Tarea #6 (Lema de Zorn y Ultrafiltros)

David Cardozo

9 de marzo de 2015

1. Suponga que (X, τ) es un espacio de Hausdorff sin puntos aislados. Muestre (Usando el Lema de Zorn) que existe una topología τ^* sobre X tal que:

I $\tau \subseteq \tau^*$.

II (X, τ^*) es de Hausdorff sin puntos aislados, y

III Para toda topología $\tau' \supsetneq \tau^*$ sobre X, el espacio (X, τ') tiene puntos aislados.

Solución:

I,II y III)

Proposición 1. *Existe una topología τ^* sobre X para la cual $\tau \subseteq \tau^*$*

Demostración: Considere la familia H de todas las topologías Hausdorff en X, para las cuales $\tau' \supseteq \tau$ y (X, τ') no tiene puntos aislados, claramente $H \neq \varnothing$, dado que $\tau \in H$. Observamos entonces que H esta ordenado bajo la relación de contención, y también H es un conjunto inductivo dado que para cualquier cadena, existe una cota superior. Por tanto, aplicamos el Lema de Zorn (*todo conjunto inductivo tiene al menos un elemento maximal*), sea H^* un maximal en H, entonces la unión $\tau*$ de topologías que pertenecen a H^* es una topología de Hausdorff en X.

Proposición 2. *Sean τ y τ' dos topologías en X tales que $\tau \subseteq \tau'$, si τ es de Hausdorff, entonces τ' es también de Hausdorff.*

Demostración: Suponga (X, τ) es un espacio de Hausdorff, entonces podemos encontrar conjuntos abiertos $U, V \in \tau$ para los cuales $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \varnothing$, como τ' es mas fina que τ, los conjuntos U, V también cumplen esta misma condición en τ'.

También vemos que (X, τ^*) no tiene puntos aislados.

Proposición 3. *Sea H una cadena de topologías bajo la relación de contenencia en un conjunto X, y τ^* la unión de topologías que perteneces a H. Si (X, τ) para todo $\tau \in H$ es un espacio sin puntos aislados, entonces (X, τ^*) tampoco tiene puntos aislados.*

Demostración: Por contradicción, sea $x^* \in X$ un punto aislado en el espacio (X, τ^*), entonces, tenemos que existe una familia finita de topologías $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k \in H$ y elementos $U_1 \in \tau_1, \ldots U_k \in \tau_k$, para los cuales $\cap_{i_1,\ldots,i_k} U_i = \{x^*\}$. Por otra parte, H es una cadena, por lo tanto existe $i_\ell \in \{1, \ldots, k\}$ para el cual $\tau_i \subset \tau_{i_\ell}$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, tenemos entonces $U_1, \ldots, U_k \in \tau_{i_\ell}$ y $\{x^*\} = \cap_{i_1,\ldots,i_k}$ es abierto en (X, τ_{i_ℓ}), es decir, x^* es un punto aislado en (X, τ_{i_ℓ}). Contradicción.

Por maximalidad de este conjunto, tenemos que se cumple la hipótesis *III.*

2. Suponga que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tiene la *propiedad fuerte de intersecciones finitas* (i.e para cualquier $\mathcal{A}\prime \subseteq \mathcal{A}$ finito, el conjunto $\cap\mathcal{A}\prime$ es infinito). Muestre (usando el lema de Zorn) que existe un ultrafiltro no principal $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$.

Solución

Para ello utilizaremos el siguiente teorema (hay que considerar los dos casos):

Teorema 1. *Sea* $\mathcal{R} = \{B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : BB \text{ es infinito}\}$. *Entonces:*

- *Siempre que* $A \subseteq \mathcal{R}$ *con la* propiedad fuerte de intersecciones finitas*, existe un ultrafiltro no principal* $\mathcal{U}$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que* $A \subseteq \mathcal{U}$
- *Siempre que* $A \in \mathcal{R}$*, existe un ultrafiltro no principal* $\mathcal{U}$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que* $A \in \mathcal{U}$

Necesitamos la siguiente proposición débil para mostrar el resultado:

