Sem 5 Algebra geometri

SEM5
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Basen av bildrummet bestäms av col(A) där pivotkolumnerna i A utgör basen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2R1 \\ -4R1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1R2 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Detta medför att rang(A) = 2

2 Pivotelement

Detta innebär att vi får motsvarande pivotkolumner...

$$\text{col}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$, detta medför att $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Notera här att vektorerna i B är linjärt oberoende (detta ser vi ovan där vi fann pivotkolumnerna) och att vektorerna i basen spänner upp bildrummet Im(L) till L → Därför är B en bas till bildrummet.

Svar: Basen B för bildrummet Im(L) till L utgörs av $B = \text{span}\{v_1, v_2\}$ //

b) Nej, detta grundar sig i att B utgör en bas i R^2 (eftersom rang(A) = rang(B) = 2) För att B ska utgöra en bas i R^3 krävs en till vektor $\vec{v}$, denna vektor ska tillsammans med de nuvarande vektorerna i B forma en linjärt oberoende mängd.

Genom att ta determinanten av de nuvarande vektorerna i B tillsammans med den okända vektorn $\vec{v}$ kan vi ta reda på vilka värden $\vec{v}$ kan anta enligt följande:

$$\begin{array}{ccc} & & \vec{v} \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & -1 & y \\ 4 & 3 & z \end{vmatrix} = 1(-1z - 3y) - 2(2z - 4y) + x((2\cdot 3) - (-1\cdot 4)) = 10x + 5y - 5z$$

StM5
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

1b) Vi vet nu att varje $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ som uppfyller
$10x + 5y - 5z \neq 0$

Då det. $\neq 0$ är vektorerna linjärt oberoende!

fungerar för
$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} \right)$$

Vi kan $10 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \neq 0$ ger... $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (t.ex...)

Detta betyder att basen B' exempelvis utgörs av

$$B' = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ // Svar

(NÄSTA SIDA!)

SEM 5
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

2) a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

För att hitta nollrummet (och därmed W) till A så ges det av $A\vec{x} = \vec{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ger...} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R1 \\ -3R1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -13 \\ 0 & 5 & -10 & -6 & -11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1) \\ +R2 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -10 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Detta ger...}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1\left(2s - \frac{23}{25}\tau\right) - 2s - 2\left(-\frac{13\tau}{5}\right) - 5\tau = -\frac{23\tau}{25} + \frac{26\tau \cdot 5}{5 \cdot 5} - \frac{5\tau \cdot 25}{1 \cdot 25} = -\frac{18}{25} \\ x_2 = 2s + \frac{1}{5}\left(-\frac{13\tau}{5}\right) - \frac{2\tau}{5} = 2s - \frac{13\tau}{25} - \frac{2t \cdot 5}{5 \cdot 5} = 2s - \frac{13\tau}{25} - \frac{10}{25} = 2s - \frac{23\tau}{25} \\ x_3 = s \\ x_4 = \frac{-13\tau}{5} \\ x_5 = t \end{cases}$$

Vilket i sin tur ger lösningsmängden:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ -\frac{23}{25} \\ 0 \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2} + s \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} = W //$$

Vi har nu en godtycklig bas $B = \{\vec{v}_1 \;\; \vec{v}_2\}$ som vi vill ortogonal- och normalisera genom Grahm schmidt metoden till basen $Y = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$

För att beräkna första ON-vektorn $\vec{u}_1$ krävs enbart en normalisering av den första vektorn $\vec{v}_1$ så att;

$$\boxed{\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}}$$

SEMS
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

2) a)

Den andra ON-vektorn $\vec{u}_2$ fås genom att ta den andra vektorn $\vec{v}_2$ och subtrahera den med sin egnas projektion på $\vec{u}_1$ följt av en normalisering:

$$\boxed{\vec{x}_2 = \vec{v}_2 - \text{proj}_{\vec{u}_1}\vec{v}_2}$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = \frac{\vec{x}_2}{||\vec{x}_2||}}$$

Nu gör vi enligt ovan och tar först fram u_1:

$$u_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{0^2+2^2+1^2+0+0}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

// u_1

Nu tar vi fram x_2 (för att sedan kunna få fram u_2):

$$x_2 = \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ -\frac{23}{25} \\ 0 \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ -\frac{23}{25} \\ 0 \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}^{\,2}} \right) \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ -\frac{23}{25} \\ 0 \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{\left(-\frac{46}{\sqrt{5}\,25}\right)}{\left(\frac{5}{5}\right)} \right) \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

(Skalärprodukt)

(NÄSTA SIDA!)

