

TOPOLOGÍA
David Cardozo

NOMBRE DEL CURSO: Topología
CÓDIGO DEL CURSO: MATE3420
UNIDAD ACADÉMICA: Departamento de Matemáticas
PERIODO ACADÉMICO: 201510
HORARIO: Lu y Mi, 2:00 a 3:50

NOMBRE PROFESOR(A) PRINCIPAL: Ramiro de la Vega
HORARIO Y LUGAR DE ATENCIÓN: Ma y Ju 17:00 a 18:00, Oficina H-208

1. Organización del Curso

- Topología, Munkres
- Fundamentals of General Topology, Ponomarev et al.
- Counterexamples in Topology, Seebach, Jr.

Evaluación del curso:

- 2 Exámenes parciales (30 % cada uno)
- Examen final: 20 %
- Tareas 20 %

Favor de referenciar ideas externas.

2. Introducción

Comenzemos entonces con una revisión de los conceptos de topología aprendidos en análisis.

Definición 1. ***Espacio Métrico** Sea X un conjunto y d una métrica que cumple con las siguientes condiciones:*

- $d(x, y) \geq 0$ y es $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ Condición de simetría.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ Desigualdad triangular.

También recordemos la noción de un conjunto abierto.

Definición 2. Conjunto Abierto Sea $A \subseteq X$, A es abierto si:

$$\forall a \in A \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon \implies x \in A$$

Otro concepto util, pero al cual trataremos de evitar es el de bolas abiertas.

Definición 3. Bolas Abiertas denotamos al conjunto de puntos que estan a lo sumo a un epsilon de distancia, via:

$$B_\epsilon(a) = \{x \in X | d(x, a) < \epsilon\}$$

Observera que todos los puntos son interiores (¡Probar!)

Junto con estos conceptos

Recordemos entonces la definicion de espacio topologico.

Definición 4. Dados X conjunto y $\tau \subset P(X)$ es un espacio topologico:

- $X, \emptyset \in \tau$
- $A \subset \tau \implies \cup A \in \tau$
- $A \subset \tau$ y A es finito, implica que la interseccion finita esta en τ

Ejemplo 1. Si (X, d) es espacio métrico y $\tau = \{A \subseteq X | A \text{ es abierto}\}$, entonces (X, τ) es espacio topologico

Ejemplo 2. Dado X , $\tau_i = \{\emptyset, X\}$ es la topologia indiscreta trivial, o $\tau_d = P(X)$ es la topologia discreta.

Ejemplo 3. Σ es una teoría (Axiomas) de primer orden en el lenguaje L (un ejemplo un simbolo de operacion binaria). Sea $X = \{T | T \text{ teoría maximal consistente tal que } \Sigma \subset T\}$. Sea ϕ una sentencia (como soy abeliano), se armá un típico abierto $[\phi] = \{T \in X | \phi \in T\}$, observemos que $X - [\phi] = \{T \in X | \phi \notin T\} = [NO \phi]$ -Espacio de Stone-

Ejemplo 4. Sea un campo K , y sea $X = k^n$, veamos la topología de Zariski, los cerrados son $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$. los cerrados de S $C_s = \{\vec{x} \in K^n | f(\vec{x}) = 0 \forall f \in S\}$. Todos los subconjuntos son compactos,

Ejemplo 5. Sea $X = \{f : R \rightarrow R\}$, un típico abierto $a \in R$, $U \subseteq R$ abierto en la topología usual. Y armé el siguiente conjunto:

$$Y_{a,U} = \{f \in X : f(a) \in U\}$$

Teoria de convergencia puntal.

Veamos que aunque la union de topologias no es topologia, dos topologias sobre un conjunto, se puede comparar. tambien decimos $\tau_1 \subset \tau_2$ decimos τ_1 es mas gruesa y la otra es fina. Interseccion arbitrarias de topologias, es topologia (Probar!). Podemos coger sea X conjunto y $A \subset P(X)$:

$$\bigcap \{\tau \subset P(X) | \tau \text{ es topología y } A \subset \tau\}$$

esta es la menor topologia que contiene a A (la mas gruesa?).

