TOPOLOGÍA

David Cardozo

NOMBRE DEL CURSO: Topología
CÓDIGO DEL CURSO: MATE3420
UNIDAD ACADÉMICA: Departamento de Matemáticas
PERIODO ACADÉMICO: 201510
HORARIO: Lu y Mi, 2:00 a 3:50

---

NOMBRE PROFESOR(A) PRINCIPAL: Ramiro de la Vega
HORARIO Y LUGAR DE ATENCIÓN: Ma y Ju 17:00 a 18:00, Oficina H-208

---

# 1. Organización del Curso

- Topología, Munkres
- Fundamentals of General Topology, Ponomarev et al.
- Counterexamples in Topology, Seebach, Jr.

Evaluación del curso:

- 2 Exámenes parciales (30 % cada uno)
- Examen final: 20 %
- Tareas 20 %

Favor de referenciar ideas externas.

# 2. Introducción

Comenzemos entonces con una revisión de los conceptos de topología aprendidos en análisis.

**Definición 1.** ***Espacio Métrico*** *Sea $X$ un conjunto y $d$ una métrica que cumple con las siguientes condiciones:*

- $d(x, y) \geq 0 \quad$ *y es* $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ *Condición de simetría.*
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *Desigualdad triangular.*

También recordemos la noción de un conjunto abierto.

**Definición 2.** ***Conjunto Abierto*** *Sea $A \subseteq X$, $A$ es abierto si:*

$$\forall a \in A \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } d(a,x) < \epsilon \implies x \in A$$

Otro concepto util, pero al cual trataremos de evitar es el de bolas abiertas.

**Definición 3.** ***Bolas Abiertas*** *denotamos al conjunto de puntos que estan a lo sumo a un epsilon de distancia, via:*

$$B_\epsilon(a) = \{x \in X | d(x,a) < \epsilon\}$$

*Observera que todos los puntos son interiores (¡Probar!)*

Junto con estos conceptos

---

Recordemos entonces la definicion de espacio topologico.

**Definición 4.** *Dados $X$ conjunto y $\tau \subset P(X)$ es un espacio topologico:*

- $X, \emptyset \in \tau$
- $A \subset \tau \implies \cup A \in \tau$
- *$A \subset \tau\tau$ y $A$ es finito, implica que la intersecion finita esta en $\tau$*

**Ejemplo 1.** *Si $(X,d)$ es espacio métrico y $\tau = \{A \subseteq X | A \text{ es abierto}\}$, entonce $(X,\tau)$ es espacio topologico*

**Ejemplo 2.** *Dado $X$, $\tau_i = \{\varnothing, X\}$ es la topologia indiscreta trivial, o $\tau_d = P(X)$ es la topologia discreta.*

**Ejemplo 3.** *$\Sigma$ es una teoría (Axiomas) de primer orden en el lenguaje $L$ (un ejemplo un simbolo de operacion binaria). Sea $X = \{T | T \text{ teoría maximal consistente tal que } \Sigma \subset T\}$. Sea $\phi$ una sentencia (como soy abeliano), se armá un tipico abierto $[\phi] = \{T \in X | \phi \in T\}$, observemos que $X - [\phi] = \{T \in X | \phi \notin T\} = [NO\ \phi]$ -Espacio de Stone-*

**Ejemplo 4.** *Sea un campo $K$, y sea $X = k^n$, veamos la topología de Zariski, los cerrados son $S \subseteq K[x_1, ..., x_n]$. los cerrados de s $C_s = \vec{x}\ inK^n | f(\vec{x}) = 0 \forall f \in S$. Todos los subconjuntos son compactos,*

**Ejemplo 5.** *Sea $X = \{f : R \to R\}$, un tipico abierto $a \in R$, $U \subseteq R$ abierto en la topología usual. Y armé el siguiente conjunto:*

$$Y_{a,U} = \{f \in X : f(a) \in U\}$$

*Teoria de convergencia puntal.*

Veamos que aunque la union de topologias no es topologia, dos topologias sobre un conjunto, se puede comparar. tambien decimos $\tau_1 \subset \tau 2$ decimos $\tau_1$ es mas gruesa y la otra es fina. Interseccion arbitrarias de topologias, es topologia (Probar!). Podemos coger sea $X$ conjunto y $A \subset P(X)$:

$$\bigcap\{\tau \subset P(x) | \tau \text{es topología y } A \subset \tau\}$$

esta es la menor topologia que contiene a $A$ (la mas gruesa?).

