Algoritmos Quânticos

David Machado Couto Bezerra

davidmachado@alu.ufc.br

Campus Quixadá

4 de setembro de 2024

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Sumário

1 Multiplos Qubits

2 Superdense Coding

3 Transporte Quântico

4 Deutsch-Jozsa

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Produto Tensorial

- Uma definição informal seria: uma maneira de combinar espaços vetoriais para formar espaços vetoriais maiores.
- Suponha dois espaços de Hilbert **V** (dimensão n) e **W** (dimensão m), o produto tensorial $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ forma um novo espaço vetorial de dimensões *nm*.
- Os elementos desse espaço resultante são combinações lineares de $|v\rangle \bigotimes |w\rangle$ e uma é $|i\rangle \bigotimes |j\rangle$, sendo $|i\rangle$ uma base de **V** e $|j\rangle$ uma base de **W**.

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Propriedades

- Para um escalar z qualquer e vetores $|v\rangle$ e $|w\rangle$:

$$z(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (z\,|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (z\,|w\rangle)$$

- Para $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$ e $|w\rangle$ arbitrários em **V** em **W** :

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle$$

- Para $|w_1\rangle$, $|w_2\rangle$ e $|v\rangle$ arbitrários em **W** em **V** :

$$|v\rangle \otimes (|w_1\rangle + |w_2\rangle) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Operadores em Produtos Tensoriais

- Considere A sendo um operador do espaço **V** e B sendo um operador do espaço **W**, o efeito desses operadores no produto tensorial é:

$$(A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = A|v\rangle \otimes B|w\rangle$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Envio de informação por qubit

- **Problemática:** Alice e Bob desejam enviar dois bits de informação entre eles utilizando qubits.
- Superdense coding envolve enviar informação clássica por meio de um meio quântico.
- **Requisitos**:
  - Dois qubits entrelaçados;
  - Alice e Bob possuírem cada par dos qubits entrelaçados;
  - Um canal pra envio do qubit;
  - A mensagem de dois bits que deseja ser enviada.

Figura: Superdense Coding

Primeiro Passo

- O primeiro passo é realizar o entrelaçamento entre os qubits de Alice e Bob.
- O circuito a seguir produz o entrelaçamento:

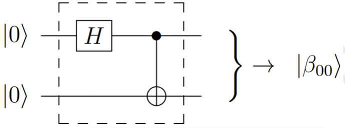

Figura: Porta Bell

- O resultado do circuito é um dos quatro estados de Bell, sendo ele o estado:

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Segundo Passo

- O segundo passo é realizar a codificação dos bits da mensagem que tem o objetivo de ser enviada no qubit de Alice.
- Pode ser feito analisando o comportamento desses estados com as porta **X** e **Z**:

$$00 : I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow |\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |\Phi^+\rangle$$

$$01 : Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow |\psi\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |\Phi^-\rangle$$

$$10 : X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow |\psi\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |\Psi^+\rangle$$

$$11 : iY = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow |\psi\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |\Psi^-\rangle.$$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Terceiro Passo

- O terceiro passo é o envio do qubit de Alice para Bob e realizar a medição utilizando os estados de Bell (Bell's measurement).
- O processo utiliza a inversora da porta BELL e com isso é feito a conversão na base Bell para o eixo z.

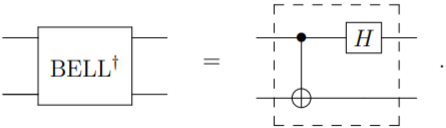

Figura: Porta inversa Bell.

- Assim obtemos os qubits na base $|0\rangle$ e $|1\rangle$ e assim obtendo como resultado os qubits transmitidos por Alice.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Circuito

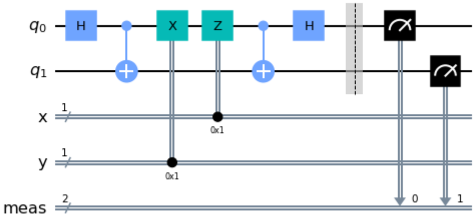

Figura: Circuito do Protocolo.

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Resumo

- O protocolo mostra que com apenas o envio de um qubit é obtido dois bits de informação.
- Uma desvantagem é o canal quântico por serem não tão "estáveis"como os clássicos.
- O protocolo garante segurança caso um dos qubits seja "capturado", pois ambos qubits são necessários para obter a mensagem.

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Envio de estado quântico

- **Problemática:** Enviar um estado quântico $|\psi\rangle$ de Alice para Bob utilizando um canal clássico.
- **Teorema da não clonagem** afirma que é impossível criar uma cópia independente e idêntica de um estado quântico desconhecido arbitrário.
- Permite o "transporte"de um estado quântico de Alice para Bob.
- **Requisitos:**
  - Dois qubits entrelaçados entre Alice e Bob;
  - Um canal de envio clássico;
  - Uma "mensagem"$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ para ser enviada.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Primeiro Passo

- Realizar o entrelaçamento entre qubits A e B.

