Práctica 2: Análisis Espectral

23 de noviembre de 2021

1. Objetivos

El objetivo de esta práctica es revisar el funcionamiento de la DFT mediante una de sus principales aplicaciones: el análisis espectral. En concreto, se persiguen los siguientes objetivos específicos:

1.1. Revisión de la relación entre la transformada discreta de Fourier (DFT) y la transformada de Fourier de secuencias discretas.

1.2. Elección del orden de la DFT para lograr una buena caracterización espectral de la señal.

1.3. Representación y análisis de los efectos del enventanado: resolución y fugas espectrales.

1.4. Análisis espectral de una señal real

2. Actividades Previas

2.1. Revisar las funciones de Matlab que permiten generar los diferentes tipos de ventanas: rectwin, triang, bartlett, hann, hamming y blackman.

2.2. Revisar otras funciones necesarias para el desarrollo de la práctica: `fft`, max, `rat` y lcm.

2.3. Revisar las distintas funciones ventana y sus propiedades espectrales.

2.4. Revisar el efecto del enventanado sobre una señal discreta, tanto en el dominio temporal como frecuencial.

2.5. Revisar la relación entre la DFT y la transformada de Fourier de secuencias discretas:

$$X[k] = X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi k}{N}}, \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

2.6. Calcular de manera teórica los valores de $N_{\text{mín}}$ y M pedidos en el Ejercicio 3.1.2.

2.7. Calcular de manera teórica el valor de M pedido en el Ejercicio 3.2.1.

2.8. Calcular de manera teórica el valor de M pedido en el Ejercicio 4.1.1.

3. Análisis de una secuencia sinusoidal discreta

En esta sección se pretende realizar una introducción al análisis espectral de secuencias discretas mediante la DFT empleando una de las señales más sencillas y, sin embargo, útiles: una sinusoide. Para ello, se dispone de la siguiente secuencia discreta:

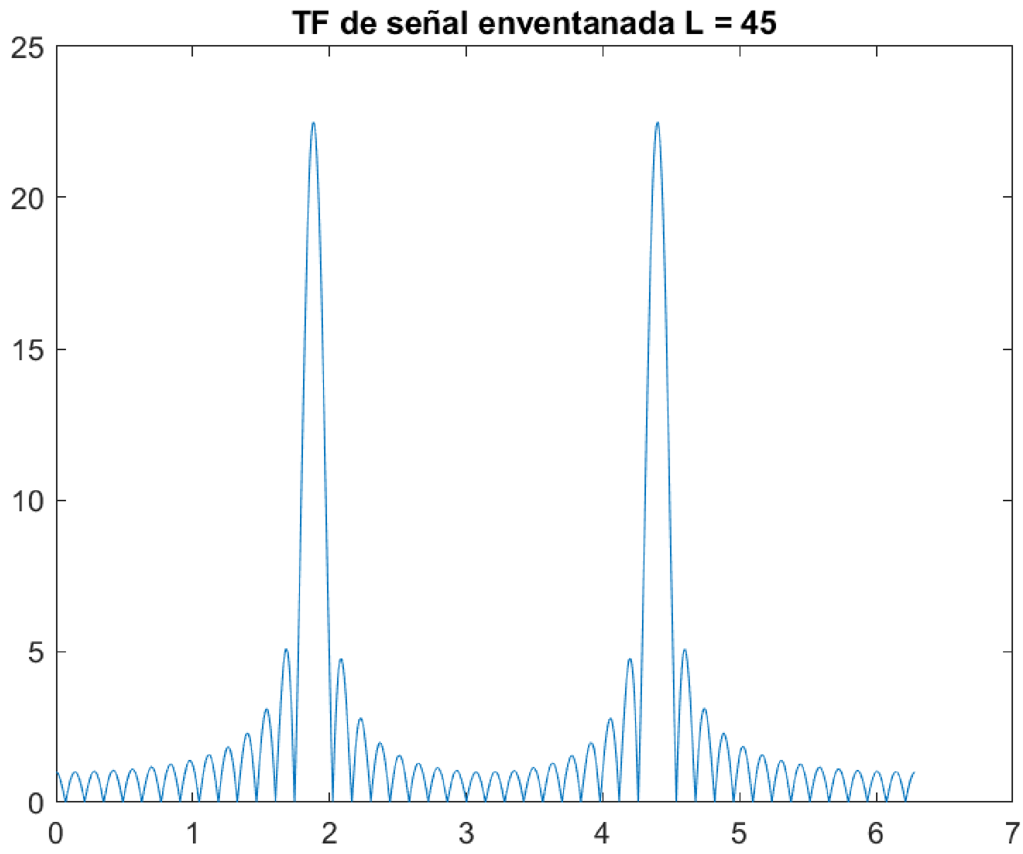
$$x[n] = \cos(\frac{3\pi n}{5}),$$

para $n = 0, 1, \ldots, 9999$.

Enventane la señal empleando una ventana rectangular de longitud $L = 45$ muestras (o, lo que es lo mismo, tome $L = 45$ muestras de la señal).

3.1. Simule su transformada de Fourier (TF) utilizando el comando fft de Matlab con longitud $N = 10000$ y represente su módulo (en unidades naturales) entre 0 y 2π radianes (definiendo correctamente el eje frecuencial). ¿A qué frecuencias se encuentran los máximos del espectro? ¿Cuál es la anchura de los lóbulos centrales de las sinc? ¿Coinciden los resultados con lo esperado?

```
L=45;
n=0:L-1;
xn= cos((3/5)*pi*n);
N=10000;
k=0:N-1;
xn_tf=fft(xn,N);
Om=0:2*pi/N:2*pi-(2*pi/N);
plot(Om, abs(xn_tf));
axis([0 7 0 25]);
title('TF de señal enventanada L = 45');
```



