

TOPOLOGÍA  
David Cardozo

NOMBRE DEL CURSO: Topología  
CÓDIGO DEL CURSO: MATE3420  
UNIDAD ACADÉMICA: Departamento de Matemáticas  
PERIODO ACADÉMICO: 201510  
HORARIO: Lu y Mi, 2:00 a 3:50

---

NOMBRE PROFESOR(A) PRINCIPAL: Ramiro de la Vega  
HORARIO Y LUGAR DE ATENCIÓN: Ma y Ju 17:00 a 18:00, Oficina H-208

---

## 1. Organización del Curso

- Topología, Munkres
- Fundamentals of General Topology, Ponomarev et al.
- Counterexamples in Topology, Seebach, Jr.

Evaluación del curso:

- 2 Exámenes parciales (30 % cada uno)
- Examen final: 20 %
- Tareas 20 %

Favor de referenciar ideas externas.

## 2. Introducción

Comenzemos entonces con una revisión de los conceptos de topología aprendidos en análisis.

**Definición 1. *Espacio Métrico*** Sea  $X$  un conjunto y  $d$  una métrica que cumple con las siguientes condiciones:

- $d(x, y) \geq 0$  y es  $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$  Condición de simetría.
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  Desigualdad triangular.

También recordemos la noción de un conjunto abierto.

**Definición 2. Conjunto Abierto** Sea  $A \subseteq X$ ,  $A$  es abierto si:

$$\forall a \in A \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } d(a, x) < \epsilon \implies x \in A$$

Otro concepto util, pero al cual trataremos de evitar es el de bolas abiertas.

**Definición 3. Bolas Abiertas** denotamos al conjunto de puntos que estan a lo sumo a un epsilon de distancia, via:

$$B_\epsilon(a) = \{x \in X | d(x, a) < \epsilon\}$$

Observera que todos los puntos son interiores (¡Probar!)

Junto con estos conceptos

Recordemos entonces la definicion de espacio topologico.

**Definición 4.** Dados  $X$  conjunto y  $\tau \subset P(X)$  es un espacio topologico:

- $X, \emptyset \in \tau$
- $A \subset \tau \implies \cup A \in \tau$
- $A \subset \tau$  y  $A$  es finito, implica que la interseccion finita esta en  $\tau$

**Ejemplo 1.** Si  $(X, d)$  es espacio métrico y  $\tau = \{A \subseteq X | A \text{ es abierto}\}$ , entonces  $(X, \tau)$  es espacio topologico

**Ejemplo 2.** Dado  $X$ ,  $\tau_i = \{\emptyset, X\}$  es la topologia indiscreta trivial, o  $\tau_d = P(X)$  es la topologia discreta.

**Ejemplo 3.**  $\Sigma$  es una teoría (Axiomas) de primer orden en el lenguaje  $L$  (un ejemplo un simbolo de operacion binaria). Sea  $X = \{T | T \text{ teoría maximal consistente tal que } \Sigma \subset T\}$ . Sea  $\phi$  una sentencia (como soy abeliano), se armá un tipico abierto  $[\phi] = \{T \in X | \phi \in T\}$ , observemos que  $X - [\phi] = \{T \in X | \phi \notin T\} = [NO \phi]$  -Espacio de Stone-

**Ejemplo 4.** Sea un campo  $K$ , y sea  $X = k^n$ , veamos la topología de Zariski, los cerrados son  $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ . los cerrados de  $S$   $C_s = \vec{x} \text{ in } K^n | f(\vec{x}) = 0 \forall f \in S$ . Todos los subconjuntos son compactos,

**Ejemplo 5.** Sea  $X = \{f : R \rightarrow R\}$ , un tipico abierto  $a \in R$ ,  $U \subseteq R$  abierto en la topología usual. Y armé el siguiente conjunto:

$$Y_{a,U} = \{f \in X : f(a) \in U\}$$

Teoria de convergencia puntal.

