2021-12-22

1) Givet:

$P(M_1 = k) = 0{,}25$

$P(M_2 = k) = 0{,}5$

$P(M_3 = k) = 0{,}8$

Kombinationer:

$M_1, M_2 \quad M_1, M_3$

$M_2, M_1 \quad M_3, M_1$

$M_2, M_3 \quad M_3, M_2$

Vi får:

$$P(k) = \frac{1}{3}\overbrace{(0{,}25 \cdot 0{,}5 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}5)}^{\text{Alla kombinationer}} = \frac{29}{120}$$

Svar: B

2) Givet:

$$f_x = \frac{3}{16} x y^2 \quad \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Vi tar nu fram $E(x)$:

$$E(x) = \int_0^2\int_0^2 f_{x,y} \cdot x\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^2 \frac{3}{16} x^2 y^2\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{3}{16} y^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 dy = \int_0^2 \frac{3}{16} y^2 \left(\frac{8}{3} - 0\right) dy = \int_0^2 \frac{24}{48} y^2\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 y^2\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Svar: A

3) Givet:

$E(X) = 0{,}5$

$E(Y) = 2$, $D(Y) = 3$, $V(Y) = 3^2 = 9$

$Z \in Bin(10, 0{,}8)$

X, Y, Z oberoende.

Vi beräknar nu $V(2X + Y - 5Z)$:

$$V(2X + Y - 5Z) = V(2X) + V(Y) - V(5Z) = 2^2 V(X) + 9 + (-5)^2 V(Z) \Rightarrow V(X)_{Exp} = \frac{1}{\lambda^2} , \; E(X)_{Exp} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow E(X) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(Z)_{Bin} = np(1-p) \text{ där } Z \in Bin(n,p) \Rightarrow V(Z) = 10 \cdot 0{,}8(1 - 0{,}8) = 1{,}6 \Rightarrow 2^2 V(X) + 9 + 5^2 V(Z) = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 9 + 25(1{,}6) = 50$$

Svar: 50

4) Vi beräknar:

$E(X) = 0 \cdot (0{,}1 + 0{,}2) + 1(\alpha + \beta) = \alpha + \beta$, $E(X^2) = 0^2 \cdot (0{,}1 + 0{,}2) + 1^2 \cdot (\alpha + \beta) = \alpha + \beta$

$E(Y) = 0 \cdot (0{,}1 + \alpha) + 1(0{,}2 + \beta) = 0{,}2 + \beta$

Vi tar nu fram $D(X+1)$:

$D(X+1) = D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} \longrightarrow$ Vi vet här att $P(X=0) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

4 forts.)

Eftersom $P(X=0)=0,3$ och totala sannolikheten är 1 vet vi att $P(X=1)=1-0,3=0,7$

Med detta får vi:

$E(X)=0\cdot 0,3+1\cdot 0,7=0,7$

$E(X^2)=0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,7=0,7$

... vilket ger:

$D(X+1)=D(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E(X^2)-(E(X))^2}=\sqrt{0,7-0,7^2}=\sqrt{0,21}$ //

Svar: $\sqrt{0,21}$

5) Givet:

$X\in Bin(n,p)$, $n=5$, $p=0.1$ (klarar ej bes.)

Nu beräknar vi $P(X\leq 1)$ (sannolikheten att max 1 bil av 5 ej klarar = sannolikheten att minst 4 klarar):

$P(X\leq 1)=0,91854=0,92$ //
$(X\in Bin(5,0.1))$

Svar: C

6) Givet:

$\mu=4 \longrightarrow \left(E(X)_{Exp}=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow 4=\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda=\frac{1}{4}\right)$

$X\in Exp(\frac{1}{4})$ $(\lambda=\frac{1}{4})$

Vi beräknar nu $P(X\geq 8)$ enligt:

$P(X\geq 8)=1-\underbrace{P(X\leq 8)}_{\text{(Exp. är kontinuerlig)}}=1-F_X(8) \longrightarrow$ Vi tar nu fram F_X: $\int_0^x \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{(f_{X_{Exp}})}dx=\left[\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^x=\left(-e^{-\lambda x}-(-1)\right)=1-e^{-\lambda x}$ //

Vi får nu:

$P(X\geq 8)=1-P(X\leq 8)=1-F_X(8)=1-(1-e^{-(\frac{1}{4})\cdot 8})=0,135$

7) Vi vet att:

$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)$

$E(X)=P(X_i=0)+P(X_i=1)+P(X_i=2)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\left(\frac{3}{8}-\alpha\right)+2\cdot\left(\frac{3}{8}+\alpha\right)=\left(\frac{3}{8}-\alpha\right)+\frac{6}{8}+2\alpha=\frac{9}{8}+\alpha$ //

Nu tar vi fram MK-skattningen av α:

$Q=\left(\underbrace{1}_{x_1}-\left(\frac{9}{8}+\alpha\right)\right)^2+\left(\underbrace{1}_{x_2}-\left(\frac{9}{8}+\alpha\right)\right)^2+\left(\underbrace{2}_{x_3}-\left(\frac{9}{8}+\alpha\right)\right)^2=2\left(0,015625+0,25\alpha+\alpha^2\right)+\left(0,765625-1,75\alpha+\alpha^2\right)=0,796875+3\alpha^2-1,25\alpha$