Los máximos se encuentran en 3/5*pi y en 2*pi-(3/5)*pi

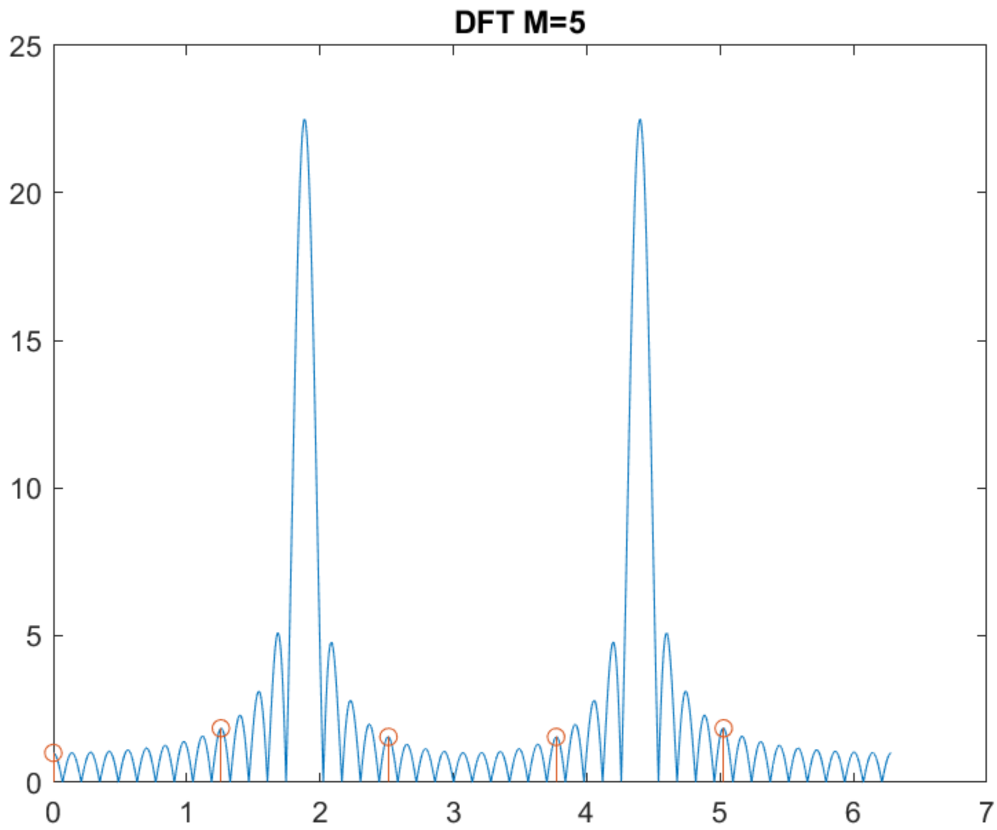
3.2. Tome 5 muestras equiespaciadas de la TF calculada en el apartado anterior que cubran por completo el espectro $[0, 2\pi)$, comenzando con la situada en $\Omega = 0$ y represéntelas en la misma figura empleando los comandos hold y stem. ¿Son 5 muestras suficientes para realizar un buen análisis espectral de la señal?

Nota 1: Probablemente, la forma más sencilla para seleccionar los índices de un subconjunto de muestras de una secuencia sea emplear el operador de MATLAB ":" con el formato inicio:paso:final, con inicio en la primera muestra, final en la última y el paso necesario para tomar el número de muestras indicado.

Nota 2: Tenga en cuenta que los ´ındices de la DFT son $k = 0, 1, \ldots, M-1$, mientras que para los elementos de matrices y vectores Matlab utiliza 1, 2, . . .

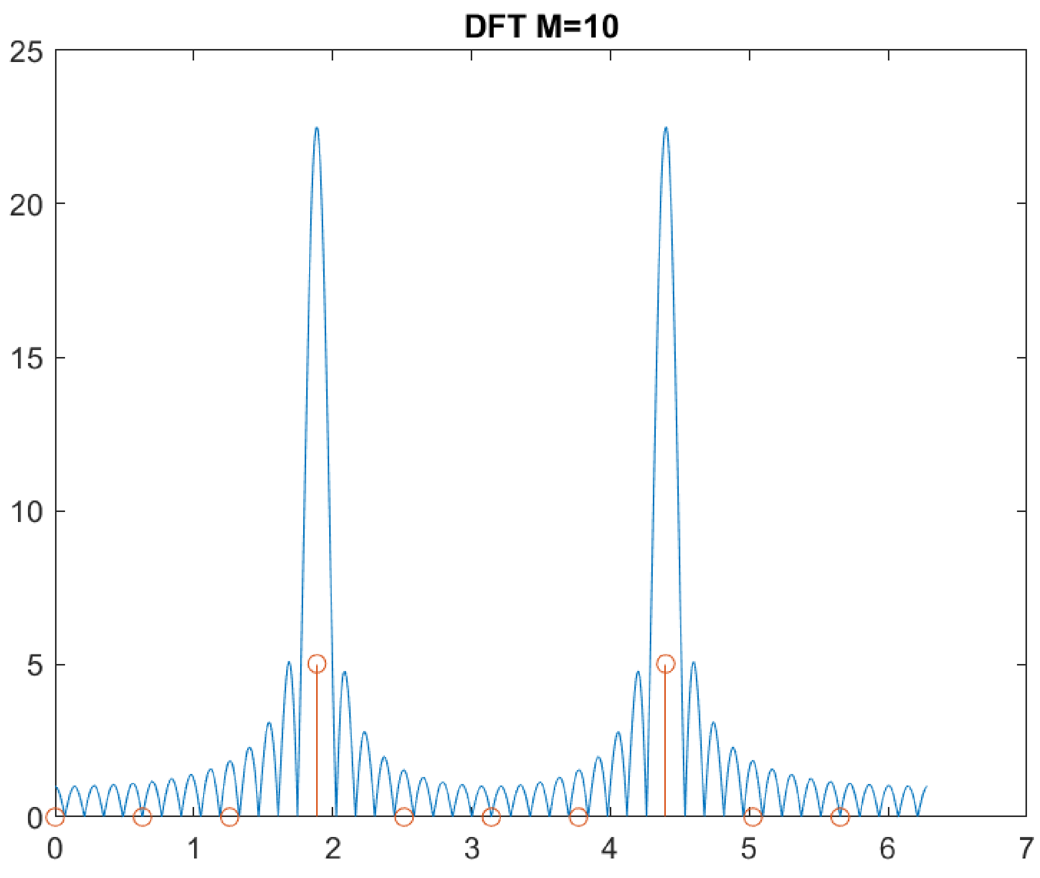
4

```
L=45;
n=0:L-1;
xn= cos((3/5)*pi*n);
N=10000;
k=0:N-1;
xn_tf=fft(xn,N);

M=5;
Om=0:2*pi/N:2*pi-(2*pi/N);
plot(Om, abs(xn_tf));
xn_tf_1=fft(xn, M);

Omd=0:2*pi/M:2*pi-(2*pi/M);
hold on;
stem(Omd,abs(xn_tf_1));
axis([0 7 0 25]);
title('DFT M=5');
```



3.3. Calcule el orden mínimo de la DFT ($N_{mín}$) para garantizar que representa las frecuencias de interés, esto es, que existen muestras de la DFT que coinciden con cada uno de los máximos espectrales de la señal. Compruebe que se consigue el resultado esperado representando $N_{mín}$ muestras equiespaciadas de la TF de la misma forma que en el apartado anterior. ¿Qué índices k_1 y k_2 se corresponden con las muestras situadas en los máximos?

