

## PROBABILITY (HONORS)

David Cardozo

NOMBRE DEL CURSO: Probability (Honors)

CÓDIGO DEL CURSO: MATE2510

UNIDAD ACADÉMICA: Departamento de Matemáticas

PERIODO ACADÉMICO: 201510

HORARIO: Ma y Ju, 8:00 a 9:50

---

NOMBRE PROFESOR(A) PRINCIPAL: Michael Anton Högele

HORARIO Y LUGAR DE ATENCIÓN: Mo y 17:00 a 18:00, Office Y-106

---

## 1 Organization of the course

The following books will be used for this lass

- Schilling Measures, Integrals and Martingale
  - A. Klenke, Probability Theory
- 

## 2 Introducción

En le año 1654 el noble Chevalier de Miere, pregunta B. Pascal, al jugar dados, empieza a preguntar por el numero mínimo de lanzadas para apostar favorablemente a la aparición del doble seis. (Este fue un intercambio de cartas entre Pascal y Pierre de Fermat).

### 2.1 Motivación Teórica

- Simetría: Como el lanzamiento de una moneda perfecta, o el tiro de un dado perfecto
- Distribuciones "naturales: Como La Ley de Benford, en numeros "naturales" datos de la forma  $a.bcde\dots$ ,  $a$  es mas probable que sea 1 menos probable 2,.. etc.
- **Ley de los Grandes Números**, para una distribución de la forma  $x_1, x_2, \dots \in \{0, 1\}$ , al largo plazo, este se estabiliza, es decir  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow p$

- **Teorema Límite Central**  $x_1, x_2, \dots \in \{-1, 1\}$ , osea tenemos una moneda perfecta.  $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n z_i \rightarrow Z$ , este  $Z$  varía, y la apariencia de  $Z$  tiene una apariencia Gaussiana.

### 3 Espacios discretos

#### Elementos de la Teoría de Conjuntos

Para esta section  $\omega \neq \emptyset$ ,  $A \subseteq \omega$ , definimos también:

$$A^c = \{\omega \in \sigma | \omega \notin A\}$$

**Lema 1.**

$$\sigma \neq \emptyset,$$

**Relaciones Distributivas:**

$$\begin{aligned} \cup_{i \in J} A_i \cap B &= \cup_{i \in J} (A_i \cap B) \\ \cap_{i \in J} A_i \cup B &= \cap_{i \in J} (A_i \cup B) \end{aligned}$$

**De Morgan**

/

**El Producto Cartesiano**

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

**Lema 2.**  $\#(A \times B) =$

**Lema 3.** Si el conjunto es finito,  $\#2^\omega = 2^{\# \omega}$

*Proof.* Probar

□

#### 3.0.1 Distribuciones Finitas y la distribución Uniforme

Ejemplos (2.4):

- Tiro de una moneda Resultados Cara o sello, es decir la probabilidad de obtener cara es 0.5 y la probabilidad de obtener sello 0.5, y la probabilidad del conjunto de que se obtenga cara o sello es 1
- Moneda imperfecta:

$$\omega = \{0, 1\}, \mathbb{P}(\omega) = 1$$

**Definition 1.** Sea  $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ ,  $(p_i)_{i=1, \dots, n}, p_i \in [0, 1]$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ .

$$2^\omega \in A \mapsto \mathbb{P}(A) := \sum_{i=\omega_i \in A} p_i$$

Entonces  $\mathbb{P}()$  se le llama **distribucion finita** los subconjuntos  $\{\omega_i\}$  eventos elementales  $A \in 2^\omega$  es un evento. La funcion de  $p : \omega \rightarrow [0, 1]$  se llama densidad discreta

Ej. 2.6 Ver notas escritas

- $(0.5, 0.5)$

**Lema 4. Propiedades inmediatas de  $\mathbb{P}()$**

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Complemento:  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Additividad fuerte:  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Additividad finita:  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$   $A, B$  son disjuntos
- Subaditividad:  $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
- Monotonía  $A \subseteq B$  implica  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- Subtractividad  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Probar!

**Definition 2.** Sea  $\mathbb{P}()$  una distribución discreta sobre  $\Omega = \omega_1, \dots, \omega_n$ , y  $\Omega$  es finito. Si  $p_i = p$  entonces  $\mathbb{P}()$  se llama distribución uniforme en  $\Omega$  y  $p = \frac{1}{|\Omega|}$   
 $A \in 2^\Omega \rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

**Ejemplo 2.8** n-ésimo tiro de moneda perfecta.

$$\Omega = 0, 1^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) | \omega_i \in \{0, 1\}\}, \quad \mathbb{P}() = U_\Omega$$

$$\mathbb{P}(\{\omega_1, \dots, \omega_n\}) = \frac{1}{2^n}$$

$$A \in 2^\Omega, A = \left\{ \omega \in \Omega | \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n), \sum_{i=1}^n \omega_i = 2 \right\}$$

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{1}{2^n}$$