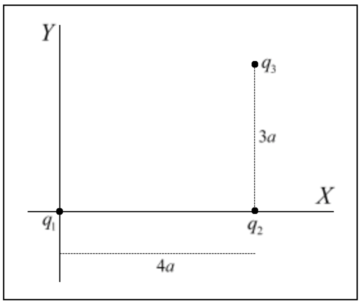
Noviembre 2018

1. Tres partículas, cargadas con la misma carga *q*, se sitúan en los vértices de un triángulo equilátero de lado $2a$, de forma que dos de las cargas están en los puntos $(-a,0,0)$ y $(a,0,0)$ y la tercera está situada sobre el semieje *Z* positivo. De forma razonada, determinar:

1) La energía electrostática del sistema.
2) El campo eléctrico en cualquier punto del eje *Z* (excluida la posición de la carga que está sobre dicho eje).
3) El momento de fuerzas que actuaría sobre un dipolo, de momento dipolar $\vec{p} = b\left(\vec{u}_x - 2\vec{u}_y + 4\vec{u}_z\right)$, que sólo puede rotar, si se colocase en el origen de coordenadas.



Problema 2

Abril 2019

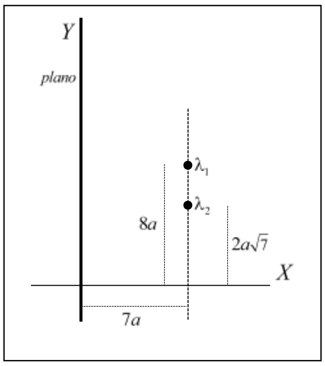
2. Tres cargas puntuales, $q_1 = q$, $q_2 = -2q$ y $q_3 = -q$, están situadas como indica la figura. De forma razonada, obtener:

1) La energía electrostática del sistema.
2) La energía potencial que tendría un dipolo, de momento dipolar $\vec{p} = p_0\left(16\vec{u}_x - 9\vec{u}_y\right)$, si se situara en el punto $(0,3a)$.

Enero 2019

3. Una carga puntual, $q_1 = -q_0$, se sitúa en el punto $\left(a,-a\sqrt{3}\right)$ del plano *XY*. Una segunda carga puntual, q_2, de valor desconocido, se coloca en el punto $(-3a,0)$ del mismo plano. Sabiendo que un dipolo, de momento dipolar $\vec{p} = p_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_y\right)$, que sólo puede rotar y está situado en el origen de coordenadas, se encuentra en equilibrio, determinar razonadamente:

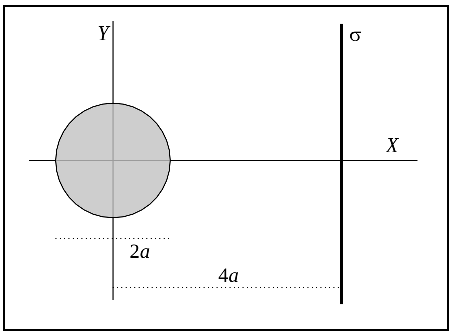
1) El valor de la carga q_2.
2) Si el dipolo está en equilibrio estable o inestable.
3) El trabajo que debe realizar un agente externo para colocar el dipolo paralelo al vector $+\vec{u}_x$.



Problema 4

Abril 2018

4. Un plano uniformemente cargado, que coincide con el plano *YZ* y dos hilos rectilíneos e indefinidos, paralelos al eje *Z* y cargados uniformemente con densidades $\lambda_1 = \frac{5\lambda}{2}$ y $\lambda_2 = -4\lambda$ se sitúan como indica la figura. Obtener razonadamente la densidad de carga del plano, sabiendo que, para que un dipolo p, situado en el punto $(a,0,0)$, estuviera en equilibrio, debería orientarse de forma que $\vec{p} \parallel \vec{u}_y$.



Problema 5

Abril 2019

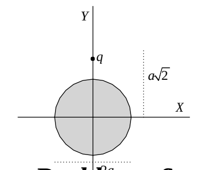
5. El sistema de la figura está formado por un hilo rectilíneo e indefinido y un plano cargado con densidad superficial σ. El hilo, de radio *a*, está uniformemente cargado y es coaxial con el eje *Z*. Si en el punto $\left(2a,2a\sqrt{3},0\right)$ se situara una carga puntual, la fuerza que se ejercería sobre ella sería paralela al eje *Y*. Determinar razonadamente:

1) La densidad volumétrica de carga del hilo.

2) La diferencia de potencial $V_B - V_A$ entre los puntos $B(0,2a,0)$ y $A\left(0,\frac{a}{2},0\right)$.

Julio 2016

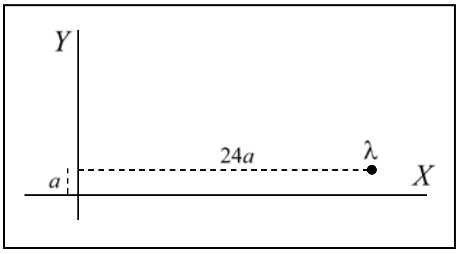
6. Una carga puntual q y una esfera de radio a uniformemente cargada, están situadas como indica la figura. Si el potencial electrostático en el punto $(a/2,0,0)$ es $\frac{115q}{96\pi\varepsilon_0 a}$, determinar de forma razonada la energía potencial de un dipolo eléctrico, de momento dipolar $\vec{p} = p(\vec{u}_x - \vec{u}_y)$, situado en el punto $(-a\sqrt{2},0,0)$.



Problema 6

Junio 2019

7. Un hilo rectilíneo e indefinido, cargado con densidad lineal de carga λ y paralelo al eje Z, se sitúa como muestra la figura. Determinar la carga que debe situarse en el punto $(-6a,0,0)$, para que un dipolo de momento dipolar $\vec{p} = p\vec{u}_y$, situado en el punto $(0,8a,0)$ y que sólo puede rotar, permanezca en equilibrio. Justificar si el equilibrio es estable o inestable, y obtener su energía potencial.

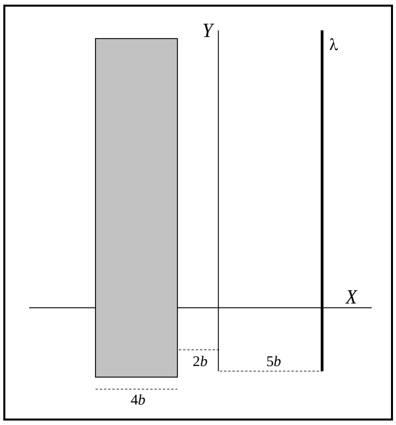


Problema 7

Julio 2019

8. Una lámina indefinida, de anchura $4b$, uniformemente cargada, y un hilo rectilíneo e indefinido, cargado con densidad lineal de carga λ y situado sobre el plano XY, se disponen como muestra la figura. Sabiendo que el campo eléctrico es nulo en el eje Y, obtener razonadamente la diferencia de potencial $V_B - V_A$ entre los puntos $A(-3b,b,0)$ y $B(4b,0,0)$.