SEM5
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se

2) a)

$$= \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ -\frac{23}{25} \\ 0 \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{46}{25\cdot 5} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ -\frac{23\cdot 5}{5^3} + \frac{92}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nu kan vi ta fram u_2 enligt nedan:

$$u_2 = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\left(-\frac{18}{25}\right)^2 + \left(-\frac{23}{5^3}\right)^2 + \left(\frac{46}{5^3}\right)^2 + \left(-\frac{13}{5}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{324}{5^4} + \frac{529}{5^6} + \frac{2116}{5^6} + \frac{169}{5^2} + 1^2}} =$$

$(25^2 = (5^2)^2 = 5^4)$ $\quad ((5^3)^2 = 5^{3\cdot 2} = 5^6)$

$$= \frac{\begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{24\cdot 5^2}{5^4\cdot 5^2} + \frac{529}{5^6} + \frac{2116}{5^6} + \frac{169\cdot 5^4}{5^2\cdot 5^4} + \frac{1\cdot 5^6}{1\cdot 5^6}}} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{1050 + 529 + 2116 + \underbrace{169\cdot 5^4 + 5^6}}{5^6}}}$$

$$\begin{array}{r} 4850 \\ \cdot\ 25 \\ \hline 24250 \\ +\ 9700 \\ \hline 121250 \end{array}$$

(Samma som $5^2(169\cdot 5^2 + 5^4)$, gör det enkelt att lösa)

$$\frac{\begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{1050 + 529 + 2116 + 121250}{5^6}}} \quad \frac{\begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{\frac{124675}{5^6}}} = \frac{5^3}{\sqrt{124675}} \begin{bmatrix} -\frac{18}{25} \\ \frac{-23}{5^3} \\ \frac{46}{5^3} \\ -\frac{13}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(\sqrt{5^6} = (5^6)^{0.5} = 5^{6\cdot 0.5} = 5^3)$

u_2

SEM5
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

2) a) Detta ger den ortonormala basen $\mathcal{X}$ för W:

$$\mathcal{X} = \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix}}_{u_1},\ \underbrace{\frac{5^3}{\sqrt{124675}}\begin{bmatrix}-\frac{18}{25}\\-\frac{23}{5^3}\\\frac{46}{5^3}\\-\frac{13}{5}\\1\end{bmatrix}}_{u_2} \right\}$$

b) En mängd är ortogonal om varje vektorpar i mängden är ortogonala mot varandra. I vårt fall är varje vektor i mängden även normerad vilket medför att vi har en ortonormal mängd/bas. Vi vet även att för att ett vektorpar är ortogonala mot varandra om $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0 \quad \forall i,j \quad i \neq j$. Om alla vektorerna är ortogonala mot varandra i en mängd (eller bas i vårt fall) så vet vi att denna är ortogonal. Ifall vektorerna även är normerade så har vi en ortonormal mängd/bas.

För att verifiera ovan gör vi enligt följande:

$$u_1 \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix} \cdot \frac{5^3}{\sqrt{124675}}\begin{bmatrix}-\frac{18}{25}\\-\frac{23}{5^3}\\\frac{46}{5^3}\\-\frac{13}{5}\\1\end{bmatrix} = 0 - \overset{(2\cdot 23)}{\frac{46}{5^3\sqrt{5}}}\left(\frac{5^3}{\sqrt{124675}}\right) + \frac{46}{5^3\sqrt{5}}\left(\frac{5^3}{\sqrt{124675}}\right) + 0 =$$

$$= 0$$

Svar: Basen $\mathcal{X}$ är ortonormal (verifierat från $u_1 \cdot u_2 = 0$)

SEM5
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

3) a) Vi börjar med att stoppa in alla (x, y, z) och skapa följande system:

$$\begin{cases} a - 2b + c = 1 \\ a + c = 4 \\ b + c = -3 \\ a - b + c = 1 \\ a + b + c = -4 \\ a + b + c = -2 \\ 4a - 3b + c = 1 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Vi uttrycker nu detta som en linjär transformation enligt nedan...

