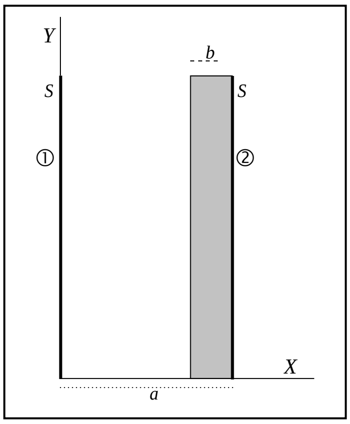
Mayo 2019

13. El sistema de la figura está formado por dos planos conductores, ① y ②, ambos de área $S\left(S \gg a^2\right)$, cargados con densidades de carga $\sigma_1 = 3\sigma$ y $\sigma_2 = -\sigma$, y una lámina de material dieléctrico, de área S y espesor b desconocido. Sabiendo que la diferencia de potencial entre los planos es $V_1 - V_2 = \dfrac{7\sigma a}{4\varepsilon_0}$ y la energía electrostática almacenada en el dieléctrico es $\dfrac{\sigma^2 S a}{12\varepsilon_0}$, determinar razonadamente el espesor de la lámina y la permitividad relativa del dieléctrico.

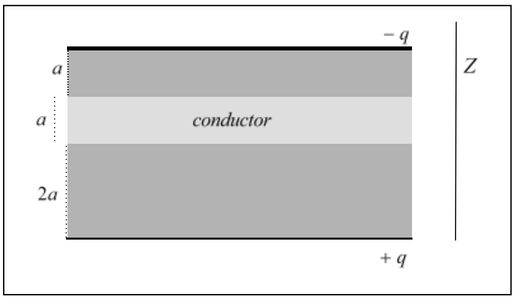


***Problema* 13**

Julio 2018

14. Un condensador plano de área S, está cargado con carga q. En su interior se colocan dos láminas de material dieléctrico y una lámina conductora cargada con carga positiva, tal como se indica en la figura. Si la energía almacenada en el condensador es $\dfrac{4aq^2}{S\varepsilon_0}$, determinar razonadamente:

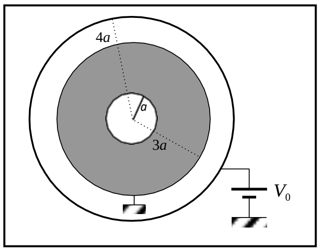
1) La carga de la lámina conductora.
2) Las densidades de carga sobre dicha lámina.



***Problema* 14**

Julio 2019

15. Tres superficies esféricas conductoras, de radios a, $3a$ y $4a$, se sitúan concéntricas, siendo la carga de la primera de ellas q y estando las otras dos conectadas a sendos potenciales, como se indica en la figura. Si el espacio limitado por la condición $a < r < 3a$ está ocupado por un material dieléctrico de permitividad relativa $4/3$, obtener razonadamente la energía electrostática del sistema.



***Problema* 15**

Junio 2019

16. Un cilindro indefinido, ①, de radio $3a$ y uniformemente cargado, se sitúa coaxial con el eje Y. Coplanario con el eje del cilindro, coincidiendo con la recta $x = 9a$ del plano XY, se coloca un hilo rectilíneo e indefinido, ②, cargado con densidad lineal de carga λ. Si el campo eléctrico en los puntos $(a, y, 0)$ es nulo, determinar razonadamente:

1) La diferencia de potencial $V_B - V_A$, entre los puntos $A(5a, 0, 0)$ y $B(7a, 0, 0)$.
2) En qué puntos del plano XY, con $x > 3a$ la densidad espacial de energía asociada al hilo es cuádruple que la asociada al cilindro.

Enero 2018

17. Una superficie esférica conductora, de radio b, está cargada con carga positiva y aislada, siendo la densidad espacial de energía electrostática en el exterior de ella $\dfrac{9\varepsilon_0 b^2 V_0^2}{32 r^4}$. Obtener razonadamente:

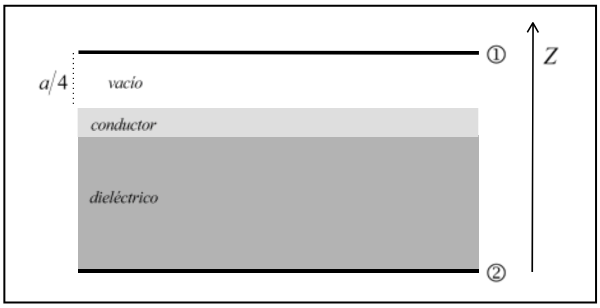
1) El potencial y la carga del conductor.

Concéntrica con el anterior conductor, se dispone una corona esférica conductora, de radios $2b$ y $3b$, y se observa que el potencial de la superficie esférica es la sexta parte de su valor inicial:

2) Determinar de forma razonada las densidades superficiales de carga sobre la corona conductora.

Junio 2019

18. Dos placas conductoras, ① y ②, cargadas con cargas $q_1 = q$ y $q_2 = -3q$, tienen área S y están separadas una distancia $a\left(a \ll \sqrt{S}\right)$. Entre las dos placas se disponen dos láminas, de área S: una es un conductor cargado con carga $6q$ y la otra es un dieléctrico de permitividad relativa 5 (ver figura). Sabiendo que la energía almacenada entre las placas es $\dfrac{aq^2}{S\varepsilon_0}$, obtener razonadamente la anchura, b, de la lámina conductora y las densidades de carga sobre su superficie.



***Problema* 18**

Mayo 2019

19. Una esfera conductora de radio a y carga $4Q$ se sitúa concéntrica con una superficie esférica conductora de radio $4a$, cargada con carga Q. El espacio entre ellas, para $a < r \leq 2a$ está ocupado por un material dieléctrico de permitividad relativa 8 y el resto está vacío. Determinar razonadamente:

1) El potencial de la esfera.
2) A qué potencial habría que conectar la superficie esférica para que, en cada punto del espacio exterior al sistema, se triplicase el módulo del vector desplazamiento.
3) La variación de la carga de cada conductor, cuando se hace la conexión indicada en el apartado anterior.

