Sem 6 Flervariabelsanalys

SEM6
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

1a) Vi tar hjälp av nedanstående formel för att beräkna integralen:

$$\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_a^b \Big(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ \big(z(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\big)\Big)$$ där $\bar{F} = (P, Q, R)$, $\bar{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(a \le t \le b)$

Vi noterar att skärningen ger en sned ellips i den givna cylindern $x^2+y^2=2$ (se skiss nedan)

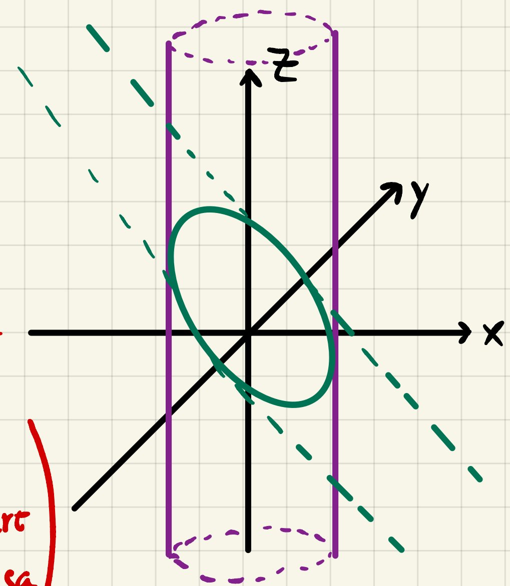
Vi vet att γ parametiseras av $\bar{r}(t) = (A\cos t, B\sin t, 1 - A\cos t - B\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ där A och B är halvaxlarna i den givna ellipsen. Vi tar nu fram dessa:

Formeln för en ellips: $\left(\frac{x-a}{A}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{B}\right)^2 = 1$

Nu skriver vi om den givna ellipsen $x^2+y^2=2$ enligt:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{ger...} \quad \Big(\frac{x}{\underbrace{\sqrt{2}}_{A}}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{\underbrace{\sqrt{2}}_{B}}\Big)^2 = 1$$

(Skiss)



OBS! Ej skalenlig, enbart till för att visa tankegångssätt

Vi får alltså:

$$\bar{r}(t)\begin{cases} x(t) = \sqrt{2}\cos t \\ y(t) = \sqrt{2}\sin t \\ z(t) = 1 - \sqrt{2}(\cos t + \sin t) \end{cases}$$

ges av trig. ettan

$(0 \le t \le 2\pi$, helt varv!)

Nu beräknar vi integralen enligt:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\sin t\underbrace{(-\sqrt{2}\sin t)}_{=x'(t)} + (1 - \sqrt{2}(\cos t + \sin t))\underbrace{(\sqrt{2}\cos t)}_{=y'(t)} + \sqrt{2}\cos t\underbrace{(\sqrt{2}(\sin(t) - \cos(t)))}_{=z'(t)}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2\sin^2 t + \sqrt{2}\cos t - 2\cos^2 t - 2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t - 2\cos^2 t\,dt$$

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

SEM 6

1 forts.)

a) $\int_0^{2\pi} -2\sin^2 t + \sqrt{2}\cos t - 2\cos^2 t - 2\sin t\cos t + 2\sin t\cos t - 2\cos^2 t \, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} -2\underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1,\ \text{trig. ettan}} + \sqrt{2}\cos t - 2\cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} -2 + \sqrt{2}\cos t - 2\cos^2 t \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -2 + \sqrt{2}\cos t - \frac{2}{2}(\cos 2t + 1)\, dt = \int_0^{2\pi} -3 + \sqrt{2}\cos t - \cos 2t \, dt = \int_0^{2\pi} -3\,dt + \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt$$

