\nabla\times\vec{b}$, expresando el resultado en coordenadas cilíndricas.

Noviembre 2014

1.4. Dado el campo vectorial $\vec{a} = z^2\vec{u}_z - r^2\vec{u}_r$, donde r es la distancia al eje Z:

1) Obtener razonadamente la divergencia de $\vec{a}$, en un punto de coordenadas cartesianas $\left(-4,3,10\right)$.
2) Obtener razonadamente el rotacional de $\vec{a}$ en cualquier punto del espacio.
3) Justificar si es posible escribir $\vec{a}$ de alguna de las dos formas siguientes:
   (a) $\vec{a} = \nabla f$
   (b) $\vec{a} = \nabla\times\vec{b}$

Enero 2015

1.5. Dado el campo vectorial $\vec{a} = 4x\,\vec{u}_\varphi - y\,\vec{u}_\theta$, encontrar razonadamente el lugar geométrico de los puntos en los que la divergencia de $\vec{a}$ es nula.

Abril 2015

1.6. Dado el campo vectorial $\vec{a} = \rho\left(\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,\vec{u}_x - \rho\,\mathrm{sen}^2\varphi\,\vec{u}_y + z\cos\varphi\,\vec{u}_z\right)$, determinar de forma razonada si:

1) Existe un campo escalar Φ, tal que $\vec{a} = \nabla\Phi$.
2) Existe un campo vectorial $\vec{b}$, tal que $\vec{a} = \nabla\times\vec{b}$.

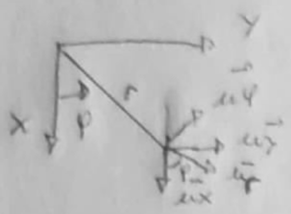
1.1. Enero 2015.

$\vec{a} = x\,\vec{u_x} - y\,\vec{u_y}$ (Cartesianas) $\qquad$ r distancia al eje z $\equiv$ P

$\vec{b} = r\,\vec{u_r} - z\,\vec{u_z}$ (Cilíndricas)

1) $\vec{a} \times \vec{b}$ es Solenoidal $\qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases}$

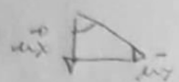
$r = \sqrt{x^2+y^2}$



$\vec{u_r} = \cos\varphi\,\vec{u_x} + \text{sen}\,\varphi\,\vec{u_y}$

$\vec{b} = r\,(\cos\varphi\,\vec{u_x} + \text{sen}\,\varphi\,\vec{u_y}) - z\,\vec{u_z} =$

$\vec{b} = x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y} - z\,\vec{u_z}$



$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \vec{u_x} + a_x b_y \vec{u_z} - a_y b_x \vec{u_z} - a_x b_z \vec{u_y}$

$a_z = 0$

$\vec{a}\times\vec{b} = yz\,\vec{u_x} + xy\,\vec{u_z} + xy\,\vec{u_z} + xz\,\vec{u_y}$

$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = yz\,\vec{u_x} + xz\,\vec{u_y} + 2xy\,\vec{u_z}}$

Solenoide? : $\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(2xy) = 0$

El campo vectorial será solenoidal si su divergencia es 0.

Proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$

$\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b}$

2. $\nabla\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \left[\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right]\vec{u_x} + \left[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right]\vec{u_y} + \left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right]\vec{u_z}$

$= (2x - x)\,\vec{u_x} + (y - 2y)\,\vec{u_y} + (z - z)\,\vec{u_z} =$

$= x\,\vec{u_x} - y\,\vec{u_y} \equiv \vec{c}$

Proyección $\vec{c}$ sobre $\vec{a} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{a} = \frac{(x\vec{u_x} - y\vec{u_y})\cdot(x\vec{u_x} - y\vec{u_y})}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \sqrt{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

1.2. Junio 2017.

Funciones potenciales: $f = 3y^2x$ (campo vectorial $\vec{a}$)

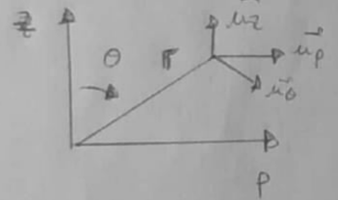
$g = r^4 \cos^2\theta (\cos^2\varphi - \cos^2\theta \cos^2\varphi)$ (campo vectorial $\vec{b}$)

$\vec{r}$ vector de posición.

