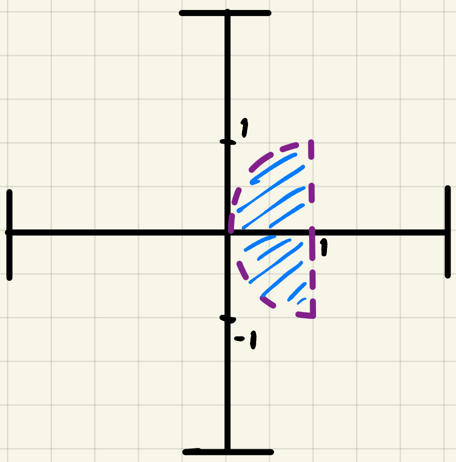
# Sem 1 Flervariabelsanalys

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

a)



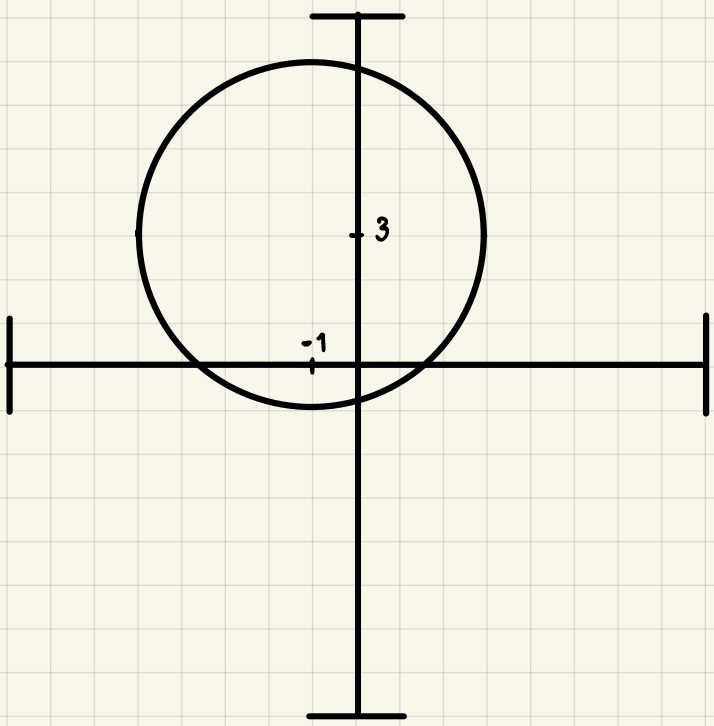

Mängden är öppen då varje punkt har en omgivning som ligger helt i mängden samt att randpunkterna inte tillhör mängden

Randpunkterna ges av funktionen:
$x - y^2 = 0$ där $0 \leq x \leq 1$

b) Vi börjar med att kvadratkomplettera enligt nedan:

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = (x+1)^2 + (y-3)^2 = 6 + 1 + 9 = 16$$

Med detta vet vi att cirkeln som spänns upp av $x^2 + 2x + y^2 - 6y = 6$ är förskjuten -1 steg i x-led och +3 steg i y-led, radien för denna blir $\sqrt{16} = 4$ enligt nedan:




Vi ser här att randpunkterna ges av alla punkter på mängden.
Randpunkterna till B är de punkter som är sådana att varje omgivning till punkterna innehåller både punkter från mängden B och punkter som inte ligger i mängden B.

Randpunkterna ges alltså av:
$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 6$

Mängden är även sluten då mängdens komplement av en öppen mängd samt att randpunkterna tillhör mängden

2) a) Med polära koordinater kan vi beskriva mängden enligt: (då vi endast har x och y, inte z)