Vi substituerar $u = 2t$ ger $\frac{du}{dt} = 2$ ger... $dt = \frac{du}{2}$ för den tredje integralen, vi får då:

$$\int_0^{2\pi} -3\,dt + \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos t\, dt - \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt = \Big[-3t\Big]_0^{2\pi} + \sqrt{2}\Big[\sin t\Big]_0^{2\pi} - \int_{2(0)}^{2(2\pi)} \cos u \frac{du}{2} = -3(2\pi) - 0 + \sqrt{2}(\sin 2\pi - \sin 0) -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \cos u\, du = -6\pi + 0 - \frac{1}{2}\Big[\sin u\Big]_0^{4\pi} = -6\pi - \frac{1}{2}\Big(\sin(4\pi) - \sin(0)\Big) = -6\pi - 0 = -6\pi$$

Svar: Vid beräkning av den givna kurvintegralen med hjälp av parametisering får vi $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz = -6\pi$

b) Vi tar hjälp av nedanstående formel för att beräkna integralen:

$$\int_{\partial\gamma} \bar{F}\, d\bar{r} = \iint \mathrm{rot}(\bar{F}) \cdot \hat{n}\, dS \quad \text{där} \quad \hat{n} = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|}$$

(Stokes sats)

Vi vet även att:

$F(x,y,z) = (y, z, x) = (P, Q, R)$

Vi börjar med att beräkna rotationen av fältet F enligt:

$$\mathrm{rot}(\bar{F}) = \nabla \times F = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} = e_1\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - e_2\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + e_3\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= e_1(0-1) - e_2(1-0) + e_3(0-1) = e_1(-1) + e_2(-1) + e_3(-1) \quad \text{ger...} \quad \mathrm{rot}(\bar{F}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

SEM 6
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

1b) Då kurvan ligger på ytan och är på explicit form:

$z = 1 - x - y$ (efter omskrivning)

...så får vi följande normalvektor:

$\bar{N} = (-z'_x, -z'_y, 1) = (1, 1, 1)$

Då vi nu har en yta på explicit form så gäller följande:

$$\hat{n}\, dS = \frac{\bar{N}}{|\bar{N}|} |\bar{N}|\, dx dy = \bar{N}\, dx dy = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy$$

Vi vet nu att:

$$\int_{\partial\gamma} \bar{F} d\bar{r} = \iint_{\gamma} \operatorname{rot}(\bar{F}) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_{D} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \iint_{D} -3\, dx dy$$

Domänen D är cirkeln $x^2 + y^2 = 2$

Nu beräknar vi integralen med hjälp av polära koordinater enligt:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Skalfaktor $= r$

$(x^2 + y^2 \leq a^2)$

För en hel cirkelskiva gäller $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ där domänen D i vårt fall blir $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Nu beräknar vi integralen:

$$\iint_D -3\, dx dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} -3\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} -3\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} -3\left(\frac{\sqrt{2}^2}{2} - 0\right) d\theta = \int_0^{2\pi} -3\, d\theta = -3\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= -3(2\pi - 0) = -6\pi$$

Svar: Vid beräkning av den givna kurvintegralen med hjälp av stokes sats får vi $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz = -6\pi$, vilket är samma som i a)

SEM6
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

2) För att beräkna flödet använder vi följande formel, vi kallar sfären γ:

$$\phi = \iint_\gamma F \cdot \bar{N} \, \partial S$$

(enhetsnormalvektorn)

Enhetsnormalen $(\bar{N})$ till γ i punkten (x, y, z) ges av: $\dfrac{(x,y,z)}{\underbrace{7}}$

radien för den sfär som ges av γ är $r = |\sqrt{49}| = 7$

(en radie kan inte vara negativ)

Ifall vi skriver om F ser vi att:

$$F(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{(x,y,z)}{\underbrace{\left(\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}\right)}^3}$$

Detta är lika med radien för den sfär som ges av γ, alltså 7.