Dato. Campo eléctrico generado por una lámina de anchura a:
$\vec{E}_{\text{exterior}} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\vec{u}_\perp$; $\vec{E}_{\text{interior}} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\vec{u}_\perp$ (d distancia al plano de simetría)

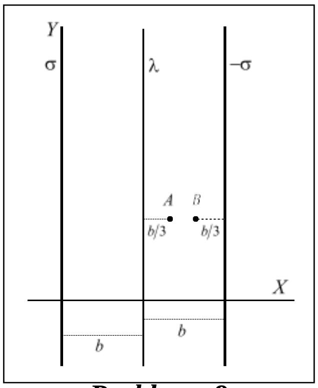


Problema 8

Enero 2019

9. Dos planos indefinidos, uniformemente cargados con densidades de carga σ y $-\sigma$, y un hilo indefinido, cargado con densidad lineal de carga λ, están situados como se indica en la figura. Obtener razonadamente:

1) El campo eléctrico en cualquier punto del plano XY.
2) La relación que debería existir entre σ y λ para que la diferencia de potencial $V_B - V_A$ fuera nula.



Problema 9

Noviembre 2018

10. Un dipolo, de momento dipolar $\vec{p} = p_0\vec{u}_x$ se sitúa en el origen de coordenadas, punto que coincide con el centro de una corona esférica de radios R y $3R$, cargada con densidad cúbica $\rho = \frac{3p_0}{16\pi R^4}$. De forma razonada, obtener el trabajo realizado en contra del campo para desplazar una carga puntual q desde el punto $\left(\frac{R}{2},0,0\right)$ hasta el punto $(2R,0,0)$.

Julio 2019

11. Un hilo rectilíneo e indefinido, con densidad de carga uniforme λ, se sitúa sobre el eje *Y*. En el punto $\left(a, a\sqrt{3}, 0\right)$ se coloca un dipolo que sólo puede rotar y se observa que, en el instante inicial, su energía potencial es $-\dfrac{b\lambda\sqrt{3}}{\pi a \varepsilon_0}$ y sobre él actúa un momento de fuerzas $\dfrac{b\lambda}{\pi a \varepsilon_0}\left(-\vec{u}_z\right)$.

1) Determinar razonadamente el momento dipolar del dipolo en el instante inicial.

Una vez que el dipolo se encuentra en su posición de equilibrio estable, obtener detalladamente:

2) El campo eléctrico en el punto $A\left(a, 0, 0\right)$.
3) La diferencia de potencial entre el punto *A* y el punto $B\left(2a, 0, 0\right)$.

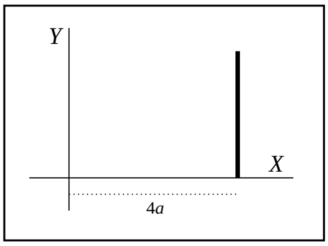
Julio 2018

12. Una varilla de longitud $3a$, uniformemente cargada con densidad lineal de carga λ, se sitúa sobre el plano *XY*, tal como muestra la figura. Determinar de forma razonada:

1) El campo eléctrico en el origen de coordenadas.

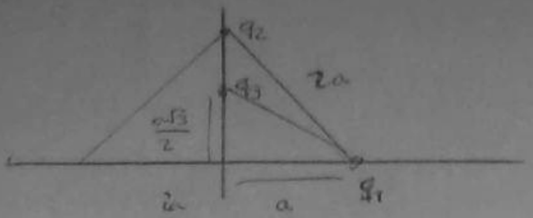
En el origen de coordenadas se coloca un dipolo eléctrico contenido en el plano *XZ*:

2) Obtener razonadamente su momento dipolar p, expresándolo en coordenadas cartesianas, si el momento de fuerzas que actúa sobre él es $\dfrac{p_0\lambda}{\pi\varepsilon_0 a\sqrt{20}}\left(-2\,\vec{u}_x + 6\,\vec{u}_y - \vec{u}_z\right)$.



***Problema* 12**

1.



$\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2}$

$r_{1\to3} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt3}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac34 a^2 + a^2} = \sqrt{\frac74}\ \cancel{a} = \frac{\sqrt7}{2} a$

$W_e = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 (r_{1\to2})^2} + \frac{q_1 \cdot q_3}{4\pi\varepsilon_0 (r_{1\to3})^2} + \frac{q_2 \cdot q_3}{4\pi\varepsilon_0 (r_{2\to3})^2} =$

$= \frac{q^2}{4\pi \cdot 4a^2} + \frac{q^2}{4\pi \frac74 a^2} + \frac{q^2}{4\pi \frac34 a^2} =$

$col = \sqrt{2a^2 + a^2} = \sqrt3\, a$

$\left[r_{2\to3} = \sqrt3\, a - \frac{a\sqrt3}{2} = \frac{\sqrt3}{2} a \right]$

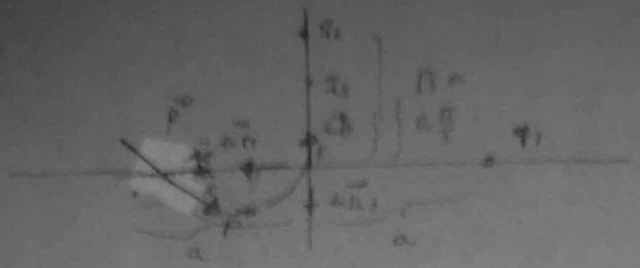
$= \frac{q^2}{16\pi a^2} + \frac{q^2}{7\pi a^2} + \frac{q^2}{3\pi a^2} =$

$= \frac{21 q^2 + 48 q^2 + 112 q^2}{336\pi a^2} = \frac{48133\, q^2}{336\pi a^2} =$

$W_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \left[\frac12 + \frac{2\sqrt7}{7} + \frac{2\sqrt3}{3} \right]$

2

2)



$$\vec{E_1} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\vec{u_{r1}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{u_x}$$

$$\vec{E_2} = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\vec{u_{r2}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 3a^2}\vec{u_y}$$

$$\vec{E_3}(0,0) = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}\vec{u_{r3}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{3}{4}a^2}\vec{u_y}$$

$$\vec{E}(0,0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\vec{u_x} + \frac{1}{3}\vec{u_y} + \frac{4}{3}\vec{u_y}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\vec{u_x} + \frac{5}{3}\vec{u_y}\right)$$

$$\vec{p} = p_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u_x} + \frac{1}{2}\vec{u_y}\right)$$

$$\vec{E}_{DIPOLO} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_r} + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_\theta} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \boxed{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

$$p = |\vec{p}| = p_0$$

$$\vec{E}_{DIPOLO} = \frac{2p_0\frac{\sqrt{3}}{2}}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{u_x} + \frac{p_0\left(+\frac{1}{2}\right)}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec{u_y} = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\sqrt{3}\vec{u_x} + \frac{1}{2}\vec{u_y}\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(0,0,0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\vec{u_x} + \frac{5}{3}\vec{u_y}\right) + \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left(\sqrt{3}\vec{u_x} + \frac{1}{2}\vec{u_y}\right)}$$

