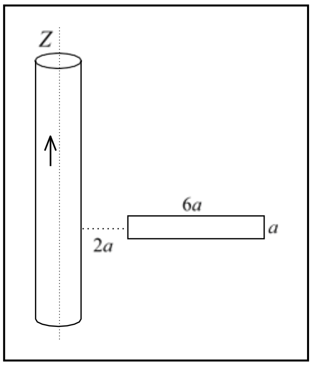
Mayo 2018

1. Un cilindro conductor, de radio $4a$, está recorrido por corriente uniformemente distribuida en su sección. Si, coplanaria con el eje del cilindro, se sitúa una espira rectangular, tal como se indica en la figura, se observa que el flujo magnético que la atraviesa es $\dfrac{2\mu_0 aI}{3\pi}\ln 2$:



Problema 1

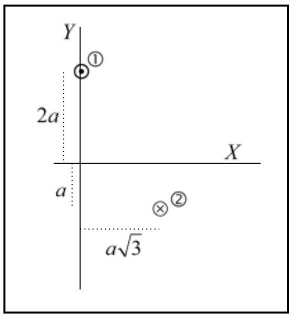
1) Obtener razonadamente la densidad de corriente, $\vec{j}_0$, que recorre el cilindro, así como el campo magnético en puntos de su interior.

A partir de un cierto instante se hace variar la corriente por el cilindro, de forma que $\vec{j} = \vec{j}_0 + \alpha t^2$ $(\alpha > 0)$. Determinar razonadamente:

2) Las unidades de la constante α, expresándolas en función de las unidades fundamentales del Sistema Internacional.
3) La fuerza electromotriz inducida en la espira y el sentido de la corriente correspondiente.

Enero 2018

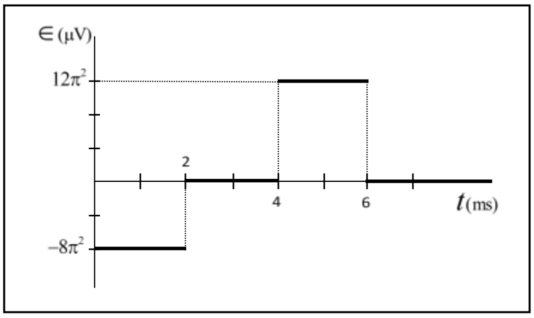
2. Dos hilos rectos e indefinidos, ① y ②, paralelos al eje Z y recorridos por la misma intensidad de corriente, están colocados como indica la figura. En el origen de coordenadas se coloca una pequeña espira de área S $(\sqrt{S} \ll a)$ y resistencia R, observándose que se induce en ella un momento magnético $\vec{m} = b\,\vec{u}_x$, siendo b una constante positiva. Obtener de forma razonada la intensidad que circula por los hilos, suponiendo que en el instante inicial su valor es I_0 y comprobando que el resultado es dimensionalmente correcto.



Problema 2

Diciembre 2017

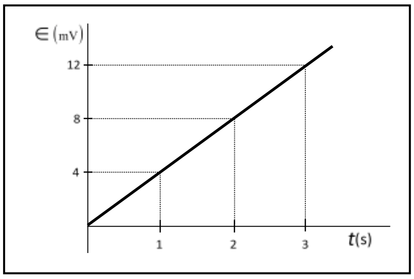
3. Un solenoide muy largo, de 10^3 espiras m^{-1}, está formado por espiras circulares de 2 cm de radio. Coaxial con él se sitúa una espira cuadrada de 10 cm de lado. Si se hace variar la corriente que circula por el solenoide con el tiempo, se observa una fuerza electromotriz inducida en la espira como la que se muestra en la figura. Determinar razonadamente la expresión de la corriente que circula por el solenoide en función del tiempo y representarla gráficamente, sabiendo que en el instante inicial es nula.



Problema 3

Enero 2018

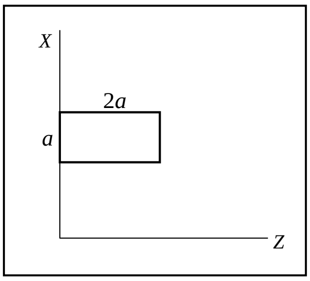
4. Un carrete con 1000 espiras, cada una de área $2\,\mathrm{cm}^2$, se sitúa en el interior de un solenoide indefinido, coaxial con él. El coeficiente de inducción mutua del sistema es $16\pi\,\mathrm{mH}$ y en el carrete se induce una fuerza electromotriz como la indicada en la figura. Determinar razonadamente el número de espiras por unidad de longitud del solenoide y el campo generado por él, sabiendo que dicho campo es nulo para $t = 2\,\mathrm{s}$.



Problema 4

Mayo 2019

5. Una espira conductora rectangular, de lados a y $2a$, está situada inicialmente sobre el plano *XZ*, en la posición indicada en la figura. Si, a partir de esa posición, la espira se desplaza con velocidad $v_0\,\vec{u}_z$ constante y sobre ella actúa en todo momento un campo magnético $\vec{B} = b\,(6a - z)^2 t\,\vec{u}_y$ (b constante positiva), obtener razonadamente la fuerza electromotriz inducida en la espira, así como los instantes de tiempo en los que se anula la correspondiente corriente inducida en ella. Justificar qué dirección tendrá la fuerza que actúa sobre la espira.

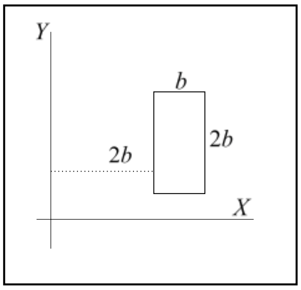


***Problema* 5**

Junio 2018

6. Una espira conductora rectangular, de lados b y $2b$, se sitúa sobre el plano *XY*, tal como indica la figura. Sabiendo que en la región ocupada por la espira está definido un campo magnético $\vec{B} = \frac{c}{x}\,\mathrm{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\left(-\vec{u}_z\right)$, obtener razonadamente:

1) Las unidades de la constante c, expresándolas en función de las unidades fundamentales del Sistema Internacional.
2) La fuerza electromotriz inducida en la espira cuando ha transcurrido un tiempo igual a la tercera parte del periodo del campo magnético, explicando cuál es el sentido de la corriente inducida.
3) Representar gráficamente la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del tiempo, para un periodo completo.