Veamos que aunque la union de topologias no es topologia, dos topologias sobre un conjunto, se puede comparar. tambien decimos  $\tau_1 \subset \tau_2$  decimos  $\tau_1$  es mas gruesa y la otra es fina. Interseccion arbitrarias de topologias, es topologia (Probar!). Podemos coger sea  $X$  conjunto y  $A \subset P(X)$ :

$$\bigcap \{\tau \subset P(X) | \tau \text{ es topología y } A \subset \tau\}$$

esta es la menor topologia que contiene a  $A$  (la mas gruesa?).

**Ejemplo 6.** *ver notas*

**Definición 5.** *Un punto aislado es cual el singleton de ese punto es abierto*

### 3. Como construir una topologia

**Definición 6.**  $X$  conjunto,  $B \subseteq P(X)$ ,  $B$  es **base para una topología** sobre  $X$  si

$$\left\{ \bigcup A | A \subseteq B \right\}$$

es topología

Esto no puede que no sea topologia, por dos razones o la union no es todo  $X$ , y que las intersecciones finitas no son abiertas. observar  $B \subseteq \left\{ \bigcup A | A \subseteq B \right\}$ .

**Definición 7.** *Definición del libro*  $X$  conjunto,  $B \subseteq P(X)$  es una base ... si:

$$\forall x \in X \exists b \in B x \in b. (\cup B = X)$$

$$\forall b_1, b_2 \in B \forall x \in b_1 \cap b_2 \exists b \in B \text{ such that } x \in b \subseteq b_1 \cap b_2$$

**Teorema 1.** *Las dos definiciones son equivalentes*

*Demostración.*  $6 \implies 7$   $b_1, b_2 \in B$ ,  $x \in b_1 \cap b_2$  (ver dibujos), como  $b_1, b_2$  esta en  $\tau$  la interseccion esta en  $\tau$  (puede que no este en  $B$ ), pero la interseccion (terminar)

$$7 \implies 6$$

□

¿Que quiere decir que un conjunto sea la union de un conjunto?

**Teorema 2.** *Sea*

$$B = \{B_\epsilon(x) = x \in X, \epsilon > 0\}$$

, probar que es una **topología base**

Las bolas en un espacio metricos es una base topologica.

**Definición 8.** *Dado  $(X, \tau)$  un espacio topologico:*

- $B \subseteq \tau$  es base para  $\tau$  si  $\forall U \in \tau \forall x \in U \exists b \in B$  t.  $x \in b \subseteq U$

Truco si estoy muy de buenas y  $B$  es cerrado por interseccion condicion 2 es automaticamente ganada.

**Definición 9.** Un  $S \subseteq P(X)$  es subbase si  $\bigcup S = X$

**Teorema 3.** Si  $S$  es subbase entonces  $B = \{\bigcap A \mid A \subseteq S \text{ finitas}\}$  es base para una topología.

agregar intersecciones finitas y uniones arbitrarias. subbase genera topología : coja un abierto y cheque que cualquier punto esta en la interseccion finita de alguno en la subbase.

---

## 4. Orden lineal

**Definición 10.**  $(X, <)$  es in **orden lineal** si:

- $x < y^y < z \implies x < z$
- $x \not< x$
- $\forall x, y, x < y \text{ o } y < x \text{ o } x = y$

Dado  $(X, <)$  definimos la topología del orden sobre  $X$  como la generada por:

$$\{(-\infty, x) : x \in X\} \cup \{(x, \infty) : x \in X\}$$

(Es una subbase, (y tal vez podría ser una base, pero muy raramente)). Observar que interseccion finitas de estas cosas es un intervalo.

