Tarea # 3 (Conjunto Cerrados y Funciones Continuas)

David Cardozo

18 de febrero de 2015

1. Suponga que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un espacio topológico (X_n, τ_n), metrizable.Muestre que $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ con la topología producto es metrizable.

Solución

Antes de comenzar con una demostración, pongamos en concreto unos lemas importantes.

Lema 1. *Suponga d es una métrica en un espacio arbitrario X. Si tenemos una función $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ que cumple con las características: f es estrictamente creciente, f es una función cóncava y $f(0) = 0$, entonces d' definido por $d' = f \circ d$ es también una métrica en X*

Demostración Es claro que para dos puntos $x, y \in X$, $d'(x, y) \geq 0$, en particular si dos puntos son iguales, la métrica $d(x, y) = 0 \iff x = y$ y con la hipótesis, $f(0) = 0$ implica que d' tiene la propiedad de los indiscernibles. También es claro que d' es simétrica, entonces ya tenemos d' es una pseudométrica.

Ahora suponga $x, y, z \in X$ son arbitrarios miembros. Como d es una métrica, tenemos por desigualdad triangular:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Usando a propiedad de que f es una función monotonica (i.e. estrictamente creciente), se sigue que:

$$d'(x, z) = f(d(x, z)) \leq f(d(x, y) + d(y, z) \tag{1}$$

Ahora utilizando la hipótesis que f es una función cóncava, *i.e.* para $c \in [0, 1]$ $f(cx + (1 - cy)) \leq cf(x) + (1 - c)f(y)$, y utilizando el hecho que $f(0) = 0$, tenemos que para $a > 0$ y $t > 0$

$$\frac{f(a + t) - f(a)}{(a + t) - a} \leq \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \implies f(a + t) - f(a \leq f(t))$$

De manera sugestiva,

$$f(a + t) \leq f(a) + f(t)$$

Sean $a = d(x, y)$ y $t = d(y, z)$ en la desigualdad (1), obtenemos

$$d'(x, z) \leq f(d(x, y) + d(y, z)) \leq f(d(x, y)) + f(d(y, z)) = d'(x, y) + d'(y, z).$$

Concluimos entonces que como $x, y, z \in X$ eran arbitrarios. Concluimos d' es una métrica en X. $\square$

Ahora ya teniendo este soporte, procedemos a probar un teorema:

Teorema 1. *Suponga que* $(X_k, d_k), k \in \mathbb{Z}_+$ *es una colección contable de espacios métricos, entonces la topologia en* $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$ *es generada por la métrica definida por:*

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)} \tag{2}$$

Demostración Aplicando el lema anterior, tomando como f la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$, esta nos muestra que para cada $k \in \mathbb{Z}_+$, $2^{-k}(f \circ d_k)$ define una métrica en X_k. Por lo tanto, tenemos que d es una métrica en el producto $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$

Proposición 1. *Métrica en el producto* $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$ *es una métrica.*

Demostración

Positiva Observar que todos los términos en la sumatoria son mayores o iguales a cero.

2. Propiedad de los indiscernibles .

Queremos ver si $d(x, y) = 0 \iff x = y$, para ello observemos que, sabiendo que ya hemos probado d_k es una métrica:

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(2^{-k}\right) \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k + y_k)} &= 0 \\ \left(2^{-k}\right) \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k + y_k)} &\quad \text{Para todo } k \\ d_k(x_k - y_k) &= 0 \\ x &= y \end{aligned}$$

Tenemos entonces propiedad de los indiscernibles.

3. Desigualdad triangular

Recordemos que por las propiedades de la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$, y que la k-esíma métrica cumple con las siguientes propiedades: para $k \in \mathbb{Z}_+$ $\frac{d_k(x_k, z_k)}{1+d_k(x_k - z_k)} \geq \frac{d_k(z_k, y_k)}{1+d_k(x_k - y_k)}$ y similarmente $\frac{d_k(x_k, y_k)}{1+d_k(x_k, y_k)} \leq \frac{d_k(x_k, z_k)}{1+d_k(x_k, z_k)} + \dfrac{d(z_k, y_k)}{1 + d(z_k, y_k)}$.

