Tarea # 8 Compactificación

David Cardozo

25 de marzo de 2015

Ejercicio 1. Sea X un espacio de Hausdorff y suponga que todo subespacio abierto de X (en particular X mismo) es compacto. Pruebe que X es finito.

Solución: Queremos ver la siguiente proposición:

Teorema 1. *Si X un espacio de Hausdorff y todo subespacio abierto de X (en particular X mismo) es compacto, entonces X es finito.*

Demostración. En aras de obtener una contradicción, suponga que X es de Hausdorff infinito, en especial, observe que todos los conjuntos con un solo elemento, *los singletons*, son cerrados, como el espacio es infinito y de Hausdorff, los singletons son a su vez compactos y abiertos, luego, existe una cobertura que contiene todos los singletons, que no tiene una subcobertura finita, contradiciendo una de nuestras hipótesis. Concluimos entonces X es finito $\square$

Ejercicio 2. Use el ejercicio anterior y el ejercicio 4 de la tarea 7 para mosttar que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función cualquiera entonces existe $g : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ continua tal que $g \restriction \mathbb{N} = f$ (aquí estamos identificando los naturales con los ultrafiltros principales de la manera obvia).

Solución

Para ello utilizaremos las siguientes proposiciones y definiciones:

Denotamos por $\mathcal{C}(X)$ al conjunto de funciones continuas definidas de X en $\mathbb{R}$

Definición 0.1. Dado un espacio X y una función $f \in \mathcal{C}(X)$, se llama cero-conjunto de f al conjunto $f^{-1}(0)$ y se escribe $Z(f)$

Lema 2. *Dados A, B cero-conjuntos disjuntos en un espacio topologico X, existen U, V abiertos sobre el mismo espacio tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$*

Demostración. Dados A, B cero conjuntos. Existen $f, g \in \mathcal{C}(X)$ para los cuales $A = f^{-1}(0), B = g^{-1}$. Considere:

$$C = \{x \in X | g(x) \geq f(x)\} \tag{1}$$
$$D = \{x \in X | f(x) \geq g(x)\} \tag{2}$$

Como f, g son funciones continuas, tenemos que C, D son conjuntos cerrados. Tomen entonces $U = X - D$ y $V = X - C$, entonces $U \cap V = \varnothing$ $\square$

La siguiente proposición la encontramos en la siguiente trabajo de referencia, ultrafiltros y convergencia [1]

Proposición 1. Dada $\{\mathcal{U}_n\}$ una familia finita de ultrafiltros en X existe una familia $\{A_n\}$ de cero-conjuntos disjuntos dos a dos tales que $A_n \in \mathcal{U}_n$ para cada n

Para ver que $\beta\mathbb{N}$ es compacto, vemos primero que es de Hausdorff. Sean p, q dos puntos diferentes en $\beta\mathbb{N}$. Por la proposición anterior, existen dos cero-conjuntos disjuntos A, B tales que $A \in A^p = \{U | U \text{ cero-conjunto }, p \in U\}$, que es la colección de ultrafiltros que converge a p, similarmente $B \in B^q$, ahora con el lema 1, obtenemos que que existen abiertos $U, V \in \mathbb{N}$ tales que $A \subset U, B \subset B, U \cap B = \varnothing$. Tambien, se tienen abiertos $U_0, V_0 \in \beta\mathbb{N}$ para los cuales $U_0 \cap = U, V_0 \cap V = X$. Luego tenemos que: $p \in \overline{A} \subset U_0$ y $q \in \overline{B} \subset V_0$, por lo tanto $\beta\mathbb{N}$ es de Hausdorff. Ahora considere que la colección B de cerrados básicos $\overline{Z} = \mathrm{Cl}_{\beta\mathbb{N}Z}$ con la propiedad de intersección finita. es una base para algún ultra filtro en X, por lo tanto esta contenida en algun filtro de la forma A^p dado que:

$$p \in \cap_{z \in A^p} \overline{Z} = \cap_{z \in A^p} \mathrm{Cl}_{\beta\mathbb{N}} Z \subset \cap_{z \in B} \mathrm{Cl}_{\beta\mathbb{N}} Z$$

Como esta intersección no es vacía. Tenemos que $\beta\mathbb{N}$ es compacto.

Ejercicio 3. Use el ejercicio anterior y el ejercicio 4 de la tarea 7 para mosttar que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función cualquiera entonces existe $g : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ continua tal que $g \restriction \mathbb{N} = f$ (aquí estamos identificando los naturales con los ultrafiltros principales de la manera obvia).

Solución Empezamos por poner en estándar de identificar cualquier n.

Observación. Identificamos n con el ultrafiltro principal generado por el numero n

Dado una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Queremos encontrar $g : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$, observemos que la definición dada por:

$$g(\mathfrak{U}) = \lim_{n \to \mathfrak{U}} f(n)$$

Observamos que la imagen es una sucesión de ultrafiltros por cada $f(n)$ para cada n.

Caso 1. Queremos ver que la restricción de esta función es f

Observamos que para $x \in \mathbb{N}$:

$$g(\{m\}) = \lim_{n \to m} \{f(n)\} = f(m)$$

[1] http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001005/lecciones/cap6/cap6lec4.pdf

Caso 2. g es continua

Observamos que usando la ayuda, recurrimos al punto 4 de la tarea 7, para ello, observamos que $\beta\mathbb{N}$ es de Hausdorff y compacto (probado en el punto anterior). Concluimos entonces que g es continua.

Ejercicio 4. Muestre que para cualquier espacio X las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es compacto y metrizable.

2. X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $[0,1]^\omega$.

Solución
Queremos ver:

Lema 3. *Si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de $[0,1]^\omega$, entonces X es compacto y metrizable.*

Demostración. Sea X homeomorfo a un subespacio cerrado de $[0,1]^\omega$, El conjunto $[0,1]^\omega$ es un producto de compactos, entonces por Teorema de Tychonoff, $[0,1]^\omega$ es compacto, y cualquier cerrado de $[0,1]^\omega$ es compacto y como subespacio de $\mathbb{R}^\omega$ es metrizable, concluimos que X es compacto y metrizable. $\square$