Sem 6 Algebra geometri

SEM 6
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) Vi tar fram egenvärdena enligt följande:

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0$

Egenvektor: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

där $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Detta ger...

$$\det\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(A)} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{(I)}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)\big((3-\lambda)(1-\lambda)-0\big)-0+0 =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) = 0 \sim \text{Detta ger: } \begin{cases} 2-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 2 \\ \lambda^2-4\lambda+3=0 \Rightarrow \lambda^2 = 4\lambda-3 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} = \frac{4}{2} \pm \sqrt{1} \text{ ger... } \lambda_3 = 3,\ \lambda_1 = 1 \end{cases}$$

Nu tar vi fram egenvektorerna för $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ enligt:

$$\left(\begin{bmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{bmatrix}\right)\vec{v}_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\vec{v}_1 = 0 \text{ ger... } \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] (-2R1) \sim$$

$\lambda_1 = 1$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ ger... } \begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 &= \tfrac{1}{2}t \\ v_3 &= t \end{aligned} \xrightarrow{\text{Egenvektorn blir då...}} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 2 & 3-2 & -1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix}\right)\vec{v}_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\vec{v}_2 = 0 \text{ ger... } \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] (-R3) \sim$$

$\lambda_2 = 2$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \text{ ger... } \begin{aligned} v_1 &= -\tfrac{1}{2}t \\ v_2 &= t \\ v_3 &= 0 \end{aligned} \xrightarrow{\text{Egenvektorn blir då...}} v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a) $\left(\begin{bmatrix} 2-3 & 0 & 0 \\ 2 & 3-3 & -1 \\ 0 & 0 & 1-3 \end{bmatrix}\right)\vec{v}_3 = \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right)\vec{v}_3 = 0$ ger...

SEM 6
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

$\lambda_1 = 3$

ger... $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (-2R1) \\ (-2R2) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ger... $\begin{matrix} v_1 = 0 \\ v_2 = t \\ v_3 = 0 \end{matrix}$

Egenvektorn blir då...

$\longrightarrow V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Detta ger följande egenrum:

$$P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ v_1 & V_2 & V_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

För att undersöka om egenrummet är diagonaliserbar gör vi

Diagonaliserbar?

- ☑ Storlek $n \times n$ ⟶ Stämmer, då A är 3x3
- ☑ Ha n egenvektorer som är linjärt oberoende. ⟶ Stämmer, då $\det(A) \neq 0$

$$\left(\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2((3\cdot 1)-0) - 0 + 0 = 6 \neq 0 \ ☑\right)$$

Vi vet nu att A (där a = 0) är diagonaliserbar, nu bestämmer vi diagonalmatrisen enligt nedan:

(ger alltså $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$) (Diagonalmatris)

(egen-värden)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Medför: $\boxed{A = PDP^{-1}}$ vilket kan skrivas om till: $\boxed{P^{-1}AP = D}$

(given matris) (egenrummet)

SEM6
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) För att få fram inversen P^{-1} sätter vi $[P\,|\,I]$ (Identitetsmatrisen) och gaussar tills vi får $[I\,|\,P^{-1}]$ $(PP^{-1}=P^{-1}P=I)$ enligt följande:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix}(-2) \\ (-\frac{1}{2}R3)(+2R1)\end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] //$$

Nu vet vi alltså att: $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Nu tar vi fram D enligt $P^{-1}AP=D$ och undersöker om vi räknat rätt (D borde bli $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ enligt ovan);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

☑ Stämmer!

Svar: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Matrisen A är diagonaliserbar då A är av storlek $n \times n$ och har n egenvektorer som är linjärt oberoende.

b)

(NÄSTA SIDA!)

