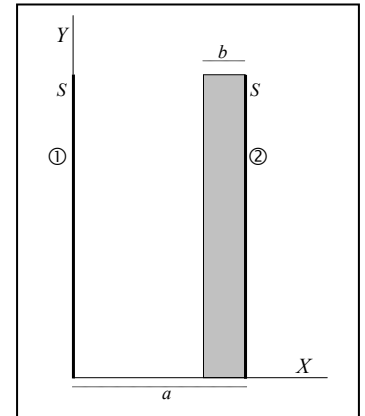


Mayo 2019

13. El sistema de la figura está formado por dos planos conductores, ① y ②, ambos de área S ($S \gg a^2$), cargados con densidades de carga $\sigma_1 = 3\sigma$ y $\sigma_2 = -\sigma$, y una lámina de material dieléctrico, de área S y espesor b desconocido. Sabiendo que la diferencia de potencial entre los planos es $V_1 - V_2 = \frac{7\sigma a}{4\epsilon_0}$ y la energía electrostática almacenada en el dieléctrico es $\frac{\sigma^2 Sa}{12\epsilon_0}$, determinar razonadamente el espesor de la lámina y la permitividad relativa del dieléctrico.

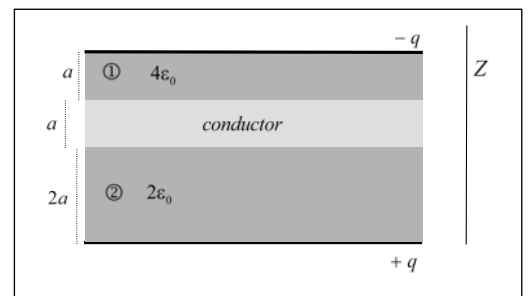


Problema 13

Julio 2018

14. Un condensador plano de área S , está cargado con carga q . En su interior se colocan dos láminas de material dieléctrico y una lámina conductora cargada con carga positiva, tal como se indica en la figura. Si la energía almacenada en el condensador es $\frac{4aq^2}{S\epsilon_0}$, determinar razonadamente:

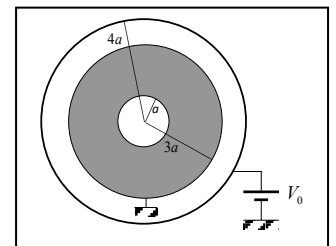
- 1) La carga de la lámina conductora.
- 2) Las densidades de carga sobre dicha lámina.



Problema 14

Julio 2019

15. Tres superficies esféricas conductoras, de radios a , $3a$ y $4a$, se sitúan concéntricas, siendo la carga de la primera de ellas q y estando las otras dos conectadas a sendos potenciales, como se indica en la figura. Si el espacio limitado por la condición $a < r < 3a$ está ocupado por un material dieléctrico de permitividad relativa $4/3$, obtener razonadamente la energía electrostática del sistema.



Problema 15

Junio 2019

16. Un cilindro indefinido, ①, de radio $3a$ y uniformemente cargado, se sitúa coaxial con el eje Y . Coplanario con el eje del cilindro, coincidiendo con la recta $x = 9a$ del plano XY , se coloca un hilo rectilíneo e indefinido, ②, cargado con densidad lineal de carga λ . Si el campo eléctrico en los puntos $(a, y, 0)$ es nulo, determinar razonadamente:

- 1) La diferencia de potencial $V_B - V_A$, entre los puntos $A(5a, 0, 0)$ y $B(7a, 0, 0)$.
- 2) En qué puntos del plano XY , con $x > 3a$ la densidad espacial de energía asociada al hilo es cuádruple que la asociada al cilindro.

Enero 2018

17. Una superficie esférica conductora, de radio b , está cargada con carga positiva y aislada, siendo la densidad espacial de energía electrostática en el exterior de ella $\frac{9\epsilon_0 b^2 V_0^2}{32r^4}$. Obtener razonadamente:

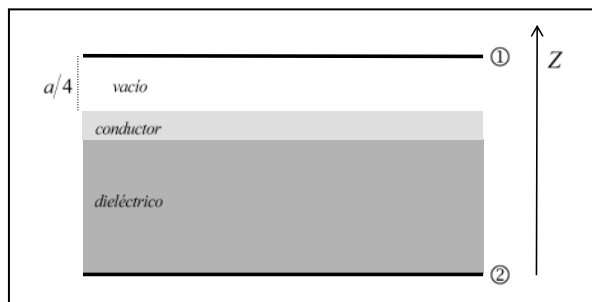
- 1) El potencial y la carga del conductor.

Concéntrica con el anterior conductor, se dispone una corona esférica conductora, de radios $2b$ y $3b$, y se observa que el potencial de la superficie esférica es la sexta parte de su valor inicial:

- 2) Determinar de forma razonada las densidades superficiales de carga sobre la corona conductora.

Junio 2019

18. Dos placas conductoras, ① y ②, cargadas con cargas $q_1 = q$ y $q_2 = -3q$, tienen área S y están separadas una distancia a ($a \ll \sqrt{S}$). Entre las dos placas se disponen dos láminas, de área S : una es un conductor cargado con carga $6q$ y la otra es un dieléctrico de permitividad relativa 5 (ver figura). Sabiendo que la energía almacenada entre las placas es $\frac{aq^2}{S\epsilon_0}$, obtener razonadamente la anchura, b , de la lámina conductora y las densidades de carga sobre su superficie.



Problema 18

Mayo 2019

19. Una esfera conductora de radio a y carga $4Q$ se sitúa concéntrica con una superficie esférica conductora de radio $4a$, cargada con carga Q . El espacio entre ellas, para $a < r \leq 2a$ está ocupado por un material dieléctrico de permitividad relativa 8 y el resto está vacío. Determinar razonadamente:

- 1) El potencial de la esfera.
- 2) A qué potencial habría que conectar la superficie esférica para que, en cada punto del espacio exterior al sistema, se triplicase el módulo del vector desplazamiento.
- 3) La variación de la carga de cada conductor, cuando se hace la conexión indicada en el apartado anterior.

