

1) Given:Sökt:

$$P(A) = 0,5$$

$$P(A \cup B \mid A^* \cup B^*)$$

$$P(B) = 0,3$$

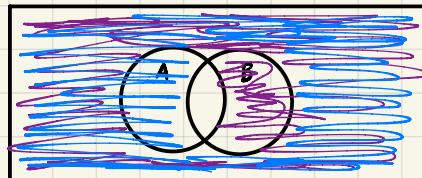
$$P(A \cap B) = 0,1$$

$$P(A^*) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(B^*) = 1 - 0,3 = 0,7$$

Vi tar fram  $P(A \cup B)$  och  $P(A^* \cup B^*)$  enligt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,7$$



$$(P(A^*)) \quad (P(B^*))$$

Vi ser av venndiagrammet att:  $P(A^* \cup B^*) = 1 - P(A \cap B) = 0,9$

Vi får nu att:



$$P(A^* \cup B^*) \quad P(A \cup B)$$

Vilket ger...  $P((A^* \cup B^*) \cap (A \cup B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,7 - 0,1 = 0,6$

$$P(A \cup B \mid A^* \cup B^*) = \frac{P((A^* \cup B^*) \cap (A \cup B))}{P(A^* \cup B^*)} = \frac{0,6}{0,9} = \frac{2}{3}$$

Svar: B

2) Given:

Sökt:

$$f_x = 2xe^{1-x^2} \text{ där } x \geq c > 0 \quad C$$

Allmänt gäller:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

... men eftersom  $x \geq c > 0$  vet vi att:

$$\int_c^{\infty} f_x(x) dx = 1$$

Detta ger...

$$\begin{aligned} \int_c^{\infty} 2xe^{1-x^2} dx = 1 &\Rightarrow u = 1-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\infty \\ u_2 = 1-c^2 \end{cases} \Rightarrow \int_{1-c^2}^{-\infty} \frac{2xe^u}{-2x} du = \int_{1-c^2}^{-\infty} -e^u du = - \left[ e^u \right]_{1-c^2}^{-\infty} = \\ &= - \left( e^{-\infty} - e^{1-c^2} \right) = e^{1-c^2} = 1 \Rightarrow \ln(e^{1-c^2}) = \ln(1) \Rightarrow 1-c^2 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Då } c > 0 \text{ vet vi att } c = 1 \end{aligned}$$

Svar: B

3) Given:

$P(X, Y   j, k)$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

$$D(XY) = \sqrt{V(XY)}$$

$$V(XY) = E(X^2Y^2) - (E(XY))^2$$

Då X och Y ansas vara beroende (ingen annat sägs) får vi följande:

Vilket ger...

$$V(XY) = Wif?$$

$$E(XY) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$$

$$E(X^2Y^2) = 0^2 \cdot 0^2 \cdot \frac{1}{12} + 1^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$$

Vidare har vi följande:

$$D(XY) = \sqrt{V(XY)} = \sqrt{E(X^2Y^2) - (E(XY))^2} = \sqrt{\frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{18}} \approx 0,624$$

4) Given:

20 min period

$$\mu = 2,5$$

Period 10:00 - 11:00

$$p_x(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Notera; Varje 20 minuter blir en egen stokastisk variabel  $X_n$  och den totala väntevärde ges därmed av:

$$E(X) = \underbrace{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)}_{(1 \text{ h})} = 3 \cdot 2,5 = 7,5$$

Vi beräknar nu:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$$

(Diskret så 5 ingår inte)

(KOLLA I TABELL)

$\mu = 7,5$

P( $X \leq 4$ )

(söke)

Svar: D

5) Given:

23 cm avstånd mellan två stöd som håller kex

$$\mu = 2$$

$$D(X) = 0,3$$

Vi vet att tjockleken är normalfördelad som  $N(2, 0,3)$ . Vi använder nu centrala gränsvärdesatsen enligt:

$$Y_n = N(n\mu, \sqrt{n}\sigma) = N(12 \cdot 2, \sqrt{12} \cdot 0,3) = N(24, 0,3\sqrt{12})$$

Detta ger..

$$P(X \leq 23) = \Phi\left(\frac{23-24}{0,3\sqrt{12}}\right) = 1 - 0,96 = 0,04 = 0,17$$

6)

7) Givet:

$$f_x(x) = \frac{x}{a} e^{-(x/a)^2}, \quad x > 0, \quad a > 0$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 12$$