Junio 2019

20. Un hilo rectilíneo e indefinido, cargado con densidad lineal de carga λ, que coincide con el eje Z, es coaxial con una superficie cilíndrica conductora de radio a, estando el espacio entre ambos ocupado por un material dieléctrico de permitividad relativa ε_r. Si la diferencia de potencial entre los puntos ① $(a, 0{,}0)$ y ② $(3a, 0{,}0)$ es $V_1 - V_2 = -\dfrac{5\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln 3$, determinar razonadamente:

1) El vector desplazamiento eléctrico en todos los puntos del espacio.
2) La densidad superficial de carga de la superficie cilíndrica.
3) La densidad de energía electrostática para $0 < r < a$.

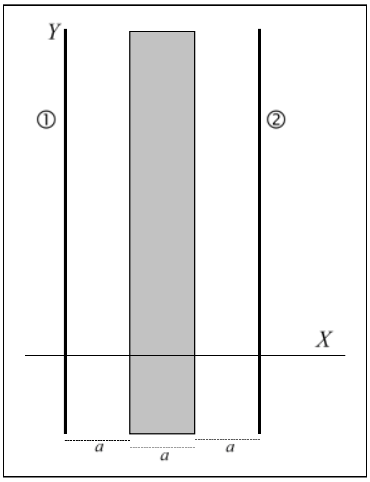
Enero 2019

21. Dos planos uniformemente cargados ① y ②, coinciden respectivamente con los planos $x = 0$ y $x = 3a$, siendo σ la densidad de carga del plano ①. Entre ambos se sitúa una lámina conductora descargada, que ocupa el espacio entre los planos $x = a$ y $x = 2a$, tal como indica la figura. Si la densidad de carga sobre el plano $x = a$ es -2σ, determinar razonadamente:

1) La densidad de carga del plano ②.
2) La densidad de energía en todas las regiones del espacio.

Si la región definida por la condición $x > 3a$ se ocupa con un material dieléctrico de permitividad $2\varepsilon_0$, y en el punto $(4a, 0{,}0)$ se coloca un dipolo de momento dipolar $\vec{p} = b\left(\vec{u}_z - \vec{u}_x\right)$, que sólo puede rotar:

3) Obtener el trabajo externo necesario para situarlo en su posición de mínima energía.



***Problema* 21**

Diciembre 2018

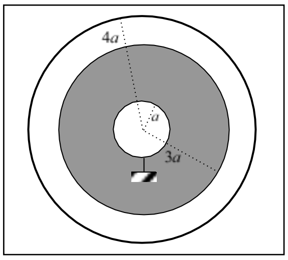
22. Dos superficies esféricas conductoras, ① y ②, de radios a y $3a$, se disponen de forma que sus centros coinciden. El conductor ① está cargado con carga $-q$ y el ② está unido a una batería. Si a una distancia $5a$ del centro del sistema, el potencial electrostático es $\frac{3V_0}{20}$, obtener razonadamente:

1) La carga del conductor ②.
2) El potencial de la batería.
3) Las cargas de los dos conductores cuando el interior se conecta a tierra.

Enero 2019

23. El sistema de la figura consta de una esfera conductora de radio a, una corona esférica de material dieléctrico de permitividad $4\varepsilon_0$, de radios a y $3a$, y una corona esférica de material conductor, cargada, de radios $3a$ y $4a$. Si la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, entre dos puntos ① y ②, que distan respectivamente $2a$ y $7a/2$ del centro del sistema, es $V_1 - V_2 = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 a}$, obtener razonadamente:

1) Las densidades superficiales de carga sobre los conductores.
2) La energía electrostática almacenada en el dieléctrico.



***Problema* 23**

Diciembre 2018

24. Un hilo rectilíneo e indefinido, cargado con densidad lineal de carga λ, se sitúa en el eje de una superficie cilíndrica conductora de radio a. Rodeando a ambos, se dispone una corona cilíndrica, de radios a y $8a$, de material dieléctrico de permitividad $2\varepsilon_0$. Si la diferencia de potencial entre dos puntos ① y ②, que distan respectivamente $2a$ y $10a$ del eje del sistema, es $V_1 - V_2 = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0} \ln\frac{2}{5}$, obtener razonadamente:

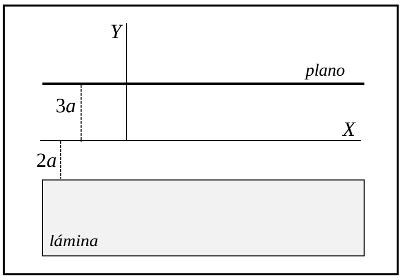
1) La densidad superficial de carga del conductor de radio a.
2) La energía almacenada, por unidad de longitud, en el dieléctrico.

Enero 2018

25. Una lámina, uniformemente cargada con densidad cúbica de carga ρ, ocupa el espacio entre los planos $y = -2a$ e $y = -6a$. Paralelo a ella se sitúa un plano uniformemente cargado, tal como muestra la figura. Si la densidad espacial de energía electrostática es nula en el plano $y = -9a/2$, determinar razonadamente:

1) La densidad superficial de carga del plano.
2) La diferencia de potencial $V_1 - V_2$, entre los puntos ① $(2a, -4a, 0)$ y ② $(2a, 0, 0)$.

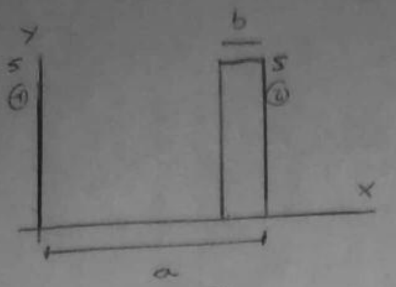
Dato. Campo eléctrico generado por una lámina de espesor e:
$\vec{E}_{\text{exterior}} = \frac{\rho e}{2\varepsilon}\vec{u}_\perp$; $\vec{E}_{\text{interior}} = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}\vec{u}_\perp$ (h distancia al plano de simetría)



***Problema* 25**

Mayo 2019 $\qquad \vec{E}_{plano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\vec{u_1}$ $\qquad$ TEMA 3

13.



$$\begin{cases} \sigma_1 = 3\sigma \\ \sigma_2 = -\sigma \end{cases}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

