Sem 5 Flervariabelsanalys

SEM5
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

1) Vi kan enkelt se att P, Q och R har kontinuerliga partiella derivator i hela R^3 ☑

$$\bar{F}(P, Q, R) = \left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}\right) = \left(xy^2, x^2y, z\right)$$

Vi undersöker nu om följande villkor uppfylls:

Villkor: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 2yx \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2yx \end{cases} \text{ ger... } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \ ☑ \qquad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \end{cases} \text{ ger... } \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \ ☑$$

Check:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{ ger... } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \ ☑$$

Villkoret uppfylls!

Vi vet även att hela R^3 är ett enkelt sammanhängande område. ☑

Vi vet nu att $\bar{F}$ är ett potentialfält eller med andra ord; ett konservativt fält.

Nu tar vi fram potentialen genom att lösa nedanstående ekv. system:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dx} = xy^2 \\ \frac{d\varphi}{dy} = x^2y \\ \frac{d\varphi}{dz} = z \end{cases}$$

Från ekv. 1 har vi: $\bar{F}(x,y,z) = \int (xy^2)\,dx = \frac{x^2y^2}{2} + g(y,z)$

Detta ger oss $\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + g(y,z)$

1) Vi tar nu fram $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ igen enligt:

$\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + g(y,z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y + g_y(y,z)$ ger vid jämförelse av ovan: $g_y(y,z) = 0$ //

Nu tar vi:

$$\int g_y(y,z)\,dy = \int 0\,dy = g(z)$$

Detta ger i sin tur:

$$\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + g(z)$$

Vi tar nu fram $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ igen enligt:

$\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + g(z)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = g_z(z)$ ger vid jämförelse av ovan: $g(z) = z$ //

Nu tar vi:

$$\int g_z(z)\,dz = \int z\,dz = \frac{z^2}{2} + C$$

Detta ger i sin tur:

$$\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C \xrightarrow{\text{KONTROLL}} \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = xy^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = z \end{cases} \rightarrow$$

Matchar ovan, vi har alltså räknat rätt. Vi har fått fram en potential.

Svar: Vi får $\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C$, vi vet även att $\bar{F}$ har en potential i hela R^3 och därmed konservativ i hela R^3. Den största öppna mängden som uppfyller uppg. beskrivningen är hela R^3.

2) a) Vi tar hjälp av nedanstående formel för att beräkna integralen:

$$\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \Big(P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\Big)$$

där $\bar{F} = (P, Q)$, $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$
$(a \le t \le b)$

SEM 5
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

2) Givet av uppg. beskrivningen vet vi att γ ges av:

a) $\bar{r}(t) = (t, t^2)$ ← Parametisering

$0 \leq t \leq 2$ → $(\bar{r}(2) = (2,4),\ \bar{r}(0) = (0,0))$

Detta ger oss:

$$\int_0^2 \Big(\underbrace{(t+t^2)\cdot 1}_{(x'(t))} + \underbrace{(t+(t^2)^2)\, 2t}_{(y'(t))} \Big) dt = \int_0^2 (2t^5 + 3t^2 + t)\, dt = \left[\frac{t^6}{3} + \frac{3t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^2 = \left[\frac{2t^6 + 6t^3 + 3t^2}{6} \right]_0^2 = \frac{2(2)^6 + 6(2)^3 + 3(2)^2}{6} -$$

$$- \frac{2(0)^6 + 6(0)^3 + 3(0)^2}{6} = \frac{188}{6} - 0 = \frac{94}{3} \,//$$

Svar: $\int_\gamma F \cdot dr = \frac{94}{3}$

b) Vi börjar med att undersöka om $\bar{F}$ är konservativt enligt:

$$\bar{F}(P, Q) = \left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy} \right) = (x+y,\ x+y^2)$$

Vi vet att om inte följande villkor uppfylls så kan vektorfältet inte vara konservativt. Vi undersöker nu detta:

Villkor: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Check: $\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \end{cases}$ ger... $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ☑ Villkoret uppfylls!

