

Notas de Geometría Proyectiva

Nicolas Cuervo Ovalle^{*1} and David Cardozo Bolívar^{**2}

¹Departamento Matematicas, Universidad de los Andes

²Departamento Física, Universidad de los Andes

5 de diciembre de 2014

1. Introducción

La finalidad de este texto es hacer un breve recorrido sobre que es la geometría proyectiva y analizar sus propiedades.

1.1. Historia

Antes de entender que es la geometría proyectiva y analizar sus propiedades, es bueno introducir una breve reseña historia sobre cuales fueron los motivos que dieron origen a esta geometría.

La geometría proyectiva tiene un origen conceptual, en el arte de perspectiva (que tuvo sus inicios a mediados del 1400) el cual se define como “... la representación de objetos tridimensionales en una superficie bidimensional (plana) con la intención de recrear la posición relativa y profundidad de dichos objetos ...” Es decir, este es un arte el cual intenta representar en un plano bidimensional la profundidad y posición relativa de los objetos en el espacio tridimensional, a su vez, este arte se caracterizo por la existencia de un punto en el “ horizonte ” o “ infinito ” en donde dos o más líneas paralelas siempre se intersectan, dicho punto lo llamamos *punto de fuga*.

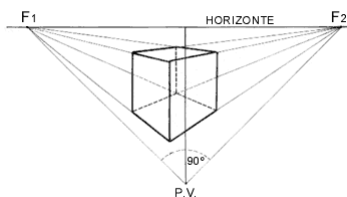


Figura 1: Puntos en el horizonte

Inspirado por el concepto de “ perspectiva ” el matemático francés Gerard Desargues, conocido como el padre de la geometría proyectiva, en 1636 escribe

* n.cuervo10@uniandes.edu.co

** gd.cardozo684@uniandes.edu.co

Traité de la perspective el cual es conocido por ser el primer estudio conciso sobre la perspectiva y sus propiedades, planteando así por primera vez el concepto de *transformación proyectiva* y asimismo introducir la idea de *Geometría Proyectiva*.

1.2. Conocimientos Previos

Apesar de que el contenido de este texto no pretenderá ser demasiado sofisticado, es necesario definir la terminología de Campo, Espacio Vectorial, Relación Equivalencia, Transformación Lineales, y Proyecciones sobre sub-espacios; los cuales serán necesarios para definir y entender el concepto de *Geometría Proyectiva*.

Definición 1. *Un campo (o un cuerpo) es un conjunto \mathbb{F} con dos funciones $(\cdot, +)$ y dos elementos distinguidos 1 y 0 , ambos en \mathbb{F} tales que para todo elemento $a, b, c \in \mathbb{F}$ cumple que:*

1. Suma

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (a, b) &\rightarrow a + b \end{aligned}$$

Con las siguientes propiedades:

Conmutativo $a + b = b + a$

Asociativo $(a + b) + c = a + (b + c)$

Identidad $a + 0 = a$

2. Multiplicación

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (a, b) &\rightarrow a \cdot b \end{aligned}$$

Con las siguientes propiedades:

Conmutativo $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativo $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Identidad $a \cdot 1 = a$

Existencia de Inversos $\exists \alpha \in \mathbb{F}$ tales que $a + \alpha = 0$ y si $a \neq 0$, $\exists \beta$ tales que $a \cdot \beta = 1$

Distribución de \cdot sobre $+$ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Por ultimo, estudiaremos sobre campos que tienen esta característica: $0 \neq 1$

Propiedad 1 (Unicidad de Inversos). *Sea \mathbb{F} un campo y $a \in \mathbb{F}$ tales que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tales que $a + \alpha = 0$ y si $a \neq 0$, $a \cdot \beta = 1$, entonces α, β son únicos.*

Demostración. Sea $\alpha, \alpha' \in \mathbb{F}$ tales que $a + \alpha = 0$ y $a + \alpha' = 0$, Luego,

$$\begin{aligned} a + \alpha &= a + \alpha' \\ \Leftrightarrow a - a + \alpha &= a + \alpha' - a \\ \Leftrightarrow 0 + \alpha &= 0 + \alpha' \\ \Leftrightarrow \alpha &= \alpha' \end{aligned}$$

Ahora sea $\beta, \beta' \in \mathbb{F}$ y $a \neq 0$ tales que $a \cdot \beta = 1$ y $a \cdot \beta' = 1$ Luego,

$$\begin{aligned} a \cdot \beta &= a \cdot \beta' \\ \Leftrightarrow (a \cdot \beta) - (a \cdot \beta') &= 0 \\ \Leftrightarrow a \cdot (\beta - \beta') &= 0 \end{aligned}$$

Como a es diferente del elemento 0, tenemos:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \beta - \beta' &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta &= \beta' \end{aligned}$$

Concluimos entonces, que α y β son únicos. □

Definición 2. Un Espacio Vectorial sobre un campo \mathbb{F} consiste de un conjunto V (cuyos elementos se llaman vectores) que consta con la operaciones de $(\cdot, +)$ anteriormente descritas junto con otra operación de múltiplos por escalares que cumple las siguientes propiedades:

Para todo elemento $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ se cumple que:

1. Suma

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\rightarrow \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

Con las siguientes propiedades:

Conmutativo $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Asociativo $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

Identidad $\vec{a} + 0 = \vec{a}$

2. Multiplicación escalar

$$\begin{aligned} \cdot : V \times V &\longrightarrow V \\ (\vec{a}, \vec{b}) &\rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

Con las siguientes propiedades, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot \vec{a}) + (\mu \cdot \vec{a})$$

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (\lambda \cdot \vec{a}) + (\lambda \cdot \vec{b})$$

Definimos ahora el concepto de *Relación*.