$\vec{E}_{dieléctrico} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int}$

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) = \frac{3\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) = \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon}\vec{u_x} + \frac{\sigma}{2\varepsilon}(-\vec{u_x}) = \frac{2\sigma}{\varepsilon}\vec{u_x}$$

$$V_1 - V_2 = \frac{7\sigma a}{4\varepsilon_0} = \int \vec{E}_{ext}(0 < r < a-b)\, d\vec{l} - \int \vec{E}_{int}(a-b < r < a)\, d\vec{l} =$$

$$= -\int_{a-b}^{0} \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}\, dx - \int_{a}^{a-b} \frac{2\sigma}{\varepsilon}\, dx =$$

$$= -\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}(-a+b) - \frac{2\sigma}{\varepsilon}(a-b-a) = -\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}(b-a), -\frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}(-b) = \frac{7\sigma a}{4\varepsilon_0}$$

$$-2(b-a) + \frac{2}{\varepsilon_r} b = \frac{7}{4}a$$

$$\frac{7}{4}a + 2b - 2a = \frac{2}{\varepsilon_r} b$$

$$2b - \frac{1}{4}a = \frac{2}{\varepsilon_r} b$$

$$b - \frac{1}{8}a = \frac{1}{\varepsilon_r} b$$

$$\frac{2\sigma b}{\varepsilon_0}^{(1-\frac{1}{\varepsilon_r})} = \frac{7\sigma a}{4\varepsilon_0} + \frac{2\sigma a}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{2\sigma b}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\left(\frac{7}{4} + 2\right)$$

$$\frac{2\sigma b}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{15\sigma a}{4\varepsilon_0}$$

$$\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{15a}{8b} \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{15a}{8b} - 1$$

$$\boxed{\varepsilon_r = -\frac{8b}{15a - 8b}}$$

$$\boxed{d\vec{l} = dx\,\vec{u_x}}$$

$$W = \frac{\sigma^2 S a}{12\varepsilon_0} = \iiint \omega \, dV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r E_r^2 \cdot S \cdot b$$

$$\omega = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot E^2 \qquad \left[E_{int} \; \frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right]$$

$$V = S\, b$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_0 \, \varepsilon_r \cdot E^2 \cdot S \cdot b = \frac{\sigma^2 S a}{12\varepsilon_0}$$

$$E^2 \cdot \varepsilon_r \, b = \frac{\sigma^2 \cdot a}{6\,\varepsilon_0^2}$$

$$\left(\frac{2\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\right)^2 \cdot \varepsilon_r \, b = \frac{\sigma^2 a}{6\varepsilon_0^2} \rightarrow \frac{4\sigma^2}{\varepsilon_0^2\varepsilon_r^2} \cdot \varepsilon_r \cdot b = \frac{\sigma^2 \cdot a}{6\varepsilon_0^2}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_r} = \frac{a}{24\, b} \rightarrow \varepsilon_r = \frac{24 b}{a}$$

$$b - \frac{1}{8}a = \frac{1}{\varepsilon_r}\, b \rightarrow b - \frac{1}{8}a = \frac{a}{24 b}\, b$$

$$b - \frac{1}{8}a = \frac{a}{24} \qquad \left[b = \frac{a}{6}\right]$$

$$b = \frac{a}{24} + \frac{1}{8}a = \frac{a}{6}$$

$$\varepsilon_r = \frac{24\left(\frac{a}{6}\right)}{a} = 4 \rightarrow \left[\varepsilon_r = 4\right]$$

JULIO 2018

14. Condensador plano de área S, cargado carga q

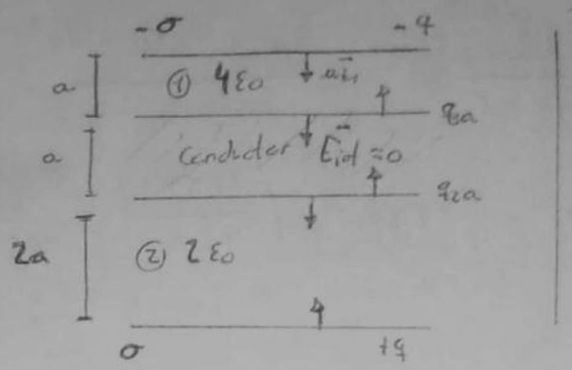
$W_{condensador} = W_1 + W_2 + W_{conductor}$

2 láminas material dieléctrico } Interior
1 lámina conductora (carga positiva) }

Energía almacenada en el condensador $\quad W_C = \dfrac{4aq^2}{S\varepsilon_0}$

1) CARGA Lámina Conductora

$\left\{ \sigma = \dfrac{q}{S} \right\}$ Carga superficie en conductor.



$\vec{E}_{condensador} = \vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E}_{conductor}$

$Q_{conductor} = q_{3a} + q_{2a} > 0$

$\vec{E}_{lámina} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u_z}$

CAMPO ①

$$\vec{E_1} = \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_1}(-\vec{u_z}) + \frac{\sigma_{3a}}{2\varepsilon_1}\vec{u_z} + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_1}\vec{u_z} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_1}\vec{u_z} =$$

$$= (2\sigma + \sigma_{3a} + \sigma_{2a}) \frac{1}{2\varepsilon_1} \cdot \vec{u_z}$$

$\{\varepsilon_1 = 4\varepsilon_0\}$

$$\vec{E_1} = (2\sigma + \sigma_{3a} + \sigma_{2a}) \frac{1}{8\varepsilon_0} \vec{u_z} = (2q + q_{3a} + q_{2a}) \frac{1}{8\varepsilon_0 S} \vec{u_z}$$

$\sigma = \dfrac{q}{S}$

$$\left[\vec{E_1} = \frac{2q + Q_c}{8\varepsilon_0 S} \vec{u_z} \right]$$

$$\vec{E_2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_2}\vec{u_z} + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_2}(-\vec{u_z}) + \frac{\sigma_{3a}}{2\varepsilon_2}(-\vec{u_z}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_2}(-\vec{u_z}) =$$

$$= (2\sigma - \sigma_{2a} - \sigma_{3a}) \frac{1}{2\varepsilon_2} \vec{u_z} = (2\sigma - \sigma_{2a} - \sigma_{3a}) \cdot \frac{1}{4\varepsilon_0} \vec{u_z}$$

$\{\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0\}$

$$\vec{E_2} = (2q - q_{2a} - q_{3a}) \cdot \frac{1}{4\varepsilon_0 S} \vec{u_z} = \frac{2q - Q_c}{4\varepsilon_0 S} \vec{u_z}$$

