Sem 3 Algebra geometri

SEM3
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) Kolonnvektorerna är linjärt beroende om någon av dem går att skriva som en linjär kombination av de resterande, annars är dem linjärt oberoende.

Vi ska nu använda oss av ekvationen nedan för att ta reda på ovan:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$$

(Där c_1, c_2, c_3 inte alla är 0)

Detta ger...

(Gauss)

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\4\\7\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \iff \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&2&4&0\\1&3&7&0\\1&4&10&0\end{array}\right] \\ \begin{array}{ccc}(\vec{v}_1)&(\vec{v}_2)&(\vec{v}_3)\end{array}\end{array} \begin{array}{l}\\(-R1)\\(-R1)\\(-R1)\end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&3&0\\0&2&6&0\\0&3&9&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\(\frac{1}{2})\\(\frac{1}{3})\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&3&0\\0&1&3&0\\0&1&3&0\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\(-R2)\\(-R2)\end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Ledande element

Fri variabel

Då $\vec{v}_3$ saknar ledande element (fri variabel) och både $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ har ledande element innebär det att $\vec{v}_3$ går att skrivas som en linjär kombination av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$. Detta medför även att kolonnvektorerna av A är linjärt beroende. Det finns alltså c_1, c_2, c_3 (där alla inte är 0) som uppfyller $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

För att få fram c_1 och c_2 (c_3 är fri!) fortsätter vi med att gaussa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]\begin{array}{l}(-1R2)\\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right] \quad \text{ger....} \begin{cases} c_1 = 2t \\ c_2 = -3t \\ c_3 = t, \end{cases}$$

(där t är en fri variabel som tillhör $\mathbb{R}$, t.ex. 1)

SEM3
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) Vi sätter nu in c_1, c_2, c_3 i ekvationen $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$ och löser sedan ut $c_3\vec{v}_3$.

Detta ger följande linjära kombination (där $t=1$):

$$2\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}1\\4\\7\\10\end{bmatrix} \longrightarrow$$

Medför att kolonnvektorerna av A är linjärt beroende!

//Svar

b) För att undersöka om $\vec{v}$ ligger i $\mathrm{col}(A)$ måste vi ta reda på om $\vec{v}$ har ett ledande element eller inte.

Detta gör vi för att undersöka om vi kan skriva en av vektorerna som en linjär kombination av de resterande (om $\vec{v}$ saknar ledande element efter gauss så tillhör $\vec{v}$ $\mathrm{Col}(A)$)

Vi gör detta på samma sätt som i a) bara att vi lägger till $c_4\vec{v}$ i ekvationen från a) enligt nedan!

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v} = \vec{0}$$

(Där c_1, c_2, c_3, c_4 inte alla är 0)

Detta ger:

$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\4\\7\\10\end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \iff \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 7 & -1 & 0\\ 1 & 4 & 10 & 1 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ (-R1)\\ (-R1)\\ (-R1) \end{array} \\ \begin{array}{cccc} (\vec{v}_1) & (\vec{v}_2) & (\vec{v}_3) & (\vec{v}) \end{array} & \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 9 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (1/2)\\ (1/3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ (-R2)\\ (-R2) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ (+2R3) \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\vec{v}$ har ett ledande element

↓

$\vec{v}$ tillhör INTE $\mathrm{col}(A)$

Svar: $\vec{v}$ tillhör inte $\mathrm{col}(A)$

1) c) Vi börjar med att ta fram A^T enligt nedan:

SEM3
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

Vi vet redan från uppgift a) att radvektorerna av A (eller med andra ord kolonnvektorerna av A^T) är linjärt beroende. Detta beror på att om A:s kolonnvektorer är linjärt beroende (som visat i a)) så kommer även $\underbrace{A^T\text{:s kolonnvektorer}}_{\text{(A:s radvektorer)}}$ vara linjärt beroende!