Demostrar que existe un vector $\vec{V}$, tal que $\vec{a}\times\vec{b} = \nabla\times\vec{V}$

$\vec{a} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u_z} = 3y^2\vec{u_x} + 6yx\vec{u_y} +$

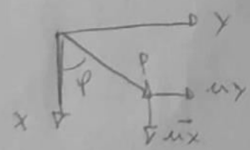
Coordenadas esféricas: (r, θ, φ) $\quad r = \sqrt{z^2+\rho^2}$



$\begin{cases} z = r\cos\theta \\ \rho = r\sin\theta \end{cases}$

Coordenadas cilíndricas:

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$



$\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$ $\quad \{r^2\cdot\cos^2\theta \quad r^2\sin^2\theta\}$

$g = r^4\cos^2\theta\cos^2\varphi\underbrace{(1-\cos^2\theta)}_{\sin^2\theta} = r^4\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin^2\theta =$

$= z^2\cdot\rho^2\cos^2\varphi = z^2x^2$

$\vec{b} = \nabla g = 2xz^2\vec{u_x} + 2x^2z\vec{u_z}$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z \vec{u_x} - a_y b_x \vec{u_z} - a_x b_z \vec{u_y}$

$\begin{cases} a_z = 0 \\ b_y = 0 \end{cases}$

$\vec{a}\times\vec{b} = 6xy\cdot 2x^2z\,\vec{u_x} - 6yx\cdot 2xz^2\,\vec{u_z} - 3y^2\,2x^2z\,\vec{u_y}$

vectorial a)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 12x^3yz\,\vec{u_x} - 6x^2y^2z\,\vec{u_y} - 12x^2yz^2\,\vec{u_z}$$

Para que un campo vectorial se pueda escribir como el rotacional de otro ($\vec{a} \times \vec{b} = \nabla \times \vec{V}$) dicho campo debe ser un campo solenoidal, para que un campo sea solenoidal su divergencia debe ser igual a 0.

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \times \vec{b}) = 36x^2yz - 12x^2yz - 24x^2yz = 0$$

$\vec{\nabla}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ es solenoidal, es decir existe: $\vec{a} \times \vec{b} = \nabla \times \vec{V}$

Junio 2013

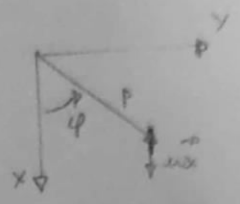
13

Campo vectorial: $\vec{b} = r\,\text{sen}\,\theta\,\vec{u_x} + \underbrace{r\cos\theta}_{\text{Esféricas}}\,\underbrace{\vec{u_z}}_{\text{Cartesianas}}$

$\vec{r}$ vector posición

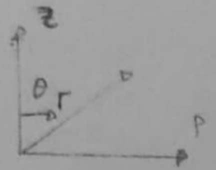
θ ángulo que forma $\vec{r}$ con el eje z

Calcular $\overset{\text{Divergencia}}{\nabla\cdot\vec{b}}$ y $\overset{\text{Rotacional}}{\nabla\times\vec{b}}$, expresar coordenadas cilíndricas:



Coordenadas cilíndricas: (ρ, φ, z)

Coordenadas esféricas: (r, θ, φ)



$$r = \sqrt{z^2+\rho^2}$$

$$\begin{cases} \rho = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{u_x} = \cos\varphi\,\vec{u_\rho} - \text{sen}\,\varphi\,\vec{u_\varphi}$$

$$\vec{b} = \rho\,\vec{u_x} + z\,\vec{u_z}$$

$$\vec{b} = \underbrace{\rho\cos\varphi\,\vec{u_\rho}}_{b_\rho} \underbrace{- \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{u_\varphi}}_{b_\varphi} + \underbrace{z\,\vec{u_z}}_{b_z}$$

$$\nabla\cdot\vec{b} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot\rho\cos\varphi)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}(-\rho\,\text{sen}\,\varphi) + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{b} = \frac{1}{\rho}2\rho\cos\varphi - \frac{1}{\rho}\cdot\rho\cdot\cos\varphi + 1 = 2\cos\varphi - \cos\varphi + 1 = \cos\varphi + 1}$$