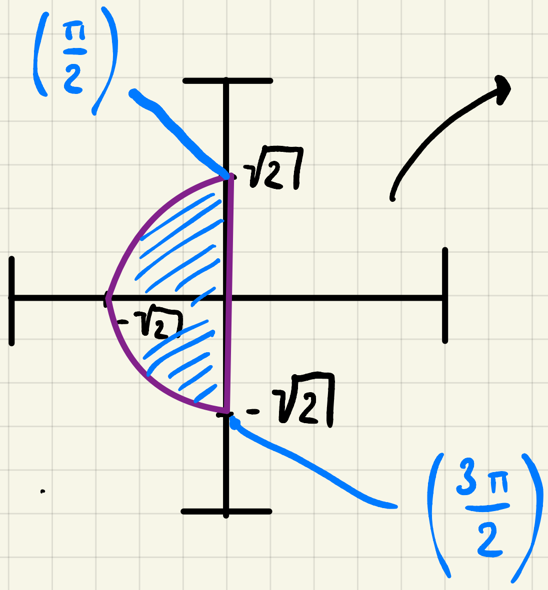
$$\begin{cases} x \le 0 \\ y \le \sqrt{2} \end{cases}$$ vilket ger följande intervall i polära koordinater: $\rightarrow \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{2} \\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

(ges av $r = \sqrt{x^2+y^2}$ där $\begin{cases} x = 0, \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$)

(ges av $\theta = \cos^{-1}(0)$)

(Polära koord.:
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$)

Vi skissar nu det vi får fram:

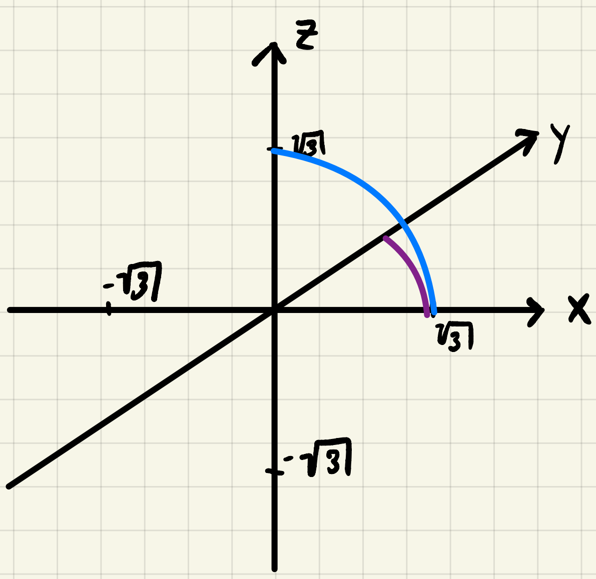



Då detta matchar C vet vi att vi tänkt rätt.

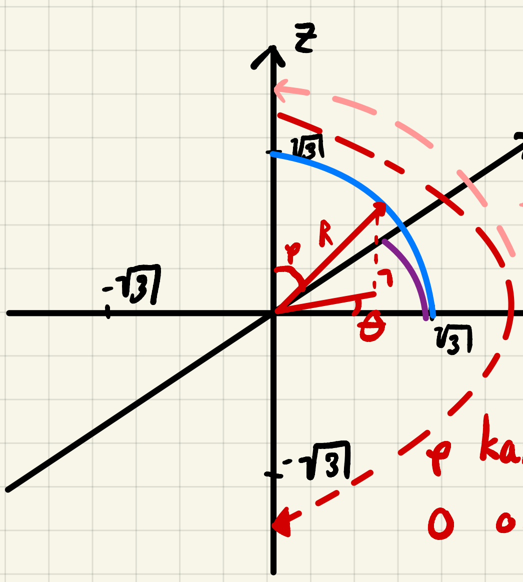
b) Av intervallet att döma kan vi snabbt se att vi jobbar med en sfär, därmed använder vi sfäriska koordinater enligt nedan:

Av intervallen ser vi att $x \ge 0$, $y \ge 0$ och $x^2+y^2+z^2 \le 3$. Eftersom $x^2+y^2+z^2 \le 3$ vet vi att radien är som störst $R = \sqrt{3}$ och som minst 0.