JÁ FOI MOSTRADO!

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Segundo Passo

- O segundo passo se baseia numa demonstração em que:

$$|\psi\rangle_C |\beta_{00}\rangle_{AB} = \frac{1}{2}($$

$$|\beta_{00}\rangle_{CA} (\alpha |0\rangle_B + \beta |1\rangle_B)+$$

$$|\beta_{01}\rangle_{CA} (\beta |0\rangle_B + \alpha |1\rangle_B)+$$

$$|\beta_{10}\rangle_{CA} (\alpha |0\rangle_B - \beta |1\rangle_B)+$$

$$|\beta_{11}\rangle_{CA} (\beta |0\rangle_B - \alpha |1\rangle_B))$$

Com isso é visto que o estado do sistema pode ser expresso por estados entrelaçados dos qubits A e C. Pode ser visto também como o terceiro qubit B possui do estado $|\psi\rangle$.

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Terceiro Passo

- Podemos realizar sobre os estados de Bell em A e C, com isso obtendo informação sobre o estado em que B se encontra e como obter $|\psi\rangle$.
- Utilizar porta inversa Bell e depois realizar uma medição vai nos entregar os bits que representavam o estado em C e A se encontravam e o estado que está em B.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Passo Final

- Agora para finalizar basta ver o que se encontra em B e realizar uma manipulação para obter $|\psi\rangle$.

Alice's Measurement	00	01	10	11
Value of Bob's qubit	$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$	$\alpha\|1\rangle + \beta\|0\rangle$	$\alpha\|0\rangle - \beta\|1\rangle$	$\alpha\|1\rangle - \beta\|0\rangle$

Figura: Informação obtida da medição

- Assim:

$\mathscr{B}$ Receives	$\mathscr{B}$ Applies	$\mathscr{B}$ Recovers
"*00*"	(nothing)	$\|\psi\rangle$
"*01*"	X	$\|\psi\rangle$
"*10*"	Z	$\|\psi\rangle$
"*11*"	iY	$\|\psi\rangle$

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Circuito

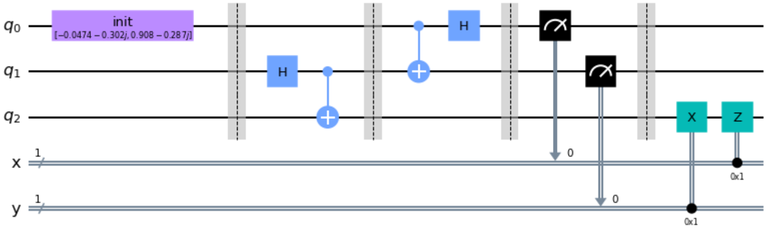

Figura: Circuito do transporte

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Resumo

- O protocolo pode ser visto que destrói toda informação que existia em C e A e com isso preservar o teorema.
- O único atraso visto no algoritmo é quando os bits são transportados, já que todo o processo de manipulação entre os qubits é paralelismo natural.
- Transporte de qubits não é rápido e possui muita instabilidade, com isso usar meios de comunicação clássico ajuda.
- Aplicações: formar redes de computadores quânticos, criar redes de comunicação mais seguras, reduzir erros de computação, etc.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Oraculo quântico

- Uma função booleana retorna valores 1 e 0, para implementar em circuitos quânticos é necessário fazer com que seja unitário (portanto reversível).
- Oráculos quânticos é a maneira de implementar essas funções clássicas em circuitos quânticos.

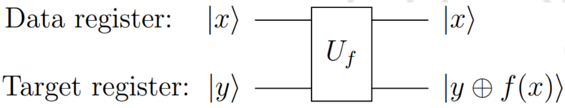

Figura: Oráculo

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Problema de Deutsch

- **Enunciado:** Uma função booleana f que recebe uma string de bits e retorna 0 ou 1, isso é:

$$f(\{x_0, x_1, x_2, ...\}) \rightarrow 1 \text{ ou } 0$$

  A função f tem a possibilidade de ser constante ou balanceada.
- Complexidade da resolução clássica seria $2^{n-1} + 1$.
- Utilizando o algoritmo quântico Deutsch-Jozsa, tem uma complexidade constante para esse problema.

Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Deutsch-Jozsa

- O algoritmo possui duas ideias base:
  - Utilizar a superposição dos qubits para se ter um paralelismo natural;
  - usar o phase kickback para trocar a informação dos registradores de saída do oráculo.

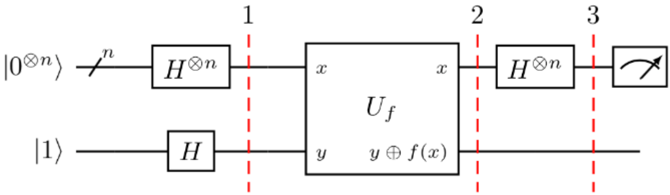

Figura: Caption

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ

Dúvidas

Perguntas?

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CAMPUS QUIXADÁ