

## Tarea # 3 (Conjunto Cerrados y Funciones Continuas)

David Cardozo

18 de febrero de 2015

1. Suponga que para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos un espacio topológico  $(X_n, \tau_n)$ , metrizable. Muestre que  $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  con la topología producto es metrizable.

*Solución*

Antes de comenzar con una demostración, pongamos en concreto unos lemas importantes.

**Lema 1.** *Suponga  $d$  es una métrica en un espacio arbitrario  $X$ . Si tenemos una función  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  que cumple con las características:  $f$  es estrictamente creciente,  $f$  es una función cóncava y  $f(0) = 0$ , entonces  $d'$  definido por  $d' = f \circ d$  es también una métrica en  $X$*

*Demostración* Es claro que para dos puntos  $x, y \in X$ ,  $d'(x, y) \geq 0$ , en particular si dos puntos son iguales, la métrica  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  y con la hipótesis,  $f(0) = 0$  implica que  $d'$  tiene la propiedad de los indiscernibles. También es claro que  $d'$  es simétrica, entonces ya tenemos  $d'$  es una pseudométrica.

Ahora suponga  $x, y, z \in X$  son arbitrarios miembros. Como  $d$  es una métrica, tenemos por desigualdad triangular:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Usando a propiedad de que  $f$  es una función monotonica (i.e. estrictamente creciente), se sigue que:

$$d'(x, z) = f(d(x, z)) \leq f(d(x, y) + d(y, z)) \quad (1)$$

Ahora utilizando la hipótesis que  $f$  es una función cóncava, i.e. para  $c \in [0, 1]$   $f(cx + (1 - c)y) \leq cf(x) + (1 - c)f(y)$ , y utilizando el hecho que  $f(0) = 0$ , tenemos que para  $a > 0$  y  $t > 0$

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{(a+t) - a} \leq \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \implies f(a+t) - f(a) \leq f(t)$$

De manera sugestiva,

$$f(a+t) \leq f(a) + f(t)$$

Sean  $a = d(x, y)$  y  $t = d(y, z)$  en la desigualdad (1), obtenemos

$$d'(x, z) \leq f(d(x, y) + d(y, z)) \leq f(d(x, y)) + f(d(y, z)) = d'(x, y) + d'(y, z).$$

Concluimos entonces que como  $x, y, z \in X$  eran arbitrarios. Concluimos  $d'$  es una métrica en  $X$ .  $\square$

Ahora ya teniendo este soporte, procedemos a probar un teorema:

**Teorema 1.** *Suponga que  $(X_k, d_k), k \in \mathbb{Z}_+$  es una colección contable de espacios métricos, entonces la topología en  $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$  es generada por la métrica definida por:*

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)} \quad (2)$$

*Demostración* Aplicando el lema anterior, tomando como  $f$  la función  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ , esta nos muestra que para cada  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $2^{-k}(f \circ d_k)$  define una métrica en  $X_k$ . Por lo tanto, tenemos que  $d$  es una métrica en el producto  $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$

**Proposición 1.** *Métrica en el producto  $X = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} X_k$  es una métrica.*

*Demostración*

**Positiva** Observar que todos los términos en la sumatoria son mayores o iguales a cero.

**2. Propiedad de los indiscernibles .**

Queremos ver si  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ , para ello observemos que, sabiendo que ya hemos probado  $d_k$  es una métrica:

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\iff \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} (2^{-k}) \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)} = 0 \\ &\quad (2^{-k}) \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)} \quad \text{Para todo } k \\ &\quad d_k(x_k - y_k) = 0 \\ &\quad x = y \end{aligned}$$

Tenemos entonces propiedad de los indiscernibles.