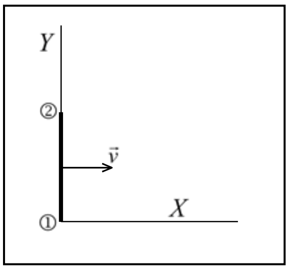


***Problema* 6**

Diciembre 2017

7. Una varilla conductora, de longitud b, se desplaza con velocidad constante, $\vec{v} = v_0\,\vec{u}_x$, en el seno de un campo magnético $\vec{B} = \left(B_0 - ayt^2\right)\left(-\vec{u}_z\right)$, donde a es una constante positiva. La posición de la varilla en el instante inicial es la indicada en la figura. De forma razonada:

1) Obtener las unidades de la constante a, expresándolas en función de las unidades fundamentales del Sistema Internacional.
2) Determinar el instante de tiempo en el que la diferencia de potencial entre sus extremos, $V_2 - V_1$, es nula.



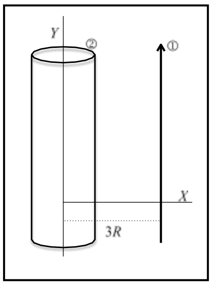
***Problema* 7**

Enero 2019

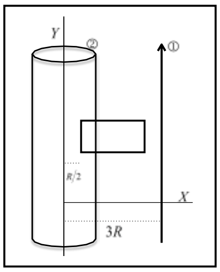
8. Un hilo conductor rectilíneo e indefinido, ①, recorrido por una corriente de intensidad I_0, y un cilindro conductor indefinido, de radio R, ②, coaxial con el eje Y, se sitúan como muestra la figura 1. En la posición indicada, se observa que sobre el hilo es necesario ejercer una fuerza por unidad de longitud $\vec{F}_l = \frac{\mu_0 I_0^2}{\pi R}\,\vec{u}_x$, para que permanezca en equilibrio:

1) Determinar razonadamente la densidad de corriente, $\vec{j}_0$, que circula por el cilindro conductor, suponiendo que está uniformemente distribuida en su sección.

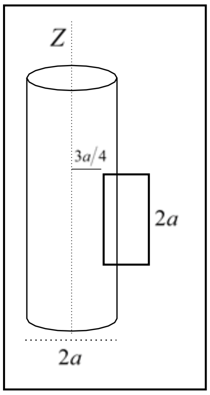
   Se hace variar la densidad de corriente por el cilindro, de forma que $\vec{j} = \vec{j}_0 e^{-\alpha t}$, ($\alpha$ constante positiva) y se coloca una espira conductora rectangular, de lados R y $2R$, como muestra la figura 2:
2) Obtener razonadamente la fuerza electromotriz inducida en la espira, indicando el sentido de la corriente asociada.



***Problema* 8.** *Fig* 1



***Problema* 8.** *Fig* 2



Problema 9

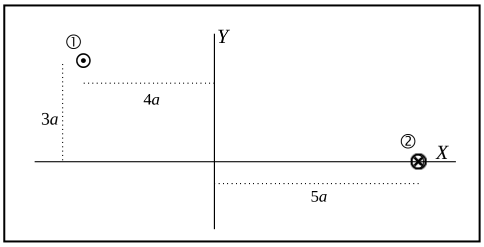
Junio 2019

9. Un hilo de radio *a*, coaxial con el eje *Z*, está recorrido por una densidad de corriente uniformemente distribuida en su sección, de módulo $j_0 e^{-\alpha t}$. Si una espira rectangular, de lados *a* y 2*a* y resistencia *R*, se sitúa coplanaria con el eje *Z*, tal como indica la figura, se observa en ella una corriente inducida que la recorre en sentido antihorario. Determinar razonadamente:

1) El coeficiente de inducción mutua del sistema.
2) La corriente que recorre el hilo, indicando su sentido.
3) La corriente inducida en la espira.

Diciembre 2018

10. Dos hilos conductores rectilíneos e indefinidos, ① y ②, paralelos al eje *Z*, se sitúan como se muestra en la figura. En el origen de coordenadas se coloca una pequeña espira circular conductora, de radio $b\left(b \ll a\right)$, orientada de forma que su superficie es perpendicular al vector unitario $\dfrac{\left(3\vec{u}_x + 4\vec{u}_y\right)}{5}$. Si se hace circular por los hilos corrientes de intensidades $I_1 = 4I_0 \cos\omega t$ e $I_2 = 5I_0 \cos\omega t$, determinar razonadamente la fuerza electromotriz inducida en la espira, indicando su amplitud y fase inicial.



Problema 10

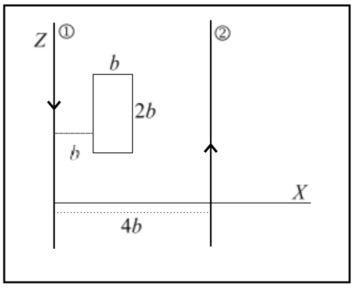
Junio 2017

11. Dos hilos rectos e indefinidos, recorridos por intensidades de corriente $I_1 = I_0$ e $I_2 = 2I_0$, y una espira rectangular de lados b y $2b$, están situados como indica la figura:

1) Calcular el flujo magnético a través de la espira.
2) Determinar razonadamente en qué puntos del plano *XZ* podría situarse un dipolo, de momento magnético $m\vec{u}_x$, para que se encontrase en equilibrio.

Si la corriente que circula por el hilo ② se hace variar con el tiempo de la forma $I_2 = 2I_0 e^{-\alpha t}$:

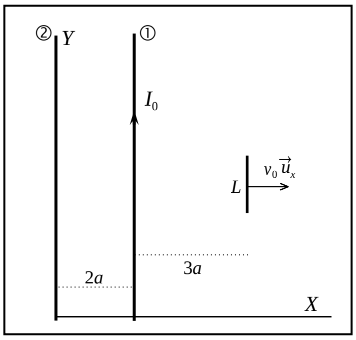
3) Obtener la fuerza electromotriz inducida en la espira.
4) Razonar hacia dónde empezaría a moverse si se la dejase libre.



