Tema 5

Abril 2018

5.1. Si el potencial magnético vector en una región del espacio es $\vec{A} = -\frac{4}{9} a r^{3/2}\, \vec{u}_z$, donde r es la distancia al eje Z, determinar razonadamente:

1) Las unidades de la constante a, expresándolas en función de las unidades fundamentales del Sistema Internacional.
2) La densidad de corriente asociada a $\vec{A}$, expresando el resultado en coordenadas cartesianas. Justificar si se trata de una corriente estacionaria.

Junio 2018

5.2. Dado el potencial magnético vector $\vec{A} = \mu_0 \left(a r^3 - b r^2 \right) \vec{u}_z$, donde r es la distancia al eje Z, determinar razonadamente:

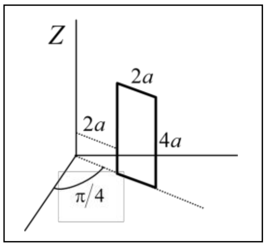
1) Las unidades de las constantes a y b, expresándolas en función de las unidades fundamentales del Sistema Internacional.
2) La intensidad de corriente que circulará por un cilindro de radio R, coaxial con el eje Z.

Julio 2018

5.3. El potencial magnético vector en una cierta región del espacio es:

$$\vec{A} = \left(b r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, \vec{u}_r - b r^2 \operatorname{sen}^3\theta\, \vec{u}_\theta \right) e^{-\alpha t}$$

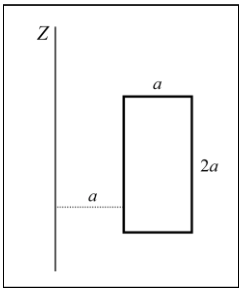
siendo b una constante positiva y $\vec{r}$ el vector de posición. Utilizando coordenadas cilíndricas, calcular la fuerza electromotriz inducida en una espira rectangular, situada como indica la figura.



***Problema* 5.3**

Octubre 2018

5.4. Una espira rectangular, de lados a y $2a$ y resistencia R, se sitúa coplanaria con el eje Z, tal como indica la figura. Si en la región en la que está la espira, el potencial magnético vector es $\vec{A} = \alpha t^2 \ln\frac{a}{r}\, \vec{u}_z$ (α y a constantes positivas, r distancia al eje Z), calcular razonadamente la corriente inducida en la espira, indicando su sentido.



***Problema* 5.4**

Enero 2019

5.5. En una región del espacio el potencial magnético vector es $\vec{A} = a e^{-\alpha t} \left(y\, \vec{u}_z - z\, \vec{u}_y \right)$:

1) Obtener razonadamente las unidades de las constantes a y α, expresándolas en función de las unidades fundamentales del Sistema Internacional.

   Si se dispone de un circuito rectangular, de lados $\frac{b}{2}$ y b:

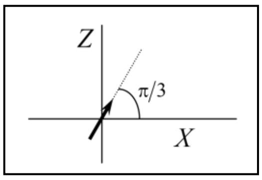
2) Justificar qué orientación debería tener el circuito para que, en cada instante, el flujo magnético que lo atravesase fuera máximo.
3) En las condiciones del apartado anterior, calcular la fuerza electromotriz inducida en el circuito, indicando el carácter vectorial del momento magnético asociado.

Enero 2015

5.6. A partir de las funciones de onda correspondientes a los campos eléctrico y magnético emitidos por un dipolo eléctrico oscilante en la zona de radiación, determinar razonadamente la fracción de la potencia total radiada por el dipolo, que es emitida en un rango de $\pm 30°$ de su plano ecuatorial.

Mayo 2016

5.7. Un dipolo eléctrico oscilante, $p = p_0 e^{i\omega t}$, que emite en vacío, se sitúa en el origen de coordenadas tal como indica la figura. Haciendo uso de las funciones de onda para los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ correspondientes a la zona de radiación, obtener dichos campos, así como el correspondiente vector de Poynting, en el punto $(0,0,b)$, expresando el resultado en coordenadas cartesianas y sin sustituir el valor numérico de las constantes físicas.