3) $W = -\Delta E_p = -q\,(V_B - V_A)$

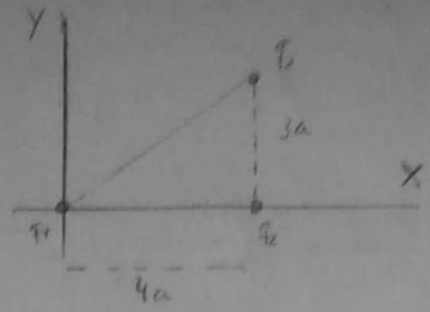
$$V_0^{cargas} - V_\infty^{cargas} = 2q\,V_0^{cargas} = 2q\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}(1+\sqrt{3})$$

$$V_0\,\text{Dipolo} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p_0\sqrt{3}/2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} =$$

$$W_{\infty\to 0} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 a}(1+\sqrt{3}) + 2q\,\frac{p_0\sqrt{3}/2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Abril 2019.

2. $q_1 = q \qquad q_2 = -2q \qquad q_3 = -q$



$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\,\vec{u}_{r_1}$$

1) Energía electrostática:

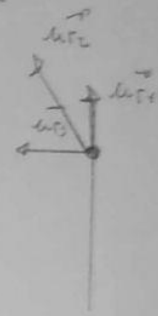
$r_{1\to3} = \sqrt{16a^2 + 9a^2} = 5a$

$$W_e = \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{1\to2}} + \frac{q_1 \cdot q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{1\to3}} + \frac{q_2 \cdot q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_{2\to3}} =$$

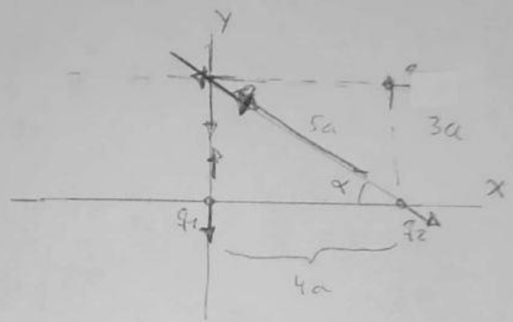
$r_{1\to2} = 4a$
$r_{2\to3} = 3a$

$$W_e = \frac{-2q^2}{4\pi\varepsilon_0 4a} + \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0 5a} + \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 3a} =$$

$$W_e = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{-2}{4} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(-\frac{1}{30}\right) =$$



$$\boxed{W_e = \frac{-q^2}{120\pi\varepsilon_0 a}}$$



2) $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(0, 3a)$

$$\vec{E}_1(0,3a) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\,\vec{u}_{r_1} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (3a)^2}(-\vec{u}_y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 9a^2}\,\vec{u}_y$$

$$\vec{E}_2(0,3a) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\,\vec{u}_{r_2} = \left\{\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{4}{5} \\ \sin\varphi = \frac{3}{5} \end{array}\right\} = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 (25a^2)}\left(-\frac{4}{5}\vec{u}_x + \frac{3}{5}\vec{u}_y\right)$$

$$\vec{E}_3(0,3a) = \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}\,\vec{u}_{r_3} = \left\{\begin{array}{l} \vec{u}_{r_3} = -\vec{u}_x \\ r_3 = 4a \end{array}\right\} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (4a)^2}(-\vec{u}_x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 16a^2}\,\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(0,3a) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 9a^2}\vec{u}_y - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 (25a^2)}\left(-\frac{4}{5}\vec{u}_x + \frac{3}{5}\vec{u}_y\right) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 16a^2}\vec{u}_x$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(\frac{8}{125} + \frac{1}{16}\right)\vec{u}_x\right] + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left[\left(\frac{1}{9} - \frac{6}{125}\right)\vec{u}_y\right] =$$

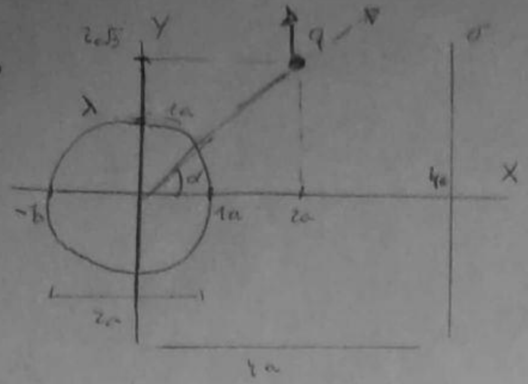
$$\vec{E}(0,3a) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{253}{2000}\vec{u}_x + \frac{71}{1125}\vec{u}_y\right)$$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}(0,3a) = p_0 (16\,\vec{u_x} + 9\,\vec{u_y}) \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{253}{2000}\vec{u_x} + \frac{71}{1125}\vec{u_y}\right) =$$

$$= -\frac{q\,p_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,\frac{253}{125} + \frac{q\,p_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{71}{125}\right)$$

$$\left[E_p = -\frac{q\,p_0}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\,\frac{182}{125} = -\frac{q\,p_0\,91}{250\,\pi\,\varepsilon_0 a^2} \right]$$

5.



a) Densidad volumétrica de carga del hilo.

Cuando hay que aplicar gauss, $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$

Cuando el campo en el interior de una simetría (interior hilo, esfera, cilindro)

$\vec{E}_{plano}(2a, 2a\sqrt{3}) + \vec{E}_{hilo}(2a, 2a\sqrt{3}) =$

a) $\vec{E}(2a, 2a\sqrt{3}, 0) = \vec{E}_{plano}(2a, 2a\sqrt{3}) + \vec{E}_{hilo}(2a, 2a\sqrt{3})$

$\vec{E}_{plano} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u_n} \quad \{ \vec{u_n} = -\vec{u_x} \}$

Al calcular el campo fuera de la simetría no hace falta calcular Gauss,

Al calcular el campo fuera de la simetría es indistinguible del generado por un hilo

[El campo generado por el cilindro en el exterior es indistinguible del generado por un hilo indefinido de densidad lineal de carga λ.]

$$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u_r} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{(2a)^2 + (2a\sqrt{3})^2} = 4a \\ \cos\varphi = \dfrac{2a}{4a} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{2a\sqrt{3}}{4a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\}$$

pedir.

$$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 4a} \left(\frac{1}{2}\vec{u_x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u_y} \right)$$

$$\vec{E}(2a, 2a\sqrt{3}) = \vec{E}_{plano} + \vec{E}_{hilo} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 4a} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{u_x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u_y} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\varepsilon_0}\left[\left(\frac{\lambda}{8\pi a} - \sigma \right)\vec{u_x}\right] + \frac{\lambda\sqrt{3}}{16\pi\varepsilon_0}\vec{u_y}$$

$\vec{F_c} = q \cdot \vec{E}(2a, 2a\sqrt{3}; 0) \parallel \vec{u_y}$ Como la F_c es paralela a $\vec{E}_y$ a $\vec{u_y}$ en $(2a, 2a\sqrt{3})$, la componente ~~x~~ será nula.

