Algebra formler

Egenvärden och egenvektorer

- Egenvärde: $\det(A - \lambda I) = 0$

- Egenvektor: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ (Lös ekv. syst. för att få ut vektorn)

Kryssprodukt och normalvektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Detta kan även tas fram genom:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

- Om vi kryssar $\vec{x}$ och $\vec{y}$ så får vi en ny vektor som är ortogonal mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$ $\longrightarrow$ Normalvektorn

Linjärt oberoende

- Stoppa in vektorerna i ett homogent matrisekv. system

dvs. $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{0}$

obekant (c_1) given vektor ($\vec{v}_1$)

- Om en rad försvinner kan den motsvarande vektorn skrivas som en linjär kombination av de andra.

- Vi kan också sätta ihop vektorerna och undersöka ifall determinanten $\neq 0$

- De rader i matrisen som har ledande ettor = linjärt ob. vektorer

Norm

- $\|\vec{v}\| = \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vinkel mellan vektorer

- $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\theta$

- Om du får ett scenario där en linje och ett plan korsar varandra ta då vinkeln mellan vektorn som hör till en variabel (s, t) OCH normalvektorn

Projektion

$\vec{u}$ projicerat på $\vec{v}$:

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\right) \cdot \vec{v}$$

glöm ej!

- Ortogonal projektion: $\vec{w}$ projicerat på ett plan som spänns upp av v_1 och v_2 ges av $\text{proj}_{v_1}(\vec{w}) + \text{proj}_{v_2}(\vec{w})$

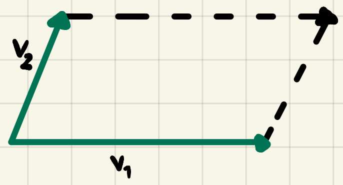
Volym

- Trippelprodukt → ger volymen hos en parallellepiped

dvs. $|\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})| = |\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})|$

- Arean av parallellogram ges av normen av kryssprodukten mellan två vektorer

dvs. $A_{\text{Parallellogram}} = \|v_1 \times v_2\|$



Bildrum och nollrum

- Bildrum: (kolonnrum, Im( )) Reducera matrisen till trappstegsform, de kolonner som har ledande element spänner upp bildrummet (kolla initiella matrisen)

  ← ä.k. basen för bildrummet

- Nollrum: (Kärna, Nullspace, Kernel, ker( )) Består av alla vektorer x som uppfyller:

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

Lös ekv. systemet, de linjärt oberoende vektorerna utgör en bas för nollrummet (bryt ut vektorer från s och t, dessa svarar mot nollrummet).

EX)

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-3s \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_1} + s \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{v}_2}$$

(Svar: $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ utgör en bas för nollrummet)

Ranksatsen

- Om $B = 7 \times 19$ matris:

$$\underbrace{\text{rank } B}_{7} + \text{ker } B = 19$$

← dimension av $B = 12$

Ker (B) ger också det minsta möjliga antalet parametrar i (el. dimension) lösningsmängden till ekvationen $B\vec{x} = 0$ (i detta fall 12)

Skärning mellan två linjer

- $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L_1 \cap L_2$ → Ställ upp ett ekv. system mellan L_1 och L_2 och lös $L_1 = L_2$

dvs. EX) $L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_1 + t v_2$

$L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u_2 + s u_2$

(el. s i L_2)

→ ① $v_1 + t v_2 = u_2 + s u_2$

(Vi får fram s och t)

② Sätt sedan in t i L_1 för att få fram skärningspunkten P.

③ Svar: P

Ortogonalt mot linje

- Om ett plan går genom origo och är ortogonalt mot en linje så kan vi ta fram skalär ekvation för detta plan genom följande:

EX) $L_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = v_1 + t v_2$ (vektorn som hör till en variabel)

① Vi kallar planet för Π. Då är $\vec{n} = \vec{v}_2$

② Då får vi: $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi \iff \vec{OP} \circ \vec{n} = 0 \iff 2x + y + z = 0$

Skalärprodukt

- $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ger $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \ldots + u_n \cdot v_n$

Diagonalisering

- Ta fram egenvärden och egenvektorer:

Egenvärden: $\det(A - \lambda I) = 0$

Egenvektor: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

(egen-värden)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ och } P = \begin{bmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$$

(egenvektorer)

(Diagonalmatris)

ger oss: $A = PDP^{-1}$ vilket kan skrivas om till: $P^{-1}AP = D$

(given matris) (basbytesmatris)

(OBS! Vid potens!)

