Institutionen för Matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Läsåret 2021-2022

Inlämningsuppgifter till Semiarium 2

Lösningar på dessa uppgifter (1-5 nedan) ska lämnas in i form av en pdf-fil via canvas senast måndagen den 31 januari 2022 kl 8:00. Lösningar som lämnas in för sent eller som lämnas in på något annat sätt än via canvas kommer ej att beaktas. Lösningarna ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå dina lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar som införs och förklara hur du resonerar. Alla beräkningar förväntas vara korrekta. Kontrollera dina räkningar innan du lämnar in dina lösningar.

Det är tillåtet att samarbeta och diskutera med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Det räknas som fusk att lämna in avskrivna lösningar.

Inlämningsuppgifterna ska skickas in via canvas (som en PDF-fil; skicka in samtliga uppgifter i EN fil) under ”Uppgifter” i menyn på canvassidan. Observera att man måste vara kursregistrerad och inloggad för att kunna skicka in sina lösningar.

Uppgift 1. Låt $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^3)$.

(a) Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $z = f(x,y)$ i punkten $(1,-1,0)$.
(b) Bestäm den linjära approximationen (dvs Taylorpolynomet av grad 1) till f kring punkten $(1,-1)$ och bestäm ett närmevärde till $f(4/5,-4/5)$.

Uppgift 2. Låt $g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^4$. Bestäm en ekvation för tangenplanet i punkten $(1,2,-1)$ till nivåytan $g(x,y,z) = 10$.

Uppgift 3. Låt $f(x,y) = x^3 + x^2y - y^2$. Bestäm alla partiella andraderivator till f i punkten $(1,-1)$. Verifiera att de blandade andraderivatorna är lika.

Uppgift 4. Låt $f(x,y) = e^{x^2-y^2+xy+1}$ och låt $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$.

(a) Beräkna riktningsderivatan $D_{\mathbf{u}}f(1,2)$,
(b) Avgör om det finns någon riktning $\mathbf{v}$ sådan att $D_{\mathbf{v}}f(1,2) = 0$.
(c) Bestäm en ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan $f(x,y) = 1$ i punkten $(1,2)$.

Uppgift 5. Låt funktionerna f och g vara C^2 överallt och relaterade genom sambandet $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Om $\frac{\partial g}{\partial r}(2,\pi/3) = 1$ och $\frac{\partial g}{\partial \theta}(2,\pi/3) = 2$, beräkna med hjälp av kedjeregeln $\frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3})$ och $\frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{3})$.

Extra arbetsmaterial till Seminarium 2

Vid Seminarium 2 kommer lösningarna till inlämningsuppgifterna ovan att diskuteras. Dessutom kan några av nedanstående uppgifter behandlas. Lösningar på dessa ska dock inte lämnas in i förväg.

Uppgift 6. Betäm en ekvation för tangenten i punkten $(1, 2)$ till den nivåkurva av funktionen $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2}$ som passerar genom denna punkt.

Uppgift 7. Skärningen mellan två ytor kan ge en kurva i rummet. Exempelvis ger skärningen mellan funktionsgraferna för $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $g(x, y) = 20 + x - y$ ett kägelsnitt, dvs en andragradskurva C som ligger i planet $z = 20 + x - y$.

(a) Bestäm tangentplanen till de båda graferna som nämns ovan i punkten $(x, y, z) = (5, 12, 13)$ och bestäm normalvektorer till de båda graferna i samma punkt.

(b) Hur kan man veta att tangentlinjen till kägelsnittet är vinkelrätt mot båda grafernas normalvektorer?

(c) Bestäm tangentlinjen till kurvan C i punkten $(x, y, z) = (5, 12, 13)$, exempelvis med hjälp av kryssprodukt.

Uppgift 8. En funktion $f(x, y)$ kallas harmonisk om den uppfyller Laplaces ekvation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(a) Visa genom att använda kedjeregeln att

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (a^2 + b^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)$$

om

$$\begin{cases} u = ax - by \\ v = bx + ay \end{cases}$$

där a och b är konstanter.

(b) Använd (a) för att visa att funktionen $f(x, y) = e^{2x+3y} \sin(3x - 2y)$ är harmonisk.

(c) Visa att produkten av två hyarmoniska funktioner är harmonisk om deras gradienter är vinkelräta mot varandra i varje punkt.

Uppgift 9. Kurvan C med ekvation

$$y^2 = x^3 + x^2$$

kan parametriseras genom $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ där t är en reell parameter.

(a) Skissera kurvan C eller plotta den med lämplig programvara

(b) Kontrollera att $\mathbf{r}(t)$ ligger på kurvan C för alla t. Hur kan man vara säker på att parametriseringen når alla punkter på C?

(c) Diskutera varför $\mathbf{r}'(t)$ är vinkelrät mot gradienten $\nabla f(\mathbf{r}(t))$ om $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$.