Definición 3. Sea A, B dos conjuntos no nulos, una *Relación* es un conjunto R tal que $R \subseteq A \times B$

Dentro del conjunto de posibles relaciones existen unas que serán vitales para nuestro estudio de geometría proyectiva.

Definición 4. Una *Relación de Equivalencia* es una relación \sim sobre un conjunto A tales que \sim es reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, para todo elemento $a, b, c \in A$:

- Reflexiva $a \sim a$
- Simétrica Si $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- Transitiva Si $a \sim b$ y $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

1.2.1. Transformación Lineal

Definición: Sea U y V dos espacios vectoriales sobre \mathbb{F} . Una función (Transformación) $T : U \rightarrow V$ se denomina *Lineal* si verifica:

- $T(u + u') = T(u) + T(u')$ para cualquier $u, u' \in U$
- $T(ku) = kT(u)$ para cualquier $u \in U$ y $k \in \mathbb{F}$

1.2.2. Proyección

Definición: Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{F} y sean W, W' sub espacios vectoriales de V tales que $V = W \oplus W'$. La transformación lineal $P : V \rightarrow V$ definida por $P = Id(W) \oplus 0 \cdot W'$ se denomina *Proyección* de W a lo largo de W' . *Nota:* Se asume que el lector está familiarizado con la terminología de subespacio vectorial y suma directa de subespacios.

Observación: si $v \in V$ es tal que $v = w + w'$ con $w \in W$ y $w' \in W'$ entonces $P(v) = P(w + w') = w$.

2. Geometría Proyectiva

2.1. Espacio Proyectivo

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{F} . Defina la relación de equivalencia \sim , donde $\forall v, w \in V, v \sim w \Leftrightarrow v = \lambda \cdot w, \lambda \neq 0$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.

Definición: El *espacio proyectivo* denotado por $P(V)$ es el espacio cociente definido por:

$$P(V) = V / \{0\} \setminus \sim$$

observación: Los elementos de $P(V)$ son “rectas”. (espacios 1-dimensionales).

Ahora sea $A : V \rightarrow V$ un operador lineal invertible. Defina $A^* : P(V) \rightarrow P(V)$

tales que $A^*([v]) = [Av]$ para $v \in V$ y $[v] \in P(V)$ como una *Transformación Projectiva*. El conjunto de todas las transformaciones proyectivas es un grupo, el cual tiene por nombre el *Grupo de Transformaciones Projectivas* y lo denotaremos por $GL(P)$.

Definición: El espacio proyectivo junto con el grupo de transformaciones proyectivas $(P(V), GL(P))$ se denomina *Geometría Projectiva*.

2.2. La recta proyectiva

Definición: La *recta proyectiva* denotada por \mathbb{P}^1 es el conjunto definido por:

$$\mathbb{P}^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x, y) \neq (0, 0)\} \sim$$

Recuerde: $(x_0, y_0) \sim (x, y) \leftrightarrow \exists \lambda \neq 0$ tales que $\lambda(x_0, y_0) = (x, y)$

Notación: Denotaremos a la clase de equivalencia $[(x, y)]_{\sim} \in \mathbb{P}^1$ por $(x : y)$

Ejemplo: $(2 : 5) = (4 : 10) = (\frac{2}{5} : 1)$

Observación: El lector se dará cuenta que los puntos pertenecientes a la recta proyectiva son en realidad subespacios de dimensión igual a 1, es decir los puntos en la recta proyectiva realmente son rectas. De esta manera se puede entender la recta proyectiva como un círculo entendido como $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ donde esa unión de un punto “infinito” a los reales puede entenderse como el punto de fuga en el arte de perspectiva, de tal manera que dos puntos proyectivos se intersectan en el infinito.

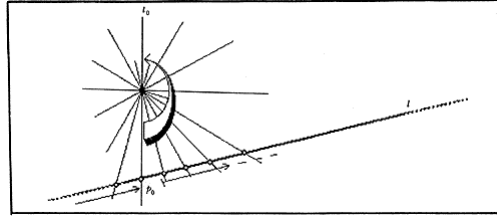


Figura 2: Círculos con infinitos

2.3. El Plano Projectivo

Definición: El *plano proyectivo* denotado por \mathbb{P}^2 es el conjunto definido por:

$$\mathbb{P}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\} \sim$$

Notación: Denotaremos a la clase de equivalencia $[(x, y, z)]_{\sim} \in \mathbb{P}^2$ por $(x : y : z)$

