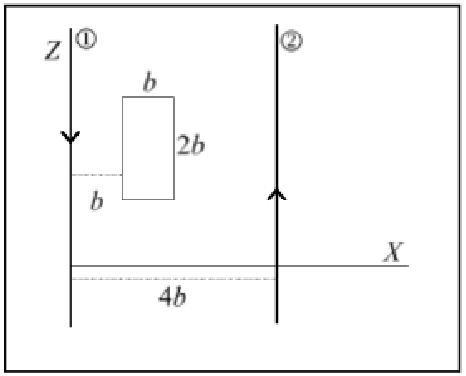
Problema 11 del Tema 5: Campos electromagnéticos

11. Dos hilos rectos e indefinidos, recorridos por intensidades de corriente $I_1 = I_0$ e $I_2 = 2I_0$, y una espira rectangular de lados b y $2b$, están situados como indica la figura:

1) Calcular el flujo magnético a través de la espira.
2) Determinar razonadamente en qué puntos del plano XZ podría situarse un dipolo, de momento magnético $m\vec{u}_x$, para que se encontrase en equilibrio.

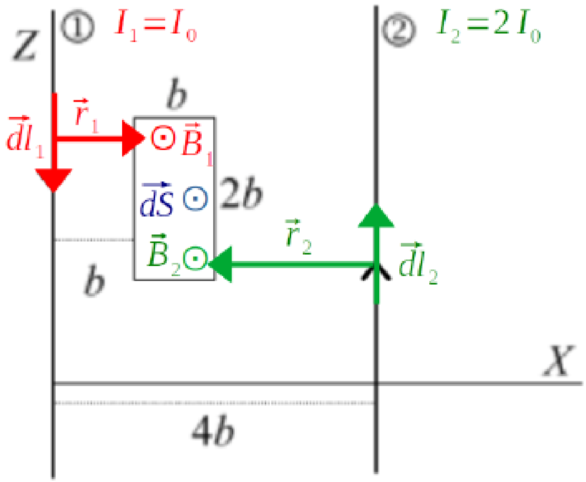
Si la corriente que circula por el hilo ② se hace variar con el tiempo de la forma $I_2 = 2I_0 e^{-\alpha t}$:

3) Obtener la fuerza electromotriz inducida en la espira.
4) Razonar hacia dónde empezaría a moverse si se la dejase libre.



***Problema* 11**

1)



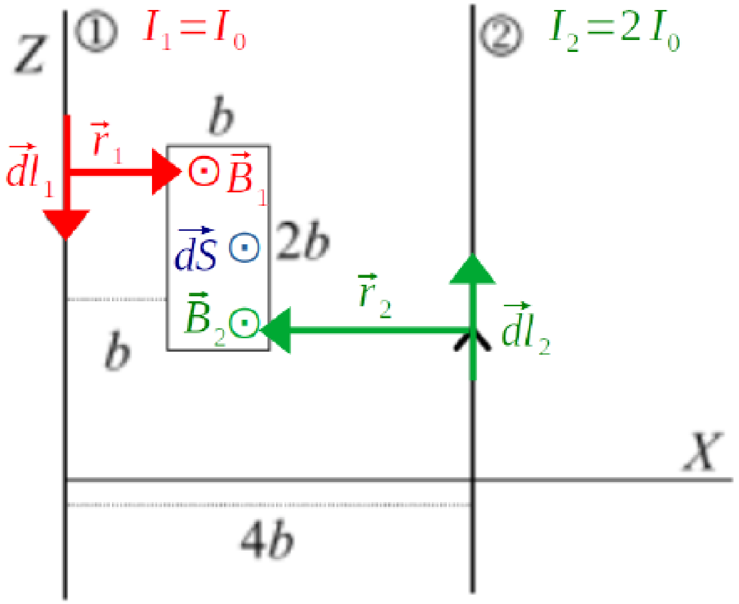
$$\Phi_T = \iint \vec{B}_T \cdot d\vec{S} \quad ; \quad \vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

$$\Phi_T = \iint (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot d\vec{S} = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_T = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\vec{B}_h = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad ; \quad d\vec{B} = I d\vec{\ell} \times \vec{u}_r$$

