Sem 4 Algebra geometri

SEM4
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) För att få fram speglingen i den linje som spänns upp av $\vec{v}_1$ använder vi följande formler:

$$\begin{cases} y = kx \\ A = \frac{1}{1+k^2}\begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

OBS! från $R^2 \to R^2$

Vid insättnig av $\vec{v}_1$ får vi då lutningen:

$y = kx$ ger... $1 = 1k$, $k = 1$

Med $k=1$ får vi då följande standardmatris:

$$A = \frac{1}{1+k^2}\begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+1^2}\begin{bmatrix} 1-1^2 & 2\cdot 1 \\ 2\cdot 1 & 1^2-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) Matrisen B (vid rotation moturs) ges av följande:
($\theta = 30^\circ$)

$$B = \begin{bmatrix} \cos(30) & -\sin(30) \\ \sin(30) & \cos(30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Svar: $B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

c) Nu när vi tagit fram standardmatriserna till S och R så kan vi använda följande sats för att undersöka om $S \circ R = R \circ S$ eller inte:

Sats: $[S \circ R] = [S] \cdot [R]$ och... $[R \circ S] = [R] \cdot [S]$

$[S]$: Standardmatrisen för S (A)

$[R]$: Standardmatrisen för R (B)

$[R] \cdot [S]$: (B) (A)

$$\begin{pmatrix} [S] = A \\ [R] = B \end{pmatrix}$$

SEM4
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

1) c) Nu provar vi att sätta in A och B enligt ovan och undersöker om $S \circ R = R \circ S$:

Vi får då:

$$[S \circ R] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} //$$

och...

$$[R \circ S] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} //$$

Vi ser nu att:

$$\underset{([S \circ R])}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}} \neq \underset{([R \circ S])}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

vilket medför att $S \circ R \neq R \circ S$ // Svar

d) Här använder vi oss av följande formel:

(eller B) $A^n = PD^nP^{-1}$

Vi sätter nu: jämn potens medför att vi kmr få enhetsmatrisen...

$$B^{-12} = (PD^{-12}P^{-1}) = D^{-12} = I^{-1} = I //$$

Inversen av I är I.

Vi vet även att:

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

...vilket medför att:

$$A^3 = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Svar: Den linjära avbildningen för $B^{-12}A^3$ är den samma som i a).
Nämligen $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

SEMY
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

2) a) Standardmatrisen för R ges av:

$(\theta = \frac{\pi}{4})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ 0 & \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$ //

Givet...

$$\left(\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} \right)$$

Standardmatrisen för S ges av:

$$\vec{v}_{spegel} = \vec{v} - \left(2 \operatorname{proj}_{\vec{n}} \vec{v}\right)$$

Vi vet att $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ges av $1x + 1y + 1z = 0$) och att planet går genom origo.

(Sätter vi in $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i planet får vi $0=0$)

SEM4
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

3) $L\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{u_1} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{u_2}$, $L\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}}_{u_3} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}_{u_4}$

Vi börjar såhär:

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{u_1} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}}_{u_2} \text{ ger... } \left[\begin{array}{c|c} a+b+c & 1\\ d+e+f & 0\\ g+h+i & 1\end{array}\right]$$

Nu gör vi samma sak för u_3 och u_4!

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}}_{u_3} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}}_{u_4} \text{ ger... } \left[\begin{array}{c|c} a+0-c & 1\\ d+0-f & 1\\ g+0-i & 2\end{array}\right]$$

Nu har vi alltså:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \Rightarrow b+2c=0 \Rightarrow b=-2c\\ d+e+f=0 \Rightarrow e+2f=-1 \Rightarrow e=-1-2f\\ g+h+i=1 \Rightarrow 2i+h=-1 \Rightarrow h=-1-2i\\ a-c=1 \Rightarrow a=1+c\\ d-f=1 \Rightarrow d=f+1\\ g-i=2 \Rightarrow g=2+i\end{cases}$$

$\sim$ Vi ser direkt att detta vid insättning kommer leda till oändligt antal lösningar.