Introducción a Métodos Numéricos

Uso de Métodos Numericos, Metodos de Bracket: bisección, Metodos Abiertos: Newton - Raphson

Prof. Sebastian Saaibi & David Cardozo[1]

[1]Física
Lectura 8 Herramientas Computacionales
Universidad de los Andes

17 de mayo de 2015

Generalidades

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Métodos Númericos

Métodos numéricos es la reunión y estudio de técnicas para resolver problemas matemáticos con operaciones aritméticas, en general requieren de **demasiadas** iteraciones de operaciones aritméticas. Para contrastar:

Métodos no-computacionales	"Malo"
Soluciones analíticas	La mayoría de problemas no son analíticos
Soluciones Gráficas	No son exactas “ojimetro”
Uso de calculadoras	Realizar muchas operaciones

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Métodos Numéricos 2

Hagamos observaciones sobre la siguiente función:

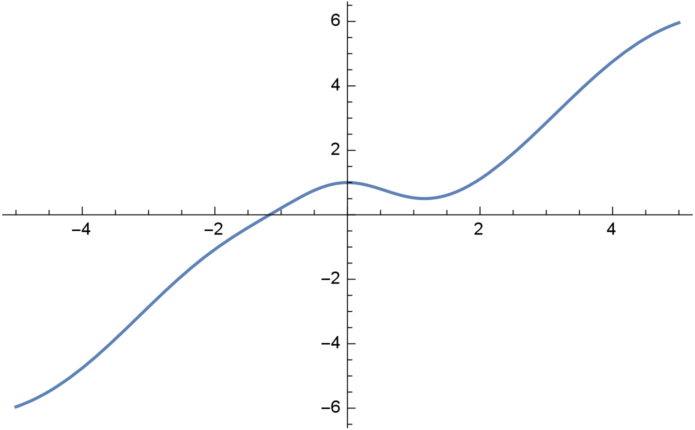
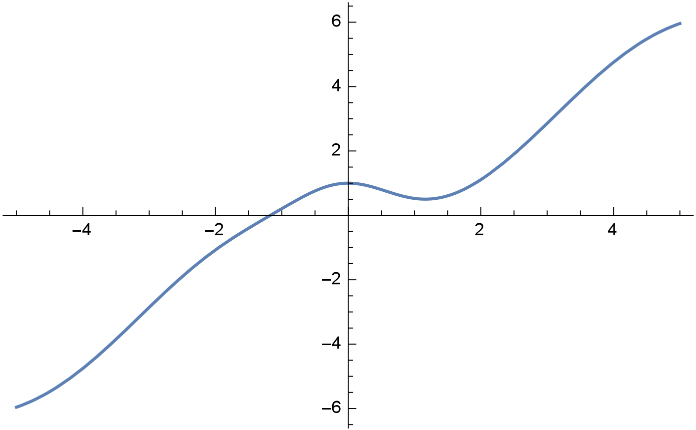


Figura: $f(x) = e^{-x^2} + x - \sin(x)$

Métodos Numéricos 2



$$x \approxeq -1{,}17426 \implies f(x) \approx 0$$

Metodos de Bracket

Un poco de terminología.

Raiz

Dada una función $f(x)$, en ejemplo, $f(x) = (x+3)(x-2)^2$, llamamos x_0 una raiz si $f(x_0) = 0$

Los **métodos de bracket** aprovechan que una función cambia de signos en la vecindad de una raíz. El nombre viene porque se requieren **dos conjeturas o pistas**.

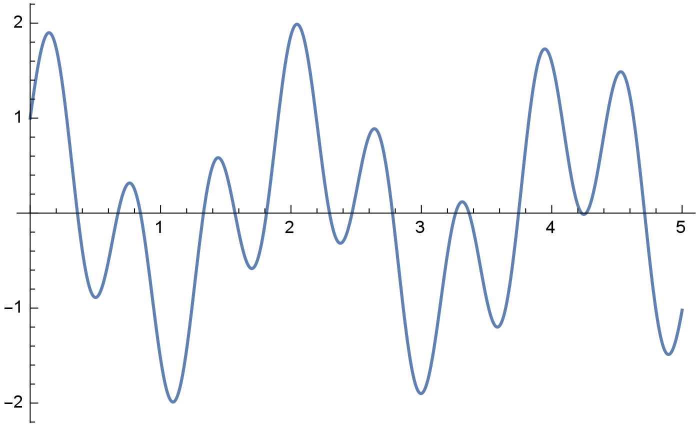


Figura: $g(x) = \sin(10x) + \cos(3x)$

Por el ejemplo anterior nos hemos dado cuenta que $g(x)$ cambia de signos en lados contrarios de la raiz, es decir si $f(x)$ es real y continuos en el intervalo x_i "inferior", x_s "superior":

$$f(x_i)f(x_s) < 0$$

existe una raíz en ese intervalo. Descubramos el algoritmo

1. Escogamos puntos x_i y x_s para los cuales el signo cambie sobre ese intervalo

Por el ejemplo anterior nos hemos dado cuenta que $g(x)$ cambia de signos en lados contrarios de la raiz, es decir si $f(x)$ es real y continuos en el intervalo x_i "inferior", x_s "superior":

