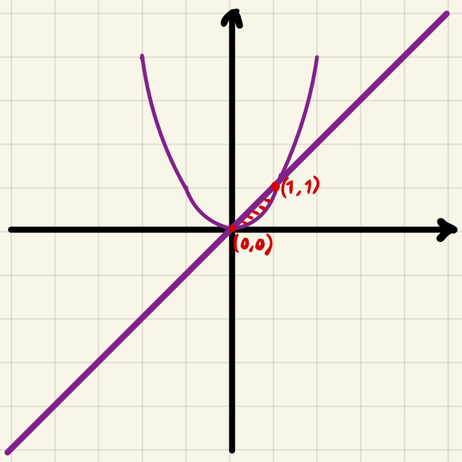
Sem 4 Flervariabelsanalys

SEM4
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

1) Vi tar först fram D enligt:

Givet: $x^2 \leq y \leq x$ ⟶ Vi ritar ut detta nedan



⟶ Vi ser här att $0 \leq x \leq 1$

Nu har vi alltså $D: \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{matrix} \right\}$

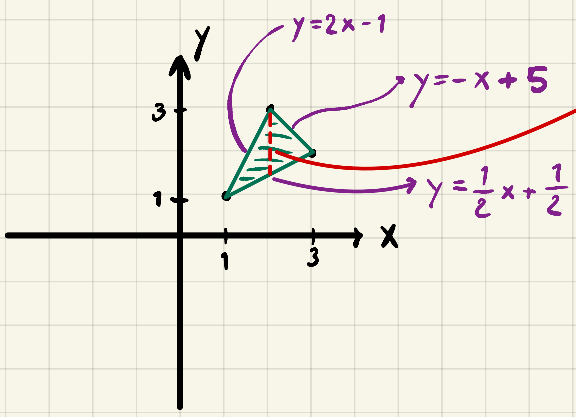
Vi löser nu dubbelintegralen enligt:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^2 y \, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2 (x)^2}{2} - \frac{x^2 (x^2)^2}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 - x^6 \, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} - \left(\frac{0^5}{5} + \frac{0^7}{7}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{35}\right) = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} //$$

Svar: $\iint_D f(x,y)\, dx dy = \frac{1}{35} //$

2) Vi börjar med att skissa T enligt:

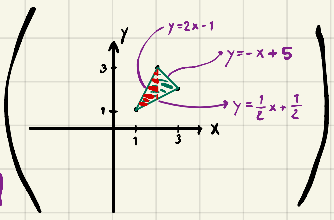


Vi delar upp området i två delområden. Vi väljer att sätta y-integralen innerst och får:

Dolområde 1:

$1 \leq x \leq 2$

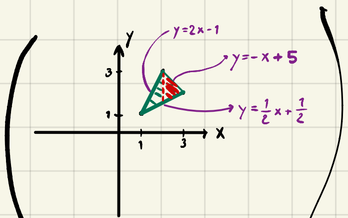
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq y \leq 2x - 1$



Dolområde 2:

$2 \leq x \leq 3$

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \leq y \leq -x + 5$



David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM4

2) Detta ger alltså:

$$\iint_T (x+y)\,dx\,dy = \overbrace{\int_1^2\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2x-1}(x+y)\,dy\,dx}^{\text{område 1}} + \overbrace{\int_2^3\int_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-x+5}(x+y)\,dy\,dx}^{\text{område 2}} = \int_1^2\left[\frac{y^2}{2}+xy\right]_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{2x-1}dx \;+$$

$$\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{2} \qquad =$$

$$\int_2^3\left[\frac{y^2}{2}+xy\right]_{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}^{-x+5}dx = \int_1^2\left(\frac{(2x-1)^2}{2}+x(2x-1)\right)-\left(\frac{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2}{2}+x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right)dx + \int_2^3\left(\frac{(-x+5)^2}{2}+x(-x+5)\right)-\left(\frac{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2}{2}+x\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \int_1^2\left(2x^2-2x+\frac{1}{2}+2x^2-x\right)-\left(\frac{x^2+2x+1}{8}+\frac{4x^2+4x}{8}\right)dx + \int_2^3\left(\frac{x^2-10x+25}{2}+\left(\frac{-2x^2+10x}{2}\right)\right)-\left(\frac{x^2+2x+1}{8}+\frac{4x^2+4x}{8}\right)dx =$$

$$= \int_1^2\left(4x^2-3x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{5x^2+6x+1}{8}\right)dx + \int_2^3\left(\frac{-4x^2+100}{8}\right)-\left(\frac{5x^2+6x+1}{8}\right)dx =$$