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{(A)} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{(b)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{(c)}$$

(Vi kallar dessa för A, b och c)

Nu tar vi fram A^T för att ta oss vidare:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Raderna och kolumnerna i A byter plats)

SEM5
David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

3) a) Nu tar vi och löser följande ekvation: $A^TAb = A^Tc$ enligt minsta kvadratmetoden:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

Detta ger efter förenkling och respektive matrismultiplikation följande system:

$$\begin{bmatrix} 21 & -13 & 9 \\ -13 & 21 & -1 \\ 9 & -1 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -17 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Nu gaussar vi och löser systemet ovan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 21 & -13 & 9 & 4 \\ -13 & 21 & -1 & -17 \\ 9 & -1 & 8 & -3 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ +\frac{13}{21}R1 \\ \frac{-3R1}{7} \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 21 & -13 & 9 & 4 \\ 0 & 21+\frac{13\cdot -13}{21} & -1+\frac{13\cdot 9}{21} & -17+\frac{13\cdot 4}{21} \\ 0 & -1+\left(\frac{-13\cdot -3}{7}\right) & 8+\left(\frac{-3\cdot 9}{7}\right) & -3+\left(\frac{4\cdot -3}{7}\right) \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 21 & -13 & 9 & 4 \\ 0 & \frac{272}{21} & \frac{32}{7} & \frac{-357+52}{21} \\ 0 & \frac{32}{7} & \frac{29}{7} & -\frac{33}{7} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -\frac{6}{17}R2 \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 21 & -13 & 9 & 4 \\ 0 & \frac{272}{21} & \frac{32}{7} & \frac{-365}{21} \\ 0 & 0 & \frac{29}{7}-\frac{6}{17}\left(\frac{32}{7}\right) & \frac{-33}{7}-\frac{6}{17}\left(-\frac{305}{21}\right) \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 21 & -13 & 9 & 4 \\ 0 & \frac{272}{21} & \frac{32}{7} & \frac{-305}{21} \\ 0 & 0 & \frac{43}{17} & \frac{7}{17} \end{array}\right]$$

(NÄSTA SIDA!)

//

SEM5

David Östling

981025

CMETE 4

dostl@kth.se

3) a) Nu har vi följande:

$$21a - 13b + 9c = 4 \rightarrow 21a = 4 + 13\left(\frac{-811}{688}\right) - 9\left(\frac{7}{43}\right) \Rightarrow$$

$$a = \frac{\left(\frac{2752}{688} - \frac{10543}{688} - \frac{1008}{688}\right)}{21} = -\frac{419}{688} \quad (43 \cdot 16 = 688)$$

$$\frac{272}{21}b + \frac{32}{7}c = \frac{-305}{21} \rightarrow \frac{272b}{21} = \frac{-305 - (32 \cdot 3)c}{21} \Rightarrow 272b \cdot 21 = 21\left(-305 - (32 \cdot 3) \cdot \frac{7}{43}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{\cancel{21}\left(-305 - (32 \cdot 3) \cdot \frac{7}{43}\right)}{272 \cdot \cancel{21}} = \frac{-811}{688}$$

$$\frac{43}{17}c = \frac{7}{17} \rightarrow 43c \cdot 17 = 17 \cdot 7 \Rightarrow c = \frac{119}{731} = \frac{7}{43} \quad //$$

Nu har vi alltså:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{419}{688} \\ \frac{-811}{688} \\ \frac{7}{43} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Dessa variabler anpassar sig alltså (enligt minsta-kvadrat-metoden) till systemet så väl som möjligt.

b) Svar: Ja det kommer det bli då variablerna som fås fram enbart kommer anpassas efter de första 4 mätningarna och inte efter de 8 som i a). Med minsta-kvadrat-metoden finner vi variabler som är så väl anpassade till systemet som möjligt, tar vi därmed bort 4 st av 8 ekvationer från systemet så är sannolikheten att vi finner annorlunda anpassade variabler väldigt hög.