**Ejemplo 7.**  $\mathbb{R}_{<}$  la topología del orden coincide con la topología usual (metrica)  $\mathbb{R}_{met} = \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 8.** Un par ordenado en el libro esta denotado  $x \times y$ , acá los pares ordenados  $\langle x, y \rangle < \langle x', y' \rangle$  si  $x < x'$  o  $x = x'$  y  $y < y'$ . Tenemos  $\mathbb{R}_{lex}^2 \neq \mathbb{R}_{me}^2 = \mathbb{R}^2$

Queremos comparar cual topología es mas fina. es decir  $\mathfrak{B}_{usual} \subseteq \tau_{lex}$   
Es mas fina que la usual, esta mas cerca a la topología discreta.

**Ejemplo 9.** Tomme:

$$X = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cap \{5\}$$

con el orden usual. Observar que  $el = 5$  no esta aislado.

**Ejemplo 10.** La doble flecha de Alexandroff.

**Definición 11.** Un orden lineal  $(X, <)$  es **un buen orden** si:  $\forall A \subseteq X \neq \emptyset$  si  $A \neq \emptyset$  entonces  $A$  tiene mínimo, es decir, existe un  $m \in A$  tal que para todo  $a \in A$ ,  $m \leq a$

Observar que los reales no son un buen orden.

**Ejemplo 11.**  $(\mathbb{N}, <)$  es un buen orden, aquí la topología es la de singleton abiertos. También puede utilizar  $\mathbb{N} + 1$  que se ve como una línea y un punto. (observar que aquí en este espacio topológico  $n \rightarrow \omega$ )

**Ejemplo 12.**  $\mathbb{N} + \mathbb{N}$ . Esto puede verse como la suma de dos líneas de puntos que representan a  $\mathbb{N}$ . O formalmente:  $(\{0, 1\} \times \mathbb{N}, <_{Lex})$ . (Observar aca que en comparación a  $\mathbb{N} + 1$  es que este es compacto, es homeomorfo a  $\frac{1}{n}$ ) El otro ejemplo interesante sería:  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  con el orden lexicográfico. Este no es compacto. Mientras que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} + 1$  es compacto.

En los buenos ordenes no hay sucesiones infinitas de decrecientes.

**Ejemplo 13.** Ver hojas para pintar todos los ordinales ver wikipedia los Ordinales.

Para la casa: Si se tienen dos buenos ordenes, hay una tricotomía: O son isomorfos, o uno es un segmento inicial uno del otro. Entonces cualquier buen orden tiene a los naturales como segmentos inicial.

Ahora vamos a buscar buenos ordenes no enumerables. La construcción es un poco difícil. Sea:

$$s_\Omega = \omega_1$$

Es un buen orden tal que:

- es no enumerable
- $\forall a \in S_\Omega [0 = \min, a)$  es enumerable.
- Sea  $A \subseteq S_\Omega$   $A$  enumerable  $\implies A$  es acotado.

Las funciones constantes son trivialmente continuas.

**Definición 12.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos, es continua si  $\forall U \subseteq Y$  abierto,  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ .

La preimagen siempre preserva operaciones conjuntistas. Basta checkar preimágenes de básicos sean abiertos, o incluso preimágenes de subbásicos sean abiertos. Fijar que la continuidad depende de las topologías.

Observar que: si meto mas abiertos en  $X$  no daño la continuidad de la función. La topología de  $X$  mas fina no daña el checking de continuidad. Si miro en  $Y$ , si ella tiene la topología trivial cualquier función que llegue a  $Y$  es continua. Por otro lado si  $Y$  tiene la discreta es bien difícil. Si  $X$  tiene la discreta, entonces cualquier función que salga de  $X$  es continua.

## 5. Topología Inicial

Suponga  $X$  es un conjunto, y tengo una familia  $(\{Y_i\}_{i \in I}, \tau_i)$  que son espacios topológicos y por cada  $i$  tengo:  $f_i : X \rightarrow Y_i$  función. La topología inicial inducida en  $X$  es la menor topología en  $X$  para que todas las funciones  $f_i$  sean continuas.

