Axiomas de Separación y enumerabilidad

David Cardozo

20 de abril de 2015

Ejercicio 1. Sea X un espacio de Hausdorff, regular y separable. Muestre que existe una base $\mathcal{B}$ para la topología de X tal que $|\mathcal{B}| \leq 2^{\aleph_0}$.

Solución. Empezamos con unas pequeñas proposiciones para tener una base conjunta en las definiciones:

Proposición 1. *Si (X, τ) es un espacio topologico, X es regular si y solo si para cualquier punto x y cualquier conjunto cerrado F con $x \notin F$, existe un conjunto abierto U para el cual $x \in U$ y $U^{cl} \cap F = \varnothing$*

Demostración. Si X es regular y si x y F son dados, podemos escoger conjuntos abiertos disjuntos U, V tal que $x \in U$ y $F \subseteq V$. Entonces el conjunto cerrado V^{c} cumple con $V^{\mathrm{c}} \supseteq U$ y $V^{\mathrm{c}} \cap F = \varnothing$, tenemos entonces que $V^{\mathrm{c}} \supseteq U^{\mathrm{cl}}$ y $U^{\mathrm{cl}} \cap F = \varnothing$. Para la otra dirección, suponga que x y F son dados y U es un abierto que cumple que $x \in U$ y $U^{\mathrm{c}} \cap F = \varnothing$ podemos ver entonces que si escogemos $V = \left(U^{\mathrm{cl}}\right)^{\mathrm{c}}$, vemos que $x \in U, f \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$ $\square$

Ahora requerimos del siguiente resultado:

Lema 1. *Cualquier espacio regular de Lindelöf es normal.*

Demostración. Sea X regular y de Lindelöf, y sean E, F conjuntos cerrados disjuntos de X dados. Por regularidad y la anterior proposición, cada punto de E tiene una vecindad abierta cuya clausura es disyunta de F. Entonces sea $\mathcal{U}$ es conjunto de los conjuntos abiertos con clausura disyunta de F que cubre E. Similarmente, sea $\mathcal{V}$ el conjunto de los conjuntos abiertos cuyas clausuras disyuntas de E cubre F. Tenemos entonces que $\mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \{X - (E \cup F)\}$ es una cobertura abierta de X. Como X es de Lindelöf, existen secuencias de conjuntos U_n en $\mathcal{U}$ y V_n en $\mathcal{V}$ tal que $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty}$ y $F \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} V_n$. Considere:

$$U'_n = U_n - \bigcup_{k \leq n} V_k^{\mathrm{cl}} \quad \text{and} \quad V'_n = V_n - \bigcup_{k \leq n} U_k^{\mathrm{cl}}$$

Observemos que cuando $m \leq n$, tenemos que $V_m \subseteq \cup_{k \leq n} V_k^{\mathrm{cl}}$ Entonces $U'_n \cap V_m = \varnothing$, y tenemos que el conjunto mas pequeño también cumple con $U'_n \cap V'_m$ es vacío. De manera análoga tenemos que $U'_n \cap V'_m$ es vacío para $m \geq n$, por lo tanto $U'_n \cap V'_m = \varnothing$ para todo n, m. Ahora definamos:

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U'_n \quad \text{and} \quad V = \bigcup_{m=1}^{\infty} V'_m$$

Entonces $U \cap V = \cup_{n,m} (U'_n \cap V'_m) = \varnothing$, también:

$$E\cap U = E\cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(U_n - \bigcup_{k\leq n} V_k^{\mathrm{cl}} \right) \supseteq E\cap \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(U_n - \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k^{\mathrm{cl}} \right) = E\cap \left(X - \bigcup_{k=1} \infty V_k^{\mathrm{cl}} \right)$$

donde la ultima igualdad es dada porque $\{U_n\}$ cubre a E. El lado derecho acá es igual a E dado que $V_k^{\mathrm{cl}} \subseteq X - E$ para todo k, entones $E \subseteq U$, de manera similar $F \subseteq V$, y concluimos entonces la demostración. □

Corolario 1. *Todo espacio regular separable es normal.*

Demostración. Un espacio separable es automáticamente de Lindelöf, y el corolario sigue del teorema anterior. □

Teniendo este resultado, requerimos de una versión alternativa del teorema de teorema de metrización de Urysohn que citamos del libro [1] (pag.476) la prueba basa en que todo espacio regular separable es normal y se pide como ejercicio mostrar.

