Sem 1 Algebra geometri

David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

a) Ett parallellogram kännetecknas av parvis parallella sidor och som följd även lika långa. Därmed gör vi enligt nedan för att få fram C:

$$\vec{AB} = \vec{CD} \quad \text{och} \quad \vec{AC} = \vec{BD}:$$

$$\underset{(\vec{AB})}{\begin{bmatrix} -1-0 \\ 1-0 \\ 3-1 \end{bmatrix}} = \underset{(\vec{CD})}{\begin{bmatrix} 2-x \\ 1-y \\ -1-z \end{bmatrix}} \quad \text{ger} \quad \begin{cases} -1 = 2-x \\ 1 = 1-y \\ 2 = -1-z \end{cases} \sim \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$\underset{(\vec{AC})}{\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{bmatrix}} = \underset{(\vec{BD})}{\begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 1-1 \\ -1-3 \end{bmatrix}} \sim \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{STÄMMER!} \quad //$$

Vi stoppar in punkten vi fann ovan och prövar.

Svar: $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ //

b) Vi tar fram normen av alla sidor enligt nedan:

$$||AB|| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$||CD|| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$||AC|| = \sqrt{3^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$||BD|| = \sqrt{3^2+0^2+(-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Svar: Sidorna har längderna: $||AB|| = \sqrt{6}$ l.e., $||CD|| = \sqrt{6}$ l.e., $||AC|| = 5$ l.e., $||BD|| = 5$ l.e.

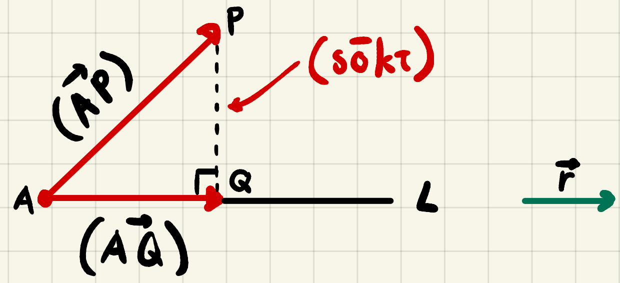
David Östling
981025
CMETE4
dostl@kth.se
SEM1

1 c) Vi tar fram vinkeln enligt följande:

$$\cos(\theta) = \frac{AB \cdot AD}{\|AB\| \cdot \|AD\|} = \frac{\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2-0\\1-0\\-1-1\end{bmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{-2+1-4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{-5}{3\sqrt{6}} //$$

Svar: $\cos(\theta) = \frac{-5}{3\sqrt{6}}$

2) a) $P = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$, $L: \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$



Vi tar fram en punkt A som ligger på linjen:

$t=0$ ger $A = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

Nu tar vi fram vektorn $\vec{AP}$: $\vec{AP} = \begin{bmatrix}1-2\\-1-1\\1-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$

Med $\vec{AP}$ kan vi sedan ta fram $\vec{AQ}$ enligt nedan:

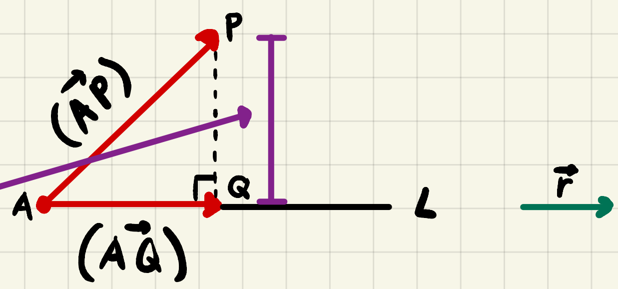
$$\vec{AQ} = \mathrm{Proj}_L \vec{AP} = \mathrm{Proj}_{\underbrace{\vec{r}}_{\text{riktningsvektorn}}} \vec{AP} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{r}}{\|\vec{r}\|^2}\vec{r} = \frac{\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}^{\,2}} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \frac{0-2-1}{\sqrt{2}^{\,2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} //$$

Nu tar vi fram det sökta avståndet $\vec{QP}$ enligt vektoraddition:

$$\vec{AQ} + \vec{QP} = \vec{AP} \Rightarrow \vec{QP} = \vec{AP} - \vec{AQ} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\-3/2\\3/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-1/2\\-5/2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\\-1\\-5\end{bmatrix} //$$

Längden av denna blir: $\|\vec{QP}\| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{26}{4}} = \sqrt{7{,}5}$ l.e. //

Svar: $\sqrt{1{,}5}$ l.e.