Esta topología es generada por estos conjuntos:

$$\{f_i^{-1}(u) : u \in \tau_i, i \in I\}$$

**Ejemplo 1: La Topología producto** Sean  $X, Y$  espacios topológicos, vamos a tomar de ahora en adelante la convención  $\tau_x, \tau_y$  para respectivas topologías.

Formen el producto cartesiano  $X \times Y$  y las funciones especiales son:

$$\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$$

$$\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$$

y esas dos las queremos continuas.

Entonces la topología generada por:

$$\{\pi_1^{-1} : u \in \tau_x\} \cup \{\pi_2^{-1} : v \in \tau_y\}$$

Por lo menos tenemos que eso es una subbase. Rescritura:

$$\{U \times Y : u \in \tau_x\} \cup \{X \times V : V \in \tau_y\}$$

La intersección es asociativa y es conmutativa. Observar que no es topología pues unión de cajas no es caja, pero es una base. Pero basta meter los básicos (garantizar que las bases vayan a abiertos):

**Ejemplos del Ejemplo 1** Típico:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  **Parentesis** Sean  $\tau_1$  y  $\tau_2$  y tengo sus bases  $\mathfrak{B}_1$  y  $\mathfrak{B}_2$ , observar que las condiciones simétricas  $\mathfrak{B}_1 \subseteq \tau_2 \implies T_1 \subseteq \tau_2$ . Coja un elemento de la base 1 e intercalar uno de la base 2. Y para probar lo otro, intercale.

En el plano, vemos que metemos cajas en discos, y discos entre cajas.

**Otro ejemplo:**  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$  Base para topología de  $\mathfrak{N}$  es la discreta (cualquier base debe tener los singleton) y en  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N} = \mathfrak{N}$  y es de dimensión cero, pues tiene una base de clopens, también tiene singleton **del producto cartesiano**. Ojo  $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$

**Otro ejemplo** Tomar  $(\mathbb{R}_{\text{discreta}} \times \mathbb{R}_{\text{usual}}) = \mathbb{R}_{\text{lex}}^2$  Observar que entonces la topología lexicográfica no es tan exótica, viene de dos espacios metrizable.

**Ejercicio** Realizar y obtener una función de distancia para  $\mathbb{R}_{\text{lex}}$

**Ejemplo 2**  $(X, \tau)$  es un espacio topológico,  $Y$  subconjunto de  $X$ , la función interesante a observar es: inclusión:

$$i : Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto y$$

el conjunto a observar (la topología generada por):

$$\{i^{-1}(u) : u \in \tau\}$$

observar que esto es igual

$$u \cap Y : u \in \tau$$

Tenemos por lo menos que esto es una subbase y mirar que:

$$(U \cap Y) \cap (C \cap Y)$$

esta coleccion es cerrada bajo intersecciones finitas. Que tal uniones:

$$\begin{aligned} (U \cap Y) \cup (V \cap Y) \\ (U \cup V) \cap Y \end{aligned}$$

es decir que:

$$\bigcup_{i \in I} (u_i \cap Y) = \left( \bigcup_{i \in I} u_i \right) \cap Y$$

Y vemos que esto ya es una topología porque ya hemos descritos todos los abiertos.

Y si volvemos a la definicion original:

$$\{i^{-1}(u) : u \in \tau\}$$

y vemos que como preimagen respeta interseccion, de una observamos que es una topologia. Concluimos que:

$$\{U \cap Y : U \in \tau\}$$

es la topología de subespacio en  $Y$  **Ejemplo**  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{I}$  = irracionales, (interseccion de los irracionales con los reales) son los abiertos. ahora mira que los imaginarios son de dimensión cero. Observar que  $(p, q) \cap \mathbb{I}$  es una base de clopens. en terminologia los imaginarios son homeomorfos a los imaginarios cruz imaginarios. **Otro ejemplo:**  $\mathbb{R}_{\text{lex}}^2$  VER NOTAS, estamos considerando subconjunto y miramos las topologias dadas como subconjunto, o con la topologia del orden del suborden.