Ejemplo 6. *ver notas*

Definición 5. *Un punto aislado es cual el singleton de ese punto es abierto*

3. Como construir una topologia

Definición 6. X conjunto, $B \subseteq P(X)$, B es **base para una topología** sobre X si

$$\left\{ \bigcup A | A \subseteq B \right\}$$

es topología

Esto no puede que no sea topologia, por dos razones o la union no es todo X , y que las intersecciones finitas no son abiertas. observar $B \subseteq \left\{ \bigcup A | A \subseteq B \right\}$.

Definición 7. *Definición del libro* X conjunto, $B \subseteq P(X)$ es una base ... si:

$$\forall x \in X \exists b \in B \text{ tal que } x \in b \text{ y } (b \cap c = x)$$

$$\forall b_1, b_2 \in B \forall x \in b_1 \cap b_2 \exists b \in B \text{ tal que } x \in b \subseteq b_1 \cap b_2$$

Teorema 1. *Las dos definiciones son equivalentes*

Demostración. $6 \implies 7$ $b_1, b_2 \in B$, $x \in b_1 \cap b_2$ (ver dibujos), como b_1, b_2 esta en τ la interseccion esta en τ (puede que no este en B), pero la interseccion (terminar)

$$7 \implies 6$$

□

¿Que quiere decir que un conjunto sea la union de un conjunto?

Teorema 2. *Sea*

$$B = \{B_\epsilon(x) = \{x \in X, d(x, y) < \epsilon\}\}$$

, probar que es una **topología base**

Las bolas en un espacio metricos es una base topologica.

Definición 8. *Dado (X, τ) un espacio topologico:*

- $B \subseteq \tau$ es base para τ si $\forall U \in \tau \forall x \in U \exists b \in B \text{ tal que } x \in b \subseteq U$

Truco si estoy muy de buenas y B es cerrado por interseccion condicion 2 es automaticamente ganada.

Definición 9. Un $S \subseteq P(X)$ es subbase si $\bigcup S = X$

Teorema 3. Si S es subbase entonces $B = \{\bigcap A \mid A \subseteq S \text{ finitas}\}$ es base para una topología.

agregar intersecciones finitas y uniones arbitrarias. subbase genera topología : coja un abierto y cheque que cualquier punto esta en la interseccion finita de alguno en la subbase.

4. Orden lineal

Definición 10. $(X, <)$ es in **orden lineal** si:

- $x < y^y < z \implies x < z$
- $x \not< x$
- $\forall x, y, x < y \text{ o } y < x \text{ o } x = y$

Dado $(X, <)$ definimos la topología del orden sobre X como la generada por:

$$\{(-\infty, x) : x \in X\} \cup \{(x, \infty) : x \in X\}$$

(Es una subbase, (y tal vez podría ser una base, pero muy raramente)). Observar que interseccion finitas de estas cosas es un intervalo.

Ejemplo 7. $\mathbb{R}_<$ la topología del orden coincide con la topología usual (metrica) $\mathbb{R}_{met} = \mathbb{R}$.

Ejemplo 8. Un par ordenado en el libro esta denotado $x \times y$, acá los pares ordenados $\langle x, y \rangle < \langle x', y' \rangle$ si $x < x'$ o $x = x'$ y $y < y'$. Tenemos $\mathbb{R}_{lex}^2 \neq \mathbb{R}_{me}^2 = \mathbb{R}^2$

Queremos comparar cual topología es mas fina. es decir $\mathfrak{B}_{Usual} \subseteq \tau_{lex}$

Es mas fina que la usual, esta mas cerca a la topología discreta.

Ejemplo 9. Tomme:

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cap \{5\}$$

con el orden usual. Observar que $el = 5$ no esta aislado.

Ejemplo 10. La doble flecha de Alexandroff.

Definición 11. Un orden lineal $(X, <)$ es **un buen orden** si: $\forall A \subseteq X \neq \emptyset$ si $A \neq \emptyset$ entonces A tiene mínimo, es decir, existe un $m \in A$ tal que para todo $a \in A$, $m \leq a$

Observar que los reales no son un buen orden.

