Kombinatorik

	Med återläggning	Utan återläggning
Med ordning	n^k	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$
Utan ordning	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

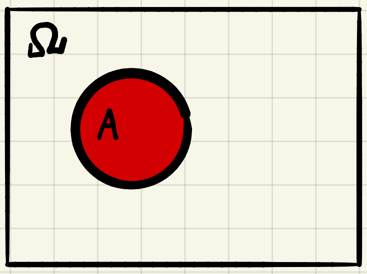
($n \rightarrow$ Antal element i en mängd
$k \rightarrow$ Antal element som dras ur en mängd.)

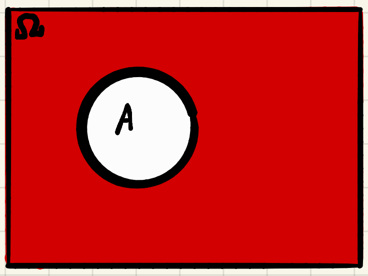
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (OBS! Ej permutation; kombination!)

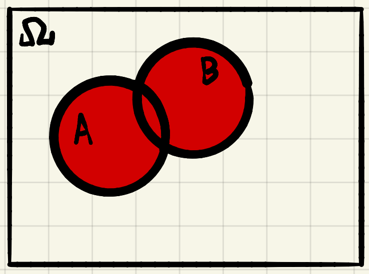
Betingad Sannolikhet

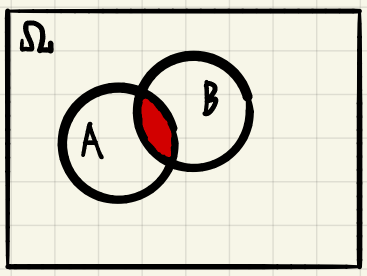
(Sannolikheten att B händer givet att A händer)

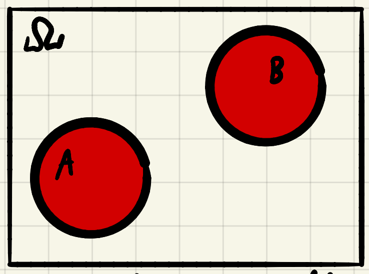
- $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$
- $P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A)$
- $P(A\cap B) = P(B)\,P(A|B)$
- $P(B^*|A) = 1 - P(B|A)$


A


A*


A ∪ B


A ∩ B


A och B disjunkta

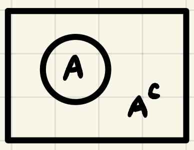
Bayes Sats

Låt $A_1, \ldots, A_n$ vara n disjunkta händelser...

- $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_j)}$
- $P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$ (Om $n=1$, specialfall)

Komplement

- $P(A) = 1 - P(A^c)$



- $P(A\cup B) = P(A) + P(A^c\cap B)$
- $P(A^c\cup B) = 1 - P(A\cap B^c)$

Disjunkta

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
- $A\cap B = \emptyset$

Additionssatsen

- $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

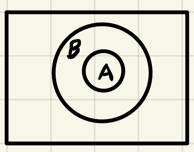
Oberoende

- $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ (Om A o B är oberoende)
- $P(B|A) = P(B)$
- Om A o B är oberoende så är även A^c och B det.

Lagen om total sannolikhet

(slumpmässigt vald...)

- $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_j)$
- $A \subseteq B$ (tillhör)



Stokastiska variabler

Poissonfördelning

- Diskret fördelning som ofta används när något utspelar sig över en tidsperiod
- Sannolikhetsfunktionen för en stokastisk variabel $X \in Po(\mu)$ ges av:

$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

där $k = 0, 1, 2, \ldots$ och $; \mu > 0$

Väntevärde: $E(X) = \mu$

Varians: $V(X) = \mu$

Täthetsfunktion $f_X(x)$

- Om X är en kontinuerlig stokastisk variabel gäller:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

- Allmänt gäller:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1}$$ (då totala sannolikheten alltid är 1)

$$0 \leq f_X(x) \leq 1$$

- För kontinuerliga stokastiska variabler gäller även:

$$f(a) \neq P(X = a)$$

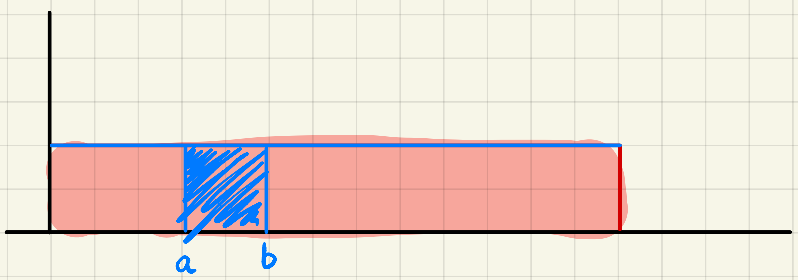
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

- Likformig fördelning

$\int_a^b f_X(x)\,dx$ där...