Junio 2019

20. Un hilo rectilíneo e indefinido, cargado con densidad lineal de carga λ , que coincide con el eje Z , es coaxial con una superficie cilíndrica conductora de radio a , estando el espacio entre ambos ocupado por un material dieléctrico de permitividad relativa ϵ_r . Si la diferencia de potencial entre los puntos ①

($a, 0, 0$) y ② ($3a, 0, 0$) es $V_1 - V_2 = -\frac{5\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln 3$, determinar razonadamente:

- 1) El vector desplazamiento eléctrico en todos los puntos del espacio.
- 2) La densidad superficial de carga de la superficie cilíndrica.
- 3) La densidad de energía electrostática para $0 < r < a$.

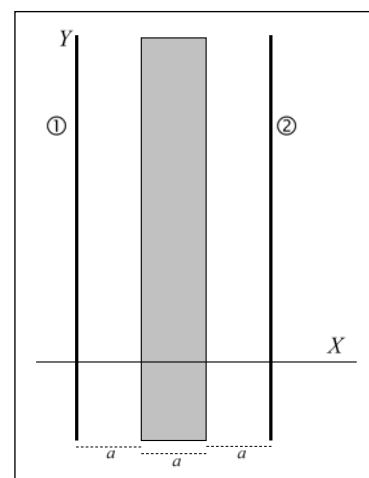
Enero 2019

21. Dos planos uniformemente cargados ① y ②, coinciden respectivamente con los planos $x = 0$ y $x = 3a$, siendo σ la densidad de carga del plano ①. Entre ambos se sitúa una lámina conductora descargada, que ocupa el espacio entre los planos $x = a$ y $x = 2a$, tal como indica la figura. Si la densidad de carga sobre el plano $x = a$ es -2σ , determinar razonadamente:

- 1) La densidad de carga del plano ②.
- 2) La densidad de energía en todas las regiones del espacio.

Si la región definida por la condición $x > 3a$ se ocupa con un material dieléctrico de permitividad $2\epsilon_0$, y en el punto $(4a, 0, 0)$ se coloca un dipolo de momento dipolar $\vec{p} = b(\vec{u}_z - \vec{u}_x)$, que sólo puede rotar:

- 3) Obtener el trabajo externo necesario para situarlo en su posición de mínima energía.



Problema 21

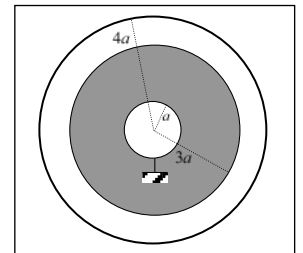
Diciembre 2018

22. Dos superficies esféricas conductoras, ① y ②, de radios a y $3a$, se disponen de forma que sus centros coinciden. El conductor ① está cargado con carga $-q$ y el ② está unido a una batería. Si a una distancia $5a$ del centro del sistema, el potencial electrostático es $\frac{3V_0}{20}$, obtener razonadamente:

- 1) La carga del conductor ②.
- 2) El potencial de la batería.
- 3) Las cargas de los dos conductores cuando el interior se conecta a tierra.

Enero 2019

23. El sistema de la figura consta de una esfera conductora de radio a , una corona esférica de material dieléctrico de permitividad $4\epsilon_0$, de radios a y $3a$, y una corona esférica de material conductor, cargada, de radios $3a$ y $4a$. Si la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, entre dos puntos ① y ②, que distan respectivamente $2a$ y $7a/2$ del centro del sistema, es $V_1 - V_2 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 a}$,



obtener razonadamente:

- 1) Las densidades superficiales de carga sobre los conductores.
- 2) La energía electrostática almacenada en el dieléctrico.

Problema 23

Diciembre 2018

24. Un hilo rectilíneo e indefinido, cargado con densidad lineal de carga λ , se sitúa en el eje de una superficie cilíndrica conductora de radio a . Rodeando a ambos, se dispone una corona cilíndrica, de radios a y $8a$, de material dieléctrico de permitividad $2\epsilon_0$. Si la diferencia de potencial entre dos puntos ① y ②, que distan respectivamente $2a$ y $10a$ del eje del sistema, es $V_1 - V_2 = \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2}{5}$, obtener razonadamente:

- 1) La densidad superficial de carga del conductor de radio a .
- 2) La energía almacenada, por unidad de longitud, en el dieléctrico.

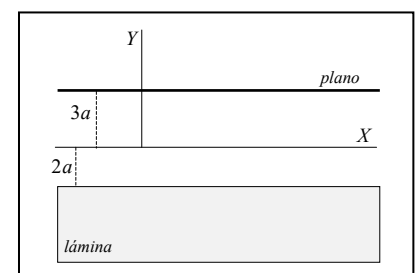
Enero 2018

25. Una lámina, uniformemente cargada con densidad cúbica de carga ρ , ocupa el espacio entre los planos $y = -2a$ e $y = -6a$. Paralelo a ella se sitúa un plano uniformemente cargado, tal como muestra la figura. Si la densidad espacial de energía electrostática es nula en el plano $y = -9a/2$, determinar razonadamente:

- 1) La densidad superficial de carga del plano.
- 2) La diferencia de potencial $V_1 - V_2$, entre los puntos ① $(2a, -4a, 0)$ y ② $(2a, 0, 0)$.

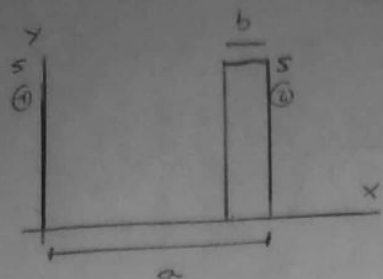
Dato. Campo eléctrico generado por una lámina de espesor e :

$$\vec{E}_{\text{exterior}} = \frac{\rho e}{2\epsilon} \vec{u}_\perp; \quad \vec{E}_{\text{interior}} = \frac{\rho h}{\epsilon_0} \vec{u}_\perp \quad (h \text{ distancia al plano de simetría})$$



Problema 25

13.



