Junio 2018

1. Debido a la acción simultánea de dos movimientos armónicos simples perpendiculares de igual frecuencia, una partícula describe, en el plano *XY*, una trayectoria elíptica centrada en el origen. Cuando la partícula se encuentra en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2}\right)\text{mm}$, su aceleración es $-2\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{u}_x+\vec{u}_y\right)\text{mm s}^{-2}$. Sabiendo que en ese punto, el vector $\left(\vec{u}_x-\vec{u}_y\right)$ es perpendicular a la trayectoria y apunta hacia el interior de la misma, determinar razonadamente:

1) La frecuencia de los dos movimientos armónicos simples que actúan sobre la partícula.
2) Las componentes intrínsecas de la aceleración en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2}\right)\text{mm}$.

Marzo 2016

2. Una partícula describe un movimiento armónico simple de amplitud *b* y frecuencia angular $\frac{\pi}{3}\text{rad s}^{-1}$, a lo largo del eje *Z* y en torno al origen de coordenadas. Sabiendo que el primer instante para el que $z=b$ es $t=\frac{1}{2}\text{ s}$, obtener razonadamente:

1) La velocidad de la partícula en el instante $t=\frac{5}{4}\text{ s}$.
2) Las posiciones de la partícula para las que su energía cinética es la octava parte de su energía potencial.

Enero 2019

3. Sobre una partícula actúan dos movimientos armónicos simples, ambos de frecuencia angular $\omega=6\pi\text{ rad s}^{-1}$, en las direcciones de los ejes *X* e *Y*. Si en el instante inicial la partícula se encuentra en el punto de coordenadas $\left(5\sqrt{3},5\right)\text{cm}$ y su velocidad es $\vec{v}=30\pi\left(-\vec{u}_x+\sqrt{3}\,\vec{u}_y\right)\text{cm s}^{-1}$, obtener de forma razonada:

1) La expresión de la elongación de ambos movimientos armónicos simples.
2) Las componentes intrínsecas de la aceleración en el instante $t=\frac{1}{6}\text{ s}$.
3) Qué movimiento armónico simple, a lo largo de uno de los ejes coordenados, sería necesario superponer a los dos anteriores, para que la partícula describiera una trayectoria rectilínea en la dirección del eje *Y*. Considerando ésta trayectoria recta, determinar las componentes intrínsecas de la aceleración en el instante $t=\frac{1}{6}\text{ s}$.

Enero 2017

4. Una partícula está sometida a dos movimientos armónicos simples cuyas elongaciones son:

$$x=2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{6}\right)\text{cm} \quad \text{e} \quad y=3\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)\text{cm} \ \text{donde } t \text{ se mide en s.}$$

De forma razonada:

1) Determinar los instantes de tiempo en los que la trayectoria de la partícula corta al semieje *X* positivo.

   En los instantes obtenidos en el apartado anterior, calcular:

2) La velocidad y la aceleración de la partícula.
3) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

Octubre 2017

5. Una partícula está sometida a dos movimientos armónicos simples cuyas elongaciones son:

$y = \mathrm{sen}\left(2\pi t + \pi/2\right)$ mm y $z = -\mathrm{sen}\,2\pi t$ mm, donde t se mide en s.

De forma razonada, obtener:

1) La ecuación de la trayectoria descrita por la partícula.
2) Las componentes intrínsecas de la aceleración de la partícula en el instante $t = \dfrac{8}{3}$ s.
3) Si la energía cinética de la partícula es $40\pi^2$ nJ, obtener su masa.

Marzo 2018

6. Una partícula de $30\,\mathrm{g}$ de masa está sometida a la acción de dos movimientos armónicos simples cuyas elongaciones son $x_1 = 2\cos\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ cm y $x_2 = 4\,\mathrm{sen}\left(2\pi t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ cm, donde t se mide en s. De forma razonada:

1) Obtener la elongación resultante, indicando su amplitud y su fase inicial.
2) Calcular las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a una distancia $\sqrt{3}$ cm del origen, expresando el resultado en unidades fundamentales del Sistema Internacional.
3) Determinar los vectores velocidad y aceleración de la partícula en los puntos en los que su energía potencial es triple que su energía cinética.

Marzo 2015

7. Una partícula está sometida simultáneamente a dos movimientos armónicos simples paralelos de igual amplitud $\left(2\,\mathrm{cm}\right)$ y frecuencia $\left(0{,}1\,\mathrm{Hz}\right)$, cuyas fases iniciales son $\varphi_1 = \pi/6$ y φ_2 $\left(0 < \varphi_2 < \pi\right)$. Si la velocidad de la partícula cuando han transcurrido $5\,\mathrm{s}$ desde el inicio del movimiento es $-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{5}\,\vec{u}_x\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$, obtener razonadamente la elongación descrita por la partícula, indicando su amplitud y fase inicial.

Marzo 2017

8. Una partícula de $10\,\mathrm{g}$ de masa está sometida a un movimiento armónico simple de elongación $x = 4\,\mathrm{sen}\left(10\pi t + \pi/4\right)$ mm, donde t se mide en s. Si, simultáneamente, se somete a la partícula a otro movimiento armónico simple de igual frecuencia, aplicado en la dirección del eje *Y*, se observa que la componente tangencial de la aceleración es nula en todo instante de tiempo. Sabiendo que en el instante inicial la velocidad de la partícula es paralela al vector $\vec{u}_x + \vec{u}_y$, determinar razonadamente:

1) La ecuación de la trayectoria y la expresión de la elongación del movimiento armónico simple en la dirección del eje *Y*, indicando su amplitud y su fase inicial.
2) La fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = \dfrac{1}{24}$ s.

Julio 2015

9. Una partícula de masa *m* está sometida a una fuerza $F = -C\,x$, donde *C* es una constante positiva. Obtener de forma razonada el periodo del movimiento, *T*.