$$= \int_1^2 \frac{27x^2-30x+3}{8}\,dx + \int_2^3\left(\frac{-9x^2-6x+99}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\left[\frac{27x^3}{3}-\frac{30x^2}{2}+3x\right]_1^2 + \frac{1}{8}\left[-\frac{9x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+99x\right]_2^3 =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{27(2)^3}{3}-\frac{30(2)^2}{2}+3(2)\right)-\left(\frac{27(1)^3}{3}-\frac{30(1)^2}{2}+3(1)\right)\right) + \frac{1}{8}\left(\left(-\frac{9(3)^3}{3}-\frac{6(3)^2}{2}+99(3)\right)-\right.$$

$$\left.-\left(-\frac{9(2)^3}{3}-\frac{6(2)^2}{2}+99(2)\right)\right) = \frac{1}{8}(21)+\frac{1}{8}(27) = \frac{48}{8} = 6$$

Svar: $\iint_T (x+y)\,dx\,dy = 6$

3) Givet av uppgiften vet vi att:

$$y^2 \le z \le 4-x^2$$

För att nu ta reda på vilka värden x och y kan anta gör vi enligt följande:

Vi vet att $0 \le y^2 \le z$ då y är kvadrerat (vilket värde vi än sätter y till så kommer y^2 alltid returnera ett positivt tal eller 0).

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

SEM4

3) Med detta vet vi att om z är positivt eller 0 så kan x^2 som störst vara $x^2=4$ då $4-4=0$.
Om $x^2>4$ så uppfylls inte olikheten $y^2 \leq z \leq 4-x^2$.

Därmed ges alla värden som x kan anta av:

$x^2=4$ ger... $x=\sqrt{4}=\pm 2$ ger... $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-2 \end{cases}$

Alltså: $-2 \leq x \leq 2$

Värdena på y ges av $y^2 \leq z \leq 4-x^2$ och $4-x^2$ som störst kan bli $\overset{(x=0)}{4}$
så vet vi att $y^2=4$ vilket ger $y=\sqrt{4}=\pm 2$ ger... $\begin{cases} y_1=2 \\ y_2=-2 \end{cases}$

Alltså ges y av:

$-2 \leq y \leq 2$

Nu sammanställer vi allt och får att K ges av:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \\ y^2 \leq z \leq 4-x^2 \end{cases}$$

Nu beräknar vi följande trippelintegral med gränserna ovan och får:

$$\iiint_K 1\,dV = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{y^2}^{4-x^2} 1\,dz\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\Big[z\Big]_{y^2}^{4-x^2} dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 4-x^2-y^2\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\left[4x-\frac{x^3}{3}-xy^2\right]_{-2}^{2} dy =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(\left(4(2)-\frac{(2)^3}{3}-(2)y^2\right)-\left(4(-2)-\frac{(-2)^3}{3}-(-2)y^2\right)\right)dy = \int_{-2}^{2} 16-\frac{16}{3}-4y^2\,dy = \left[16y-\frac{16}{3}y-\frac{4y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left(\left(16(2)-\frac{16}{3}(2)-\frac{4(2)^3}{3}\right)-\left(16(-2)-\frac{16}{3}(-2)-\frac{4(-2)^3}{3}\right)\right) = \left(\frac{\overbrace{96}^{(=32)}}{3}-\frac{32}{3}-\frac{32}{3}\right)-\left(-\frac{\overbrace{96}^{(=32)}}{3}+\frac{32}{3}+\frac{32}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{32}{3}\right)-\left(-\frac{32}{3}\right) = \frac{64}{3} \,//$$

Svar: Volymen av området K i xyz-rummet är $\frac{64}{3}$ v.e.

SEM4
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

4) För att beräkna integralen tar vi hjälp av elliptiska koordinater enligt:

$$\begin{cases} x = a + Ar\cos\theta \\ y = b + Br\sin\theta \\ dxdy = ABr\,dr\,d\theta \end{cases} \quad \text{(Skalfaktor)}$$

Formeln för en ellips: $\left(\frac{x-a}{A}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{B}\right)^2 = 1$

Nu skriver vi om den givna ellipsen $2x^2+3y^2 \leq 6$ enligt:

$$\frac{2x^2}{6} + \frac{3y^2}{6} = 1 \quad \text{ger...} \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \quad \text{ger...} \quad \left(\frac{x}{\underbrace{\sqrt{3}}_{A}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\underbrace{\sqrt{2}}_{B}}\right)^2 = 1$$

Då vet vi att våra elliptiska koordinater blir:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\,r\cos\theta \\ y = \sqrt{2}\,r\sin\theta \\ dxdy = \sqrt{3}\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