***Problema* 5.7**

TEMA 5.

abril 2018.

5.1. Potencial magnético vector: $\vec{A} = -\frac{4}{9} a r^{3/2} \vec{u}_z$

r distancia al eje Z.

1. Unidades de la constante a

$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$

$[B] = [\nabla] \cdot [A]$

$\nabla = \frac{d}{dx}\vec{u}_x + \frac{d}{dy}\vec{u}_y + \frac{d}{dz}\vec{u}_z$

$[\nabla] = m^{-1}$

Ley de Laplace:

$F = I \cdot \int_s d\vec{l} \times \vec{B}$

$[F] = [I][l][B]$

$B = \frac{[F]}{[I][l]} = \frac{kg \cdot a}{A \cdot m} = \frac{kg\ m \cdot s^{-2}}{A \cdot m}$

$[F] = [masa][a] = kg \cdot m/s^2$

$[\vec{A}] = \frac{[B]}{[\nabla]} = \frac{\frac{kg}{A \cdot s^2}}{m^{-1}} = \frac{kg \cdot m}{A\ s^2}$

$[A] = [a] \cdot [r]^{3/2} \rightarrow [a] = \frac{[A]}{[r]^{3/2}} = \frac{\frac{kg \cdot m}{A \cdot s^2}}{m^{3/2}} = \frac{kg \cdot m^{-1/2}}{A \cdot s^2}$

$[a] = kg \cdot m^{-1/2} \cdot A^{-1} \cdot s^{-2}$

2. Densidad de la corriente asociada a $\vec{A}$ (coordenadas cartesianas). Corriente estacionaria?

$\vec{j}$?

• Coordenadas cilíndricas (r, φ, z)

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\vec{u_r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{u_\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\vec{u_z}$$

$$\left[\vec{A} = -\frac{4}{9}\, a r^{3/2}\,\vec{u_z}\right] \qquad \begin{cases} A_r = 0 \\ A_\varphi = 0 \\ A_z = f(r) \end{cases}$$

$$\left[\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}\vec{u_\varphi} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}\cdot a\cdot r^{(3/2-1)}\,\vec{u_\varphi} = \frac{2}{3}\, a\cdot r^{1/2}\,\vec{u_\varphi}\right]$$

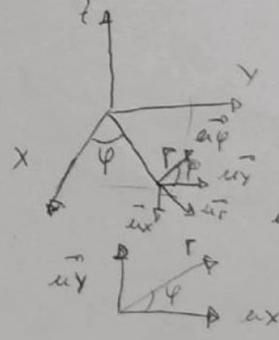
Como os campos son estáticos: $\nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \varepsilon\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}^{\to 0}$

$$\left[\vec{J} = \frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0}\right]$$

$$\nabla\times\vec{B} = \begin{cases} B_r = 0 \\ B_\varphi = f(r) \\ B_z = 0 \end{cases} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right]\vec{u_r} + \left[\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right]\vec{u_\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial\varphi}\right]\vec{u_z}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r}\vec{u_z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{2}{3}\cdot a\cdot r^{(1+1/2)}\right)}{\partial r}\vec{u_z} = \frac{1}{r}\cdot\frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{3}{2}\, r^{3/2-1}\,\vec{u_z} = a\cdot\frac{r^{1/2}}{r}\cdot\vec{u_z} = \frac{a}{r^{1/2}}\vec{u_z}$$

$$\vec{J} = \frac{a\cdot r^{-1/2}}{\mu_0}\vec{u_z}$$



$a_x = r\cos(\varphi)$
$a_y = r\,\mathrm{sen}(\varphi)$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{J} = \frac{a}{\mu_0}\left((x^2+y^2)^{1/2}\right)^{-1/2}\vec{u_z}$$

$$\left[\vec{J} = \frac{a}{\mu_0}(x^2+y^2)^{-1/4}\,\vec{u_z}\ \ A/m^2\right]$$

É estacionaria si $\nabla\cdot\vec{J} = 0$; $\to$ $\nabla\vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x}^{\to 0} + \frac{\partial J_y}{\partial y}^{\to 0} + \underbrace{\frac{\partial J_z}{\partial z}}_{f(r)} = 0$

$\vec{J}$ é estacionaria.

