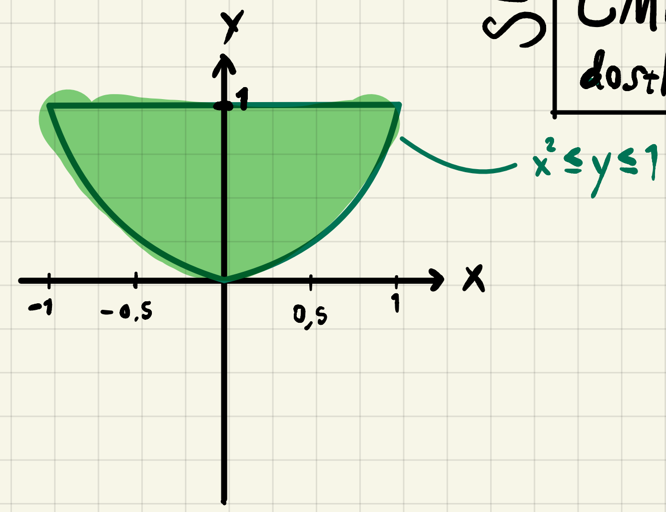
Sem 3 Flervariabelsanalys

SEM3
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

1) a) Vi börjar med att skissa D enligt:



Nu tar vi fram de partiella derivatorna till $f(x,y)$ enligt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x - 1$$

Om vi nu sätter dessa i ett ekv. system där varje partiell derivata är lika med 0 så kommer vi finna en kritisk punkt enligt:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x - 1 = 0 \end{cases}$$

Detta löser vi genom att gaussa

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (+2R2) \\ \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} (\frac{1}{3}) \\ (-1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ (+2R1) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array}\right] //$$

Vi finner alltså en kritisk punkt i $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

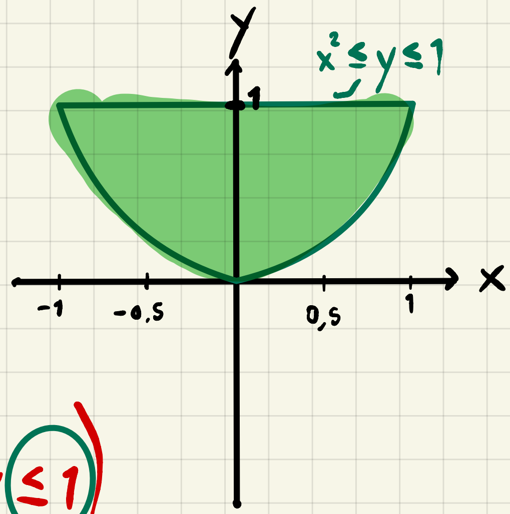
Denna ligger i mängden då $x^2 \le y \le 1$, alltså $\underbrace{\frac{1}{9}}_{(\frac{1}{3})^2} \le \frac{2}{3} \le 1$ ✓

Detta ger funktionsvärdet:

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{9}\right) - \frac{6}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3} //$$

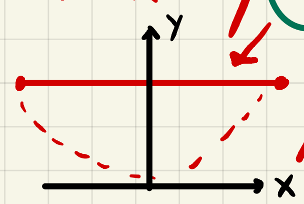
Eftersom de partiella derivatorna är kontinuerliga $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ så saknar vi singulära punkter.

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM3



1) För att undersöka randpunkter så sätter vi först $y=1$ och sätter in detta i f enligt:

(från $x^2 \leq y \leq 1$)



$$f(x,1) = x^2 + 1^2 - x \cdot 1 - 1 = x^2 - x = g(x) \quad \text{där} \quad -1 \leq x \leq 1$$

Vi tar nu fram vad $g'(x) = 0$ ger oss:

$g'(x) = 2x - 1$ ger... $2x - 1 = 0$ vilket i sin tur ger... $x = \frac{1}{2}$

Vi stoppar nu in $x = \frac{1}{2}$ i $g(x)$ och får:

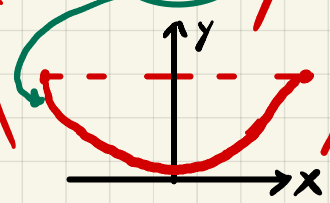
$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{4} = -\tfrac{1}{4} \longleftarrow -\tfrac{1}{3} < -\tfrac{1}{4}$$

Vi provar nu att stoppa in ändpunkterna -1 och 1 i $g(x)$ och får:

$$g(-1) = (-1)^2 - (-1) = 1+1 = 2 \longleftarrow \left(2 > -\tfrac{1}{3}\right) \quad \text{och} \quad g(1) = (1)^2 - (1) = 0$$

Nu undersöker vi x^2 delen av området och gör likt ovan vi sätter först $y = x^2$ och sätter in detta f enligt:

(från $x^2 \leq y \leq 1$)



$$f(x,x^2) = x^2 + (x^2)^2 = x^2 + x^4 - x \cdot x^2 - x^2 = x^4 - x^3 = q(x)$$

Vi tar nu fram vad $q'(x) = 0$ ger oss:

$q'(x) = 4x^3 - 3x^2$ ger... $4x^3 - 3x^2 = 0$ vilket i sin tur ger... $x(4x^2 - 3x) = 0$

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

SEM3

1) Detta innebär att $x_1 = 0$ och att resterande x ges av:

$4x^2 - 3x = 0$ ger... $x(4x-3) = 0$ ger... $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{3}{4}$

Vi sätter nu in dessa i $q(x)$ och får:

$q(0) = 0^4 + 0^3 = 0$ och... $q\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{81}{256} - \frac{108}{256} = \frac{-27}{256} \longrightarrow \left(-\frac{1}{3} < -\frac{27}{256}\right)$

Vi provar nu att stoppa in ändpunkterna -1 och 1 i $q(x)$ och får:

$q(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 = 2 \longrightarrow (2 = 2)$ och... $q(1) = 1^4 - 1^3 = 0$

Svar: Funktionens minsta värde är $-\frac{1}{3}$, minsta värdet antas i punkten $(x,y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Funktionens största värde är 2, största värdet antas i punkten $(x,y) = (-1, 1)$

SEM3
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

2) För att avgöra om ekvationen $x^2+y^3+z^3-2x^2yz=12$ implicit definerar z som funktion av (x,y) i en omgivning av punkten $(1,2,-1)$ så använder vi den implicita funktionssatsen enligt:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) \neq 0 \longrightarrow$$ ifall detta gäller vet vi att ovan gäller

Nu tar vi fram $\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1)$ enligt:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,2,-1) = 3(-1)^2-2(1)^2(2) = -1 \neq 0 \; \boxed{\checkmark}$$ Det går att lösa ut z

Nu deriverar vi $z=f(x,y)$ implicit med avseende på x och y enligt:

$z=f(x,y)$ | Derivatan av x: $2x+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-4xyz-2x^2y\frac{\partial z}{\partial x}$

$z=f(x,y)$ | Derivatan av y: $3y^2+3z^2\frac{\partial z}{\partial y}-x^2 2z-2x^2y\frac{\partial z}{\partial y}$

SEM3
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

2) Om vi nu sätter in punkten (1,2) i derivatorna av x och y ovan får vi:

Vi vet detta från: $x^2+y^3+z^3-2x^2yz-12=0$

Derivatan av x vid (1,2,-1): $2(1)+3(-1)^2\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)-4\cdot1\cdot2\cdot-1-2(1)^2\cdot 2\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)$ ger... $10-1\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=0 \rightarrow$

$\longrightarrow$ Detta ger i sin tur... $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=\frac{-10}{-1}=10$ //

$z=f(x,y)$

Vi vet detta från: $x^2+y^3+z^3-2x^2yz-12=0$

Derivatan av y vid (1,2,-1): $3(2)^2+3(-1)^2\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)-(1)^2\cdot2\cdot-1-2(1)^2\cdot2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)$ ger... $14-1\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)=0 \rightarrow$