**3. Desigualdad triangular**

Recordemos que por las propiedades de la función  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ , y que la  $k$ -ésima métrica cumple con las siguientes propiedades: para  $k \in \mathbb{Z}_+$   $\frac{d_k(x_k, z_k)}{1 + d_k(x_k, z_k)} \geq$

$$\frac{d_k(z_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)} \text{ y similarmente } \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)} \leq \frac{d_k(x_k, z_k)}{1 + d_k(x_k, z_k)} + \frac{d_k(z_k, y_k)}{1 + d_k(z_k, y_k)}.$$

Por lo tanto vemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{2^{-k} d_k(x_k - y_k)}{1 + d_k(x_k - y_k)} &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{-k}) \left( \frac{d_k(x_k, z_k)}{1 + d_k(x_k - z_k)} + \frac{d_k(y_k, z_k)}{1 + d_k(y_k - z_k)} \right) \\
&\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left( \frac{2^{-k} d_k(x_k, z_k)}{1 + d_k(x_k - z_k)} \right) + \left( \frac{2^{-k} d_k(y_k, z_k)}{1 + d_k(y_k - z_k)} \right) \\
&\implies d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que es una métrica.  $\square$

Ahora denote por  $\tau$  la topología producto en  $X$ , y denote por  $\tau_d$  la topología en  $X$  generada por la métrica  $d$ . Queremos ver  $\tau_d \supseteq \tau$  y  $\tau \supseteq \tau_d$

Suponga que  $U = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} U_k$  es un básico en la topología  $\tau$  del producto, considere  $z \in U$ , obsérvese, que existe un conjunto finito  $I$ , tal que  $I \subseteq \mathbb{Z}_+$  para el cual  $\forall k \in \mathbb{Z}_+ - I$ ,  $U_k = X_k$ . Observar, que para cada  $k \in I$  existe un  $\epsilon_k > 0$  tal que (las bolas abiertas)  $B_{\epsilon_k}(k) = \{y \in X_k | d_k(y, z_k) < \epsilon_k\} \subseteq U_k$ .  $I$  es finito, podemos definir (y es mayor que cero)  $\epsilon = \min \{2^{-k} f(\epsilon_k) | k \in I\}$ . Ahora, verifiquemos que la bola abierta  $B_\epsilon(z) = \{y \in X | d(z, y) < \epsilon\}$  esta contenida en  $U$ ; para ello, suponga  $y \in X$  tal que  $d(z, y) < \epsilon$ , entonces  $\forall k \in \mathbb{Z}_+$  y para cualquier  $k \in I$ , tenemos que  $2^{-k}(f \circ d_k)(y_k, z_k) < \epsilon$ , en otras palabras,  $d_k(y_k, z_k) < f^{-1}(2^k 2^{-k} f(\epsilon_k)) = \epsilon_k$ . Por lo tanto concluimos que para  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $y_k \in B_k$  esta contenido en  $U_k$  y por lo tanto  $B \subseteq U$  y como fueron arbitrarias,  $\tau_d \supseteq \tau$ .

Por el otro lado, suponga que  $z \in X, \epsilon > 0$  y  $B_\epsilon(z) = \{y \in X | d(z, y) < \epsilon\}$  es un básico abierto, ahora por propiedad arquimediana escoja un  $Z \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $2^{-Z} < \frac{\epsilon}{3}$  y defina  $U_k = \{y \in X_k | d_k(y, z) < \frac{\epsilon}{2Z}\}$ . Para  $k > Z$  defina  $U_k = X_k$ , entonces observamos que  $U = \prod_{k \in \mathbb{Z}_+} U_k$  es un básico en la topología  $\tau$  en  $X$  (la producto).

Por ultimo, queremos ver  $U \subseteq B$ , suponga  $y \in U$  vemos que:

$$\begin{aligned}
d(z, y) &= \sum_{k=1}^Z 2^{-k} \frac{d_k(z_k, y_k)}{1 + d_k(z_k, y_k)} + \sum_{k=Z+1}^{\infty} \frac{2^{-k} d_k(z_k, y_k)}{1 + d_k(z_k, y_k)} \\
&\leq \sum_{k=1}^Z d_k(z_k, y_k) + \sum_{k=Z+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \sum_{k=1}^Z \frac{\epsilon}{2N} + 2^{-N} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

**2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico separable. Muestre que  $X$  es homeomorfo a un subespacio de  $\mathbb{R}^\omega$

*Solución*

Para esto demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico separable, i.e existe  $A \subseteq X$  enumerable tal que  $\bar{A} = X$ . Entonces muestre que  $X$  es homeomorfo a un espacio de  $\mathbb{R}^{[\omega]}$

*Demostración* Usando la ayuda proporcionada,  $A$  enumerable, considere  $\{a_n \in A | n \in \omega\}$ , y la función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$  caracterizada por  $f(x \in X) = d(x_n)_{n \in \omega}$ , queremos ver que  $f$  es un homomorfismo.