**Ejemplo 6.** *ver notas*

**Definición 5.** *Un punto aislado es cual el singleton de ese punto es abierto*

# 3. Como construir un a topologia

**Definición 6.** *$X$ conjunto, $B \subseteq P(x)$, $B$ es **base para una topologí**a sobre $X$ si*

$$\left\{\bigcup A | A \subseteq B\right\}$$

*es topología*

Esto no puede que no sea topologia, por dos razones os la union no es todo $X$, y que las interseciones finitas no son .ªbiertas.ºbservar $B \subseteq \{\bigcup A | A \subseteq B\}$.

**Definición 7.** ***Definicion del libro*** *$X$ conjunto, $B \subseteq P(X)$ es una base ... si:*

$$\forall x \in X \exists b \in B x \in b.(\cup B = x)$$

$$\forall b_1, b_2 \in B \forall x \in b_1 \cap b_2 \exists b \in B \textit{ such that } x \in b \subseteq b_1 \cap b_2$$

**Teorema 1.** *Las dos definiciones son equivalentes*

*Demostración.* $6 \implies 7$ $b_1, b_2 \in B$, $x \in b_1 cap b_2$ (ver dibujos), como $b_1, b_2$ esta en $\tau$ la interseccion esta en $\tau$ (puede que no este en $B$), pero la interseccion (terminar)

$7 \implies 6$ □

¿Que quiere decir que un conjunto sea la union de un conjunto?

**Teorema 2.** *Sea*

$$B = \{B_\epsilon(x) = x \in X, \epsilon > 0\}$$

*, probar que es una **topologia base***

Las bolas en un espacio metricos es una base topologica.

**Definición 8.** *Dado $(X, \tau)$ un espacio toplogico:*

- *$B \subseteq \tau$ es base para $\tau$ si $\forall U \in \tau \forall x \in U \exists b \in B$ $t.q$ $x \in B \subseteq U$*

Truco si estoy muy de buenas y $B$ es cerrado por intersecion condicion 2 es automaticamente ganada.

**Definición 9.** *Un* $S \subseteq P(X)$ *es subbase si* $\bigcup S = X$

**Teorema 3.** *Si* $S$ *es subbase entonces* $B = \{\bigcap A | A \subseteq S$ *finitas* $\}$ *es base para una topologia.*

agregar intersecciones finitas y uniones arbitarias. subbase genera topologia : coja un abierto y cheque que cualquier punto esta en la intersecion finita de alguno en la subbase.

---

# 4. Orden lineal

**Definición 10.** $(X, <)$ *es in* ***orden lineal*** *si:*

- $x < y^y < z \implies x < z$
- $x \not< x$
- $\forall x, y x < y$ *o* $y < x$ *o* $x = y$

Dado $(X, <)$ definimos la topología del orden sobre $X$ como la generada por:

$$\{(-\infty, x) : x \in X\} \cup \{(x, \infty) : x \in X\}$$

(Es una subase, (y tal ves podría ser una base, pero muy raramente)). Observar que interseccion finitas de estas cosas es un intervalo.

**Ejemplo 7.** $\mathbb{R}_<$ *la topolgía del orden coincide con la topologia usual (metrica)* $\mathbb{R}_{met} = \mathbb{R}$.

**Ejemplo 8.** *Un par ordenado en el libro esta denotado* $x \times y$*, acá los pares ordenados* $\langle x, y \rangle < \langle x', y' \rangle$ *si* $x < x'$ *o* $x = x$ *y* $y < y'$*. Tenemos* $\mathbb{R}^2_{lex} \neq \mathbb{R}^2_{me} = \mathbb{R}^2$

Queremos comparar cual toplogia es mas fina. es decir $\mathfrak{B}_{\text{Usual}} \subseteq \tau_{\text{lex}}$
Es mas fina que la usual, esta mas cerca a la topología discreta.

**Ejemplo 9.** *Tomme:*

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cap \{5\}$$

*con el orden usual. Observar que el* $= 5$ *no esta aislado.*

**Ejemplo 10.** *La doble flecha de Alexandrob.*

**Definición 11.** *Un orden lineal* $(X, <)$ *es* ***un buen orden*** *si:* $\forall A \subseteq X \neq$ *si* $A \neq \varnothing$ *entonces* $A$ *tiene mínimo, es decir, existe un* $m \in A$ *tal que para todo* $a \in A$*,* $m \leq a$

Observar que los reales no son un buen orden.

