2022-01-11

1 R
2 R
3 R
4 R
5 –
6 R
7 R
8 R
9 R
10 –
11 R
12

1) $P(T|H)=0{,}75$

$P(T|\neg H)=0{,}125$

$P(H)=0{,}2$

$P(\neg H)=1-0{,}2=0{,}8$

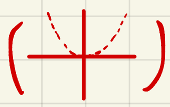
$$P(H|T)=\frac{P(T|H)P(H)}{P(T|H)P(H)+P(T|\neg H)P(\neg H)}=0{,}6$$

Svar: C

2) $$\int_0^\infty\int_2^\infty Cx^{-1}e^{-x^2y}\,dx\,dy=1 \Rightarrow C\int_0^\infty\int_2^\infty x^{-1}e^{-x^2y}\,dx\,dy=C\int_2^\infty\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x^2y}\,dy\,dx \Rightarrow u=-x^2y \Rightarrow \frac{du}{dy}=-x^2 \Rightarrow C\int^\infty\frac{1}{x}\int_0^{-x^2\infty}\frac{e^u\,du}{-x^2}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2\infty=-\infty \text{ för alla } x \Rightarrow C\int_2^\infty-\frac{1}{x^3}\left[e^u\right]_0^{-\infty}=C\int_2^\infty-\frac{1}{x^3}\left(e^{-\infty}-e^0\right)=C\int_2^\infty-\frac{1}{x^3}(0-1)\,dx=C\int_2^\infty\frac{1}{x^3}\,dx=C\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_2^\infty=C\left(\overbrace{-\frac{1}{2\infty^2}}^{\to 0}-\left(-\frac{1}{2(2)^2}\right)\right)=$$

(x² kan ej bli negative)



$$=C\left(0+\frac{1}{8}\right)=\frac{C}{8}=1 \Rightarrow C=8$$

Svar: A

3) Givet:

Vi ser att både $p_X(k)$ och $p_Y(j)$ motsvarar $Po(2)$ respektive $Po(3)$. Då X och Y i sin tur är oberoende får vi:

$$E(X)_{Po}=\mu \quad \begin{cases}E(X)=2\\E(Y)=3\end{cases}$$

$$V(X)_{Po}=\mu \quad \begin{cases}V(X)=2\\V(Y)=3\end{cases}$$

$$E(X^2-XY)=\overbrace{E(X^2)}^{V(X)=E(X^2)-(E(X))^2\Rightarrow E(X^2)=V(X)+(E(X))^2}-E(XY)=V(X)+(E(X))^2-\underbrace{E(X)E(Y)}_{\text{Oberoende!}}=2+2^2-2\cdot3=6-6=0$$

Svar: B

4) Vi får:

$$P(\min(X,Y)\le 1)=1-P(X\ge1)P(Y\ge1)=1-\left(1-P(X\le1)\right)\left(1-P(Y\le1)\right)=1-\left(1-p_X(1)\right)\left(1-p_Y(1)\right)=1-\left(1-\left(\frac{1}{2-0}\right)\right)\left(1-\left(\frac{1}{3-0}\right)\right)=$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$$

Svar: $\frac{2}{3}$

5) Givet:

Dragning utan återläggning: hypergeometrisk fördelning...

$X\in Hyp(16,8,0{,}5)$

5 forts.)

Vi får:

Chansen att få totalt 4 kvinnor och 4 män

$$p_x(4) = \frac{\binom{16\cdot 0{,}5}{4}\binom{16(1-0{,}5)}{8-4}}{\binom{16}{8}} = \frac{\overbrace{\binom{8}{4}\binom{8}{4}}}{\binom{16}{8}} \approx 0{,}38$$

Svar: D

6) Vi vet att:

$X \in N(1, 0{,}1)$

$Y \in N(2, 0{,}1)$

...samt att:

$$P(|X+Y-3|<0{,}01) = P(-0{,}01 < X+Y-3 < 0{,}01) \quad \text{där} \quad X+Y-3 = Z \quad \text{och} \quad Z \in N\left(1+2-3, \sqrt{\frac{0{,}1^2}{1}+\frac{0{,}1^2}{1}}\right) = N(0, \sqrt{0{,}02})$$

$$P(-0{,}01 < X+Y-3 < 0{,}01) = \phi\left(\frac{0{,}01-0}{\sqrt{0{,}02}}\right) - \phi\left(\frac{-0{,}01-0}{\sqrt{0{,}02}}\right) = \phi(0{,}07) - (1-\phi(0{,}07)) = 0{,}0558 \approx 0{,}06$$

Svar: B

7) Givet:

$X \in P_o(\underbrace{6\theta}_{\mu_X}) \quad x = 43$

$Y \in P_o(\underbrace{4\theta}_{\mu_Y}) \quad y = 37$

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_i)^2 = (43-6\theta)^2 + (37-4\theta)^2$$

$$Q' = 2(43-6\theta)(-6) + 2(37-4\theta)(-4) = -516 + 72\theta - 296 + 32\theta \Rightarrow 104\theta = 812 \Rightarrow \theta = \frac{812}{104} \approx 7{,}81$$

Svar: 7,81

8) Givet:

$p = \frac{90}{1000} = 0{,}09$

$n = 1000$

$X \in Bin(1000, 0{,}09)$

$$D(p^*_{obs}) = D\left(\frac{X}{n}\right) = \sqrt{V\left(\frac{X}{n}\right)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n^2}} = \sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}09(1-0{,}09)}{1000}} \approx 0{,}009$$

Svar: A

9) Givet:

$$\bar{x} = \frac{2,82+4,25+2,96+3,73+3,32}{5} = 3,416$$

t-fördelning (μ och σ okända)

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{0,34163}$$

Vi får då:

$$I_{\mu_{(övre)}} = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_\alpha(n-1) = 3,416 + \frac{\sqrt{0,3416}}{\sqrt{5}} \cdot t_{0,05}(4) \approx 3,97$$

...alltså är $I_\mu = (-\infty, 3,97)$

Svar: B

10) Vi jobbar med 2 Stickprov med $\underbrace{\text{olika varians,}}^{(\sigma_x \neq \sigma_y)}$ alltså:

$$I_{\mu_x-\mu_y} = \bar{x}-\bar{y} \pm \sqrt{\frac{S_x^2}{n_1}+\frac{S_y^2}{n_2}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = 137-208 \pm \sqrt{\frac{92,5}{5}+\frac{163}{5}} \cdot \lambda_{\frac{0,01}{2}} \Rightarrow -71 \pm 7,1484264 \cdot \underbrace{\lambda_{0,005}}_{=2,5758} \approx (-89,4, -52,6)$$

(Approximativt intervall...)

(Sökt)

Svar: B

11) Givet:

$X \in Exp(\lambda)$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 3 \\ H_1: \mu = 6 \end{cases} \quad \left(E(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{E(X)}\right)$$

Vi tar nu fram sannolikhetsfunktionen för Exp:

$$\int_0^x \lambda e^{-x\lambda} dx \Rightarrow u = -x\lambda \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\lambda \Rightarrow \frac{du}{-\lambda} = dx \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -x\lambda \\ u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^{-x\lambda} \frac{\lambda e^u du}{-\lambda} = -\int_0^{-x\lambda} e^u du = -\left[e^u\right]_0^{-x\lambda} = -\left(e^{-x\lambda} - e^0\right) = 1 - e^{-x\lambda} = F_x$$

Vi får:

$$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F_x(5) = 1 - \left(1 - e^{-5\left(\frac{1}{6}\right)}\right) = 0,43$$

$\left(X \in Exp\left(\frac{1}{6}\right)\right)$

Svar: C

12) Givet:

p-värde < α förkasta H_0 $\longrightarrow$ Signifikant på 5% nivån => 0 kan inte ingå i I_β.

Vi vet även att I_β är symmetriskt, dvs. $\beta^*_{obs} = 2,63$ som mittpunkt (som i alt. A)

Svar: A