Por lo tanto vemos que:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{2^{-k}d_k(x_k-y_k)}{1+d_k(x_k-y_k)}\leq\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(2^{-k}\right)\left(\frac{d_k(x_k,z_k)}{1+d_k(x_k-z_k)}+\frac{d_k(y_k,z_k)}{1+d_k(y_k,z_k)}\right)$$
$$\leq\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\left(\frac{2^{-k}d_k(x_k,z_k)}{1+d_k(x_k-z_k)}\right)+\left(\frac{2^{-k}d_k(y_k,z_k)}{1+d_k(y_k-z_k)}\right)$$
$$\implies d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)$$

Concluimos entonces que es una métrica. □

Ahora denote por τ la topología producto en X, y denote por τ_d la topología en X generada por la métrica d. Queremos ver $\tau_d\supseteq\tau$ y $\tau\supseteq\tau_d$

Suponga que $U=\prod_{k\in\mathbb{Z}_+}U_k$ es un básico en la topología τ del producto, considere $z\in U$, obsérvese, que existe un conjunto finito I, tal que $I\subseteq\mathbb{Z}_+$ para el cual $\forall k\in\mathbb{Z}_+-I$, $U_k=X_k$. Observar, que para cada $k\in I$ existe un $\epsilon_k>0$ tal que (las bolas abiertas) $B_\epsilon(k)=\{y\in X_k|d_k(y,z_k)<\epsilon_k\}\subseteq U_k$. I es finito, podemos definir (y es mayor que cero) $\epsilon=\min\left\{2^{-k}f(\epsilon_k)|k\in I\right\}$. Ahora, verifiquemos que la bola abierta $B_\epsilon(z)=\{y\in X|d(z,y)<\epsilon\}$ esta contenida en U; para ello, suponga $y\in X$ tal que $d(z,y)<\epsilon$, entonces $\forall k\in\mathbb{Z}_+$ y para cualquier $k\in I$, tenemos que $2^{-k}(f\circ d_k)(y_k,z_k)<\epsilon$, en otras palabras, $d_k(y_k,z_k)<f^{-1}(2^k2^{-k}f(\epsilon_k))=\epsilon_k$. Por lo tanto concluimos que para $k\in\mathbb{Z}_+,y_k\in B_k$ esta contenido en U_k y por lo tanto $B\subseteq U$ y como fueron arbitrarias, $\tau_d\supseteq\tau$.

Por el otro lado, suponga que $z\in X,\epsilon>0$ y $B_\epsilon(z)=\{y\in X|d(z,y)<\epsilon\}$ es un básico abierto, ahora por propiedad arquimediana escoja un $Z\in\mathbb{Z}_+$ tal que $2^{-Z}<\frac{\epsilon}{3}$ y defina $U_k=\left\{y\in X_k|d_k(y,z)<\frac{\epsilon}{2Z}\right\}$. Para $k>Z$ defina $U_k=X_k$, entonces observamos que $U=\prod_{k\in\mathbb{Z}_+}U_k$ es un básico en la topología τ en X(la producto).

Por ultimo, queremos ver $U\subseteq B$, suponga $y\in U$ vemos que:

$$d(z,y)=\sum_{k=1}^{Z}2^{-k}\frac{d_k(z_k,y_k)}{1+d_k(z_k,y_k)}+\sum_{k=Z+1}^{\infty}\frac{2^{-k}d_k(z_k,y_k)}{1+d_k(z_k,y_k)}$$
$$\leq\sum_{k=1}^{Z}d_k(z_k,y_k)+\sum_{k=Z+1}^{\infty}2^{-k}\leq\sum_{k=1}^{Z}\frac{\epsilon}{2N}+2^{-N}=\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

2. Sea (X,d) un espacio métrico separable. Muestre que X es homeomorfo a un subespacio de R^ω

Solución

Para esto demostraremos el siguiente teorema:

Teorema 2. *Sea (X,d) un espacio métrico separable, i.e existe $A\subseteq X$ enumerable tal que $\bar{A}=X$. Entonces muestre que X es homeomorfo a un espacio de* $\mathbb{R}^[\omega]$

Demostración Usando la ayuda proporcionada, A enumerable, considere $\{a_n\in A|n\in\omega\}$, y la función $f:X\to\mathbb{R}^\omega$ caracterizada por $f(x\in X)=d(x_n)_{n\in\omega}$, queremos ver que f es un homomorfismo.

