Compacidad contable, Secuencial y Local

David Cardozo

8 de abril de 2015

Ejercicio 1. Pruebe que toda sucesión convergente en $\beta\mathbb{N}$ es eventualmente constante.

Teorema 1. *Toda sucesión convergente en* $\beta\mathbb{N}$ *es eventualmente constante.*

Solución. Suponga que $\sigma = p_{n\in\mathbb{N}}$ es una secuencia no eventualmente constante en $\beta\mathbb{N}$y converge a algún $p \in \beta\mathbb{N}$, sin perdida de generalidad asuma que es uno a uno y que $p_n \neq p$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces que $D \coloneqq \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto discreto en $\beta\mathbb{N}$, entonces para n existen clopens disjuntos dos a dos U_n que cumplen con que $p_n \in U_n$, ahora sea $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora defina $f : D \to [0,1]$ mediante $f(n) = 0$ si n es par y $f(n) = 1$ si n es impar; D es discreto, y por lo tanto f es una función continua. Consideremos ahora

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathbb{N} &\to [0,1] \\ n &\mapsto \begin{cases} f(p_k), & \text{si } n \in \mathbb{N} \cap U_k \\ \\ 0, & \text{si } n \in \mathbb{N} \setminus \bigcup \mathcal{U} \ . \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora considere F como la extensión $\bar{f}$ a $\beta\mathbb{N}$ (en mismas condiciones de la anterior tarea). Cada U_n es un clopen en $\beta\mathbb{N}$, por lo tanto $\overline{\mathbb{N} \cap U_n} x = \overline{U_n} = U_n$, y (como en la anterior tarea) encontramos que $F \restriction_D = f$, $F(p_n) = f(p_n)$ y $p \in \overline{D}$, tal que:

$$F(p) = \lim_{n\to\infty}$$

y vemos que este limite no existe, entonces es contradictorio.

Ejercicio 2. Sea $I = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $p_n : I \to \{0,1\}$ la función definida por $p_n(A) = 1$ si $n \in A$ y $p_n(A) = 0$ si $n \notin A$. Note que $P \coloneqq \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto del espacio producto $\{0,1\}^I$. Demuestre que para todo $x \in \{0,1\}^I$ se tiene que:

$$x \in \overline{P} \iff \{A \in I : x(A) = 1\} \text{ es un ultrafiltro sobre } \mathbb{N}$$

Solución. Ver Ejercicio 1 para un lado de la demotración.

Ejercicio 3. Muestre que $[0,1]^\omega$ con la topología uniforme no es contablemente compacto

Solución. Para este ejercicio, utilizaremos la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sea* $[0,1]^\omega$ *un espacio topológico con la topología uniforme. Existe un subconjunto infinito de este espacio que no tiene punto limite.*

Demostración. Sea d la métrica uniforme. Escoja $c \in (0,1]$. Sea $A = \{0,c\}^\omega \subset [0,1]^\omega$. Observar que si a y b son puntos distintos en A entonces $d(a,b) = c$. Para cualquier x la bola $B_{c/3}(x)$ tiene diámetro menor o igual a $2c/3$, por lo tanto $B_{c/3}(x)$ no puede tener mas de un punto de A, se tiene entonces que x no es un punto limite de A $\square$

Ahora para el gran teorema:

Teorema 2. $[0,1]^\omega$ *con la topología uniforme no es contablemente compacto*

Demostración. Sea d la métrica uniforme. Suponga que $[0,1]^\omega$ es localmente compacto, particular en 0. Entonces $0 \in U \subset C$, donde U abierto y C compacto. Entonces existe $\epsilon > 0$ para la cual $B_\epsilon(0) \subset U$. Ahora damos nota que $A = \{0, \epsilon/3\}^\omega \subset B_\epsilon(0)$, tenemos entonces $A \subset C$, y por teorema 28.2 A tiene un punto limite en C, pero esto contradice nuestro hecho de la proposición anterior. $\square$

Ejercicio 4. Muestre que $\mathbb{Q}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}$ no es localmente compacto.

