Tarea # 3 (Conjunto Cerrados y Funciones Continuas)

David Cardozo

18 de febrero de 2015

1. Suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un espacio topológico (X_n, τ_n), metrizable.Muestre que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.

Solución

Antes de comenzar con una demostración, pongamos en concreto unos lemas importantes.

Lema 1. *Suponga d es una métrica en un espacio arbitrario X. Si tenemos una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ que cumple con las características: f es estrictamente creciente, f es una función cóncava y $f(0) = 0$, entonces d' definido por $d' = f \circ d$ es también una métrica en X*

Demostración Es claro que para dos puntos $x, y \in X$, $d'(x, y) \geq 0$, en particular si dos puntos son iguales, la métrica $d(x, y) = 0 \iff x = y$ y con la hipótesis, $f(0) = 0$ implica que d' tiene la propiedad de los indiscernibles. También es claro que d' es simétrica, entonces ya tenemos d' es una pseudométrica.

Ahora suponga $x, y, z \in X$ son arbitrarios miembros. Como d es una métrica, tenemos por desigualdad triangular:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Usando a propiedad de que f es una función monotonica (i.e. estrictamente creciente), se sigue que:

$$d'(x, z) = f(d(x, z)) \leq f(d(x, y) + d(y, z) \tag{1}$$

Ahora utilizando la hipótesis que f es una función cóncava, *i.e.* para $c \in [0, 1]$ $f(cx + (1 - cy)) \leq cf(x) + (1 - c)f(y)$, y utilizando el hecho que $f(0) = 0$, tenemos que para $a > 0$ y $t > 0$

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{(a+t) - a} \leq \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \implies f(a+t) - f(a \leq f(t))$$

De manera sugestiva,

$$f(a+t) \leq f(a) + f(t)$$

Sean $a = d(x,y)$ y $t = d(y,z)$ en la desigualdad (1), obtenemos

$$d'(x,z) \leq f(d(x,y) + d(y,z)) \leq f(d(x,y)) + f(d(y,z)) = d'(x,y) + d'(y,z).$$

Concluimos entonces que como $x, y, z \in X$ eran arbitrarios. Concluimos d' es una métrica en X. $\square$

Ahora ya teniendo este soporte, procedemos a probar un teorema:

Teorema 1. *Suponga que* $(X_k, d_k), k \in \mathbb{Z}_+$ *es una colección contable de espacios métricos, entonces la topologia en* $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$ *es generada por la métrica definida por:*

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)} \tag{2}$$

Demostración Aplicando el lema anterior, tomando como f la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$, esta nos muestra que para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $2^{-k}(f \circ d_k)$ define una métrica en X_k. Por lo tanto, tenemos que d es una métrica en el producto $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$

Ahora denote por τ la topología producto en X, y denote por τ_d la topología en X generada por la métrica d. Queremos ver $\tau_d \supseteq \tau$ y $\tau \supseteq \tau_d$

Suponga que $U = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} U_k$ es un básico en la topología τ del producto, considere $z \in U$, obsérvese, que existe un conjunto finito I, tal que $I \subseteq \mathbb{Z}_+$ para el cual $\forall k \in \mathbb{Z}_+ - I$, $U_k = X_k$. Observar, que para cada $k \in I$ existe un $\epsilon_k > 0$ tal que (las bolas abiertas) $B_\epsilon(k) = \{y \in X_k | d_k(y, z_k) < \epsilon_k\} \subseteq U_k$. I es finito, podemos definir (y es mayor que cero) $\epsilon = \min\left\{2^{-k} f(\epsilon_k) | k \in I\right\}$. Ahora, verifiquemos que la bola abierta $B_\epsilon(z) = \{y \in X | d(z,y) < \epsilon\}$ esta contenida en U; para ello, suponga $y \in X$ tal que $d(z,y) < \epsilon$, entonces $\forall k \in \mathbb{Z}_+$ y para cualquier $k \in I$, tenemos que $2^{-k}(f \circ d_k)(y_k, z_k) < \epsilon$, en otras palabras, $d_k(y_k, z_k) < f^{-1}(2^k 2^{-k} f(\epsilon_k)) = \epsilon_k$. Por lo tanto concluimos que para $k \in \mathbb{Z}_+, y_k \in B_k$ esta contenido en U_k y por lo tanto $B \subseteq U$ y como fueron arbitrarias, $\tau_d \supseteq \tau$.

Por el otro lado, suponga que $z \in X, \epsilon > 0$ y $B_\epsilon(z) = \{y \in X | d(z,y) < \epsilon\}$ es un básico abierto, ahora por propiedad arquimediana escoja un $Z \in \mathbb{Z}_+$ tal que $2^{-Z} < \frac{\epsilon}{3}$ y defina $U_k = \left\{y \in X_k | d_k(y,z) < \frac{\epsilon}{2Z}\right\}$. Para $k > Z$ defina $U_k = X_k$, entonces observamos que $U = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} U_k$ es un básico en la topología τ en X(la producto).

Por ultimo, queremos ver $U \subseteq B$, suponga $y \in U$ vemos que:

$$\begin{aligned}
d(z,y) &= \sum_{k=1}^{Z} 2^{-k} \frac{d_k(z_k, y_k)}{1 + d_k(z_k, y_k)} + \sum_{k=Z+1}^{\infty} \frac{2^{-k} d_k(z_k, y_k)}{1 + d_k(z_k, y_k)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{Z} d_k(z_k, y_k) + \sum_{k=Z+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \sum_{k=1}^{Z} \frac{\epsilon}{2N} + 2^{-N} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

2. Sea (X,d) un espacio métrico separable. Muestre que X es homeomorfo a un subespacio de R^ω

Solución

Para esto demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 2. *Sea (X, d) un espacio métrico separable, i.e existe $A \subseteq X$ enumerable tal que $\bar{A} = X$. Entonces muestre que X es homeomorfo a un espacio de $\mathbb{R}^[\omega]$*

Demostración Usando la ayuda proporcionada, A enumerable, considere $\{a_n \in A | n \in \omega\}$, y la función $f : X \to \mathbb{R}^\omega$ caracterizada por $f(x \in X) = d(x_n)_{n \in \omega}$, queremos ver que f es un homomorfismo.

Proposición 1. *f es sobre, sobre su imagen* "juego de palabras intencionado"