Diagonaliserbar?

- ☑ Storlek $n \times n$
- ☑ Ha n egenvektorer som är linjärt oberoende.

Matrispotenser

- $A^n = PD^nP^{-1}$

- $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, $A^n = \begin{bmatrix} a^n & c^n \\ b^n & d^n \end{bmatrix}$

Ortogonal matris?

- ☑ $A^T = A^{-1}$
- ☑ $\det(A) = \pm 1$
- ☑ $AA^T = A^TA = 1$ (optional)

Transponering

- Raderna och kolumnerna i en matris byter plats.

EX) Om $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, så är $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Gauss regler

- Byta plats på rader
- Multiplicera rader med reella tal (utom noll)
- Addera rader till varandra med multipel

Tolka gauss resultat

- Ingen lösning: Ifall nollrad = konstant

EX) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$

- En lösning: Får fram identitetsmatrisen i vänsterled utan konstigheter.

EX) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$

- Flera lösningar: Eliminationen går bra men vi får inte identitets-matrisen i vänsterledet.

EX) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

- Oändligt många lösningar: Nollrad = 0

EX) $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Matrisinvers

- $A \cdot A^{-1} = I \longrightarrow$ Vi vill få $[A \mid I]$ till $[I \mid A^{-1}]$

Inverterbarhet

☑ Kollonnerna i matrisen är linjärt oberoende.

☑ $\det(A) \neq 0$
(given matris)

Linjära avbildningar

- Generellt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
- $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ A kallas **avbildningsmatrisen** (ä.k. standardmatris el. transformmatris)
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ A får storlek $m \times n$ (OBS!)

Matrisstorlek

- En matris sägs ha storleken $m \times n$ om den har m rader och n kolumner.

$$m\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{n}\right. \longrightarrow \text{Storlek } m \times n$$

Komplana vektorer

- (Är i samma plan om...)

☑ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$
(Skalär trippelprodukt)

☑ Alternativt om vektorerna är **linjärt beroende**

Minsta kvadratmetoden

- Formel: $\boxed{A^T A \vec{c} = A^T \vec{b}}$
- Utför matrismultiplikation och lös sedan ekv. systemet.

EX) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}}_{\vec{c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$ ger $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}}_{\vec{c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$

- $\vec{r} = A\vec{c} - \vec{b}$ ($\vec{r}$ kallas residualvektorn)
- Minsta avståndet $= \|\vec{r}\|$ (kallas även **residualen**)

Matrismultiplikation

- Kolumn × rad

EX) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+gb & af+bh \\ ce+gd & cf+dh \end{bmatrix}$

Linjärkombination

- Sätt: $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 = \vec{w}$ (En vektor vi vill skriva om som linjärkombination av övriga vektorer)

obekant (x, y, z, osv.)   given vektor

- Alltså... $\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ w \\ | \end{bmatrix}$, räkna ut alla c och sätt in i formeln

- Notera att: $A^n\vec{w} = c_1A^n\vec{v}_1 + c_2A^n\vec{v}_2 + c_3A^n\vec{v}_3$

A = egenvärde v = motsvarande egenvektor

Planets ekvation (Parameterform)

- Låt $P = (x_0, y_0, z_0)$ vara en punkt i planet Π.
- Låt $d_1, d_2 \neq \vec{0}$ vara två icke-parallella vektorer i $\mathbb{R}^3$ som båda är parallella med planet Π.
- En ekvation på parameterform för planet ges då av:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + s\vec{d}_1 + t\vec{d}_2$$

(ev. här)   (Stoppa in $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ här)

(Paramet f. av L som passerar origo och är ortogonal mot planet.)

Planets ekvation (Skalärform/normalform)

- $Ax + By + Cz = D$
- $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ utgör normalvektorn dvs. $\left(\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = (P_1 - P_3) \times (P_2 - P_3)\right)$

(P_n = Punkt)

(Kryssprodukt)

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}\right)$$

- Övrigt scenario:

3. Låt L_1 vara en rät linje i $\mathbb{R}^3$ som definieras av $(x, y, z) = (2, 2, 0) + t(3, 0, 2)$.

(a) Bestäm det plan som innehåller linjen L_1 och punkten $A = (8, 2, 3)$. **(2 p)**

(b) Linjen L_2 definieras av $(x, y, z) = (5, 1, 0) + t(2, 1, 1)$. Bestäm en ekvation för den linje som går genom punkten $A = (8, 2, 3)$ och skär både L_1 och L_2. **(4 p)**

Göm lösning ^

Lösningsförslag.