$\nabla\times\vec{b}$ (Rotacional): $\begin{cases} \text{Si } b_z \neq f(\rho,\varphi) \quad b_\varphi \neq f(z) \\ b_\rho \neq f(z) \end{cases}$

$$\nabla\times\vec{b} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho\cdot b_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial b_\rho}{\partial\varphi}\right]\vec{u_z} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(-\rho^2\,\text{sen}\,\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho\cos\varphi)\right]\vec{u_z} =$$

$$\boxed{\nabla\times\vec{a} = \frac{1}{\rho}\left[-2\rho\,\text{sen}\,\varphi + \rho\,\text{sen}\,\varphi\right]\vec{u_z} = -\text{sen}\,\varphi\,\vec{u_z}}$$

Rotacional: $\nabla\times\vec{a} = -\text{sen}\,\varphi\,\vec{u_z}$ no es conservativo porque el rotacional no es cero en algunos puntos.

Divergencia: $\nabla\cdot\vec{b} = \cos\varphi + 1$ no es solenoidal porque no es cero en algunos puntos.

Abril 2015

1.6.

$$\vec{a} = \rho(\rho \sin\varphi \cos\varphi\, \vec{u_x} - \rho \sin^2\varphi\, \vec{u_y} + z\cos\varphi\, \vec{u_z})$$

1) Determinar existe un escalar ϕ tal que $\vec{a} = \nabla\phi$ (CONSERVATIVO)

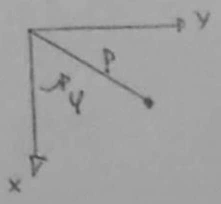
2) Existe un campo vectorial $\vec{b}$ tal que $\vec{a} = \nabla \times \vec{b}$ (SOLENOIDAL)

si $\vec{a}$ es CONSERVATIVO es IRROTACIONAL

1) ϕ existe si $\vec{a}$ es CONSERVATIVO, si $\vec{a}$ es solenoidal $\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = 0$

Calcular si es irrotacional: $\nabla \times \vec{a} = 0$ Calcular si es solenoidal

Coordenadas Cilíndricas: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$



$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

$$\vec{a} = \rho \sin\varphi \cdot \rho\cos\varphi\, \vec{u_x} - \rho^2 \sin^2\varphi\, \vec{u_y} + z\,\rho\cos\varphi\, \vec{u_z}$$

$$\vec{a} = x\cdot y\, \vec{u_x} - y^2\, \vec{u_y} + xz\, \vec{u_z}$$

(2) $\nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = y - 2y + x = x - y \neq 0$ $\nabla\cdot\vec{a}$ no se anula en todos puntos

$\bar{a}$ no es solenoidal, no existe $\vec{b}$ tal que $\vec{a} = \nabla\times\vec{b}$

(1) $\vec{\nabla}\times\vec{a} = -\frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{u_y} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{u_z} = -\frac{\partial}{\partial x}(xz)\,\vec{u_y} - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\,\vec{u_z}$

$a_x \neq f(z)$

$a_y \neq f(x,z)$

$a_z \neq f(y)$

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{a} = -z\,\vec{u_y} - x\cdot\vec{u_z}}$$ $\vec{\nabla}\times\vec{a}$ no se anula en todos puntos

$\bar{a}$ no es conservativo, no existe ϕ

Problema 1.1

1) $\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\equiv 0$

2) $\sqrt{x^2+y^2}$

Problema 1.2

$\nabla\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\equiv 0$

Problema 1.3

$\nabla\cdot\vec{b}=1+\cos\varphi$; $\nabla\times\vec{b}=(-sen\,\varphi)\vec{u}_z$

Problema 1.4

1) $\nabla\cdot\vec{a}=5$

2) $\nabla\times\vec{a}=0$

3) (*a*) Sí.

(*b*) No.

Problema 1.5

$\nabla\cdot\vec{a}=0$ sobre el plano *XZ*

Problema 1.6

1) No, ya que $\nabla\times\vec{a}\neq 0$.

2) No, ya que $\nabla\cdot\vec{a}\neq 0$.