$$\begin{cases} \sigma_1 = 3\sigma \\ \sigma_2 = -\sigma \end{cases}$$

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{int}}$$

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) = \frac{4\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\vec{E}_{\text{int}} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon} \vec{u}_x + \frac{\sigma_2}{2\epsilon} (-\vec{u}_x) = \frac{2\sigma}{\epsilon} \vec{u}_x$$

$$V_1 - V_2 = \frac{7\sigma a}{4\epsilon_0} = \int \vec{E}_{\text{ext}} (0 < r < a-b) d\vec{r} - \int \vec{E}_{\text{int}} (a-b < r < a) d\vec{r} =$$

$$= - \int_{a-b}^0 \frac{2\sigma}{\epsilon_0} dx - \int_a^{a-b} \frac{2\sigma}{\epsilon} dx =$$

$$= - \frac{2\sigma}{\epsilon_0} (-a+b) - \frac{2\sigma}{\epsilon} (a-b-a) = - \frac{2\sigma}{\epsilon_0} (b-a) - \frac{2\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} (-b) = \frac{7\sigma a}{4\epsilon_0}$$

$$= - \frac{2\sigma}{\epsilon_0} (b-a) + \frac{2}{\epsilon_r} b = \frac{7}{4} a$$

$$\frac{7}{4} a + 2b - 2a = \frac{2}{\epsilon_r} b$$

$$2b - \frac{1}{4} a = \frac{2}{\epsilon_r} b$$

$$b - \frac{1}{8} a = \frac{1}{\epsilon_r} b$$

$$\frac{2\sigma b}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \frac{7\sigma a}{4\epsilon_0} + \frac{2\sigma a}{\epsilon_0}$$

$$\frac{2\sigma b}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \frac{\sigma a}{\epsilon_0} \left(\frac{7}{4} + 2\right)$$

$$\frac{2\sigma b}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \frac{15\sigma a}{4\epsilon_0}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \frac{15a}{8b} + \frac{1}{\epsilon_r} = \frac{15a}{8b} + 1$$

$$\left[\epsilon_r = - \frac{8b}{15a - 8b} \right]$$

$$\left[d\vec{r} = dx \vec{u}_x \right]$$

$$W = \frac{\sigma^2 S a}{12 \epsilon_0} = \iiint w \, dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \cdot S b$$

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \quad \left[\lim_{\epsilon_r} \frac{2\sigma}{\epsilon_r} \right]$$

$$V = S b$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 \cdot S \cdot b = \frac{\sigma^2 S a}{12 \epsilon_0}$$

$$E^2 \cdot \epsilon_r b = \frac{\sigma^2 \cdot a}{6 \epsilon_0^2}$$

$$\left(\frac{2\sigma}{\epsilon_r} \right)^2 \cdot \epsilon_r b = \frac{\sigma^2 a}{6 \epsilon_0^2} \rightarrow \frac{4\sigma^2}{\epsilon_0^2 \epsilon_r^2} \cdot \epsilon_r b = \frac{\sigma^2 a}{6 \epsilon_0^2}$$

$$\frac{1}{\epsilon_r} = \frac{a}{24 b} \rightarrow \epsilon_r = \frac{24 b}{a}$$

$$b - \frac{1}{8} a = \frac{1}{\epsilon_r} b \rightarrow b - \frac{1}{8} a = \frac{a}{24 b} b$$

$$b - \frac{1}{8} a = \frac{a}{24}$$

$$\left[b = \frac{a}{6} \right]$$

$$b = \frac{a}{24} + \frac{1}{8} a = \frac{a}{6}$$

$$\epsilon_r = \frac{24 \left(\frac{a}{6} \right)}{a} = 4 \rightarrow [\epsilon_r = 4]$$

JULIO 2018

14. Condensador plano de área S , cargado con q

$$W_{\text{condensador}} = W_1 + W_2 + W_{\text{condensador}}$$

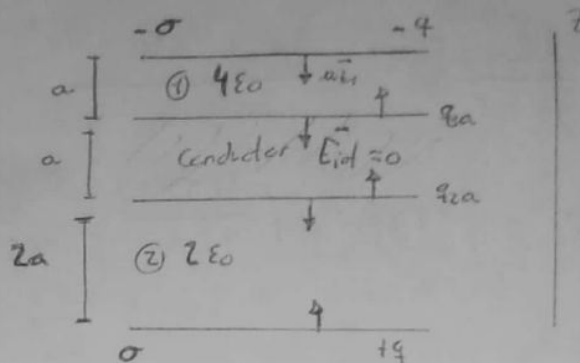
2 láminas material dieléctrico
1 lámina conductora (carga positiva) } Interior

$$W_c = \frac{4aq^2}{5\epsilon_0}$$

Energía almacenada en el condensador

1) CARGA Lámina Conductora

$$\left\{ \sigma = \frac{q}{S} \right\} \text{ Carga positiva en conductor.}$$



$$\vec{E}_{\text{condensador}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_{\text{condensador}}$$

$$\vec{E}_{\text{lámina}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$Q_{\text{condensador}} = q_{3a} + q_{2a} > 0$$

$$\text{CASO ①} \quad \vec{E}_1 = \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_1} \vec{u}_z + \frac{\sigma_{3a}}{2\epsilon_1} \vec{u}_z + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_1} \vec{u}_z + \frac{\sigma}{2\epsilon_1} \vec{u}_z =$$

$$= \left(-2\sigma + \sigma_{3a} + \sigma_{2a} \right) \frac{1}{2\epsilon_1} \vec{u}_z$$

$$\left\{ \epsilon_1 = 4\epsilon_0 \right\} \quad \vec{E}_1 = \left(-2\sigma + \sigma_{3a} + \sigma_{2a} \right) \frac{1}{8\epsilon_0} \vec{u}_z = \left(-2q + q_{3a} + q_{2a} \right) \frac{1}{8\epsilon_0 S} \vec{u}_z$$

$$\sigma = \frac{q}{S} \quad \left[\vec{E}_1 = \frac{2q + Q_c}{8\epsilon_0 S} \vec{u}_z \right]$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{2\epsilon_2} \vec{u}_z + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_2} (-\vec{u}_z) + \frac{\sigma_{3a}}{2\epsilon_2} (-\vec{u}_z) + \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_2} (-\vec{u}_z) =$$

$$= \left(2\sigma - \sigma_{2a} - \sigma_{3a} \right) \frac{1}{2\epsilon_2} \vec{u}_z = \left(2\sigma - \sigma_{2a} - \sigma_{3a} \right) \cdot \frac{1}{4\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\left\{ \epsilon_2 = 2\epsilon_0 \right\} \quad \vec{E}_2 = \left(2q - q_{2a} - q_{3a} \right) \frac{1}{4\epsilon_0 S} \vec{u}_z = \frac{2q - Q_c}{4\epsilon_0 S} \vec{u}_z$$

$$\vec{E}_{\text{condensador}}^{\text{int}} = 0$$

Vector displacement due to electric field: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E}$

Energy density of electric field:

