Institutionen för Matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Läsåret 2021-2022

Inlämningsuppgifter till Seminarium 6

Lösningar på dessa uppgifter (1-5 nedan) ska lämnas in i form av en pdf-fil via canvas senast måndagen den 28 februari 2022 kl 08:00. Lösningar som lämnas in för sent eller som lämnas in på något annat sätt än via canvas kommer ej att beaktas. Lösningarna ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå dina lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar som införs och förklara hur du resonerar. Alla beräkningar förväntas vara korrekta. Kontrollera dina räkningar innan du lämnar in dina lösningar.

Det är tillåtet att samarbeta och diskutera med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Det räknas som fusk att lämna in avskrivna lösningar.

Inlämningsuppgifterna ska skickas in via canvas (som en PDF-fil; skicka in samtliga uppgifter i EN fil) under ”Uppgifter” i menyn på canvassidan. Observera att man måste vara kursregistrerad och inloggad för att kunna skicka in sina lösningar.

Uppgift 1. Låt γ vara skärningen av planet $x + y + z = 1$ med cylindern $x^2 + y^2 = 2$ i $\mathbb{R}^3$, orienterad moturs sett från positiva z-axelns topp. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$ på två olika sätt:

(a) Med hjälp av en parametrisering av γ
(b) Med hjälp av Stokes sats

Uppgift 2. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

ut genom sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 49$.

Uppgift 3. Temperaturen i en punkt (x, y) i enhetskvadraten $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ ges av funktionen $T(x, y)$ som uppfyller att $T(1/2, 1/2) = 10$ och

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1/2, 1/2) = 3 \quad \text{och} \quad \frac{\partial T}{\partial y}(1/2, 1/2) = -1.$$

Hur förändras temperaturen om man flyttar sig från punkten $(1/2, 1/2)$ ett litet stycke s i riktning mot origo? I vilken riktning ska man flytta sig från $(1/2, 1/2)$ för att temperaturen ska öka så mycket som möjligt? Hur mycket ökar temperaturen då?

Uppgift 4. Bestäm värdemängden till funktionen $f(x, y) = x+xy$ om definitionsmängden ges av olikheten $2x^2 + y^2 \leq 4$.

Uppgift 5. Betrakta ”glasstruten” K som ges av olikheterna
$x^2 + y^2 \leq z^2 \leq 2 - x^2 - y^2$ och $z \geq 0$.

(a) Beräkna volymen av K

(b) Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (0, 0, z)$ ut från K

Extra arbetsmaterial till Seminarium 6

Vid Seminarium 6 kommer lösningarna till inlämningsuppgifterna ovan att diskuteras. Dessutom kan några av nedanstående uppgifter behandlas. Lösningar på dessa ska dock inte lämnas in i förväg.

Uppgift 6. Använd Stokes sats för att beräkna $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F} = (-x^3, -z^3, y^3)$ och γ är skärningen av cylindern $y^2 + z^2 = 1$ och planet $x + 2y + 2z = 3$, positivt orienterad betraktad från positiva x-axelns topp.

Uppgift 7. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ om $\mathbf{F} = (e^{x+y}+y^2+x+1, e^{x+y}+x^2+x+2)$ och γ är ellipsen $2x^2 + 3y^2 = 6$.

Uppgift 8. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^2, x^2+y^2, x^2+y^2+z^2)$ ut från området K givet av olikheterna $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.