**Ejemplo 11.** $(\mathbb{N}, <)$ *es un buen orden, aqui la topologia es la de singleton abiertos. Tambien puede utilizar* $\mathbb{N}+1$ *que se ve como una linea y un punto. (observar que aqui en este espacio topologico* $n \to \omega$*)*

**Ejemplo 12.** $\mathbb{N}+\mathbb{N}$. *Esto puede verse como la suma de dos lineas de puntos que representan a* $\mathbb{N}$. *O formalemente:* $(\{0,1\} \times \mathbb{N}, <_{Lex})$. *(Observar aca que en comparación a* $\mathbb{N}+1$ *es que este es compacto, es homeomorfo a* $\frac{1}{n}$ *) El otro ejemplo interesante sería:* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *con el orden lexicografíco. Este no es compacto. Mientras que* $\mathbb{N} \times \mathbb{N} + 1$ *es compacto.*

En los buenos ordenes no hay succesiones infinitas de decrecientes.

**Ejemplo 13.** *Ver hojas para pintar todos los ordinales ver wikipedia los Ordinales.*

Para la casa: Si se tienen dos buenos ordenes, hay una tricotomia: O son isomorfos, o uno es un segmento inicial uno del otro. Entonces cualquier buen orden tiene a los naturales como segmentos inicial.

Ahora vamos a buscar buenos ordenes no enumerables. La construción es un poco díficil. Sea:

$$s_{\Omega} = \omega_1$$

Es un buen orden tal que:

- es no enumerable
- $\forall a \in S_{\Omega}[0 = \min, a)$ es enumberable.
- Sea $A \subseteq S_{\Omega}$ $A$ enumerable $\implies$ $A$ es acotado.

---

Las funciones constantes son trivialmente continuas.

**Definición 12.** *Sean* $X, Y$ *espacios topologicos, es continua si* $\forall U \subseteq Y$ *abierto,* $f^{-1}(U)$ *es abierto en* $X$.

La preimagen siempre preserva operaciones conjutistas. Basta checkar preimagenes de basicos sean abiertos, o incluso preimagenes de subbasicos sean abiertos. Fijar que la continuidad depende de las topologias.

Observar que: si meto mas abiertos en $X$ no daño la continuidad de la funcion. La topologia de $X$ mas fina no daña el checking de continuidad. Si miro en $Y$, si ellla tiene la topologia trivial cualquier funcion que llegue a $Y$ es continua. Por otro lado si $Y$ tiene la discreta es bien dificil. Si $X$ tiene la discreta, entonces cualquier funcion que salga de $X$ es continua.

# 5. Topología Inicial

Suponga $X$ es un conjunto, y tengo una familia $(\{Y\}_{i\ \in I}, \tau_i)$ que son espacios topológicos y por cada $i$ tengo: $f_i : X \to Y_i$ función. La topologia incial inducia en $X$ es la menor toplogia en $X$ para que todas las funciones $f_i$ sean continuas.

Esta topología es generada por estos conjuntos:

$$\left\{f_i^{-1}(u) : u \in \tau_i, i \in I\right\}$$

**Ejemplo 1: La Topología producto** Sean $X, Y$ espacios topologicos, vamos a tomar de ahora en adelante la convencion $\tau_x, \tau_y$ para respectivas topologias.

Formen el producto cartesiano $X \times Y$ y las funciones especiales son:

$$\pi_1 : X \times Y \to X$$
$$\pi_2 : X \times Y \to X$$

y esas dos las queremos continuas.

Entonces la topología generada por:

$$\left\{\pi_1^{-1} : u \in \tau_x\right\} \cup \left\{\pi_2^{-1} : v \in \tau_y\right\}$$

Por lo menos tenemos que eso es una subbase. Rescritura:

$$\{U \times Y : u \in \tau_x\} \cup \{X \times V : V \in \tau_y\}$$

La interseccion es asociativa y es conmutativa. Observar que no es topologia pues union de cajas no es caja, pero es una base. Pero basta meter los basicos(garantizar que las bases vayan a abiertos):

**Ejemplos del Ejemplo 1** Típico: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ **Parentesis** Sean $\tau_1$ y $\tau_2$ y tengo sus bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, observar que las condiciones simetricas $\mathfrak{B}_1 \subseteq \tau_2 \implies T_1 \subseteq \tau_2$. Coja un elemento de la base 1 e intercalar uno de la base 2. Y para probar lo otro, intercale.