Sean  $X, Y$  espacios topologicos,  $X \times Y$  con la topologia del producto, y ahora tome  $A \times B \subseteq X \times Y$  (No todos los subconjuntos de  $X \times Y$  se puede escribir como cajas). Existen dos topologias que en buenas noticias son equivalentes.  $\tau_{\text{subespacio del producto}}$  y  $\tau_{\text{qproducto del subespacio}}$ . Por doble inclusion podemos ver: Tome:  $U \in \tau_x$  y  $V \in \tau_y$  y vea que  $w = (A \times B) \cap (U \times V)$  y ahi observamos una de las inclusiones.

Para la segunda observemos que:

$$U \in \tau_x \quad U \cap A \quad V \in \tau_y \quad U \cap B$$

y vemos entonces  $(U \cap A) \times (V \cap B)$  y vemos entonces como esas dos son equivalentes.

Línea de Sorgenfrey  $\mathbb{R}_l$ , que es considerada por la topologia  $[a, b)$

**Ejercicio** Mostrar como relacionar la linea de Alexandrov.

## Conjuntos Cerrados

**Definición 13.** Dados  $(X, \tau)$  espacios topológicos y  $A \subseteq X$ ,  $A$  es cerrado si  $X \setminus A$  es abierto.

Las leyes de Morgan nos dicen como se comportan los cerrados. Union finita de cerrados es cerrados.

**Teorema 4.**  $Y \subseteq X$ ,  $A \subseteq Y$ ,  $A$  es cerrado en  $Y \iff \exists C \subseteq X$  cerrado en  $X$ , tal que  $A = C \cap Y$

En la topología discreta todos son abiertos y todos son cerrados.

---

**Definición 14.**  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua, si:  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ ,  $\forall U$  abierto en  $Y$

**Teorema 5.** ■ Toda función constante es continua.

- Composición de continuas es continua.
- $A \subseteq X$ ,  $i_{A \subseteq X} : A \rightarrow X$  es continua.
- $f : X \rightarrow Y$  es continua y  $A \subseteq X$  implica  $f|_A : A \rightarrow Y$  es continua. y esta es porque es la composición de dos continuas:  $f|_A = f \circ i_{A \subseteq X}$
- el codominio no importa, porque cada función la podemos mirar así:  $f : X \rightarrow f(X)$ , las funciones son independientes de los codominios. La especificación que algo sea sobreyectiva, es artificial.

■

**Definición a trozos:** Suponga que quiero definir una función  $f : X \rightarrow Y$  donde  $X = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$  y defino ahora  $f_\alpha : A_\alpha \rightarrow Y$  y los definimos como  $f(x) = f_\alpha(x)$  si  $x \in A_\alpha$ . pero para que tenga sentido:  $f_\alpha|_{(A_\alpha \cap A_\beta)} = f_\beta|_{(A_\alpha \cap A_\beta)}$   
¿Que condiciones necesito para que tal  $f$  sea continua?

En ese contexto:

**Caso 1**  $f$  es continua, si todos los  $A_\alpha$ 's son abiertos. **Formulación local de continuidad**

**Demostración:** Sea  $U \subseteq Y$  abierto y voy a calcular  $f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$  pero esto es igual a  $\bigcup_{\alpha \in I} \{x \in A_\alpha | f(x) \in U\}$ , pero además esta es la unión:  $\bigcup_{\alpha \in I} \{x \in A_\alpha | f_\alpha(x) \in U\}$ , pero también es igual a:  $\bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(U)$ , observar que esto requiere que los  $A_\alpha$  deben ser abiertos.

**Caso 2**  $f$  es continua si el conjunto de índices es finito y los  $A_\alpha$ 's son cerrados. **Demostración** Sea  $C$  es cerrado, para verificar si es continua,  $C$  es cerrado luego:

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha^{-1}(C)$$

**Lema de pegamiento.**

para probar que algo es continuo chequear.