**Proposición 2.**  *$f$  es sobre, sobre su imagen “juego de palabras intencionado”*

**Proposición 3.**  *$f$  es inyectiva*

*Demostración* Dados  $x, y \in X$ , suponga  $x \neq y$ , suponga el caso en que  $x \in A$ , es decir  $x = a_n$ , tenemos que  $f(x)$  es cero, mientras que  $f(y) \neq 0$ , es claro que  $f(x) \neq f(y)$ , para el caso en que  $y \in A$ , es similar. Para el ultimo caso, es decir, ambos elementos no pertenecen a  $A$ , es decir  $x, y$  son puntos limites. Ahora, observe que  $A$  es de Hausdorff, esto debido a que  $X$  es métrico, por lo tanto existe un  $\epsilon > 0$  tal que las bolas centradas en  $x$  y  $y$ , i.e  $B_\epsilon(x), B_\epsilon(y)$  son tales que su intersección es vacía, luego existe sucesion  $a_n \in A, a_n \in B_\epsilon(x) \implies d(y, a_n) \geq \epsilon$ , luego  $f(x) \neq f(y)$ .

Continuamos con la siguiente proposición.

**Proposición 4.**  *$f' : X \rightarrow \text{Img}(F)$  es continua*

*Demostración* Para esto probaremos que  $f'_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua. Sea un abierto en la imagen de la forma  $f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon$ , y sea  $y \in f_n^{-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$ , vamos a ver que  $y$  es un punto interior. Defina  $\delta = \epsilon - d(x, y)$ , Obsérvese que:

$$\begin{aligned} \epsilon &> d(a_n, x) + d(a_n, y) \\ &> d(a_n, x) + d(a_n, y) > d(x, y) \epsilon > d(x, y) \\ \epsilon - d(x, y) &> 0 \end{aligned}$$

Entonces queremos ver que el abierto contenido en la base de la topologia de  $X$  de la forma  $B_\delta \subseteq f_n^{-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$ . Para ello tome  $u \in B_\delta(y)$ , o en otras palabras  $d(z, y) < \epsilon - d(x, y)$ , o equivalente  $d(z, y) + d(x, y) < \epsilon$  y por desigualdad triangular  $d(z, x) < \epsilon$  y tambien observar que  $z \in f_n^{-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$  ya que  $d(a_n, z) < f(x) + \epsilon$ .

Concluimos entonces  $\forall y \in f_n^{-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon) \exists B_\delta(y) \subseteq f_n^{-1}(f_n(x) - \epsilon, f_n(x) + \epsilon)$ , y este es un abierto en  $X$ , por lo tanto  $\text{Img}(f)$  es continua.  $\square$

Nos queda por ultimo entonces revisar que la imagen inversa es continua:

**Proposición 5.**  *$f'^{-1} : \text{Img}(f) \rightarrow X$  es continua.*

*Demostración* Como es normal, tome un basico, i.e una bola de  $X$ , de la forma  $B_\epsilon(x)$ , para mostrar que esta funcion es continua, basta con solo mirar que  $f'(B_\epsilon(x))$ , es un abierto en la imagen. Sea  $\delta = \epsilon - |f_1(x) - f_1(y)|$ . Considere  $U$  vecindad de  $f(y)$  de la forma:

$$U = (f_1(y) - \delta, f_1(y) + \delta) \times \prod_{i \in \omega} \mathbb{R}_i$$

Sea  $f(z) \in U$ , implica que  $|f_1(y) - f_1(z)| < \delta$ , o en otras palabras,  $|f_1(x) - f_1(y)| < \epsilon$  por desigualdad triangular. Ahora, observe que si  $|f_1(x) - f_1(y)| < \epsilon$ , tenemos que  $d(z, a_1) + d(z, a_1)$ , lo cual es mas grande que  $d(z, x) < \epsilon$  y por ende mas pequeño que  $\epsilon$  concluimos que  $z \in B_\epsilon(x)$

Concluimos entonces que dado cualquier punto en  $f'(B_\epsilon(x))$ , es un punto interior, entonces concluimos que la función es continua

□

Concluimos  $f$  es un homomorfismo en su imagen, y  $X$  es homeomorfo a un subespacio de  $R^\omega$

**3.** El problema 3 es un caso particular de la solución al problema 3