$F_x = 0 = -\sigma + \dfrac{\lambda}{8\pi a}$

$\sigma = \dfrac{\lambda}{8\pi a}$

$\lambda = 8\sigma\pi a$

$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \dfrac{q}{V} \\ \sigma = \dfrac{q}{S} \\ \lambda = \dfrac{q}{L} \end{array} \right.$

$\rho \cdot V = \lambda \cdot L$

$\rho = \lambda \cdot \dfrac{L}{V}$

$\rho = \lambda \cdot \dfrac{\cancel{L}}{\pi a^2 \cdot \cancel{L}} = \dfrac{\lambda}{\pi a^2}$

Volumen cilindro

$\pi \cdot r^2 \cdot L$

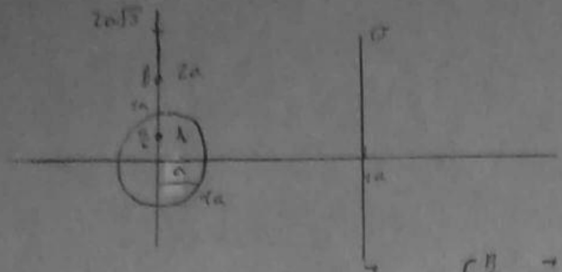
Volumen esfera

$\frac{4}{3}\pi r^3$

$\rho = \dfrac{8\sigma\pi a}{\pi a^2} =$

$\rho = \dfrac{8\sigma\pi}{\pi a}$ $\boxed{\rho = \dfrac{8\sigma}{a}}$

b) Diferencia de potencial



$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}_{cilindro}\, d\vec{l} - \int_A^B \vec{E}_{plano}\, d\vec{l}$$

$d\vec{l} = dr \cdot \vec{u_r}$ (Siempre es así para esferas y cilindros)

Si el campo cambia de expresión hay que hacerlo en varias zonas.

Si el campo cambia de expresión cuando sale y entra de una simetría o cuando cambia de posición relativa respecto a una fuente de carga.

$$-\int_A^B \vec{E}_{cilindro}\, d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}(r<a)\, dl - \int_A^B \vec{E}(r>a)\, dl =$$

$$= -\int_{a/2}^{a} \vec{E}(r<a)\, dl - \int_a^{2a} \vec{E}(r>a)\, dl =$$

Para calcular el campo en el interior del cilindro aplicamos Gauss.

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Debido a la simetría de la distribución, el campo eléctrico tendrá dirección radial ($\vec{u_r}$) y su módulo variará con la distancia al eje de simetría.

$\vec{E} = E(r) \cdot \vec{u_r}$ La superficie gaussiana será un cilindro coaxial con el eje del sistema de altura L y radio r variable.

$d\vec{S_1}$ $d\vec{S_3}$ $d\vec{S_2}$

Tanto $d\vec{S_1}$ como $d\vec{S_2}$ se anulan.

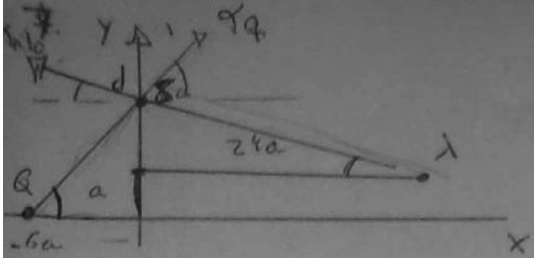
$$\oiint \vec{E}\, d\vec{S} = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S_3} = \{ E \text{ es uniforme} \} = E \oiint dS_3 = E \cdot S_3 = E \cdot 2\pi r L$$

$$E \cdot S_3 = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho = \frac{q_{enc}}{V_{enc}} \qquad q_{enc} = \rho \cdot V_{enc}$$

$$\sigma = \frac{q_{enc}}{S_{enc}} \qquad q_{enc} = \sigma \cdot S_{enc}$$

$$q_{enc} = E \cdot S_3 \cdot \varepsilon_0$$



Momento dipolar.

$\vec{p} = p\,\vec{u}$

$\vec{E}_T = \vec{E}_{carga} + \vec{E}_{hilo}$

Para estar en equilibrio: $\vec{\tau}_T = \vec{p} \times \vec{E} = 0$; $\vec{p} \parallel \pm \vec{E}$

$$\vec{E}_{carga} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \left\{ r = \sqrt{(6a)^2 + (8a)^2} = 10a \right\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 100a^2}$$

$$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \left\{ r = \sqrt{(24a)^2 + (7a)^2} = 25a \right\} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 25a}$$

$\vec{E}_x = E_{carga}\cos\alpha_q - E_{hilo}\cos\alpha_{hilo}$; $E_x = 0$; $\vec{E}_q \cdot \cos\alpha_q = \vec{E}_{hilo}\cos\alpha_{hilo}$.

$$\cos q = \frac{cont}{hip} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos hilo = \frac{cont}{hip} = \frac{24}{25}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 100a^2}\,\frac{3}{5} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 25a}\cdot\frac{24}{25}$$

$$\boxed{Q = \frac{64\lambda a}{5}}$$ como $Q > 0$.