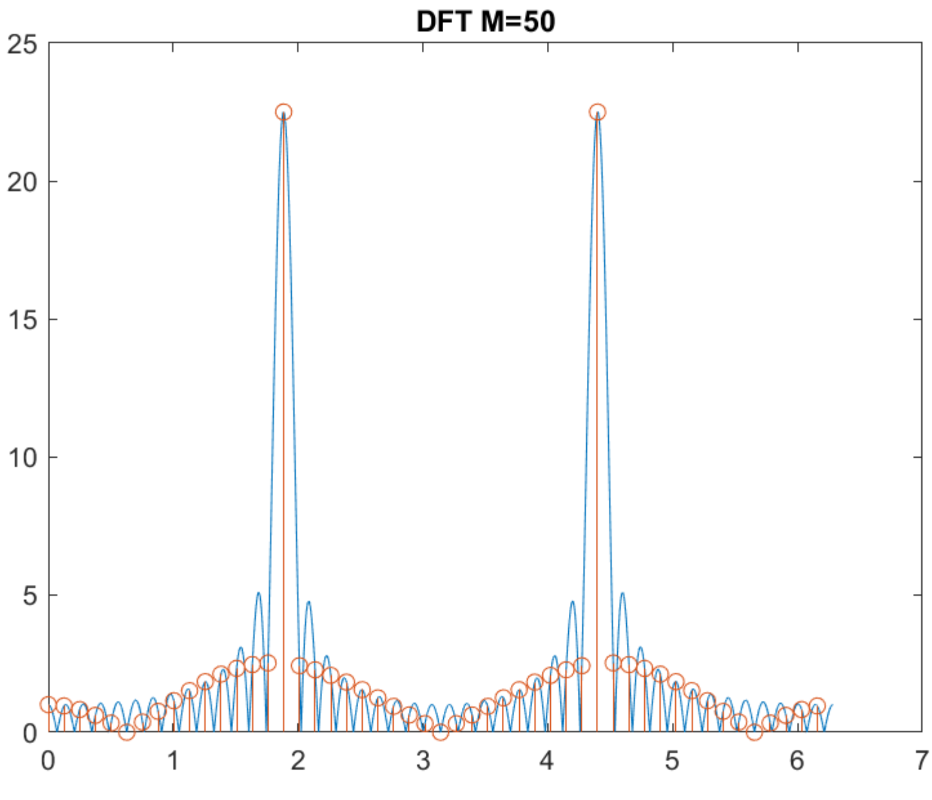
```
L=45;
n=0:L-1;
xn= cos((3/5)*pi*n);
N=10000;
k=0:N-1;
xn_tf=fft(xn,N);

M=10;
Om=0:2*pi/N:2*pi-(2*pi/N);
plot(Om, abs(xn_tf));
xn_tf_1=fft(xn, M);

Omd=0:2*pi/M:2*pi-(2*pi/M);
hold on;
stem(Omd,abs(xn_tf_1));
axis([0 7 0 25]);
title('DFT M=10');
```



K1=(0.6*10)/2 = 3   K2= (2-0.6)*10/2=7

3.4. Indique también qué orden mínimo de la DFT (M) se debe usar para conseguir este mismo efecto, pero asegurando además que $M \geq L$. Compruebe que se consigue el resultado esperado representando M muestras equiespaciadas de la TF de la misma forma que en el apartado anterior. ¿Qué índices k_1 y k_2 se corresponden ahora con las muestras situadas en los máximos?

```
L=45;
n=0:L-1;
xn= cos((3/5)*pi*n);
N=10000;
xn_tf=fft(xn,N);

M=50;
Om=0:2*pi/N:2*pi-(2*pi/N);
plot(Om, abs(xn_tf));
xn_tf_1=fft(xn, M);

Omd=0:2*pi/M:2*pi-(2*pi/M);
hold on;
stem(Omd,abs(xn_tf_1));
axis([0 7 0 25]);
title('DFT M=50');
```



K1= 3 y K2 =7, sí coinciden con el resultado esperado

4. Análisis de una suma de dos secuencias sinusoidales discretas

En esta sección ampliamos el estudio del análisis espectral de una suma de dos secuencias sinusoidales discretas mediante la DFT. Este análisis, aun conservando una gran sencillez, es de gran utilidad, puesto que en realidad toda señal periódica puede descomponerse en una suma de sinusoides. Para ello emplearemos la siguiente secuencia discreta:

$$x[n] = A_1 \cos(\frac{3\pi n}{5}) + A_2 \cos(\frac{\pi n}{2}),$$

para $n = 0, 1, \ldots, 9999$. Los valores de A_1 y A_2 variarán a lo largo del ejercicio.

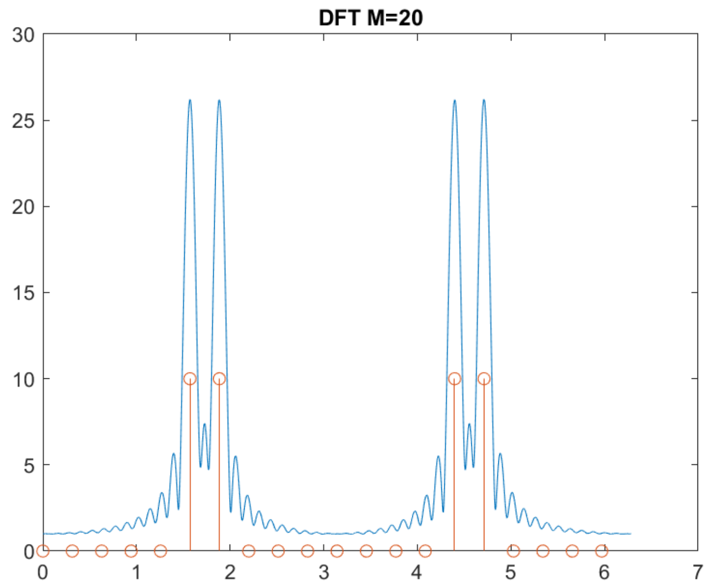
4.1. Ánalisis espectral mediante la DFT

Para la realización de los siguientes apartados, considere los valores $A_1 = 1$ y $A_2 = 1$ y enventane la señal empleando una ventana rectangular de longitud $L = 50$ muestras (o, lo que es lo mismo, tome $L = 50$ muestras de la señal).

a) Calcule en primer lugar la TF de $x[n]$ empleando una longitud $N = 10000$ y represente su módulo (en unidades naturales) entre 0 y 2π radianes.

b) Calcule a continuación el orden mínimo de la DFT ($N_{\text{mín}}$) para garantizar que una muestra de la misma coincide con cada uno de los máximos espectrales de la señal. Represente empleando los comandos hold y stem $N_{\text{m´ın}}$ muestras equiespaciadas de la TF de la misma forma que en el ejercicio anterior. ¿Coinciden algunas muestras con los máximos de la señal?

```
L=50;
n=0:L-1;
xn= cos((3/5)*pi*n)+ cos((1/2)*pi*n);
N=10000;
xn_tf=fft(xn,N);

M=20;
Om=0:2*pi/N:2*pi-(2*pi/N);
plot(Om, abs(xn_tf));
xn_tf_1=fft(xn, M);

Omd=0:2*pi/M:2*pi-(2*pi/M);
hold on;
stem(Omd,abs(xn_tf_1));
axis([0 7 0 25]);
title('DFT M=20');
```