Vi ser alltså att fältet F i punkten (x, y, z) är $F = \dfrac{(x,y,z)}{7^3}$

Vi får alltså flödet enligt:

(Ges av sfären $x^2+y^2+z^2=49$)

$$\phi = \iint_\gamma F \cdot \bar{N} \partial S = \iint_\gamma \frac{(x,y,z)}{7^3} \cdot \frac{(x,y,z)}{7} \partial S = \iint_\gamma \frac{\overbrace{(x^2+y^2+z^2)}^{=7^2}}{7^3} \cdot \frac{1}{7} \partial S = \iint_\gamma \frac{7^2}{7^3} \cdot \frac{1}{7} \partial S = \iint_\gamma \frac{1}{7^2} \partial S$$

Då en sfärs ytarea ges av $4\pi r^2$ (där $r=7$ i vårt fall) så vet vi att $\partial S = 4\pi(7)^2$

Vi stoppar nu in ∂S nedan och beräknar flödet enligt:

$$\iint_\gamma \frac{1}{7^2} \partial S = \frac{1}{7^2}\left(4\pi(7^2)\right) = \frac{7^2}{7^2} \cdot 4\pi = 4\pi$$

Svar: Flödet av F ut genom sfären $x^2+y^2+z^2=49$ är 4π.

SEM6
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

3) Vi vet att riktningen för temperaturens maximala ökning ges av det håll som gradienten pekar. Detta ges av:

$$\nabla T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (3, -1)$$

Temperaturen ökar då med längden av gradienten i punkten, alltså:

$$\left|\nabla T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right| = \left|(3, -1)\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

Vi ser även att T minskar i riktning mot origo då vi ser att absolutvärdet av de partiella derivatorna är större i x-led (3) än i y-led (1). Därmed kommer temperaturen sjunka.

SEM 6
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

4) Till att börja med så ser vi att området som ges av olikheten är slutet och begränsat, alltså kompakt!

Då f även är kontinuerligt överallt vet vi att f garanterat kommer anta ett största och minsta värde.

Vi undersöker nu alla intressanta punkter nedan:

Vi sätter $g(x,y) = 2x^2 + y^2$

Inre stationära punkter: (i cirkelskivans inre där $2x^2+y^2<4$)

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = (0,0) \\ g(x,y) < 4 \end{cases} \text{ ger... } \begin{cases} (1+y,\ x) = (0,0) \\ 2x^2 + y^2 < 4 \end{cases} \longrightarrow$$

Vi får punkten $(0,-1)$ som ligger i området.

Singulära randpunkter: (på cirkelskivan där $2x^2+y^2=4$)

$$\begin{cases} \nabla g(x,y) = (0,0) \\ g(x,y) = 4 \end{cases} \text{ ger... } \begin{cases} (4x,\ 2y) = (0,0) \\ 2x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \longrightarrow$$

Vi får punkten $(0,0)$, denna ligger dock INTE i området och kan därmed förkastas.

Inre singulära punkter: Saknas då $\nabla f(x,y)$ är def. på hela $g(x,y)$

Randpunkter som uppfyller lagrangevillkoret:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 4 \end{cases} \text{ ger... } \begin{cases} (1+y,\ x) = \lambda(4x,\ 2y) \\ 2x^2+y^2 = 4 \end{cases} \text{ ger... } \begin{cases} 1+y = \lambda 4x \\ x = \lambda 2y \\ 2x^2+y^2 = 4 \end{cases}$$

Nu använder vi divisionsknepet enligt:

$$\frac{(\text{ekv.1})\ 1+y}{(\text{ekv.2})\ x} = \frac{\lambda 4x}{\lambda 2y} \Rightarrow \frac{1+y}{x} = \frac{2x}{y} \text{ ger... } y(1+y) = 2x^2$$

Vi sätter nu in detta i ekv. 3 och får:

$$y(1+y) + y^2 = 4 \Rightarrow 2y^2 + y = 4 \text{ ger... } y^2 = 2 - \frac{y}{2} \text{ ger... } y = -\frac{1}{4} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4} \text{ ger... } \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4} \\ y_2 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \end{cases}$$

Svar:

Ovan ger oss väldigt knepiga värden att jobba med men vi vet att värdemängden vi söker ges av intervallet mellan funktionsvärdet av största och minsta värdet som kan antas. När vi fått fram alla punkter och respektive funktionsvärden så kan vi jämföra dessa och få fram värdemängden som går mellan minsta och största funktionsvärdet.