SEM6
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

1) b) Vi tar fram egenvärdena enligt följande:

Egenvärden: $\det(A-\lambda I)=0$

Egenvektor: $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

där $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\2&3&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$

Detta ger...

$$\det\left(\underset{(A)}{\begin{bmatrix}2&0&0\\2&3&-1\\0&1&1\end{bmatrix}}-\lambda\underset{(I)}{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}2-\lambda&0&0\\2&3-\lambda&-1\\0&1&1-\lambda\end{bmatrix}\right)=(2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)-(1\cdot-1))-0+0=$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4)=0 \sim \text{Detta ger: } \begin{cases}2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda_2=2\\ \lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda^2=4\lambda-4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-4}=\frac{4}{2}\pm\sqrt{0} \text{ ger... } \lambda_1=2\end{cases}$$

$(\lambda_1=\lambda_2\,!)$

Nu tar vi fram egenvektorerna för λ_1, λ_2 enligt:

$$\left(\begin{bmatrix}2-2&0&0\\2&3-2&-1\\0&0&1-2\end{bmatrix}\right)\vec{v}=\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\2&1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\right)\vec{v}=0 \text{ ger... } \left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\2&1&-1&0\\0&0&-1&0\end{array}\right](-R3)\sim$$

$\lambda_1, \lambda_2=2$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\2&1&0&0\\0&0&-1&0\end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c}2&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{array}\right] \text{ ger... } \begin{aligned}v_1&=-\tfrac{1}{2}t\\v_2&=t\\v_3&=0\end{aligned}$$

Egenvektorn blir då... $\longrightarrow v=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}$

Detta ger egenrummet $P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}$ vilket är en 3×1 matris (alltså inte på $n\times n$ format) vilket innebär att A ej är diagonaliserbar (vi har för få egenvärden och egenvektorer)

Svar: $\lambda=2$; A är ej diagonaliserbar.

SEM 6
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

2) a) Eftersom vi ska byta till standardbasen S kan vi omedelbart få övergångsmatrisen $P_{S\leftarrow B}$ enligt:

$$P_{S\leftarrow B} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ [\vec{u}]_S & [\vec{v}]_S & [\vec{w}]_S \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} //$$

b) Vi använder följande formel för att ta fram standardmatrisen:

$$[T]_E = P[T]_B P^{-1} \quad (\text{där } P = P_{S\leftarrow B})$$

(standardmatrisen)

För att få fram inversen P^{-1} sätter vi $[P \mid I]$ (Identitetsmatrisen) och gaussar tills vi får $[I \mid P^{-1}]$ $(PP^{-1} = P^{-1}P = I)$ enligt följande:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -3R1 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] +9R3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{-8}\right) \sim +R2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] -3R3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \end{array}\right] //$$

Inversen P^{-1} ges alltså av $P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \end{bmatrix} //$

Vid insättning i $[T]_C = P[T]_B P^{-1}$ får vi då:

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{9}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{8}-\frac{9}{8}) & (\frac{3}{8}+\frac{3}{8}) & (\frac{3}{8}+\frac{3}{8}) \\ (-\frac{3}{8}+\frac{3}{8}) & (\frac{9}{8}-\frac{1}{8}) & (\frac{9}{8}-\frac{9}{8}) \\ (-\frac{3}{8}-\frac{3}{8}) & (\frac{1}{8}+\frac{1}{8}) & (\frac{1}{8}+\frac{9}{8}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{8} & \frac{6}{8} & \frac{6}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{6}{8} & \frac{2}{8} & \frac{10}{8} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} //$$

Svar: Standardmatrisen till T ges av $[T]_C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$

SEM 6
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

3) a) Givet: $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2$

$$Q = \vec{x}^T A \vec{x}$$

Allmänna formen för kvadratiska former ges av $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ där värdena a, b, c bildar den symmetriska matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

I vårt fall ser vi omedelbart att $a = 1$ och $c = 1$ enligt $Q(\vec{x}) = 1x_1^2 - 3x_1x_2 + 1x_2^2$. För att få fram b krävs det att $2b = -3$ blir uppfylld, alltså $b = -\frac{3}{2}$

(ges av $-3x_1x_2 = 2bx_1x_2$)

Därmed får vi (efter insättning) den kvadratiska matrisen:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$ // Svar

b) Nu tar vi fram egenvärdena till A för att karaktärisera Q enligt nedan:

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0$ där $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = 1^2 - 2\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 2\lambda + \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{3}{2} \text{ ger...} \begin{cases} \lambda_1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ \lambda_2 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Svar: Eftersom vissa egenvärden till A är positiva $(\lambda_2 = \frac{5}{2})$ och vissa egenvärden till A är negativa $(\lambda_1 = -\frac{1}{2})$ så vet vi att Q är INDEFINIT.