Nu för att lösa ekv. systemet $A^T\vec{x} = \vec{0}$ så gör vi enligt följande:

(Nu gaussar vi!)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-R1) \\ (-R1) \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-R2) \\ \sim \\ (-3R2) \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ ger...} \begin{cases} x_1 = t + 2s \\ x_2 = -2t - 3s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases}$$

(Här får vi det bekräftat att radvektorerna är linjärt beroende)

$$\begin{cases} x_1 = t + 2s \\ x_2 = -2t - 3s \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \longrightarrow$$

Detta ger följande lösningsmängd:

$$t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

//Svar

SEM3
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

2) a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & b^2-b \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

$$\det(B) = 1\left((1\cdot -3) - (1(b^2-b))\right) + 1\left((2\cdot 1) - (-1\cdot 1)\right) = -3 - b^2 + b + 2 + 1 = -b^2 + b$$

Om $\det(B) = 0$ har vi då:

$b - b^2 = 0 \Rightarrow b(1-b) = 0$ ger... $\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases}$

Svar: $\det(B) = 0$ ges av $\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 1 \end{cases}$

b) För att B ska vara inverterbar krävs det att $\det(B) \neq 0$, med andra ord att kollonnerna i matrisen är linjärt oberoende.

Vi börjar med att undersöka om $\det(B) = 0$ för $b = 2$:

$f(b) = b - b^2$

$f(2) = 2 - (2^2) = -2 \neq 0 \rightarrow$ b är inverterbar!

För att få fram inversen B^{-1} sätter vi $[B \mid I]$ (Identitetsmatrisen) och gaussar tills vi får $[I \mid B^{-1}]$ $(BB^{-1} = B^{-1}B = I)$ enligt följande:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (-2R1) \\ (+1R1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ (-R2) \end{array} \sim$$

$(2^2 - 2 = 2)$

$0 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad -1 \quad 1$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-\frac{1}{2}R3) \\ \\ (\frac{1}{2}) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \text{ ger... } B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Nu för att ta fram determinanten gör vi enligt nedan:

$$\det(B^{-1}) = \frac{5}{2}\left((1\cdot -\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{1}{2}\cdot 0)\right) - \left(-\tfrac{1}{2}\left((-2\cdot -\tfrac{1}{2}) - (\tfrac{3}{2}\cdot 0)\right)\right) + \tfrac{1}{2}\left((-2\cdot \tfrac{1}{2}) - (\tfrac{3}{2}\cdot 1)\right) = -\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{4}{4} + \frac{2}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Svar: $\det(B^{-1}) = -\frac{1}{2}$

SEM3
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

2) c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & b^2-b & 3 \\ -1 & 1 & -3 & b \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-2R1) \\ (+1R1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b^2-b-2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ (-1R3) \\ \end{array} \sim$ (R2 och R3 byter plats)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+1 \\ 0 & 0 & b^2-b & -b \end{array}\right] //$$

Nu undersöker vi det förenklade systemet...

För att systemet skall ha oändligt antal lösningar krävs det att värdena på b utgör någon rad på formen $[0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, 0]$, vi undersöker vilket värde detta är enligt nedan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+1 \\ 0 & 0 & b^2-b & -b \end{array}\right] \rightarrow$$

Om vi tittar på R3 ser vi snabbt att vi har en rad på formen $[0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, 0]$ för $b = 0$. Därmed har systemet oändligt antal lösningar för $b = 0$. //

För att systemet skall sakna lösningar krävs det att värdena på b utgör någon rad på formen $[0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, k]$, $k \neq 0$, vi undersöker vilket värde detta är enligt nedan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & b+1 \\ 0 & 0 & b^2-b & -b \end{array}\right] \rightarrow$$

Om vi tittar på R3 ser vi att vi har en rad på formen $[0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, -1]$ för $b = 1$. Därmed saknar systemet lösningar för $b = 1$. //

Slutligen ser vi att så länge $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$, $b \neq 0$ får vi identitetsmatrisen i vänsterled (alltså en unik lösn. till systemet).