En el instante $t = 0$ la energía cinética de la partícula es $15C/8$ y su velocidad es paralela al vector $-\vec{u}_x$ y en el instante $t = T/4$ la energía cinética de la partícula es $5C/8$ y su velocidad es paralela al vector $\vec{u}_x$. Obtener la elongación de la partícula, expresando la fase inicial entre 0 y 2π.

Enero 2018

10. Una partícula se encuentra sometida a la acción de dos movimientos armónicos simples perpendiculares, de periodo $8\,\mathrm{s}$. Sabiendo que en el instante inicial la posición de la partícula viene dada por $\vec{r} = \sqrt{3}\,\vec{u}_x - \frac{3}{2}\vec{u}_z$ mm y que, transcurridos $4\,\mathrm{s}$, su velocidad es $\vec{v} = \frac{\pi}{4}\left(-\vec{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_z\right)\mathrm{mm\,s^{-1}}$, determinar razonadamente:

1) Las elongaciones de ambos movimientos armónicos simples, indicando su amplitud y su fase inicial.
2) La ecuación de la trayectoria descrita por la partícula.
3) Las componentes intrínsecas de la aceleración cuando $t = 6\,\mathrm{s}$.

Junio 2014

11. Una partícula, sometida a la acción de dos movimientos armónicos simples, describe una trayectoria elíptica en el plano *XY*, cuyos semiejes no coinciden con los coordenados, siendo el periodo del movimiento $\frac{\pi}{3}\,\mathrm{s}$. Si en el instante inicial la partícula se encuentra en el punto $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ cm y su velocidad es $\left(15\sqrt{3}\,\vec{u}_x - 24\,\vec{u}_y\right)\mathrm{cm\,s^{-1}}$, obtener razonadamente la expresión del vector de posición en cualquier instante de tiempo.

Abril 2019

12. Una partícula, sometida simultáneamente a la acción de dos movimientos armónicos simples, describe la trayectoria $9x^2 + y^2 = 36$ (x e y en mm), con frecuencia angular $2\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, siendo su posición en el instante inicial $(x, y) = \left(\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)\mathrm{mm}$. Considerando las fases iniciales de ambos movimientos armónicos simples comprendidas entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, obtener razonadamente:

1) Las elongaciones de dichos movimientos armónicos simples.
2) La relación entre la energía cinética de la partícula cuando cruza el eje *X* y cuando cruza el eje *Y*.
3) Las componentes intrínsecas de la aceleración en el instante inicial.

TEMA 1.

1. Junio 2018

- Plano XY
- Trayectoria elíptica

- En punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{1}{2}\right)$ mm aceleración $\vec{a} = -2\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)$ mm/s²

ENUNCIADO

a) Frecuencia de los dos m.a.s.

Fórmula de la aceleración: $\vec{a} = -\omega^2 x\,(\vec{u_x})$

Primer armónico Simple: $a_x = -\omega^2 x\, \vec{u_x} \xrightarrow{\text{Enunciado}} a_x = -2\pi^2 \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{u_x}$ mm/s²

Segundo armónico Simple: $a_y = -\omega^2 y\, \vec{u_y} \xrightarrow{\text{Enunciado}} a_y = -2\pi^2 \vec{u_y}$ mm/s²

Siendo: $x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ mm (Punto)

$$a_x = -2\pi^2 \frac{\sqrt{3}}{3} = -\omega^2 x \rightarrow \begin{cases} -2\pi^2 \frac{\sqrt{3}}{3} = -\omega^2 x & \boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{6}\text{ mm}} \\ -2\pi^2 \frac{\sqrt{3}}{3} = -\omega^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \omega = \sqrt{4\pi^2} = 2\pi \text{ rad/s} & \text{Frecuencia angular} \end{cases}$$

Frecuencia: $f = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$

b) Componentes intrínsecas

$(\vec{u_x}, -\vec{u_y}) \perp \vec{u}_{\text{trayectoria}}$

ENUNCIADO → Vector: $(\vec{u_x}, -\vec{u_y})$

Vector unitario: $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{u_x}, -\vec{u_y}) \rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{\underset{\vec{u_x}}{1^2} + \underset{\vec{u_y}}{(-1)^2}}} \right\}$ $\vec{u_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u_x}, -\vec{u_y})$

Aceleración normal (Módulo): $\boxed{|\vec{a_n}| = a_n = \vec{a}\cdot\vec{u_n}}$

$$a_n = \vec{a}\cdot\vec{u_n} = -2\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{u_x}, \vec{u_y}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u_x}, -\vec{u_y}) =$$

$$\left[\, a_n = -2\pi^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2\pi^2}{3\sqrt{2}}(\sqrt{3}-3) \text{ mm/s}^2 \right]$$

Vector Aceleración normal: $\boxed{\vec{a_n} = a_n \cdot \vec{u_n}}$

$$\vec{a_n} = a_n\cdot\vec{u_n} = -\frac{2\pi^2}{3\sqrt{2}}(\sqrt{3}-3)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u_x}, -\vec{u_y})$$

$$\left[\, \vec{a_n} = -\frac{\pi^2}{3}(\sqrt{3}-3)\cdot(\vec{u_x} - \vec{u_y}) \text{ mm/s}^2 \right]$$

Vector Aceleración tangencial: $\boxed{\vec{a_t} = \vec{a} - \vec{a_n}}$

$$\vec{a_t} = \vec{a} - \vec{a_n} = -2\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\vec{u_x}, \vec{u_y}\right) - \left(-\frac{\pi^2}{3}(\sqrt{3}-3)\right)(\vec{u_x} - \vec{u_y})$$

$$\left[\, \vec{a_t} = -\frac{\pi^2}{3}(3+\sqrt{3})(\vec{u_x} + \vec{u_y}) \text{ mm/s}^2 \right]$$

