Topología

David Cardozo

Nombre del curso: Topología
Código del curso: MATE3420
Unidad académica: Departamento de Matemáticas
Periodo académico: 201510
Horario: Lu y Mi, 2:00 a 3:50

Nombre profesor(a) principal: Ramiro de la Vega
Horario y lugar de atención: Ma y Ju 17:00 a 18:00, Oficina H-208

---

1. Organización del Curso

- Topología, Munkres
- Fundamentals of General Topology, Ponomarev et al.
- Counterexamples in Topology, Seebach, Jr.

Evaluación del curso:

- 2 Exámenes parciales (30 % cada uno)
- Examen final: 20 %
- Tareas 20 %

Favor de referenciar ideas externas.

2. Introducción

Comenzemos entonces con una revisión de los conceptos de topología aprendidos en análisis.

Definición 1. ***Espacio Métrico*** *Sea X un conjunto y d una métrica que cumple con las siguientes condiciones:*

- $d(x, y) \geq 0 \quad$ *y es* $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ *Condición de simetría.*
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *Desigualdad triangular.*

También recordemos la noción de un conjunto abierto.

Definición 2. ***Conjunto Abierto*** *Sea $A \subseteq X$, A es abierto si:*

$$\forall a \in A \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } d(a,x) < \epsilon \implies x \in A$$

Otro concepto util, pero al cual trataremos de evitar es el de bolas abiertas.

Definición 3. ***Bolas Abiertas*** *denotamos al conjunto de puntos que estan a lo sumo a un epsilon de distancia, via:*

$$B_\epsilon(a) = \{x \in X | d(x,a) < \epsilon\}$$

Observera que todos los puntos son interiores (¡Probar!)

Junto con estos conceptos

Recordemos entonces la definicion de espacio topologico.

Definición 4. *Dados X conjunto y $\tau \subset P(X)$ es un espacio topologico:*

- $X, \emptyset \in \tau$
- $A \subset \tau \implies \cup A \in \tau$
- $A \subset \tau\tau$ *y A es finito, implica que la intersecion finita esta en τ*

Ejemplo 1. *Si (X,d) es espacio métrico y $\tau = \{A \subseteq X | A \text{ es abierto}\}$, entonce (X,τ) es espacio topologico*

Ejemplo 2. *Dado X, $\tau_i = \{\varnothing, X\}$ es la topologia indiscreta trivial, o $\tau_d = P(X)$ es la topologia discreta.*

Ejemplo 3. *Σ es una teoría (Axiomas) de primer orden en el lenguaje L (un ejemplo un simbolo de operacion binaria). Sea $X = \{T | T \text{ teoría maximal consistente tal que } \Sigma \subset T\}$. Sea ϕ una sentencia (como soy abeliano), se armá un tipico abierto $[\phi] = \{T \in X | \phi \in T\}$, observemos que $X - [\phi] = \{T \in X | \phi \notin T\} = [NO\ \phi]$ -Espacio de Stone-*

Ejemplo 4. *Sea un campo K, y sea $X = k^n$, veamos la topología de Zariski, los cerrados son $S \subseteq K[x_1, ..., x_n]$. los cerrados de s $C_s = \vec{x}\ inK^n | f(\vec{x}) = 0 \forall f \in S$. Todos los subconjuntos son compactos,*

Ejemplo 5. *Sea $X = \{f : R \to R\}$, un tipico abierto $a \in R$, $U \subseteq R$ abierto en la topología usual. Y armé el siguiente conjunto:*

$$Y_{a,U} = \{f \in X : f(a) \in U\}$$

Teoria de convergencia puntal.

Veamos que aunque la union de topologias no es topologia, dos topologias sobre un conjunto, se puede comparar. tambien decimos $\tau_1 \subset \tau 2$ decimos τ_1 es mas gruesa y la otra es fina. Interseccion arbitrarias de topologias, es topologia (Probar!). Podemos coger sea X conjunto y $A \subset P(X)$:

$$\bigcap \{\tau \subset P(x) | \tau \text{es topología y } A \subset \tau\}$$

esta es la menor topologia que contiene a A (la mas gruesa?).

Ejemplo 6. *ver notas*

Definición 5. *Un punto aislado es cual el singleton de ese punto es abierto*

3. Como construir un a topologia

Definición 6. *X conjunto, $B \subseteq P(x)$, B es* ***base para una topología*** *sobre X si*

$$\left\{\bigcup A | A \subseteq B\right\}$$

es topología

Esto no puede que no sea topologia, por dos razones os la union no es todo X, y que las interseciones finitas no son .ªbiertas.ºbservar $B \subseteq \{\bigcup A | A \subseteq B\}$.