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \epsilon_1 \cdot E_1^2 = \frac{1}{2} (4\epsilon_0) \left(\frac{2q + Q_c}{8\epsilon_0 S} \right)^2 = \frac{2\epsilon_0}{64\epsilon_0^2 S^2} (2q + Q_c)^2 =$$

$$w_1 = \frac{(2q + Q_c)^2}{32\epsilon_0 S^2} = \frac{4q^2 + 4qQ_c + Q_c^2}{32\epsilon_0 S^2}$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \epsilon_2 \cdot E_2^2 = \frac{1}{2} (2\epsilon_0) \cdot \left(\frac{2q - Q_c}{4\epsilon_0 S} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{16\epsilon_0^2 S^2} (2q - Q_c)^2 = \frac{1}{16\epsilon_0 S^2} (2q - Q_c)^2$$

Energy density of electric field:

$$W = \iiint w \cdot dv$$

$$W_1 = \iiint w_1 \cdot dv_1 = \iiint \frac{(2q + Q_c)^2}{32\epsilon_0 S^2} dv_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Volume 1} = a \cdot S \end{array} \right\}$$

$$W_1 = \frac{(2q + Q_c)^2}{32\epsilon_0 S^2} \iiint dv_1 = \frac{(2q + Q_c)^2}{32\epsilon_0 S^2} V_1 = \frac{(2q + Q_c)^2}{32\epsilon_0 S^2} \cdot a \cdot S =$$

$$W_1 = \frac{(2q + Q_c)^2}{32\epsilon_0 S} a$$

$$W_2 = \iiint w_2 \cdot dv_2 = \frac{(2q - Q_c)^2}{16\epsilon_0 S^2} \iiint dv_2 = \left\{ \begin{array}{l} \text{Volume 2} = 2a \cdot S \end{array} \right\}$$

$$W_2 = \frac{(2q - Q_c)^2}{16\epsilon_0 S^2} \cdot V_2 = \frac{(2q - Q_c)^2}{16\epsilon_0 S^2} \cdot 2a \cdot S = \frac{(2q - Q_c)^2}{8\epsilon_0 S} a$$

$$W_{\text{condensador}} = \frac{4aq^2}{5\epsilon_0} = W_1 + W_2 = \frac{(2q + Q_c)^2}{32\epsilon_0 S} a + \frac{(2q - Q_c)^2}{8\epsilon_0 S} a$$

$$\frac{4aq^2}{5\epsilon_0} = \frac{a}{32\epsilon_0 S} \left((2q + Q_c)^2 + 4(2q - Q_c)^2 \right)$$

$$128q^2 = 4q^2 + 4qQ_c + Q_c^2 + 16q^2 - 16qQ_c + 4Q_c^2$$

$$108q^2 = -12qQ_c + 5Q_c^2 \quad (108q^2 + 12qQ_c) = 5Q_c^2$$

$$5Q_c^2 + 12qQ_c - 108q^2 = 0 \quad Q_c = \frac{-12q \pm \sqrt{144q^2 - (4) \cdot (-108q^2)}}{2 \cdot 5}$$

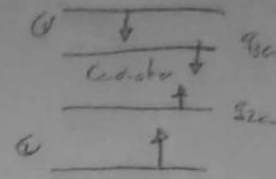
$$Q_c = \frac{+72q \pm \sqrt{144q^2 + 2160q^2}}{10} = \frac{+72q \pm 48q}{10} \rightarrow Q_{c1} = \frac{+36q}{10} = -\frac{18}{5}q$$

$$\rightarrow Q_{c2} = \frac{60q}{10} = 6q$$

$$[Q_c = 6q] \text{ carga del conductor.}$$

2) Densidad de carga sobre la superficie del conductor.

$$Q_c = q_{2a} + q_{3a} = 6q$$



$$\vec{E}_{int}^{red} = \vec{E}_q + \vec{E}_{q_{2a}} + \vec{E}_{q_{3a}} + \vec{E}_{-q} = 0$$

$$\vec{E}_{int}^{red} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{\sigma_{3a}}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_z) + \frac{(-\sigma)}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_z) =$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma + \sigma_{2a} + \sigma_{3a} + \sigma) \vec{u}_z = 0$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0} (2q + q_{2a} - q_{3a}) \vec{u}_z = 0$$

$$2q + q_{2a} - q_{3a} = 0 \rightarrow q_{3a} = 2q + q_{2a}$$

$$Q_c = 6q = q_{3a} + q_{2a}$$

$$q_{3a} = 2q + 6q - q_{3a}$$

$$q_{2a} = 6q - q_{3a}$$

$$2q_{3a} = 8q \rightarrow q_{3a} = 4q \rightarrow \sigma_{3a} = \frac{4q}{S}$$

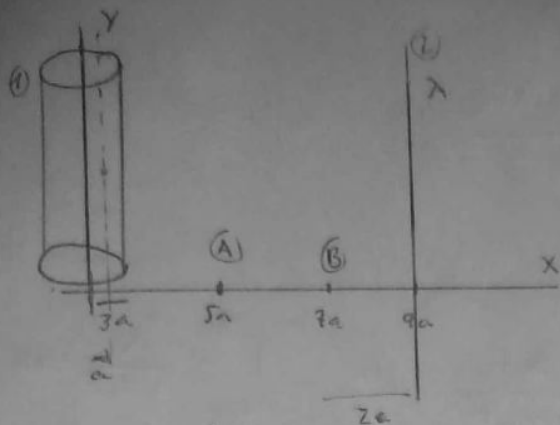
$$q_{3a} = 6q - q_{2a}$$

$$\left[\sigma_{3a} = \frac{q_{3a}}{S} = \frac{4q}{S} \right]$$

$$q_{2a} = q_{3a} - 2q \rightarrow q_{2a} = 6q - q_{2a} - 2q$$

$$2q_{2a} = 4q \rightarrow q_{2a} = 2q \rightarrow \left[\sigma_{2a} = \frac{q_{2a}}{S} = \frac{2q}{S} \right]$$

16.



$$\vec{E}(a, y, 0) = 0$$

El campo en el exterior del cilindro se comporta como el de un hilo.