3. Marzo 2016

ENUNCIADO:

Frecuencia Angular: $\omega = \frac{\pi}{3} rad/s$ (eje Z)

Ecuación movimiento armónico simple: $z(t) = A_z \, sen(\omega t + \phi_z)$

a) Velocidad de la partícula en $t = \frac{5}{4} s$

ENUNCIADO: En $\left[t = \frac{1}{2} s\right]$ $z = b \rightarrow z(t = \frac{1}{2} s) = A_z \, sen(\omega t + \phi_z)$

ENUNCIADO: Amplitud: $A_z = b$

$\rightarrow z(t = \frac{1}{2} s) = b \, sen(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} + \phi_z) = b$

$sen(\frac{\pi}{6} + \phi_z) = 1 \rightarrow arcsen(1) = \frac{\pi}{6} + \phi_z \rightarrow \boxed{\phi_z = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}}$ FASE.

Ecuación velocidad: $v = \frac{dz}{dt} = A_z \omega \cos(\omega t + \phi_z)$

$v = A_z \cdot \omega \cos(\omega t + \phi_z) = b \cdot \frac{\pi}{3} \cos(\frac{\pi}{3} t + \frac{\pi}{3})$

Velocidad en $t = \frac{5}{4} s \rightarrow v(t = \frac{5}{4}) = b \cdot \frac{\pi}{3} \cos(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{5}{4} + \frac{\pi}{3}) = b \frac{\pi}{3} \cos(\frac{3\pi}{4})$

$v(t = \frac{5}{4}) = b \, \frac{\pi}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{6} b$ m/s

Eje Z → Vector velocidad: $\boxed{\vec{v}(t = \frac{5}{4} s) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{6} b \, \vec{u_z}}$ m/s

b) Posiciones de la partícula, cuando $E_c = \frac{1}{8} E_p$

Energía Cinética: $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 [A^2 - x^2]$

Energía Potencial: $E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

Igualando: $\frac{1}{2} m \omega^2 A^2 - x^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} m \omega^2 x$

$8A^2 - 8x^2 = x^2$

$9x^2 = 8b^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8b^2}{9}}$

Posiciones: $\boxed{x = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} b}$

3. $\omega = 6\pi \, rad/s$ $\qquad P = (5\sqrt{3}, 5)$

$\vec{V} = 30\pi(-\vec{u_x} + \sqrt{3}\,\vec{u_y})$

$V_x = -30\pi \rightarrow$ en $x = 5\sqrt{3}$

$V_y = 30\pi\sqrt{3} \rightarrow$ en $y = 5$

$x = A_x \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow V_x = A_x \cdot \omega \cos(\omega t + \varphi)$

$y = A_y \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \rightarrow V_y = A_y \cdot \omega \cos(\omega t + \varphi)$

$V_x: -30\pi = A_x \cdot 6\pi \cos(6\pi t + \varphi) \rightarrow \cos < 0$

$x: \; 5\sqrt{3} = A_x \cdot \operatorname{sen}(6\pi t + \varphi) \rightarrow \operatorname{sen} > 0$

$\{t = 0\}$ $\qquad \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{3}} \xrightarrow{+\pi}$

$\tan(6\pi t + \varphi) \cdot \frac{1}{6\pi} = \frac{5\sqrt{3}}{-30\pi}$

$6\pi t + \varphi = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{3}}$

$\tan(6\pi t + \varphi) = -\sqrt{3} \rightarrow$

$y: \; 5 = A_y \cdot \operatorname{sen}(6\pi t + \varphi)$

$V_y: \; +30\pi\sqrt{3} = A_y \cdot 6\pi \cos(6\pi t + \varphi)$

$t = 0$

$\tan(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{\pi}{6}}$

$\left\{\begin{matrix} \operatorname{sen} > 0 \\ \cos > 0 \end{matrix}\right\} \boxed{\varphi = \frac{\pi}{6}}$

1) $5\sqrt{3} = A_x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) \rightarrow A_x = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 10\,cm$

$5 = A_y \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow A_y = \frac{5}{1/2} = 10\,cm$

$$\left\{\begin{matrix} x = 10 \operatorname{sen}\left(6\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ y = 10 \operatorname{sen}\left(6\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \end{matrix}\right.$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = -A_x\, \omega^2 \, sen(\omega t + \varphi)$$

$$a_x(t=\tfrac{1}{6}) = -10\,(6\pi)^2\, sen(\underbrace{6\pi \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{2\pi}{3}}_{\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi})$$

$$a_x = -360\,\pi^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\left[\vec{a_x} = 180 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{3}\;\; \vec{u_x}\right] \; cm/s^2$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = -A_y\, \omega^2\, sen(\omega t + \varphi)$$

$$a_y(t=\tfrac{1}{6}) = -10\,(6\pi)^2\, sen(\underbrace{6\pi\tfrac{1}{6} + \tfrac{\pi}{6}}_{\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi})$$

$$a_y = -360\,\pi^2 \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\left[\vec{a_y} = 180\,\pi^2\, \vec{u_y}\right] \; cm/s^2$$

$$\vec{a} = \vec{a_x} + \vec{a_y} = 180\pi^2 \left(\sqrt{3}\,\vec{u_x} + \vec{u_y}\right) \; cm/s^2$$

Como $\omega = cte \rightarrow a_t = 0 \rightarrow \vec{a_n} = \vec{a}$

Movimiento rectilineo en eje Y. $\therefore\; \vec{a_n} = 0$ en el tiempo $t = \frac{1}{6}s$

3. Movimiento rectilineo en eje Y.

$\therefore\; \vec{a} = \vec{a_t} \rightarrow \vec{a_t} = 180\pi^2\, \vec{u_y}\; cm/s^2$

$$\vec{a} = 180\pi^2\, \vec{u_y}\; cm/s^2.$$

4. $x = 2\,sen\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$ cm $\quad \omega = \frac{\pi}{2}$ rad/s.