Vi ser även att alla partiella derivator är kontinuerliga i R^2

Nu tar vi fram potentialen genom att lösa nedanstående ekv. system:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = x + y \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x + y^2 \end{cases}$$

2) b)

Från ekv. 1 har vi:

$$\int x + y \, dx = \frac{x^2}{2} + xy + g(y)$$

Vi har alltså: $\varphi = \frac{x^2}{2} + xy + g(y)$

Vi tar nu fram $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ igen enligt:

$$\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \left(x+y, x+y^2\right) \right)$$

$\varphi = \frac{x^2}{2} + xy + g(y)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + g_y(y)$ ger vid jämförelse av ovan: $g_y(y) = y^2$ //

Nu tar vi:

$$\int g_y(y)\, dy = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C$$

Detta ger i sin tur potentialen:

$$\varphi = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^3}{3} + C \xrightarrow{\text{KONTROLL}} \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = x + y \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x + y^2 \end{cases} \longrightarrow$$

Matchar ovan, vi har alltså räknat rätt. Vi har fått fram en potential.

Nu beräknar vi integralen med hjälp av potentialen:

$$\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^3}{3} + C \quad \text{ger...} \quad \int_\gamma F \cdot dr = \varphi(2,4) - \varphi(0,0) =$$

$$= \left(\frac{(2)^2}{2} + (2)(4) + \frac{(4)^3}{3} + C \right) - \left(\frac{0^2}{2} + 0 + \frac{0^3}{3} + C \right) = 2 + 8 + \frac{64}{3} + C - C =$$

$$= \frac{6}{3} + \frac{24}{3} + \frac{64}{3} = \frac{94}{3} //$$

(Samma svar som i a)!)

Svar: $\int_\gamma F \cdot dr = \frac{94}{3}$

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

SEM 5

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM 5

3) Vi tar hjälp av nedanstående formel för att beräkna integralen:

$$\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \Big(P(x(t), y(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t))\,y'(t)\Big)$$

där $\bar{F} = (P, Q)$, $\bar{r}(t) = (x(t), y(t))$
$(a \le t \le b)$

Vi vet även att γ parametiseras av $\bar{r}(t) = (A\cos t, B\sin t)$ där A och B är halvaxlarna.
$(0 \le t \le \pi)$ ges av att ellipsen ligger i övre halvplanet $y \ge 0$ med start i $(2,0)$ och slut i $(-2,0)$

Formeln för en ellips: $\left(\frac{x-a}{A}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{B}\right)^2 = 1$

Nu skriver vi om den givna ellipsen $x^2 + 2y^2 = 4$ enligt:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{2y^2}{4} = 1 \quad \text{ger...} \quad \left(\frac{x}{\sqrt{4}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad \text{ger...} \quad \left(\underbrace{\frac{x}{2}}_{A}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{y}{\sqrt{2}}}_{B}\right)^2 = 1$$

Vi får alltså:

$\bar{r}(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t)$
$(0 \le t \le \pi)$

Nu stoppar vi in $\bar{r}(t)$ i formeln ovan och får:

$$\int_\gamma x\,dx + xy\,dy = \int_0^\pi (2\cos t)(-2\sin t) + \Big((2\cos t)(\sqrt{2}\sin t)\Big)\cdot\sqrt{2}\cos t\,dt = \int_0^\pi -4\cos t\sin t + 4\cos^2 t\sin t\,dt =$$

$-4\int_0^\pi \cos t\sin t\,dt + 4\int_0^\pi \cos^2 t\sin t\,dt$, vi substituerar $u = \sin t$ ger $\frac{du}{dt} = \cos t$ ger... $dt = \frac{du}{\cos t}$ för första integralen och $s = \cos t$ ger $\frac{ds}{dt} = -\sin t$ ger... $dt = -\frac{ds}{\sin t}$ för andra integralen, detta ger...

$$-4\int_{\sin 0}^{\sin \pi} \frac{\cos t\, u}{\cos t}\,du + 4\int_{\cos 0}^{\cos \pi} \frac{s^2 \sin t}{-\sin t}\,ds = -4\int_{\sin 0}^{\sin \pi} u\,du + 4\int_{\cos 0}^{\cos \pi} -s^2\,ds = -4\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\sin 0}^{\sin \pi} - 4\left[\frac{s^3}{3}\right]_{\cos 0}^{\cos \pi}$$

(NÄSTA SIDA!)