Vi ritar nu upp en skiss enligt följande:




→ Vi föreställer oss nu:




Vi ser här att → $\theta$ kan röra sig mellan 0 och $\frac{\pi}{2}$ och... → $\varphi$ kan röra sig mellan 0 och $\pi$

(Sfäriska koord.:
$x = R\cos\varphi\sin\theta$
$y = R\sin\varphi\cos\theta$
$z = R\cos\varphi$)

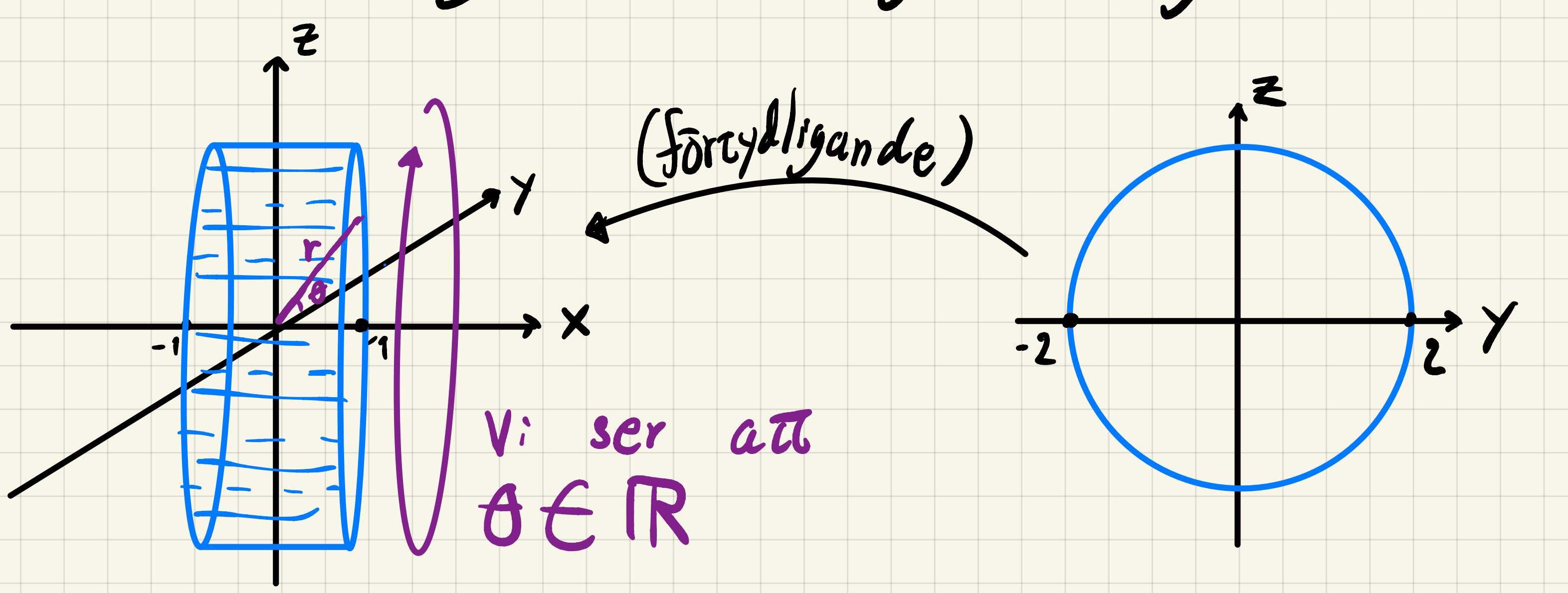
Svar: $\begin{cases} 0 \le R \le \sqrt{3} \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$


SEM1
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

SEM 1
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

2c) Av intervallet att döma kan vi snabbt se att vi jobbar med en cylinder, därmed använder vi cylindriska koordinater i det här fallet. Detta klarnar ytterligare när vi skissar grafen nedan.

Till att börja med så vet vi att radien $r$ till nivåkurvan $y^2+z^2 \leq 4$ är $r=\sqrt{4}$. Nu för att få fram $\theta$ skissar vi grafen enligt följande:




(Cyl. koordinater
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$
)

Slutligen ser vi även att $-1 \leq x \leq 1$

Sammanställt har vi alltså följande:

Svar: $$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ \theta \in \mathbb{R} \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

//

SEM 1
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

3) a) Vi vet att: $\begin{cases} x = 1 + 2\cos 2\pi t \\ y = 1\sin 2\pi t \end{cases}$ vilka är elliptiskt polära koordinater. Vi tänker nu omvänt och vet att:

$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ → Med detta vet vi att våra värden på a och b är $a = 2$, $b = 1$.