$(a=0,\ b=0)$

Vi tar nu fram alla värden som r kan anta enligt:

$$2\left(\sqrt{3}\,r\cos\theta\right)^2 + 3\left(\sqrt{2}\,r\sin\theta\right)^2 = 6$$

ger...

$$6r^2\cos^2\theta + 6r^2\sin^2\theta = 6$$

ger...

$$6r^2\underbrace{\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}_{=1,\ \text{trig. ettan}} = 6$$

ger...

$$r^2 = \frac{6}{6}$$

ger...

$$r = \sqrt{1} \quad \text{ger...} \quad r = \pm 1 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

SEM4
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

4) Eftersom radien inte kan vara negativ så kan den som minst vara 0 (inte -1). Därmed ges r av:

$$0 \leq r \leq 1$$

Eftersom att vi jobbar med en hel ellips vet vi att θ ges av:

$$0 \leq \theta \leq \underbrace{2\pi}_{\text{(helt varv)}}$$

Nu har vi allt som krävs för att beräkna integralen, vi gör så enligt nedan:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1+\sqrt{3}\,r\cos\theta}{1+2(\sqrt{3}\,r\cos\theta)^2+3(\sqrt{2}\,r\sin\theta)^2}\overbrace{\sqrt{3}\sqrt{2}\,r}^{\text{(Skalfaktor)}}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{(1+\sqrt{3}\,r\cos\theta)\sqrt{6}\,r}{1+6r^2\cos^2\theta+6r^2\sin^2\theta}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{(1+\sqrt{3}\,r\cos\theta)\sqrt{6}\,r}{1+6r^2}\,dr\,d\theta =$$

$$= \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r+\sqrt{3}\,r^2\cos\theta}{1+6r^2}\,dr\,d\theta = \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{6r-\sqrt{3}\cos\theta}{6r^2+1}\,dr + \frac{\cos\theta}{2\sqrt{3}}\int_0^1 1\,dr\right)d\theta =$$

$$= \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6}\left(6\int_0^1 \frac{r}{6r^2+1}\,dr - \sqrt{3}\cos\theta\int_0^1 \frac{1}{6r^2+1}\,dr\right) + \frac{\cos\theta}{2\sqrt{3}}\int_0^1 1\,dr\right)d\theta =$$

$$= \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6}\left(6\int_0^1 \frac{r}{\underbrace{6r^2+1}_{}}\,dx - \sqrt{3}\cos\theta\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{6r^2+1}\,d}_{}\right) + \frac{\cos\theta}{2\sqrt{3}}\int_0^1 1\,dr\right)d\theta =$$

Vi sätter detta som u och löser integralen...

Vi sätter $u = \sqrt{6}\,r$ och löser integralen.

$$= \sqrt{6}\int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{\ln(6r^2+1)}{12} - \frac{\cos\theta\tan^{-1}(\sqrt{6}\,r)}{2\sqrt{3}\sqrt{6}} + \frac{\cos\theta\, r}{2\sqrt{3}}\right]_0^1\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\sqrt{6}\left(-\frac{\sqrt{6}\tan^{-1}(\sqrt{6})\cos\theta}{12\sqrt{3}} + \frac{\cos\theta}{2\sqrt{3}} + \frac{\ln 7}{12}\right)d\theta =$$

$$= \left[\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} - \frac{\tan^{-1}(\sqrt{6})}{2\sqrt{3}}\right)\sin\theta + \frac{\ln 7\,\theta}{2\sqrt{6}}\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\ln 7}{\sqrt{6}} \,//$$

Svar: $\dfrac{\pi\ln 7}{\sqrt{6}}$ a.e.

5) a) Cylindriska koordinater

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

SEM4

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

Skalfaktor = r

Vi vet att $r=\sqrt{x^2+y^2}$, därmed kan den givna olikheten skrivas (i cylindriska koordinater) som:

$r \le z \le \sqrt{2-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}$ ger... $r \le z \le \sqrt{2-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}$ ger...

... $r \le z \le \sqrt{2-r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$ ger... $r \le z \le \sqrt{2-r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1,\text{ trig. ettan}}}$ ger...