**Teorema 6.** para  $F : X \rightarrow Y$  las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$f$  es continua.

$$\forall A \subseteq X, f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}.$$

$b$  cerrado en  $Y \implies f^{-1}(B)$  cerrado en  $X$ .

$\forall x \forall V$  vecindad de  $f(x) \exists U$  vecindad de  $x$   $f(U) \subseteq V$

**3 implica 2** Sea  $A \subseteq X$ ,  $\subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$  es cerrado en  $X$ . Mirar:

$$A \subseteq F^{-1}f(A) \subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$$

. y vemos que:

$$\bar{A} \subseteq f^{-1}(f(\bar{A}))$$

y cojamos  $f$  a ambos lados:

$$f(\bar{A}) \subseteq f f^{-1}(f(\bar{A})) \subseteq f(\bar{A})$$

**2 implica 1** Veamos que  $f(\bar{A}) \subseteq \bar{f(A)}$ , entonces tambien tenemos que:

$$f(A) \cap U = \emptyset$$

y

$$f(\bar{A}) \cap U = \emptyset$$

implica  $f(\bar{A}) \cap U = \emptyset$  ¡Probar en casa!.

**1 implica 4** Observemos que 4 menciona que para todo tiene una semejanza con la definicion de continuidad de análisis. Sea  $x \in X$  y sea  $V$  vecindad de  $f(x)$ , cojamos la preimagen de  $V$ , es decir tome  $U = f^{-1}(V)$  lo cual implica que  $f(u) = f f^{-1}(v) \subseteq V$ .

**4 implica 3** Sea  $V$  cerrado en  $Y$ , miro la preimagen de  $V$ , es decir  $f^{-1}(V)$ , ahora toca probar que el complemento de  $f^{-1}(B)$  es abierto.

**Definición 15.**  $f : X \rightarrow Y$  es homeomorfismo, es como el isomorfismo de topología:

■  $f$  is biyectiva.

■  $u \subseteq X$  es abierto en  $X \iff f(u)$  es abierto en  $Y$

2 se puede escribir como  $f$  es continua y  $f^{-1}$  es continua.

### Espacios Métricos [Metrizables]

Recordar en  $\mathbb{R}^n$  si  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  con la metrica de  $d_e(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  esta es la euclidiana, mientras que la romboide tengo:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

junto con otra metrica:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \max \{|x_i - y_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$$

Propiedad no topologica: Ser acotado. No es una propiedad topologica.

Sea  $(X, d)$  un espacio metrico, tenemos que podemos acotar:

$$\vec{d}(x, y) = \min \{d(x, y), 1\}$$

tambien podemos considerar la siguiente metrica:

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

Hacer el ejercicio. Propiedad de separabilidad, y ser espacio completo, no son propiedades topologicas. Dar cuenta que  $\mathbb{R}$  con la metrica, es  $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$

Observar que  $\mathbb{R}$  con la topologia usual y  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  son homomorfos.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{\arctan(x)} (-\pi/2, \pi/2) \\ (-\pi/2, \pi/2) &\xrightarrow{\tan(x)} \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sea  $\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , mirar que estos que no son completos.  $\mathbb{P} \equiv \omega^\omega$

Observar que:

$$d(x, y) = \sup \left\{ \frac{\vec{d}(x_i, y_i)}{i} : i \in W \right\}$$

Ver Munkres, para hacer la tarea.

Un gran teorema, es que  $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$  si y solo si  $d(f_n, f) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  con la definicion de metrica arriba.