Teorema 2. *Cualquier espacio separable regular de Hausdorff es metrizable*

y concluimos con la siguiente proposición:

Proposición 2. *Todo espacio métrico separable tiene una base contable*

Demostración. Suponga X es separable, entonces existe un subconjunto denso contable E. Para cada $e_i \in E$, sea $N_q(e_i)$ una vecindad con radio racional q centrada en e_i. Considere $\{V_\alpha\} = \{N_q(e_i) | q \in \mathbb{Q}, i \in \mathbb{N}\}$, entonces $\{V_\alpha\}$ es una colleción contable de conjuntos contables. Sea x un punto arbitrario en X y sea G abierto en X tal que $x \in G$, tenemos entonces que x esta en el interior de G, y por lo tanto existe una vecindad $N_r(x)$ para la cual $N_r(x) \subseteq G$, observemos que podemos escoger un racional q para el cual $0 < q < \frac{r}{2}$ para el cual $x \in N_q(x) \subseteq N_r(x) \subseteq G$. Como E es denso en x, cualquier vecindad de x contiene algún $e \in E$, entonces $e \in N_q(x)$ lo cual implica que $d(x,e) < q$, pero tambien tenemos $d(e,x) < q$ lo cual implica que $x \in N_q(e)$ y $N_q(e) \in \{V_\alpha\}$. Ahora queremos ver que $N_q(e) \subseteq G$. Sea y cualquier punto en $N_q(e)$ sabemos que $d(x,e) < q, d(e,y) < q$, por lo tanto $d(x,y) < d(x,e) + d(e,y) = 2q$. Pero hemos definido q para que cumpla $0 < q < \frac{r}{2}$ entonces sabemos que $d(x,y) < r$, es decir, que para cualquier $y \in N_q(e)$, tenemos $y \in N_r(x)$, equivalentemente $N_q(e) \subseteq N_r(x)$, y podemos escoger r tal que $N_r(x) \subseteq G$, por lo tanto $N_q(e) \subseteq G$. Concluimos entonces que $\{V_\alpha\}$ es una base para X. □

Ejercicio 2. Muestre que si X es un espacio de Hausdorff, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Todo subespacio de X es normal.
2. Si $A, B \subseteq X$ son tales que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, entonces existen U y V abiertos disyuntos en X con $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.

Solución. Vamos a cambiar un poco la notación para poder decir específicamente donde vamos a tomar la clausura, e.g $\mathrm{Cl}_X(A)$

- (a) $\implies$ (b) Sea A y B dados con las condiciones que $A \cap \mathrm{Cl}_X(B) = \mathrm{Cl}_X(A) \cap B = \varnothing$. Sea Y el subespacio $X - (\mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(B))$. Ahora, ambos A y B están contenidos en Y. Esto debido a que:

$$\begin{aligned} A \cap (\mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(B)) &= (A \cap \mathrm{Cl}_X(B)) \cap \mathrm{Cl}_X(A) \\ &= \varnothing \cap \mathrm{Cl}_X(A) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

  Similarmente:

$$\begin{aligned} B \cap (\mathrm{Cl}_X(A) \cap \mathrm{Cl}_X(B)) &= (\mathrm{Cl}_X(A) \cap B) \cap \mathrm{Cl}_X(B) \\ &= \varnothing \cap \mathrm{Cl}_X(B) \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

  Ahora, queremos ver que $\mathrm{Cl}_Y(A)$ y $\mathrm{Cl}_Y(B)$ son conjuntos disyuntos y cerrados en Y. Para observar que son disyuntos, observamos el hecho que:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_Y(A) \cap \mathrm{Cl}_Y(B) \cap Y &\subseteq \mathrm{Cl}_X(A)\,\mathrm{Cl}_X(B) \cap Y \\ &= \varnothing \end{aligned} \tag{1}$$

  Para observar que son cerrados, damos cuenta que la clausura de un conjunto en un espacio topologico es siempre cerrado en ese espacio. Como todo subespacio de X es normal, tenemos que Y también es normal, entonces, existen conjuntos U, V abiertos en Y (por lo tanto también abiertos en X) con la propiedad $\mathrm{Cl}_Y(A) \subset U$ y $\mathrm{Cl}_Y(B) \subset V$. Como A y B ambos están contenidos en Y, tenemos también que $\mathrm{Cl}_Y(A) \supset A$ y $\mathrm{Cl}_Y(B) \subset B$, tenemos entonces $U \supset A$ y $V \supset B$ como queríamos.