$y = 3\,sen\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$ cm

1. Instantes de tiempo?

$x > 0$ $\rightarrow$ Para: $y = 3\,sen\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$y = 0$

$\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2} = m\pi \rightarrow \frac{1}{2}t = m + \frac{1}{2}$

$\boxed{t = 2m + 1}$

$t = 1$ secorta el eje x.

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4s \qquad \boxed{t = (4m+1)s \quad m \geq 0}$

2. $V_x = \frac{dx}{dt} = A\,\omega\cos(\omega t + \varphi) = 2\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$

$V_y = \frac{dy}{dt} = 3\cdot\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$

$a_x = \frac{dx^2}{dt} = -A\,\omega^2 sen(\omega t + \varphi) = -2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right)$

$a_y = \frac{dy^2}{dt} = -A\,\omega^2 sen(\omega t + \varphi) = -3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 sen\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$

$V_x(4m+1s) = \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}(4m+1) + \frac{\pi}{6}\right) = \pi\cos\left(2\pi m + \underbrace{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}}\right)$

$\frac{3\pi + \pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

$\boxed{V_x = \pi\cos\left(2\pi m + \frac{2\pi}{3}\right)}$ cm/s

$\boxed{a_x(4m+1) = -\frac{\pi^2}{2} sen\left(2\pi m + \frac{2\pi}{3}\right)}$ cm/s^2

$V_y(4m+1) = \frac{3\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}(4m+1) - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}\cos(2\pi m)$ cm/s

$\boxed{a_y(4m+1) = -\frac{3\pi^2}{6} sen(2\pi m)} = 0$ cm/s^2.

Si $m = 0$

$\vec{V_x} = -\frac{\pi}{2}\vec{u_x}$ cm/s. $\quad \vec{V_y} = \frac{3\pi}{2}\vec{u_y}$ cm/s.

$\vec{a_x} = -\frac{\sqrt{3}\pi^2}{4}$ cm/s^2 $\quad \vec{a_y} = 0$ cm/s^2

COMPONENTES INTRÍNSECAS

$\vec{a_t} = a_t\cdot\vec{u_t} \qquad \vec{u_t}\,\|V\|\,(-\vec{u_x} + \vec{a_y}) \rightarrow \vec{a}\cdot\vec{a_t} = |\vec{a_t}|$

5. Octubre 2017

2 MAS 1

$y(t) = \text{sen}(2\pi t + \pi/2)$ mm

$z(t) = -\text{sen}(2\pi t)$ mm $\rightarrow z(t) = \text{sen}(2\pi t + \pi)$

1) Ecuación de la trayectoria

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \phi_z - \phi_y \rightarrow \phi_z = \phi_y + \frac{\pi}{2} \\ \delta = \pi - \pi/2 = \pi/2 \end{array} \right.$$

$y(t) = \text{sen}(2\pi t + \phi_y)$

$z(t) = \text{sen}(2\pi t + \phi_y + \pi/2) = \cos(2\pi t + \phi_y)$

$y^2 + z^2 = \text{sen}^2(2\pi t + \phi_y) + \cos^2(2\pi t + \phi_y) = 1$

$$\boxed{y^2 + z^2 = 1^2}$$

2) Componentes intrínsecas de la aceleración en $t = \frac{8}{3}$ s

MCU: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = cte \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow a_t = 0$

$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n} = \vec{a_n}$

Para $t = \frac{8}{3}$ s

$$\left. \begin{array}{l} y(t = \frac{8}{3} s) = \text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{8}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ z(t = \frac{8}{3}) = -\text{sen}\left(2\pi \cdot \frac{8}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\}$$

$\vec{a_y} = -\omega^2 x = \frac{1}{2}(2\pi)^2 = 2\pi^2 \, \vec{u_y}$ mm/s²

$\vec{a_z} = -\omega^2 y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(2\pi)^2 = -2\sqrt{3}\pi^2$ mm/s²

$\vec{a_t} = 0$

$= 2\pi^2(\vec{u_y} - \sqrt{3}\,\vec{u_z})$ mm/s² $= \vec{a_n}$

$a_n = a = 2\pi^2(1 - \sqrt{3})$ mm/s²

6 Marzo 2018

$m = 30g$

2 MAS ↑↑

$x_1 = 2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{2})$

$x_2 = 4 \cdot sen(2\pi t + \frac{2\pi}{3})$

1) Elongación resultante (Amplitud y fase inicial)

$= 4\cos(2\pi t + \frac{2\pi}{3})$

$\cos\gamma = sen(\gamma + \pi/2) \rightarrow x_2 = 4\,sen(2\pi t + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2})$

$\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \rightarrow x_2 = 4\cos(2\pi t + \frac{\pi}{6})$

$x_1 = 2\cos(2\pi t - \frac{\pi}{2}) = 2\,sen(2\pi t - \frac{\pi}{2} + \pi/2) = 2\,sen(2\pi t)$

fórmula: $sen(\alpha + \beta) = sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\,\beta$

$A_T\,sen(\omega t + \varphi_T) = A_1\,sen(\omega t + \varphi_1) + A_2\,sen(\omega t + \varphi_2)$

$sen(\omega t)\,A_T\cos(\varphi_T) + \cos(\omega t)\,A_T\,sen(\varphi_T) = sen(\omega t)\,[A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos(\varphi_2)] +$

$+ \cos(\omega t)\,[A_1\,sen\,\varphi_1 + A_2\,sen\,\varphi_2]$

$A_T\cos\varphi_T = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \rightarrow A_T\cos\varphi_T = 2\cos(0) + 4\cos(2\pi/3) = 0$