Junio 2015.

5.2. Potencial magnético: $\vec{A} = \mu_0 (ar^3 - br^2)\,\vec{u_z}$

r distancia al eje Z

1) Unidades de a y b:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left\{ \begin{array}{l} \nabla = \frac{d}{dx}\vec{u_x} + \frac{d}{dy}\vec{u_y} + \frac{d}{dz}\vec{u_z} \\ [\nabla] = m^{-1} \end{array} \right.$$

Ley de Laplace: $F = I \cdot \int_s d\vec{l} \times \vec{B} \rightarrow [F] = [I] \cdot [\vec{l}\,]\,[B]$

$$[B] = \frac{[F]}{[I]\cdot[l]} = \left\{ \begin{array}{l} [F] = kg \cdot m/s^2 \\ [I] = A \\ [l] = m \end{array} \right. \quad [B] = \frac{\frac{kg\cdot m}{s^2}}{A\cdot m} = kg\, A^{-1}\cdot s^{-2}$$

$$[A] = \frac{[B]}{[\nabla]} = \frac{kg\, A^{-1}\cdot s^{-2}}{m^{-1}} = kg\cdot A^{-1}\cdot s^{-2}\cdot m$$

$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ $\qquad [H] = \frac{A}{m}$

$$[A] = \frac{[B]}{[\nabla]} = \frac{[\mu_0]\,[H]}{[\nabla]}$$

$$[A] = [\mu_0]\cdot[a]\,[r^3] \rightarrow \frac{[\mu_0]\,[H]}{[\nabla]} = [\mu_0]\,[a]\,[r^3]$$

$$[a] = \frac{[H]}{[\nabla]\cdot[r^3]} = \frac{A\cdot m^{-1}}{m^{-1}\cdot m^3} = A/m^3$$

$$[A] = [\mu_0]\,[b]\,[r^2] \rightarrow \frac{[\mu_0]\,[H]}{[\nabla]} = [\mu_0]\,[b]\,[r^2]$$

$$[b] = \frac{[H]}{[\nabla]\,[r^2]} = \frac{A\cdot m^{-1}}{m^{-1}\cdot m^2} = A/m^2$$

2) Intensidad de corriente

Cilindro de radio R coaxial al eje Z.

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\vec{u_r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{u_\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\vec{u_z}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_r = 0 \\ A_\varphi = 0 \\ A_z = f(r) \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \vec{A} = \mu_0 (ar^3 - br^2)\vec{u_z} \\ \vec{B} = \nabla\times\vec{A} = -\dfrac{\partial A_z}{\partial r}\vec{u_\varphi} = -\mu_0(3ar^2 - 2br)\vec{u_\varphi} \end{array}$$

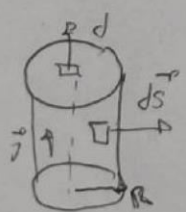
$$\nabla\times\vec{B} = \mu\vec{J} + \mu_0\varepsilon\cancel{\frac{\partial E}{\partial t}}^{\to 0}$$

$$\vec{J} = \frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\cdot\left[\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial B_\varphi}{\partial z}\right]\vec{u_r} + \left[\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right]\vec{u_\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rB_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi}\right]\vec{u_z}$$

$$\left.\begin{array}{l} B_r = 0 \\ B_\varphi = f(r) \\ B_z = 0 \end{array}\right| \quad \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_\varphi)}{\partial r}\vec{u_z} = \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\left(-\mu_0(3ar^3 - 2br^2)\right)}{\partial r}\vec{u_z} =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\frac{1}{r}\cdot\left(-\mu_0(9ar^2 - 4br)\right)\vec{u_z} = (4b - 9ar)\vec{u_z}$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}\, d\vec{S}_{base} + \int_S \vec{J}\cdot\cancel{d\vec{S}_{lado}}^{\to 0}$$