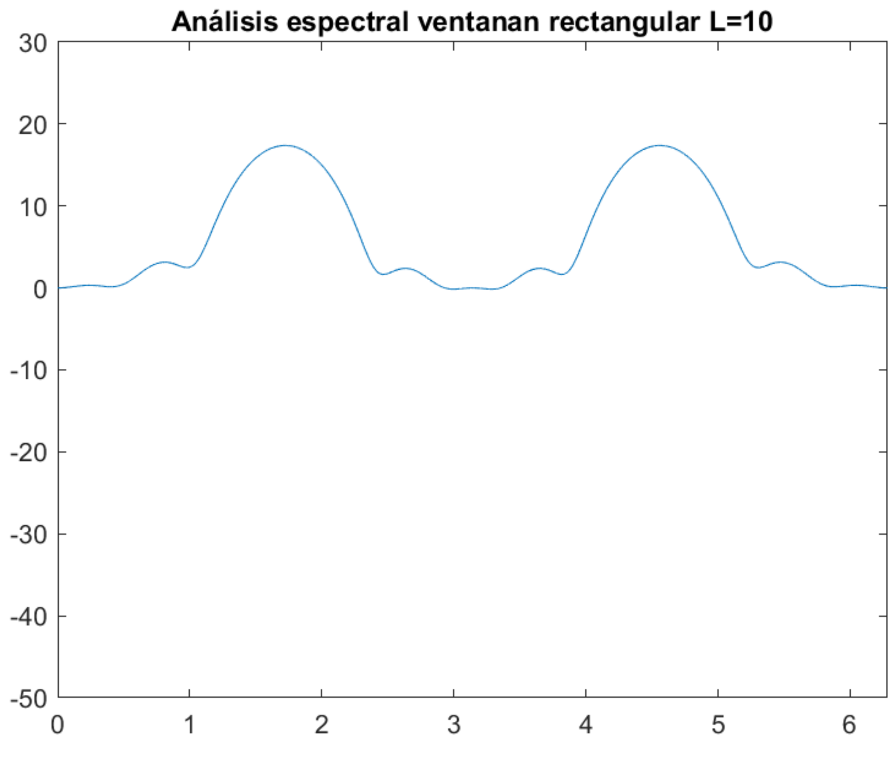
4.2. Ánalisis espectral: resolución espectral

En muchas ocasiones, es muy complicado situar de forma precisa las muestras de la DFT en las frecuencias de interés, ya sea porque se requiera un número muy elevado de muestras, porque la señal a analizar es muy compleja (se compone de muchas frecuencias significativas) o porque estas frecuencias se desconocen a priori. En esta sección se pretende analizar los problemas de resolución y fugas espectrales introducidos por el enventanado en la TF/DFT de una secuencia discreta derivados de no poder situar muestras de la DFT de forma precisa en las frecuencias de interés de la señal.

Considere los valores $A_1 = 1$ y $A_2 = 1$ para la realización de los siguientes apartados.

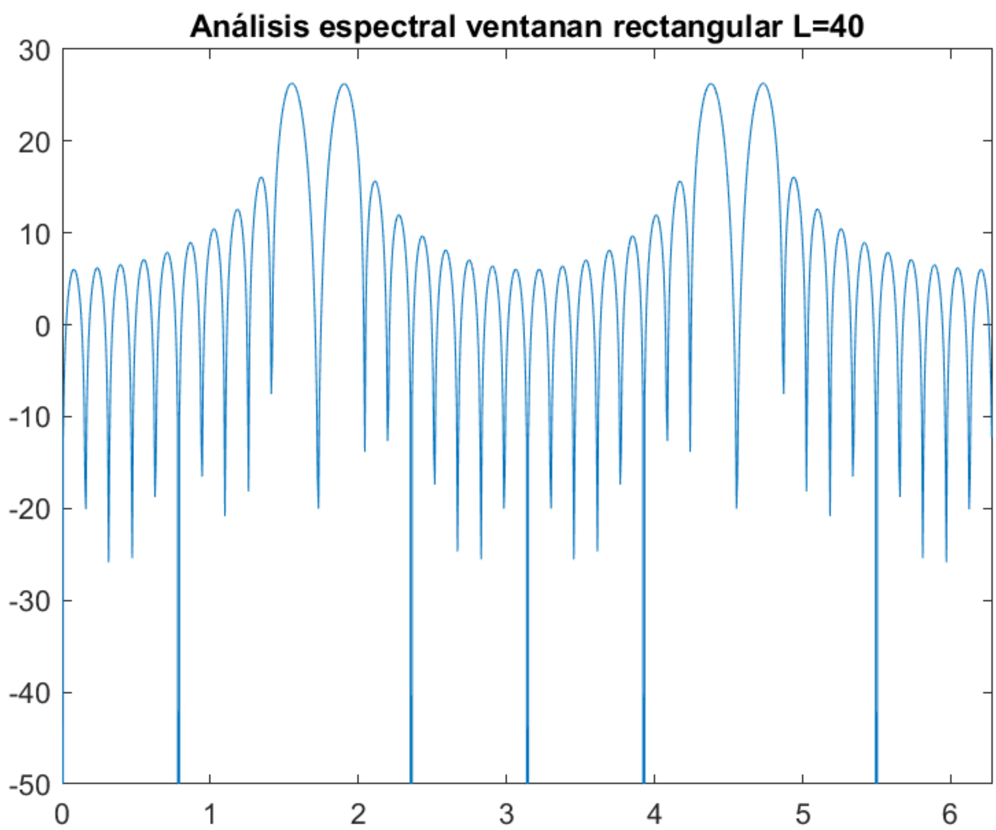
a) Enventane la señal empleando una ventana rectangular de longitud $L = 10$ muestras. Calcule la DFT de la señal de orden 250 y represente su módulo (en dB) entre 0 y 2π radianes. ¿Es posible realizar un correcto análisis de la señal? ¿Por qué?

```
L=10;

n=0:(L-1);
N=10000;
xn= cos((3/5)*pi*n)+ cos((1/2)*pi*n);
Xn_t=fft(xn, N);
Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

plot(Om, 20*log10(abs(Xn_t)));
title('Análisis espectral ventanan rectangular L=10');
axis([0 2*pi -50 30])
```



b) Calcule la longitud mínima L_{min} de la ventana que permita un correcto análisis de la señal, evitando los problemas de resolución. Recuerde que, por consenso, para que dos frecuencias se puedan distinguir, su separación debe ser mayor o igual que la anchura del lóbulo principal de la ventana empleada. Calcule la DFT de orden 250 de la señal enventanada con una ventana rectangular de la longitud obtenida y represente su módulo (en dB) entre 0 y 2π radianes. ¿Se distinguen correctamente las frecuencias

```
L=40;

n=0:(L-1);
N=1024;
xn= cos((3/5)*pi*n)+ cos((1/2)*pi*n);
Xn_t=fft(xn, N);
Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

plot(Om, 20*log10(abs(Xn_t)));
title('Análisis espectral ventanan rectangular L=40');
axis([0 2*pi -50 30])
```



significativas de la señal?