Ejemplo 11. $(\mathbb{N}, <)$ es un buen orden, aquí la topología es la de singleton abiertos. También puede utilizar $\mathbb{N} + 1$ que se ve como una línea y un punto. (observar que aquí en este espacio topológico $n \rightarrow \omega$)

Ejemplo 12. $\mathbb{N} + \mathbb{N}$. Esto puede verse como la suma de dos líneas de puntos que representan a \mathbb{N} . O formalmente: $(\{0, 1\} \times \mathbb{N}, <_{Lex})$. (Observar aca que en comparación a $\mathbb{N} + 1$ es que este es compacto, es homeomorfo a $\frac{1}{n}$) El otro ejemplo interesante sería: $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico. Este no es compacto. Mientras que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} + 1$ es compacto.

En los buenos ordenes no hay sucesiones infinitas de decrecientes.

Ejemplo 13. Ver hojas para pintar todos los ordinales ver wikipedia los Ordinales.

Para la casa: Si se tienen dos buenos ordenes, hay una tricotomía: O son isomorfos, o uno es un segmento inicial uno del otro. Entonces cualquier buen orden tiene a los naturales como segmentos inicial.

Ahora vamos a buscar buenos ordenes no enumerables. La construcción es un poco difícil. Sea:

$$S_\Omega = \omega_1$$

Es un buen orden tal que:

- es no enumerable
- $\forall a \in S_\Omega [0 = \min, a)$ es enumerable.
- Sea $A \subseteq S_\Omega$ A enumerable \implies A es acotado.

Las funciones constantes son trivialmente continuas.

Definición 12. Sean X, Y espacios topológicos, es continua si $\forall U \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(U)$ es abierto en X .

La preimagen siempre preserva operaciones conjuntistas. Basta checkar preimagenes de basicos sean abiertos, o incluso preimagenes de subbasicos sean abiertos. Fijar que la continuidad depende de las topologías.

Observar que: si meto mas abiertos en X no daño la continuidad de la función. La topología de X mas fina no daña el checking de continuidad. Si miro en Y , si ella tiene la topología trivial cualquier función que llegue a Y es continua. Por otro lado si Y tiene la discreta es bien difícil. Si X tiene la discreta, entonces cualquier función que salga de X es continua.

5. Topología Inicial

Suponga X es un conjunto, y tengo una familia $(\{Y_i\}_{i \in I}, \tau_i)$ que son espacios topológicos y por cada i tengo: $f_i : X \rightarrow Y_i$ función. La topología inicial inducida en X es la menor topología en X para que todas las funciones f_i sean continuas.

Esta topología es generada por estos conjuntos:

$$\{f_i^{-1}(u) : u \in \tau_i, i \in I\}$$

Ejemplo 1: La Topología producto Sean X, Y espacios topológicos, vamos a tomar de ahora en adelante la convención τ_x, τ_y para respectivas topologías.

Formen el producto cartesiano $X \times Y$ y las funciones especiales son:

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$$

$$\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

y esas dos las queremos continuas.

Entonces la topología generada por:

$$\{\pi_1^{-1} : u \in \tau_x\} \cup \{\pi_2^{-1} : v \in \tau_y\}$$

Por lo menos tenemos que eso es una subbase. Rescritura:

$$\{U \times Y : u \in \tau_x\} \cup \{X \times V : V \in \tau_y\}$$

La intersección es asociativa y es conmutativa. Observar que no es topología pues unión de cajas no es caja, pero es una base. Pero basta meter los básicos (garantizar que las bases vayan a abiertos):

Ejemplos del Ejemplo 1 Típico: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ **Parentesis** Sean τ_1 y τ_2 y tengo sus bases \mathfrak{B}_1 y \mathfrak{B}_2 , observar que las condiciones simétricas $\mathfrak{B}_1 \subseteq \tau_2 \implies T_1 \subseteq \tau_2$. Coja un elemento de la base 1 e intercalar uno de la base 2. Y para probar lo otro, intercale.

En el plano, vemos que metemos cajas en discos, y discos entre cajas.

Otro ejemplo: $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ Base para topología de \mathfrak{N} es la discreta (cualquier base debe tener los singleton) y en $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ y es de dimensión cero, pues tiene una base de clopens, también tiene singleton **del producto cartesiano**. Ojo $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$

Otro ejemplo Tomar $(\mathbb{R}_{\text{discreta}} \times \mathbb{R}_{\text{usual}}) = \mathbb{R}_{\text{lex}}^2$ Observar que entonces la topología lexic no es tan exótica, viene de dos espacios metrizable.