SEM 5
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

3) $-4\left[\frac{u^2}{2}\right]_{\sin 0}^{\sin\pi} - 4\left[\frac{s^3}{3}\right]_{\cos 0}^{\cos\pi} = -4\left(\frac{(\sin\pi)^2}{2} - \frac{(\sin 0)^2}{2}\right) - 4\left(\frac{(\cos\pi)^3}{3} - \frac{(\cos 0)^3}{3}\right) =$

$= 4(0) + -4\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{3}\right) = -4\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{8}{3}$ //

Svar: $\int_\gamma x\,dx + xy\,dy = \frac{8}{3}$

4) Vi beräknar arean med hjälp av polära koordinater:

<u>Polära koordinater</u>

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Skalfaktor $= r$ $\quad (dx\,dy = r\,dr\,d\theta)$

Vi börjar med att ta fram ytareaelementet dS enligt:

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dx\,dy \quad \text{där} \quad f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$$

Vi får alltså:

$$dS = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2 + 1}\,dx\,dy = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,dx\,dy$$

Vi tar nu hjälp av cylindriska koordinater och får:

$$dS = \sqrt{4(r\cos\theta)^2 + 4(r\sin\theta)^2 + 1}\,\overbrace{r\,dr\,d\theta}^{(dx\,dy = r\,dr\,d\theta)} = \sqrt{4r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1,\ \text{trig. ettan}} + 1}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \sqrt{4r^2 + 1}\,r\,dr\,d\theta$$

Arean ges nu av följande:

$$A = \iint_\gamma 1\,dS$$

SEM 5
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

4) Vi vet från $z=1-x^2-y^2$ att $0\le r\le 1$ samt att $\underbrace{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}}$, dessa utgör γ.

Ges av att delen av paraboloiden är i första oktanten

Nu tar vi fram arean:

$$A=\iint_\gamma 1\,dS=\int_0^{\pi/2}\int_0^1 1\cdot\sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta,$$ vi substituerar $u=4r^2+1$ ger

$\frac{du}{dr}=8r$ ger... $d=\frac{du}{8r}$ ger... $$\int_0^{\pi/2}\int_1^5 \frac{\sqrt{u}\,r}{8r}\,du\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\int_1^5 \frac{u^{1/2}}{8}\,du\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^5 d\theta=$$

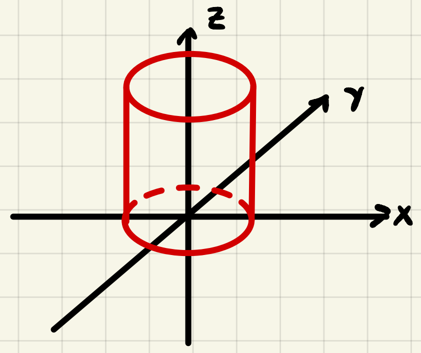
$$=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}(\sqrt{5}\cdot 5)-\frac{2}{3}(\sqrt{1}\cdot 1)\right)d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{10\sqrt{5}-2}{24}\,d\theta=\int_0^{\pi/2}\frac{5\sqrt{5}-1}{12}\,d\theta=\frac{1}{12}\Big[5\sqrt{5}\theta-1\theta\Big]_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{12}\left(5\sqrt{5}\cdot\frac{\pi}{2}-1\cdot\frac{\pi}{2}-(0)\right)=\frac{5\sqrt{5}\pi-\pi}{24}=\frac{\pi}{24}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

Svar: Arean av den del av paraboloiden med ekv. $z=1-x^2-y^2$ som ligger i första oktanten är $\frac{\pi}{24}\left(5\sqrt{5}-1\right)$ a.e. //

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM5

5) Givet av uppg. beskrivningen så vet vi att vi har en cylinder likt nedanför (OBS! Ej skalenlig!):



$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Denna cylinder består av tre delar; toppen, botten och mantelytan. Var och en av dessa delar har en egen enhetsnormal.

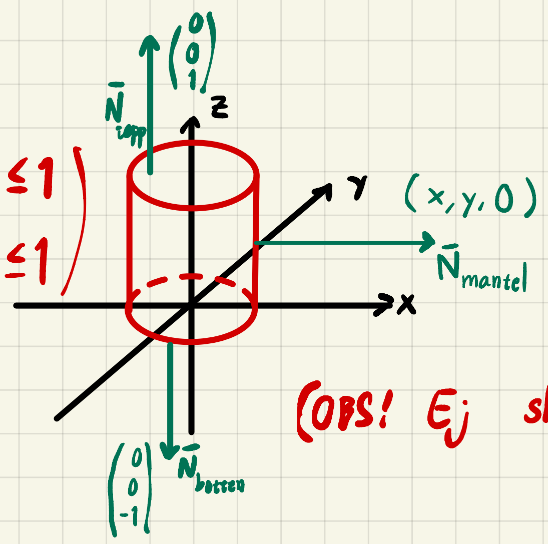
För att få fram det totala flödet krävs en beräkning för varje enskild del enligt:

$$\iint_Y \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS = \iint_{Y_{topp}} \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS + \iint_{Y_{botten}} \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS + \iint_{Y_{mantel}} \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS$$

Enhetsnormalen

Enhetsnormalerna får vi genom att undersöka cylindern;

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$



(OBS! Ej skalenlig!)