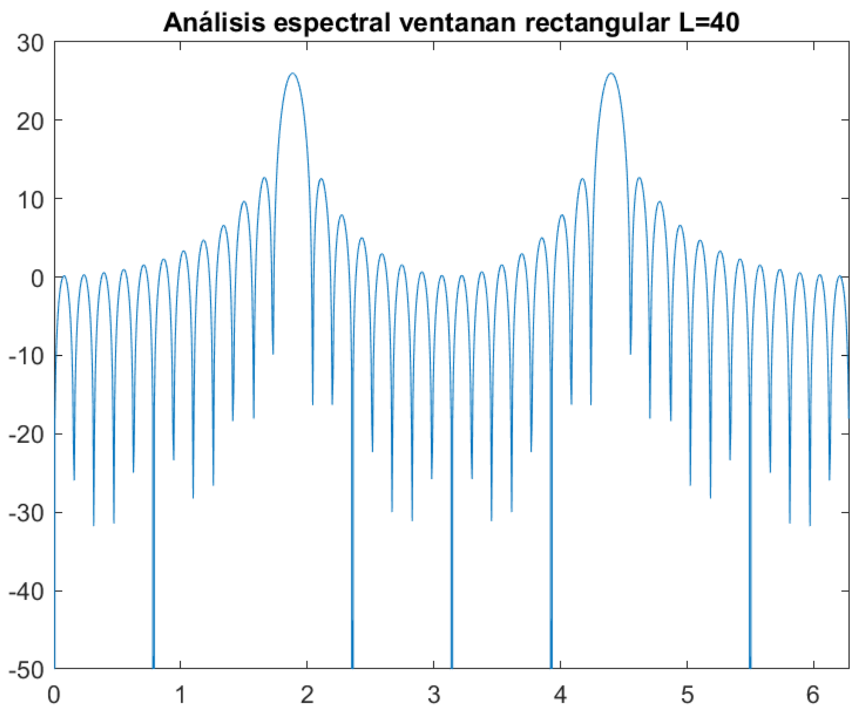
Nota: Tenga en cuenta que las fórmulas teóricas que proporcionan la anchura del lóbulo principal de las distintas ventanas son únicamente aproximadas.

4.3. Ánalisis espectral: resolución espectral y fugas espectrales

Considere los valores $A_1 = 1$ y $A_2 = 0{,}02$ para la realización de los siguientes apartados.

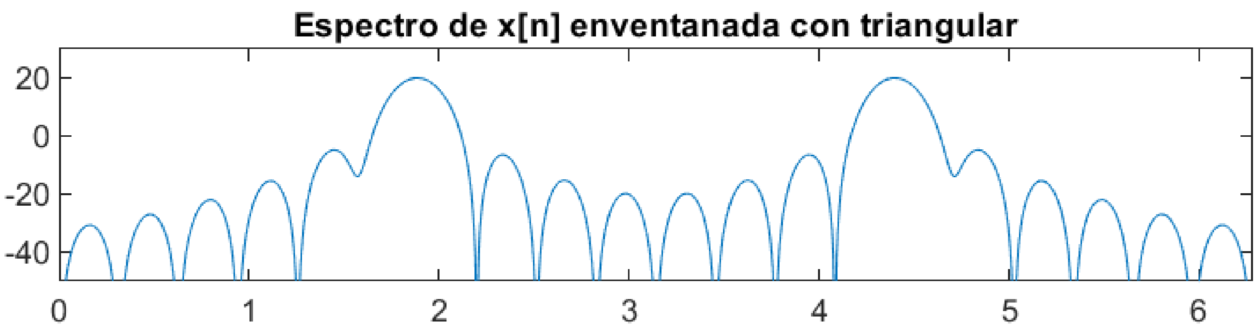
a) Enventane la señal empleando una ventana rectangular de la longitud obtenida en el ejercicio anterior $L_{\min}$. Calcule la DFT de la señal de orden 250 y represente su módulo (en dB) entre 0 y 2π radianes. ¿Es posible realizar un correcto análisis de la señal? ¿Por qué?

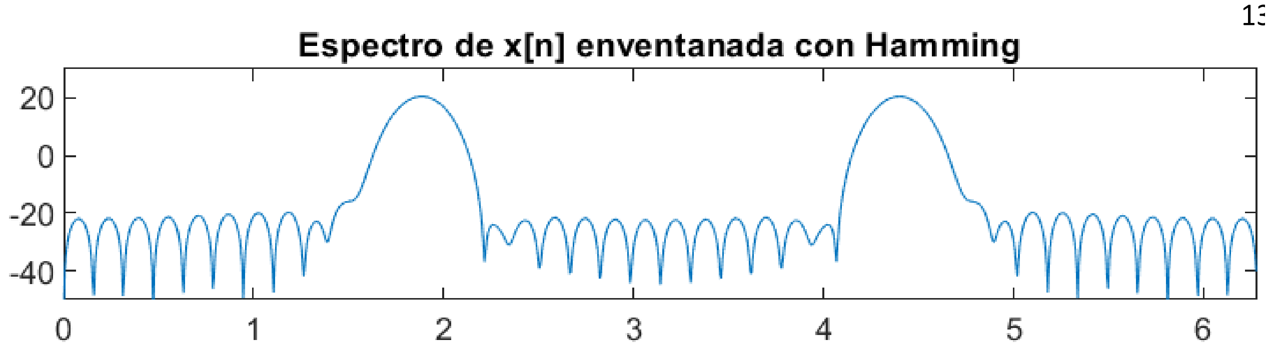
```
L=40;

n=0:(L-1);
N=1024;
xn= cos((3/5)*pi*n)+ 0.02*cos((1/2)*pi*n);
Xn_t=fft(xn, N);
Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

plot(Om, 20*log10(abs(Xn_t)));
title('Análisis espectral ventanan rectangular L=40');
axis([0 2*pi -50 30])
```