$A_T\,sen\,\varphi_T = A_1\,sen\,\varphi_1 + A_2\,sen\,\varphi_2 \rightarrow A_T\,sen\,\varphi_T = 2\,sen(0) + 4\,sen(2\pi/3) = 2\sqrt{3}$

$\left.\begin{array}{l} A_T\cos(\varphi_T) = 0 \\ A_T\,sen(\varphi_T) = 2\sqrt{3} \end{array}\right\}\ tg(\varphi_T) = \frac{A_T\,sen\,\varphi_T}{A_T\cos\varphi_T} = \frac{2\sqrt{3}}{0} = \infty \rightarrow \varphi_T = \frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} A_T\,sen\,\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{3} \\ A_T = 2\sqrt{3} \end{array}\right.$

$\left.\begin{array}{l} A_T = 2\sqrt{3}\,cm \\ \varphi_T = \pi/2 \end{array}\right\}\ x_T(t) = 2\sqrt{3}\,sen(2\pi t + \pi/2)$

b) $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$

$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2} \rightarrow v_x = \frac{dx_T}{dt} = \omega A_T \cos(2\pi t + \pi/2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} 30g = 3/100\,kg \\ \sqrt{3}\,cm = \sqrt{3}/100\,m \end{array} \right.$$

$x_T = \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \operatorname{sen}(2\pi t + \frac{\pi}{2})$

$0{,}5 = \operatorname{sen}(2\pi t + \pi/2) = \cos(2\pi t)$

$\rightarrow \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3} = 2\pi t \rightarrow t = \frac{1}{6}\,s$

$v_x = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{1}{6} + \pi/2) = -6\pi\,cm/s\,\vec{u_x}$

$\rightarrow -\frac{6\pi\,cm}{s} \cdot \frac{1m}{100cm} = -\frac{3}{50}\pi\,m/s$

$\boxed{E_c = 0{,}5\,(30 \cdot 10^{-3}) \cdot (\frac{3\pi}{50})^2 = 5{,}32 \cdot 10^{-4}\,J}$

$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = 0{,}5 \cdot (30 \cdot 10^{-3})(2\pi)^2(\sqrt{3} \cdot 10^{-2})^2 = \boxed{1{,}77 \cdot 10^{-4}\,J}$

c) $E_p = 3E_c$

$E_p = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = 3 \cdot \frac{1}{2} m \omega^2 [A^2 - x^2]$

$x^2 = 3A^2 - 3x^2$

$4x^2 = 3 \cdot (2\sqrt{3})^2$

$4x^2 = 3 \cdot 4 \cdot 3;\ x^2 = 3^2$

$\{x = \pm 3\}$ $\quad \vec{a} = -\omega^2 x = -(2\pi)^2 \cdot 3 = -4\pi^2 \cdot 3$

$\vec{a} = \pm 12\pi^2\,\hat{u_x}\ cm/s^2$

Para $x = 3$ $\rightarrow t$

$3 = 2\sqrt{3} \operatorname{sen}(2\pi t + \pi/2)$

$2\pi t = \frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{t = \frac{1}{12}\,s}$

$v = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cos(2\pi \cdot \frac{1}{12} + \frac{\pi}{2})$

$\rightarrow \boxed{V = (\pm 10{,}88\,\hat{u_x})\,m/s}$

7. Marzo 2019

2 MAS paralelos $\qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$

$A_1 = A_2 = 2\,cm \qquad 0 < \varphi_2 < \pi$

$f_1 = f_2 = 0{,}1\,Hz$

1) Elongación

$\omega_1 = \omega_2 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 0{,}1 = \pi/5 \; rad/s$

$x(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$

Para $t = 5s$

$v = -\frac{\pi\sqrt{3}}{5}$ m/s cm/s $\rightarrow \frac{dx}{dt} = v = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 + x_2) = v$

$x_1(t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_1)$

$x_2(t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_2)$

Para $t = 5s$

$$-\frac{\pi\sqrt{3}}{5} = \frac{\pi}{5} \cdot 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{5} 5 + \pi/6\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5} 5 + \varphi_2\right)\right]$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos(\pi + \varphi_2)$$

$\cos(\pi + \varphi_2) = 0 \rightarrow \arccos(0) = \pm \pi/2 \qquad$ como $0 < \varphi_2 < \pi \rightarrow \pi + \varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$

$$\boxed{\varphi_2 = +\frac{\pi}{2}}$$

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos\beta \operatorname{sen}\alpha$

$x_T \operatorname{sen}(\omega t) \cdot \cos(\varphi_T) + x_T \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}(\varphi_T) = x_1 \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\varphi_1) + x_1 \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}(\varphi_1)$
$\qquad + x_2 \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\varphi_2) + x_2 \cos(\omega t) \cdot \operatorname{sen}(\varphi_2)$

$\operatorname{sen}(\omega t) [x_T \cos(\varphi_T)] = \operatorname{sen}(\omega t) [x_1 \cos(\varphi_1) + x_2 \cos(\varphi_2)]$

$\cos(\omega t) [x_T \operatorname{sen}(\varphi_T)] = \cos(\omega t) [x_1 \operatorname{sen}(\varphi_1) + x_2 \operatorname{sen}(\varphi_2)]$

$x_T \cos \varphi_T = x_1 \cos \varphi_1 + x_2 \cos \varphi_2 = 2 \cos(\pi/6) + 2 \cos(\pi/2) = \sqrt{3}$

$x_T \operatorname{sen}(\varphi_T) = x_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + x_2 \operatorname{sen} \varphi_2 = 2 \operatorname{sen}(\pi/6) + 2 \operatorname{sen}(\pi/2) = 3$

$$\frac{x_T \operatorname{sen}(\varphi_T)}{x_T \cos(\varphi_T)} = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\sqrt{3} = \operatorname{tg} \varphi_T}$$

$$\hookrightarrow \varphi_T = \pm \frac{\pi}{3} \quad \left.\begin{matrix} \cos \varphi_T > 0 \\ \operatorname{sen} \varphi_T > 0 \end{matrix}\right\} \varphi_T = \pi/3$$