Problema 11



En el plano de la espira:

$$d\vec{B}_1 \parallel I_1 \cdot d\vec{\ell}_1 \times \vec{u}_{r1} \parallel (-\vec{u}_z) \times \vec{u}_x \parallel (-\vec{u}y)$$

$$d\vec{B}_2 \parallel I_2 \cdot d\vec{\ell}_2 \times \vec{u}_{r2} \parallel \vec{u}_z \times (-\vec{u}_x) \parallel (-\vec{u}y)$$

$$\Rightarrow \ \vec{B}_1 \parallel \vec{B}_2 \parallel -\vec{u}_y$$

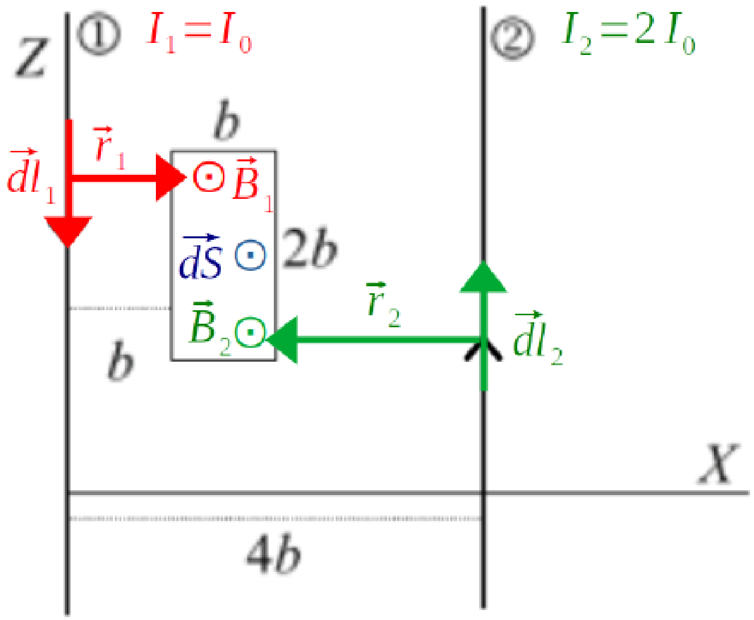
Elegimos: $d\vec{S} \parallel -\vec{u}_y \ \Rightarrow \ d\vec{S} = dr\, dz(-\vec{u}_y)$

$$\Phi_T = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} + \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} dr_1\, dz + \iint \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \cdot dr_2\, dz =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+2b} dz \int_b^{2b} \frac{dr_1}{r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+2b} dz \int_{2b}^{3b} \frac{dr_2}{r_2} =$$

$$= \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} 2b \ln\left(\frac{2b}{b}\right) + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} 2b \ln\left(\frac{3b}{2b}\right) \quad \Rightarrow$$

Problema 11



$$\Phi_T = \frac{\mu_0 b}{\pi}\left[I_1 \ln 2 + I_2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$

$$I_1 = I_0 \quad ; \quad I_2 = 2I_0$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_T = \frac{\mu_0 b I_0}{\pi}\left[\ln 2 + 2\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right] \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi_T = \frac{\mu_0 b I_0}{\pi}\ln\left(\frac{9}{2}\right)}$$

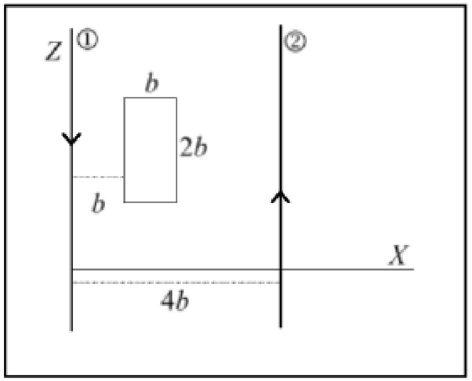
Problema 11

11. Dos hilos rectos e indefinidos, recorridos por intensidades de corriente $I_1 = I_0$ e $I_2 = 2I_0$, y una espira rectangular de lados b y $2b$, están situados como indica la figura:

1) Calcular el flujo magnético a través de la espira.
2) Determinar razonadamente en qué puntos del plano XZ podría situarse un dipolo, de momento magnético $m\vec{u}_x$, para que se encontrase en equilibrio.