SEM 6

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) a) För att beräkna volymen löser vi nedanstående trippelintegral med hjälp av cylindriska koordinater.

Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Skalfaktor = r

$$\iiint_K 1\,dV$$

Vi vet att $r = \sqrt{x^2+y^2}$, därmed kan den givna olikheten skrivas (i cylindriska koordinater) som:

$$r \le z \le \sqrt{2-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2} \quad \text{ger...} \quad r \le z \le \sqrt{2-r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} \quad \text{ger...}$$

$$\ldots \quad r \le z \le \sqrt{2-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \quad \text{ger...} \quad r \le z \le \sqrt{2-r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1,\ \text{trig. ettan}}} \quad \text{ger...}$$

$$\ldots \quad r \le z \le \sqrt{2-r^2}$$

Vi tar nu fram alla värden som r kan vara enligt:

$$r = \sqrt{2-r^2} \quad \text{ger...} \quad r^2 = 2-r^2 \quad \text{ger...} \quad r^2 = \frac{2}{2} \quad \text{ger...} \quad r = \sqrt{1}, \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Eftersom radien inte kan vara negativ så kan den som minst vara 0 (inte −1). Därmed ges r av:

$$0 \le r \le 1$$

Slutligen så tar vi reda på vilka värden θ kan anta. Då både $\sqrt{x^2+y^2}$ och $\sqrt{2-x^2-y^2}$ snurrar ett helt varv runt z-axeln så vet vi att θ ges av:

$$0 \le \theta \le \underbrace{2\pi}_{\text{(helt varv)}}$$

Nu sammanställer vi allt och får att K ges av:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r \le z \le \sqrt{2-r^2} \end{cases}$$

SEM6

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) a) Nu kan vi beräkna följande trippelintegral enligt:

(Skalfaktor för cyl. koordinater)

$$\iiint_K 1\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} 1\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big[zr\Big]_r^{\sqrt{2-r^2}} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((\sqrt{2-r^2})r\right)-\left((r)r\right) dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(\sqrt{2-r^2}) - r^2\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{2-r^2}\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,dr\,d\theta$$

Vi substituerar $u=2-r^2$ ger $\frac{du}{dr}=-2r$ ger.. $dt=\frac{du}{-2r}$ för den första integralen, vi får då:

$$\int_0^{2\pi}\int_2^1 \frac{r\sqrt{u}}{-2r}\,du\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_2^1 \frac{\sqrt{u}}{-2}\,du\,d\theta - \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(u^{3/2})\right]_2^1 d\theta - \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}\left((1)^3-0\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(1\cdot\sqrt{1}\right)-\frac{2}{3}\left(2\cdot\sqrt{2}\right)\right)d\theta - \int_0^{2\pi} 1\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2}\left(\frac{2-4\sqrt{2}}{3}\right)d\theta - \frac{1}{3}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} = -\frac{1}{6}\int_0^{2\pi} 2-4\sqrt{2}\,d\theta - (2\pi-0) = -\frac{1}{6}\Big[2\theta-4\sqrt{2}\theta\Big]_0^{2\pi} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{6}\Big(2(2\pi)-4\sqrt{2}(2\pi)-0\Big)-\frac{2\pi}{3} =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(4\pi-8\sqrt{2}\pi\right)-\frac{2\pi}{3} = \frac{-2\pi+4\sqrt{2}\pi-2\pi}{3} = \frac{-4\pi+4\sqrt{2}\pi}{3} = \frac{2\pi(2\sqrt{2}-2)}{3} = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$$

Svar: Med hjälp av cylindriska koordinater får vi $\iiint_K 1\,dV = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$ v.e.

