Sem 2 Flervariabelsanalys

SEM2
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) För att få fram tangentplanets ekv. till z använder vi följande formel:

given punkt

$$z = f(a,b) + \frac{df}{x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{y}(a,b)(y-b)$$

Vi börjar med att ta fram partiella derivatorna för f enligt:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx}(x,y) = (2x)\left(\dfrac{1}{1+x^2+y^3}\right) = \dfrac{2x}{1+x^2+y^3} \\[2ex] \dfrac{df}{dy}(x,y) = (3y^2)\left(\dfrac{1}{1+x^2+y^3}\right) = \dfrac{3y^2}{1+x^2+y^3} \end{cases}$$

vilket vid insättning ger...

$$z = \ln(1+1^2+(-1)^3) + \left(\frac{2}{1+(1)^2+(-1)^3}\right)(x-1) + \left(\frac{3(-1)^2}{1+(1)^2+(-1)^3}\right)(y+1) =$$

$$= \underbrace{\ln(1)}_{=0} + \left(\frac{2}{1}\right)(x-1) + \left(\frac{3}{1}\right)(y+1) = 2(x-1) + 3(y+1)$$

Svar: Tangentplanets ekv. blir: $z = 2(x-1) + 3(y+1)$

1b) Tangentplanets ekv. från a) är det förstagradspolynom som ger den bästa approximationen i x, y nära punkten.

Närmevärdet ges av tangentplanets ekv. vid insättning av $(x,y) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ enligt nedan:

$$z = 2\left(\left(\frac{4}{5}\right)-1\right) + 3\left(\left(-\frac{4}{5}\right)+1\right) = 2\left(-\frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

Svar: Approximationen ges av tangentplanets ekv. från a) varav närmevärdet till $\left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ är $\frac{1}{5}$.

2) För att få fram tangentplanets ekv. använder vi följande formel:

given punkt

$$n \cdot ((x,y,z) - (a,b,c)) = 0$$

(∇f i en given punkt, n = normalvektor)

Vi undersöker först om punkten ligger på ytan:

$$g(1, 2, -1) = 1^3 + 2^3 + (-1)^4 = 10$$ ☑ STÄMMER!

Nu tar vi fram normalen till nivåytan genom att ta fram $\nabla g(x,y,z)$ enligt följande:

$$\begin{cases} \frac{dg}{dx}(x,y,z) = 3x^2 \\ \frac{dg}{dy}(x,y,z) = 3y^2 \\ \frac{dg}{dz}(x,y,z) = 4z^3 \end{cases}$$

ger... $\nabla g(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 4z^3)$

SEM2
David Östling
981025-9532
CMETE4
dostl@kth.se

SEM2
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

2) Nu tar vi fram $\nabla g(1, 2, -1)$ för att få fram normalen:

$$\nabla g(1,2,-1) = \left(3(1)^2, 3(2)^2, 4(-1)^3\right) = \underbrace{\left(3, 12, -4\right)}_{=\vec{n}}$$

Nu tar vi fram tangentplanets ekv. enligt:

$$(3, 12, -4)\left((x, y, z) - (1, 2, -1)\right) = 0 \quad \text{ger...}$$

$$3(x-1) + 12(y-2) - 4(z+1) = 0 \quad //$$

Svar: Tangentplanets ekv. i punkten $(1, 2, -1)$ blir

$$3(x-1) + 12(y-2) - 4(z+1) = 0$$

3) Vi börjar med att ta fram de partiella dubbelderivatorna till f enligt:

$x^3 + x^2y - y^2$

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 3x^2 + 2yx \\ \dfrac{df}{dxx} = 6x + 2y \\ \dfrac{df}{dxy} = 2x \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{df}{dy} = x^2 - 2y \\ \dfrac{df}{dyy} = -2 \\ \dfrac{df}{dyx} = 2x \end{cases}$$

Nu verifierar vi att $\dfrac{df}{dxy}(1,-1) = \dfrac{df}{dyx}(1,-1)$ dvs. att de blandade derivatorna är lika enligt:

$$\frac{df}{dxy}(1,-1) = \frac{df}{dyx}(1,-1) \quad \text{ger...} \quad 2(1) = 2(1) \rightarrow VL = HL \rightarrow \boxed{✓} \text{ LIKA!}$$

3) Svar: De partiella derivatorna är:
$$\begin{cases} \frac{df}{dxx} = 6x+2y, & \frac{df}{dyy} = -2 \\ \frac{df}{dxy} = 2x, & \frac{df}{dyx} = 2x \end{cases}$$

De blandade derivatorna är även lika vid punkten $(x,y) = (1,-1)$ då $2(1) = 2(1)$ //

4) a) Vi tar fram riktningderivatan av f i punkten $(1, 2)$ enligt:

$$D_u f(1,2) = \frac{u}{\|u\|} \cdot \nabla f(1,2)$$

Vi börjar med att ta fram gradienten:

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = (2x+y)\left(e^{x^2-y^2+xy+1}\right) \\ \frac{df}{dy} = (-2y+x)\left(e^{x^2-y^2+xy+1}\right) \end{cases} \quad \text{ger...} \quad \nabla f(x,y) = \left((2x+y)\left(e^{x^2-y^2+xy+1}\right), (-2y+x)\left(e^{x^2-y^2+xy+1}\right)\right)$$

Nu stoppar vi in gradienten ovan och tar fram riktningsderivatan:

$1-4+2+1=0$

$$D_u f(1,2) = \frac{u}{\|u\|} \cdot \nabla f(1,2) \text{ ger... } \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} \begin{pmatrix} (2(1)+2)\left(e^{1^2-2^2+1\cdot 2+1}\right) \\ (-2(2)+1)\left(e^{1^2-2^2+1\cdot 2+1}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)}_{=1}}} \begin{pmatrix} 4e^0 \\ -3e^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \;//$$

SEM2
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

SEM2
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

4) b) Vi vet att följande gäller för riktningsderivator:

$$-\|\text{grad} f(1,2)\| \leq D_u f(1,2) \leq \|\text{grad} f(1,2)\|$$

Därmed, ifall 0 är innanför detta intervall så vet vi att riktningen $\vec{v}$ finns.