$(\underset{2}{1} + 2\cos 2\pi t)$

Vi ser även att ellipsen är förskjuten 1 steg i x-led och 0 steg i y-led så får vi $x_0 = 1$ och $y_0 = 0$.

Ekvationen ges alltså av:

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-0)^2}{1^2} = 1 \text{ vilket ger... } \frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$$

Svar: $\frac{(x-1)^2}{4} + y^2 = 1$

b) Vi undersöker nu partikelns hastighet $r'(\frac{1}{8})$ och acceleration $r''(\frac{1}{8})$

$$r(t) = \left(1 + 2\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t)\right)$$

Vi börjar med hastigheten $r'(t)$:

$$r'(t) = \left(-4\pi\sin(2\pi t),\ 2\pi\cos(2\pi t)\right) \text{ viket ger...}$$

$$r'\left(\tfrac{1}{8}\right) = \left(-4\pi\sin\left(2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\right),\ 2\pi\cos\left(2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\right)\right) = \left(-4\pi\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right),\ 2\pi\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \left(-2\pi\sqrt{2},\ \pi\sqrt{2}\right) \text{ m/s}$$

SEM 1
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

b) Nu tar vi fram accelerationen:

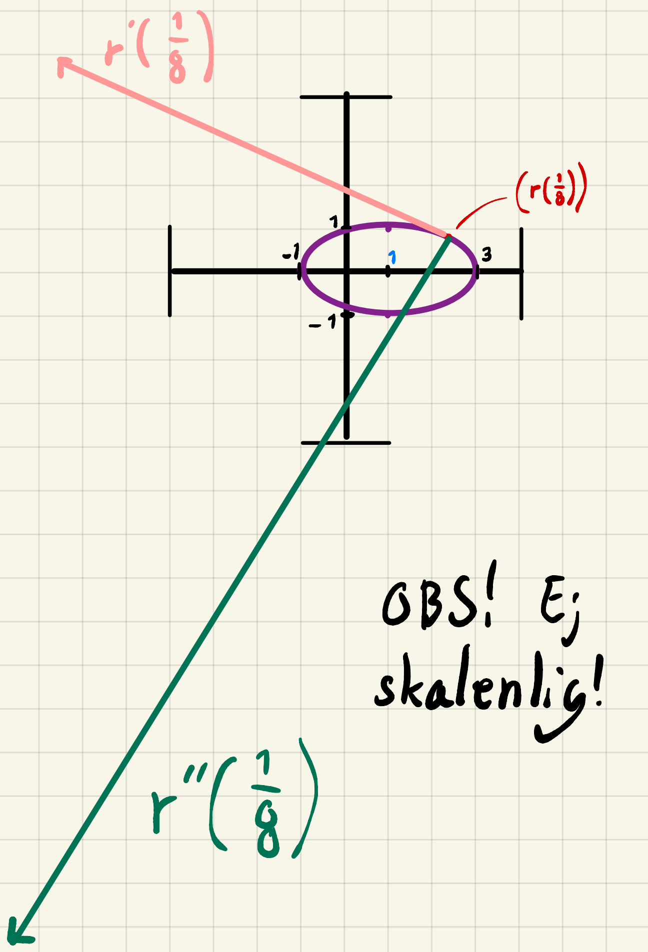
$$r''(t)=\left(-8\pi^2\cos(2\pi t),\,-4\pi^2\sin(2\pi t)\right) \text{ vilket ger...}$$

$$r''\left(\tfrac{1}{8}\right)=\left(-8\pi^2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right),\,-4\pi^2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)=\left(-4\pi^2\sqrt{2},\,-2\pi^2\sqrt{2}\right)\ m/s^2$$

Svar: Hastigheten och accelerationen vid tidpunkten $t=\frac{1}{8}$ s är $\left(-2\pi\sqrt{2},\ \pi\sqrt{2}\right)$ m/s och $\left(-4\pi^2\sqrt{2},\,-2\pi^2\sqrt{2}\right)$ $m/s^2$

c) Vi vet att radien är 2 i x-led och 1 i y-led från $\begin{cases} x = 1+2\cos 2\pi t \\ y = 1\sin 2\pi t \end{cases}$ samt att ellipsen är förskjuten 1 steg i x-led.