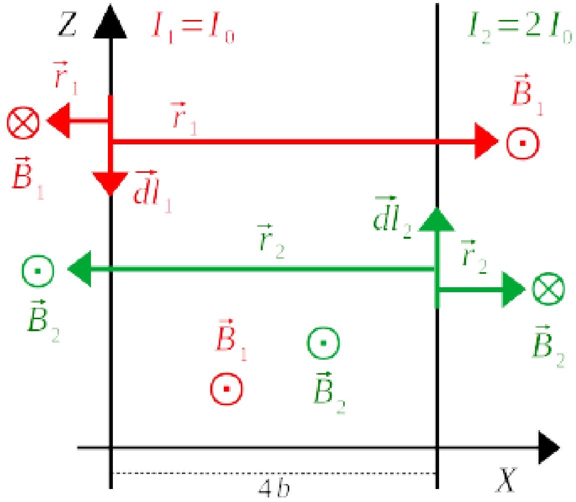
Si la corriente que circula por el hilo ② se hace variar con el tiempo de la forma $I_2 = 2I_0 e^{-\alpha t}$:

3) Obtener la fuerza electromotriz inducida en la espira.
4) Razonar hacia dónde empezaría a moverse si se la dejase libre.



***Problema* 11**

2)

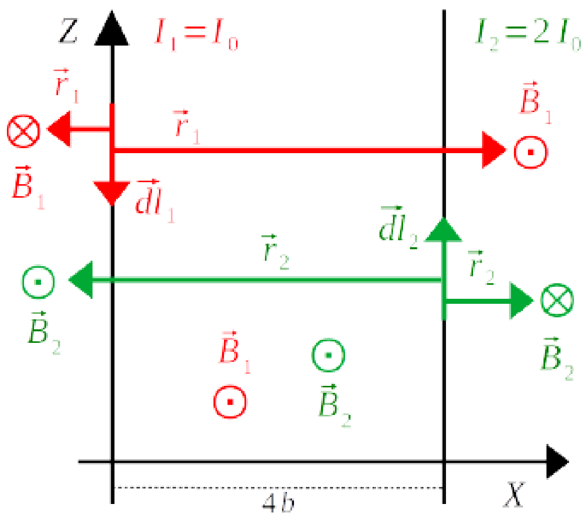


Equilibrio: $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_T = 0 \;\Rightarrow\; mB_T \operatorname{sen}\theta = 0$

$$\vec{m} \parallel \vec{u}_x \quad ; \quad \vec{B}_T \parallel \pm\vec{u}_y \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\theta \neq 0$$

$$\Rightarrow\; \vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0 \;\Rightarrow\; \vec{B}_1 = -\vec{B}_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \vec{B}_1 \uparrow\downarrow \vec{B}_2 \\ B_1 = B_2 \end{cases}$$

Problema 11



$$(x < 0) \begin{cases} \vec{B}_1 \parallel \vec{u}_y \\ \vec{B}_2 \parallel -\vec{u}_y \end{cases}$$

$$(x > 4b) \begin{cases} \vec{B}_1 \parallel -\vec{u}_y \\ \vec{B}_2 \parallel \vec{u}_y \end{cases}$$

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \Rightarrow \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 2 I_0}{2\pi r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = 2r_1 \text{ sólo posible en } x < 0$$

$$x < 0 \Rightarrow r_1 = -x \;\; ; \;\; r_2 = 4b - x \Rightarrow 4b - x = -2x \Rightarrow x = -4b$$

$$\boxed{\vec{m} \text{ en equilibrio en la recta } x = -4b \text{ del plano XZ}}$$

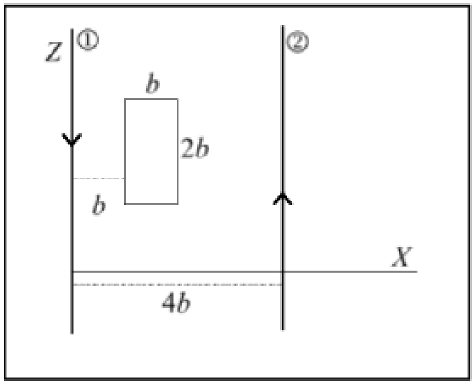
Problema 11

11. Dos hilos rectos e indefinidos, recorridos por intensidades de corriente $I_1 = I_0$ e $I_2 = 2I_0$, y una espira rectangular de lados b y $2b$, están situados como indica la figura:

1) Calcular el flujo magnético a través de la espira.
2) Determinar razonadamente en qué puntos del plano XZ podría situarse un dipolo, de momento magnético $m\vec{u}_x$, para que se encontrase en equilibrio.