En el plano, vemos que metemos cajas en discos, y discos entre cajas.

**Otro ejemplo:** $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$ Base para topologia de $\mathfrak{N}$ es la discreta (cualquier base debe tener los singleton) y en $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ y es de dimension cero, pues tiene una base de clopens, tambien tiene singleton **del producto cartesiano**. Ojo $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$

**Otro ejemplo** Tomar $(\mathbb{R}_{\text{discreta}} \times \mathbb{R}_{\text{usual}}) = \mathbb{R}^2_{\text{lex}}$ Observar que entonces la topologia lexica no es tan exotica, viene de dos espacios metrizables.

**Ejercicio** Realizar y obtener una funcion de distancia para $\mathbb{R}_{\text{lex}}$

**Ejemplo 2** $(X, \tau)$ es un espacio topológico, $Y$ subconjunto de $X$, la funcion iteresante a observar es: inclusion:

$$i : Y \to x$$
$$y \rightarrowtail y$$

el conjunto a observar (la topologia generada por):

$$\left\{i^{-1}(u) : u \in \tau\right\}$$

observar que esto es igual

$$u \cap Y : u \in \tau$$

Tenemos por lo menos que esto es una subbase y mirar que:

$$(U \cap Y) \cap (C \cap Y)$$

esta colecion es cerrada bajo intersecciones finitas. Que tal uniones:

$$(U \cap Y) \cup (V \cap Y)$$
$$(U \cup V) \cap Y$$

es decir que:

$$\bigcup_{i \in I} (u_i \cap Y) = \left( \bigcup_{i \in I} \cap Y \right)$$

Y vemos que esto ya es una topología porque ya hemos descritos todos los abierto.

Y si volvemos a la definicion original:

$$\left\{ i^{-1}(u) : u \in \tau \right\}$$

y vemos que como preimagen respeta interseccion, de una observamos que es una topologia. Concluimos que:

$$\{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es la topología de subespacio en $Y$ **Ejemplo** $\mathbb{R}$ con $\mathbb{I} =$ irracionales, (intersecte los irracionales con los reales) son los abiertos.ahora mira que los imaginarios son cero dimensional. Observar que $(p, q) \cap \mathbb{I}$ es una base de clopens. en terminologia los imaginarios son homemorfeos a los imaginarios cruz imaginarios. **Otro ejemplo:** $\mathbb{R}^2_{\mathbf{lex}}$ VER NOTAS, estamos considerando subconjunto y miramos las topologias dadas como subconjunto, o con la topologia del orden del suborden.

Sean $X, Y$ espacios topologicos, $X \times Y$ con la topologia del producto, y ahora tome $A \times B \subseteq X \times Y$ (No todos los subconjuntos de $X \times Y$ se puede escribir como cajas). Existen dos topologias que en buenas noticias son equivalentes. $\tau_{\text{subespacio del producto}}$ y $\tau_{q\text{producto del subespacio}}$ . Por doble inclusión podemos ver: Tome: $U \in \tau_x$ y $V \in \tau_y$ y vea que $w = (A \times B) \cap (U \times V)$ y ahi observamos una de la inclusiones.

Para la segunda obsersevemos que:

$$U \in \tau_x \quad U \cap A \quad V \in \tau_y \quad U \cap B$$

y vemos entonces $(U \cap A) \times (V \cap B)$ y vemos entonces como esas dos son equivalentes.

---

Línea de Sorgenfrey $\mathbb{R}_l$, que es considerada por la topologia $[a, b)$

**Ejercicio** Mostrar como relazionar la linea de Alexandrov.

# Conjuntos Cerrados

**Definición 13.** *Dados $(X, \tau)$ espacios topologicos y $A \subseteq X$, $A$ es cerrado si $X \backslash A$ es abierto.*

Las leyes de Morgan nos dicen como se comportan los cerrados.Union finita de cerrados es cerrados.

**Teorema 4.** *$Y \subseteq X$, $A \subseteq Y$, $A$ es cerrado en $Y \iff \exists C \subseteq X$ cerrado en $X$, tal que $A = C \cap Y$*

En la topología discrea todos son abierto y todos son cerrados.