Ejercicio Realizar y obtener una función de distancia para \mathbb{R}_{lex}

Ejemplo 2 (X, τ) es un espacio topológico, Y subconjunto de X , la función interesante a observar es: inclusión:

$$i : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto y$$

el conjunto a observar (la topología generada por):

$$\{i^{-1}(u) : u \in \tau\}$$

observar que esto es igual

$$u \cap Y : u \in \tau$$

Tenemos por lo menos que esto es una subbase y mirar que:

$$(U \cap Y) \cap (V \cap Y)$$

esta coleccion es cerrada bajo intersecciones finitas. Que tal uniones:

$$\begin{aligned} (U \cap Y) \cup (V \cap Y) \\ (U \cup V) \cap Y \end{aligned}$$

es decir que:

$$\bigcup_{i \in I} (u_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} u_i \right) \cap Y$$

Y vemos que esto ya es una topología porque ya hemos descritos todos los abierto.

Y si volvemos a la definicion original:

$$\{i^{-1}(u) : u \in \tau\}$$

y vemos que como preimagen respeta interseccion, de una observamos que es una topologia. Concluimos que:

$$\{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es la topología de subespacio en Y **Ejemplo** \mathbb{R} con \mathbb{I} = irracionales, (intersecte los irracionales con los reales) son los abiertos. ahora mira que los imaginarios son cero dimensional. Observar que $(p, q) \cap \mathbb{I}$ es una base de clopens. en terminologia los imaginarios son homomorfeos a los imaginarios cruz imaginarios. **Otro ejemplo:** $\mathbb{R}_{\text{lex}}^2$ VER NOTAS, estamos considerando subconjunto y miramos las topologias dadas como subconjunto, o con la topologia del orden del suborden.

Sean X, Y espacios topologicos, $X \times Y$ con la topologia del producto, y ahora tome $A \times B \subseteq X \times Y$ (No todos los subconjuntos de $X \times Y$ se puede escribir como cajas). Existen dos topologias que en buenas noticias son equivalentes. $\tau_{\text{subespacio del producto}}$ y $\tau_{q\text{producto del subespacio}}$. Por doble inclusión podemos ver: Tome: $U \in \tau_x$ y $V \in \tau_y$ y vea que $w = (A \times B) \cap (U \times V)$ y ahí observamos una de la inclusiones.

Para la segunda observevemos que:

$$U \in \tau_x \quad U \cap A \quad V \in \tau_y \quad U \cap B$$

y vemos entonces $(U \cap A) \times (V \cap B)$ y vemos entonces como esas dos son equivalentes.

Línea de Sorgenfrey \mathbb{R}_l , que es considerada por la topologia $[a, b)$

Ejercicio Mostrar como relacionar la linea de Alexandrov.

Conjuntos Cerrados

Definición 13. Dados (X, τ) espacios topológicos y $A \subseteq X$, A es cerrado si $X \setminus A$ es abierto.

Las leyes de Morgan nos dicen como se comportan los cerrados. Union finita de cerrados es cerrados.

Teorema 4. $Y \subseteq X$, $A \subseteq Y$, A es cerrado en $Y \iff \exists C \subseteq X$ cerrado en X , tal que $A = C \cap Y$

En la topología discreta todos son abiertos y todos son cerrados.

Definición 14. $f : X \rightarrow Y$ es una función continua, si: $f^{-1}(U)$ es abierto en X , $\forall U$ abierto en Y

Teorema 5. ■ Toda función constante es continua.

- Composición de continuas es continua.
- $A \subseteq X$, $i_{A \subseteq X} : A \rightarrow X$ es continua.
- $f : X \rightarrow Y$ es continua y $A \subseteq X$ implica $f|_A : A \rightarrow Y$ es continua. y esta es porque es la composición de dos continuas: $f|_A = f \circ i_{A \subseteq X}$
- el codominio no importa, porque cada función la podemos mirar así: $f : X \rightarrow f(X)$, las funciones son independientes de los codominios. La especificación que algo sea sobreyectiva, es artificial.
-

Definición a trozos: Suponga que quiero definir una función $f : X \rightarrow Y$ donde $X = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ y defino ahora $f_\alpha : A_\alpha \rightarrow Y$ y los definimos como $f(x) = f_\alpha(x)$ si $x \in A_\alpha$. pero para que tenga sentido: $f_\alpha|_{(A_\alpha \cap A_\beta)} = f_\beta|_{(A_\alpha \cap A_\beta)}$

¿Que condiciones necesito para que tal f sea continua?