$\vec{E}_q \parallel \vec{u}_y$
$\vec{E}_h \parallel \vec{u}_y$ } E_p corresponderá con $|E_p|_{min} = -p\vec{E}_T = -pE_y$

$\boxed{\text{Equilibrio es estable.}}$

$$E_p = -pE_y \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}\alpha_q = \frac{op}{hip} = \frac{8a}{10a} = \frac{4}{5} \\ \operatorname{sen}\alpha_h = \frac{op}{hip} = \frac{7a}{25a} = \frac{7}{25} \end{array} \right.$$

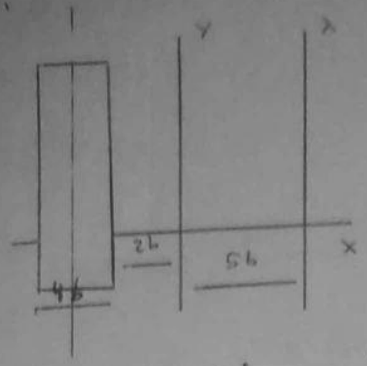
$$E_q = \frac{64\lambda a}{5} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 100a^2} = \frac{4\lambda}{125\pi\varepsilon_0 a}.$$

$$E_h = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 25a}$$

$$E_y = \frac{4\lambda}{125\varepsilon_0 a}\cdot\frac{4}{5} + \frac{\lambda}{50\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{7}{25} = \frac{39\lambda}{1250\pi\varepsilon_0}$$

$$\left[E_p = -\frac{39p\lambda}{1250\pi\varepsilon_0 a} \right]$$

5.



Dato:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{\rho a}{2\varepsilon}\,\vec{u}_1$$

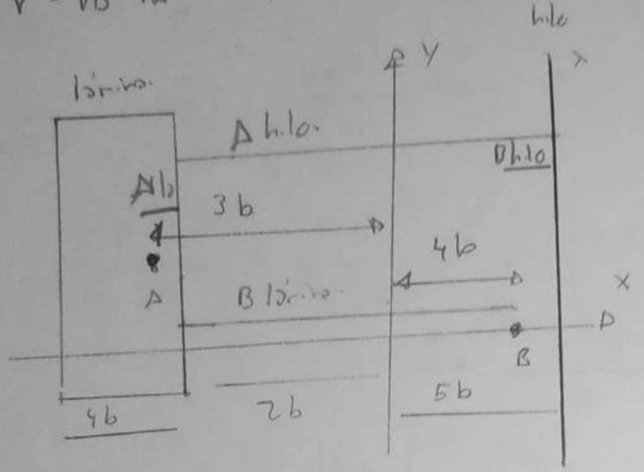
$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\,\vec{u}_1$$

Densidad lineal de carga: $\lambda = \frac{Q}{L}$; $\lambda \frac{dq}{dl} \to V = \int \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$\Delta V = V_B - V_A$ en los puntos $A(-3b, b, 0)$ y $B(4b, 0, 0)$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{hilo} + \vec{E}_{lámina}$$



A del hilo: distancia entre el hilo y el punto A = 8b.

B del hilo: distancia entre el hilo y el punto B = b

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}_{hilo}\, d\vec{l} - \int_A^B \vec{E}_{lámina}\, d\vec{l}$$

$$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r \quad , \quad \int_A^B \vec{E}_{hilo}\, d\vec{l} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{8b}^{b} \frac{1}{r}\, dr =$$

$\{\vec{u}_r \cdot d\vec{l} = dr\}$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r)\Big|_{8b}^{b} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(b) - \ln(8b)\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left[\frac{\cancel{b}}{8\cancel{b}}\right] =$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(2^{-3}\right) = -\frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2)$$

$$\boxed{\int_A^B \vec{E}_{hilo} = -\frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2)}$$

$\int_A^B \vec{E}_{lámina}\, d\vec{l} =$ $\qquad \vec{u_n} = \vec{u_\perp}$

$\vec{E}_{int} = \frac{\rho d}{\varepsilon_0}\vec{u_\perp} \qquad \vec{E}_{ext} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}\vec{u_\perp}$ $\qquad$ d: distancia al plano de simetría

Particularizando:

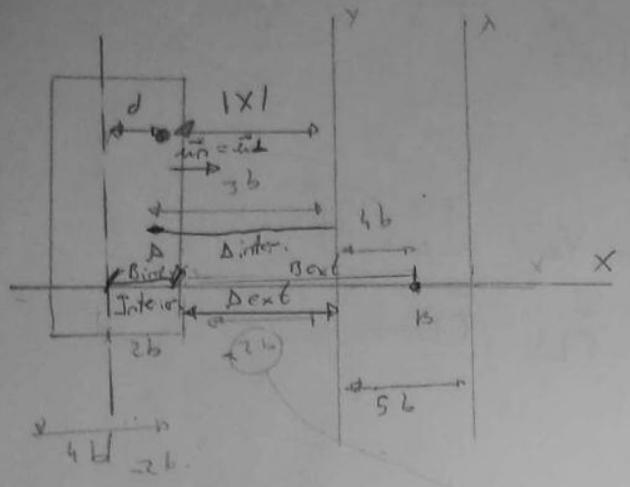


Lámina Interior:

$d = 4b - |x|$

$\begin{cases} x < 0 \\ |x| = -x \end{cases}$

$\vec{u_\perp} = \vec{u_x}$

Lámina Interior:

$\left.\begin{matrix} d = 4b + x \\ \vec{u_\perp} = \vec{u_x} \end{matrix}\right\} \vec{E}_{int}\,(-4b < x < -2b) = \frac{\rho(4b+x)}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$

$\left.\begin{matrix} a = 4b \\ \vec{u_\perp} = \vec{u_x} \end{matrix}\right\} \vec{E}_{ext} = \frac{\rho \cdot 4b}{2\varepsilon_0}\vec{u_x}$

$\int_A^B \vec{E}_{lámina}\, d\vec{l} = \int_{-3b}^{-2b} \vec{E}_{int} + \int_{-2b}^{4b} \vec{E}_{ext}\, d\vec{l} =$

$= \int_{-3b}^{-2b} \frac{\rho(4b+x)}{\varepsilon_0}dx + \int_{-2b}^{4b} \frac{\rho \cdot 4b}{2\varepsilon_0}dx =$

$= \frac{4b\rho}{\varepsilon_0}\int_{-3b}^{-2b} dx + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\int_{-3b}^{-2b} x\,dx + \frac{4b\rho}{2\varepsilon_0}\int_{-2b}^{4b} dx =$

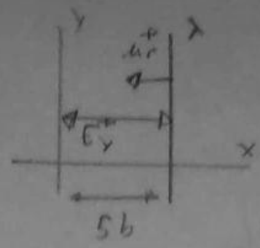
$= \frac{4b\rho}{\varepsilon_0}\left[-2b+3b\right] + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-3b}^{-2b} + \frac{4b\rho}{2\varepsilon_0}(4b+2b) =$

$= \frac{4b\rho}{\varepsilon_0}\overbrace{\left[-2b+3b\right]}^{b} + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\underbrace{\left(4b^2 - 9b^2\right)}_{-5b^2} + \frac{2b\rho}{\varepsilon_0}(6b) =$

$= \frac{4b^2\rho}{\varepsilon_0} + \frac{-5b^2\rho}{2\varepsilon_0} + \frac{24b^2\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{b^2\rho}{2\varepsilon_0}(8-5+24) = \boxed{\frac{27\rho b^2}{2\varepsilon_0}}$

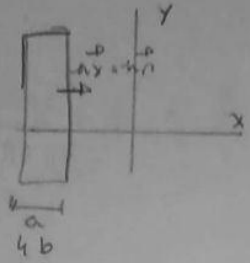
El campo eléctrico es nulo en el eje Y.

