Probability (Honors)
David Cardozo

Nombre del curso: Probability (Honors)
Código del curso: MATE2510
Unidad académica: Departamento de Matemáticas
Periodo académico: 201510
Horario: Ma y Ju, 8:00 a 9:50

Nombre profesor(a) principal: Michael Anton Högele
Horario y lugar de atención: Mo y 17:00 a 18:00, Office Y-106

---

1 Organization of the course

The following books will be used for this lass

- Schilling Measures, Integrals and Martingale
- A. Klenke, Probability Theory

---

2 Introducción

En le año 1654 el noble Chevalier de Miere, pregunta B. Pascal, al jugar dados, empieza a preguntar por el numero mínimo de lanzadas para apostar favorablemente a la aparición del doble seis. (Este fue un intercambio de cartas entre Pascal y Pierre de Fermat).

2.1 Motivación Teórica

- Simetría: Como el lanzamiento de una moneda perfecta, o el tiro de un dado perfecto
- Distribuciones "naturales: Como La Ley de Benford, en numeros "naturales" datos de la forma $a.bcde\ldots$, a es mas probable que sea 1 menos probable 2,.. etc.
- **Ley de los Grandes Números**, para una distribución de la forma $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1\}$, al largo plazo, este se estabiliza, es decir $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \to p$

- **Teorema Límite Central** $x_1, x_2, \ldots \in \{-1, 1\}$, osea tenemos una moneda perfecta. $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} z_i \to Z$, este Z varía, y la apariencia de Z tiene una apariencia Gaussiana.

3 Espacios discretos

Elementos de la Teoría de Conjuntos

Para esta section $\omega \neq \emptyset$, $A \subseteq \omega$, definimos también:

$$A^c = \{\omega \in \sigma | \omega \notin A\}$$

Lema 1.

$$\sigma \neq \emptyset,$$

Relaciones Distributivas:

$$\cup_{i \in J} A_i \cap B = \cup_{i \in J}(A_i \cap B)$$
$$\cap_{i \in J} A_i \cup B = \cap$$

De Morgan

$$/$$

El Producto Cartesiano

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Lema 2. $\#(A \times B) =$

Lema 3. *Si el conjunoto es finito,* $\#2^{\omega} = 2^{\#\omega}$

Proof. Probar □

3.0.1 Distribuciones Finitas y la distribución Uniforme

Ejemplos (2.4):

- Tiro de una moneda Resultados Cara o sello, es decir la probabilidad de obtener cara es 0.5 y la probabilidad de obtener sello 0.5, y la probabilidad del conjunto de que se obtenga cara o sello es 1

- Moneda imperfecta:
$$\omega = \{0, 1\}, \mathbb{P}(\omega) = 1$$

Definition 1. *Sea* $\omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$*,* $(p_i)_{i=1,\ldots n}, p_i \in [0,1]$*,* $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$*.*

$$2^\omega \in A \rightarrowtail \mathbb{P}(A) := \sum_{i=\omega_i \in A} p_i$$

Entonces $\mathbb{P}()$ *se le llama* ***distribucion finita*** *los subconjuntos* $\{\omega_i\}$ *eventos elementales* $A \in 2^\omega$ *es un evento. La funcion de* $p_. : \omega \to [0,1]$ *se llama densidad discreta*

Ej. 2.6 Ver notas escritas

- $(0.5, 0.5)$

Lema 4. ***Propiedades inmediatas de*** $\mathbb{P}()$

- $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- *Complemento:* $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- *Additividad fuerte:* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
- *Additividad finita:* $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ *A,B son disjuntos*
- *Subaditividad:* $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$
- *Monotonía* $A \subseteq B$ *implica* $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
- *Subtractividad* $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - PB \cap A$

Probar!

Definition 2. *Sea* $\mathbb{P}()$ *una distribución discreta sobre* $\Omega = \omega_1, \ldots, \omega_n$*, y* Ω *es finito. Si* $p_i = p$ *entonces* $\mathbb{P}()$ *se llama distribución uniforme en* Ω *y* $p = \frac{1}{|\Omega|}$ $A \in 2^\Omega \to \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Ejemplo 2.8 n-esímo tiro de moneda perfecta.

$$\Omega = 0, 1^n = \{(\omega_1, \ldots, w_n) | \omega_i \in \{0,1\}\}, \quad \mathbb{P}() = U_\Omega$$

$$\mathbb{P}(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) = \frac{1}{2^n}$$

$$A \in 2^\Omega, A = \left\{ \omega \in \Omega | \omega = (\omega_1, \ldots \omega_n), \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 2 \right\}$$

$$\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = \frac{1}{2^n}$$

4 Combinatoria elemental y distribuciones derivadas (2.3)

Lema 5. *Para $n \in \mathbb{N}$ A, B conjuntos con la misma cardinalidad finita, existen $n!$ bijecciones entre A y B*

Proof. Por inducción. El caso grave, es el inductivo con la idea general para el cual utilizamos

$$(n+1)n! = (n+1)!$$

$\square$

Recordemos entonces que definimos $n! = n \cdot (n-1)...1$ **Nota** Para $A = B = \{1, ..., n\}$, los reordenamientos de los conjuntos es $n!$ en rigor

$$\{(b_1, ..., b_n) | b_i \in \{1, ..., n\}, \text{no dobles}\}$$

Notas en combinatoria. (Revisar distribucion geoemetrica y distribución hipergeometrica)

Ejemplo 2
Sea $\sigma \neq \varnothing$ y $(a_n)_{n \in \ltimes}$ una sucessión creciente, $A_n \subseteq A_{n+1}$ tenemos que:

$$\liminf_{n \longrightarrow \inf} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m = \bigcup_{n \in \ltimes} A_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

y tambíen:

$$\limsup_{n \longrightarrow \infty} A_m = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m = \bigcup_{m \geq n} A_m$$

3.
$\sigma \neq \varnothing \quad (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucessión decresiente, $A_n \supset A_{n+1}$ Tenemos que en general:
ver libro
Cuarto Ejemplo Tenemos que $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \quad A_n := \{\omega \in \Omega | \omega_i = 0 \quad \forall_i \geq n+1\}$
sabemos que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{(0, 0, 0, \ldots)\}$$

$$\liminf_{m \longrightarrow \infty} A_n = \{\omega \in \Omega | \exists \mathbb{N} \ldots\} = \left\{\omega \in \Omega | \sum_{i=n}^{\infty} \omega_i < \infty\right\}$$

5 "Convergencia" o " Control de errores" $\Omega \neq \varnothing$, $\epsilon > 0$

$$S(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad l, l_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A_{n,\epsilon} = \{\omega \in \Omega | \, |s_n(\omega) - s(\omega)| > \epsilon\}$$

Estos fue una rte de analisis para la cual medimos la succesiones de funciones que son mayor que epsilon.

$$\bigcap_{\epsilon>0} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c = \{\omega \notin \Omega | \forall n \in \mathbb{N} S_n(\omega) = s(\omega)\}$$

$$\bigcap_{\epsilon>0} \liminf_{n\longrightarrow\infty}$$