Proposición 4. *Sea* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$*,* $\mathcal{A}$ *con la propiedad débil de intersecciones finitas. Entonces existe un ultrafiltro* $\mathcal{U}$ *en* $\mathbb{N}$ *tal que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$*.*

Demostración: Sea

$$\mathcal{T} = \{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}, \mathcal{B} \text{ es de debil de intersecciones finitas}\}$$

Observamos que $\mathcal{T} \neq \varnothing$ ya que $\mathcal{A} \in \mathcal{T}$. Sea una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{T}$ bajo la relación de contenencia, tenemos que $\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{C}$. Considere $\mathcal{F}$ un conjunto finito de $\cup\mathcal{C}$, entonces existe un $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$, lo cual implica que $\cap\mathcal{F} \neq \varnothing$, por Lema de Zorn, τ tiene un elemento maximal $\mathcal{U}$, que cumple con que es maximal de $\mathcal{T}$ y es maximal de las intersecciones finitas en $\mathbb{N}$, ya que si existiera, existiría un $S \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ para el cual $\mathcal{U} \subseteq S$, lo cual contradice la maximailidad de $\mathcal{U}$. Por la caracterización de $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro.

Demostración. Del Teorema Sea $\mathcal{B} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \forall B \in \mathcal{R}, A \cap B \neq \varnothing\}$, observamos que el conjunto vacío $\varnothing \neq \mathcal{B}$ ya que $D \in \mathcal{B}$. Tome ahora $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, queremos ver que $\mathcal{C}$ cumple con que las intersecciones finitas son diferentes de vacío (*i.e* la propiedad *débil*), para ello observamos que el conjunto $H = \{F : F \subseteq \mathcal{A}, F\text{finito}\}$ y $L = \{G : G \subseteq \mathcal{B}, G \text{ finito }\}$, se tiene que

$(\cap F)\cap(\cap G) \neq \varnothing$, suponga entonces que existen F, G tales que $(\cap F)\cap(\cap G) = \varnothing$, Tenemos entonces que $B = \cap F \in \mathcal{R}$, es decir $B \cap (\cap G) = \varnothing$, o en otras palabras B se puede escribir de la forma $B = \cup_{A \in G}(B - A)$, lo cual implica que debe existir un $A \in G$ para el cual $B - A \in \mathcal{R}$, pero tenemos que $A \cap C = \varnothing$, lo cual contradice que $A \in \mathcal{B}$.

Por la proposición anterior, tenemos entonces que hay un ultrafiltro $\mathcal{U} \in \mathbb{N}$, para el cual $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$. Observemos que no es principal ya que, sea $C \in \mathcal{U}$, $D - C \notin \mathcal{U}$ y en consecuencia $D - C \notin \mathcal{B}$, en otras palabras hay un $B \in \mathcal{R}$ para el cual $B \cap (D - C) = \varnothing$, lo cual implica $B \subseteq C$.

Para el ultimo tome $\mathcal{A} = \{A\}$. □

3. Suponga que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es una familia *independiente*; es decir que para cualesquiera $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ y cualesquiera $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{1, -1\}$ se tiene que $A_1^{\epsilon_1} \cap \ldots A_n^{\epsilon_n} \neq \varnothing$. Muestre que existen al menos $2^{|\mathcal{A}|}$

Solución: En este problema, primero solucionaremos el punto **4.**

4. Muestre que existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ no enumerable e independiente.

Utilizaremos los siguientes resultados acerca de ultrafiltros:

Proposición: Todo filtro está contenido en un ultrafiltro.

Prueba: Sea $\mathcal{F}$ un filtro en $\mathbb{N}$ considere el conjunto.

$$P = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ filtro y } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}\}$$

Entonces, vemos que P es un orden parcial bajo la relación de contenencia, y si $\mathcal{C} \subseteq P$ es una cadena, entonces $\cup\mathcal{C}$ es filtro que esta en P y es cota superior de $\mathcal{C}$, otra vez, por Lema de Zorn, el conjunto P tiene un elemento maximal $\mathcal{U}$.