$\vec{E}^{\,int}_{conductor} = 0$

Vector desplazamiento dieléctrico: $\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$

Densidad de energía electrostática:

$$\omega_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \cdot E_1^2 = \frac{1}{2} (4\varepsilon_0) \left(\frac{2q + Q_c}{8\varepsilon_0 S} \right)^2 = \frac{2\varepsilon_0}{64 \varepsilon_0^2 S^2} (2q + Q_c)^2 =$$

$$\omega_1 = \frac{(2q+Q_c)^2}{32 \varepsilon_0 S^2} = \frac{4q^2 + 4q Q_c + Q_c^2}{32 \varepsilon_0 S^2}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_2 \cdot E_2^2 = \frac{1}{2} \cdot (2\varepsilon_0) \cdot \left(\frac{2q - Q_c}{4\varepsilon_0 S} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{16 \varepsilon_0^2 \cdot S^2} (2q - Q_c)^2 = \frac{1}{16 \varepsilon_0 S^2} (2q - Q_c)^2$$

Energía electrostática.

$$W = \iiint \omega \cdot dv$$

$$W_1 = \iiint \omega_1 \cdot dv_1 = \iiint \frac{(2q+Q_c)^2}{32 \varepsilon_0 S^2} dv_1 = \left\{ \text{Volumen } 1 = a \cdot S \right\}$$

$$W_1 = \frac{(2q+Q_c)^2}{32 \varepsilon_0 S^2} \iiint dv_1 = \frac{(2q+Q_c)^2}{32 \varepsilon_0 S^2} V_1 = \frac{(2q+Q_c)^2}{32 \varepsilon_0 S^2} \cdot a \cdot S =$$

$$W_1 = \frac{(2q+Q_c)^2}{32 \varepsilon_0 S} a$$

$$W_2 = \iiint \omega_2 \cdot dv_2 = \frac{(2q-Q_c)^2}{16 \varepsilon_0 S^2} \iiint dv_2 = \left\{ \text{Volumen } 2 = 2a \cdot S \right\}$$

$$W_2 = \frac{(2q-Q_c)^2}{16 \varepsilon_0 S^2} \cdot V_2 = \frac{(2q-Q_c)^2}{16 \varepsilon_0 S^2} 2a \cdot S = \frac{(2q-Q_c)^2}{8 \varepsilon_0 S} a$$

$$W_{condensador} = \frac{4aq^2}{5\varepsilon_0} = W_1 + W_2 = \frac{(2q+Q_c)^2}{32 \varepsilon_0 S} a + \frac{(2q-Q_c)^2}{8 \varepsilon_0 S} a$$

$$\frac{4aq^2}{5\varepsilon_0} = \frac{a}{32 \varepsilon_0 S} \left((2q+Q_c)^2 + 4(2q-Q_c)^2 \right)$$

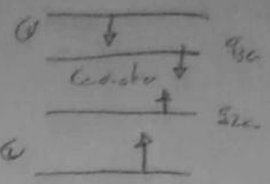
$$128 q^2 = 4q^2 + 4q Q_c + Q_c^2 + 16 q^2 - 16 q Q_c + 4 Q_c^2$$

$$08 q^2 = -12 q Q_c + 5 Q_c^2 \qquad (108 q^2 + 12 q Q_c) = 5 Q_c^2$$

$$5 Q_c^2 + 12 q Q_c - 108 q^2 = 0 \qquad Q_c = \frac{-12q \pm \sqrt{144q^2 - (4) \cdot (-108 q^2) \cdot 5}}{2 \cdot 5}$$

$$Q_c = \frac{+72q \pm \sqrt{144q^2 + 2160q^2}}{10} = \frac{+72q \pm 48q}{10} \begin{cases} \nearrow Q_{c_1} = \frac{-36q}{10} = -\frac{18}{5}q \\ \rightarrow Q_{c_2} = \frac{60q}{10} = 6q \end{cases}$$

$\left[Q_c = 6q\right]$ carga del conductor.



2) Densidad de carga sobre la lámina del conductor.

$$Q_c = q_{2a} + q_{3a} = 6q$$

$$\vec{E}_{int}^{cond} = \vec{E}_q + \vec{E}_{q_{2a}} + \vec{E}_{q_{3a}} + \vec{E}_{-q} = 0$$

$$\vec{E}_{int}^{cond} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} + \frac{\sigma_{3a}}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_z}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_z}) =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\sigma + \sigma_{2a} - \sigma_{3a} + \sigma\right)\vec{u_z} = 0$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0 S}\left(2q + q_{2a} - q_{3a}\right)\vec{u_z} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2q + q_{2a} - q_{3a} = 0 \rightarrow q_{3a} = 2q + q_{2a} \\ Q_c = 6q = q_{3a} + q_{2a} \end{array}\right\}$$

$$q_{2a} = 6q - q_{3a}$$

$$q_{3a} = 6q - q_{2a}$$

$$q_{3a} = 2q + 6q - q_{3a}$$

$$2q_{3a} = 8q \rightarrow q_{3a} = 4q \rightarrow = \frac{\sigma_{3a}}{S}$$

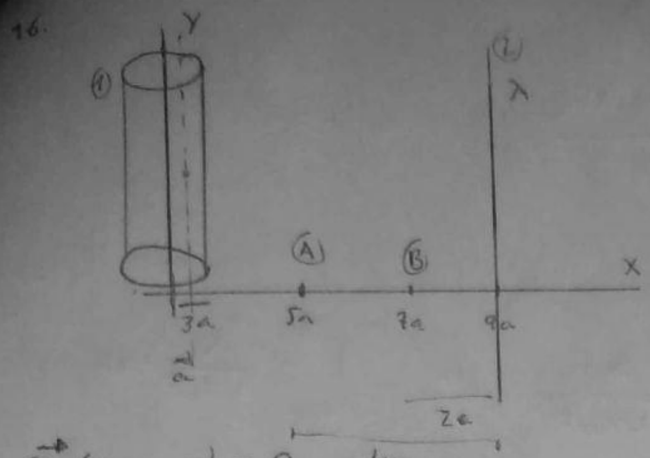
$$\left[\sigma_{3a} = \frac{q_{3a}}{S} = \frac{4q}{S}\right]$$

$$q_{2a} = q_{3a} - 2q \rightarrow q_{2a} = 6q - q_{2a} - 2q$$

$$2q_{2a} = 4q \rightarrow q_{2a} = 2q \rightarrow \left[\sigma_{2a} = \frac{q_{2a}}{S} = \frac{2q}{S}\right]$$

... 2019

16.