Cálculo de ρ:



$$\vec{E}(0,y,0)=0$$

$$\vec{E}_{hilo}(0,y,0)+\vec{E}_{lámina}(0,y,0)=0$$



$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r+\frac{\rho\cdot a}{2\varepsilon_0}\vec{u}_n$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 5b}(-\vec{u}_x)+\frac{\rho\cdot 4b}{2\varepsilon_0}\vec{u}_x=0$$

$$\frac{\rho\cdot 2b}{\varepsilon_0}=\frac{\lambda}{10\pi\varepsilon_0 b}\ ;\quad \boxed{\rho=\frac{\lambda}{20\pi b^2}}$$

$$[\rho]=\frac{C}{m^3}$$

$$\left.\begin{array}{l}[\lambda]=\frac{C}{m}\\ [b^2]=m^2\end{array}\right\}\frac{C}{m^3}$$

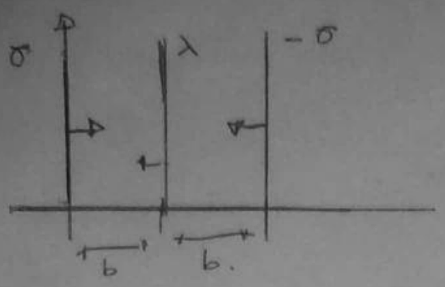
$$V_B-V_A=-\int_A^B\vec{E}_{hilo}\,d\vec{l}-\int_A^B\vec{E}_{lámina}\,d\vec{l}=$$

$$=+\frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2)-\frac{27b^2}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda}{20\pi b^2}=$$

$$=\frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2)-\frac{27\lambda}{40\pi\varepsilon_0}=\frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(2)-\frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{9}{20}=$$

$$\boxed{V_B-V_A=\frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(2)-\frac{9}{20}\right]}$$

PLANOS. 9.



$$\vec{E_P} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_\perp}$$

$$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$$

1) $\vec{E_T} = \vec{E}_{P_1} + \vec{E}_{P_2} + \vec{E}_{hilo}$

Para $x < 0$:

$$\vec{E_T} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b+|x|)}(-\vec{u_x}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x})$$

$$\vec{E_T}(x<0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b+|x|)}(-\vec{u_x})$$

Para $0 < x < b$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{u_x}) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b-x)}(-\vec{u_x}) + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(b+|x|)}(-\vec{u_x}) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

Para $b < x < 2b$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{u_x}) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(x-b)}\vec{u_x} + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}(-\vec{u_x}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(x-b)}\vec{u_x} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

Para $2b < x$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\vec{u_x}) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(x-b)}\vec{u_x} + \frac{(-\sigma)}{2\varepsilon_0}\vec{u_x} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(x-b)}\vec{u_x}$$

2) Relación entre σ y λ Punto A : $\left(\frac{4b}{3}, 0\right)$ $b < x < 2b$.

$(V_B - V_A) = 0$. Punto B : $\left(\frac{5b}{3}, 0\right)$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_{\frac{4b}{3}}^{\frac{5b}{3}} \left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (x-b)} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) dx$$

$$= -\left[\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(x-b) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} x \right]_{\frac{4b}{3}}^{\frac{5b}{3}} = -\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{2b/3}{b/3} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} b/3 \right)$$

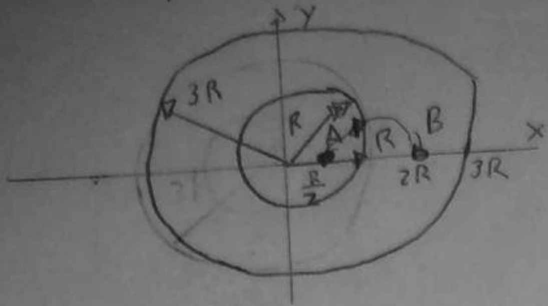
Si $V_B - V_A = 0$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} b/3 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{2b/3}{b/3} \right)$$

$$\boxed{\frac{\sigma}{\lambda} = -\frac{3}{2\pi b} \ln(2)}.$$ Relación $\frac{\sigma}{\lambda}$

10.

Momento dipolar $\vec{p} = p_0 \vec{u}_x$



Densidad volumétrica de la carga: $\rho = \frac{Q}{V}$; $\rho = \frac{3p_0}{16\pi R^4} = \frac{dq}{dV}$

$\vec{F} = q_0 \vec{E}$

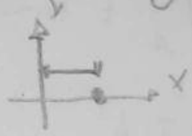
Wext (desde A hasta B) $= \Delta E_p = q \Delta V = q(V_B - V_A)$

$$\left[W_{ext} = -W_{\vec{E}} \right]$$

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} = -\int_A^B \vec{E}_{dipolo} - \int_A^B \vec{E}_{corona}\, d\vec{l}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_{dipolo} + \vec{E}_{corona}$$

$\theta = 0$



Punto A:

$r_A = R/2$; $\cos\theta_A = 1$

$r_B = 2R$; $\cos\theta_B = 1$

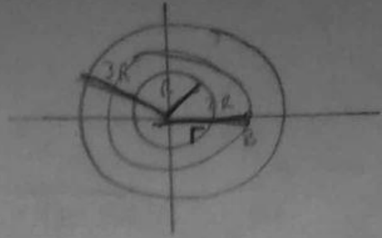
$$\left[V_{dipolo} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \right]$$

$$V_B = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 (2R)^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{4R^2}$$

$$V_A = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{R^2}$$

$$\left[V_B - V_A = \frac{p_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{4R^2} - \frac{4}{R^2} \right) = -\frac{15 p_0}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \right]$$

$\int_A^B \vec{E}_{corona}\, d\vec{l} \rightarrow$ ¿$\vec{E}$ corona?



