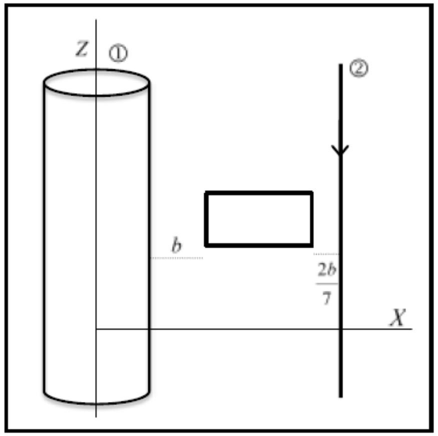
Tema 4 - Problema 12

Diciembre 2018

12. Un cilindro conductor indefinido, ①, de radio b, cuyo eje coincide con el eje Z, está recorrido por una corriente distribuida uniformemente en su sección, de intensidad desconocida. Un hilo conductor indefinido, ②, recorrido por una corriente de intensidad I_0, se sitúa sobre el plano XZ, tal como se muestra en la figura. Si el flujo magnético a través de una espira rectangular de lados b y $2b$, situada sobre dicho plano y entre ambos hilos (ver figura), es nulo, determinar razonadamente:

1) La densidad de corriente que circula por el conductor ①.
2) La fuerza ejercida sobre la espira si se hace circular por ella una corriente de intensidad $8I_0$, en sentido antihorario.



***Problema* 12**

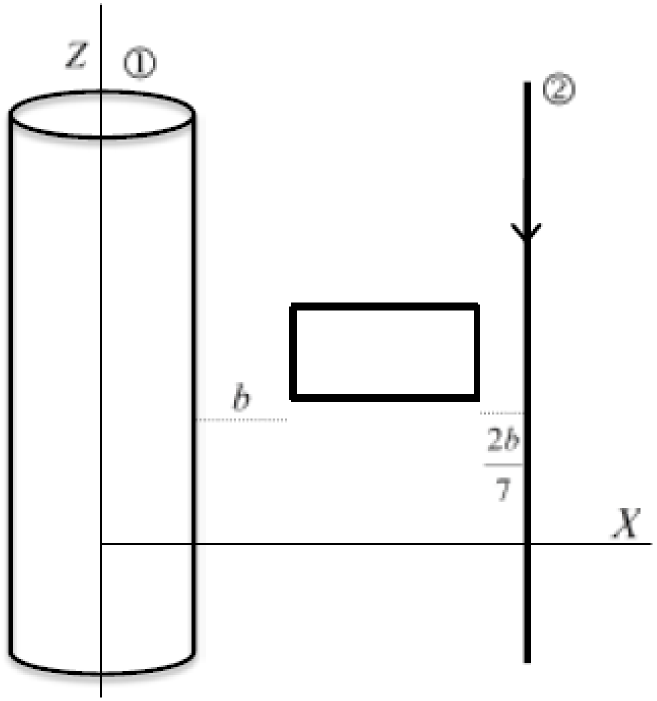
Datos.

① Cilindro conductor de radio b, I_1 uniforme y desconocida

② Hilo conductor, $I_2 = I_0$

Espira de lados b y $2b$: $\phi_B = 0$

Tema 4 - Problema 12



1) ¿$\vec{J}_1$?

$$\phi_B = 0 = \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \int_S (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$0 = \int_S \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{dS} + \int_S \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$\int_S \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{dS} = -\int_S \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{dS}$$

Para que la contribución al flujo de ambos campos tenga signo opuesto:

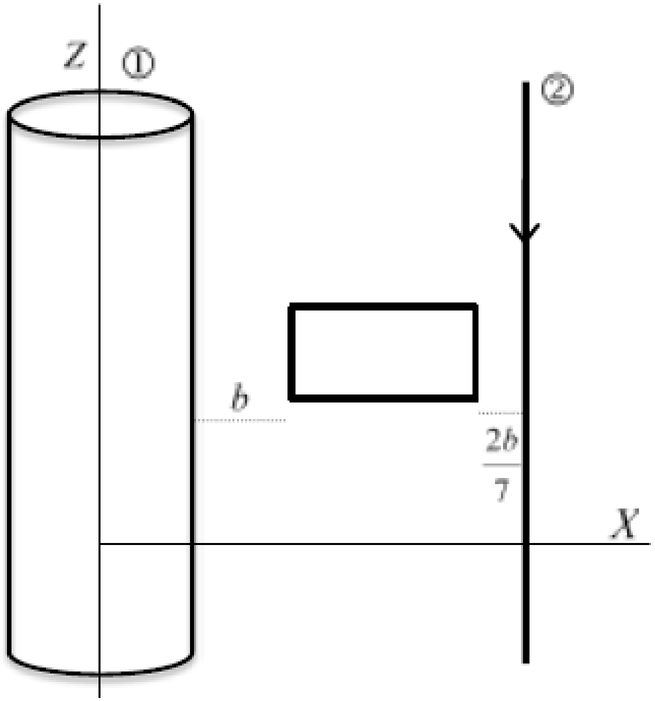
$$\vec{B}_1 \parallel -\vec{B}_2$$

Hoja de fórmulas: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$

Ley de Biot y Savart: $\vec{u}_\varphi \parallel \overrightarrow{dl'} \times \vec{u}_r$

En la región de la espira: $\vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \vec{u}_{\varphi_2} = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \vec{u}_y$

Tema 4 - Problema 12



El campo generado por el cilindro conductor en los puntos exteriores a él, es indistinguible del que crearía un hilo situado sobre su eje y recorrido por la misma corriente:

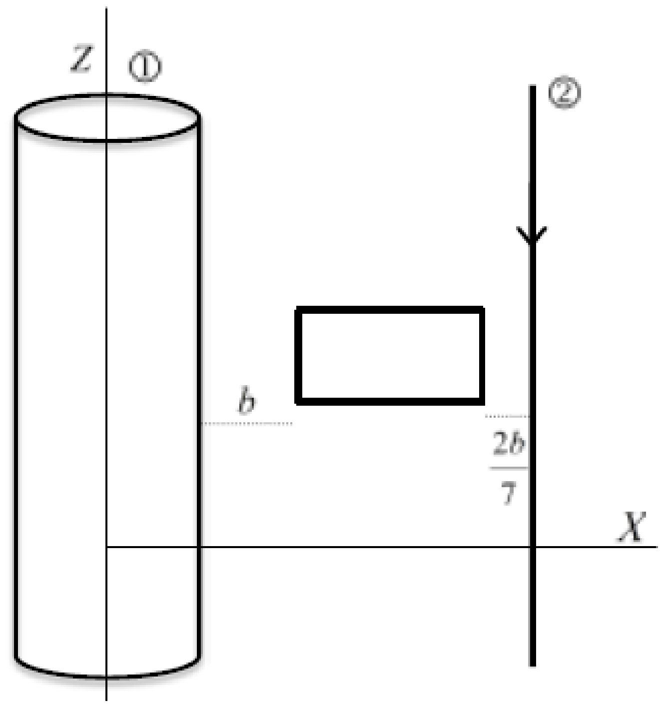
$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\vec{u}_{\varphi_1}$$

Por tanto, en la región que ocupa la espira:

$$\vec{B}_1 \parallel -\vec{B}_2 \rightarrow \vec{u}_{\varphi_1} = -\vec{u}_y \rightarrow \overrightarrow{dl'}_1 \times \vec{u}_{r_1} \parallel -\vec{u}_y$$

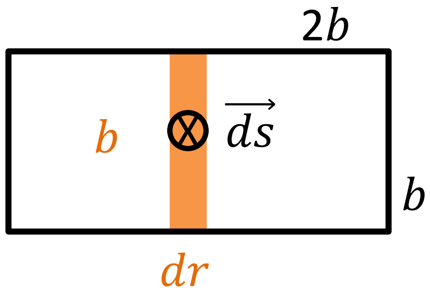
$$\vec{u}_{r_1} = \vec{u}_x \rightarrow \overrightarrow{dl'}_1 \parallel -\vec{u}_z \rightarrow \vec{J}_1 \parallel \overrightarrow{dl'}_1 \parallel -\vec{u}_z$$