En ese contexto:

Caso 1 f es continua, si todos los A_α 's son abiertos. **Formulación local de continuidad**

Demostración: Sea $U \subseteq Y$ abierto y voy a calcular $f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$ pero esto es igual a $\bigcup_{\alpha \in I} \{x \in A_\alpha | f(x) \in U\}$, pero además esta es la unión: $\bigcup_{\alpha \in I} \{x \in A_\alpha | f_\alpha(x) \in U\}$, pero también es igual a: $\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(U)$, observar que esto requiere que los A_α deben ser abiertos.

Caso 2 f es continua si el conjunto de índices es finito y los A_α 's son cerrados. **Demostración** Sea C es cerrado, para verificar si es continua, C es cerrado luego:

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(C)$$

Lema de pegamiento.

para probar que algo es continua chequear.

Teorema 6. para $f : X \rightarrow Y$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:
 f es continua.

$$\forall A \subseteq X, f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}.$$

$$B \text{ cerrado en } Y \implies f^{-1}(B) \text{ cerrado en } X.$$

$$\forall x \forall V \text{ vecindad de } f(x) \exists U \text{ vecindad de } x f(U) \subseteq V$$

3 implica 2 Sea $A \subseteq X$, $\subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$ es cerrado en X . Mirar:

$$A \subseteq f^{-1}f(A) \subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$$

. y vemos que:

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$$

y cojamos f a ambos lados:

$$f(\bar{A}) \subseteq f f^{-1}(f(\bar{A})) \subseteq f(\bar{A})$$

2 implica 1 Veamos que $f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}$, entonces tambien tenemos que:

$$f(A) \cap U = \emptyset$$

y

$$f(\bar{A}) \cap U = \emptyset$$

implica $f(\bar{A}) \cap U = \emptyset$ ¡Probar en casa!.

1 implica 4 Observemos que 4 menciona que para todo tiene una semejanza con la definicion de continuidad de análisis. Sea $x \in X$ y sea V vecindad de $f(x)$, cojamos la preimagen de V , es decir tome $U = f^{-1}(V)$ lo cual implica que $f(U) = f f^{-1}(V) \subseteq V$.

4 implica 3 Sea B cerrado en Y , miro la preimagen de B , es decir $f^{-1}(B)$, ahora toca probar que el complemento de $f^{-1}(B)$ es abierto.

Definición 15. $f : X \rightarrow Y$ es homeomorfismo, es como el isomorfismo de topología:

■ f es biyectiva.

■ $U \subseteq X$ es abierto en $X \iff f(U)$ es abierto en Y

2 se puede escribir como f es continua y f^{-1} es continua.

Espacios Métricos [Metrizables]

Recordar en \mathbb{R}^n si $x \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ con la metrica de $d_e(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ esta es la euclidiana, mientras que la romboide tengo:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

junto con otra metrica:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \max \{|x_i - y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Propiedad no topologica: Ser acotado. No es una propiedad topologica.

Sea (X, d) un espacio metrico, tenemos que podemos acotar:

$$\vec{d}(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

tambien podemos considerar la siguiente metrica:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Hacer el ejercicio. Propiedad de separabilidad, y ser espacio completo, no son propiedades topologicas. Dar cuenta que \mathbb{R} con la métrica, es $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

Observar que \mathbb{R} con la topologia usual y $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ son homemorfos.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\arctan(x)} & (-\pi/2, \pi/2) \\ (-\pi/2, \pi/2) & \xrightarrow{\tan(x)} & \mathbb{R} \end{array}$$

Sea $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, mirar que estos que no son completos. $\mathbb{P} \equiv \omega^\omega$

Observar que:

$$d(x, y) = \sup \left\{ \frac{\bar{d}(x_i, y_i)}{i} : i \in W \right\}$$

Ver Munkres, para hacer la tarea.

Un gran teorema, es que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ si y solo si $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ con la definicion de metrica arriba.

Recordemos que en \mathbb{R}^ω ya hemos estudiado tres tipos de topologias en este conjunto:

$$\tau_{\text{prod}} \subseteq \tau_{\text{unif}} \subseteq \tau_{\text{cajas}}$$