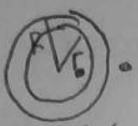
Aplicamos la ley de Gauss: $\phi = \oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

• Simetría de distribución: $\vec{E} = E(r)\,\vec{a_r}$ Esférica

Superficie Gaussiana : $E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} =$ $\left\{ \vec{E} \parallel d\vec{s}\ ;\ \cos\theta = 1 \right\}$

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \oint_S E\cos\theta\, ds = E\oint_S ds = E\, 4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$



Para $r < R$:

$$Q_{enc} = 0 \rightarrow \vec{E}(r < R) = 0$$

Para $R < r < 3R$

$$Q_{enc} = \rho \frac{4}{3}\pi \left[r^3 - R^3 \right]$$

$$\Phi = E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi \left[r^3 - R^3 \right]}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\, 4\pi \left[r^3 - R^3 \right]}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho\, 4\pi \left[r^3 - R^3 \right]}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho \left[r^3 - R^3 \right]}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r - \frac{R^3}{r^2} \right]$$

$$\vec{E}(R < r < 3R) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r - \frac{R^3}{r^2} \right] \vec{u_r}$$

$$\int_A^B \vec{E}_{corona}\, d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}(r < R)\, d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}(R < r < 3R) =$$

$$= \int_{\frac{R}{2}}^{R} 0 \cdot d\vec{e} + \int_R^{2R} \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) dr = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{2} + \frac{R^3}{r} \right]_R^{2R}$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\left(\frac{4R^2}{2} + \frac{R^3}{2R} \right) - \left(\frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{R} \right) \right] = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{5R^2}{2} - \frac{3R^2}{2} \right] =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\frac{2R^2}{2} \right) = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

$$\left\{ p = \frac{3p_0}{16\pi R^4} \right\}$$

$$\left[\int_A^B \vec{E}_{corona} \, d\vec{l} = \frac{pR^2}{3\varepsilon_0} = \frac{3p_0 R^2}{48\pi\varepsilon_0 R^4} = \frac{p_0}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \right]$$

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}_{dipolo} \, d\vec{l} - \int_A^B \vec{E}_{corona} =$$

$$\left[V(B) - V(A) = -\frac{15 p_0}{16\pi\varepsilon_0 R^2} - \frac{p_0}{16\pi\varepsilon_0 R^2} = -\frac{16 p_0}{16\pi\varepsilon_0 R^2} \right]$$

$$\left[W_{ext} = \frac{p_0}{\pi\varepsilon_0 R^2} = q(V_B - V_A) = -\frac{q p_0}{\pi\varepsilon_0 R^2} \right]$$

Determinar la velocidad de la carga q en el punto B sabiendo que $v(A) = 0$, $q > 0$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = -W_{ext} \qquad v_i = v(A) = 0$$

$$v_f = v(B)$$

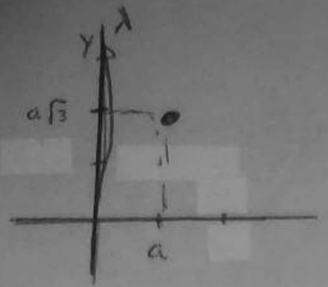
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 = -\left(-\frac{q p_0}{\pi\varepsilon_0 R^2} \right) \qquad \left\{ \vec{u}_r \parallel \vec{u}_x \right\}$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{q p_0}{\pi\varepsilon_0 R^2} \quad ; \quad v_f = \sqrt{\frac{2 q p_0}{\pi m \varepsilon_0 R^2}}$$

$$\left[\vec{v}_f = \sqrt{\frac{2 q p_0}{\pi m \varepsilon_0 R^2}} \, \vec{u}_x \right]$$

11.



$$E_{p_i} = -\frac{b\lambda\sqrt{3}}{\pi a \varepsilon_0}$$

$$\vec{\tau}_i = \frac{b\lambda}{\pi a \varepsilon_0}(-\vec{u_z})$$

a) $\vec{p_i} = q\,\vec{L}$

$$\left\{\begin{array}{l} E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext} \\ \vec{\tau} = \vec{p}\times\vec{E}_{ext} \end{array}\right]$$

$$\vec{p_i} = p_x\vec{u_x} + p_y\vec{u_y} + p_z\vec{u_z}$$

$$\vec{E}_{h.l.c} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r} \quad ; \quad \vec{E}_{h.l.c} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{u_x}$$

$$E_p = -p_x \cdot \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} = -\frac{b\lambda\sqrt{3}}{\pi a \varepsilon_0}$$

$$\boxed{p_x = +2b\sqrt{3}}$$

$$\vec{p_i} = p_x\vec{u_x} + p_y\vec{u_y} + p_z\vec{u_z}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p_i}\times\vec{E} = p_y E(-\vec{u_z}) + p_z E\,\vec{u_y}$$

$$\vec{\tau}_i = \frac{b\lambda}{\pi a\varepsilon_0}(-\vec{u_z})$$

$$p_z E = 0$$

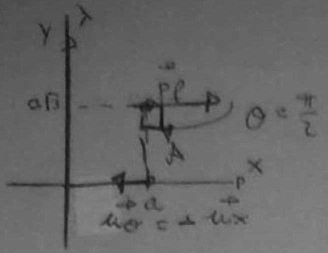
$$p_y E = \frac{b\lambda}{\pi a \varepsilon_0} \rightarrow p_y\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{b\lambda}{\pi a \varepsilon_0}$$

$$\boxed{p_y = 2b}$$

$$\vec{p_i} = 2b\sqrt{3}\,\vec{u_x} + 2b\,\vec{u_y}$$

$$|\vec{p_i}| = \sqrt{4b^2 3 + 4b} = 4b$$

2.)



campo eléctrico ? $\vec{E}(A)$

Dipolo posición equilibrio estable: $E_p = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext} = -p\,E_{ext}\cos\theta$; $|E_p|_{min} = -p\,E_{ext}$ $\Big\}$ $\cos\theta = 1$; $\theta = 0$; $\vec{p} \parallel \vec{E}_{ext}$

DATO.

$$\left.\begin{array}{l} pf = p_i = 4b \\ \vec{p}f \parallel \vec{u}_x \end{array}\right\} \vec{p}f = 4b\,\vec{u}_x$$

$$\vec{E}(A) = \vec{E}_{hilo} + \vec{E}_{dipolo}$$

$$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{u}_r \rightarrow \vec{E}_{hilo}(A) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{u}_x$$

$$\vec{E}_{dipolo} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u}_r + \frac{p\,\text{sen}\,\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{En A}: r_A = a\sqrt{3} \\ \theta_A = \frac{\pi}{2}\ ;\ \vec{u}_\theta = -\vec{u}_x \end{array}\right.$$