$\vec{J} \parallel d\vec{S}_{base}$

$\vec{J} \perp d\vec{S}_{lado}$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}_{base} = \left\{\begin{array}{l} \text{Superficie Círculo} = \pi r^2 \\ dS_{base} = 2\pi r\cdot dr \end{array}\right\} = \int_0^R (4b - 9ar)\cdot(2\pi r)\,dr =$$

$$= \left[8\pi\frac{r^2}{2}b - 18a\pi\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \left[4b\pi R^2 - 6a\pi R^3\right] = 2\pi R^2[2b - 3aR]$$

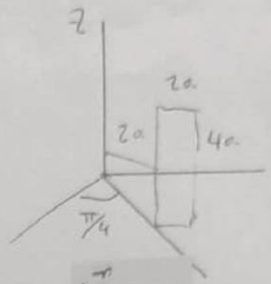
5.3. Julio 2018. $\vec{A} = (b r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta \, \vec{u_r} - b r^2 \operatorname{sen}^3\theta \, \vec{u_\theta}) e^{-at}$

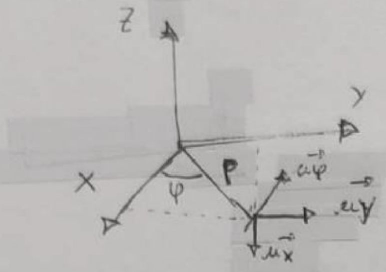
Potencial magnético:

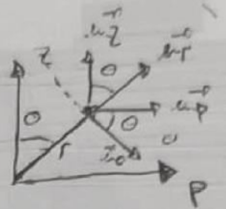
Coordenadas cilíndricas:

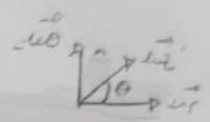
Fuerza electromotriz inducida:

Bases de coordenadas esféricas a cilíndricas:









$\vec{u_z} = \cos\theta \, \vec{u_r} - \operatorname{sen}\theta \, \vec{u_\theta}$

$\vec{u_r} = \operatorname{sen}\theta \, \vec{u_\rho} + \cos\theta \, \vec{u_z}$ $\qquad r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$

$\vec{u_\theta} = \cos\theta \, \vec{u_\rho} - \operatorname{sen}\theta \, \vec{u_z}$ $\qquad \rho = r \cdot \operatorname{sen}\theta$

$\vec{u_\varphi} = \vec{u_\varphi}$ $\qquad z = r \cdot \cos\theta$

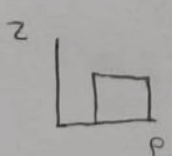
$$\vec{A} = (b \cdot r \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot r \cdot \cos\theta \, \operatorname{sen}\theta \, \vec{u_r} - b \, r^2 \operatorname{sen}^2\theta \, \operatorname{sen}\theta \, \vec{u_\theta}) e^{-at}$$

$$\vec{A} = b \cdot \underbrace{r^2 \operatorname{sen}^2\theta} (\cos\theta \, \vec{u_r} - \operatorname{sen}\theta \, \vec{u_\theta}) e^{-at}$$

$$\vec{A} = b\rho^2 \cdot \vec{u_z} \, e^{-at} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_r = 0 \\ A_\varphi = 0 \\ A_z = f(r) \end{array} \right\}$$

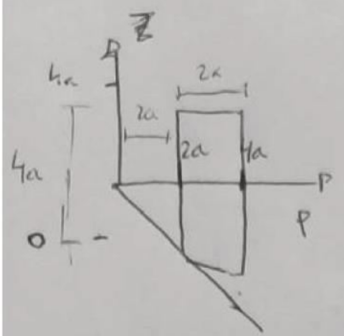
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{u_\varphi} = -2\rho \cdot b \, e^{-at} \cdot \vec{u_\varphi}$$

Fem: $\phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \{ \vec{B} \parallel d\vec{s} \} = \int_S B \cdot ds = \iint 2b\rho \, e^{-at} \, d\rho \cdot dz.$