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{cilindro}} + \vec{E}_{\text{hilo}} = \frac{\lambda_{\text{cilindro}}}{2\pi\epsilon_0 r} (+ux) + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} (-ux)$$

Apl. de la Ley de Gauss:

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \{ \vec{E} \parallel d\vec{s} \} = \{ E_{\text{cilindro}} \} = E \cdot 2\pi r \cdot L$$

$$q_{\text{enc}} = \rho \cdot V_{\text{cilindro}} = \rho \cdot \pi r^2 L$$

$$E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{\text{cilindro}} = \frac{\rho \pi r^2 L}{\epsilon_0 2\pi r L} = \frac{\rho \cdot r}{2\epsilon_0} \vec{u}_r$$

$$\vec{E}(a, y, 0) = \vec{E}_{\text{cilindro}}(a, y, 0) + \vec{E}_{\text{hilo}}(a, y, 0) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\rho \cdot a}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 5a} (-ux) = 0$$

$$\rho \cdot a - \frac{\lambda}{\pi 8a} = 0 \rightarrow \left[\rho = \frac{\lambda}{8\pi a^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Superf. Cilindro} &= 2\pi r \cdot L \\ \text{Vol. cilindro} &= \pi r^2 \cdot L \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{q}{L}$$

$$P = \frac{q}{V} \rightarrow q = P \cdot V$$

$$\lambda = \frac{P \cdot V}{L} = \frac{\frac{\lambda}{8\pi a^2} \cdot \pi \cdot (3a)^2 \cdot L}{L} = \frac{9\lambda}{8}$$

$$\left[\lambda_{\text{cilindro}} = \frac{9\lambda}{8} \right]$$

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E}_{\text{cilindro}} \cdot d\vec{r} - \int_A^B \vec{E}_{\text{h.b.}} \cdot d\vec{r} = - \int_{5a}^{7a} \frac{\lambda_{\text{cilindro}}}{2\pi\epsilon_0 r} dr - \int_{4a}^{2a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr =$$

$$= - \frac{9\lambda}{16\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{7}{5}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[-\frac{9}{8} \ln\left(\frac{7}{5}\right) + \ln(2) \right]$$

$$r_{\text{cilindro}} = x$$

$$r_{\text{h.b.}} = x - 9a$$

$$b) x > 7a$$

$$\omega_{\text{h.b.}} = 4 \omega_{\text{cilindro}} \text{ parte.}$$

$$\omega = D \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 E^2$$

$$E_{\text{h.b.}}^2 = 4 \cdot E_{\text{cilindro}}^2 \rightarrow \sqrt{+} E_{\text{h.b.}} = \frac{1}{2} \cdot E_{\text{cilindro}}$$

$$2 \cdot \frac{9\lambda}{16\pi\epsilon_0 x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 (x-9a)}$$

$$\frac{9}{x} = \frac{4}{(x-9a)}$$

$$5x = 81a$$

$$x = \frac{81}{5} a$$

$$9x - 81a = 4x$$

$$x = \frac{81}{13} a$$

Superficie esférica conductora radio b . carga q

$$W_{\text{exterior}} = \frac{q \epsilon_0 b^2 V_0^2}{32 r^4} \quad \text{densidad superficial de energía electrostática.}$$



1. Potencial, Carga del conductor.

El campo eléctrico generado por una distribución de carga con simetría esférica en un punto exterior a la misma, es similar al que generaría una carga puntual situada en el centro de la distribución con un carga equivalente a la de la distribución.

$$\left\{ \begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \\ \vec{D} &= \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} \end{aligned} \right.$$

$$\vec{E}(r > b) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{q \epsilon_0 b^2 V_0^2}{32 \cdot r^4}$$

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{q \epsilon_0 b^2 V_0^2}{32 \cdot r^4}$$

$$\frac{Q^2}{16 \cdot \pi^2 \epsilon_0^2 r^4} = \frac{q b^2 V_0^2}{16 \cdot r^4} \quad \rightarrow \quad Q^2 = q b^2 V_0^2 \pi^2 \epsilon_0^2$$

$$[Q = 3 b V_0 \pi \epsilon_0]$$

Potencial.

$$\begin{aligned} V &= V(r=b) - V(\infty) = - \int_{\infty}^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_{\infty}^b \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \cdot \vec{u}_r \cdot d\vec{\ell} = \\ &= - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \int_{\infty}^b \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(- \frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^b = \\ &= \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 b} \end{aligned}$$

$$\left[V_{\text{superficie}} = \frac{3 b V_0 \pi \epsilon_0}{4\pi \epsilon_0 b} = \frac{3 V_0}{4} \right]$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Consideraciones:

$$q_b = Q = 3\epsilon_0 b V_0 \pi$$

Resolución superficie de carga:

$$V_{superficie} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3V_0}{4} = \frac{V_0}{8}$$

$$V_{superficie} = V(r > 3b) + V(2b < r < 3b) + V(b < r < 2b) =$$

$$= - \int_{\infty}^{3b} \vec{E}(r > 3b) \cdot d\vec{r} - \int_{3b}^{2b} \vec{E}(2b < r < 3b) \cdot d\vec{r} - \int_{2b}^b \vec{E}(b < r < 2b) \cdot d\vec{r} =$$

$$= - \int_{\infty}^{3b} \frac{Q + Q_{cor}}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_{3b}^{2b} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_{2b}^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr =$$

$$= - \frac{Q + Q_{cor}}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{3b} \frac{1}{r^2} dr - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{3b}^{2b} \frac{1}{r^2} dr - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{2b}^b \frac{1}{r^2} dr =$$

$$= \frac{Q + Q_{cor}}{4\pi\epsilon_0 3b} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{2b} \right) =$$

$$= \frac{Q + Q_{cor}}{4\pi\epsilon_0 3b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2b}$$

$$V_{sup} = \frac{Q + Q_{cor}}{4\pi\epsilon_0 3b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 2b} = \frac{V_0}{8}$$

$$Q_{cor} = \frac{1}{2} (Q - 5Q) = -2Q$$

$$[Q_{cor} = -6\epsilon_0 b V_0 \pi]$$

$$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \right) \left(\frac{Q + Q_{cor}}{3} + \frac{Q}{2} \right) = \frac{V_0}{8}$$

$$\frac{2Q + 2Q_{cor} + 3Q}{6} = \frac{V_0 \pi \epsilon_0 b}{2}$$

$$2Q + 2Q_{cor} + 3Q = 3V_0 \pi \epsilon_0 b$$

$$\left[Q_{cor} = \frac{1}{2} (3V_0 \pi \epsilon_0 b - 5Q) \right]$$

Resolución superficial:

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

$$b) \vec{F} = \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_{int} = 0 \rightarrow \vec{F} = 0 \rightarrow q_{enc} = 0$$

$$q_{enc} = Q + Q_{2b} = 0 \rightarrow Q_{2b} = -Q = -3 \epsilon_0 b V_0 \pi$$

$$q_{enc} = Q_{3b} + Q_{2b} \rightarrow Q_{3b} = q_{enc} - Q_{2b} = -6 \epsilon_0 b V_0 \pi + 3 \epsilon_0 b V_0 \pi =$$

$$[Q_{3b} = -3 \epsilon_0 b V_0 \pi]$$

$$\left[\sigma_{2b} = \frac{Q_{2b}}{S_{2b}} = \frac{-3 \epsilon_0 b \pi V_0}{4 \pi (2b)^2} = \frac{-3 \epsilon_0 b \pi V_0}{16 \pi b^2} = -\frac{3 \epsilon_0 V_0}{16 b} \right]$$

$$\left[\sigma_{3b} = \frac{Q_{3b}}{S_{3b}} = \frac{-3 \epsilon_0 b \pi V_0}{4 \pi (3b)^2} = \frac{-3 \epsilon_0 b \pi V_0}{36 \pi b^2} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{12 b} \right]$$

Unio 2019. 18,

$$q_1 = q$$

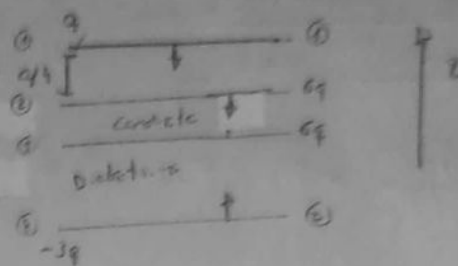
$$\epsilon_r = 5$$

$$q_2 = -3q$$

$$q_{ap} = 6q$$

$$W = \frac{q q^2}{5 \epsilon_0}$$

b = ancho de la placa
Densidad superficial



$$\left\{ \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = 5 \epsilon_0 \right\}$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{placa 1} + \vec{E}_{conductor} + \vec{E}_{placa 2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Densidad superficial } \sigma = \frac{q}{S} \\ \vec{E}_{placa} = \frac{\sigma}{2\epsilon} \vec{u}_n \end{array} \right\}$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon} (-\vec{u}_z) + \frac{\sigma_{conductor}}{2\epsilon} (\vec{u}_z) + \frac{\sigma_2}{2\epsilon} (\vec{u}_z) =$$

$$= \frac{q}{5 \cdot 2 \epsilon_0} (-\vec{u}_z) + \frac{6q}{5 \cdot 2 \cdot 5 \epsilon_0} (-\vec{u}_z) + \frac{-3q}{2 \cdot 5 \epsilon_0} \vec{u}_z =$$

$$= -\frac{q}{5 \epsilon_0} (1 + 6 + 3) \vec{u}_z = -\frac{q}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 5 \left| -\frac{q}{\epsilon_0} \right|^2 \cdot S \cdot b = \frac{a q^2}{5 \epsilon_0}$$

$$\frac{5}{2} \frac{q^2}{5^2 \epsilon_0} \cdot S \cdot b = \frac{a q^2}{5 \epsilon_0} \rightarrow \frac{5}{2} \cdot b = a$$

$$b = \frac{2a}{5}$$

Densidad superficial:

$$\vec{E}_{conductor} = 0 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_z) + \frac{\sigma_{sup}}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_z) + \frac{\sigma_{int}}{2\epsilon_0} \vec{u}_z + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_z = 0$$

$$-\sigma_1 - \sigma_{sup} + \sigma_{int} + \sigma_2 = 0$$

$$-q - \sigma_{sup} + \sigma_{int} - 3q = 0$$

$$-\sigma_{sup} + \sigma_{int} = 3q + q$$

$$-\sigma_{sup} + \sigma_{int} = \frac{4q}{S}$$

$$\sigma_{sup} = -\frac{4q}{S} + \sigma_{int}$$

$$q_{conductor} = 6q = q_{sup} + q_{int}$$

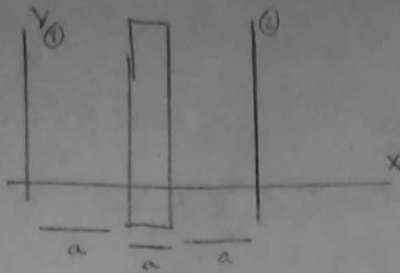
$$\sigma_{conductor} = \frac{6q}{S} = \sigma_{sup} + \sigma_{int} \rightarrow \sigma_{sup} = \frac{6q}{S} - \sigma_{int}$$

$$\frac{6q}{S} - \sigma_{int} = -\frac{4q}{S} + \sigma_{int}$$

$$\frac{10q}{S} = 2\sigma_{int} \rightarrow \left[\sigma_{int} = \frac{5q}{S} \right]$$

$$\left[\sigma_{sup} = -\frac{q}{S} \right]$$

27.



$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\sigma_1 = \sigma$$

El campo eléctrico generado por una distribución de carga con simetría

$$\vec{E}_{\text{total}} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{ind}} = \vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x)$$

$$\frac{\sigma_{\text{total}}}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}$$

$$-\frac{2\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}$$

$$-2\sigma - \sigma = \sigma_2 \quad \rightarrow [\sigma_2 = -3\sigma]$$

Desarrollado.