(a) Planet är bestämt genom punkten $(2, 2, 0)$, första riktningsvektor $(3, 0, 2)$ och andra riktningsvektor

$$(8, 2, 3) - (2, 2, 0) = (6, 0, 3).$$

Planet ges därmed genom

$$(x, y, z) = (2, 2, 0) + r(3, 0, 2) + s(6, 0, 3).$$

Vi kan också bestämma en ekvation till detta plan. Kryssprodukten

$$\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

är en normalvektor till planet. Därför ges planets ekvation av $y = a$, där a bestäms genom insättning av punkten $(2, 2, 0)$ som $a = 2$.

(b) För att linjen ska skära L_1 och innehålla punkten A så måste den ligga i det plan som bestämdes i (a). Om linjen dessutom ska skära L_2 så måste den gå genom skärningspunkten P av L_2 och planet. Med normalekvationen $y = 2$ ser vi att P ges av $(5, 1, 0) + 1(2, 1, 1) = (7, 2, 1)$. Den sökta linjen går alltså genom A och P och ges av

$$(8, 2, 3) + s[(7, 2, 1) - (8, 2, 3)] = (8, 2, 3) + s(-1, 0, -2).$$

Bestämma en bas till vektorrum (ex. nollrum)

- Gausseliminera och få ut en ekvation på allmän form
- Vektorerna med variabler framför sig (ofta s, t) spänner upp basen $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$
- $B = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$

Utgör en bas?

☑ Linjärt ober.

(dvs.)

☑ $\det(A) \neq 0$

Bestämma koordinatvektor för $\vec{v}$ i en bas

- För att hitta koordinatvektorn för en given vektor $\vec{v}$ i basen $B = (\underset{(s)}{\vec{u}}, \underset{(t)}{\vec{w}})$ så tar vi:

$$\underset{(\vec{v})}{\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}} = s\underset{(\vec{u})}{\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}} + t\underset{(\vec{w})}{\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}} \longrightarrow \text{Detta ger koord. } \begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}$$

Övergångsmatris / Basbytesmatris (kan också användas för koordinatmatris)

- Ex.

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b_2} \right\}$$

Bestäm matriser M och N sådana att:

$$[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = M[\vec{x}]_B \quad \text{och} \quad [\vec{x}]_B = N[\vec{x}]_{\mathcal{E}}$$

$$(P_{\mathcal{E} \leftarrow B}) \qquad\qquad (P_{B \leftarrow \mathcal{E}})$$

För att få M: $P_{\mathcal{E} \leftarrow B} = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}}_{b_2} \right) \Rightarrow$

$$\underbrace{c_1}_{=1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{c_2}_{=1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{c_3}_{=2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{c_4}_{=3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ger $M = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix}$

Gör samma sak för att få N.

Ortogonalt komplement $(A^{\perp})$

- Dimensionssatsen: $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = n$ (n fås från $\dim(\mathbb{R}^n)$)

- $\dim(V)$ = antalet ledande ettor i V (inte $V^{\perp}$)

- Ifall vi vill bestämma en bas för $V^{\perp}$ ges den av basen till A^T:s nollrum (vektorn framför t)

given matris

Vinkel mellan vektorer:

- $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\| \cdot \cos\theta$ (θ är vinkeln mellan $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$)
- $\|v_1 \times v_2\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sin\theta$

Parallellepiped

- Ges av absolutbeloppet av determinanten till en given matris $\rightarrow |\det(A)|$

Span

- **3.** Låt S i $\mathbb{R}^5$ vara det linjära höljet

$$S = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\2\end{bmatrix} \right\}$$

och låt vidare

$$\vec{x} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm dimensionen av det ortogonala komplementet $S^\perp$. **(2 p)**
(b) Avgör om $\vec{x}$ är med i $S^\perp$. **(2 p)**
(c) Avgör om $\vec{x}$ är med i S. **(2 p)**