- (b) $\implies$ (a). Sea Y un subespacio de X y sean A, B cerrados disyuntos subconjuntos de Y. Observamos que:

$$\begin{aligned} A \cap \mathrm{Cl}_X(B) &= A \cap B \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

  Similarmente,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cl}_X(A) \cap B &= A \cap B \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

  Por hipótesis, existen conjuntos abiertos disyuntos U y V de X con $U \supset A$ y $V \supset B$. Se tiene entonces que los conjuntos $U \cap Y$ y $V \cap Y$ son abiertos disjuntos con la propiedad de $A \subset (U \cap Y)$ y $B \subset (V \cap Y)$. Por lo tanto, Y es normal, y como Y fue arbitrario, todo subespacio de X es normal.

Ejercicio 3. 1. Para cada $\alpha \in \{2,3,4\}$ pruebe que si X es un subespacio T_α y existe $f : X \to Y$ continua, cerrada y sobreyectiva, entonces Y también es T_α. (Solo lo haremos para $\alpha = 4$)

Solución. Primero utilizaremos este resultado antes de dar una prueba completa:

Lema 3. *Sea $f : x \to Y$ una función continua y cerrada, $B \subseteq Y$ y U abierto en X tal que $f^{-1}(B) \subseteq U$ entonces existe V abierto en Y tal que $B \subseteq Y$ y $f^{-1}(V) \subset U$.*

Demostración. Definamos $V = Y - f(X - U)$ que es abierto si f es cerrada. Si $f^{-1}(B) \subseteq U$, entonces $B \subseteq V$, en particular, si $y \in B$ entonces $f^{-1}(y) \subseteq U$ o en otras palabras, $f^{-1}(y) \cap (X - U) = \varnothing$, luego $y = f \circ f^{-1}(y) \in Y - f(X - U) = V$, además, $f^{-1}(V) = f^{-1}(Y - F(X - U)) = X - f^{-1} \circ f(X - U) \subset X - (X - U) = U$ □

Ahora si probamos el teorema importante:

Teorema 4. *Sea X un espacio normal (T_4) y $f : X \to Y$ una función continua, cerrada y sobreyectiva, entonces Y es normal (T_4).*

Demostración. Sea $f :\to Y$ una función continua, sobre y cerrada, dados A, B cerrados disjuntos en Y se sigue que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son cerrados disjuntos en X, como X es normal existirán U, V abiertos en X para los cuales $f^{-1}(A) \subseteq U, f^{-1}(B) \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$. Por el lema anterior, existirán U_A, V_B abiertos en Y para los cuales $A \subseteq U_A$ y $f^{-1}(U_A) \subseteq U, B \subseteq V_B$ y $f^{-1}(V_B) \subseteq V$. Observamos que $f^{-1}(U_a \cap V_b) = f^{-1}(U_A) \cap f^{-1}(V_B) \subseteq U \cap V = \varnothing$, por tanto $U_A \cap V_B = \varnothing$ y concluimos que Y es normal. Como la imagen de un T_1 bajo una función continua y cerrada también es T_1, esta proposición, se cumple para T_4 □

Ejercicio 4. Muestre que cualquier espacio topológico es imagen continua de un espacio métrico (en particular T_4) y por lo tanto la hipótesis en (a) de que f es cerrada no se puede omitir.

Solución. Para cualquier espacio topologico (X, τ) considere (X, τ') con la topología discreta (por lo tanto metrizable y normal), tenemos entonces que la función:

$$\begin{aligned} I : (X, \tau') &\to (X, \tau) \\ x &\to x \end{aligned}$$

es decir la función identidad. Observamos que esta función es continua y es sobreyectiva. Por lo tanto todo espacio topologico es imagen continua de un espacio métrico.

Ejercicio 5. Demuestre que todo espacio cuya topología provenga de un orden lineal es regular.

Solución. Primero probamos que toda topología que provenga de un orden lineal ses de Hausdorff. Entonces, Sea $(X, <)$ sea un orden lineal y sea (X, τ) el espacio topologico con la topología del orden, sean $a, b \in X$ y sin perdida de generalización considere $a < b$. Sea:

$$A = \{x \in X | a < x < b\}$$

Ahora, si A es vacío, tenemos entonces $a \in (\infty, b)$, $b \in (a, \infty)$, con $(-\infty, b) \cap (a, \infty) = \varnothing$, y tenemos que X es de Hausdorff. Ahora, si A es no vacío, entonces $a \in (-\infty, x), b \in (x, \infty)$, y $(-\infty, x) \cap (x, \infty) = \varnothing$ para cualquier $x \in A$ y por lo tanto X es de Hausdorff.