Nu skissar vi:




$$r\left(\tfrac{1}{8}\right)=\left(1+2\cos\left(2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\right),\ \sin\left(2\pi\left(\tfrac{1}{8}\right)\right)\right)=$$

$$=\left(1+2\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right),\ \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=\left(1+\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r'\left(\tfrac{1}{8}\right)=\left(-2\pi\sqrt{2},\ \pi\sqrt{2}\right)$$

$$r''\left(\tfrac{1}{8}\right)=\left(-4\pi^2\sqrt{2},\,-2\pi^2\sqrt{2}\right)$$

SEM 1
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

d) Farten får vi av normen av $r'(t)$ (normen av hastigheten). Den högsta farten vi kan uppnå är när $r'(t)$:s x-värde är som störst, alltså när $r'(t)$ bildar en ellips.

Med andra ord vill vi alltså att $\sin 2\pi t$ ska vara lika med 1 eller -1 då $(-1)^2=(1)^2$

Detta får vi enligt följande:

$$\underset{(=1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sin(2\pi t) \text{ ger... } t = \frac{1}{4}\,s$$

$$\underset{(=-1)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \sin(2\pi t) \text{ ger... } t = \frac{1{,}5}{2} = \frac{3}{4}\,s$$

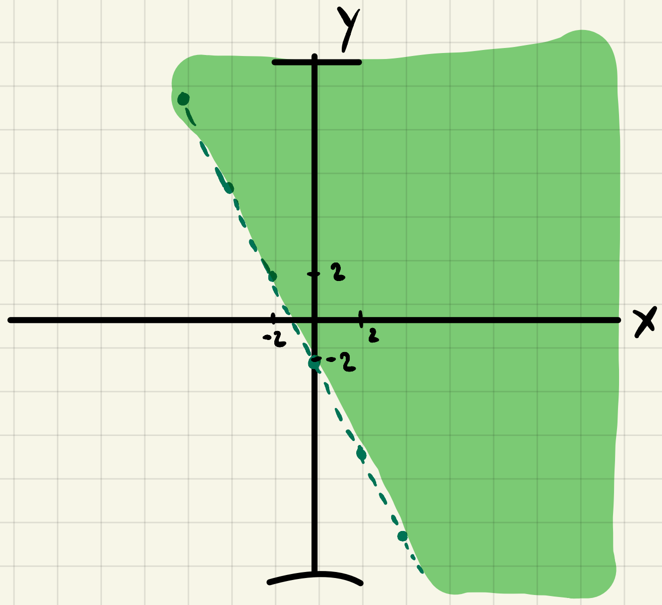
(eller $r'\left(\frac{3}{4}\right)$, det blir samma sak)

Nu tar vi fram normen av $r'\left(\frac{1}{4}\right)$ för att få högsta farten som partikeln kan nå:

$$\left\|r'\left(\frac{1}{4}\right)\right\| = \sqrt{\left(-4\pi\underbrace{\sin\left(2\pi\left(\frac{1}{4}\right)\right)}_{=1}\right)^2+\left(2\pi\underbrace{\cos(2\pi t)}_{=0}\right)^2} = \sqrt{(-4\pi)^2} = 4\pi \text{ m/s}$$