$$f(x_i)f(x_s) < 0$$

existe una raíz en ese intervalo. Descubramos el algoritmo

1. Escogamos puntos x_i y x_s para los cuales el signo cambie sobre ese intervalo
2. Un estimado de la raiz x_r es dado por

$$x_r = \frac{x_i + x_s}{2}$$

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Por el ejemplo anterior nos hemos dado cuenta que $g(x)$ cambia de signos en lados contrarios de la raiz, es decir si $f(x)$ es real y continuos en el intervalo x_i "inferior", x_s "superior":

$$f(x_i)f(x_s) < 0$$

existe una raíz en ese intervalo. Descubramos el algoritmo

1. Escogamos puntos x_i y x_s para los cuales el signo cambie sobre ese intervalo
2. Un estimado de la raiz x_r es dado por

$$x_r = \frac{x_i + x_s}{2}$$

3. Encontramos el subintervalo donde la raiz esta:

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Por el ejemplo anterior nos hemos dado cuenta que $g(x)$ cambia de signos en lados contrarios de la raiz, es decir si $f(x)$ es real y continuos en el intervalo x_i "inferior", x_s "superior":

$$f(x_i)f(x_s) < 0$$

existe una raíz en ese intervalo. Descubramos el algoritmo

1. Escogamos puntos x_i y x_s para los cuales el signo cambie sobre ese intervalo
2. Un estimado de la raiz x_r es dado por

$$x_r = \frac{x_i + x_s}{2}$$

3. Encontramos el subintervalo donde la raiz esta:
    - $f(x_l)f(x_r) < 0$, devolver al paso 2 con $x_s = x_r$

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Por el ejemplo anterior nos hemos dado cuenta que $g(x)$ cambia de signos en lados contrarios de la raiz, es decir si $f(x)$ es real y continuos en el intervalo x_i "inferior", x_s "superior":

$$f(x_i)f(x_s) < 0$$

existe una raíz en ese intervalo. Descubramos el algoritmo

1. Escogamos puntos x_i y x_s para los cuales el signo cambie sobre ese intervalo
2. Un estimado de la raiz x_r es dado por

$$x_r = \frac{x_i + x_s}{2}$$

3. Encontramos el subintervalo donde la raiz esta:
   - $f(x_l)f(x_r) < 0$, devolver al paso 2 con $x_s = x_r$
   - $f(x_l)f(x_r) > 0$ devolver al paso 2 con $x_i = x_r$

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

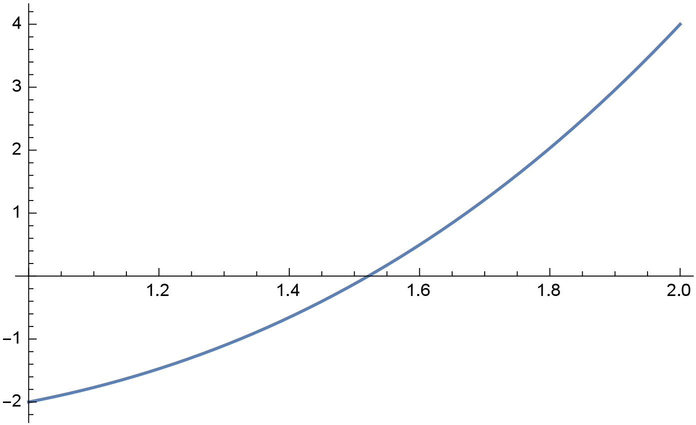


Figura: $f(x) = x^3 - x - 2$

Criterio de terminación y estimados de error:

Para este método (preguntar al Profesor o a mi acerca de como elegir este:)

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_r^{\text{nuevo}} - x_r^{\text{viejo}}}{x_r^{\text{nuevo}}} \right| \cdot 100\,\%$$

Algorithm 1 Pseudocodigo para bisección

Require: $f, n_{max}, \epsilon, a, b$

$n \leftarrow 1$
while $n \leq n_{max}$ **do**
  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  if $f(c) = 0$ or $(b-a)/2 < \epsilon$ **then**
    Solución encontrada
    print c
  end if
  $N \leftarrow N + 1$ { Incrementar el contador}
  if $\mathrm{sign}(f(c)) = \mathrm{sign}(f(a)) \implies a \leftarrow c \text{ or } b \leftarrow c$ **then**
    Solucion
  end if
end while

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias

Métodos abiertos

Métodos abiertos

Los métodos abiertos son algoritmos de búsqueda que solo requieren de un solo punto de inicio.

Metodos	Caracteristica	Función de Iteración
Iteracion de punto fijo	secuencia de puntos convergente.	Sea $f(x)$ rescribamos $x = g(x)$
El metodo de la Secante	Se requieren dos puntos de inicio	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1}-x_i)}{f(x_{i-1})-f(x_i)}$
Newton Raphson	El mas usado	$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
Metodo Brent	Combina lo mejor de métodos abiertos y cerrados	Tarea

Universidad de los Andes
Facultad de Ciencias