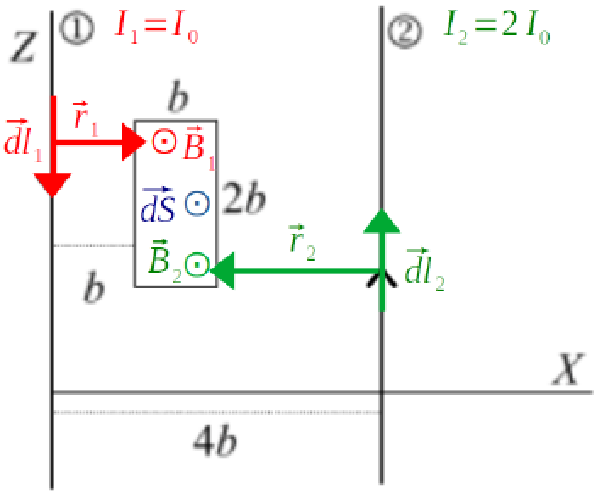
Si la corriente que circula por el hilo ② se hace variar con el tiempo de la forma $I_2 = 2I_0 e^{-\alpha t}$:

3) Obtener la fuerza electromotriz inducida en la espira.
4) Razonar hacia dónde empezaría a moverse si se la dejase libre.



***Problema* 11**

3)



$$\xi = -\frac{d\Phi_T}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 b}{\pi}\left[I_1 \ln 2 + I_2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right]\right) =$$

$$= -\frac{\mu_0 b}{\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right)\frac{dI_2}{dt} \; ; \; \frac{dI_2}{dt} = -\alpha 2 I_0 \, e^{-\alpha t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{2\mu_0 b \alpha I_0}{\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) e^{-\alpha t}}$$

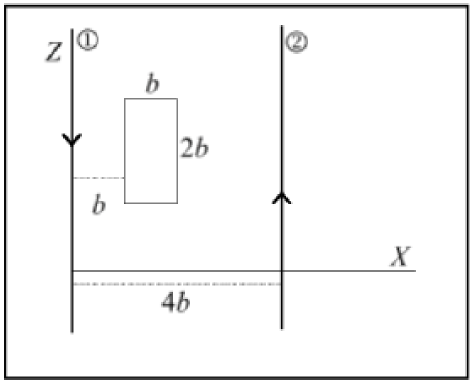
Problema 11

11. Dos hilos rectos e indefinidos, recorridos por intensidades de corriente $I_1 = I_0$ e $I_2 = 2I_0$, y una espira rectangular de lados b y $2b$, están situados como indica la figura:

1) Calcular el flujo magnético a través de la espira.
2) Determinar razonadamente en qué puntos del plano XZ podría situarse un dipolo, de momento magnético $m\vec{u}_x$, para que se encontrase en equilibrio.

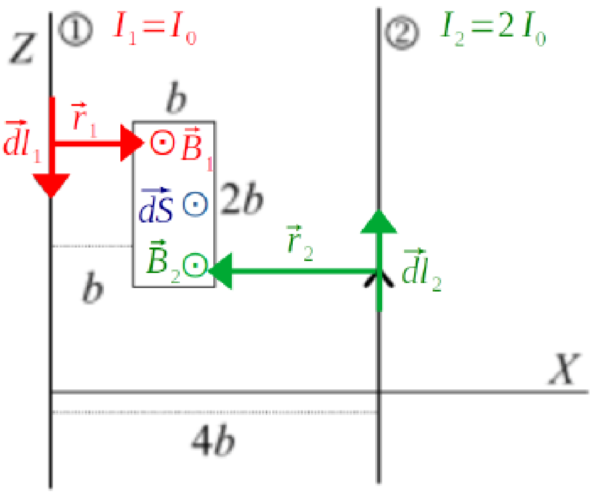
Si la corriente que circula por el hilo ② se hace variar con el tiempo de la forma $I_2 = 2I_0 e^{-\alpha t}$:

3) Obtener la fuerza electromotriz inducida en la espira.
4) Razonar hacia dónde empezaría a moverse si se la dejase libre.



***Problema* 11**

4)



$$\xi > 0 \;\Rightarrow\; I_i \equiv I_e > 0 \;\Rightarrow$$

el sentido de la corriente es el dado por $d\vec{S} \parallel -\vec{u}_y$

$\Rightarrow$ la corriente inducida es antihoraria

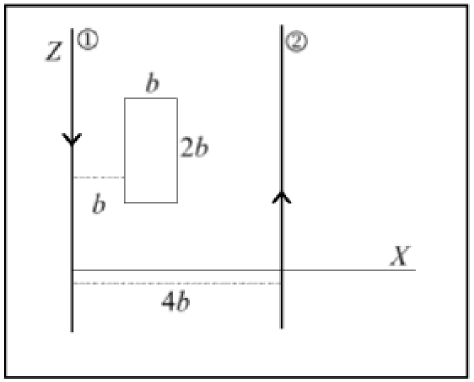
Problema 11

11. Dos hilos rectos e indefinidos, recorridos por intensidades de corriente $I_1 = I_0$ e $I_2 = 2I_0$, y una espira rectangular de lados b y $2b$, están situados como indica la figura:

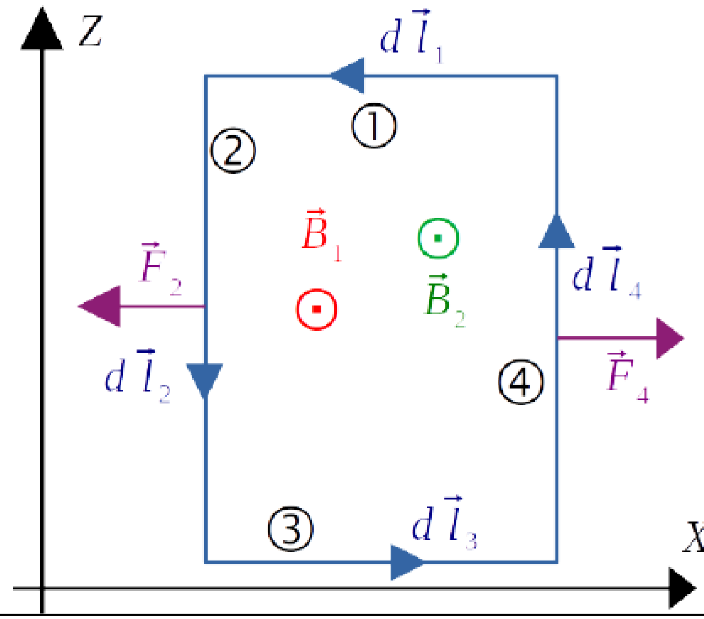
1) Calcular el flujo magnético a través de la espira.
2) Determinar razonadamente en qué puntos del plano XZ podría situarse un dipolo, de momento magnético $m\vec{u}_x$, para que se encontrase en equilibrio.

Si la corriente que circula por el hilo ② se hace variar con el tiempo de la forma $I_2 = 2I_0 e^{-\alpha t}$:

3) Obtener la fuerza electromotriz inducida en la espira.
4) Razonar hacia dónde empezaría a moverse si se la dejase libre.



***Problema* 11**



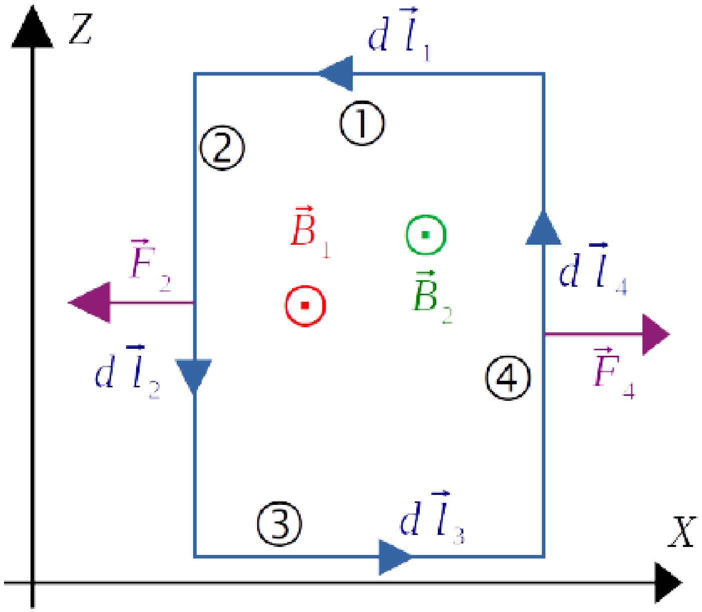
$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \quad ; \quad d\vec{F}_i = I_e \cdot d\vec{\ell}_i \times \vec{B}_T$$

$$d\vec{F}_1(x_0) = I_e \cdot d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_T(x_0)(-\vec{u}_y)$$

$$d\vec{F}_3(x_0) = I_e \cdot d\vec{\ell}_3 \times \vec{B}_T(x_0)(-\vec{u}_y)$$

$$d\vec{\ell}_1 = dx(-\vec{u}_x) \;\; ; \;\; d\vec{\ell}_3 = dx\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad d\vec{\ell}_1 = -d\vec{\ell}_3$$