$x_T \cos(\pi/3) = \sqrt{3}$

$x_T = \dfrac{\sqrt{3}}{1/2} = 2\sqrt{3}$ cm

$$\boxed{x(t) = 2\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5} t + \pi/3\right) \text{ cm}}$$

8. Marzo 2017

$\vec{a_t} = 0$ para $t=0 \rightarrow \vec{v} \parallel (\vec{u_x} + \vec{u_y})$

$m = 1kg$

$x(t) = 4 \sin(10\pi t + \pi/4)$ mm

1) Ecuación $y(t)$

Si $\vec{a_t} = 0, \forall t \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = cte = MCU \rightarrow [x^2 + y^2 = R^2]$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = 4 \sin(10\pi t + \frac{\pi}{4}) \\ y(t) = A \cos(10\pi t + \varphi) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 = 4^2 \cdot \sin^2(10\pi t + \pi/4) \\ y^2 = A^2 \cdot \cos^2(10\pi t + \varphi) \end{array}$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1^2 \rightarrow \begin{array}{l} A = 4 \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{array} \qquad [x^2 + y^2 = 16]$$

$$[y(t) = 4 \cos(10\pi t + \pi/4)]$$

2) Fuerza que actúa sobre la partícula en $t = \frac{1}{24}$ s

$F = m \cdot \vec{a}$

$\vec{a} = \vec{a_n} = \vec{a_x} + \vec{a_y} = -\omega^2 \cdot x(t = \frac{1}{24}) - \omega^2 y(t = \frac{1}{24}) =$

$= -\omega^2 [x(t = \frac{1}{24}) + y(t = \frac{1}{24})]$

$$\left.\begin{array}{l} x(t = \frac{1}{24}) = 4 \sin(10\pi \cdot \frac{1}{24} + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{3} \\ y(t = \frac{1}{24}) = 4 \cos(10\pi \cdot \frac{1}{24} + \frac{\pi}{4}) = -2 \end{array}\right\}$$

$\vec{a} = (-10\pi)^2 \cdot (2\sqrt{3} \cdot (-2)) =$

$\vec{a} = -100\pi^2 (2\sqrt{3} \vec{u_x} - 2\vec{u_y})$ mm

$$[\vec{F} = -2 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 (\sqrt{3} \vec{u_x} + \vec{u_y}) \text{ N}]$$

10. Enero 2018.

2 MAS 1

1/ Elongaciones de ambos movimientos armónicos simples

$T = 8\,s$

Para $t = 0 \rightarrow \vec{r} = \sqrt{3}\ \vec{u_x} - \frac{3}{2}\vec{u_z}$ mm

para $t = 4s \rightarrow v = \frac{\pi}{4}\left(-\vec{u_x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u_z}\right)$ mm/s

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 8 \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ rad/s

Para $t = 0$: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_x)$

$x(t) = A\cos(\varphi_x) = \sqrt{3}$

$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \cdot \text{sen}(\omega t + \varphi_x)$

$\left.\begin{array}{l} A\cos(\varphi_x) = \sqrt{3} \\ A\,\text{sen}(\varphi_x) = -1 \end{array}\right\}$ $\text{tg}(\varphi_x) = \frac{A\,\text{sen}(\varphi_x)}{A\cos(\varphi_x)} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} \rightarrow \varphi_x = \pm\frac{\pi}{6}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi_x > 0 \\ \text{sen}\,\varphi_x < 0 \end{array}\right\}$ $\varphi_x = -\frac{\pi}{6}$ $\quad A \cdot \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1 \rightarrow \boxed{A = 2\text{ mm}}$

$$\boxed{x(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)\text{ mm}}$$

$z(t)$

Para $t=4$

Para $t=0$

$z(t) = A_z \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_z)$

$z(t=0) = A_z \operatorname{sen}(\varphi_z) = -\frac{3}{2}$

$v_z = \frac{dz(t)}{dt} = A_z\,\omega \cos(\omega t + \varphi_z) = \frac{\pi\sqrt{3}}{8}$

$A_z \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4 + \varphi_z\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$A_z \cos(\pi + \varphi_z) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \left[A_z \cos(\varphi_z) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right]$

$$\operatorname{tg}(\varphi_z) = \frac{A_z \operatorname{sen}(\varphi_z)}{A_z \cos(\varphi_z)} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-6}{-2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_x) = \sqrt{3} \rightarrow \varphi_z = \begin{cases} \rightarrow \pi/3 \\ \rightarrow 4\pi/3 \end{cases} \Bigg\} \operatorname{sen} \varphi_z < 0$$

$$\varphi_z = \frac{4\pi}{3} \; ; \; A_z = \frac{-1{,}5}{\operatorname{sen}(4\pi/3)} = \sqrt{3}$$

$$\left[z(t) = \sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + 4\pi/3\right) \text{mm} \right]$$

2) Ecuación de la trayectoria.

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + \pi/3\right) \\ z(t) &= \sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + 4\pi/3\right) \end{aligned} \right\} \delta = \pi \rightarrow \text{Oposición de fase}$$

$$z(t) = -\sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{x}{z} = \frac{2 \operatorname{sen}(\pi/4\, t + \pi/3)}{-\sqrt{3} \operatorname{sen}(\pi/4\, t + \pi/3)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{z}$$

$$\left[x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} z \right] \quad \left[z = -\frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$$

c) Componentes intrínsecas para $t = 4s$.

como $\vec{a_n} = 0$, $\vec{a} = \vec{a_t}$

$$\vec{a_x} = \frac{dv_x(t)}{dt} = -\omega^2 \cdot x = -\left(\frac{\pi^2}{4^2}\right) 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} 4 + \pi/3\right) = 1{,}06$$

$$\vec{a_z} = -\omega^2 \cdot z = +\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4 + \pi/3\right) = 1{,}63$$

$$\vec{a_n} = 0$$

$$\hat{a_t} = \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (\bar{u_x}) + \frac{3\pi^2}{32} \bar{u_z} = \frac{\pi^2}{32} \left(\sqrt{3}\, \vec{u_x} + 3 \vec{u_z}\right)$$

11 Junio 2014

Trayectoria Elíptica.