$\vec{E}(a,y,0) = 0$

El campo en el exterior del cilindro se comporta como el de un hilo.

$$\vec{E} = \vec{E}_{cilindro} + \vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda_{cilindro}}{2\pi\varepsilon_0 r}(+u_x) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}(-\vec{u}_x)$$

Superf. de cilindro $= 2\pi r \cdot L$

Volumen cilindro $= \pi r^2 \cdot L$

Aplicamos Ley de Gauss:

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \{\vec{E} \parallel d\vec{S}\} = \{E \text{ uniforme}\} = E \cdot 2\pi r \cdot L$$

$$q_{enc} = \rho \cdot V_{cilindro} = \rho \cdot \pi r^2 L$$

$$E \cdot 2\pi \cdot r \cdot L = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}_{cilindro} = \frac{\rho\, \pi r^2 \cdot L}{\varepsilon_0\, 2\pi r \cdot L} = \frac{\rho \cdot r}{2\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

$$\vec{E}(a,y,0) = \vec{E}_{cilindro}(a,y,0) + \vec{E}_{hilo}(a,y,0) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\rho \cdot a}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 8a}(-u_x) = 0$$

$$\rho \cdot a - \frac{\lambda}{\pi 8 a} = 0 \rightarrow \boxed{\rho = \frac{\lambda}{8\pi a^2}}$$

$\lambda = \frac{q}{L}$

$\rho = \frac{q}{V} \rightarrow q = \rho \cdot V$

$$\lambda = \frac{\rho \cdot V}{L} = \frac{\frac{\lambda}{8\pi a^2} \cdot \pi \cdot (3a)^2 L}{L} = \frac{9\lambda}{8}$$

$$\left[\lambda_{cilindro} = \frac{9\lambda}{8} \right]$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}_{cilindro} \cdot d\vec{l} - \int_A^B \vec{E}_{h.b} \cdot d\vec{l} = -\int_{5a}^{7a} \frac{\lambda_{cilindro}}{2\pi\varepsilon_0 r} dr - \int_{4a}^{2a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} dr =$$

$$= -\frac{9\lambda}{16\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{7}{5}\right) - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{9}{8} \ln\left(\frac{7}{5}\right) + \ln(2) \right]$$

$r_{cilindro} = x$

$r_{h.b} = x - 9a$

$\omega_{h.b} = 4\, \omega_{cilindro}$ punto.

b) $x > 7a$

$$\omega = \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_0 E^2$$

$$E_{h.b}^2 = 4 \cdot E_{cilindro}^2 \rightarrow \pm E_{h.b} \overset{(+)}{=} 2 \cdot E_{cilindro}$$

$$2 \cdot \frac{9\lambda}{16\pi\varepsilon_0 x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (x-9a)}$$

$$\frac{9}{x} = \frac{4}{(x-9a)}$$

$5x = 81a$

$$\boxed{x = \frac{81}{5} a}$$

$9x - 81a = 4x$

$$\boxed{x = \frac{81}{13} a}$$

1. Superficie esférica conductora radio b. carga: q

$$w_{exterior} = \frac{9 \varepsilon b^2 V_0^2}{32 r^4}$$ densidad espacial de energía electrostática.

1. Potencial, Carga del conductor.

El campo eléctrico generado por una distribución de carga con simetría esférica, en un punto exterior a la misma, es similar al que generaría una carga puntual situada en el centro de la distribución con una carga equivalente a la de la distribución.

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \\ \vec{D} = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} \end{array} \right\}$$

$$\vec{E}(r > b) = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u_r}$$

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \right)^2 = \frac{9 \varepsilon_0 b^2 V_0^2}{32 \cdot r^4}$$

$$\frac{Q^2}{16 \cdot \pi^2 \varepsilon_0^2 r^4} = \frac{9 b^2 V_0^2}{16 \cdot r^4} \rightarrow Q^2 = 9 b^2 V_0^2 \pi^2 \varepsilon_0^2$$

$$\left[Q = 3 b V_0 \pi \varepsilon_0 \right]$$

Potencial.

$$V = V(r=b) - V(\infty) = -\int_{\infty}^{b} \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_{\infty}^{b} \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{u_r} \cdot d\vec{l} =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \int_{\infty}^{b} \frac{1}{r^2}\, dr = -\frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^{b} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 b}$$

$$\left[V_{superficie} = \frac{3 b V_0 \pi \varepsilon_0}{4 \pi \varepsilon_0 b} = \frac{3 V_0}{4} \right]$$

8)

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\vec{u_r}}$$

Condiciones

$q_b = Q = 3\varepsilon_0 b V_0 \pi$

Densidades superficiales de carga.

$$V^f_{superficie} = \frac{1}{6}\cdot\frac{3V_0}{4} = \frac{V_0}{8}$$

$$V^f_{superficie} = V(r>3b) + V(2b<r<3b) + V(b<r<2b) =$$

$$= -\int_\infty^{3b} \vec{E}(r>3b)\cdot d\vec{l} - \int_{3b}^{2b} \cancel{\vec{E}(2b<r<3b)}^{\,0}\cdot d\vec{l} - \int_{2b}^{b} \vec{E}(b<r<2b)\cdot d\vec{l} =$$

$$= -\int_\infty^{3b} \frac{Q+Q_{cor}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr - \int_{2b}^{b} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr =$$

$$= -\frac{Q+Q_{cor}}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^{3b}\frac{1}{r^2}\,dr - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2b}^{b}\frac{1}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{Q+Q_{cor}}{4\pi\varepsilon_0 3b} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2b}\right) =$$

$$= \frac{Q+Q_{cor}}{4\pi\varepsilon_0 3b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2b}$$

$$V^f_{sup} = \frac{Q+Q_{cor}}{4\pi\varepsilon_0 3b} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2b} = \frac{V_0}{8}$$