---

**Definición 14.** *$f : X \to Y$ es una función continua, si: $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$, $\forall U$ abierto en $Y$*

**Teorema 5.**

- *Toda función constante es continua.*
- *Composición de continuas es continua.*
- *$A \subseteq X$, $i_{A \subseteq X} : A \to X$ es continua.*
- *$f : X \to Y$ es continua y $A \subseteq X$ implica $f \restriction_a : A \to Y$ es continua. y esta es porque es la composicion de dos continuas: $f \restriction_A = f \circ i_{A \subseteq X}$*
- *el codominio no importa, porque cada funcion la podemos mirar así: $f : X \to f(X)$, las funciones son independientes de los codominios. La específicacion que algo sea sobreyectiva, es artificial.*
- 

**Definición a trozos:** Suponga que quiero definir una función $f : X \to Y$ donde $X = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ y defino ahora $f_\alpha : A_\alpha \to Y$ y los definimos como $f(x) = f_\alpha(x) \text{si} x \in A_\alpha$. pero para que tenga sentido: $f_\alpha \mid (A_\alpha \cap A_\beta) = f_\beta \mid (A_\alpha \cap A_beta)$

¿Que condiciones necesito para que tal $f$ sea continua?

En ese contexto:

**Caso 1** $f$ es continua, si todos los $A_\alpha$'s son abiertos. **Formulacion local de continuidad**

**Demostración:** Sea $U \subseteq Y$ abierto y voy a calcular $f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$ pero esto es igual a $\bigcup_{\alpha \in I} \{x \in A_\alpha | f(x) \in U\}$, pero ademas esta es la union: $\bigcup_{\alpha \in I} \{x \in A_\alpha | f_\alpha(x) \in U\}$, pero tambien es igual a: $\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(u)$, observar que esto requiere que los $A_\alpha$ deben ser abiertos.

**Caso 2** $f$ es continua si el conjunto de indicies es finiito y los $A_\alpha$'s son cerrados. **Demostración** Sea $C$ es cerrados, para checkar so es continua, $C$ es cerrado luego:

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(C)$$

**Lema de pegamiento.**

para probar que algo es continua checkear.

**Teorema 6.** *para $F : X \to Y$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*$f$ es continua.*

*$\forall A \subseteq X,\ f(\bar{A}) \subseteq f(\bar{A})$.*

*$b$ cerrado en $Y \implies f^{-1}(B)$ cerrado en $X$.*

*$\forall x \forall V$ vecindad de $f(x)$ $\exists U$ vecindad de $x$ $f(U) \subseteq V$*

**3 implica 2** Sea $A \subseteq X$, $\subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$ es cerrado en $X$. Mirar:

$$A \subseteq F^{-1}f(A) \subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$$

. y vemos que:

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$$

y cojamos $f$ a ambos lados:

$$f(\bar{A}) \subseteq ff^{-1}(f(\bar{A})) \subseteq f(\bar{A})$$

**2 implica 1** Veamos que $f(\bar{A}) \subseteq f(\bar{A})$, entonces tambien tenemos que:

$$f(A) \cap U = \varnothing$$

y

$$f(\bar{A}) \cap U = \varnothing$$

implica $f(\bar{A}) \cap U = \varnothing$ ¡Probar en casa!.

**1 implica 4** Observemos que 4 menciona que para todo tiene una semajanza con la definicion de continuidad de analísis. Sea $x \in X$ y sea $V$ vecindad de $f(x)$, cojamos la preimagen de $V$, es decir tome $U = f^{-1}(V)$ lo cual implica que $f(u) = ff^{-1}(v) \subseteq V$.

**4 implica 3** Sea $V$ cerrado en $Y$, miro la preimagen de $V$, es decir $f^{-1}(V)$, ahora toca porbar que el complemento de $f^{-1}(B)$ es abierto.

**Definición 15.** *$f : X \to Y$ es homeomorfismo, es como el isomorfismo de topología:*

- *$f$ is biyectiva.*
- *$u \subseteq X$ es abierto en $X \iff f(u)$ es abierto en $Y$*

*2 se puede escribir como $f$ es continua* ***y*** *$f^{-1}$ es continua.*

---

**Espacios Métricos [Metrizables]**

Recordar en $\mathbb{R}^n$ si $x \in \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \ldots x_n)$ con la metrica de $d_e(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ esta es la euclidiana, mientras que la romboide tengo:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

junto con otra metrica:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \max\{|x_i - y_i| : i \in \{1,...,n\}\}$$

Propiedad no topologica: Ser acotado. No es una propiedad topologica.