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{(b-a)}}$$

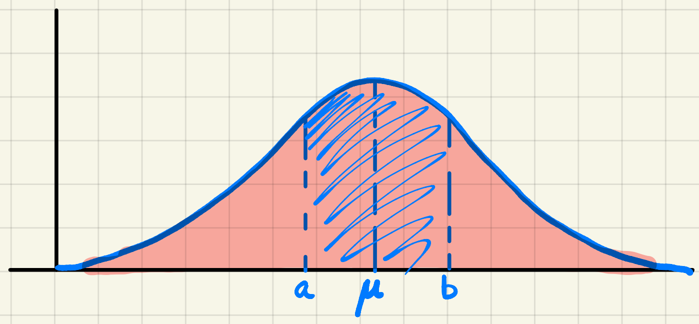
$(a < x < b)$



- Normalfördelning

$$\int_a^b f_X(x)\,dx \quad \text{där...}$$

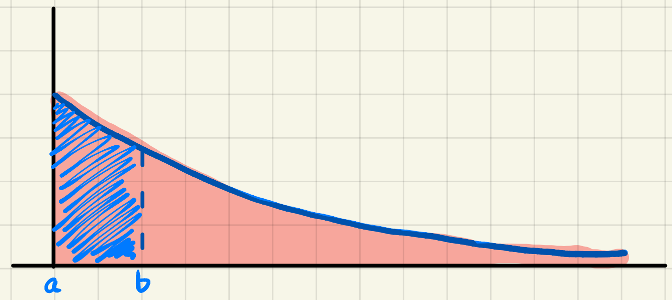
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu - x)^2}{2\sigma^2}}$$



- Exponentialfördelning

$$\int_a^b f_X(x)\,dx \quad \text{där...}$$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$



- $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

- Väntevärde: $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

- Varians: $V(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

- $P(X > A \mid X > B) = P(X > A - B)$

Bionimalfördelning

- Vi vet hur många försök n vi ska göra ☑
- Försöken är oberoende av varandra ☑
- Det finns endast två möjliga utfall; p och $p-1$ ☑
  (per försök)

- Samolikhetsfunktion:

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{där } n \text{ är antalet försök och} \quad 0 \leq p \leq 1$$

- Väntevärde:

$$E(X) = np$$

- Varians:

$$V(X) = np(1-p)$$

Miniräknare

- 2ND → VARS (DISTR) →
  - A: binompdf(n,p,k) (Används om man söker sannolikheten för ett specifikt värde e.g. $P(X = A)$)
  - B: binomcfd(n,p,k) (Används om man söker sannolikheten för ett specifikt värde eller något mindre e.g. $P(X \leq A)$)

För $P(X > A)$ kan man nyttja $P(X>A) = 1 - P(X \leq A)$

Multinomialfördelning

- Vi vet hur många försök n vi ska göra ☑
- Försöken är oberoende av varandra ☑
- Det finns mer än två möjliga utfall; p och $p-1$ ☑
  (per försök)

- Samolikhetsfunktion:

$$p_{X_1,\ldots,X_r}(k_1,\ldots,k_r) = \frac{n!}{k_1!\cdots k_r!} p_1^{k_1}\cdots p_r^{k_r}$$ (Varje försök kan resultera i r möjliga utfall)

- $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ (Summan av sannolikheten av alla utfall är 1)
- $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$ (Summan av samtliga utfall är n)

Fördelningsfunktion $F_X(x)$

- Fördelningsfunktionen för en kontinuerlig stokastisk variabel ges av:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Varians

- $V(X) = E((X-\mu)^2)$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Standardavvikelse

- $\sigma = \sqrt{V(X)}$
- $V(X) = \sigma^2$

Sannolikhetsfunktion

- Om X är en diskret stokastisk variabel gäller:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} P_X(k) \quad \left(\text{där } P_X(k) \geq 0 \text{ för alla } k \text{ och } \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = 1\right)$$

ML-Metoden

- Diskret:

$$L(\theta) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} P_{X_i}(x_i;\theta)$$

- Kontinuerlig:

$$L(\theta) = f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n;\ \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

- Populärt knep; maximera $\ln(L(\theta))$ istället för $L(\theta)$.

Varians / Kovarians

- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,C(X,Y)$ (beroende X, Y)
- $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$ (oberoende)
- $V(aX + b) = V(aX)$

- $V(aX) = a^2 V(X)$
- $D(X) = \sqrt{V(X)}$
- $V(X) = (D(X))^2$
- $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Väntevärdesriktighet

- En punktskattning θ^*_{obs} sägs vara väntevärdesriktig om: $E(\theta^*) = \theta$
- Vid jämförelse av skattningar används variansen av skattningarna. Skattningen med minst varians klassas som mest effektiv.
- $P(XY > a) = 1 - P(X<a)P(Y<a)$

Intensitet

- $\frac{\mu}{tid}$ = intensitet

Normalfördelning

- Sats 1

Om $X \in N(\mu_x, \sigma_x)$ och $Y \in N(\mu_y, \sigma_y)$ och X och Y är oberoende gäller:

$$X + Y \in N(\underbrace{\mu_x + \mu_y}_{E(X+Y)}, \underbrace{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}_{D(X+Y)})$$

$$X - Y \in N(\underbrace{\mu_x - \mu_y}_{E(X+Y)}, \underbrace{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}}_{D(X+Y)})$$

- Sats 2

Om $X \in N(\mu, \sigma)$

$Y = aX + b \in N(a\mu + b, |a|\sigma)$

$(Y = 2x \Rightarrow Y \in N(2\mu_x, 2\sigma_x))$

- Centrala gränsvärdessatsen (CGS):

Om n är stort och X_i:na har samma fördelning och är oberoende s.v. med $E(X_i) = \mu$ och $D(X_i) = \sigma > 0$ ger...

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$

Linjära kombinationer av P_o, Bin

- Sats 1

Om vi har 2 oberoende s.v. X och Y som är respektive

$$X \in P_o\underbrace{(M_1)}_{(E(x))} \qquad X \in P_o\underbrace{(M_2)}_{(E(Y))}$$

...kan vi säga att $Z = X + Y \in P_o(M_1 + M_2)$

- Sats 2

Låt X och Y vara oberoende s.v. med samma p, sådana att:

$$X \in Bin(n_x, p) \quad \text{och} \quad Y \in Bin(n_y, p)$$

...då gäller det att:

$$Z = X + Y \in Bin(n_x + n_y, p)$$

OBS! Gäller endast om X och Y har samma sannolikhet p