Sem 2 Algebra geometri

David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) Vi sätter värden på a och b sådana att vi får identitetsmatrisen i vänsterled. Detta gör vi enligt följande:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & a & b \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (+R1) \\ (-R1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & a-1 & b-1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (\frac{1}{3}) \\ (-R2) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & a-1 & b-2 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2R2)(+R3) \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b-5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & a-1 & b-2 \end{array}\right] \rightarrow$$

Här ser vi att så länge $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$ så får vi identitetsmatrisen i vänsterled (alltså en unik lösn. till systemet). Vi ser även att $b \in \mathbb{R}$ då den enbart befinner sig i högerled, b påverkar alltså inte ifall systemet har en unik lösning eller inte.

Svar: $a \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

b) För att systemet skall ha oändligt antal lösningar krävs det att värdena på a och b utgör någon rad på formen $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, vi undersöker vilka dessa värden är med matrisen från a):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b-5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & a-1 & b-2 \end{array}\right] \rightarrow$$

Om vi tittar på R3 ser vi snabbt att vi har en rad på formen $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ för $a=1$, $b=2$. Därmed har systemet oändligt antal lösningar för $a=1$, $b=2$. //

Detta ger följande lösningsmängd (på parameterform):

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} - t \\ y = 1/3 \\ z = t \end{cases} \quad \text{ger...} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Svar: Systemet har oändligt antal lösningar för $a=1$, $b=2$ vilket ger lösningsmängden:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

SEM2

David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

2) a) Då skärningen sker vid $L_1 = L_2$ får vi följande:

$$\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix} + t_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+b\\3\\0\end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow t_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - t_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4+b\\3\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$t_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} - t_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+b\\1\\2\end{bmatrix}$$ ger... $$\begin{cases}2t_1 + t_2 = 1+b\\ -1t_1 - t_2 = 1\\ t_1 + 0 = 2\end{cases} \sim \begin{cases}2(2)+(-3)-1 = b = 0 \,//\\ t_2 = -t_1 - 1 = -2-1 = -3\\ t_1 = 2\end{cases}$$

Vi ser här att b måste vara 0 för att linjerna skall skära varandra.

Skärningspunkten blir:

$$\begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix} + \overset{(t_1=2)}{2}\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\0\\0\end{bmatrix}$$

(KONTROLL)

$$\begin{bmatrix}4+\overset{(b=0)}{0}\\3\\0\end{bmatrix} \overset{(t_2=-3)}{-3}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\0\\0\end{bmatrix} //$$

Svar: För värdet $b = 0$ får vi skärningspunkten: $\begin{bmatrix}7\\0\\0\end{bmatrix}$

b) $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 3$

$\Pi_2 : x - y + 2z = 2$

Om vi har två plan som är icke parallella kommer deras skärningar vara en linje.

Denna linjens riktningsvektor är ortogonal mot båda planens normalvektorer

Vi har sedan följande vektorer: $n_1 = \begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$ och $n_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$

(Fås från Π_1) (Fås från Π_2)

Linjens normalvektor ges därmed av $n_L = n_1 \times n_2$ enligt följande:

(Kryssprodukt)

$$\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-2\cdot 2)-(1\cdot -1)\\(1\cdot 1)-(3\cdot 2)\\(3\cdot -1)-(-2\cdot 1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-5\\-1\end{bmatrix} = n_L //$$

SEM2
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

b) Slutligen krävs en punkt som satisfierar ekv. system för planen:

$$3x-2y+z-3=0$$
$$x-y+2z-2=0$$

ger... $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] (-3R2) \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] (+R1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right]$ ger... $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = -3+5t \\ z = t \end{cases}$ Detta ger på parameterform:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$ vilket vid $t=0$ ger punkten $\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ //

Denna punkt kombinerat med linjens normalvektor ger skärningslinjen:

$$L_{skär} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$ //Svar

3) För att få fram inversen sätter vi $[A \mid I]$ (Identitetsmatrisen) och gaussar tills vi får $[I \mid A^{-1}]$ enligt följande:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] (+2R2) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] (1/3)\,(-R3) \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right] (-2R2) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right] \rightarrow$$ Detta ger alltså $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

Svar: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

(Notera att oavsett hur vi reducerar kan vi inte få något annat än $\vec{0}$ i högerled...) (identitetsmatrisen)

b) Vid reducering får vi (se uppg. a) för hur vi reducerade till I i VL)

$$\begin{array}{c} \quad I \qquad\qquad \vec{0} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$ → Här finner vi exakt en lösning, nämligen i origo $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ Då vi får identitetsmatrisen i vänsterled kan systemet endast ha en lösning.

SEM2
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

c) Vi vet att $AA^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Om vi därmed multiplicerar vänster- och högerled för det givna systemet med A^{-1} får vi följande:

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=I} = A^{-1}\begin{bmatrix}5\\3\\3\end{bmatrix}$$

Detta ger:

$$\underset{(A^{-1}A = I)}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}} = \underset{(A^{-1})}{\begin{bmatrix}1 & -2/3 & 2/3\\0 & 1/3 & -1/3\\0 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix}5\\3\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5+0\\0+0\\0+6/3+3/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\0\\3\end{bmatrix} \quad //$$

Svar: Lösningen ges av $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$