Solución. Sea $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Queremos ver que si $U \subset X$ entonces U no tiene clausura compacta. Siendo que X es T_2 esto muestra entonces que no es localmente compacto. Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$ y tome un irracional $\pi \in B_\epsilon(x)$. Ahora sea $x - \epsilon$ y $b = x + \epsilon$, por lo tanto la siguiente es una cobertura abierta de $B_\epsilon(x)$ sin ninguna subcobertura finita:

$$\mathcal{O} := \left\{ ((a, \pi - \frac{1}{n}) \cup (\pi + \frac{1}{n}, b)) \cap \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Esto debido a que observamos que $\mathcal{O}$ es una cubierta que podría ser ordenada bajo $\supset$ y que ningún n cubre $B_\epsilon(x)$

Ejercicio 5. Demuestre que para cualquier familia $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ de espacios topológicos las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es localmente compacto
- Cada X_α es localmente compacto y $\{\alpha \in I : X_\alpha \text{ no es compacto } \}$ es finito.

Solución. Previamente haremos unas observaciones pertinentes:

Observación. Producto *finito* de espacios localmente compactos es localmente compacto

Demostración. Sean $X \times Y$ localmente compactos, y sean $(x, y) \in X \times Y$. Entonces existe una vecindad abierta U de $x$en X para la cual la clausura $\overline{U} \subset X$ es compacto. De manera similar, existe una vecindad abierta V de y en Y cuya clausura $\overline{V} \subset Y$ es compacto. Entonces $U \times V \subset X \times Y$ es una vecindad abierta de (x, y) y $U \times V \subset \overline{U} \times \overline{V}$ (ver Munkres p.101 #9) donde el conjunto cerrado $\overline{U} \times \overline{V} \subset X \times Y$ es compacto por Tychonoff. Entonces el producto $X \times Y$ de dos espacios localmente compactos es localmente compacto; por inducción, extendemos este resultado para casos finitos.

□

Teniendo esto en claro veamos que:

Teorema 3. *Si $\prod X_\alpha$ es localmente compacto, entonces cada X_α es localmente compacto y X_α es compacto para todo α salvo finitos.*

Demostración. Asuma que el producto $\prod X_\alpha$ es localmente compacto. Observar que las proyecciones son continuas y abiertas, también, como la propiedad de localmente compacto es preservada bajo mapas abiertos y continuos ya que estos conservan compacidad y abiertos, tenemos qe X_α es localmente compacto para todo α. Sea $x_\alpha \in X_\alpha$ y tome $x = (x_\alpha)_\alpha \in X$. Por hipótesis, existe un básico abierto vecindad $U = \prod_\alpha U_\alpha$ de x en X para la cual la clausura $\overline{U} \subset X$ es compacto. Como en la observación de atrás, observamos que $\overline{U} = \prod_{i=1}^{n} \overline{U_{\alpha_i}} \times \prod_{\alpha \in A'} X_\alpha$. Ahora, la proyección $\pi_a : X \to X_\alpha$ es continua, y cada $\overline{U_{\alpha_i}}$, es compacto para cada $i = 1, \dots, n$ y X_α es compacto para $\alpha \in A'$. Tenemos entonces X_α es localmente compacto para $i = 1, \dots n$.

□

Para nuestro segundo caso:

Teorema 4. *Conversa del teorema anterior asumiendo el Teorema de Tychonoff*

Demostración. Suponga $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ donde cada X_α es localmente compacto. También $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \cup A'$ tal que X_α es compacto para $\alpha \in A'$. Por teorema de Tychonoff, $\prod_{\alpha \in A'} X_\alpha$ es compacto, entonces el producto:

$$X = X_{\alpha_1} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \in A'} X_\alpha$$

Es localmente compacto por la observación al principio de la solución, siendo un producto finito de $n + 1$ espacios localmente compactos. □