$Q_{cor} = \frac{1}{2}(Q - 5Q) = -2Q$

$$\boxed{Q_{cor} = -6\varepsilon_0 b V_0 \pi}$$

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b}\right)\left(\frac{Q+Q_{cor}}{3} + \frac{Q}{2}\right) = \frac{V_0}{8}$$

$$\frac{2Q+2Q_{cor}+3Q}{6} = \frac{V_0\pi\varepsilon_0 b}{2}$$

$$2Q+2Q_{cor}+3Q = 3V_0\pi\varepsilon_0 b$$

$$\boxed{Q_{cor} = \frac{1}{2}\left(3V_0\pi\varepsilon_0 b - 5Q\right)}$$

Densidad superficial:

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

b) $\Phi = \iint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}_{int} = 0 \rightarrow \Phi = 0 \rightarrow q_{enc} = 0$

$q_{enc} = Q + Q_{2b} = 0 \rightarrow \quad Q_{2b} = -Q = -3\varepsilon_0 b V_0 \pi$

$Q_{cor} = Q_{3b} + Q_{2b} \rightarrow \quad Q_{3b} = Q_{cor} - Q_{2b} = -6\varepsilon_0 b V_0 \pi + 3\varepsilon_0 b V_0 \pi =$

$\boxed{Q_{3b} = -3\varepsilon_0 b V_0 \pi}$

$$\sigma_{2b} = \frac{Q_{2b}}{S_{2b}} = \frac{-3\varepsilon_0 b \pi V_0}{4\pi (2b)^2} = \frac{-3\varepsilon_0 b \pi V_0}{16\pi b^2} = -\frac{3\varepsilon_0 V_0}{16 b}$$

$$\sigma_{3b} = \frac{Q_{3b}}{S_{3b}} = \frac{-3\varepsilon_0 b \pi V_0}{4\pi (3b)^2} = \frac{-3\varepsilon_0 b \pi V_0}{36\pi b^2} = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{12 b}$$

nio 2019. 18,

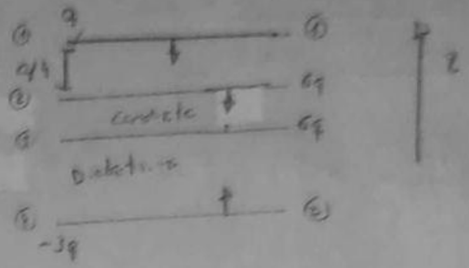
$q_1 = q$ $\qquad \varepsilon_r = 5$

$q_2 = -3q$

$q_{cp} = 6q$

$b \equiv$ ancho lámina conductora

Densidad superficie



$$W = \frac{a q^2}{5 \varepsilon_0}$$

$$W = \iiint \omega \, dv = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E^2 \cdot S \cdot l$$

$$\{ \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = 5 \varepsilon_0 \}$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{plano\,1} + \vec{E}_{conductor} + \vec{E}_{plano\,2} =$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Densidad superficial } \sigma = \frac{q}{S} \\ \vec{E}_{plano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \vec{u}_\perp \end{array} \right)$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon}(-\vec{u_z}) + \frac{\sigma_{conductor}}{2\varepsilon}(-\vec{u_z}) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon}(\vec{u_z}) =$$

$$= \frac{q}{S\, 2\varepsilon_0}(-\vec{u_z}) + \frac{6q}{S\, 2 \cdot 5 \varepsilon_0}(-\vec{u_z}) + \frac{-3q}{2 \cdot 5 \varepsilon_0}\vec{u_z} =$$

$$= -\frac{q}{S\, 10 \varepsilon_0}(1 + 6 + 3)\vec{u_z} = -\frac{q}{S\varepsilon_0}\vec{u_z}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0\, 5 \left(-\frac{q}{S \varepsilon_0} \right)^2 \cdot S\, b = \frac{a q^2}{S \varepsilon_0}$$

$$\frac{5}{2} \frac{q^2}{S^2 \varepsilon_0} \cdot S\, b = \frac{a q^2}{S \varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \frac{5}{2} \cdot b = a$$

$$b = \frac{2a}{5}$$

Densidad superficie:

$$\vec{E}_{conductor} = 0 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_z}) + \frac{\sigma_{sup}}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_z}) + \frac{\sigma_{inf}}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} = 0$$

$$-\sigma_1 - \sigma_{sup} + \sigma_{inf} + \sigma_2 = 0$$

$$-q - \sigma_{sup} + \sigma_{inf} - 3q = 0 \qquad -\sigma_{sup} + \sigma_{inf} = \frac{4q}{S}$$

$$-\sigma_{sup} + \sigma_{inf} = 3q + q \quad \rightarrow \quad \sigma_{sup} = -\frac{4q}{S} + \sigma_{inf}$$

$$q_{conductor} = 6q = q_{sup} + q_{inf}$$

$$\sigma_{conductor} = \frac{6q}{S} = \sigma_{sup} + \sigma_{inf} \rightarrow \sigma_{sup} = \frac{6q}{S} - \sigma_{inf}$$

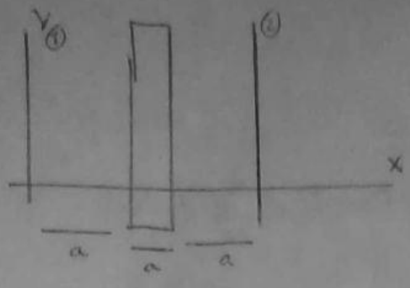
$$\frac{6q}{S} - \sigma_{inf} = -\frac{4q}{S} + \sigma_{inf}$$

$$\frac{10q}{S} = 2\sigma_{inf} \rightarrow \boxed{\sigma_{inf} = \frac{5q}{S}}$$

$$\boxed{\sigma_{sup} = \frac{q}{S}}$$

Enero 2019.

21.