Definición 7. ***Definicion del libro*** *X conjunto, $B \subseteq P(X)$ es una base ... si:*

$$\forall x \in X \exists b \in B x \in b.(\cup B = x)$$

$$\forall b_1, b_2 \in B \forall x \in b_1 \cap b_2 \exists b \in B \textit{ such that } x \in b \subseteq b_1 \cap b_2$$

Teorema 1. *Las dos definiciones son equivalentes*

Demostración. $6 \implies 7$ $b_1, b_2 \in B$, $x \in b_1 cap b_2$ (ver dibujos), como b_1, b_2 esta en τ la interseccion esta en τ (puede que no este en B), pero la interseccion (terminar)

$7 \implies 6$ □

¿Que quiere decir que un conjunto sea la union de un conjunto?

Teorema 2. *Sea*

$$B = \{B_\epsilon(x) = x \in X, \epsilon > 0\}$$

, probar que es una ***topologia base***

Las bolas en un espacio metricos es una base topologica.

Definición 8. *Dado (X, τ) un espacio toplogico:*

- *$B \subseteq \tau$ es base para τ si $\forall U \in \tau \forall x \in U \exists b \in B$ t.q $x \in B \subseteq U$*

Truco si estoy muy de buenas y B es cerrado por intersecion condicion 2 es automaticamente ganada.

Definición 9. *Un $S \subseteq P(X)$ es subbase si $\bigcup S = X$*

Teorema 3. *Si S es subbase entonces $B = \{\bigcap A | A \subseteq S$ finitas $\}$ es base para una topologia.*

agregar intersecciones finitas y uniones arbitarias. subbase genera topologia : coja un abierto y cheque que cualquier punto esta en la intersecion finita de alguno en la subbase.

---

4. Orden lineal

Definición 10. *$(X, <)$ es in **orden lineal** si:*

- $x < y^y < z \implies x < z$
- $x \not< x$
- $\forall x, yx < y$ o $y < x$ o $x = y$

Dado $(X, <)$ definimos la topología del orden sobre X como la generada por:

$$\{(-\infty, x) : x \in X\} \cup \{(x, \infty) : x \in X\}$$

(Es una subase, (y tal ves podría ser una base, pero muy raramente)). Observar que interseccion finitas de estas cosas es un intervalo.

Ejemplo 7. *$\mathbb{R}_<$ la topolgía del orden coincide con la topologia usual (metrica) $\mathbb{R}_{met} = \mathbb{R}$.*

Ejemplo 8. *Un par ordenado en el libro esta denotado $x \times y$, acá los pares ordenados $\langle x, y \rangle < \langle x', y' \rangle$ si $x < x'$ o $x = x$ y $y < y'$. Tenemos $\mathbb{R}^2_{lex} \neq \mathbb{R}^2_{me} = \mathbb{R}^2$*

Queremos comparar cual toplogia es mas fina. es decir $\mathfrak{B}_{\text{Usual}} \subseteq \tau_{\text{lex}}$
Es mas fina que la usual, esta mas cerca a la topología discreta.

Ejemplo 9. *Tomme:*

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cap \{5\}$$

con el orden usual. Observar que el $= 5$ no esta aislado.

Ejemplo 10. *La doble flecha de Alexandrob.*

Definición 11. *Un orden lineal $(X, <)$ es **un buen orden** si: $\forall A \subseteq X \neq$ si $A \neq \varnothing$ entonces A tiene mínimo, es decir, existe un $m \in A$ tal que para todo $a \in A$, $m \leq a$*

Observar que los reales no son un buen orden.

Ejemplo 11. $(\mathbb{N}, <)$ *es un buen orden, aqui la topologia es la de singleton abiertos. Tambien puede utilizar* $\mathbb{N} + 1$ *que se ve como una linea y un punto. (observar que aqui en este espacio topologico* $n \to \omega$*)*

Ejemplo 12. $\mathbb{N} + \mathbb{N}$. *Esto puede verse como la suma de dos lineas de puntos que representan a* $\mathbb{N}$. *O formalemente:* $(\{0,1\} \times \mathbb{N}, <_{Lex})$. *(Observar aca que en comparación a* $\mathbb{N} + 1$ *es que este es compacto, es homeomorfo a* $\frac{1}{n}$ *) El otro ejemplo interesante sería:* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *con el orden lexicografíco. Este no es compacto. Mientras que* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} + 1$ *es compacto.*

En los buenos ordenes no hay succesiones infinitas de decrecientes.

Ejemplo 13. *Ver hojas para pintar todos los ordinales ver wikipedia los Ordinales.*

Para la casa: Si se tienen dos buenos ordenes, hay una tricotomia: O son isomorfos, o uno es un segmento inicial uno del otro. Entonces cualquier buen orden tiene a los naturales como segmentos inicial.

Ahora vamos a buscar buenos ordenes no enumerables. La construción es un poco díficil. Sea:

$$s_\Omega = \omega_1$$

Es un buen orden tal que:

- es no enumerable
- $\forall a \in S_\Omega [0 = \min, a)$ es enumberable.
- Sea $A \subseteq S_\Omega$ A enumerable $\implies$ A es acotado.