Proposición 2. *f es sobre, sobre su imagen* "juego de palabras intencionado"

Proposición 3. *f es inyectiva*

Demostración Dados $x, y \in X$, suponga $x \neq y$, suponga el caso en que $x \in A$, es decir $x = a_n$, tenemos que $f(x)$ es cero, mientras que $f(y) \neq 0$, es claro que $f(x) \neq f(y)$, para el caso en que $y \in A$, es similar. Para el ultimo caso, es decir, ambos elementos no pertenecen a A, es decir x, y son puntos limites. Ahora, observe que A es de Hausdorff, esto debido a que X es métrico, por lo tanto existe un $\epsilon > 0$ tal que las bolas centradas en x y y, i.e $B_\epsilon(X), B_\epsilon(y)$ son tales que su intersección es vacía, luego existe succesion $a_n \in A, a_n \in B_\epsilon(x) \implies d(y, a_n) \geq \epsilon$, luego $f(x) \neq f(y)$.

Continuamos con la siguiente proposición.

Proposición 4. *$f' : X \to \mathrm{Img}(F)$ es continua*

Demostración Para esto probaremos que $f'_n : X \to \mathbb{R}$ es continua. Sea un abierto en la imagen de la forma $f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon$, y sea $y \in f_n^{'-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$, vamos a ver que y es un punto interior. Defina $\delta = \epsilon - d(x, y)$, Obsérvese que:

$$
\begin{aligned}
\epsilon &> d(a_n, x) + d(a_n, y) \\
&> d(a_n, x) + d(a_n, y) > d(x, y)\epsilon > d(x, y) \\
\epsilon - d(x, y) > 0
\end{aligned}
$$

Entonces queremos ver que el abierto contenido en la base de la topologia de X de la forma $B_\delta \subseteq f_n^{'-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$. Para ello tome $u \in B_\delta(y)$, o en otras palabras $d(z, y) < \epsilon - d(x, y)$, o equivalente $d(z, y) + d(x, y) < \epsilon$ y por desigualdad triangular $d(z, x) < \epsilon$ y tambien observar que $z \in f_n^{'-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$ ya que $d(a_n, z) < f(x) + \epsilon$.

Concluimos entonces $\forall y \in f_n^{'-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon) \exists B_\delta(y) \subseteq f_n^{'-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$, y este es un abierto en X, por lo tanto $\mathrm{Img}(f)$ es continua. $\square$

Nos queda por ultimo entonces revisar que la imagen inversa es continua:

Proposición 5. *$f^{'-1} : \mathrm{Img}(f) \to X$ es continua.*

Demostración Como es normal, tome un basico, i.e una bola de X, de la forma $B_\epsilon(x)$, para mostrar que esta funcion es continua, basta con solo mirar que $f'(B_\epsilon(x))$, es un abierto en la imagen. Sea $\delta = \epsilon - |f_1(x) - f_1(y)|$. Conside U vecindad de $f(y)$ de la forma:

$$
U = (f_1(y) - \delta, f_1(y) + \delta) \times \prod_{i \in \omega} \mathbb{R}_i
$$

Sea $f(z) \in U$, implica que $|f_1(y) - f_1(z)| < \delta$, o en otras palabras, $|f_1(x) - f_1(y)| < \epsilon$ por desiguldad triangular. Ahora, observe que si $|f_1(x) - f_1(y)| < \epsilon$, tenemos que $d(z, a_1) + d(z, a_1)$, lo cual es mas grande que $d(z, x) < \epsilon$ y por ende mas pequeño que ϵ concluimos que $z \in B_\epsilon(x)$

Concluimos entonces que dado cualquier punto en $f'(B_\epsilon(x))$, es un punto interior, entonces concluimos que la funcion es continua

$\square$

Concluimos f es un homomorfismo en su imagen, y X es homeomorfo a un subespacio de R^ω

3. El problema 3 es un caso particular de la solución al problema 3