Recordemos que en  $\mathbb{R}^\omega$  ya hemos estudiado tres tipos de topologias en este conjunto:

$$\tau_{\text{prod}} \subseteq \tau_{\text{unif}} \subseteq \tau_{\text{cajas}}$$

**Teorema**  $X$  metrizable,  $A \subseteq X$ ,  $p \in X$ ,  $p \in \bar{A} \iff \exists (a_n) \subseteq A \quad a_n \rightarrow p$

**Definicion**  $X$  es Frechet-Uryson si  $\forall A \subseteq X \forall p \in X, p \in A \iff \exists (a_n) \subseteq A \quad a_n \rightarrow p$

y tenemos metrizable  $\implies$  primero contable  $\implies$  Frechet-Uryson

**Espacio de Arens y Espacio de Arens-Fohrs**

hypervinculo

Tengo un espacio topologico  $X$  y una relación de  $\sim$ , queremos ver la topología que puede tener  $x \xrightarrow{\rho} \frac{X}{\sim}$  y defino  $U \subseteq \frac{X}{\sim}$   $U$  es abierto si y solo si  $f^{-1}(U)$  es abieto en  $X$ . entonces  $\tau = \{U \subseteq \frac{X}{\sim} | \rho^{-1}(U) \text{abierto en } X\}$ .

**Ejemplos** Estudiar funciones cocientes.

**Definición 16.**  $g : X \rightarrow Y$  es una aplicación cociente, si  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $X$  si y solo si  $U$  abierto en  $Y$

**Arete Hawaiano** Es un subespacio de  $\mathbb{R}^2$

---

Como se debe trabajar desde afuera con los abiertos, **Recordar que es la definicion de un conjunto saturado.**

## Conexidad

**Definición 17.**  $\text{Clopen}(X) = \{A \subseteq X | A \text{ es abierto y cerrado}\}$

**Definición**  $X$  es conexo si  $\text{Clopen}(X) = \{\emptyset, X\}$

(Si se puedo partir) es desconexo, y si puedo partirlo es conexo.

**Definición**  $(\Omega, <)$  un orden lineal es un **continuo lineal** si:

- $\forall x < y \exists z.s.t. x < z < y$
- Todo  $A \subseteq L$  no vacío ,y acotado tiene supremo

**Ejemplo**  $\mathbb{R}, [0, 1], (a, \infty), (a, b], (I \times I)_{\text{lex}}$

Su topología viene de un orden que contiene estas dos propiedades.

**Teorema**  $X$  continuo lineal  $\implies X$

*Demostración* Por contradicción, suponga que no,...  $\square$

Es por eso que esto falla en en  $s\Omega$  Hausdorff y zero dimensional.

Cero dimensional:  $2^\omega$  no conexo,  $\omega^\omega, s\Omega, \mathbb{R}_{\text{lex}}^2$

**Teorema** Sea  $X$  cualquier y  $a_\alpha \subseteq X$  conexo, para  $j \in J$  y  $\cap_{\alpha \in J} A_\alpha$  implicas  $\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$  es conexo.

**Observación** Si  $U \in \text{Clopen}(X)$  y  $A \subseteq X$  conexo. entonces  $A \subseteq U$  ó  $A \subseteq X - U$

Una alternativa:

**Teorema** Sea  $X$  cualquiera, t.q  $A_\alpha \cap A_\alpha \neq \emptyset \implies Y = \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$ .

**Teorema**  $X, Y$  conexo  $\implies X \times Y$  conexo.

Con esto concluimos  $\mathbb{R}^n$  es conexo, facil.

**Teorema** Imagen continua de conexo es conexo.

*Demostración* Suponga  $f : X \rightarrow Y$  sobre,  $Y, X$  conexo

Por lo tanto  $S^1$  es conexo (es decir el circulo), el arete tambien es conexo.

La doble flecha de es no conexo, arens lo mismo, arens-fort tampoco.  $\mathbb{R}\ell$  no es.