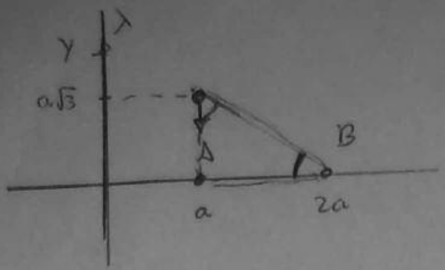
$$\left\{\begin{array}{l} \cos\theta = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 1 \end{array}\right\} \vec{E}_{dipolo} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_{dipolo}(A) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 (a\sqrt{3})^3}\vec{u}_x = -\frac{4b}{4\pi\varepsilon_0\, 3\sqrt{3}\, a^3}\vec{u}_x$$

$$\vec{E}_{dipolo}(A) = -\frac{b}{\pi\varepsilon_0\, 3\sqrt{3}\, a^3}$$

$$\vec{E}(A) = \vec{E}_{hilo} + \vec{E}_{dipolo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} - \frac{b}{\pi\varepsilon_0\, 3\sqrt{3}\, a^3} =$$

$$\boxed{\vec{E}(A) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(\lambda - \frac{2b}{3\sqrt{3}\, a^2}\right)\vec{u}_x}$$



$$\nabla V = V(A) - V(B) = -\int_B^A \vec{E}_{dipolo}\, d\vec{l} - \int_B^A \vec{E}_{hilo}\, d\vec{l}$$

$$\theta_A = \frac{\pi}{2} \quad ; \cos\theta_A = 0$$

$$V_{dipolo} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad r_A = a\sqrt{3}$$

$$r_B = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$$

$$\cos\theta_B = \frac{\text{cont.}}{\text{hip}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$V_{dipolo} = -V_B = \frac{p}{8\pi\varepsilon_0 (2a)^2} = -\frac{p}{32\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad \{p = 4b\}$$

$$\left[V_{dipolo} = -\frac{4b}{32\pi\varepsilon_0 a^2} = -\frac{b}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \right]$$

Simetría

$$r_A = a \qquad \vec{u_r} \parallel \vec{u_x} \qquad \vec{E} = E(r)\cdot\vec{u_r}$$

$$r_B = 2a$$

$$\vec{E}_{hilo} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

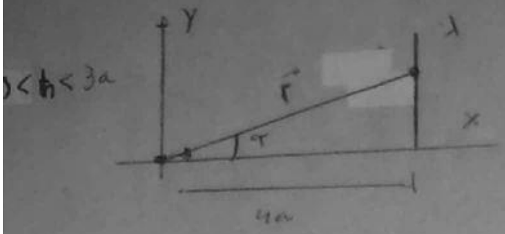
$$\int_B^A \vec{E}_{hilo} = \int_{2a}^{a} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r)\Big|_{2a}^{a}$$

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln(a) - \ln(2a)\right] = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(2)$$

$$\left[V(A) - V(B) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(2) - \frac{b}{8\pi\varepsilon_0 a^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\lambda\cdot\ln(2) - \frac{b}{4a^2}\right] \right]$$

Julio 2018

12. $L = 3a$



$$\vec{E}_{\text{varilla}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u_r}$$

$h = 2a$ $\quad h = a$

$h = 3a$

Densidad lineal de carga $\quad \vec{u_r} = -\vec{u_x}$ $\quad r = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2} = \sqrt{25}\,a = 5a$

$$\left[\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{3a}\right]$$

$$\cancel{\vec{E}_{\text{varilla}} = \frac{\frac{Q}{3a}}{2\pi\varepsilon_0\, 4a}\left(-\vec{u_x}\right) = \frac{-Q}{24\,a^2\pi\varepsilon_0}\,\vec{u_x}}$$

$$r = \sqrt{(4a)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{5}\,a$$

$$\vec{E}_{\text{varilla}} = \frac{\frac{Q}{3a}}{2\pi\varepsilon_0 (2\sqrt{5})}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{u_x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{u_y}\right) =$$

$$\cos\alpha = \frac{4a}{2\sqrt{5}\,a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2a}{2\sqrt{5}\,a} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad = \frac{-\lambda}{20\pi\varepsilon_0}\left(+2\,\vec{u_x} + \vec{u_y}\right)$$

$$\left(\cos\alpha = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{3a}{5a} = \frac{3}{5}\right)$$

$$\vec{E}_{\text{varilla}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, 5a}\left(-\frac{4}{5}\,\vec{u_x} - \frac{3}{5}\,\vec{u_y}\right) =$$

$$\vec{E}_{\text{varilla}} = \frac{-\lambda}{50\pi\varepsilon_0}\left(+4\,\vec{u_x} + 3\,\vec{u_y}\right)$$

Problema 1

1) $W = \dfrac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$

2) $\vec{E}\left(z<a\sqrt{3}\right) = \left(\dfrac{2qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+a^2\right)^{3/2}} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(a\sqrt{3}-z\right)^2} \right)\vec{u}_z$

$\vec{E}\left(z>a\sqrt{3}\right) = \left(\dfrac{2qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+a^2\right)^{3/2}} + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z-a\sqrt{3}\right)^2} \right)\vec{u}_z$

3) $\vec{\tau} = \dfrac{bq}{12\pi\varepsilon_0 a^2}\left(2\vec{u}_x + \vec{u}_y\right)$

Problema 2

1) $W = -\dfrac{q^2}{120\pi\varepsilon_0 a}$

2) $E_p = -\dfrac{91 p_0 q}{250\pi\varepsilon_0 a^2}$

Problema 3

1) $q_2 = -\dfrac{9}{2}q_0$

2) Equilibrio inestable.

3) $W = -\dfrac{q_0 p_0\sqrt{3}}{32\pi\varepsilon_0 a^2}\left(2-\sqrt{3}\right)$

Problema 4

$\sigma = -\dfrac{9\lambda}{40\pi a}$

Problema 5

1) $\rho = 8\dfrac{\sigma}{a}$

2) $V_B - V_A = -\dfrac{4\sigma a}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{8} + \ln 2\right)$

Problema 6

$E_p = \dfrac{3pq}{8\pi\varepsilon_0 a^2}$

Problema 7

$Q = \dfrac{64\lambda a}{5}$. El equilibrio es estable. $E_p = -\dfrac{39p\lambda}{1250\pi\varepsilon_0 a}$

Problema 8

$$V_B - V_A = \frac{3\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[(\ln 2) - \frac{9}{20}\right]$$

Problema 9

1) $\vec{E}(x<0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (x-b)}\vec{u}_x = \vec{E}(x>2b)$; $\vec{E}(0<x<b) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (x-b)}\vec{u}_x + \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x = \vec{E}(b<x<2b)$

2) $\frac{\sigma}{\lambda} = -\frac{3\ln 2}{2\pi b}$

Problema 10

$$W = -\frac{q\,p_0}{\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Problema 11

1) $\vec{p}_i = 4b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_x + \frac{1}{2}\vec{u}_y\right)$

2) $\vec{E}_A = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a}\left(\lambda - \frac{2b}{3a^2\sqrt{3}}\right)\vec{u}_x$

3) $V_A - V_B = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[(\lambda\, ln\, 2) - \frac{b}{4a^2}\right]$

Problema 12

1) $\vec{E}(0,0) = -\frac{\lambda}{80\pi\varepsilon_0 a}3(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$

2) $\vec{p} = \frac{80\,p_0}{\sqrt{20}}(\vec{u}_x - 2\vec{u}_z)$