Problema 11

Julio 2019

12. Dos hilos rectilíneos e indefinidos, ① y ②, están situados sobre el plano *XY*, coincidiendo el hilo ② con el eje *Y*. Una varilla de longitud *L*, coplanaria con ellos, se encuentra inicialmente en la posición que muestra la figura. La varilla se desplaza con velocidad constante $v_0 \vec{u}_x$, observándose que la diferencia de potencial entre sus extremos es nula cuando ha recorrido una distancia *a* desde la posición inicial. Determinar razonadamente la diferencia de potencial entre sus extremos cuando ha recorrido una distancia $7a$ desde el instante inicial.



Problema 12

Mayo 2018

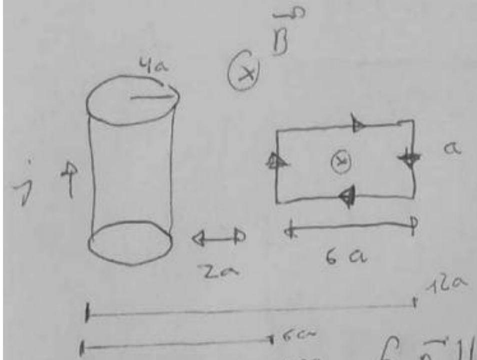
1. Cilindro conductor $r = 4a$

$$\Phi = \frac{2\mu_0 a I}{3\pi} \ln 2$$

1) j_0? $\vec{B}(r<4a)$?

• Un cilindro en su exterior se comporta como un hilo de intensidad I_A

$d\vec{S} = a \cdot dr$



$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \{\vec{B} \parallel d\vec{S}\} = \iint B \cdot dS = \int_{6a}^{12a} B \cdot a \cdot dr =$$

$$= \int_{6a}^{12a} \frac{\mu_0 I_A}{2\pi r} \cdot a \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot I_A a}{2\pi} \ln(2)$$

Igualando: $$\frac{2\mu_0 a I}{3\pi} \ln 2 = \frac{\mu_0 \cdot I_A a}{2\pi} \ln(2)$$

$$I_A = \frac{4}{3} \cdot I \rightarrow j_0 = \frac{I}{S} = \frac{\frac{4}{3} I}{\pi (4a)^2} = \frac{I}{12\pi a^2} \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(r<4a) = \frac{\mu_0 I_r}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$$

$$I_r = j_0 \cdot S = \frac{1}{12\pi a^2} \pi (r)^2$$

$$\vec{B}(r<4a) = \frac{\mu_0 \cdot I r^2}{2\pi r \, 12 a^2} = \frac{\mu_0 I \cdot r}{24\pi a^2} \vec{u}_\varphi$$

b) $j = j_0 + \alpha t^2 \ (\alpha > 0)$

$$[j] = \frac{[I]}{[S]} = A \cdot m^2 = \frac{[q]}{[t]} = C \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$$

$$[\alpha] \cdot [t^2] = C \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$$

$$\left[[\alpha] = \frac{C \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}{s^2} = C \cdot s^{-3} \cdot m^{-2} \right]$$

c) $\mathcal{E}$ $\quad \phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \{ \vec{B} \parallel d\vec{s} \} = \int_{6a}^{12a} \frac{\mu_0 (j_0 + \alpha t^2) \cdot S}{2\pi r} \cdot a \cdot dr$

$$= \frac{\mu_0 (j_0 + \alpha t^2) \cdot S}{2\pi} \cdot a \ln 2$$

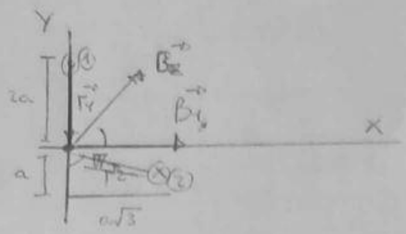
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu_0 j_0 \cdot S}{2\pi} a \ln 2 + \frac{\mu_0 \alpha t^2 S}{2\pi} a \ln 2 \right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 2 \alpha t}{2\pi} a \ln 2 = -\frac{\mu_0 a \cdot \alpha t S}{\pi} \ln 2$$

$$= \{ S = \pi (4a)^2 \} = \left. -\mu_0 \cdot \alpha t a^3 \cdot 16 \ln 2 \right]$$

$\mathcal{E} < 0$ Por lo que hemos obtenido mal el sentido de la corriente y el de $d\vec{s}$ que saldrá del plano y la corriente por la espira será antihoraria.

2.



$S << R$; $I_1 = I_2 = I(t)$

$I(t=0) = I_0$

Espira en plano YZ; $I_i = \frac{b}{S}$

$I_i = \frac{\varepsilon}{R} \rightarrow \varepsilon = I_i \cdot R = \frac{bR}{S}$

$\vec{m} = b\,\vec{u_x}$

$\vec{m_i} = I_i \vec{S_e} = I_i S \vec{u_n} \equiv b\,\vec{u_x}$

$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$; $\Phi = \iint \vec{B_T} \cdot d\vec{S_e}$

$S << \vec{B_T}$ (uniforme en la espira) ; $\Phi = \vec{B_T} \cdot \vec{S_e}$

$\vec{B_T}(0,0) = \vec{B_1}(0,0) + \vec{B_2}(0,0)$

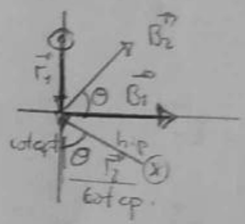
$\vec{B}_{hilo} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \vec{u_\varphi}$; $d\vec{B} = I d\vec{l} \times u_r$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{r_Y} = 2a \\ \vec{r_2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a \text{ (Componente X e Y).} \end{array} \right\}$

$\vec{B_T}(0,0) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}$

$I_1 = I_2 = I.$

$\vec{B_T}(0,0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, 2a} \vec{u_x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\, 2a} (\cos\theta\, \vec{u_x} + \operatorname{sen}\theta\, \vec{u_y}) =$



$= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}} \\ \cos\theta = \frac{\text{cat cont}}{\text{hip}} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$

$\vec{B_T}(0,0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, 2a} \vec{u_x} + \frac{\mu_0 I}{2\pi\, 2a} \left(\frac{1}{2} \vec{u_x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u_y} \right) =$

