TOPOLOGÍA
David Cardozo

NOMBRE DEL CURSO: Topología
CÓDIGO DEL CURSO: MATE3420
UNIDAD ACADÉMICA: Departamento de Matemáticas
PERIODO ACADÉMICO: 201510
HORARIO: Lu y Mi, 2:00 a 3:50

NOMBRE PROFESOR(A) PRINCIPAL: Ramiro de la Vega
HORARIO Y LUGAR DE ATENCIÓN: Ma y Ju 17:00 a 18:00, Oficina H-208

---

1. Organización del Curso

- Topología, Munkres
- Fundamentals of General Topology, Ponomarev et al.
- Counterexamples in Topology, Seebach, Jr.

Evaluación del curso:

- 2 Exámenes parciales (30 % cada uno)
- Examen final: 20 %
- Tareas 20 %

Favor de referenciar ideas externas.

2. Introducción

Comenzemos entonces con una revisión de los conceptos de topología aprendidos en análisis.

Definición 1. ***Espacio Métrico*** *Sea X un conjunto y d una métrica que cumple con las siguientes condiciones:*

- $d(x, y) \geq 0 \quad$ *y es* $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$ *Condición de simetría.*
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *Desigualdad triangular.*

También recordemos la noción de un conjunto abierto.

Definición 2. ***Conjunto Abierto*** *Sea $A \subseteq X$, A es abierto si:*

$$\forall a \in A \exists \epsilon > 0 \text{ tal que } d(a,x) < \epsilon \implies x \in A$$

Otro concepto util, pero al cual trataremos de evitar es el de bolas abiertas.

Definición 3. ***Bolas Abiertas*** *denotamos al conjunto de puntos que estan a lo sumo a un epsilon de distancia, via:*

$$B_\epsilon(a) = \{x \in X | d(x,a) < \epsilon\}$$

Observera que todos los puntos son interiores (¡Probar!)

Junto con estos conceptos
noindent

Recordemos entonces la definicion de espacio topologico.

Definición 4. *Dados X conjunto y $\tau \subset P(X)$ es un espacio topologico:*

- $X, \emptyset \in \tau$
- $A \subset \tau \implies \cup A \in \tau$
- $A \subset \tau\tau$ *y A es finito, implica que la intersecion finita esta en τ*

Ejemplo 1. *Si (X,d) es espacio métrico y $\tau = \{A \subseteq X | A \text{ es abierto}\}$, entonce (X,τ) es espacio topologico*

Ejemplo 2. *Dado X, $\tau_i = \{\varnothing, X\}$ es la topologia indiscreta trivial, o $\tau_d = P(X)$ es la topologia discreta.*

Ejemplo 3. *Σ es una teoría (Axiomas) de primer orden en el lenguaje L (un ejemplo un simbolo de operacion binaria). Sea $X = \{T | T \text{ teoría maximal consistente tal que } \Sigma \subset T\}$. Sea ϕ una sentencia (como soy abeliano), se armá un tipico abierto $[\phi] = \{T \in X | \phi \in T\}$, observemos que $X - [\phi] = \{T \in X | \phi \notin T\} = [NO\ \phi]$ -Espacio de Stone-*

Ejemplo 4. *Sea un campo K, y sea $X = k^n$, veamos la topología de Zariski, los cerrados son $S \subseteq K[x_1, ..., x_n]$. los cerrados de s $C_s = \vec{x}\ inK^n | f(\vec{x}) = 0 \forall f \in S$. Todos los subconjuntos son compactos,*

Ejemplo 5. *Sea $X = \{f : R \to R\}$, un tipico abierto $a \in R$, $U \subseteq R$ abierto en la topología usual. Y armé el siguiente conjunto:*

$$Y_{a,U} = \{f \in X : f(a) \in U\}$$

Teoria de convergencia puntal.

Veamos que aunque la union de topologias no es topologia, dos topologias sobre un conjunto, se puede comparar. tambien decimos $\tau_1 \subset \tau 2$ decimos τ_1 es mas gruesa y la otra es fina. Interseccion arbitrarias de topologias, es topologia (Probar!). Podemos coger sea X conjunto y $A \subset P(X)$:

$$\bigcap \{\tau \subset P(x) | \tau \text{es topología y } A \subset \tau\}$$

esta es la menor topologia que contiene a A (la mas gruesa?).

Ejemplo 6. *ver notas*

Definición 5. *Un punto aislado es cual el singleton de ese punto es abierto*

3. Como construir un a topologia

Definición 6. *X conjunto, $B \subseteq P(x)$, B es **base para una topologí**a sobre X si*

$$\left\{\bigcup A | A \subseteq B\right\}$$

es topología

Esto no puede que no sea topologia, por dos razones os la union no es todo X, y que las interseciones finitas no son .ªbiertas.ºbservar $B \subseteq \{\bigcup A | A \subseteq B\}$.

Definición 7. ***Definicion del libro*** *X conjunto, $B \subseteq P(X)$ es una base ... si:*

$$\forall x \in X \exists b \in B x \in b. (\cup B = x)$$

$$\forall b_1, b_2 \in B \forall x \in b_1 \cap b_2 \exists b \in B \text{ such that } x \in b \subseteq b_1 \cap b_2$$

Teorema 1. *Las dos definiciones son equivalentes*

Demostración. $6 \implies 7$ $b_1, b_2 \in B$, $x \in b_1 cap b_2$ (ver dibujos), como b_1, b_2 esta en τ la interseccion esta en τ (puede que no este en B), pero la interseccion (terminar)

$7 \implies 6$ □

¿Que quiere decir que un conjunto sea la union de un conjunto?

Teorema 2. *Sea*

$$B = \{B_\epsilon(x) = x \in X, \epsilon > 0\}$$

*, probar que es una **topologia base***

Las bolas en un espacio metricos es una base topologica.

Definición 8. *Dado (X, τ) un espacio toplogico:*

- *$B \subseteq \tau$ es base para τ si $\forall U \in \tau \forall x \in U \exists b \in B$ t.q $x \in B \subseteq U$*