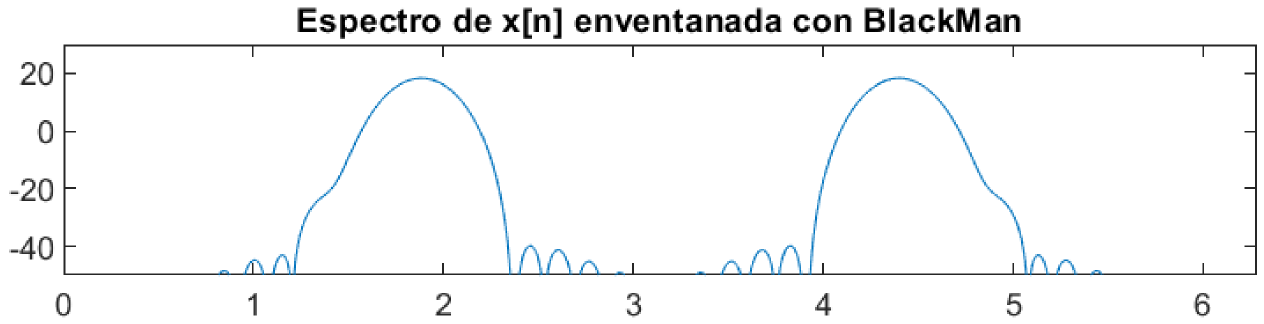


b) Calcule la relación en dB entre la amplitud del tono con la máxima amplitud y la del tono con la mínima amplitud. Dado el nivel del lóbulo lateral en relación al nivel del lóbulo principal de la ventana rectangular, ¿es posible emplear este tipo de ventana para analizar la señal? ¿Que tipo de ventana convendría usar en su lugar para evitar el problema de las fugas espectrales?

```
L=40;
n=0: (L-1);
xn= cos((3/5)*pi*n)+ 0.02*cos((1/2)*pi*n);

triang_window=(triang(L))';
hamming_window= (hamming(L))';
blackman_window= (blackman(L))';
x_triang=(triang_window).*(xn);
x_hamming= (hamming_window).*(xn);
x_blackman= (blackman_window).* (xn);

N=1024;
X_TRI=fft(x_triang, N);
X_HAM=fft(x_hamming, N);
X_BLA=fft(x_blackman, N);

Om =0: 2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);
subplot(311);
plot(Om, 20*log10(abs(X_TRI)));
title('Espectro de x[n] enventanada con triangular');
axis([0 2*pi -50 30])
subplot(312);
plot(Om, 20*log10(abs(X_HAM)));
title('Espectro de x[n] enventanada con Hamming');
axis([0 2*pi -50 30])
subplot(313);
plot(Om, 20*log10(abs(X_BLA)));
title('Espectro de x[n] enventanada con BlackMan');
axis([0 2*pi -50 30])
```



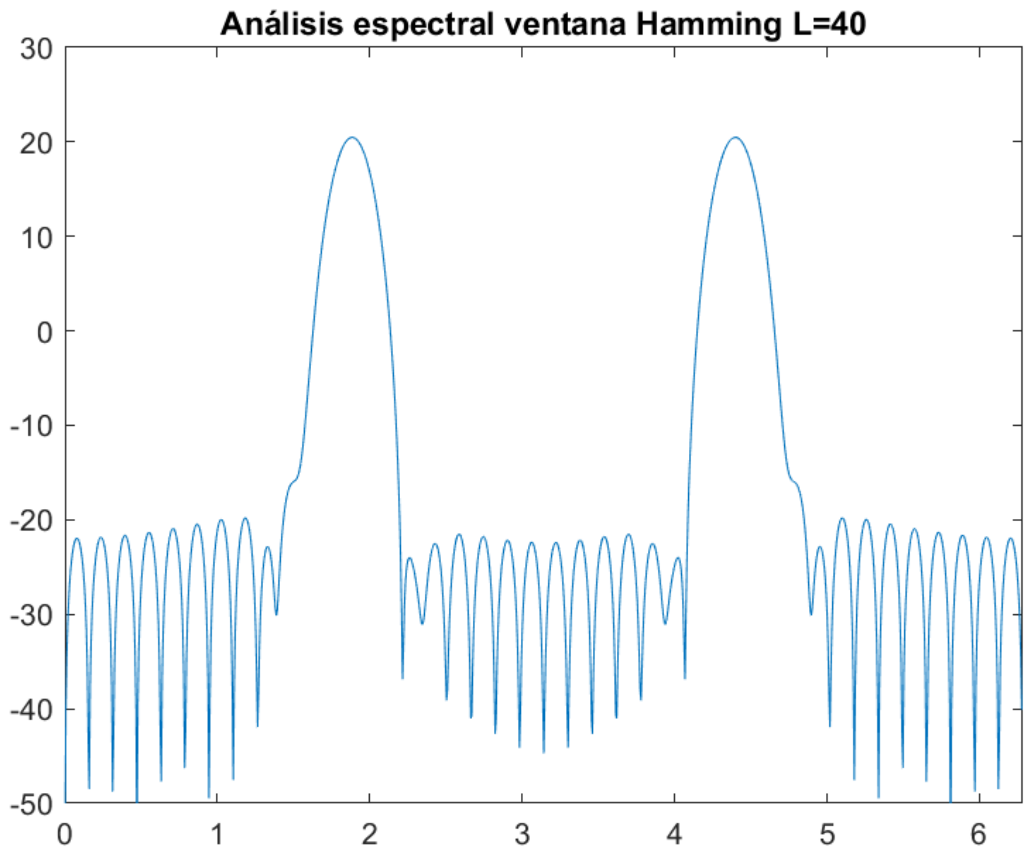




Para evitar el problema de las fugas espectrales habría que usar el tipo de ventana hamming