$$\vec{E}(a < x < 2a) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) + \frac{\sigma_a}{2\epsilon_0} (\vec{u}_x) + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) = 0$$

$$= \sigma + \sigma_2 - 2\sigma - 2\sigma = 0$$

$$[\sigma_2 = -3\sigma]$$

$$\text{Desarrollado: } q_{\text{total}} = 0$$

$$q_a + q_{2a} = 0$$

$$q_a = -q_{2a}$$

$$\sigma_a = -2\sigma$$

$$\sigma_{2a} = 2\sigma$$

$$2) \text{ Densidad de energías } w = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$\vec{E}(r < 0) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) + \frac{\sigma_a}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-1 - 2 - 2 + 3) = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$w(r < 0) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(0 < r < a) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} (\vec{u}_x) + \frac{\sigma_a}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 + 2 - 2 + 3) = \frac{4\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0}$$

$$w(0 < r < a) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{2\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{4\sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{2\sigma^2}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(a < r < 2a) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - 2 - 2 + 3) = 0$$

$$W(a < r < 2a) = 0$$

$$\vec{E}(2a < r < 3a) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_0} (\vec{u}_x) + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_x) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - 2 + 2 + 3) = \frac{4\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$W(2a < r < 3a) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{2\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{2\sigma^2}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r > 3a) = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_{2a}}{2\epsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{u}_x =$$

$$= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - 2 + 2 - 3) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$W(r > 3a) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

$$3) \quad E_r = 2E_0$$

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\vec{P} = b(\vec{u}_z - \vec{u}_x)$$

energía mínima:

$$\vec{P}_f = -b\sqrt{2} \vec{u}_x$$

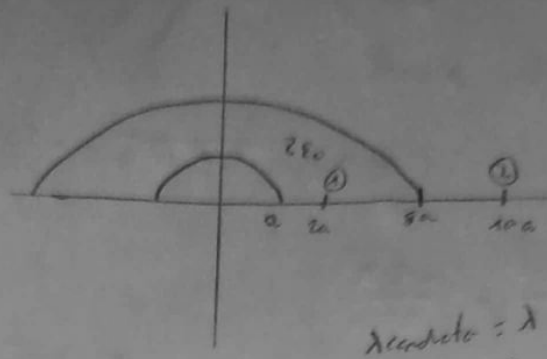
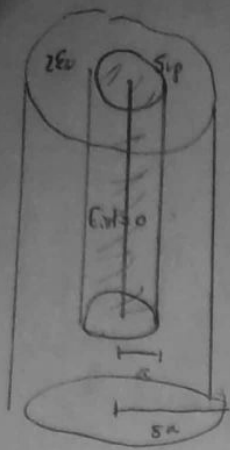
$$\vec{E}(x > 3a) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x$$

$$\vec{P}_0 = b\sqrt{2} \left(\frac{\vec{u}_z - \vec{u}_x}{\sqrt{2}} \right)$$

$$W = \Delta E_P = -\vec{E}(4a, 0, 0) \cdot \vec{P}_f + \vec{E}(4a, 0, 0) \cdot \vec{P}_0 =$$

$$= \vec{E}(4a, 0, 0) \cdot (\vec{P}_0 - \vec{P}_f) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_x \cdot \left(b\sqrt{2} \frac{(\vec{u}_z - \vec{u}_x)}{\sqrt{2}} + b\sqrt{2} \vec{u}_x \right)$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-b + b\sqrt{2}) = \frac{\sigma b}{2\epsilon_0} (1 - \sqrt{2})$$



$$\vec{E}_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

$\lambda_{conduto} = \lambda + \lambda_{sup}$
 $d\vec{E} = d\vec{E} \cdot \vec{u}_r$

El campo eléctrico generado por una distribución de carga con simetría esférica en un punto exterior a la zona, es indistinguible del que generamos un hilo indefinido situado en el eje de la distribución, con una densidad de carga lineal λ equivalente a la de la distribución.

$$\begin{aligned}
 V_1 - V_2 &= \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2}{5}\right) = V(2a) - V(10a) = - \int_{10a}^{8a} \vec{E}(r > 8a) \cdot d\vec{r} - \int_{8a}^{2a} \vec{E}(a < r < 8a) \cdot d\vec{r} \\
 &= - \int_{10a}^{8a} \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0 r} dr - \int_{8a}^{2a} \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0 r} dr =
 \end{aligned}$$

$$= - \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{8a}{10a}\right) - \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2a}{8a}\right) =$$

$$= - \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{5}{4}\right) =$$

$$= \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln(2) = \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln(5) - 2 \cdot \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln(2) + \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln(2)$$

$$= \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln(5) - \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln(2) = \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\rightarrow - \frac{2\lambda}{\pi\epsilon_0} = \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\epsilon_0} \quad + [\lambda_{sup} = -5\lambda]$$

$$-4\lambda = \lambda + \lambda_{sup}$$

Densidad superficial de carga: $\sigma = \frac{Q}{S}$

$S = 2\pi r L = \int_{r=a}^{} = 2\pi a L$

Densidad lineal de carga: $\lambda = \frac{Q}{L}$

$[\lambda_{up} = -5\lambda]$ $Q = \lambda \cdot L \rightarrow Q_{up} = -5\lambda \cdot L$

$\left[\sigma_{up} = \frac{-5\lambda \cdot L}{2\pi a L} = \frac{-5\lambda}{2\pi a} \right]$

$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$

$r = 2a - 5a = 3a$

2) Energía almacenada: $W = \iiint \omega \cdot dv$

$\omega = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon E^2$

$\lambda_{up} = -5\lambda$

$\epsilon = 2\epsilon_0$

$E_{total} = \frac{\lambda + \lambda_{up}}{2\pi \epsilon r} = \frac{-4\lambda}{2\pi \cdot (2\epsilon) \cdot r} = \frac{-\lambda}{\pi \epsilon_0 r}$

$\omega = \frac{1}{2} 2\epsilon_0 \cdot \left(\frac{-\lambda}{\pi \epsilon_0 r} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{\pi^2 \epsilon_0 r^2}$

$dv = r d\varphi dr dz$

$\left[W = \frac{\lambda^2}{\pi^2 \epsilon_0} \iiint \frac{1}{r^2} dv = \frac{\lambda^2}{\pi^2 \epsilon_0} \int_a^{5a} \frac{2\pi r L}{r^2} dr = \right]$

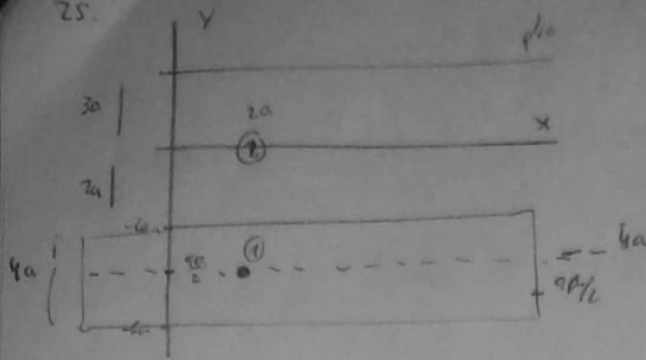
$= \frac{\lambda^2}{\pi \epsilon_0} (2\pi L) \cdot \ln(5) = \frac{6\lambda^2 L}{\pi \epsilon_0} \ln(2)$