Observación: Tomemos la esfera \mathbb{S}^2 definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, entonces cada subespacio $\{\lambda v\}$ con $v \in V$ y unitario, se encuentra con la esfera en los puntos $\pm v$. Entonces

$$\mathbb{R}^3 / \{v \sim \lambda v\} \cong \mathbb{S}^2 / \{v \sim \pm v\}$$

Luego tomemos hemisferios $\mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z \geq 0\}$. Cada subespacio $\{\lambda v\}$ con $v = (x, y, z)$ con $z > 0$ se encuentra con \mathbb{S}_+^2 en un punto, pero los subespacios con $v = (x, y, 0)$ tienen dos puntos de intersección con el hemisferio. Por lo tanto tenemos que

$$\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2 / \{(x, y, 0) \sim (-x, -y, 0)\}$$

que es equivalente a un disco con los puntos opuestos de la frontera pegados. Cabe resaltar que el proceso anterior fue la construcción geométrica del plano proyectivo donde fue necesaria la *cinta de Moebius* por lo se concluye que plano no es orientable.

Propiedad: En el plano proyectivo todas las *secciones cónicas* son iguales.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

con $\det\{\{A, B\}, \{D, C\}\} \neq 0$, son tres representaciones de la misma curva.

3. Aplicaciones de la Geometría Proyectiva

3.1. Aplicación en la Teoría de Números (Ternas Pitagóricas):

Definición: Sea $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$ decimos que (a, b, c) es una *terna pitagórica*, si $(a, b) = (a, c) = (b, c) = 1$ (nos referimos a (x, y) como *máximo común divisor de x y y*) decimos que la terna es *primitiva*. Para encontrar las ternas pitagóricas es necesario plantear la *proyección estereográfica*. Tome la ecuación de la recta que pasa por $(0, y_0)$ y $(1, 0)$ que es $-y_0 = \frac{y}{x-1}$ o equivalentemente $(1-x)y_0 = y$.

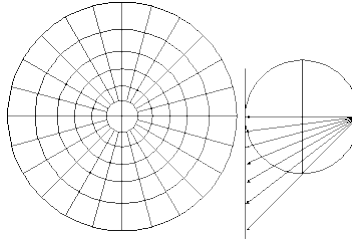


Figura 3: Imagen 3

De esta manera buscamos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1$, es decir $y^2 = 1 - x^2$ reemplazando en la ecuación de la recta anteriormente definida, $(1 - x^2)y_0^2 = 1 - x^2$, por medio de despejes algebraico concluimos que:

$$x_{\pm} = \frac{y_0^2 - 1}{y_0^2 + 1}, y_{\pm} = \frac{2y_0}{y_0^2 + 1}$$

De esta manera definimos la *proyección estereográfica* como una función de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$P(T) = \left(\frac{T^2 - 1}{T^2 + 1}, \frac{2T}{T^2 + 1} \right)$$

Nota: Tener solución en $x^2 + y^2 = z^2$ es tener solución para $(\frac{x}{z})^2 + (\frac{y}{z})^2 = 1$

Observación: Se puede observar que la proyección estereográfica tiene un parentesco con la recta proyectiva en donde el punto de fuga o infinito en este caso es el punto $(1,0)$ como se pudo observar en la imagen. De esta manera, se puede extender el mapa anterior al espacio proyectivo.

Considere el mapa de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ definido por:

$$T \rightarrow \left(\frac{T^2 - 1}{T^2 + 1}, \frac{2T}{T^2 + 1} \right) \rightarrow \left(\frac{T^2 - 1}{T^2 + 1} : \frac{2T}{T^2 + 1} : 1 \right)$$

De esta manera si toma a $T = \frac{s}{t}$ tenemos:

$$\frac{s}{t} \rightarrow \left(\frac{(\frac{s}{t})^2 - 1}{(\frac{s}{t})^2 + 1}, \frac{2(\frac{s}{t})}{(\frac{s}{t})^2 + 1} \right) \rightarrow \left(\frac{(\frac{s}{t})^2 - 1}{(\frac{s}{t})^2 + 1} : \frac{2(\frac{s}{t})}{(\frac{s}{t})^2 + 1} : 1 \right)$$

donde

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(\frac{s}{t})^2 - 1}{(\frac{s}{t})^2 + 1} : \frac{2(\frac{s}{t})}{(\frac{s}{t})^2 + 1} : 1 \right) \\ &= \left(\left(\frac{s}{t} \right)^2 - 1 : 2\left(\frac{s}{t} \right) : \left(\frac{s}{t} \right)^2 + 1 \right) \\ &= (s^2 - t^2 : 2st : s^2 + t^2) \end{aligned}$$

De esta manera tenemos una extension de la *proyección estereográfica* al *plano proyectivo* dando paso al siguiente teorema.

Teorema: Sea $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, (x, y, z) es una *terna pitagórica* con x impar si y solamente si existen $(s, t) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $(s, t) = 1$; s, t tienen paridad diferente con $s > t$ y $x = s^2 - t^2, y = 2st, z = s^2 + t^2$

Nota: La demostración de este teorema no se hará en este texto debido a que no es en base a la tesis principal del texto.