Institutionen för Matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Läsåret 2021-2022

Inlämningsuppgifter till Seminarium 5

Lösningar på dessa uppgifter (1-5 nedan) ska lämnas in i form av en pdf-fil via canvas senast måndagen den 21 februari 2022 kl 08:00. Lösningar som lämnas in för sent eller som lämnas in på något annat sätt än via canvas kommer ej att beaktas. Lösningarna ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå dina lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar som införs och förklara hur du resonerar. Alla beräkningar förväntas vara korrekta. Kontrollera dina räkningar innan du lämnar in dina lösningar.

Det är tillåtet att samarbeta och diskutera med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Det räknas som fusk att lämna in avskrivna lösningar.

Inlämningsuppgifterna ska skickas in via canvas (som en PDF-fil; skicka in samtliga uppgifter i EN fil) under ”Uppgifter” i menyn på canvassidan. Observera att man måste vara kursregistrerad och inloggad för att kunna skicka in sina lösningar.

Uppgift 1. Bestäm den största öppna mängd som innehåller origo i $\mathbb{R}^3$ där vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, z)$ är konservativt och bestäm om möjligt en potential till $\mathbf{F}$ där.

Uppgift 2. Beräkna på två olika sätt kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F}(x, y) = (x+y, x+y^2)$ och γ är den del av parabelkurvan $y = x^2$ som går från origo till punkten $(2, 4)$:

(a) genom att använda en parametrisering av γ
(b) genom att använda en potentialfunktion

Uppgift 3. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + xy\,dy$ där γ är den del av ellipsen $x^2 + 2y^2 = 4$ som ligger i övre halvplanet $y \geq 0$ med start i $(2, 0)$ och slut i $(-2, 0)$.

Uppgift 4. Beräkna arean av den del av paraboloiden med ekvation $z = 1 - x^2 - y^2$ som ligger i första oktanten, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Uppgift 5. Beräkna det totala flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ ut från cylindern som beskrivs av olikheterna $x^2 + y^2 \leq 1$ och $0 \leq z \leq 1$. Dvs beräkna det sammanlagda flödet ut genom alla tre begränsningsytorna till cylindern.

Extra arbetsmaterial till Seminarium 5

Vid Seminarium 5 kommer lösningarna till inlämningsuppgifterna ovan att diskuteras. Dessutom kan några av nedanstående uppgifter behandlas. Lösningar på dessa ska dock inte lämnas in i förväg.

Uppgift 6. På hur många olika sätt kan du beräkna kortaste avståndet från origo i $\mathbb{R}^2$ till linjen $x + 2y = 5$? Beräkna avståndet med hjälp av Lagranges metod för optimering med bivillkor. Jämför svaret med svaren du får genom att använda några av de andra sätten.

Uppgift 7. På hur många olika sätt kan du beräkna arean av den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första oktanten? Beräkna arean med formeln för area av en parameteryta som ingår i modul 5. Jämför med svaret du får genom att använda några av de andra sätten.

Uppgift 8. På hur många sätt kan du ta fram en ekvation för tangentplanet i punkten $(1, -1, 2)$ till ytan med ekvation $x^2 + y^2 + z = 4$? Beskriv ytan som en parameteryta med parametrarna x och y och använd parametriseringen för att ta fram en normalvektor till ytan i punkten $(1, -1, 2)$. Använd därefter normalvektorn och skalärprodukt för att skriva upp en ekvation för tangentplanet. Jämför svaret med svaren du får genom att använda några av de andra sätten.

Uppgift 9. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz + 1, xz, xy)$ och γ är kurvan som parametriseras $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t, \sin t)$ när t går från 0 till $\pi/3$.

Uppgift 10. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ upp (positiv z-riktning) genom den del av planet $x + y + z = 1$ som ligger i första oktanten.