Sea $(X,d)$ un espacio metrico, tenemos que podemos acotar:

$$\vec{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\}$$

tambien podemos considerar la siguiente metrica:

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$

Hacer el ejercicio. Propiedad de separabilidad, y ser espacio completo, no son propiedades topologicas. Dar cuenta que $\mathbb{R}$ con la metríca, es $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

Observar que $\mathbb{R}$ con la topologia usual y $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ son homemorfos.

$$\mathbb{R} \overset{\arctan(x)}{\to} (-\pi/2, \pi/2)$$
$$(-\pi/2, \pi/2) \overset{tan(x)}{\to} \mathbb{R}$$

Sea $\mathbb{P} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, mirar que estos que no son completos. $\mathbb{P} \equiv \omega^\omega$

Observar que:

$$d(x,y) = \sup\left\{\frac{\bar{d}(x_i,y_i)}{i} : i \in W\right\}$$

Ver Munkres, para hacer la tarea.

Un gran teorema, es que $f_n \overset{\text{unif}}{\to} f$ si y solo si $d(f_n,f) \overset{n\to\infty}{\to} 0$ con la defincion de metrica arriba.

---

Recordemos que en $\mathbb{R}^\omega$ ya hemos estudiado tres tipos de topologias en este conjunto:

$$\tau_{\text{prod}} \subseteq \tau_{\text{unif}} \subseteq \tau_{\text{cajas}}$$

**Teorema** $X$ metrizable, $A \subseteq X$, $p \in X$, $p \in \bar{A} \iff \exists (a_n) \subseteq A \quad a_n \to p$

**Definicion** $X$ es Frechet-Uryson si $\forall A \subseteq X \forall p \in X$, $p \in A \iff \exists (a_n) \subseteq A \quad a_n \to p$

y tenemos metrizable $\implies$ primero contable $\implies$ Frechet-Uryson

**Espacio de Arens** y **Espacio de Arens-Fohrs**

hypervinculo

Tengo un espacio topologico $X$ y una relación de $\sim$, queremos ver la topología que puede tener $x \overset{\rho}{\to} \frac{X}{\sim}$ y defino $U \subseteq \frac{X}{\sim}$ U es abierto si y solo si $f^{-1}(U)$ es abieto en $X$. entonces $\tau = \left\{U \subseteq \frac{X}{\sim} | \rho^{-1}(U) \text{abierto en } X\right\}$.

**Ejemplos** Estudiar funciones cocientes.

**Definición 16.** $g : X \to Y$ *es una aplicación cociente, si* $g^{-1}(U)$ *es abierto en* $X$ *si y solo si* $U$ *abierto en* $Y$

**Arete Hawaiano** Es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

---

Como se debe trabjar desde afuera con los abiertos, **Recordar que es la definicion de un conjunto saturado**.

# Conexidad

**Definición 17.** ***Clopen(X)*** $= \{A \subseteq X | A$ *es abierto y cerrado*$\}$

**Definición** $X$ es conexo si Clopen$(X) = \{\varnothing, X\}$
(Si se puedo partir) es disconexo, y si puedo partirlo es conexo.
**Definición** $(\Omega, <)$ un orden lineal es un **continuo lineal** si:

- $\forall x < y \exists z$s.t$x < z < y$
- Todo $A \subseteq L$ no vacío ,y acotado tiene supremo