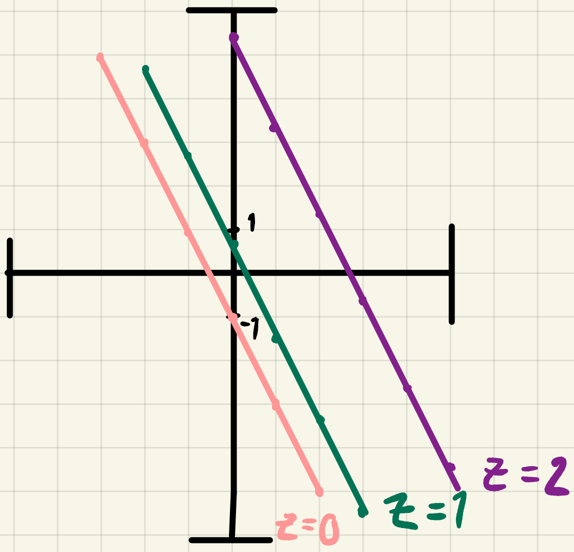
Svar: Högsta farten som partikeln kan färdas i är $4\pi$ m/s.

4) a) $2x + y > -2$ är definitionsmängden då $\ln(0)$ är odefinerat.




Detta är alltså en öppen mängd där det gröna området visar var olikheten uppfylls.

Några nivåkurvor:




$z = 0 = \ln(2 + 2x + y)$ ger...

$e^0 = 2 + 2x + y \Rightarrow y = 1 - 2 - 2x$

$(e^0 = 1)$

$z = 1 = \ln(2 + 2x + y)$ ger...

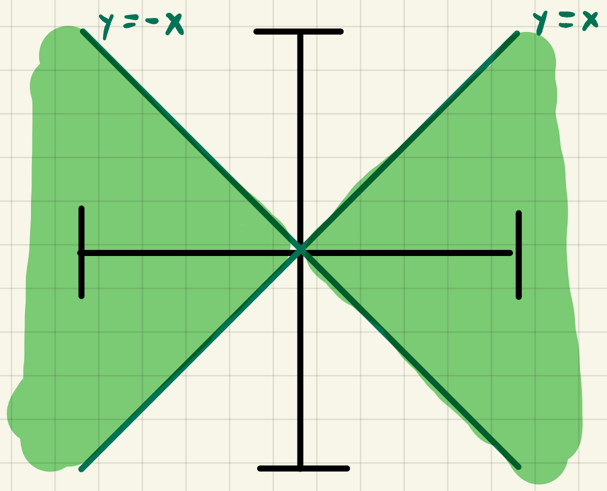
$e^1 = 2 + 2x + y \Rightarrow y = e^1 - 2x - 2$

$(\approx 2{,}718)$

$z = 2 = \ln(2 + 2x + y)$ ger...

$e^2 = 2 + 2x + y \Rightarrow y = e^2 - 2 - 2x$

b) $x^2 \geq y^2$ är definitionsmängden i det här fallet då roten ur ett negativt tal är odefinerat.



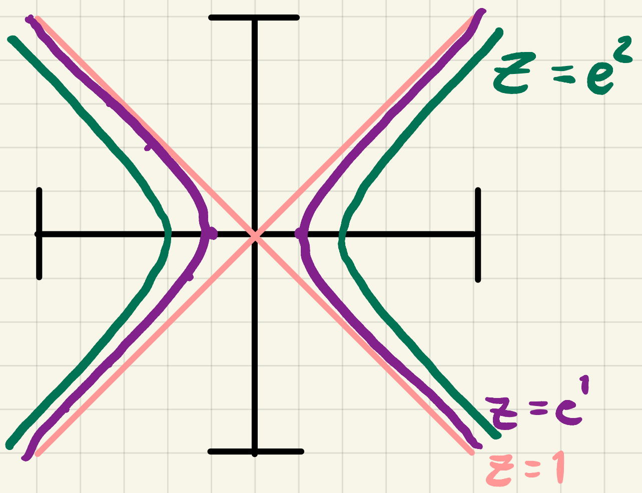

Detta är alltså en sluten mängd där det gröna området visar var olikheten uppfylls.

SEM1


David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

4b) Några nivåkurvor:

$z = 1 = e^{\sqrt{x^2-y^2}}$ ger... $(\underbrace{\ln(1)}_{(=0)})^2 = (\sqrt{x^2-y^2})^2 \Rightarrow y^2 = x^2$




$z = e^1 = e^{\sqrt{x^2-y^2}}$ ger...