$\longrightarrow$ Detta ger i sin tur... $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)=\frac{-14}{-1}=14$ //

Svar: $\frac{\partial z}{\partial x}(1,2)=10$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,2)=14$ och $x^2+y^3+z^3-2x^2yz=12$ implicit definerar z som funktion av (x,y) i en omgivning av punkten $(1,2,-1)$ //

3) Vi börjar med att ta fram alla partiella till f enligt:

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2\\ \frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3\end{cases}$$

Alla stationära punkter till f ges av $\begin{cases}f_x=0,\\ f_y=0\end{cases}$, detta tillämpar vi nu nedan:

$$\begin{cases}2x-2=0 \text{ ger... } x=\frac{2}{2}=1 \text{ //}\\ 3y^2-3=0 \text{ ger... } y=\sqrt{\left(\frac{3}{3}\right)}=\pm1\end{cases} \longrightarrow \text{Detta ger 2 punkter...} \rightarrow (1,1),(1,-1)$$

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se
SEM3

3) För att avgöra punkternas karaktär så tar vi hjälp av taylorutveckling enligt:

$$P_2(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right)$$

(Notera att $f_x(a,b)(x-a) = 0$ och $f_y(a,b)(y-b) = 0$ då (a,b) är en kritisk punkt.)

Vi kan nu substituera $\begin{cases} h = x-a \\ k = y-b \end{cases}$ vilket gör att vi kan skriva om taylorpolynomet som:

$$P_2(x,y) = P_2(h,k) = f(a,b) + \frac{1}{2}\left(Q(h,k)\right)$$ vilket i sin tur kan omskrivas till...

$$Q(h,k) = f_{xx}(a,b)h^2 + 2f_{xy}(a,b)hk + f_{yy}(a,b)k^2$$

Värdet på Q hjälper oss klassificera (a,b)

Vi börjar med att ta fram följande partiella dubbelderivator till f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

Detta ger vid insättning tillsammans med (1,1) i Q(h,k) ovan!

$$Q(h,k) = 2h^2 + 0 + 6(1)k^2 = 2h^2 + 6k^2 \quad (\text{punkt } (1,1))$$

Nu ser vi att $Q > 0$ för alla $(h,k) \neq (0,0)$ vilket tyder på att punkten (1,1) är en lokal minimipunkt (positivt definit)

SEM3
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

3) Nu stoppar vi in andra kritiska punkten vi fick enligt:

$$Q(h,k) = 2h^2 + 0 + 6(-1)k^2 = 2h^2 - 6k^2 \quad \text{(punkt } (1,-1))$$

Nu ser vi att $Q > 0$ för vissa $Q(h,k) \neq (0,0)$ och $Q < 0$ för vissa $Q(h,k) \neq (0,0)$ detta tyder på att punkten $(1,-1)$ är en sadelpunkt (indefinit)

f antar inget största värde men den antar ett minsta värde vid $f(1,1) = 1^3 + 1^2 - 2\cdot 1 - 3 \cdot 1 = -3$

(lokal minimipunkt)

Svar: De kritiska punkterna till f består av en sadelpunkt $(1,-1)$ och en lokal minimipunkt $(1,1)$. Ja, f antar ett minsta värde i $f(1,1) = -3$

4) För att hitta de kritiska punkterna använder vi Lagranges multiplikatormetod. Vi söker därmed lösningar till nedan:

något tal λ

$$\nabla f = \lambda \nabla g \qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

Vi tar nu fram ∇f och ∇g:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{dx} = 2x \\ \dfrac{df}{dy} = 1 \\ \dfrac{df}{dz} = 1 \end{cases} \text{ ger... } \nabla f = (2x, 1, 1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dg}{dx} = 2x \\ \dfrac{dg}{dy} = 2y \\ \dfrac{dg}{dz} = 2z \end{cases} \text{ ger... } \nabla g = (2x, 2y, 2z)$$

SEM3
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

4) Ovan spänner nu upp följande ekv. system:

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 1 = \lambda 2y \\ 1 = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

Nu löser vi systemet:

$\lambda = \frac{2x}{2x} = 1$ (från ekv. 1) ger... $\begin{cases} y = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} & \text{(från ekv. 2)} \\ z = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} & \text{(från ekv. 3)} \end{cases}$

Vi sätter nu in y, z i ekv. 4 för att få fram x enligt nedan:

$x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1$ ger... $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ // (från ekv. 4)

Om vi nu även sätter $x=0$ får vi fram andra punkter enligt nedan:

$\{ y = z$ (från ekv. 2 och ekv. 3)

Vi sätter nu in y, z i ekv. 4 för att få fram x enligt nedan:

$\underbrace{(0)^2+y^2+(y)^2 = 2y^2 = 1 \quad \text{ger...} \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{(från ekv. 4)}}$ vilket i sin tur ger.. $y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

David Östling
981025-9532
CMETE4
dostl@kth.se
SEM3

Detta ger oss följande extrempunkter:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Vi sätter nu in samtliga punkter i f och får:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}, \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

(Störst!)

samt...

$$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$ (minst!)

$$f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

Svar: Funktionen f antar ett största värde i $\frac{3}{2}$ och ett minsta i $-\sqrt{2}$ när (x, y, z) ligger på enhetssfären

SEM3
David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se

5) Vi börjar med att ta fram partiella derivatorna till $f(x,y)$ enligt:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{1}{(x+y)^2} + y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{(x+y)^2} + x \end{cases}$$

Om vi nu sätter att dessa är lika med 0 får vi:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{(x+y)^2} + y = 0 \\ -\dfrac{1}{(x+y)^2} + x = 0 \end{cases} \text{ ger... } \begin{cases} y = \dfrac{1}{(x+y)^2} \\ x = \dfrac{1}{(x+y)^2} \end{cases} \text{ ger... } \quad x = y$$

Nu sätter vi in $x=y$ ovan och får:

$$x: \left\{ -\frac{1}{(x+(x))^2} + x = -\frac{1}{4x^2} + x = 0 \right. \text{ ger... } x(4x^2) = 4x^3 = 1 \text{ vilket i sin tur ger...} \rightarrow$$

$$\longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \quad \text{Eftersom } x=y \text{ så är } x=y=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$$

Nu klassificerar vi den kritiska punkten $(x,y)=(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}, \sqrt[3]{\frac{1}{4}})$ med hjälp av Hessematrisen enligt:

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Vi tar först fram alla partiella andraderivator till f enligt nedan:

David Östling
981025-9532
CMETE 4
dostl@kth.se
SF1673

5)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial xx} = \dfrac{2}{(x+y)^3}, & \dfrac{\partial f}{\partial xy} = \dfrac{2}{(x+y)^3}+1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial yx} = \dfrac{2}{(x+y)^3}+1, & \dfrac{\partial f}{\partial yy} = \dfrac{2}{(x+y)^3} \end{cases}$$

Nu sätter vi in detta i Hessematrisen tillsammans med den kritiska punkten $(x,y)=(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}})$ och får: $\left(\left(2\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}\right)^3=\tfrac{8}{4}=2\right)$

$$H(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}) = \begin{bmatrix} f_{xx}(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}) & f_{xy}(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}) \\ f_{yx}(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}) & f_{yy}(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}})^3} & \dfrac{2}{(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}})^3}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} \\ \dfrac{2}{(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}})^3}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} & \dfrac{2}{(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}})^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} \\ 1+\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} & 1 \end{bmatrix}$$ ger... →

$$\rightarrow \det\left(H(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}})\right) = (1\cdot 1)-\left(1+\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}\right)^2 = 1-\left(1+2\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}+\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}\right) = -\tfrac{9}{4}\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}$$

Svar: Vi ser att $(x,y)=(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}})$ är en sadelpunkt då $\det(H(\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}},\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}}))<0$. f saknar alltså största och minsta värde.