$= \frac{3\mu_0 I}{8\pi a} \vec{u_x} + \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{8\pi a} \vec{u_y}$

$\left\{ \frac{d\Phi}{dt} = -\varepsilon \right\}$ $\left\{ \begin{array}{l} I = \frac{\varepsilon}{R} \\ \varepsilon = \frac{bR}{S} \end{array} \right\}$

$\Phi = \vec{B_T} \cdot \vec{S_e} = \Phi = \vec{B_T} \cdot S \vec{u_x} = \frac{3\mu_0 I}{8\pi a} S$

$\longrightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 S}{8\pi a} \frac{dI}{dt} = -\varepsilon = -\frac{bR}{S}$

integro & $dI = -\frac{bR}{S} \frac{8\pi a}{3\mu_0 S} dt$

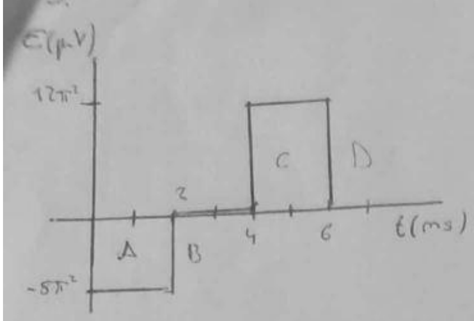
$\frac{[a][b][R]}{[\mu_0][S]^2}[t$

$\int_{I_0}^{I} dI = -\frac{bR}{S} \frac{8\pi a}{3\mu_0 S} \int_0^t dt \rightarrow \boxed{I = I_0 - \frac{8\pi a b R}{3\mu_0 S^2} t}$

$[a] = m$ $[R] = \cancel{ohm} = \frac{[V]}{[I]}$

$I = \frac{V}{R}$ $[\mu_0] = H m^{-1}$ $[S] = m^2$ $[t] = s$

3.



Supongo $I_s(t)$

$R = 2\,cm \qquad n_s = 10^3\,m^{-1}$

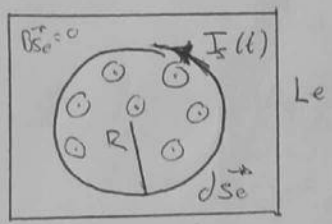
$L_e = 10\,cm$

$I_s = f(t) \; : \; I_s(t=0) = 0$

$\varepsilon = -\frac{d\Phi_e}{dt} \quad \Phi_e = \iint \vec{B_s} \cdot d\vec{S_e}$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B_s} = \mu_0 n_s I_s(t)\, \vec{u}_{eje} \\ d\vec{S_e} \parallel \vec{B_s} \text{ para } \Phi_e > 0 \end{array} \right\}$ supongo.

$\Phi_e = \iint_{esp} \mu_0 n_s I_s(t) \cdot dS_e \; : \; \boxed{\vec{B_s}(r > R) = 0}$



$\Phi_e = \mu_0 n_s I_s(t)\, S_s = \mu_0 n_s I_s(t)\, \pi R^2$

$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n_s I_s(t) \pi R^2\right) = -\mu_0 n_s \pi R^2 \frac{dI_s(t)}{dt}$

$\varepsilon = -10^3\, 4\pi \cdot 10^{-7}\, \pi (2 \cdot 10^{-2})^2 \frac{dI_s}{dt} = -0{,}16 \cdot 10^{-6} \pi^2 \frac{dI_s}{dt}$

$dI_s = -\frac{\varepsilon}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2}\, dt \rightarrow \int_{I_0}^{I_s} dI_s = -\int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2}\, dt$

$I_s - I_0 = -\int_{t_0}^{t} \frac{\varepsilon}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2}\, dt \quad \{ \varepsilon \rightarrow \text{definida a tramos} \rightarrow \varepsilon_i = cte \}$

$I_{si} = I_{oi} - \frac{\varepsilon_i}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2} \int_{t_0}^{t} dt \; ; \; \underset{\text{Tramo}}{I_{si}} = I_{oi} - \frac{\varepsilon_i}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2} (t - t_{oi})$

Unidades
$[t] = s$
$[\varepsilon] = V$

$(0 < t < 2ms) \rightarrow t_{oA} = 0 \; ; \; I_{oA} = 0$

$I_{sA} = \cancel{I_{oA}}^{\,0} - \frac{\varepsilon_A}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2} (t - \cancel{t_{oA}}^{\,0})$

$I_{sA} = -\left(\frac{-8\pi^2 \cdot 10^{-6}}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2}\right) t \cdot \underbrace{10^{-3}}_{ms} \rightarrow \boxed{I_{sA} = \frac{t}{20}\, A \; ; \; [t] = ms}$

$\boxed{I_{sA}(t = 2ms) = \frac{1}{10}\, A = I_{oB}}$

Rdo. final.

$I_{SB} = \frac{1}{10}$ A ; $\varepsilon = 0$ $I_{SB} =$ cte.

$(4ms < t < 6ms)$ $I_{0C} = I_{SB} = \frac{1}{10}$ A. $t_{0C} = 4ms$

$$I_{SC} = I_{0C} - \frac{\varepsilon_C}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2}(t - t_{0C})$$

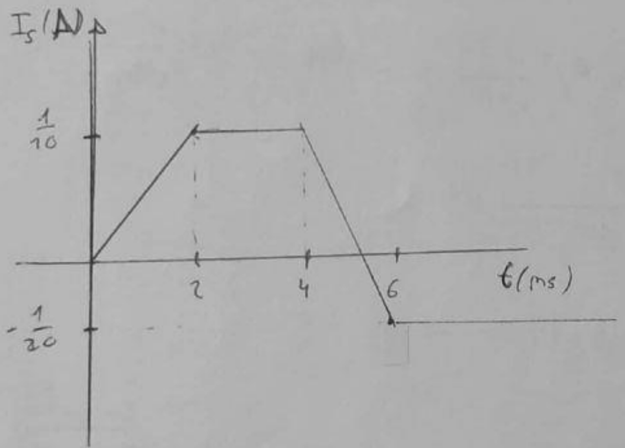
$$I_{SC} = \frac{1}{10} - \frac{12\pi^2 \cdot 10^{-6}}{0{,}16 \cdot 10^{-6}\pi^2}(t-4)\cdot 10^{-3}$$

$$\boxed{I_{SC} = \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{40}t\right) A \;;\; [t] = ms}$$

Punto final $I_{SC}(t = 6ms) = \left(\frac{2}{5} - \frac{3 \cdot 6}{40}\right) = -\frac{1}{20}$ A.

$$\boxed{I_{SC} = I_{SD} = -\frac{1}{20}\text{ A.}}$$

Gráfica.