Nu deriverar vi Q och tar fram α där $Q'=0$ enligt:

$Q'=0+6a-1,25 \Rightarrow a=\frac{1,25}{6}=\frac{5}{24}$ //

Svar: B

8) Givet:

$$\bar{x}_1 = \frac{4,12+3,87+3,76+4,05+4,18}{5} = 3,996$$

$$\bar{x}_2 = 3,996 - 0,08 = 3.988$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{1}{\underbrace{4}_{(n-1)}}\left((4,12-3,996)^2+(3,87-3,996)^2+(3,76-3,996)^2+(4,05-3,996)^2+(4,18-3,996)^2\right)} \approx 0,17587$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{1}{4}\left((4,12-3,988)^2+(3,87-3,988)^2+(3,76-3,988)^2+(4,05-3,988)^2+(4,10-3,988)^2\right)} \approx 0,15789$$

Vi tar nu fram konfidensintervallen, vi använder t-metoden:

$$I_1 = \bar{x}_1 \pm \frac{s_1}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = 3,996 \pm \frac{0,17587}{\sqrt{5}} \cdot \underbrace{t_{0,1}(5-1)}_{=1,53 \text{ enligt tabell 3}} = (3,8757,\ 4,1163)$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha = 1-0,8 = 0,2 \Rightarrow \\ \frac{0,2}{2} = 0,1 \end{array}\right)$$

$$I_2 = \bar{x}_1 \pm \frac{s_1}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = 3,988 \pm \frac{0,15789}{\sqrt{5}} \cdot t_{0,1}(4) = (3,8800,\ 4,096)$$

Vi undersöker nu längden av intervallen:

I_1: $4,1163 - 3,8757 = 0,2406$

I_2: $4,096 - 3,88 = 0,216$

Då $0,2406 > 0,216$ och $s_1 > s_2$ vet vi att intervallet blir kortare och s blir mindre.

9) Vi vet att:

$X \in Bin(n,p)$ där $p = 0,2$ samt att D ges av $D(\frac{x}{n})$. Alltså:

$$D\left(\tfrac{x}{n}\right) = \sqrt{V\left(\tfrac{x}{n}\right)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n^2}} = \sqrt{\frac{n p^*_{obs}(1-p^*)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}} = \sqrt{\frac{0,2(0,8)}{n}} = \frac{\sqrt{0,16}}{\sqrt{n}} = \frac{0,4}{\sqrt{n}}$$

Vi undersöker nu I_p (approx. metoden):

$$I_p = p^*_{obs} \pm \left(\frac{0,4}{\sqrt{n}}\right) \cdot \lambda_{\frac{0,05}{2}} = 0,2 \pm \frac{0,4}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_{0,025} = 0,2 \pm \frac{0,4}{\sqrt{n}} \cdot 1,96 = (0,15,\ 0,25)$$

Vi undersöker nu vad n blir i något av fallen:

$$0,2 + \frac{0,4}{\sqrt{n}} \cdot 1,96 = 0,25 = \frac{0,784}{\sqrt{n}} = 0,05 \Rightarrow \left(\frac{0,784}{0,05}\right)^2 = n \Rightarrow n \approx 246$$

10) Vi undersöker $P(X \geq 7)$:

$$P(X \geq 7) = 1 - \underbrace{P(X \leq 6)}_{(X \in Po(3))} = 1 - 0,96649 \approx 0,034$$

Svar: C

11) Givet:

$X \in P(2\mu)$

$Y \in P(\mu)$

Vi under först om skattningarna är väntevärdesriktiga:

$$\begin{cases} \mu^*_{obs} = \dfrac{X+2Y}{4} = \dfrac{2\mu+2(\mu)}{4} = \dfrac{4\mu}{4} = \mu \Rightarrow \mu \overset{(E(X)_{P_0})}{=} \mu \longrightarrow \text{Väntevärdesriktig!} \\ \hat{\mu}_{obs} = \dfrac{X+Y}{3} = \dfrac{2\mu+\mu}{3} = \dfrac{3\mu}{3} = \mu \Rightarrow \mu \overset{(E(X)_{P_0})}{=} \mu \longrightarrow \text{Väntevärdesriktig!} \end{cases}$$

Vi vet även att skattningen med minst varians klassas som mest effektiv, alltså:

$$V(\mu^*_{obs}) = V\left(\frac{X+2Y}{4}\right) = \frac{V(X) + 4V(Y)}{16} \overset{(V(Y) = E(X)\ ;\ \text{poisson})}{=} \frac{2\mu+4\mu}{16} = \frac{6\mu}{16}$$

$$V(\hat{\mu}_{obs}) = V\left(\frac{X+Y}{3}\right) = \frac{V(X)+V(Y)}{9} = \frac{2\mu+\mu}{9} = \frac{3\mu}{9} = \frac{\mu}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{6\mu}{16} > \frac{\mu}{3} \Rightarrow V(\mu^*_{obs}) > V(\hat{\mu}_{obs}) \longrightarrow \hat{\mu}_{obs} \text{ är mest effektiv!}$$

Svar: D

12) Eftersom vi inte kan förkasta $H_{0,\beta}$ eller $H_{0,\gamma}$ då 0 ingår i båda intervallen så vet vi att P-värder för både $H_{0,\beta}$ och $H_{0,\gamma}$ kommer bli större än 0,01.

Svar: B