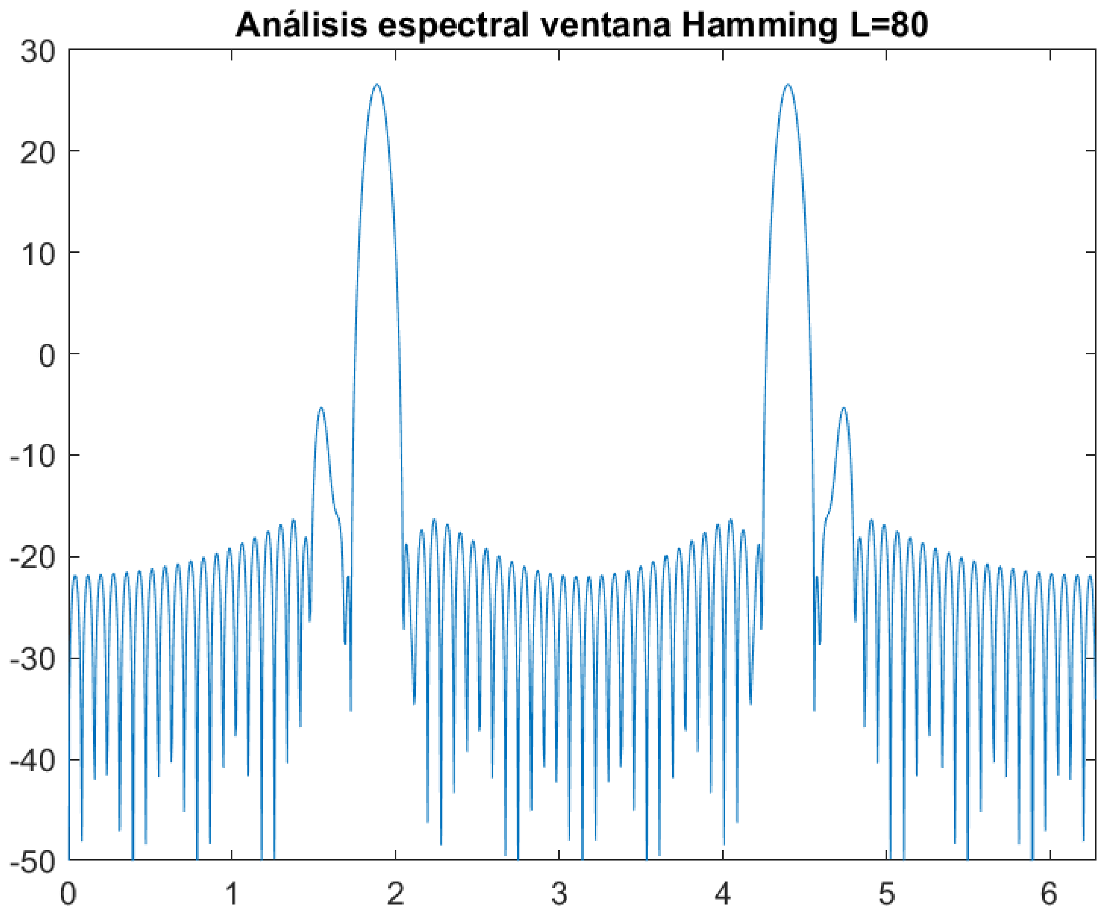
c) Enventane la señal empleando una ventana del tipo seleccionado en el apartado anterior y de longitud $L_{\min}$. Calcule la DFT de la señal de orden 250 y represente su módulo (en dB) entre 0 y 2π radianes. ¿Es posible realizar ahora un correcto análisis de la señal? ¿Por qué?

```
L=40;

n=0:(L-1);
N=1024;
xn= cos((3/5)*pi*n)+ 0.02*cos((1/2)*pi*n);
hamming_window= (hamming(L))';

x_hamming= (hamming_window).*(xn);
X_HAM=fft(x_hamming, N);

Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

plot(Om, 20*log10(abs(X_HAM)));
title('Análisis espectral ventana Hamming L=40');
axis([0 2*pi -50 30])
```



d) Calcule la longitud m´ınima $L_{min,2}$ de la ventana empleada en el apartado anterior que permita un correcto análisis de la señal, evitando los problemas de resolución. Calcule la DFT de orden 250 de la señal enventanada con la ventana seleccionada de la longitud $L_{min,2}$ y represente su módulo (en dB) entre 0 y 2π radianes. ¿Se distinguen ahora correctamente las frecuencias de interés de la señal?

```
L=80;

n=0:(L-1);
N=1024;
xn= cos((3/5)*pi*n)+ 0.02*cos((1/2)*pi*n);
hamming_window= (hamming(L))';

x_hamming= (hamming_window).*(xn);
X_HAM=fft(x_hamming, N);

Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

plot(Om, 20*log10(abs(X_HAM)));
title('Análisis espectral ventana Hamming L=80');
axis([0 2*pi -50 30])
```



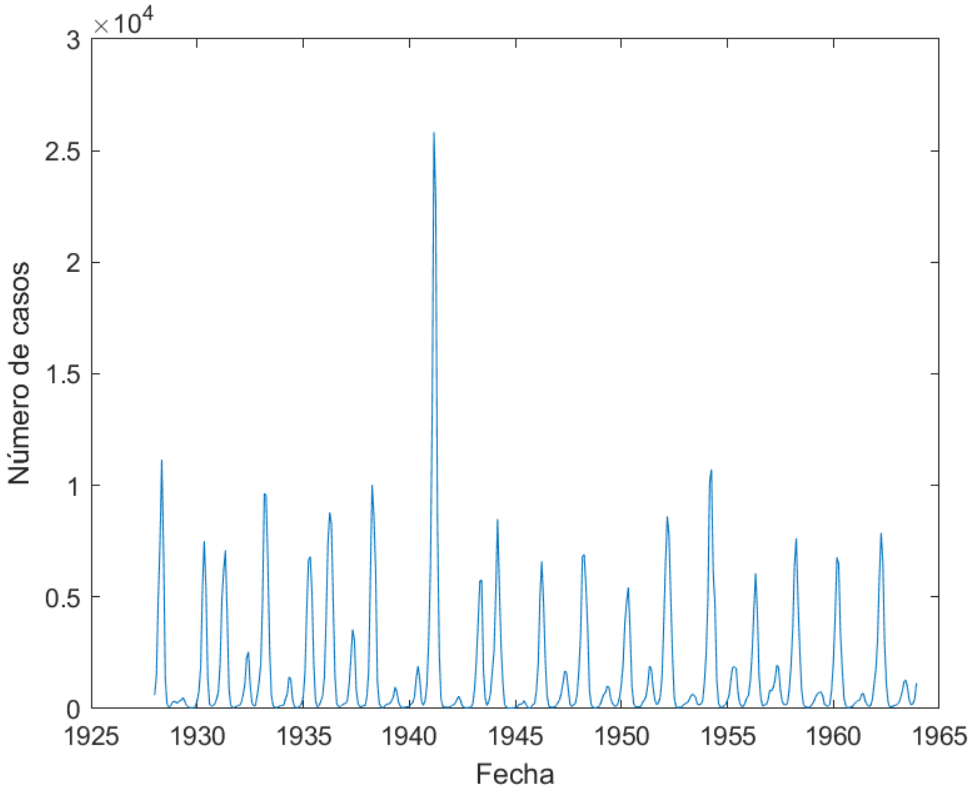
5. Análisis espectral de una señal real

En este ejercicio, analizaremos frecuencialmente una señal discreta real: el número de casos mensual de sarampión en la ciudad de Nueva York entre los años 1928 y 1963, momento en el que se comenzó a administrar de forma masiva la vacuna contra dicha enfermedad, reduciendo notablemente su influencia.

En este caso, emplearemos todas las muestras que conforman la señal y asumiremos que no hay problemas de resolución ni de fugas espectrales.