Problema 11



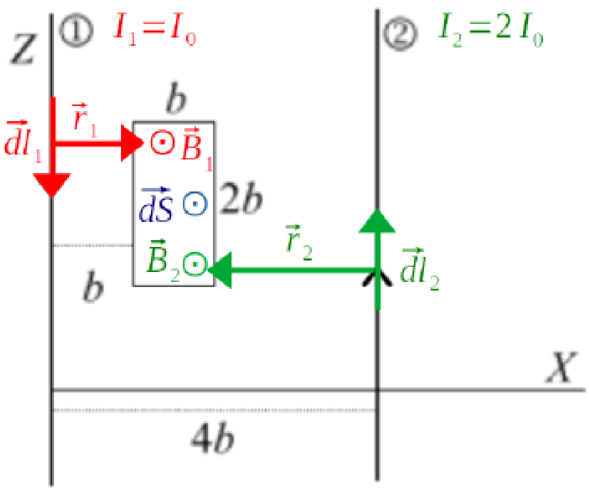
$$d\vec{F}_1(x_0) = -d\vec{F}_3(x_0)$$

$$\text{se cumple para todos los pares} \;\Rightarrow\; \vec{F}_1 = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_T = \vec{F}_2 + \vec{F}_4 \;\;;\;\; \vec{F}_i = I_e \int d\vec{\ell}_i \times \vec{B}_T$$

$$d\vec{\ell}_2 = dz(-\vec{u}_z) \;\;;\;\; d\vec{\ell}_4 = dz\vec{u}_z$$

$\vec{B}_T$ en ② y en ④ es uniforme $\Rightarrow$

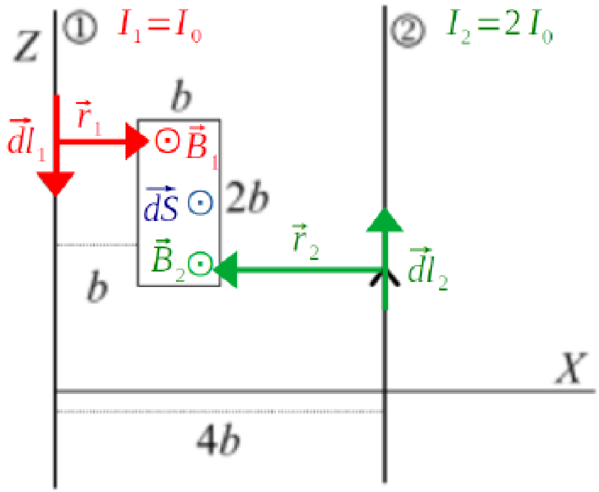


$$\vec{F}_2 = I_e\vec{L}_2 \times \vec{B}_T(x=b) \;\;;\;\; \vec{F}_4 = I_e\vec{L}_4 \times \vec{B}_T(x=2b)$$

$$\vec{L}_2 = -2b\vec{u}_z \;\;;\;\; \vec{L}_4 = 2b\vec{u}_z \;\;;\;\; \vec{B}_T \parallel (-\vec{u}_y)$$

$$\vec{F}_2 \parallel -\vec{u}_x \;\;;\;\; \vec{F}_4 \parallel \vec{u}_x$$

Problema 11



En el lado ② $r_1 = b$ y $r_2 = 3b$

$$B_{T2} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi b} + \frac{\mu_0 2 I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi 3b}\right) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}\left(2 + \frac{4}{3}e^{-\alpha t}\right)$$

$$t \to 0 \;\Rightarrow\; B_{T2} \to \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}\left(2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{5\mu_0 I_0}{6\pi b}$$

En el lado ④ $r_1 = 2b$ y $r_2 = 2b$

$$B_{T4} = \left(\frac{\mu_0 I_0}{2\pi 2b} + \frac{\mu_0 2 I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi 2b}\right) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}\left(1 + 2e^{-\alpha t}\right)$$

$$t \to 0 \;\Rightarrow\; B_{T4} \to \frac{\mu_0 I_0}{4\pi b}(1+2) = \frac{3\mu_0 I_0}{4\pi b}$$

$$\Rightarrow\; B_{T2} > B_{T4} \;\Rightarrow\; F_2 > F_4 \;\Rightarrow\; \vec{F}_T \parallel \vec{F}_2 \parallel -\vec{u}_x$$

$$\boxed{\text{La espira comenzará a moverse hacia el hilo ①}}$$