Institutionen för Matematik

SF1626 Flervariabelanalys
Läsåret 2021-2022

Inlämningsuppgifter till Seminarium 4

Lösningar på dessa uppgifter (1-5 nedan) ska lämnas in i form av en pdf-fil via canvas senast måndagen den 14 februari 2022 kl 08:00. Lösningar som lämnas in för sent eller som lämnas in på något annat sätt än via canvas kommer ej att beaktas. Lösningarna ska vara väl motiverade och tydligt skrivna. Även en person som inte är insatt i problemet i förväg ska lätt kunna läsa och förstå dina lösningar. Rita figur, förklara alla beteckningar som införs och förklara hur du resonerar. Alla beräkningar förväntas vara korrekta. Kontrollera dina räkningar innan du lämnar in dina lösningar.

Det är tillåtet att samarbeta och diskutera med andra när du löser uppgifterna, men det är inte tillåtet att skriva av en lösning eller lämna in en lösning som du inte arbetat med själv. Det räknas som fusk att lämna in avskrivna lösningar.

Inlämningsuppgifterna ska skickas in via canvas (som en PDF-fil; skicka in samtliga uppgifter i EN fil) under "Uppgifter" i menyn på canvassidan. Observera att man måste vara kursregistrerad och inloggad för att kunna skicka in sina lösningar.

Uppgift 1. Beräkna dubbelintegralen $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ om $f(x,y) = x^2y$ och området D i xy-planet ges av olikheterna $x^2 \leq y \leq x$.

Uppgift 2. Låt T vara triangeln med hörn i $(1,1)$, $(2,3)$ och $(3,2)$. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_T (x+y)\,dxdy \qquad \text{t ex genom att göra variabelbytet} \qquad \begin{cases} x = 1+2s+t \\ y = 1+s+2t \end{cases}$$

Uppgift 3. Beräkna volymen av det område K i xyz-rummet som ges av olikheterna $y^2 \leq z \leq 4 - x^2$.

Uppgift 4. Beräkna integralen $\iint_E \frac{1+x}{1+2x^2+3y^2}\,dA$ då E är ellipsskivan som ges av olikheten $2x^2 + 3y^2 \leq 6$.

Uppgift 5. Beräkna $\iiint_K z\,dV$ där K ges av $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$

(a) med hjälp av cylindriska koordinater
(b) med hjälp av sfäriska koordinater

Extra arbetsmaterial till Seminarium 4

Vid Seminarium 4 kommer lösningarna till inlämningsuppgifterna ovan att diskuteras. Dessutom kan några av nedanstående uppgifter behandlas. Lösningar på dessa ska dock inte lämnas in i förväg.

Uppgift 6. Låt D vara enhetskvadraten $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Approximera integralen $\iint_D (x^2 + y)\, dA$ med en Riemannsumma med 4 termer. Hur stort blir felet? Kan du hitta en Riemannsumma med fyra termer som approximerar integralen med ett fel mindre än $5/100$?

Uppgift 7. Låt Ω vara det område i planet som beskrivs av olikheterna $0 \leq x+y \leq 2$ och $1 \leq x-y \leq 3$. Beräkna integralen $\iint_\Omega (x^2 - y^2),\, dA$ genom att införa variablerna $u = x + y$ och $v = x - y$.

Uppgift 8. Bestäm masscentrum av cylindern som ges av olikheterna $x^2+y^2 \leq 4$ och $0 \leq z \leq 1$ om dess densiteten ges $\rho(x, y, z) = 1 + z^2$.

Uppgift 9. Bestäm tröghetsmomentet med avseende på z-axeln för cylindern i föregående uppgift.

Uppgift 10. Masstätheten för en gas ges i någon lämplig enhet av $\rho(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}$. Gasen befinner sig i rummet utanför enhetsklotet, dvs i området som ges av olikheten $x^2 + y^2 + z^2 > 1$. Beräkna gasens totala massa.

Uppgift 11. Beräkna trippelintegralen $\iiint_K \frac{1 + x}{x^2 + y^2 + z^2 + 2}\, dV$ då K ges av olikheterna $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $y \geq 0$, $z \leq 0$.