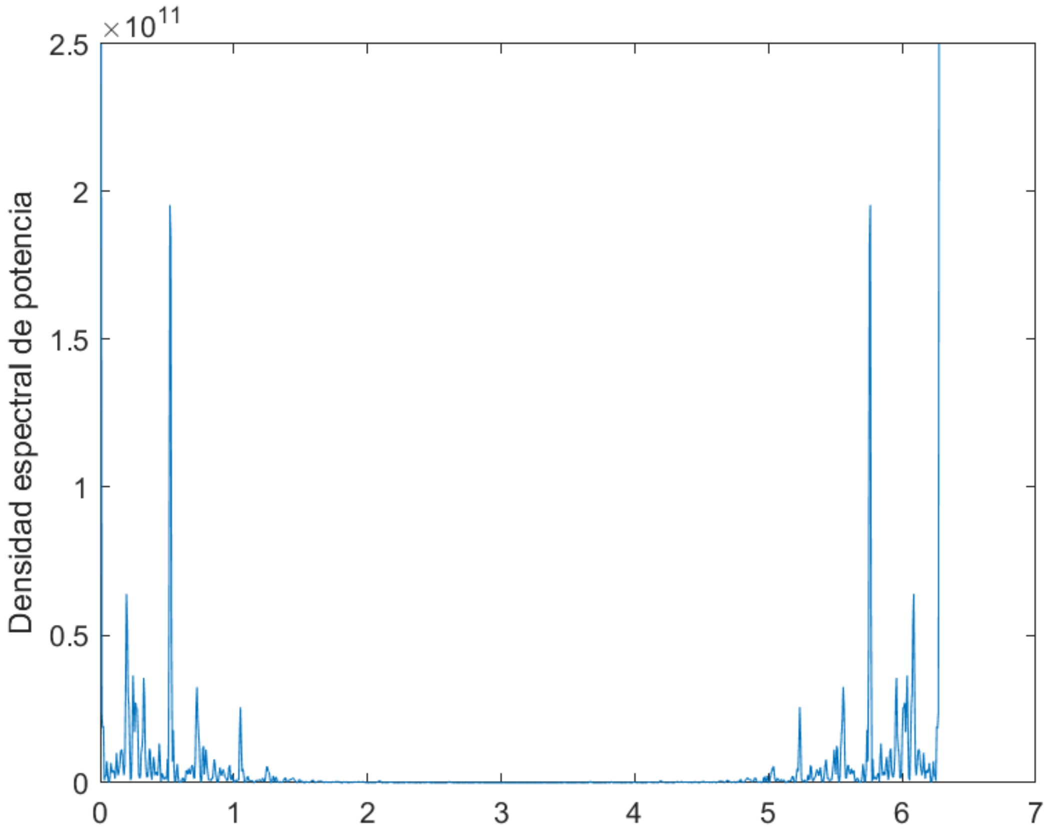
5.1. Cargue mediante el comando load la variable de MATLAB sarampion ny.mat, la cual contiene dos variables: fecha y casos. Represente el número de casos respecto a la fecha para visualizar la evolución de estos a lo largo del tiempo.

```
load sarampion_ny.mat casos
load sarampion_ny.mat fecha

plot(fecha, casos);
xlabel('Fecha')
ylabel('Número de casos')
```



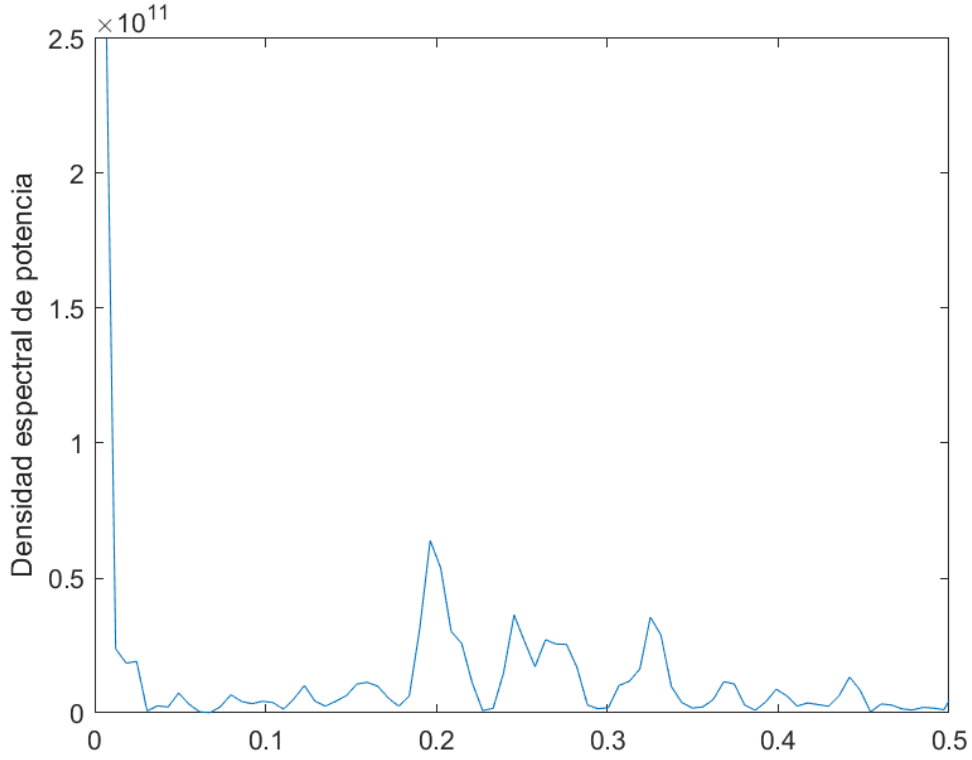
5.2. Antes de comenzar con el análisis espectral, reste a la señal su media, de forma que eliminemos la componente continua y nos centremos en las fluctuaciones. Calcule la DFT de orden igual al número de muestras de la señal y eleve el valor de sus muestras al cuadrado para obtener la densidad espectral de potencia (DEP) de la señal. Represente el módulo de la DEP (en unidades naturales) entre 0 y 2π radianes.

```
load sarampion_ny.mat casos
load sarampion_ny.mat fecha

N = 1024;
Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

x = fft(casos,N);

plot(Om, abs(x.^2));
axis([0 7 0 2.5E11])
ylabel('Densidad espectral de potencia')
```



5.3. Para conocer qué frecuencias de la señal son las más significativas, elimine el mitad superior del espectro (ya que es redundante) y represente el módulo de la DEP (en unidades naturales) entre 0 y 0, 5 meses^{-1} mediante el comando xlim. Para ello tenga en cuenta que la frecuencia de muestreo es de 1 muestra/mes.

```
load sarampion_ny.mat casos
load sarampion_ny.mat fecha

N = 1024;
Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

x = fft(casos,N);

plot(Om, abs(x.^2));
ylim([0 2.5e11])
xlim([0 0.5])
ylabel('Densidad espectral de potencia')
```



5.4. Para facilitar la interpretación de la gráfica, represente el módulo de la DEP (en unidades naturales) en relación al periodo en lugar de a la frecuencia. Presente los resultados entre 0 y 50 meses mediante el comando xlim. ¿Dónde se sitúa el máximo valor de la DEP, es decir, con qué periodicidad se producen picos en los casos de sarampión? Busque los picos secundarios de la DEP. ¿Cómo interpreta estos picos?

```
load sarampion_ny.mat casos
load sarampion_ny.mat fecha

N = 1024;
Om =0:2*pi/N: 2*pi-(2*pi/N);

x = fft(casos,N);

plot(Om, abs(x.^2));
ylim([0 2.5e11])
xlim([0 50])
ylabel('Densidad espectral de potencia')
```