Göm lösning ^

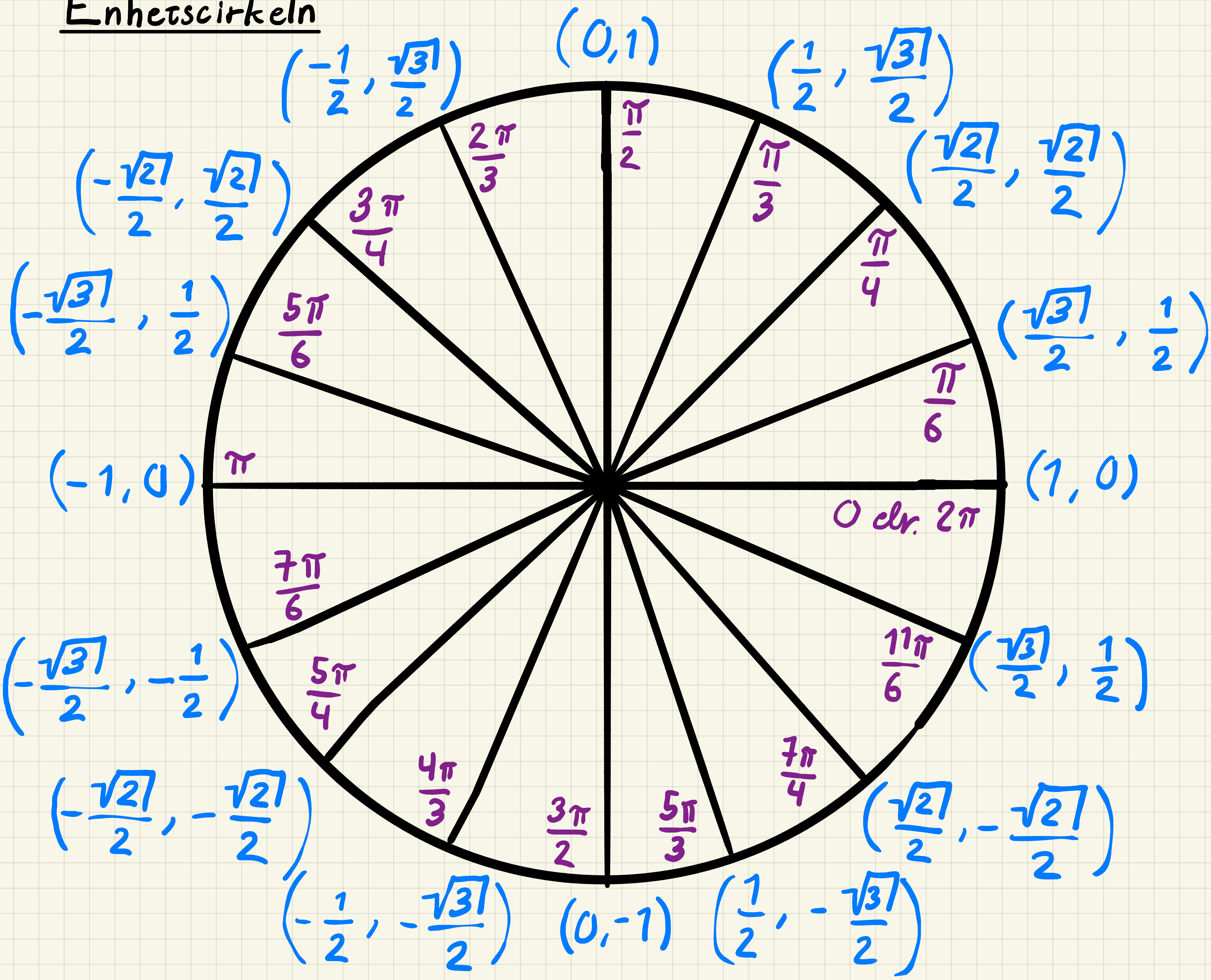
Lösningsförslag.
S är definierat som det linjära höljet av tre vektorer. Vi undersöker först om $\vec{x}$ kan skrivas som en linjärkombination av dessa tre vektorer. Eftersom

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

så ser vi att så inte är fallet. De tre vektorerna tillsammans med vektorn $\vec{x}$ utgör tydligen en linjärt oberoende mängd. Det följer också av detta att de tre vektorerna själva utgör en linjärt oberoende mängd och alltså är en bas för S. Vi har alltså visat att $\vec{x}$ inte ligger i S och att dimensionen av S är 3. Eftersom dim S + dim $S^\perp = 5$ så måste nu dim $S^\perp = 2$. Det gäller att $\vec{x}$ ligger i $S^\perp$ om och endast om $\vec{x}$ är ortogonal mot någon bas för S. Eftersom de tre vektorerna är en bas kan vi använda den och vi ser $\vec{x} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T = 1 \neq 0$ varför $\vec{x}$ inte ligger i $S^\perp$.