$T = \frac{\pi}{3}$ s

1) $\vec{r}$? $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = \frac{6\pi}{\pi} = 6$ rad/s

Para $t = 0$:

$x = -1,5$

$y = 0$

$\vec{v}_x = 15\sqrt{3}\ \vec{u}_x$ cm/s

$v_y = -24\ \vec{u}_y$ cm/s

$x(t) = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t=0) = A_x \cdot \operatorname{sen}(\varphi_x) = -1,5 \\ y(t=0) = A_y \cdot \operatorname{sen}(\varphi_y) = 0 \end{array} \right.$$

$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega \cdot A_x \cdot \cos(\omega t + \varphi_x) \xrightarrow{t=0} \left[v_x = \omega A_x \cdot \cos(\varphi_x) = 15\sqrt{3} \right]$

$v_y = \frac{dy}{dt} = \omega A_y \cdot \cos(\omega t + \varphi_y) \xrightarrow{t=0} \left[v_y = \omega \cdot A_y \cdot \cos(\varphi_y) = -24 \right]$

$$\left. \begin{array}{l} A_x \operatorname{sen}(\varphi_x) = -1,5 \\ \omega A_x \cos(\varphi_x) = 15\sqrt{3} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} A_x \cdot \cos(\varphi_x) = \frac{15\sqrt{3}}{6} \\ A_x \cdot \operatorname{sen}(\varphi_x) = -1,5 \end{array} \right.$$

como $A_x > 0$

$tg\, \varphi_x = \frac{-1,5 \cdot 6}{15\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \varphi_x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad \varphi_x = -\frac{\pi}{6}$

$$\boxed{A_x = -\frac{1,5}{\operatorname{sen}(-\pi/6)} = 3\text{cm}}$$

17. Abril 2019

2 MAS

Trayectoria

$9x^2 + y^2 = 36$

$\omega = 2\pi$ rad/s

Pos $t = 0$

$x = \sqrt{2}$

$y = -3\sqrt{2}$

φ_1 y φ_2 → $-\pi/2 < \varphi_{1,2} < \pi/2$

1) Elongaciones de la MAS

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A_x \operatorname{sen}(2\pi t + \varphi_x) \\ y(t) &= A_y \operatorname{sen}(2\pi t + \varphi_y) \end{aligned}\right\}$$

$9x^2 + y^2 = 36$

$\left(\frac{9}{36}\right)x^2 + \frac{y^2}{36} = \frac{36}{36}$; $\frac{1}{4}x^2 + \frac{y^2}{36} = 1$

$\frac{1}{4}x^2 + \frac{y^2}{36} = 1$; $\left(\frac{x^2}{A_x}\right) + \left(\frac{y^2}{A_y}\right) = R^2$ → $A_x^2 = 4$ $A_y^2 = 36$

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= 2\ mm \\ A_y &= 6\ mm \end{aligned}}$$

Pos $t = 0$

$x(t) \rightarrow x(t=0) = A \cdot \operatorname{sen}(\varphi_x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(\varphi_x) = \sqrt{2}$

$\operatorname{sen}(\varphi_x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi_x = \begin{cases} \rightarrow \pi/4 \rightarrow -\pi/2 < \pi/4 < \pi/2 \\ \rightarrow \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$y(t=0) = A_y \operatorname{sen}(\varphi_y) = 6 \cdot \operatorname{sen}(\varphi_y) = -3\sqrt{2}$

$\operatorname{sen}(\varphi_y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \varphi_y = \begin{cases} \rightarrow -\frac{\pi}{4} \\ \rightarrow \frac{5\pi}{4} \end{cases} \rightarrow \varphi_y = -\frac{\pi}{4}$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= 2 \operatorname{sen}(2\pi t + \pi/4)\ mm \\ y(t) &= 6 \operatorname{sen}(2\pi t - \pi/4)\ mm \end{aligned}}$$

2) Relación entre energía cinética al cruzar el eje x y el y

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

Al cruzar el eje x

$y = 0 \longrightarrow y(t) = 6 \operatorname{sen}(2\pi t - \pi/4) \rightarrow 0 = \operatorname{sen}(2\pi t - \pi/4)$

$(2\pi t - \pi/4) = \begin{cases} \to 0 \\ \to \pi \end{cases}$

$x(t) = 2 \operatorname{sen}(2\pi t + \pi/4)$

$2\pi t - \frac{\pi}{4} = 0$

$2\pi t = \frac{\pi}{4}, \; t = \frac{1}{8}$

$2\pi t - \frac{\pi}{4} = \pi$

$2\pi t = \pi + \frac{\pi}{4} \; ; \; t = \frac{5}{8}$

En $t = \frac{1}{8} s$: $v_x = \frac{dx}{dt} = 2\pi \cdot 2 \cdot \cos(2\pi t + \pi/4) \xrightarrow{t = 1/8} 2\pi \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{8} + \pi/4\right) = 0$

$v_y = \frac{dy}{dt} = 6 \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi t - \pi/4) \xrightarrow{t = 1/8} 6\pi \cdot 2\cos\left(\frac{2\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \left[12\pi \; mm/s \; \vec{u}_y\right]$