$(\underbrace{\ln(e)}_{(=1)})^2 = (\sqrt{x^2-y^2})^2 \Rightarrow 1 = x^2 - y^2 \Rightarrow y^2 = x^2 - 1$

$z = e^2 = e^{\sqrt{x^2-y^2}}$ ger... $(\underbrace{\ln(e^2)}_{(=2)})^2 = (\sqrt{x^2-y^2})^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = x^2 - y^2 \Rightarrow y^2 = x^2 - 4$

5) För att en funktion ska vara kontinuerlig i $(a,b)$ krävs det att gränsvärdet i punkten ska vara lika med funktionsvärdet i punkten, alltså:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

a) $\begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ vilket ger gränsvärdet... $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Vi undersöker om funktionen $f$ är kontinuerlig i punkten $(0,0)$ vilket den är om $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

Detta kan vi ta reda på genom att gå över till polära koordinater $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$

Detta innebär att $r \to 0$ är samma som $(x,y) \to (0,0)$

SEM1


David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5a)

Vi undersöker nu om gränsvärdet existerar enligt nedan:

David Östling
981025-9532
CMETE4
dostl@kth.se

SEM 1

$$(x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^2}{\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta + 2r^2\cos\theta\sin\theta + r^2\sin^2\theta}{\sqrt{r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{(=1,\ \text{trig. ettan})}}} = \frac{r^2(\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)}{\underbrace{\sqrt{r^2}}_{(=r)}} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \underbrace{r(1 + 2\cos\theta\sin\theta)}_{} = 0 \quad \longrightarrow \quad f \text{ är kontinuerlig i } (0,0)$$

(Med detta ser vi att när r går mot 0 så går hela uttrycket mot 0.)

Eftersom nämnaren av $f$ är $\sqrt{x^2+y^2}$ och $f$ är kontinuerlig i $(0,0)$ samt att det inte finns några andra värden på $(x,y)$ som skulle kunna resultera i nolldivision så tyder det på att funktionen är kontinuerlig i alla punkter (då ett negativt tal i kvadrat alltid blir positivt). Kontinuiteten i $(0,0)$ medför alltså i det här fallet att $f$ är kontinuerligt i alla punkter.

SEM 1
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5a) Svar: $f$ är kontinuerligt i alla punkter

b) Nu gör vi samma sak som i a) för att undersöka om gränsvärdet existerar och för att avgöra om $g$ är kontinuerlig i $(x,y)=(0,0)$ → (det enda som kan leda till nolldiv. i det här fallet är ifall $(x,y)=(0,0)$)

$$\begin{cases} \dfrac{y^2+x^3+x^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

vilket ger gränsvärdet ... $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Vi använder oss återigen av polära koordinater enligt nedan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2+x^3+x^4}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^3+(r\cos\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\theta + r^3\cos^3\theta + r^4\cos^4\theta}{r^2(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{(=1,\ \text{trig. ettan})})} = \lim_{r\to 0} \sin^2\theta + r\cos^3\theta + r^2\cos^4\theta =$$

$$= \lim_{r\to 0} \sin^2\theta + r\cos^3\theta + r^2\cos^4\theta = \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta + r\cos^4\theta) + \underbrace{\sin^2\theta}_{(\text{skild från } r)} \neq 0$$

Vi ser nu att $g$ inte är kontinuerlig i $(0,0)$ då $\sin^2\theta$ står skilt från $r$ och att därmed

$$\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta + r\cos^4\theta) + \sin^2\theta \neq 0.$$

5b) Lite likt uppg. a) så har $g$ en nämnare som är $x^2+y^2$. Detta medför i det här fallet att funktionen $g$ kommer vara kontinuerlig i alla andra punkter då vad vi än stoppar in i funktionen $g$ (så länge $(x,y) \neq (0,0)$) så kommer det inte leda till nolldivision vilket är odefinerat.

Svar: $g$ är kontinuerlig i alla punkter
UTOM $(x,y)=(0,0)$, dvs. origo.

SEM1
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se