Energía almacenada por unidad de longitud:

$\left[W_L = \frac{W}{L} = \frac{6\lambda^2}{\pi \epsilon_0} \ln(2) \right]$

[Campo cilíndrico
no uniforme]

25.



$$W_E = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = 0$$

$$\vec{E}_{plno} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_y)$$

$$\vec{E}_{intb} = \frac{\rho h}{\epsilon_0} \vec{u}_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h \text{ (distancia plno de simetria)} \\ 4a - \frac{3}{2}a = \frac{1}{2}a \end{array} \right\}$$

$$\vec{E}(0, \frac{3}{2}a, 0) = \vec{E}_{plno} + \vec{E}_{intb}$$

$$\vec{E}_{intb} = \frac{\rho \cdot \frac{1}{2}a}{\epsilon_0} (-\vec{u}_y)$$

$$\vec{E}(0, -4.5a, 0) = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho \cdot a}{2 \cdot \epsilon_0} \right) (-\vec{u}_y)$$

$$d\vec{E} = dy \cdot \vec{u}_y$$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\rho \cdot a}{2\epsilon_0} = 0 \rightarrow [\sigma = -\rho a]$$

$$2) V_1 - V_2 = V(2a, -4a, 0) - V(2a, 0, 0) = - \int \vec{E}(-4a < r < -2a) \cdot d\vec{E} + \int \vec{E}(-2a < r < 0) \cdot d\vec{E}$$

$$= - \left[\int_{-4a}^{-2a} \vec{E}_{int} \cdot d\vec{E} + \int_{-2a}^0 \vec{E}_{ext} \cdot d\vec{E} \right] = \{h = y + 4a\}$$

$$\vec{E}_{intb} = \vec{E}_{plno} + \vec{E}_{intb} = \frac{-\rho a}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_y) + \frac{\rho \cdot h}{\epsilon_0} \vec{u}_y = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (a + 2(y + 4a)) \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_{extb} = \vec{E}_{plno} + \vec{E}_{extb} = \frac{-\rho a}{2\epsilon_0} (-\vec{u}_y) + \frac{\rho c}{2\epsilon_0} \vec{u}_y = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (a + 4a) \vec{u}_y = \frac{5\rho a}{2\epsilon_0} \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} & - \left[\int_{-4a}^{-2a} \frac{\rho}{2\epsilon_0} (a + 2(y + 4a)) dy + \int_{-2a}^0 \frac{5\rho a}{2\epsilon_0} dy \right] = \\ & = - \left[\frac{\rho}{2\epsilon_0} 9a (-2a + 4a) + \frac{\rho}{2\epsilon_0} (4a^2 - 16a^2) + \frac{5\rho a}{2\epsilon_0} (2a) \right] \\ & = - \left[\frac{\rho 18a^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho 12a^2}{2\epsilon_0} + \frac{10a^2\rho}{2\epsilon_0} \right] = - \frac{8\rho a^2}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Problema 13

$$b = \frac{a}{6}; \quad \epsilon_r = 4$$

Problema 14

$$1) \quad Q = 6q$$

$$2) \quad \sigma_1 = \frac{4q}{S}; \quad \sigma_2 = \frac{2q}{S}$$

Problema 15

$$W = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a} + 32\pi\epsilon_0 a V_0^2$$

Problema 16

$$1) \quad V_B - V_A = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln 2 - \frac{9}{8} \ln \frac{7}{5} \right)$$

$$2) \quad \left(\frac{81a}{5}, 0 \right), \left(\frac{81a}{13}, 0 \right)$$

Problema 17

$$1) \quad q = 3\pi\epsilon_0 b V_0; \quad V_b = \frac{3}{4} V_0$$

$$2) \quad \sigma_{2b} = -\frac{3\epsilon_0 V_0}{16b}; \quad \sigma_{3b} = -\frac{\epsilon_0 V_0}{12b}$$

Problema 18

$$b = \frac{2a}{5}; \quad \sigma_{inf} = \frac{5q}{S}; \quad \sigma_{sup} = \frac{q}{S}$$

Problema 19

$$1) \quad V_a = \frac{5Q}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$2) \quad V'_{4a} = \frac{15Q}{16\pi\epsilon_0 a}$$

$$3) \quad (\Delta q)_a = 0; \quad (\Delta q)_{4a} = 10Q$$

Problema 20

$$1) \quad \vec{D}(r > a) = -\frac{5\lambda}{2\pi r} \vec{u}_r; \quad \vec{D}(r < a) = \frac{\lambda}{2\pi r} \vec{u}_r$$

$$2) \quad \sigma = -\frac{3\lambda}{\pi a}$$

$$3) \quad \omega_e = \frac{\lambda^2}{8\pi^2 \epsilon_0 \epsilon_r r^2}$$

Problema 21

$$1) \quad \sigma_2 = -3\sigma$$

$$2) \quad \omega_e(x < 0) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \omega_e(x > 3a); \quad \omega_e(0 < x < a) = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon_0} = \omega_e(2a < x < 3a); \quad \omega_e(a < x < 2a) = 0$$

$$3) \quad W = \frac{b\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \sqrt{2})$$

Problema 22

$$1) \quad Q_2 = 3\pi\varepsilon_0 a V_0 + q$$

$$2) \quad V_b = \frac{V_0}{4}$$

$$3) \quad Q'_1 = \frac{-3\pi\varepsilon_0 a V_0}{2}; \quad Q'_2 = \frac{9\pi\varepsilon_0 a V_0}{2}$$

Problema 23

$$1) \quad \sigma_a = \frac{6q_0}{\pi a^2}; \quad \sigma_{3a} = -\frac{2q_0}{3\pi a^2}; \quad \sigma_{4a} = -\frac{q_0}{4\pi a^2}$$

$$2) \quad W = \frac{12q_0^2}{\pi\varepsilon_0 a}$$

Problema 24

$$1) \quad \sigma_a = -\frac{5\lambda}{2\pi a}$$

$$2) \quad W_l = \frac{6\lambda^2 \ln 2}{\pi\varepsilon_0}$$

Problema 25

$$1) \quad \sigma = -\rho a$$

$$2) \quad V_1 - V_2 = \frac{8\rho a^2}{\varepsilon_0}$$