**Teorema** Suponga  $X$  es cualquiera,  $A \subseteq X$  conexo y  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ , entonces  $B$  es conexo

Observar  $\mathbb{R}^\omega \supseteq \mathbb{R}^n \times \{0\}^{\omega \setminus \{0,1,\dots,n\}}$ , tenemos entonces:

$$\mathbb{R}^\omega = \bigcup \mathbb{R}^n \overset{\text{conexo}}{\subseteq} \mathbb{R}^\omega$$

Ahora  $\mathbb{R}^\omega$  cajitas no es conexo, lo mismo  $\mathbb{R}_{\text{unif}}^\omega$  de parcial:

$$\mathbb{R}^\infty \subseteq A = \{x \in \mathbb{R}^\omega | x \text{ es acotado} \} \subseteq \mathbb{R}^\omega$$

es A abierto?

en la topología producto los abiertos son gigantes en  $\mathbb{R}^\omega$

**Definición**  $X$  es conexo por camino si  $\forall x, y \in X \exists f : [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$ .

Conexo por caminos  $\implies$  conexo. Pero observar que conexo  $\not\implies$  conexo por caminos. El ejemplo siempre es **el seno del topológico**

Existe también la noción de **arcoconexo** si  $X$  es arcoconexo por camino si  $\forall x, y \in X \exists f : [0, 1] \rightarrow X$  continua tal que  $f(0) = x$  y  $f(1) = y$  y  $f$  es homeomorfismo sobre su imagen.

**En un espacio de Hausdorff**  $X$  es arcoconexo lo mismo que conexo por caminos.

**Definición**  $X$  un espacio topológico.  $\sim_c, \sim_{cc}$ , definimos dos relaciones de equivalencia  $x \sim_c y$  si  $\exists A \stackrel{\text{conexo}}{\subseteq} X$  y  $x, y \in A$ .  $x \sim_{cc} y$  si  $\exists f_{\text{camino}}$  que me une  $x$  a  $y$

Las clases de equivalencia para la primera. **Condición de canlla contable.**

**Definición**  $B_c = \{U \subseteq X | U \text{ abierto y conexo}\}$  y  $B_{cc} = \{U \subseteq X | U \text{ abierto y conexo por caminos}\}$ .

Observar  $B_c \subseteq \tau$  y  $B_{cc} \subseteq B_c$

$X$  es **localmente conexo** si  $B_c$  es base para  $\tau$

$X$  es localmente conexo por continuos si  $B_{cc}$  es base para  $\tau$

**Localmente conexo** no implica **localmente conexo por caminos**

<https://simomaths.wordpress.com/2013/03/10/topology-locally-connected-and-locally-path-c>

**Definición 18.**  $X$  es localmente compacto si  $\forall x \in X \exists K \subset X$  compacto tal que  $x \in \text{int } K$

**Teorema** Si  $X$  es  $T_2$  entonces LSASE:

$$T_0 \supset T_{1/2} \supset T_1 \supset T_2 \supset T_{21/2} \supset \text{Completamente Hausdorff} \supset T_3 \supset T_{31/2} \supset T_4$$

**Observación**  $X$  es  $T_3 \iff \forall U \forall p \in U \exists V$  t.q  $p \in V \subset \bar{V} \subset U$

Para Munkres hacer el ejercicio 1, el ejercicio 2, hacer el ejercicio 6.

**Teorema**  $T_3$  es hereditaria y productiva.

$T_4$  hereditario es  $T_5$

Línea de Sorgenfrey es  $t_5$

Probar que el espacio de la pendiente irracional no es regular. Probar Lindelöf,  $T_3$  es  $T_4$

**Condiciones que implican que un espacio sea  $T_4$**

$X$  es  $T_4$  si:

1. Compacto  $+T_2$
2. Si el espacio es metrizable
3.  $T_3 +$  Lindelöf
4. Orden Lineal

La linea de Sorgenfrey no es un orden lineal.

---

Dos ordenes lineales, densos enumerables, no hay maximos ni minimos, son isomorfos.

### **Lema de Urysohn**

Sea  $X$  un espacio  $T_4$  y sean  $A, B \subseteq X$  cerrados y disyuntos, entonces existe  $f : X \rightarrow [0, 1]$  continua tal que:

$$f^{-1}(0) \supset A, f^{-1} \subset B$$