Tema 4 - Problema 12



Para calcular las integrales de flujo hay que definir el diferencial de superficie:

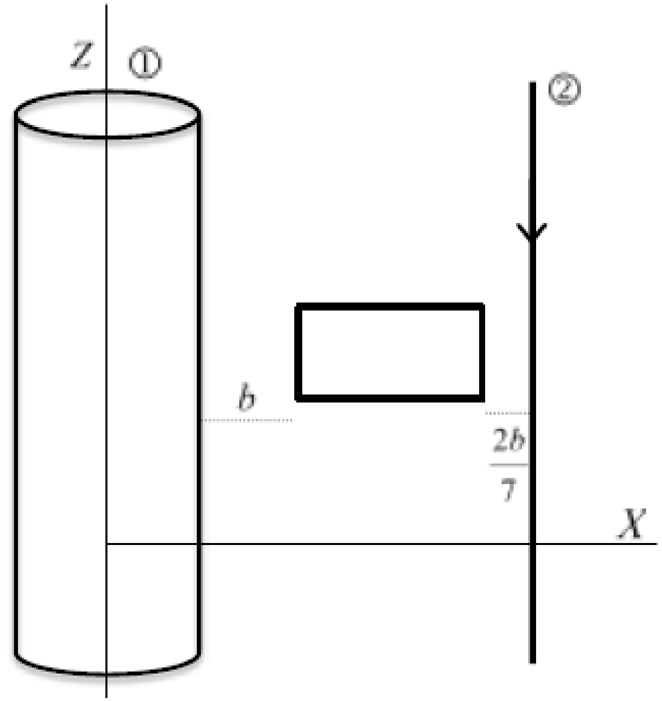
$$\overrightarrow{ds} = bdr\vec{u}_y$$



$$\int_S \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{2b}^{4b} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}(-\vec{u}_y) \cdot bdr_1\vec{u}_y = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\int_{2b}^{4b}\frac{dr_1}{r_1} = -\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} ln2$$

$$\int_S \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{dS} = \int_{\frac{2b}{7}}^{\frac{2b}{7}+2b} \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_y \cdot bdr_2\vec{u}_y = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi}\int_{\frac{2b}{7}}^{\frac{16b}{7}}\frac{dr_2}{r_2} = \frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} ln8$$

Tema 4 - Problema 12



$$\int_S \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{dS} = -\int_S \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{dS}$$

$$-\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi} ln2 = -\frac{\mu_0 I_0 b}{2\pi} ln8$$

$$I_1 ln2 = I_0 ln8 = 3I_0 \ln 2$$

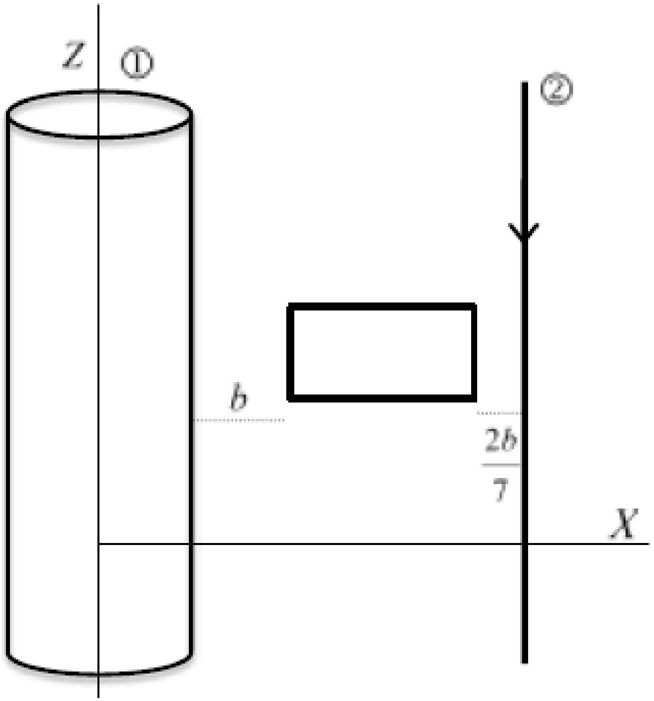
$$I_1 = 3I_0$$

Queda calcular el módulo de la densidad de corriente:

$$\left.\begin{matrix} I_1 \text{uniforme} \rightarrow \vec{j}_1 \text{uniforme} \\ \vec{j}_1 \parallel \overrightarrow{dS}_c \end{matrix}\right\} I_1 = 3I_0 = \int_{S_c} \vec{j}_1 \, \overrightarrow{dS}_c = j_1 S_c = j_1 \pi b^2 \rightarrow j_1 = \frac{3I_0}{\pi b^2}$$

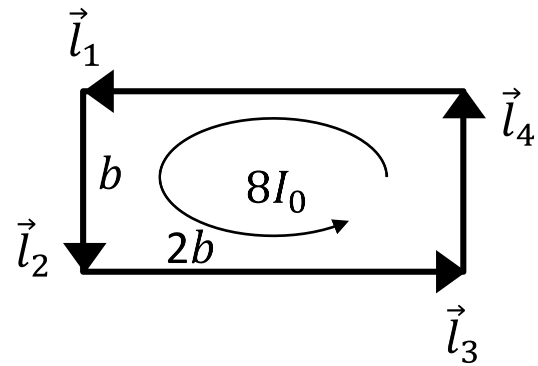
Por tanto: $\boxed{\vec{j}_1 = \frac{3I_0}{\pi b^2}(-\vec{u}_z)}$

Tema 4 - Problema 12



2) Fuerza sobre la espira

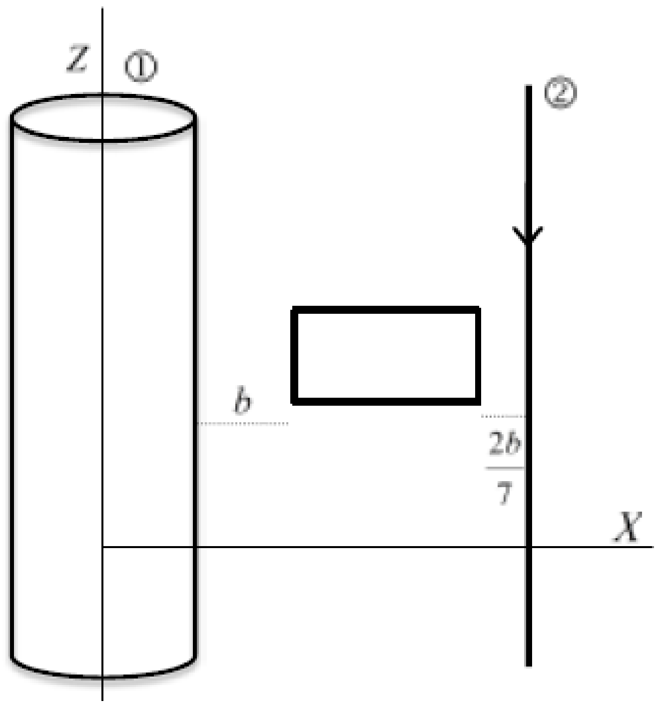
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \qquad \vec{F}_i = I_e \vec{l}_i \times \vec{B}(i)$$

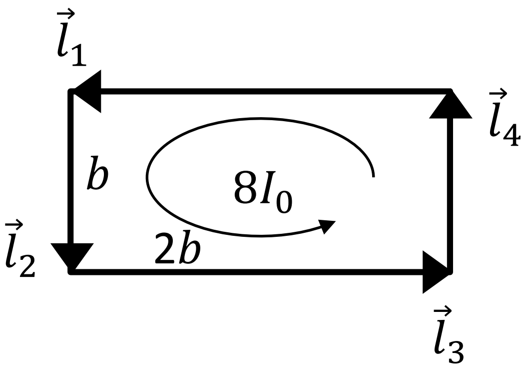


$$\vec{B}(2) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}(-\vec{u}_y) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_y = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[-\frac{3I_0}{2b} + \frac{I_0}{\left(\frac{2b}{7} + 2b\right)}\right]\vec{u}_y = -\frac{17\mu_0 I_0}{32\pi b}\vec{u}_y$$

$$\vec{F}_2 = 8I_0 b(-\vec{u}_z) \times \frac{17\mu_0 I_0}{32\pi b}(-\vec{u}_y) = \frac{17\mu_0 I_0^2}{4\pi}(-\vec{u}_x)$$