$E_{plano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon} u_I$

$\sigma_1 = \sigma$

~~El campo eléctrico generado por esa distribución de carga con simetría~~

$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x})$

$\vec{E}_{lamina} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{int} = \vec{E}_{ext}$

$$\frac{\sigma_{lamina}}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

$$-\frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

$$-2\sigma - \sigma = \sigma_2 \rightarrow \boxed{\sigma_2 = -3\sigma}$$

Descargada.

$$\vec{E}(a<x<2a) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0}(\cdot\vec{u_x}) + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) = 0$$

$$= \sigma + \sigma_2 - 2\sigma - 2\sigma = 0$$

$$\boxed{\sigma_2 = -3\sigma}$$

Descargada $q_{lam} = 0$

$q_a + q_{2a} = 0$

$q_a = -q_{2a}$

$\sigma_a = -2\sigma$

$\sigma_{2a} = 2\sigma$

2) Densidad de energía $\omega = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$

$$\vec{E}(r<0) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-1 + 2 - 2 + 3) = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\omega(r<0) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(0<r<a) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(\vec{u_x}) + \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 + 2 - 2 + 3) = \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\omega(0<r<a) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{4\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(a<r<2a) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-2-2+3) = 0$$

$$\omega(a<r<2a) = 0$$

$$\vec{E}(2a<r<3a) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_0}(\vec{u_x}) + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-2+2+3) = \frac{4\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

$$\omega(2a<r<3a) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{2\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{2\sigma^2}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(r>3a) = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_a}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_{2a}}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-2+2-3) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

$$\omega(r>3a) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

3) $\varepsilon_r = 2\varepsilon_0$ $\qquad \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\vec{p} = b(\vec{u_z} - \vec{u_x})$

Orientació mínima:

$\vec{p_f} = -b\sqrt{2}\,\vec{u_x}$

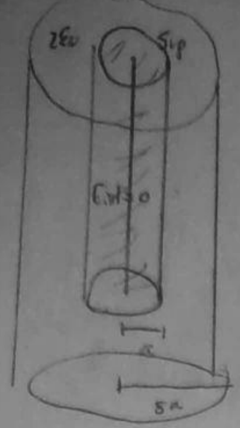
$$\vec{E}(x>3a) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

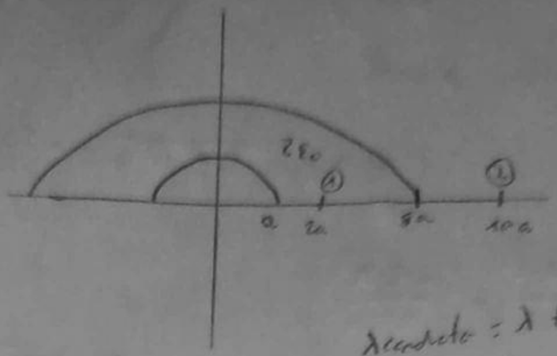
$$\vec{p_0} = b\sqrt{2}\left(\frac{\vec{u_z} - \vec{u_x}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$W = \Delta E_p = -\vec{E}(4a,0,0)\cdot\vec{p_f} + \vec{E}(4a,0,0)\,\vec{p_0} =$$

$$= \vec{E}(4a,0,0)\,(\vec{p_0} - \vec{p_f}) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}\left(b\sqrt{2}\left(\frac{\vec{u_z}-\vec{u_x}}{\sqrt{2}}\right) + b\sqrt{2}\,\vec{u_x}\right)$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-b + b\sqrt{2}) = \frac{\sigma b}{2\varepsilon_0}(1-\sqrt{2})$$





$\lambda_{conducto} = \lambda + \lambda_{superfic.}$

$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{u_r}$ $\qquad d\vec{l} = dl\cdot\vec{u_r}$

El campo eléctrico generado por una distribución de carga con simetría esférica en su parte exterior a la misma, es indistinguible del que generaría un hilo indefinido situado en el eje de la distribución, con una densidad de carga lineal λ equivalente a la de la distribución.

$$V_1 - V_2 = \frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2}{5}\right) = V(2a) - V(10a) = -\int_{10a}^{8a}\vec{E}(r>8a)\,d\vec{l} - \int_{8a}^{2a}\vec{E}(a<r<8a)\,d\vec{l}$$

$$= -\int_{10a}^{8a}\frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0 r}\,dr - \int_{8a}^{2a}\frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon r}\,dr =$$

$$\{\varepsilon = 2\varepsilon_0\}$$

$$= -\frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{8a}{10a}\right) - \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2a}{8a}\right) =$$

$$= -\frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(2^{-2}\right) =$$

$$= \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2) = \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln(5) - 2\cdot\frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2) + \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2)$$

$$= \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln(5) - \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2) = \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{2\lambda}{\pi\varepsilon_0} = \frac{\lambda+\lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon_0} \qquad \rightarrow \left[\lambda_{sup} = -5\lambda\right]$$

$$-4\lambda = \lambda + \lambda_{sup}$$

Densidad superficial de carga: $\sigma = \frac{Q}{S}$ $\qquad S = 2\pi r L = \{r=a\} = 2\pi a L$

Densidad lineal de carga: $\lambda = \frac{Q}{L}$

$[\lambda_{sup} = -5\lambda]$ $\qquad Q = \lambda\cdot L \rightarrow Q_{sup} = -5\lambda\cdot L$

$$\left[\sigma_{sup} = \frac{-5\lambda\cdot L}{2\pi a L} = \frac{-5\cdot\lambda}{2\pi a}\right]$$

$\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E}$ $\qquad r = 8a - 5a = 4a$

2) Energía almacenada. $\qquad W = \iiint w \cdot dv$

$\lambda_{sup} = -5\lambda$

$\varepsilon = 2\varepsilon_0$

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

$$E_{\text{en el dieléctrico}} = \frac{\lambda + \lambda_{sup}}{2\pi\varepsilon r} = \frac{-4\lambda}{2\pi(2\varepsilon_0)\cdot r} = \frac{-\lambda}{\pi\varepsilon_0 r}$$

$$w = \frac{1}{2}\,2\varepsilon_0\cdot\left(\frac{-\lambda}{\pi\varepsilon_0 r}\right) = \frac{\lambda^2}{\pi^2\varepsilon_0 r^2}$$

$$dv = r\,d\varphi\,dr\,dz$$

Superficie

$$\left[W = \frac{\lambda^2}{\pi^2\varepsilon_0}\iiint\frac{1}{r^2}\,dv = \frac{\lambda^2}{\pi^2\varepsilon_0}\int_a^{5a}\frac{2\pi r L}{r^2}\,dr = \right]$$

$$= \frac{\lambda^2}{\pi\varepsilon_0}(2\pi L)\cdot\ln(8) = \frac{6\lambda^2 L}{\pi\varepsilon_0}\ln(2)$$