Corolario de la proposición: Toda familia de subconjuntos no vacíos con la propiedad débil de intersección finita de un conjunto infinito está contenida en un ultrafiltro.

Teorema 2. *Existe una familia independiente de tamaño no enumerable*

Demostración. Considere los conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{H \subseteq \mathbb{N} : H \text{ es finito}\}$$

$$\mathcal{J} = \{J \subseteq \mathcal{H} : J \text{ es finito}\}$$

sea el conjunto numerable:

$$N = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

Para cada $X \subseteq \mathbb{N}$ se define recursivamente:

$$A_X = \{(A, \mathcal{A}) : A \cap X \in \mathcal{A}\}$$

$A_X^0 = A_X$ y $A_X^1 = A_X^c$. Vemos que A_X^i es no enumerable, ahora queremos ver que es una familia *independiente*, sea $X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ para los cuales son todos distintos entre si, entonces para cualquier pareja $(i,j) \in k \times l$ seleccionamos $x_{i,j} \in X_i - Y_j$ ó $x_{i,j} \in Y_i \times X_j$, entonces sea $B = \{x_{i,j} : (i,j) \in k \times l\}$, de la manera en que se escogen los puntos tenemos entonces: $X_i \cap B \neq Y_i \cap B$ para cualquier pareja (i,j), tenemos entonces que la familia $\left\{A_X^i : X \subseteq \mathbb{N}, i \in \{0,1\}\right\}$ es una familia independiente no enumerable.

□

Ahora probamos la cantidad de diferentes ultrafiltros es al menos $2^{|\mathcal{A}|}$

Teorema 3. *Hay* $2^{\left\{A_X^i : X \subseteq \mathbb{N}, i \in \{0,1\}\right\}}$ *ultrafiltros diferentes sobre* $\mathbb{N}$

Demostración. Por el anterior Teorema, tenemos que existe una familia *independiente* $\{A_u^i : u \subseteq \mathbb{N}, i \in \{0,1\}, |u| < \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$. Sea $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}$ una función, la familia $\left\{A_u^{f(u)} : u \subseteq \mathbb{N}, i \in \{0,1\}, |u| < \mathcal{P}(\mathbb{N})\right\}$ todavía tiene la propiedad débil de intersecciones, y por el primer teorema que mostramos para este problema, vemos que esta contenida en un ultrafiltro. Observamos que si $f \neq g$, los ultrafiltros son diferentes. Tenemos entonces que existen $2^{\left\{A_X^i : X \subseteq \mathbb{N}, i \in \{0,1\}\right\}}$ ultrafiltros diferentes sobre $\mathbb{N}$. □

5. Muestre que existe una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ no enumerable y *casi disyunta.*

Solución

Para ello probaremos similarmente:

Teorema 4. *Existe una familia* casi disyunta *de subconjuntos de* $\mathbb{Q}$ *no enumerable.*

Demostración. Sea $r \in \mathbb{R}$, y sea $(q_n^r)_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de números racionales que no es constante y que converge a r. Ahora sea, $A_r = \{q_n^r : n \in \mathbb{N}\}$. Para dos pares $s, r \in \mathbb{R}$, $r \neq s$, sea $\epsilon > 0$ el cual

$$(s - \epsilon, s + \epsilon) \cap (r - \epsilon, r + \epsilon) = \varnothing$$

Observar que $A_s \cap (s - \epsilon, s + \epsilon)$ y $A_r \cap (r - \epsilon, r + \epsilon)$ son ambos cofinitos y esto implica que $A_s \cap A_r$ es finito. Por lo tanto $\{A_r : r \in \mathbb{R}\}$ es una familia *casi disyunta* no enumerable. □

Esta tarea fue hecha conjuntamente con Juanita Duque.

Referencias

1. Gutiérrez,Francisco, *La Compactificación de Stone-Cech De Un Espacio Discreto.*

2. Willard, Stephen, *General Topology*

3. Steen, Arthur, *Counterexamples in Topology*
4. Arkhangel'skii, Ponomarev, *Fundamentals of General Topology*
5. Geschke, ALMOST DISJOINT AND INDEPENDENT FAMILIES