**Ejemplo** $\mathbb{R}, [0,1], (a, \infty), (a, b], (I \times I)_{\text{lex}}$
Su topologia viene de un orden que contiene estas dos propiedades.
**Teorema** $X$ continuo lineal $\implies X$
*Demostración* Por contradicción, suponga que no,... □
Es por eso que esto falla en en $s\Omega$ Hausdorff y zero dimencional.
Cero dimensional: $2^\omega$ no conexo, $\omega^\omega, s_\Omega, \mathbb{R}^2_{\text{lex}}$
**Teorema** Sea $X$ cualquier y $a_\alpha \subseteq X$ conexo, para $j \in J$ y $\cap_{\alpha \in J} A_\alpha$ implicas $\bigcup_{\alpha J}$ es conexo.
**Observación** Si $U \in$ Clopen$(X)$ y $A \subseteq X$ conexo. entonces $A \subseteq U$ ó $A \subseteq X - U$
Una alternativa:
**Teorema** Sea $X$ cualquiera, t.q $A_\alpha \cap A_\alpha \neq \varnothing \implies Y = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$.
**Teorema** $X, Y$ conexo $\implies X \times Y$ conexo.
Con esto concluimos $\mathbb{R}^n$ es conexo, facil.
**Teorema** Imagen continua de conexo es conexo.
*Demostración* Suponga $f : X \to Y$ sobre, $Y, X$ conexo
Por lo tanto $S^1$ es conexo (es decir el circulo), el arete tambien es conexo.
La doble flecha de es no conexo, arens lo mismo, arens-fort tampoco. $\mathbb{R}\ell$ no es.
**Teorema** Suponga $X$ es cualquiera, $A \subseteq X$ conexo y $A \subseteq B$ $B \subseteq \bar{A}$, entonces $B$ es conexo
Observar $\mathbb{R}^\omega \supseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}^{\omega \setminus \{0,1,\ldots,n\}}$, tenemos entonces:

$$\mathbb{R}^\omega = \bigcup \mathbb{R}^n \overset{conexo}{\subseteq} \mathbb{R}^\omega$$

Ahora $\mathbb{R}^\omega$ cajitas no es conexo, lo mismo $\mathbb{R}^\omega_{\text{unif}}$
de parcial:

$$\mathbb{R}^\infty \subseteq A = \{x \in \mathbb{R}^\omega | x \text{ es acotado } \} \subseteq \mathbb{R}^\omega$$

es A abierto?

en la toplogia producto los abiertos son gigantes en $R^\omega$

---

**Definición** $X$ es conexo por camino si $\forall x, y \in X \exists f : [0,1] \to X$ continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Conexo por caminos $\implies$ conexo. Pero observar que conexo $\not\implies$ conexo por caminos. El ejemplo siempre es **el seno del topologico**

Existe tambien la noción de **arcoconexo** si $X$ es arconexo por camino si $\forall x, y \in X \exists f : [0,1] \to X$ continua tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$ y $f$ es homeomorfismo sobre su imagen.

**En un espacio de Hausdorff** $X$ es arcoconexo lo mismo que conexo por caminos.

**Definición** $X$ un espacio toplologico. $\sim_c$, $\sim_{cc}$, definimos dos relaciones de equivalencia $x \sim_c y$ si $\exists A \overset{\text{conexo}}{\subseteq} X$ y $x, y \in A$. $x \sim_{cc}$ si $\exists f_{\text{ camino}}$ que me une $x$ a $y$

Las clases de equivalencia para la primera. **Condicio de canlla contable**.

**Definición** $B_c = \{U \subseteq X | U \text{ abierto y conexo}\}$ y $B_cc = \{U \subseteq x | U \text{ abierto y conexo por caminos}\}$. Observar $B_c \subseteq \tau$ y $B_cc \subseteq B_c$

$X$ es **localmente conexo** si $B_c$ es base para $\tau$

$X$ es localmente conexo por continuos si $B_cc$ es base para $\tau$

**Localmente conexo** no implica **localmente conexo por caminos**

`https://simomaths.wordpress.com/2013/03/10/topology-locally-connected-and-locally-path-c`

---

Primero contable implica Frechet -Uryhson.

En espacios metricos, todas las definiciones de compacidad, son las mismas.

*Lema* $X$ secuencialmente compacto metrizable $\implies$ Lema del número de Lebesgue.

Sea $\mathcal{A}$ recubrimiento abierto de $X$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall B \subset X$ con $\text{diam}(B) < \delta \implies \exists A \in \mathcal{A}$ t.q $B \subset A$. Por contradicción..

*Lema* Vamos a ver que para todo $\epsilon > 0$ Existe, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tal que $\cup_{i=1}^n B_\epsilon(x_i) = X$

Con estos dos lemas.

**Teorema:** $X$ metrico y secuencia compacto $\implies$ compacidad *Demostración* $X$ metrico y secuencialmente compacto $\implies$ $\mathcal{A}$ recubrimento de $X$, sea $\delta > 0$ número de Lebesgue de $\mathcal{A}$

**Definición 18.** *$X$ es **localmente compacto** si $\forall x \in X \exists K \subset X$ compacto tal que $x \in \overset{\circ}{K}$*