$E_c = 0{,}5\, m (12\pi)^2$

<u>Al cruzar el eje y</u>

$x = 0$

$x(t) = 2 \operatorname{sen}(2\pi t + \pi/4) = 0$

$\operatorname{sen}(2\pi t + \pi/4) = 0$

$2\pi t + \pi/4 = 0 \text{ ó } \pi$

$2\pi t + \pi/4 = 0$

$t = -\frac{1}{8}$ No, $2\pi t + \pi/4 = \pi$

$\left[t = \frac{3}{8} s\right]$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot \cos(\pi \cdot t + \pi/4)$$

$$v_x = (t = \frac{3}{8}s) = 4\pi \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{3}{8} + \pi/4) = -4\pi \ mm/s \ \text{en} \ \vec{y}$$

$$v_x = 6 \cdot 2\pi \cos(2\pi \cdot \frac{3}{8} - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$E_c \text{ por } y = 0{,}5 \ m(-4\pi)^2$$

$$\frac{E_c \text{ al pasar eje } X}{E_c \text{ al pasar eje } Y} = \frac{0{,}5 \cdot (12\pi)^2}{0{,}5 \ (-4\pi)^2} = 9$$

Problema 1

1) $f = 1\,\text{Hz}$

2) $\vec{a}_n = \pi^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\vec{u}_x-\vec{u}_y\right)\,\text{mm}\,\text{s}^{-2}$; $\vec{a}_t = -\pi^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)\left(\vec{u}_x+\vec{u}_y\right)\,\text{mm}\,\text{s}^{-2}$

Problema 2

1) $\vec{v} = -\frac{\pi b\sqrt{2}}{6}\vec{u}_z$

2) $z = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}b$

Problema 3

1) $x = 10\,\text{sen}\left(6\pi t+\frac{2\pi}{3}\right)\text{cm}$; $y = 10\,\text{sen}\left(6\pi t+\frac{\pi}{6}\right)\text{cm}$

2) $\vec{a}_t = 0$; $\vec{a}_n = 180\pi^2\left(\sqrt{3}\,\vec{u}_x+\vec{u}_y\right)\text{cm}\,\text{s}^{-2}$

3) $x' = 10\,\text{sen}\left(6\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\text{cm}$; $\vec{a}_t = 180\pi^2\vec{u}_y\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}$; $\vec{a}_n = 0$

Problema 4

1) $t = \left(1+4m\right)\text{s},\ m \geq 0$

2) $\vec{v} = \frac{\pi}{2}\left(-\vec{u}_x+3\vec{u}_y\right)\text{cm}\,\text{s}^{-1}$; $\vec{a} = -\frac{\pi^2\sqrt{3}}{4}\vec{u}_x\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}$

3) $\vec{a}_t = \frac{\pi^2\sqrt{3}}{40}\left(-\vec{u}_x+3\vec{u}_y\right)\text{cm}\,\text{s}^{-2}$; $\vec{a}_n = -\frac{3\pi^2\sqrt{3}}{40}\left(3\vec{u}_x+\vec{u}_y\right)\text{cm}\,\text{s}^{-2}$

Problema 5

1) $y^2+z^2 = 1\ \left(y, z \text{ en mm}\right)$

2) $\vec{a}_t = 0$; $\vec{a}_n = 2\pi^2\left(\vec{u}_y-\sqrt{3}\,\vec{u}_z\right)\text{mm}\,\text{s}^{-2}$

3) $m = 20\,\text{g}$

Problema 6

1) $x = 2\sqrt{3}\cos 2\pi t\ \text{cm}$ (amplitud $2\sqrt{3}$ cm, fase inicial nula)

2) $E_c = \frac{27\pi^2}{5}\cdot 10^{-5}\ \text{kg}\,\text{m}^2\text{s}^{-2}$; $E_p = 18\pi^2\cdot 10^{-6}\ \text{kg}\,\text{m}^2\text{s}^{-2}$

3) $\vec{v} = \pm 2\pi\sqrt{3}\,\vec{u}_x\,\text{cm}\,\text{s}^{-1}$; $\vec{a} = \pm 12\pi^2\,\vec{u}_x\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}$

Problema 7

$x = 2\sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}t+\frac{\pi}{3}\right)\text{cm}$

Problema 8

1) $x^2 + y^2 = 16 \ \ (x,\, y \text{ en mm})$; $\quad y = 4\,\text{sen}\left(10\pi t - \pi/4\right)$ mm

2) $\vec{F} = -2 \cdot 10^{-3}\,\pi^2 \left(\sqrt{3}\,\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)$ N

Problema 9

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{C}}$; $x = \sqrt{5}\,\text{sen}\left(\sqrt{\dfrac{C}{m}}\,t + \dfrac{7\pi}{6}\right)$

Problema 10

1) $x = 2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ mm ; $z = \sqrt{3}\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ mm

2) $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

3) $\vec{a}_t = \dfrac{\pi^2}{16}\left(\vec{u}_x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_z\right)$ mm s^{-2} ; $\vec{a}_n = 0$

Problema 11

$\vec{r} = 5\,\text{sen}\left(6t - \dfrac{\pi}{6}\right)\vec{u}_x - 4\,\text{sen}\,6t\,\vec{u}_y$ cm

Problema 12

1) $x = 2\,\text{sen}\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ mm ; $y = 6\,\text{sen}\left(2\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ mm

2) $\dfrac{\left(E_c\right)_{eje\,X}}{\left(E_c\right)_{eje\,Y}} = 9$

3) $\vec{a}_t = \dfrac{16\pi^2\sqrt{2}}{5}\left(\vec{u}_x + 3\,\vec{u}_y\right)$ mm s^{-2} ; $\vec{a}_n = -\dfrac{12\pi^2\sqrt{2}}{5}\left(3\vec{u}_x - \vec{u}_y\right)$ mm s^{-2}