$(0 < t < 2ms) \rightarrow I_{SA} = \frac{t}{20}$ A.

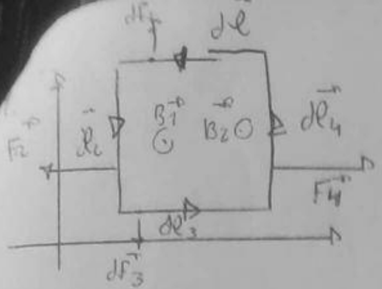
$t = 2ms \Rightarrow I_{SB} = \frac{1}{10}$ A.

$(2ms < t < 4ms)$; $I_{SB} = \frac{1}{10}$ A.

$(4ms < t < 6ms)$; $I_{SC} = \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{40}t\right)$ A

$t = 6ms \rightarrow I_{SD} = -\frac{1}{20}$ A.

4.



$\vec{F_T} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$; $d\vec{F_i} = I_c \cdot d\vec{l_i} \times \vec{B_T}$

$d\vec{F_1}(x_0) = I_e \cdot d\vec{l_1} \times \vec{B_T}(x_c)(-\vec{u_y})$

$d\vec{F_3}(x_0) = I_c \cdot d\vec{l_3} \times \vec{B_T}(x_0)(-\vec{u_y})$

$d\vec{l_1} = dx(-\vec{u_x})$; $d\vec{l_3} = dx\,\vec{u_x} \rightarrow d\vec{l_1} = -d\vec{l_3}$

$d\vec{F_1}(x_0) = -d\vec{F_3}(x_0)$

Se cumple para todos los pares $\rightarrow \vec{F_1} = -\vec{F_3}$

$d\vec{l_2} = dz(-\vec{u_z})$; $d\vec{l_4} = dz\,\vec{u_z}$

$\vec{F_T} = \vec{F_2} + \vec{F_4}$; $\vec{F_i} = I_e \underbrace{\int d\vec{l_i}}_{L_i} \times \vec{B_T}$

$\vec{B_T}$ en 2 y en 4 es Uniforme.

$\vec{F_2} = I_e \vec{L_2} \times \vec{B_T}(x = b)$; $\vec{F_4} = I_e \vec{L_4} \times \vec{B_T}(x = 2b)$

$\vec{L_2} = -2b\,\vec{u_z}$; $\vec{L_4} = 2b\,\vec{u_z}$; $B_T \parallel (-\vec{u_y})$

$\vec{F_2} \parallel -\vec{u_x}$; $\vec{F_4} \parallel \vec{u_x}$

$B_{T_2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}$ $\left\{ \begin{array}{l} I_1 = I_0 \\ I_2 = 2I_0 e^{-\alpha t} \end{array} \right\}$

Campo en Lado 2. $r_1 = b$ y $r_2 = 3b$

$B_{T_2} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi b} + \frac{\mu_0 2 I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi 3b} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}\left(2 + \frac{4}{3} e^{-\alpha t}\right)$

$t \rightarrow 0 \rightarrow \left[B_{T_2} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}\left(2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{5\mu_0 I_0}{6\pi b} \right]$

Campo en Lado 4 $\quad B_{T_4} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}$

$r_1 = 2b$ y $r_2 = 2b$.

$B_{T_4} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi 2b} + \frac{\mu_0 2 I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi 2b} \right) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}\left(1 + 2e^{-\alpha t}\right)$

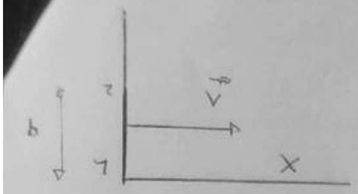
$t \rightarrow 0 \quad B_{T_4} = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}(1 + 2) = \frac{3\mu_0 I_0}{4\pi b}$

$B_{T_2} > B_{T_4} \rightarrow F_2 > F_4 \rightarrow \vec{F_T} \parallel \vec{F_2} \parallel -\vec{u_x}$

La fuerza total cuando la espira empieza a moverse va ir en la dirección $-\vec{u_x}$

La espira comenzará a moverse hacia el hilo 1, se aleja del hilo 2.

7.



1. $\vec{V} = V_0 \vec{u_x}$

Unidades:

$\vec{B} = (B_0 - ayt^2)(-\vec{u_x}) \rightarrow [B] = [a][y][t]^2$

$[a] = \dfrac{[B]}{[y][t]^2}$ $\left\{ \begin{array}{l} [y] = m \\ [t] = s \end{array} \right\}$

$\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B} \rightarrow [F] = [q][v][B]$

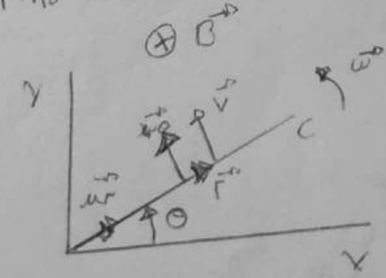
$[B] = \dfrac{[F]}{[q][v]} = T$ $\left\{ \begin{array}{l} [F] = N \quad [v] = m/s \\ [q] = C \end{array} \right\}$

$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow [F] = [m][a] = \dfrac{kg \cdot m}{s^2} \\ I = \dfrac{dq}{dt} \rightarrow [q] = [I][t] = A \cdot s \end{array}\right\}$

$[B] = \dfrac{[F]}{[q][v]} = \dfrac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{As \cdot m/s} = \dfrac{kg\, m \cdot s}{s^2 \cdot A s m} = \dfrac{kg}{s^2 \cdot A}$

$\boxed{[a] = \dfrac{[B]}{[y][t]^2} = \dfrac{\frac{kg}{s^2 \cdot A}}{m \cdot s^2} = \dfrac{kg}{A m \cdot s^4}}$

Varilla conductora.