Ahora, en particular, los singletons en X son cerrados. Suponga ahora que $x \in X$ y A es un conjunto cerrado disyunto de x, entonces existe un elemento base (a, b) que contiene a x y es disyunto de A. Sea $a' \in (a, x)$ y sea $U_1 = (-\infty, a'), V_1 = (a', \infty)$, si tal a' no existe, entonces sea $U_1 = (-\infty, x), V_1 = (a, \infty)$, exactamente como el argumento anterior, para ambos casos los dos conjuntos son disyuntos. Similarmente, considere $b' \in (x, b)$ y si existe tal b', considere $U_2 = (b', \infty), V_2 = (\infty, b')$ y si no existe tal b', sea $U_2 = (x, \infty), V_2 = (-\infty, b)$, otra vez ambos conjuntos son disyuntos para cualquier caso, y tenemos $U = U_1 \cup U_2$ y $V = V_1 \cap V_2$ que son disyuntos. Mas aún, $x \in V$ y $A \subset U$, y por lo tanto, X es regular.

Ejercicio 6. Todo espacio cuya topología provenga de un orden lineal es normal

Solución. Sea H y K conjuntos separados de X. Sea $x \in H$, entonces existe un abierto V_x para el cual $x \in V_x \subseteq X - K$, similarmente para cualquier $x \in K$, existe un abierto V_x para el cual $x \in V_x \subseteq X - H$. Sea $V_H = \bigcup_{x \in H} V_x$ y sea $V_K = \bigcup_{x \in K} V_x$, tenemos entonces $H \subseteq V_h, K \subseteq V_k$ y $V_h \cup V_k \subseteq x - (H \cup K)$. Ahora sea $V = V_h \cap V_k$. Si $V = \varnothing$ ya tendríamos la proposición, entonces suponga $V \neq \varnothing$. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ de la siguiente manera: $p \sim q$ si y solo si $[\text{mín}\{p, q\}, \text{máx}\{p, q\}] \subseteq V$, observamos que las clases de equivalencia son las componentes ordenadas de V. Sea $T \subseteq V$ y T contenga exactamente un punto de cada $\sim$ clase. Suponga $x \in H$ y $p, q \in V_x \cap T$ con $p < q$, queremos ver ahora que $p < x < q$. Suponga $x < p$. Como $p \in T \subseteq C$, existe $y \in K$ para el cual $p \in V_y, [x, q] \subseteq V_x \subseteq x - K$, por lo tanto $y \notin [x, q]$. Si $y < x$ tendiramos $x \in [x, p] \subset V_y \cap H = \varnothing$, tendríamos entonces $x < p < q < y$, pero esto contradeciría la escogencia de p y q porque $p \sim q$. Similarmente $x \in K$ y $p, q \in V_x \cap T$ con $p < q$, tenemos $p < x < q$, observamos que de una esto implica que $|V_x \cap T| \leq 2$ para todo $x \in H \cup K$, ahora sea $p \in T$, considere $H_p = \{x \in H | p \in V_x\}$ y $K_p = \{x \in K | p \in V_x\}$, observamos entonces que para cualquier miembro de esots elementos se cumple: $K_p < p < H_p$. Ahora definamos para cada $x \in H \cup K$, W_x abierto de la siguiente manera:

$$W_x = \begin{cases} V_x, & \text{si } V_x \cap T = \varnothing \\ V_x \cap (p, \infty), & \text{si } V_x \cap T = \{p\} \text{ y } p < x \\ V_x \cap (/ - \infty, p), & \text{si } V_x \cap T = \{p\} \text{ y } x < p \\ V_x \cap (p, q), & \text{si } V_x \cap T = \{p, q\} \text{ y } p < x < q \ . \end{cases}$$

Sean:

$$W_h = \cup_{x \in H} W_x \quad \text{y} \quad W_k = \cup_{x \in K} W_x$$

entonces tenemos W_h, W_k abiertos, $H \subseteq W_h$ y $K \subset W_k$ que cumplen: $W_h \cap W_k = \varnothing$

Bibliografía

[1] Anthony Knapp, *Basic Real Analysis*, Birkhäuser, Berlin, 1st edition, 2005.