- Är $\vec{x}$ med i S? $\longrightarrow$ Om $\vec{x}$ är beroende så ja, om oberoende så nej!

Enhetscirkeln



Skärning mellan två plan

- Om vi har två plan som är icke parallella kommer deras skärningar vara en linje.
- Denna linjens riktningsvektor är ortogonal mot båda planens normalvektorer.

① Plan 1: $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

Plan 2: $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

$n_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $n_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ Linjens normalvektor ges av $n_L = n_1 \times n_2$

(Kryssprodukt)

② Slutligen krävs en punkt som satisfierar ekv. system för planen:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

Skärning mellan linje och plan

- Tre olika skärningar:

  ① Linjen är parallell med planet → ligger ej i planet → Inga punkter

  ② Linjen är parallell och ligger i planet → Oändligt med punkter

  ③ Linjen är ej parallell med planet → En punkt

- Gör en insättning av linjens ekvation på parameterform i planets normalekvation (parameter för parameter)

- Lös uttrycket:

  ① Olika värden $VL \neq HL$ → Inga lösningar

  ② Samma värde $VL = HL$ → Oändligt med punkter

  ③ Specifikt värde, ex. $t = 2$ → En punkt

I annat fall tag fram t och sätt framför respektiv vektor.

Standardmatris för T bas

- Låt avbildning T i basen $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$

(ofta T)

$$P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

S = avbildningens matris i standardbasen

- $S = PAP^{-1}$ eller $A = P^{-1}SP$

Ortogonal bas

- Tag fram egenvektorer och skriv såhär:

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \left\{ \begin{matrix} | \\ \bar{v}_1 \\ | \end{matrix}, \begin{matrix} | \\ \bar{v}_2 \\ | \end{matrix}, \begin{matrix} | \\ \bar{v}_3 \\ | \end{matrix} \right\}$$

Gram schmidt (ortonormal/ortogonal)

- Antag att vi har en godtycklig bas $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ som vi vill ortogonal- och normalisera genom Grahm schmidt metoden till basen $\gamma = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

- För att beräkna första ON-vektorn $\vec{u}_1$ krävs enbart en normalisering av den första vektorn $\vec{v}_1$ så att;

$$\boxed{\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{||\vec{v}_1||}}$$

- Den andra ON-vektorn $\vec{u}_2$ fås genom att ta den andra vektorn $\vec{v}_2$ och subtrahera den med sin egnas projektion på $\vec{u}_1$ följt av en normalisering:

$$\boxed{\vec{x}_2 = \vec{v}_2 - proj_{\vec{u}_1}\vec{v}_2}$$

$$\boxed{\vec{u}_2 = \frac{\vec{x}_2}{||\vec{x}_2||}}$$

- Den tredje ON-vektorn $\vec{u}_3$ beräknas genom $\vec{v}_3$ subtraherad med dess projektion på den första vektorn $\vec{u}_1$ subtraherad med dess projektion på den andra vektorn $\vec{u}_2$ följt av en normalisering.

$$\vec{x}_3 = \vec{v}_3 - proj_{\vec{u}_1}(\vec{v}_3) - proj_{\vec{u}_2}(\vec{v}_3)$$

$$\boxed{\vec{u}_3 = \frac{\vec{x}_3}{||\vec{x}_3||}}$$

- Detta ger ON-basen $\gamma = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

- Om vi har 2 st ortonormala vektorer $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ och söker en tredje vektor $\vec{v}_3$ för att bilda en ortonormal bas B för $\mathbb{R}^3$ så får vi:

$$\boxed{\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2}$$

Basbytesmatriser

- $P_{B \leftarrow C} = (P_{C \leftarrow B})^{-1}$
- $P_{B \leftarrow B'} = P_{B \leftarrow E} P_{E \leftarrow B'}$ (multiplikation)

$$\left(\begin{aligned} P_{B \leftarrow E} &= (P_{E \leftarrow B})^{-1} = B^{-1} \\ P_{E \leftarrow B'} &= B' \end{aligned} \right)$$