$\omega = cte$

$\vec{B} = B_0(-\vec{u_z})$

$V_C - V_A = \int_A^C (\vec{v} \times \vec{B}) \, d\vec{l}$

$v = \omega \cdot r \rightarrow \vec{v} = \omega \cdot r \vec{u_\theta}$

$\vec{V} \times \vec{B} = vB \operatorname{sen}\theta (-\vec{u_r})$

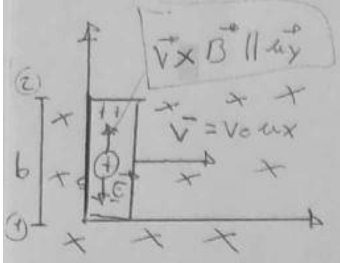
$d\vec{l} = dr \vec{u_r} + r d\theta \vec{u_\theta}$

$(\vec{v} \times \vec{B}) \, d\vec{l} = -vB\, dr$

2. Conductor, tiene carga libre qe experimenta una fuerza, al moverse dentro del campo magnético, produce una separación de carga y esto separación genera a la vez un campo eléctrico

Y una vez alcanzado el equilibrio la suma de las fuerzas qe experimentan las cargas tiene qe ser igual a 0.

$$\vec{B}(t=0) \parallel -\vec{u_z} \qquad \begin{cases} \vec{F_B} = q\vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{F_E} = q\vec{E} \end{cases}$$



$$\vec{F_E} + \vec{F_B} = 0 \;; \quad q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} =$$

$$= \int_1^2 \left(v_0 \vec{u_x} \times (B_0 - ayt^2) \cdot (-\vec{u_z}) \right) \cdot d\vec{l}$$

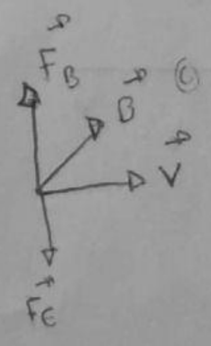
$$= \int_1^2 v_0 (B_0 - ayt^2) \vec{u_y} \cdot d\vec{l} = \int_0^b v_0 (B_0 - ayt^2) \, dy =$$

$$= \int_0^b v_0 B_0 \, dy - \int_0^b v_0 a y t^2 \, dy \equiv v_0 B_0 (b) - v_0 a t^2 \int_0^b y \, dy =$$

$$= v_0 B_0 b - v_0 a t^2 \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^b = v_0 B_0 b - \frac{1}{2} v_0 a t^2 b^2 \equiv 0$$

$$v_0 B_0 b - \frac{1}{2} v_0 a t^2 b^2 = 0 \;; \quad \cancel{v_0} B_0 b = \frac{1}{2} v_0 a t^2 b^2$$

$$t^2 = \frac{2 B_0}{a b} \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2 B_0}{a b}}$$



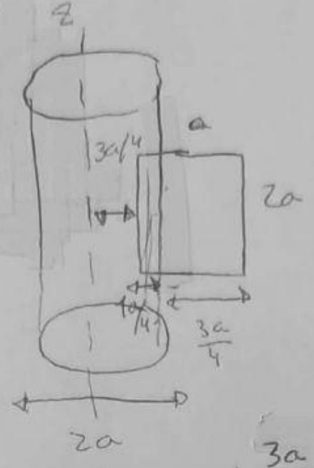
9. Junio 2019.

Espira rectangular a y 2a   Resistencia = R

Hilo r = a

$|\vec{j}| = j_0 e^{-\alpha t}$

Sentido descendente corriente hilo



$\frac{3a}{4} + a = \frac{7a}{4}$

a) M? $\Phi = M \cdot I$ $d\vec{S} = 2a \cdot dr$

$$\phi = \iint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint \vec{B}_{int} + \iint \vec{B}_{ext} = \int_{\frac{3a}{4}}^{a} \vec{B}_{int} + \int_{a}^{\frac{7a}{4}} \vec{B}_{ex}$$

$\vec{B}_{int}$; Teorema de Ampere:

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot J_{enl}$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \{\vec{B} \parallel d\vec{l}\} = \int B\cdot dl = \{B \text{ uniforme}\} = B\cdot \oint_C dl = B\cdot 2\pi r$$

$$\mu_0 \cdot J_{enl} = \mu_0 \cdot j\, S_{enl} = \mu_0 \cdot j \cdot \pi \cdot r^2 \quad (r<a)$$

$$(r>0)\ J_{enl} = j\cdot S_{enl} = j\pi a^2$$

$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2 \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi a^2$$

$$\vec{B}(r<a) = \frac{\mu_0 j r}{2}\vec{u}_\varphi \qquad \vec{B}(r>a) = \frac{\mu_0 j a^2}{2r}\vec{u}_\varphi$$

$$\phi_{int} = \int_{\frac{3a}{4}}^{a} \frac{\mu_0 j r}{2}\, 2a\,dr = \mu_0 j a \cdot \frac{7}{32} a^2 = \mu_0 j \cdot a^3 \cdot \frac{7}{32}$$

$$\phi_{ext} = \int_{a}^{\frac{7}{4}a} \frac{\mu_0 j a^2}{2r}\, 2a\,dr = \mu_0 j a^3 \cdot \ln\left(\frac{7}{4}\right)$$

$$\phi = \mu_0 j a^3 \left(\frac{7}{32} + \ln\left(\frac{7}{4}\right)\right) = M\cdot I = M\cdot j\cdot S$$

$$\phi_B = \mu_0 \frac{I}{\pi a^2} a^3 \left(\ln\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{7}{32} \right)$$

$$M = \frac{\mu_0 \, a \, \left(\ln\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{7}{32} \right)}{\pi}$$

b) $$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\mu_0 a^3 j_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{7}{32} + \ln\left(\frac{7}{4}\right) \right) \right] =$$

$$= \mu_0 a^3 j_0 \gamma e^{-\gamma t} \left(\frac{7}{32} + \ln\left(\frac{7}{4}\right) \right) > 0$$

$\mathcal{E}$ se opone, por lo que hemos cogido bien el sentido de la corriente y del campo magnético.