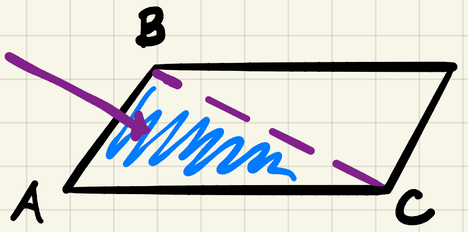
Svar: Oändligt antal lösn., $b = 0$
Saknar lösn., $b = 1$
Unik lösn., $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$, $b \neq 0$

SEM3
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

3) a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Vi föreställer oss följande parallellogram:

Sökt area



Arean av ett parallellogram ges av längden av kryssprodukten av sida $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$. Detta ger...

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

B A

$$\vec{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

C A

ger...

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\| = \left| \begin{bmatrix} (1 \cdot -2) - (-1 \cdot -2) \\ (-2 \cdot 0) - (1 \cdot -2) \\ (1 \cdot -1) - (1 \cdot 0) \end{bmatrix} \right| =$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| = \underbrace{\sqrt{(-4)^2 + (2)^2 + (-1)^2}}_{\text{(Längd)}} =$$

$$= \sqrt{21} \text{ a.e.}$$

Arean av vårt föreställda parallellogram är alltså $\sqrt{21}$ a.e. För att få fram den sökta triangelns area behöver vi endast dividera $\sqrt{21}$ med 2 enligt nedan:

Area triangel ABC $= \frac{\sqrt{21}}{2}$ a.e.

Svar: $\frac{\sqrt{21}}{2}$ a.e.

b) Vi tar fram ekvationen på parameterform enligt följande:

$$t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

($\vec{AB}$) ($\vec{AC}$) (A)

(Två vektorer och en punkt)

SEM3
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

3) b) Nu tar vi fram normalvektorn för planet genom kryssprodukten av $\vec{AB}$ och $\vec{AC}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nu sätter vi in normalvektorn $\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{array}$ med punkten A $\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}$ i ekvationen $ax+by+cz=d$:

$$-4(1)+2(0)-1(3)=-4+0-3=-7=d$$

Nu vet vi alltså att $d=1$ och kan då stoppa in den tillsammans med punkten D (precis som vi gjorde med A ovan) och normalvektorn i ekvationen $ax+by+cz=d$ enligt följande:

$$-4(2)+2(2)-1(3)=-8+4-3=-7=-7$$

$VL = HL$

Punkten D ligger i planet.

Svar: Punkten D ligger i planet.

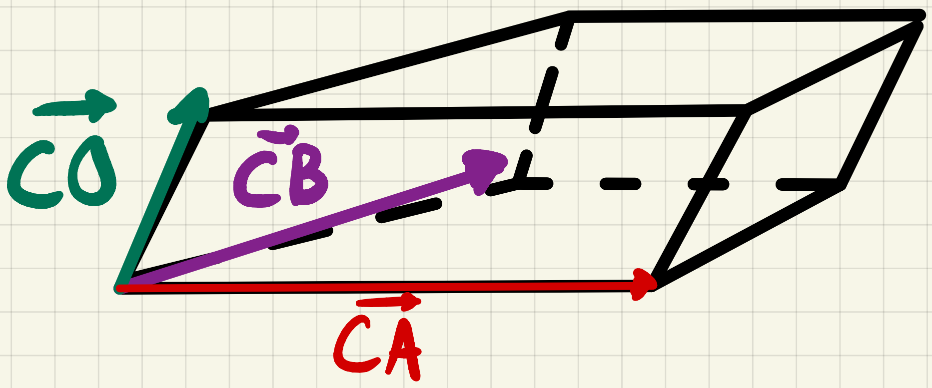
SEM3

David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

3) c) Volymen för den parallellipeped med sidorna $\vec{CB}$, $\vec{CA}$ och $\vec{CO}$ bestäms av absolutbeloppet av trippelprodukten av dessa: $\left|\vec{CO}\cdot(\vec{CA}\times\vec{CB})\right|$

Vi tar först fram sidorna:

$$\vec{CB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\vec{CA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{CO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nu kan vi ta fram volymen enligt följande:

$$\left|\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right| = \left|\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)\right| = \left|(-1\cdot -4)+(1\cdot 2)+(-1\cdot -1)\right| =$$

$$= |7| = 7 \text{ v.e.}$$

Svar: 7 v.e.