Vi tar nu fram vad intervallet är enligt:

$$\|\text{grad} f(1,2)\| = \sqrt{\left((2(1)+2)\left(e^{1^2-2^2+1\cdot 2+1}\right)\right)^2 + \left((-2\cdot 2+1)\left(e^{1^2-2^2+1\cdot 2+1}\right)\right)^2} = \sqrt{(4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Detta ger följande intervall:

$$-5 \leq D_u f(1,2) \leq 5$$

Svar: Eftersom $-5 \leq 0 \leq 5$ så vet vi att det finns en riktning v.

c) Vi tar fram tangentlinjens ekv. till $f(x,y)=1$ i punkten $(1,2)$ genom att derivera implicit enligt:

$$\left(e^{x^2-y^2+xy+1}\right)\left(2x - 2y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Nu sätter vi in punkten $(1, 2)$ ovan och får:

$$\left(e^{\overbrace{1^2-2^2+1\cdot 2+1}^{=0}}\right)\left(2(1) - 2(2)\frac{dy}{dx} + 2 + 1\frac{dy}{dx}\right) = 1\left(4 - 3\frac{dy}{dx}\right) = 4 - 3\frac{dy}{dx} = 0$$

Detta ger k-värdet $k = \frac{dy}{dx} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ vilket vi nu stoppar in i räta linjens ekv. $(y=kx+m)$ tillsammans med punkten $(1,2)$:

$y = kx + m$ ger... $2 = \frac{4}{3}(1) + m$ vilket i sin tur ger... $m = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM2

4c) Svar: Ekvationen för tangentlinjen till nivåkurvan $f(x,y)=1$ i punkten $(1,2)$ ges av
$y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

5) Vi definerar funktionen f enligt följande:

$$g(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)=f(x,y)$$

Nu tar vi fram alla partiella derivator till x, y:

$$r\begin{cases}\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta\end{cases}$$

$$\theta\begin{cases}\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta\end{cases}$$

Då kan vi använda kedjeregeln enligt nedan för att alla partiella derivator till f enligt:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial g}{\partial r} \text{ vilket ger.. } \frac{\partial f}{\partial r}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial g}{\partial \theta} \text{ vilket ger.. } \frac{\partial f}{\partial \theta}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\end{cases}$$

Vi vet att $x=1$, $y=\sqrt{3}$, därmed kan vi ta ansätta följande:

$$\begin{aligned}1&=r\cos\theta \\ \sqrt{3}&=r\sin\theta\end{aligned} \quad \text{vilket ger...} \quad \frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\tan\theta=\sqrt{3}$$

$$\left.\tan^{-1}(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}\right\}=\theta$$

SEM2
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) Nu stoppar vi in $\theta = \frac{\pi}{3}$ i
$1 = r\cos\theta$ och får:

$$1 = r\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \text{ ger... } r = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2$$

Nu sätter vi in värdena på r och θ i de partiella derivatorna till f enligt:

$$\frac{dg}{dr}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{df}{dr}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{df}{dx}(1, \sqrt{3})\right)\left(\frac{dx}{dr}\right) + \left(\frac{df}{dy}(1, \sqrt{3})\right)\left(\frac{dy}{dr}\right) = 1$$

ger...

$$\frac{dg}{dr}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{df}{dr}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{df}{dx}(1, \sqrt{3})\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{df}{dy}(1, \sqrt{3})\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{df}{dx}(1, \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{df}{dy}(1, \sqrt{3})\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$$

$$\frac{dg}{d\theta}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{df}{d\theta}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{df}{dx}(1, \sqrt{3})\right)\left(\frac{dx}{d\theta}\right) + \left(\frac{df}{dy}(1, \sqrt{3})\right)\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = 2$$

ger...

$$\frac{dg}{d\theta}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{df}{d\theta}\left(2, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{df}{dx}(1, \sqrt{3}) \cdot \underbrace{-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{= -\frac{2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}} + \frac{df}{dy}(1, \sqrt{3}) \cdot \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}_{=1} =$$

$$= \frac{df}{dx}(1, \sqrt{3}) \cdot -\sqrt{3} + \frac{df}{dy}(1, \sqrt{3}) = 2$$

SEM2
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) Dessa partiella derivator spänner upp följande ekv. system:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3}) \cdot -\sqrt{3} + \frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{3}) = 2 \end{cases}$$

Med detta kan vi gaussa för att lösa ekv. systemet enligt nedan:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\sqrt{3} & 1 & 2 \end{array}\right] (2R1) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{3} & 2 \\ -\sqrt{3} & 1 & 2 \end{array}\right] (+\sqrt{3}R1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 4 & 2+2\sqrt{3} \end{array}\right] \left(\tfrac{1}{4}R2\right) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} \end{array}\right] (-\sqrt{3}R2) \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{3} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{array}\right]$$

Svar: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3}) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{3}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$