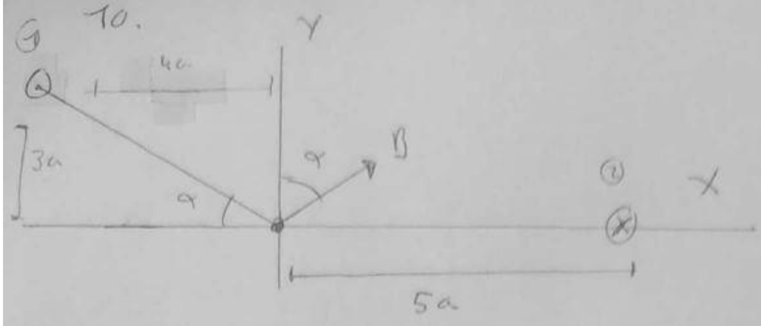
$$I = j \cdot S = j_0 e^{-\gamma t} \pi a^2 \rightarrow \text{Sentido descendente.}$$

c) $$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}_{ind}}{R} = \frac{\mu_0 a^3 \cdot j_0 \cdot a \cdot e^{-\gamma t} \left(\frac{7}{32} + \ln\left(\frac{7}{4}\right) \right)}{R}$$

Diciembro 2018

$b \, (b << a) \quad \bar{S} \perp \left(\frac{3\vec{u_x} + 4\vec{u_y}}{5} \right) (0,0)$

10.



$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5a$

$\text{sen}\, \alpha = \frac{3}{5} \quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\bar{B}(0,0) = \frac{\mu_0 4 J_0 \cos(wt)}{2\pi 5a} \left(\frac{3}{5}\bar{u_x} + \frac{4}{5}\bar{u_y} \right) = \frac{\mu_0 5 J_0 \cos(wt)}{2\pi 5a} \vec{u_y} =$

$= \frac{\mu_0 J_0 \cos(wt)}{2\pi 25a} (12\bar{u_x} + 41\bar{u_y})$

$\phi_{(0,0)} = \iint \vec{B} \cdot d\bar{S} = B \cdot \bar{S} = B \cdot S \, \bar{u_S} = \frac{\mu_0 J_0 \cos(wt)}{30\pi a} (12\vec{u_x} + 41\bar{u_y})$

$\cdot \pi b^2 \cdot \left(\frac{3\bar{u_x} + 4\bar{u_y}}{5} \right)$

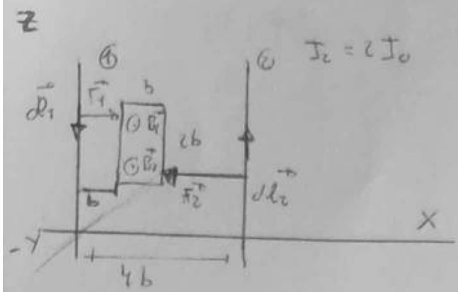
$\phi_B = \frac{\mu_0 \cdot J_0 \cos(wt)}{50\pi a} 40\pi b^2 = \frac{4\mu_0 \cdot J_0 \cos(wt)}{5a}$

$\left[\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{w \cdot 4\mu_0 J_0 \text{sen}(wt)}{5a} \right] \not\subset \varepsilon = 0$

11.

$I_1 = I_0$

$I_2 = 2I_0$



$$\Phi_m = \iint_{esp} \vec{B}(t)\cdot d\vec{S} = \vec{B}(t)\iint_{esp} d\vec{S} = \vec{B}(t)\cdot \vec{S}$$

$$\Phi_T = \iint (\vec{B_1}+\vec{B_2})\cdot d\vec{S} = \iint \vec{B_1}\cdot d\vec{S} + \iint \vec{B_2}\cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\vec{B}_{hilo} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\varphi}$$

Ley de Biot-Savart.

$$d\vec{B} = I d\vec{l} \times \vec{u_r}$$

Plano de la Espira:

$$d\vec{B_1} \parallel I_1\cdot d\vec{l_1}\times \vec{u_{r_1}} \parallel (-\vec{u_z})\times \vec{u_x} \parallel (-\vec{u_y})$$

$$d\vec{B_2} \parallel I_2\cdot d\vec{l_2}\times \vec{u_{r_2}} \parallel \vec{u_z}\times(-\vec{u_x}) \parallel (-\vec{u_y})$$

$$\vec{B_1}\parallel\vec{B_2}\parallel -\vec{u_y}$$

Elegimos: $d\vec{S}\parallel -\vec{u_y} \rightarrow d\vec{S} = dr\,dz\,(-\vec{u_y})$

$$\Phi_T = \iint \vec{B_1}\cdot d\vec{S} + \iint \vec{B_2}\,d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}\,dr_1\cdot dz + \iint \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r^2}\,dr_2\,dz =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{z_0}^{z_0+2b} dz\int_b^{2b}\frac{dr_1}{r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r^2}\int_{z_0}^{z_0+2b} dz\int_{2b}^{3b}\frac{dr_2}{r_2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\cdot z\Big|_{z_0}^{z_0+2b}\cdot \ln(r_1)\Big|_b^{2b} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r^2}\, z\Big|_{z_0}^{z_0+2b}\ln(r_2)\Big|_{2b}^{3b} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\,2b\cdot\ln\left(\frac{2b}{b}\right) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r^2}\,2b\cdot\ln\left(\frac{3b}{2b}\right) =$$

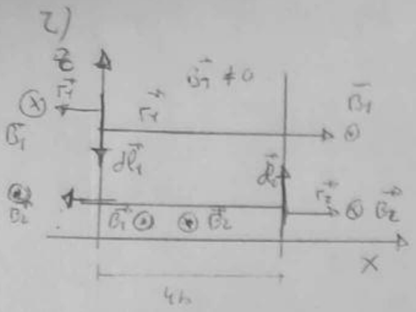
$$= \frac{\mu_0 I_1}{\pi}\,b\,\ln(2) + \frac{\mu_0 I_2}{\pi r^2}\,b\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\left\{\begin{matrix} I_1 = I_0 \\ I_2 = 2I_0\end{matrix}\right\}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 I_0}{\pi}\,b\ln(2) + \frac{\mu_0\, 2 I_0}{\pi r^2}\,b\cdot\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\mu_0 I_0\, b}{\pi}\left[\ln(2) + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\Phi = \frac{\mu_0 b I_0}{\pi}\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$$

2)