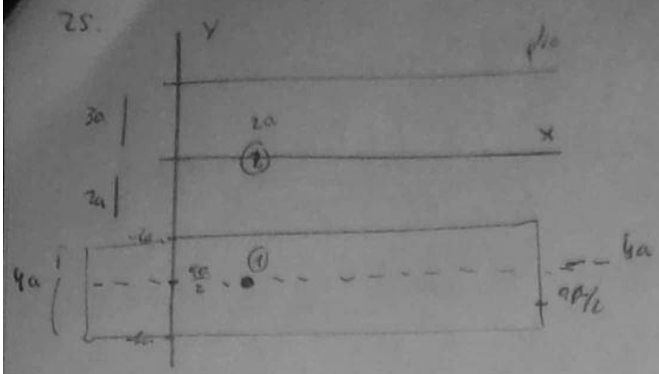
Energía almacenada por unidad de longitud:

$$\left[W_L = \frac{W}{L} = \frac{6\lambda^2}{\pi\varepsilon_0}\ln(2)\right]$$

[Campo cilindro no uniforme]

ero 2018

25.



$$w_E = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = 0$$

$$\vec{E}_{plano} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_y})$$

$$\vec{E}_{int\,losa} = \frac{\rho h}{\varepsilon_0}\vec{u_y}$$

$\{h$ (distancia plano de simetría) $4a - \frac{9}{2}a = \frac{1}{2}a\}$

$$\vec{E}(0,-\tfrac{9}{2}a,0) = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{int}$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho\cdot\frac{1}{2}a}{\varepsilon_0}(-\vec{u_y})$$

$$\vec{E}(0,-4{,}5a,0) = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho\cdot a}{2\cdot\varepsilon_0}\right)(-\vec{u_y})$$

$$d\vec{l} = dy\cdot\vec{u_y}$$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho\cdot a}{2\varepsilon_0} = 0 \rightarrow \boxed{\sigma = -\rho a}$$

$$2)\quad V_1 - V_2 = V(2a,-4a,0) - V(2a,0,0) = -\int \vec{E}(-4a<r<-2a)\cdot d\vec{l} + \int \vec{E}(-2a<r<0)\,d\vec{l}$$

$$= -\left[\int_{-4a}^{-2a}\vec{E}_{int}\cdot d\vec{l} + \int_{-2a}^{0}\vec{E}_{ext}\,d\vec{l}\right] = \quad \{h = y+4a\}$$

$$\vec{E}_{int} = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{int\,losa} = \frac{-\rho a}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_y}) + \frac{\rho\cdot h}{\varepsilon_0}\vec{u_y} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(a+2(y+4a))\vec{u_y}$$

$$\vec{E}_{ext} = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{al} = \frac{-\rho a}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_y}) + \frac{\rho e}{2\varepsilon}\vec{u_y} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(a+4a)\vec{u_y} = \frac{5a\rho}{2\varepsilon}\vec{u_y}$$

$$-\left[\int_{-4a}^{-2a}\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(a+2(y+4a))\,dy + \int_{-2a}^{0}\frac{5a\rho}{2\varepsilon}\,dy\right] =$$

$$= -\left[\frac{\rho}{2\varepsilon_0}9a(-2a+4a) + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(4a^2-16a^2) + \frac{5a\rho}{2\varepsilon_0}(2a)\right]$$

$$= -\left[\frac{\rho\,18a^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho\,12a^2}{2\varepsilon_0} + \frac{10a^2\rho}{2\varepsilon_0}\right] = -\frac{8\rho a^2}{\varepsilon_0}$$

Problema 13

$b = \frac{a}{6}$; $\varepsilon_r = 4$

Problema 14

1) $Q = 6q$

2) $\sigma_1 = \frac{4q}{S}$; $\sigma_2 = \frac{2q}{S}$

Problema 15

$$W = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a} + 32\pi\varepsilon_0 a V_0^2$$

Problema 16

1) $V_B - V_A = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln 2 - \frac{9}{8}\ln\frac{7}{5}\right)$

2) $\left(\frac{81a}{5}, 0\right)$, $\left(\frac{81a}{13}, 0\right)$

Problema 17

1) $q = 3\pi\varepsilon_0 b V_0$; $V_b = \frac{3}{4}V_0$

2) $\sigma_{2b} = -\frac{3\varepsilon_0 V_0}{16b}$; $\sigma_{3b} = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{12b}$

Problema 18

$b = \frac{2a}{5}$; $\sigma_{inf} = \frac{5q}{S}$; $\sigma_{sup} = \frac{q}{S}$

Problema 19

1) $V_a = \frac{5Q}{8\pi\varepsilon_0 a}$

2) $V'_{4a} = \frac{15Q}{16\pi\varepsilon_0 a}$

3) $(\Delta q)_a = 0$; $(\Delta q)_{4a} = 10Q$

Problema 20

1) $\vec{D}(r > a) = -\frac{5\lambda}{2\pi r}\vec{u}_r$; $\vec{D}(r < a) = \frac{\lambda}{2\pi r}\vec{u}_r$

2) $\sigma = -\frac{3\lambda}{\pi a}$

3) $\omega^e = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$

Problema 21

1) $\sigma_2 = -3\sigma$

2) $\omega_e(x<0) = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \omega_e(x>3a)$; $\omega_e(0<x<a) = \dfrac{2\sigma^2}{\varepsilon_0} = \omega_e(2a<x<3a)$; $\omega_e(a<x<2a) = 0$

3) $W = \dfrac{b\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\sqrt{2}\right)$

Problema 22

1) $Q_2 = 3\pi\varepsilon_0 aV_0 + q$

2) $V_b = \dfrac{V_0}{4}$

3) $Q'_1 = \dfrac{-3\pi\varepsilon_0 aV_0}{2}$; $Q'_2 = \dfrac{9\pi\varepsilon_0 aV_0}{2}$

Problema 23

1) $\sigma_a = \dfrac{6q_0}{\pi a^2}$; $\sigma_{3a} = -\dfrac{2q_0}{3\pi a^2}$; $\sigma_{4a} = -\dfrac{q_0}{4\pi a^2}$

2) $W = \dfrac{12q_0^2}{\pi\varepsilon_0 a}$

Problema 24

1) $\sigma_a = -\dfrac{5\lambda}{2\pi a}$

2) $W_l = \dfrac{6\lambda^2 \ln 2}{\pi\varepsilon_0}$

Problema 25

1) $\sigma = -\rho a$

2) $V_1 - V_2 = \dfrac{8\rho a^2}{\varepsilon_0}$