Linjära avbildningar

- Rotation motsols R^2: $\begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$
- Spegling i R^2: $\frac{1}{1+k^2} \begin{bmatrix} 1-k^2 & 2k \\ 2k & k^2-1 \end{bmatrix}$
- Rotation motsols R^3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x) & -\sin(x) \\ 0 & \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$

Rang/dimension

- Rang = antalet nollskilda rader i en matris på reducerad trappstegsform.
- Dimension ges av rang.

Triangulär matris

- En matris sägs vara triangulär om ALLA elementen ovanför eller nedanför huvuddiagonalen är 0.
- Om du har en triangulär matris så tas determinanten av denna fram genom produkten av alla element i huvuddiagonalen

Räta linjens ekvation (Parameterform)

- Ta fram riktningsvektor $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$
- Ta fram parameterframställningen enligt följande: $\vec{P} + t(\overrightarrow{PQ})$

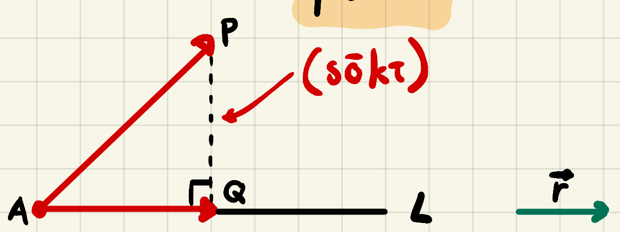
Avstånd

- Mellan två punkter

$$\text{dist}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|\overrightarrow{QP}\|$$

(normen)

- Mellan en punkt och rät linje



Mål: att bestämma avståndet mellan en given punkt P och en given rät linje L. Riktningsvektor för L är $\vec{r}$.

1. Välj en punkt A som ligger på linjen L och beräkna vektorn $\overrightarrow{AP}$

2. Ta fram vektorn $\overrightarrow{AQ}$:

$$\overrightarrow{AQ} = \text{proj}_L \overrightarrow{AP} = \text{proj}_{\vec{r}} \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{r}}{\vec{r} \cdot \vec{r}} \vec{r}$$

3. Vektoraddition: $\text{dist}(P, L)$ = längden av $\overrightarrow{QP}$:

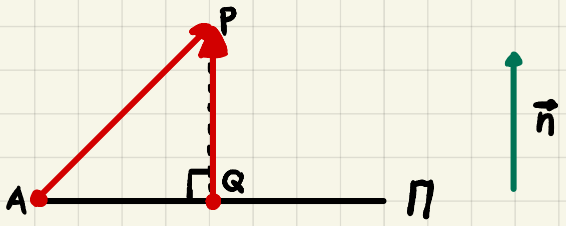
$$\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}$$

Snabbformel: $\text{dist}(P, L) = \left| \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

ges av:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ P = (a, b) \end{cases}$$

- Mellan punkt och plan ✳



① Välj en punkt A som ligger i planet Π och beräkna vektorn $\vec{AP}$.

② Ta fram vektorn $\vec{QP}$:

$$\vec{QP} = \text{proj}_{\vec{n}} \vec{QP} = \frac{\vec{QP} \cdot \vec{n}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}$$

③ Vi inser att $dist(P, \Pi)$ = längden av $\vec{QP}$:

$$dist(P, \Pi) = \| \vec{QP} \|$$

Snabbformel: $dist(P, L) = \left| \frac{Aa + Bb + Cc + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$

ges av:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ P = (a, b, c) \end{cases}$$

- Mellan två räta linjer

$dist(L_1, L_2) = dist(L_2, \Pi) = dist(P, \Pi)$ (använd ✳)

en punkt i L_2

- Mellan rät linje och plan

$dist(L, \Pi) = dist(P, \Pi)$ (använd ✳)

en punkt i L

- Mellan två plan

$dist(\Pi_1, \Pi_2) = dist(P, \Pi_2)$ (använd ✳)

En punkt i Π_1

Kvadratisk form

- $a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$