Vi ser nu att vi bör ta hjälp av parametisering med hjälp av cylindriska koordinater enligt:

Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \longrightarrow$$

Skalfaktor = r

Vi vet från $x^2+y^2 \leq 1$ att $r = 1$ samt att $\underbrace{0 \leq \theta \leq 2\pi}_{\text{(helt varv)}}$, detta är allt som krävs för parametiseringen.

SEM5
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) Parametiseringen blir alltså:

$$\bar{r}(\theta, z) = (\underbrace{1\cos\theta, 1\sin\theta}_{(r=1)}, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$$

Vi vet även att dS ges av:

$$dS = \left|\bar{r}_\theta \times \bar{r}_z\right| d\theta dz$$

Vi börjar med att beräkna $\bar{r}_z$ och $\bar{r}_\theta$ enligt:

$$\begin{cases} \bar{r}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \\ \bar{r}_z = (0, 0, 1) \end{cases}$$

Nu tar vi fram dS:

$$dS = \left\|\bar{r}_\theta \times \bar{r}_z\right\| d\theta dz = \left\| \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\| d\theta dz = \left\| e_1(\cos\theta - 0) - e_2(-\sin - 0) + \right.$$

$$\left. + e_3(0-0) \right\| d\theta dz = \left\| e_1(\cos\theta) + e_2(\sin\theta) + e_3(0) \right\| d\theta dz \text{ ger...}$$

$$\sqrt{\underbrace{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}_{=1,\ \text{trig. ettan}} + (0)^2}\, d\theta dz = \sqrt{1}\, d\theta dz = 1 d\theta dz$$

Nu när vi har dS kan vi beräkna flödet enligt:

$$\iint_Y \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS = \iint_{Y_{topp}} \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS + \iint_{Y_{botten}} \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS + \iint_{Y_{mantel}} \bar{F}\cdot\bar{N}\,dS =$$

(z=1 konstant i toppen) (z=0 konstant i botten)

$$= \iint_{Y_{topp}} (x,y,1)\cdot(0,0,1)\,dS + \iint_{Y_{botten}} (x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dS + \iint_{Y_{mantel}} (x,y,z)\cdot(x,y,0)\,dS \rightarrow \text{Nästa sida!}$$

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

SEM5

5)

$$\iint_{Y_{topp}}(x,y,1)\cdot(0,0,1)\,dS+\iint_{Y_{botten}}(x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dS+\iint_{Y_{mantel}}(x,y,z)\cdot(x,y,0)\,dS=$$

$$=\iint_{Y_{topp}}1\,dS+\underbrace{\iint_{Y_{botten}}0\,dS}_{=0}+\int_0^1\int_0^{2\pi}(\cos\theta,\sin\theta,z)\cdot(\cos\theta,\sin\theta,0)\,d\theta\,dz=$$

$$\begin{cases}0\le z\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$=\underbrace{\iint_{Y_{topp}}1\,dS}+\int_0^1\int_0^{2\pi}\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1,\ \text{trig. ettan}}+0\,d\theta\,dz=\pi+\int_0^1\int_0^{2\pi}1\,d\theta\,dz=\pi+\int_0^{2\pi}\Big[z\Big]_0^1\,d\theta=$$

Detta beskriver ytarean för cirkelskivan på toppen av cylindern. ⟶

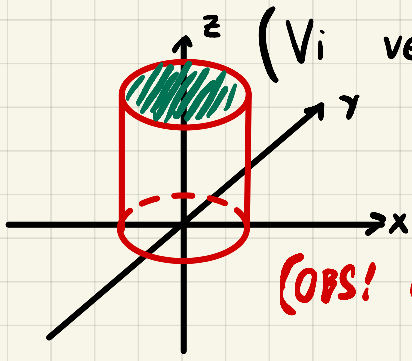
→ Denna ges av arean för en cirkel med radien 1 enligt $A=\pi r^2=\pi(1)^2=\pi$

Dvs. arean för den markerade ytan nedan:

$$=\pi+\int_0^{2\pi}(1-0)\,d\theta=\pi+\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}=$$

$$=\pi+2\pi-0=3\pi$$

(Vi vet från $x^2+y^2\le 1$ att $r=1$ för cirkeln)



(OBS! Ej skalenlig!)

Svar: Det sammanlagda flödet ut genom alla tre begränsningsytor till den givna cylindern är 3π.