... $r \le z \le \sqrt{2-r^2}$ //

Vi tar nu fram alla värden som r kan vara enligt:

$r=\sqrt{2-r^2}$ ger... $r^2=2-r^2$ ger... $r^2=\frac{2}{2}$ ger... $r=\sqrt{1}$, $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Eftersom radien inte kan vara negativ så kan den som minst vara 0 (inte -1). Därmed ges r av:

$0 \le r \le 1$

Slutligen så tar vi reda på vilka värden θ kan anta. Då både $\sqrt{x^2+y^2}$ och $\sqrt{2-x^2-y^2}$ snurrar ett helt varv runt z-axeln

Så vet vi att θ ges av:

$0 \le \theta \le \underbrace{2\pi}_{\text{(helt varv)}}$

Nu sammanställer vi allt och får att K ges av:

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ r \le z \le \sqrt{2-r^2} \end{cases}$$

↓ ↓ ↓

SEM4
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5)a) Nu kan vi beräkna integralen enligt:

(Skalfaktor för cyl. koordinater)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^{\sqrt{2-r^2}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\left[z^2 r\right]_r^{\sqrt{2-r^2}} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\left(\left((\sqrt{2-r^2})^2 r\right) - \left((r)^2 r\right)\right) dr\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{1}{2}\left(2r-2r^3\right) dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r-r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left[2r^2-r^4\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\left(\left(2(1)^2-(1)^4\right)-0\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\,d\theta = \left[\frac{x}{4}\right]_0^{2\pi} = \left(\left(\frac{2\pi}{4}\right)-0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Svar: Med hjälp av cylindriska koordinater får vi $\iiint_K z\,dV = \frac{\pi}{2}$ v.e.

b) Sfäriska koordinater

$$\begin{cases} x = R\sin\varphi\cos\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$

Skalfaktor $= R^2\sin\varphi$

Vi skriver om den givna olikheten i sfäriska koordinater och får:

$$\sqrt{(R\sin\varphi\cos\theta)^2 + (R\sin\varphi\sin\theta)^2} \le R\cos\varphi \le \sqrt{2-(R\sin\varphi\cos\theta)^2-(R\sin\varphi\sin\theta)^2}$$

ger...

$$\sqrt{R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta} \le R\cos\varphi \le \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - R^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$

ger...

$$\sqrt{\sin^2\varphi\left(R^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1,\ \text{trig. ettan}}\right)} \le R\cos\varphi \le \sqrt{2-\sin^2\varphi\left(R^2\underbrace{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}_{=1,\ \text{trig. ettan}}\right)}$$

ger...

$$\sqrt{R^2\sin^2\varphi} \le R\cos\varphi \le \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi}$$

ger...

$$R\sin\varphi \le R\cos\varphi \le \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi}$$

SEM4
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) b) Vi tar nu fram alla värden som R kan anta enligt:

$R\cos\varphi = \sqrt{2-R^2\sin^2\varphi}$ ger... $R^2\cos^2\varphi = 2-R^2\sin^2\varphi$ ger...

... $R^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1,\text{ trig. ettan}}=2$ ger... $R=\sqrt{2}$

R ges alltså av:

$0 \le R \le \sqrt{2}$

Vi tar nu fram alla värden som φ kan anta genom följande:

$R\sin\varphi = R\cos\varphi$ ger... $\underbrace{\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}_{=\tan\varphi} = \frac{R}{\underbrace{R}_{=1}}$ ger... $\varphi = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

Detta betyder att φ ges av:

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

Slutligen så tar vi reda på vilka värden θ kan anta. Då både $\sqrt{x^2+y^2}$ och $\sqrt{2-x^2-y^2}$ snurrar ett helt varv runt z-axeln (som i a)) så vet vi att θ ges av:

$0 \le \theta \le \underbrace{2\pi}_{\text{(helt varv)}}$

Nu sammanställer vi allt och får att K ges av:

$$\begin{cases} 0 \le R \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

SEM4
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) b) Nu kan vi beräkna integralen enligt:

(Skalfaktor för sfäriska koordinater)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}} R\cos\varphi \, \underbrace{R^2\sin\varphi}\, dR\,d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{R^4}{4}\cos\varphi\sin\varphi\right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\left(\frac{(\sqrt{2})^4}{4}\cos\varphi\sin\varphi\right) - 0\right) d\varphi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta \longrightarrow$$ Vi substituerar och sätter $u = \sin\varphi \longrightarrow$

$\longrightarrow \frac{du}{d\varphi} = \cos\varphi$ ger... $d\varphi = \frac{du}{\cos\varphi}$ ger... $\begin{cases} u_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_2 = \sin 0 = 0 \end{cases}$ ger... $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\varphi\, u\left(\frac{du}{\cos\varphi}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u\,du\,d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - 0\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta = \left[\frac{x}{4}\right]_0^{2\pi} = \left(\frac{2\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

Svar: Med hjälp av sfäriska koordinater får vi $\iiint_K z\,dV = \frac{\pi}{2}$ v.e.