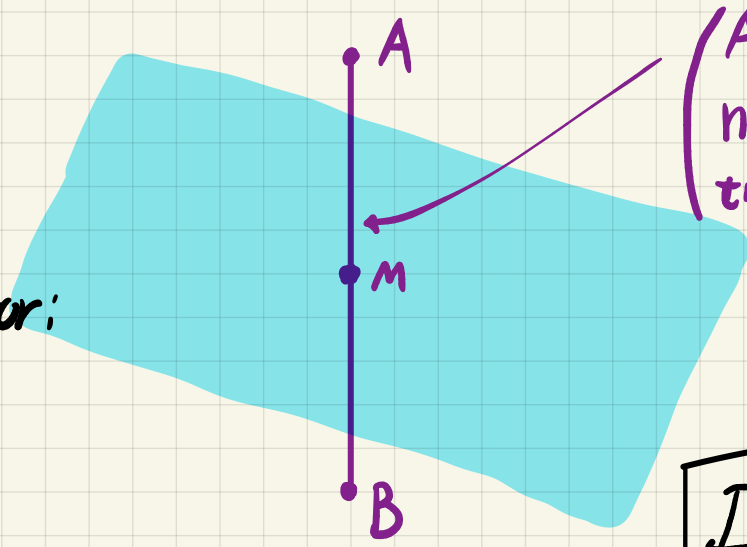
b) Punkten Q är närmast P (se bild)

Då vi vet att $\vec{AQ} = -\frac{3}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ och att $A = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ kan vi ta fram Q enligt följande:

$$Q - A = \vec{AQ} \text{ ger } \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-3/2\\3/2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+2\\-3/2+1\\3/2+0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1/2\\3/2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix} //$$

Svar: Punkten $Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}4\\-1\\3\end{bmatrix}$ //

3) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$



$\vec{AB}$ blir en normalvektor till planet!

David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM1

Vi tar fram planets normalvektor:

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 3-1 \\ 1-(-1) \\ -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Med detta kan vi ta fram mittpunkten M:

$$M = A + \overset{t=1/2}{t}(\vec{AB}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -1+1 \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} //$$

Vi stoppar nu in $\vec{AB}$ i ekvationen nedan där $\overset{(2)}{A}, \overset{(2)}{B}, \overset{(-6)}{C}$ är värden från normalvektorn:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{ger} \quad 2x + 2y - 6z + D = 0$$

Vi sätter nu in mittpunkten M i ekvationen enligt följande:

$$2(2) + 2(0) - 6(-1) + D = 0 \Rightarrow 4 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -10 //$$

Den sökta ekvationen för planet blir därmed:

$$2x + 2y - 6z - 10 = 0 //$$

Nu kontrollerar vi slutligen om punkten $P = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ligger i planet:

$$2(-1) + 2(0) - 6(-2) - 10 = 0 \Rightarrow -2 + 12 - 10 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

VL = HL //

Punkten ligger i planet!

Svar: Planets ekvation är: $2x + 2y - 6z - 10 = 0$ och punkten P ligger i planet!

David Östling
981025
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM1

4) a) Ett plan och en rät linje sägs vara parallella om de saknar gemensamma punkter.

$$L: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$$

$$P: x + 3y + z - 2 = 0$$

Planets normal blir då $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ och linjens riktningsvektor blir $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$

Ifall $\vec{n}$ är vinkelrät mot $\vec{v}$ vet vi att planet och linjen är parallella. Detta tar vi reda på enligt nedan;

$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (Parallell) ger... $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix} = 1 - 3 + a = -2 + a = 0 \Rightarrow a = 2$

Svar: $a = 2$ är linjen och planet parallella.

b) Nu ska vi ta fram $dist(L, \Pi) = dist(P, \Pi)$ En punkt som ligger på L.

$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(t = 0)$

Vi väljer en punkt i planet; $0 + 3 \cdot 0 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow VL = HL$ för $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = A$

Nu kan vi ta fram $\vec{AP}$: $\begin{bmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Med $\vec{AP}$ kan vi sedan ta fram $\vec{AQ}$ enligt nedan;

$$\vec{QP} = Proj_{\vec{n}} \vec{AP} = \frac{\vec{AP} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1 + 3 + 0}{\sqrt{11}^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det sökta avståndet finner vi i längden av $\vec{QP}$, dvs.

$$\|\vec{QP}\| = \sqrt{\left(\frac{4}{11}\right)^2 + \left(\frac{12}{11}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{121} + \frac{144}{121} + \frac{16}{121}} = \frac{\sqrt{176}}{11} = \frac{\sqrt{16} \cdot \sqrt{11}}{11} = \frac{4 \cdot \sqrt{11}}{11} =$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right) = \frac{4}{\sqrt{11}} \text{ l.e.}$$

Svar: $\frac{4}{\sqrt{11}}$ l.e.

4)

c) Vi sätter in $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(a=1)$ i planets ekvation enligt följande:

SEM1

David Östling

981025

CMETE 4

dostl@kth.se

$x+3y+z-2=0$ ger...

$(1+t)+3(1-t)+(2+t)-2=0 \Rightarrow$

$1+t+3-3t+t=0 \Rightarrow$

$4-t=0 \Rightarrow t=4$

Detta ger vid insättning:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Svar: Skärningspunkten är $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$