Tema 4 - Problema 12

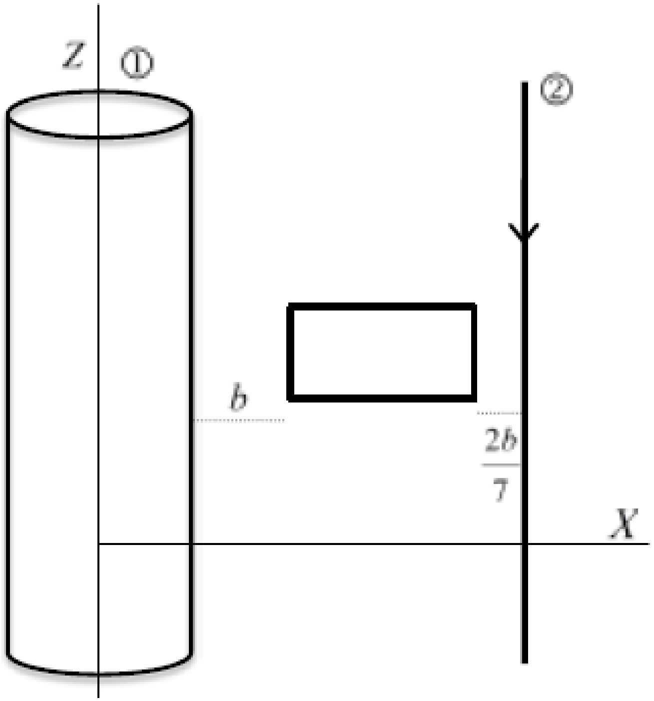


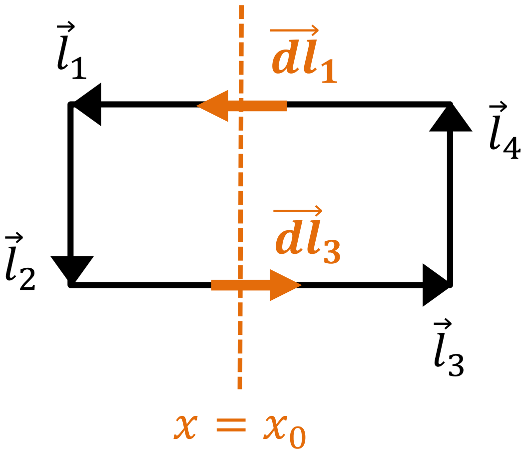


$$\vec{B}(4) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}(-\vec{u}_y) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\vec{u}_y = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[-\frac{3I_0}{4b} + \frac{I_0}{\left(\frac{2b}{7}\right)}\right]\vec{u}_y = \frac{11\mu_0 I_0}{8\pi b}\vec{u}_y$$

$$\vec{F}_4 = 8I_0 b\vec{u}_z \times \frac{11\mu_0 I_0}{8\pi b}\vec{u}_y = \frac{11\mu_0 I_0^2}{\pi}(-\vec{u}_x)$$

Tema 4 - Problema 12





$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{dF_1} = I_e \overrightarrow{dl_1} \times \vec{B}(x_0) \qquad \overrightarrow{dF_3} = I_e \overrightarrow{dl_3} \times \vec{B}(x_0) \\ \overrightarrow{dl_1} = -\overrightarrow{dl_3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_3} = 0 \\ \vec{F}_1 + \vec{F}_3 = 0 \end{array}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \left(\frac{17\mu_0 I_0^2}{4\pi} + \frac{11\mu_0 I_0^2}{\pi}\right)(-\vec{u}_x)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{61\mu_0 I_0^2}{4\pi}(-\vec{u}_x)}$$