Vi tar nu fram ML-skattningen av  $a$  enligt:

$$L(a) = \left( \frac{5}{a^2} e^{-(5/a)^2} \right) \left( \frac{12}{a^2} e^{-(12/a)^2} \right) = \frac{60}{a^4} e^{-\frac{169}{a^2}}$$

Vi färsöker nu den kommande deriveringen genom att ta fram  $\ln(L(a))$ :

$$\ln(L(a)) = \ln(60) - 2\ln(a) - \frac{169}{a^2}$$

Vi sätter nu  $\ln(L(a)) = 0$  och får:

$$\ln(L(a))' = 0 - \frac{2}{a} - (-2) \cdot \frac{169}{a^3} = -\frac{2}{a} + \frac{338}{a^3} = 0 \Rightarrow \frac{338}{a^3} = \frac{2}{a} \Rightarrow 338a = 2a^3 \Rightarrow \sqrt{\frac{338}{2}} = a \Rightarrow a = 13,$$

Svar: 13

8) Givet:

$$X \in \text{Bin}(n, p)$$

$$n = 600$$

Medelfel ges av  $D\left(\frac{X}{n}\right)$ , alltså:

$$V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{V(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$D\left(\frac{X}{n}\right) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Vi vet även att  $p = \frac{X}{n} = \frac{60}{600} = 0,1$ , alltså:

$$\sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{600}} \approx 0,0122$$

Svar: A

9) Given:

$$\bar{x} = \frac{4,82 + 4,25 + 3,96 + 3,73 + 3,32}{5} = 4,016$$

$$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01$$

Da vi varken vet  $\mu$  eller  $\sigma$  så använder vi t-metoden:

$$I_{\mu} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} \left( (4,82 - 4,016)^2 + (4,25 - 4,016)^2 + (3,96 - 4,016)^2 + (3,73 - 4,016)^2 + (3,32 - 4,016)^2 \right)} \approx 0,5636$$

Ej  $\hat{\sigma}$   
 vi ska ta  
 Sann etas  
 intervall  
 (n-1)

$$I_{\mu} = 4,016 - \frac{0,5636}{\sqrt{5}} \cdot t_{0,01}(4) = 4,016 - \frac{0,5636}{\sqrt{5}} \cdot 3,75 \approx 3,07$$

(ges av tabell 3)

Vi får alltså följande intervall:

$$I_{\mu} = (3,07, \infty)$$

Svar: B

10) Given:

$$n = 18 \quad X \in \text{Bin}(n, p)$$

$$p = 0,5$$

Vi beräknar nu styrkan:

$$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - 0,94235$$

$$(X \in \text{Bin}(18, 0,5))$$

11) Given:

$$X \in N(\mu, \sigma)$$

Vi börjar med att ta fram  $\mu$  o  $\sigma$  för skattningen:

$$E(\bar{x}) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \Rightarrow E(x_1) = E(x_2) = E(x_3) = \dots \Rightarrow \frac{\mu n}{n} = \mu$$

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) = \frac{V(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n^2} = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow D(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Då får vi:

$$\bar{x} \in N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \frac{3}{\sqrt{18}}\right)$$

Nu löser vi  $P(\bar{x} \geq 10,5)$ :

$$P(\bar{x} \geq 10,5) = 1 - P(\bar{x} \leq 10,5) \quad \text{Vilket efter standardisering blir...} \quad P(X \leq 10,5) = \phi\left(\frac{10,5 - 10}{\frac{3}{\sqrt{18}}}\right) = \phi\left(\frac{\sqrt{18}}{6}\right)$$

11 forts.)

Eftersom  $H_1: \mu > 10$  ver vi att vi söker ett ensidigt intervall där vi bara söker den nedre gränsen ( $\mu$  går mot  $\infty$  om  $\mu > 10$ ).  $\alpha$  blir alltså 0,05. Vi får då:

$$P(X \leq 10,5) = \Phi\left(\frac{10,5 - 10}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right) \quad \text{där} \quad \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{6}\right) = \Phi\left(1,6449\right) \xrightarrow{\text{(Ges av } \lambda_{0,05} \rightarrow \text{tabell 2)}} \frac{\sqrt{n}}{6} = 1,6449 \Rightarrow \sqrt{n} = 1,6449 \cdot 6 \Rightarrow n = \sqrt{1,6449 \cdot 6} \approx 97,4$$

Vi behöver alltså minst  $n = 98$  ( $n = 97,4$  går inte)

Svar: B

- 12) Då  $p$ -värder <  $\alpha$  i båda fallen så kan  $H_0$  färkastas i båda fall och därmed är effekten signifikant i båda fallen.