Equilibrio:

$\vec{\tau}_T = \vec{m} \times \vec{B}_T = 0 \rightarrow m B_T \operatorname{sen}\theta = 0$

$\vec{m} \parallel \vec{u}_x$; $\vec{B}_T \parallel \pm \vec{u}_y \rightarrow \operatorname{sen}\theta \neq 0$

$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0 \rightarrow \vec{B}_1 = -\vec{B}_2 \rightarrow \begin{cases} \vec{B}_1 \uparrow\downarrow \vec{B}_2 \\ B_1 = B_2 \end{cases}$

$(x<0) \begin{cases} \vec{B}_1 \parallel \vec{u}_y \\ \vec{B}_2 \parallel -\vec{u}_y \end{cases}$

$(x>4b) \begin{cases} \vec{B}_1 \parallel -\vec{u}_y \\ \vec{B}_2 \parallel \vec{u}_y \end{cases}$

$$B_1 = B_2 \rightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \rightarrow \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 2 I_0}{2\pi r_2}$$

$\rightarrow r_2 = 2r_1$ sólo posible en $x<0$

$x<0 \rightarrow r_1 = -x$; $r_2 = 4b - x \rightarrow 4b - x = -2x \rightarrow x = -4b$

$\left[\vec{m}\right.$ en equilibrio en la recta $x = -4b$ del plano $XZ\left.\right]$

3.

$I_1 = cte$

$I_2 = 2 I_0 e^{-at}$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_T}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 b}{\pi}\left[I_1 \ln 2 + I_2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 b}{\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \frac{dI_2}{dt} \quad ; \quad \frac{dI_2}{dt} = -\alpha\, 2 I_0 e^{-\alpha t}$$

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{2\mu_0 b I_0 \alpha}{\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\alpha t}}$$

4. $\mathcal{E} > 0 \rightarrow I_i \equiv I_e > 0$

El sentido de la corriente es el dado por $\vec{dS} \parallel -\vec{u}_y$

Sentido antihorario.

Problema 1

1) $\vec{j}_0 = \dfrac{I}{12\pi a^2}\vec{u}_z$; $\vec{B}\,(r<4a) = \dfrac{\mu_0 I r}{24\pi a^2}\vec{u}_\varphi$

2) $[\alpha] = \mathrm{Am^{-2}s^{-2}}$

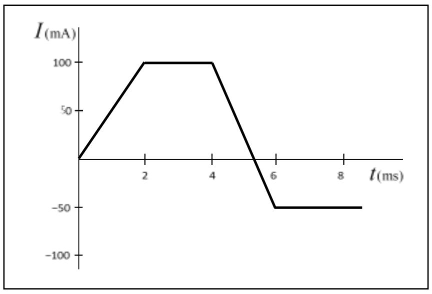
3) $\in = 16\,\mu_0\,\alpha\, a^3 t \ln 2$, sentido antihorario.

Problema 2

$$I = I_0 - \frac{8\pi aRb}{3\mu_0 S^2}t$$

Problema 3

$$I = \begin{cases} \dfrac{t}{20}\ \text{A}\ (\text{con } t \text{ en ms}),\ \text{para } 0 < t < 2\text{ms} \\ \dfrac{1}{10}\ \text{A, para } 2\text{ms} < t < 4\text{ms} \\ \left(\dfrac{2}{5} - \dfrac{3t}{40}\right)\ \text{A}\ (\text{con } t \text{ en ms}),\ \text{para } 4\text{ms} < t < 6\text{ms} \\ -\dfrac{1}{20}\ \text{A, para } t > 6\text{ms} \end{cases}$$



Problema 4

$n = 2\cdot 10^5$ espiras $\mathrm{m^{-1}}$; $\vec{B}_s = \left(40 - 10t^2\right)\vec{u}_{eje}$ mT (t en s)

Problema 5

$\in = 2ba^2 t\left(3v_0 t - 10a\right)$

$I_{ind} = 0$, para $t = 0$ y $t = \dfrac{10a}{3v_0}$

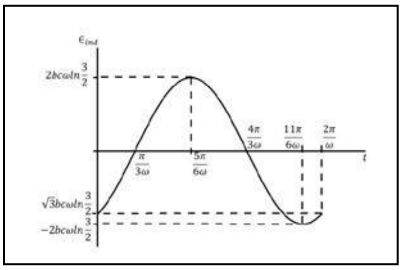
$F \cdot \pm \vec{u}_z$

Problema 6

1) $[c] = \mathrm{kg\ m\,A^{-1}s^{-2}}$

2) $\in = \sqrt{3}\, bc\omega \ln\dfrac{3}{2}$

3)



Problema 7

1) a se mide en $\mathrm{kg\,m^{-1}A^{-1}s^{-4}}$.

2) $t = \sqrt{\dfrac{2B_0}{ab}}$

Problema 8

1) $\vec{j}_0 = \dfrac{6I_0}{\pi R^2}\vec{u}_y$

2) $\in = \dfrac{3\mu_0 R I_0 \alpha}{\pi}\left(\dfrac{3}{8} + \ln\dfrac{5}{2}\right)e^{-\alpha t}$, sentido horario.

Problema 9

1) $M = \dfrac{\mu_0 a}{\pi}\left(\dfrac{7}{32} + \ln\dfrac{7}{4}\right)$

2) $I = j_0 \pi a^2 e^{-\alpha t}$, $j \cdot - \vec{u}_z$

3) $I_{ind} = \dfrac{\alpha a^3 \mu_0 j_0 e^{-\alpha t}}{R}\left(\dfrac{7}{32} + \ln\dfrac{7}{4}\right)$

Problema 10

$\in = \dfrac{4\ \mu_0 I_0 \omega b^2}{5a}\operatorname{sen}\omega t$

Problema 11

1) $\Phi = \dfrac{\mu_0 b I_0}{\pi}\ln\dfrac{9}{2}$

2) $(-4b, 0, z)$

3) $\in = \dfrac{2\mu_0 b I_0 \alpha}{\pi}e^{-\alpha t}\ln\dfrac{3}{2}$. Sentido antihorario.

4) Se movería hacia el hilo ①.

Problema 12

$\Delta V = \dfrac{\mu_0 I_0 v_0 L}{80\pi a}$