$\left\{ \begin{array}{l} S = \rho \cdot z \\ ds = d\rho \cdot dz. \end{array} \right\}$

$$\Phi_B = \int_0^{4a}\int_{2a}^{4a} z b \rho\, e^{-\alpha t}\, dz \cdot d\rho = \int_{2a}^{4a} z b \rho\, e^{-\alpha t}\, z \Big|_0^{4a} d\rho$$



$z = [0, 4a]$

$\rho = [2a, 4a]$

$$\Phi_B = \int_{2a}^{4a} 8 b a \rho\, e^{-\alpha t}\, d\rho = 8ab \frac{\rho^2}{2} e^{-\alpha t} \Big|_{2a}^{4a} =$$

$$= 4ab\, e^{-\alpha t}\left[16a^2 - 4a^2\right] = 48 a^3 b\, e^{-\alpha t}$$

$$\Phi_B = 48 b a^3 e^{-\alpha t}$$

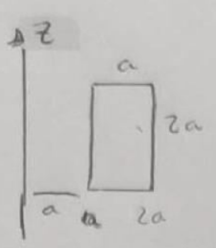
$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -48 b a^3 e^{-\alpha t}(-\alpha) = 48 b a^3 \alpha\, e^{-\alpha t}$$

Octubre 2018. $\quad \ln(x)' = \frac{1}{x}$

5.4.

Potencial magnético vector:

$$\vec{A} = \alpha t^2 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \vec{u_z}$$



$r \equiv$ distancia al eje Z.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \left\{ \begin{array}{l} A_r = 0 \\ A_\varphi = 0 \\ A_z = f(r) \end{array} \right\} = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \vec{u_\varphi} = -\alpha t^2 \left(\frac{1}{a/r}\right) \cdot \left(-\frac{a}{r^2}\right) \vec{u_\varphi}$$

$$\left[\vec{B} = \alpha t^2 \cdot \frac{1}{r} \vec{u_\varphi} \right]$$

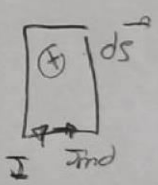
$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \{ \vec{B} \parallel d\vec{S} \} = \iint \alpha t^2 \cdot \frac{1}{r}\, dz\, d\rho = \int_a^{2a} \int_0^{2a} \alpha t^2 \cdot \frac{1}{r}\, dz \cdot d\rho =$$

$dS = dz \cdot d\rho$

$$= \int_a^{2a} \alpha t^2 \cdot \frac{1}{r}\, 2a\, d\rho = \alpha t^2\, 2a \left[\ln(r)\right]_a^{2a} = \alpha t^2\, 2a \ln(2)$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -4a\alpha t \ln(2)$$

$$\left[I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = -\frac{4a\alpha t \ln(2)}{R} \right]$$



La intensidad asociada al diferencial de superficie gira en sentido horario. Como la intensidad inducida es menor que 0 está girando en sentido (antihorario) contrario al $d\vec{S}$. [I_{ind} sentido antihorario]

Enero 2019.

58. $\vec{A} = a e^{-\alpha t}(y \vec{u_z} - z \vec{u_y})$

1) Unidades a y α. Ley de Faraday: $F = I \int_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

$$[B] = \frac{[F]}{[S][I]} = \frac{kg\cdot m\cdot s^{-2}}{A\cdot m^{-}} = kg\, A^{-1}\cdot s^{-2}$$

$$[\nabla] = m^{-1}$$

$$[A] = \frac{[B]}{[\nabla]} = \frac{kg\cdot A^{-1}\cdot s^{-2}}{m^{-1}} = kg\cdot m\, A^{-1}\cdot s^{-2}$$

$$[A] = [a]\,[e^{-\alpha t}]\,[y] = [a]\,[e^{-\alpha t}]\,[z]$$

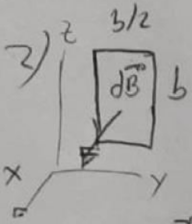
$$\boxed{[y] = m}$$

$[e^{-\alpha t}]$ = adimensional.