5b) Då vi ser att F är kontinuerligt deriverbar i ett område i R^3 som innehåller K samt att K är en kompakt kropp som omsluts av en styckvis slät, sluten randyta där det vektoriella ytelementet (dS) är utåtriktat så kan vi ta hjälp av gauss divergenssats enligt:

$(F(x,y,z)=(P,Q,R)=(0,0,z))$

$$\iiint_K \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz \quad \text{varav} \quad \operatorname{div}(F(x,y,z)) = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = 0+0+1 = 1$$

Nu tar vi fram gränserna med hjälp av sfäriska koordinater:

Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases} \quad \text{Skalfaktor} = R^2\sin\varphi$$

5b) Vi skriver om den givna olikheten i sfäriska koordinater och får:

SEM 6
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

$$\sqrt{(R\sin\varphi\cos\theta)^2+(R\sin\varphi\sin\theta)^2} \leq R\cos\varphi \leq \sqrt{2-(R\sin\varphi\cos\theta)^2-(R\sin\varphi\sin\theta)^2}$$

ger...

$$\sqrt{R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} \leq R\cos\varphi \leq \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

ger...

$$\sqrt{\sin^2\varphi(R^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1,\ \text{trig. ettan}})} \leq R\cos\varphi \leq \sqrt{2-\sin^2\varphi(R^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1,\ \text{trig. ettan}})}$$

ger...

$$\sqrt{R^2\sin^2\varphi} \leq R\cos\varphi \leq \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi}$$

ger...

$$R\sin\varphi \leq R\cos\varphi \leq \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi}$$

Vi tar nu fram alla värden som R kan anta enligt:

$$R\cos\varphi = \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi} \quad \text{ger...} \quad R^2\cos^2\varphi = 2-R^2\sin^2\varphi \quad \text{ger...}$$

$$R^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1,\ \text{trig. ettan}}=2 \quad \text{ger...} \quad R=\sqrt{2}$$

R ges alltså av:

$$0 \leq R \leq \sqrt{2}$$

SEM6

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) b) Vi tar nu fram alla värden som φ kan anta genom följande:

$$R\sin\varphi = R\cos\varphi \text{ ger... } \underbrace{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}_{=\tan\varphi} = \underbrace{\frac{R}{R}}_{=1} \text{ ger... } \varphi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

Detta betyder att φ ges av: $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

Slutligen så tar vi reda på vilka värden θ kan anta. Då både $\sqrt{x^2+y^2}$ och $\sqrt{2-x^2-y^2}$ snurrar ett helt varv runt z-axeln så vet vi att θ ges av:

$$0 \le \theta \le \underbrace{2\pi}_{\text{(helt varv)}}$$

Nu sammanställer vi allt och får att K ges av:

$$\begin{cases} 0 \le R \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Nu beräknar vi integralen ovan och får:

$$\iiint_K \overbrace{\operatorname{div}F}^{=1 \text{ från ovan}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} 1\, \overbrace{R^2\sin\varphi}^{\text{(Skalfaktor för sfäriska koordinater)}}\,dR\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\left[\frac{R^3}{3}\right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\left(\frac{\sqrt{2}^3}{3} - 0\right) d\varphi\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \frac{\sqrt{2}^3}{3}\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}^3}{3}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}^3}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - (-\cos 0)\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}^3}{3}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}^3}{3}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}^4 - \sqrt{2}^3}{3\sqrt{2}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}^3 - \sqrt{2}^2}{3}\,d\theta = \frac{\sqrt{2}^3 - \sqrt{2}^2}{3}\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}^3 - \sqrt{2}^2}{3}(2\pi - 0) =$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{2}^3 - \sqrt{2}^2}{3}\right) = 2\pi\left(\frac{2\sqrt{2} - 2}{3}\right) = \frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$$

Svar: Flödet av F ut genom ut genom glasstruten K är $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$