$[t] = s \rightarrow [\alpha] = s^{-1}$

$[A] = [a]\, m \rightarrow \boxed{a = kg\cdot A^{-1}\cdot s^{-2}}$

$\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{s} = \{\vec{B} \parallel d\vec{s}\} =$

2) 

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \left\{\begin{array}{l} A_x = 0 \\ A_y = f(z) \\ A_z = f(y) \end{array}\right\} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right]\vec{u_x} =$$

$$= \left[a e^{-\alpha t} + a e^{-\alpha t}\right]\vec{u_x} = 2 a e^{-\alpha t}\,\vec{u_x}$$

$\Phi_B = \int B\cdot ds\cdot\cos\alpha$ Para que sea máximo $\alpha = 0$, porque $\vec{B}\parallel d\vec{s}$ $\quad d\vec{s}\parallel\vec{u_x}$

Como $\vec{B}\parallel\vec{u_x}$, $d\vec{s}$ debe ser $\parallel \vec{u_x}$

La espira debe estar colocada de forma paralela al plano (zy)

Es máxima cuando $\vec{B}$ y $\vec{S}$ tengan la misma dirección.

$\vec{B}\parallel\vec{u_x}$ Al ser $\varepsilon > 0$ suponemos $\vec{B}\parallel\vec{S}$ a la derecha.

$\vec{S}\parallel\vec{u_x}$

$m_{ind} = I_{ind}\cdot\vec{S} \rightarrow \vec{m}_{ind}\parallel\vec{u_x}$

$S = \frac{b}{2} \cdot b = \frac{b^2}{2}$

3) $\mathcal{E}_{ind}$.

$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \underbrace{2ae^{-\alpha t}}_{\text{uniforme (no depende de ningún eje)}} \cdot ds = B \cdot S =$

$= 2ae^{-\alpha t} \cdot \frac{b^2}{2} = a b^2 e^{-\alpha t}$

$\mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = +\, ab^2 e^{-\alpha t} \cdot \alpha$

$\left.\begin{array}{l} \vec{m}_{ind} = \vec{S} \cdot J_{ind} \\ J_{ind} = -\frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} \end{array}\right\}$ como $J_{ind} > 0$, la dirección del $\vec{m}_{ind}$ momento magnético inducido será la misma que la de $\vec{S}$

$\vec{S} \parallel \vec{u_x}$

Problema 5.1

1) a se mide en $\mathrm{kg\,A^{-1}\,s^{-2}\,m^{-1/2}}$.

2) $\vec{j} = \dfrac{a}{\mu_0\left(x^2+y^2\right)^{1/4}}\,\vec{u}_z$. La corriente es estacionaria.

Problema 5.2

1) a se mide en $\mathrm{Am^{-3}}$, b se mide en $\mathrm{Am^{-2}}$.

2) $I = 2\pi R^2\left(2b-3aR\right)$

Problema 5.3

$\in = 48a^3 b\,\alpha\, e^{-\alpha t}$

Problema 5.4

$I = \dfrac{4a\alpha\, t\ln 2}{R}$

Problema 5.5

1) a en kg $\mathrm{A^{-1}s^{-2}}$; α en $\mathrm{s^{-1}}$.

2) Con su plano perpendicular al eje X.

3) $\in = ab^2\alpha e^{-\alpha t}$; $\vec{m}_{ind} \parallel \vec{u}_x$

Problema 5.6

$P = \dfrac{11}{16}P_{total}$

Problema 5.7

$\vec{E} = \dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2}{8\pi b}\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}b + \dfrac{\pi}{2}\right)\vec{u}_x$; $\vec{H} = \dfrac{p_0\omega^2}{8\pi bc}\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}b + \dfrac{\pi}{2}\right)\vec{u}_y$;

$\vec{S} = \dfrac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{64\pi^2 b^2 c}\,\mathrm{sen}^2\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}b + \dfrac{\pi}{2}\right)\vec{u}_z$