2022-08-15

1) Givet:

$P(D) = 0,64$

$P(K) = 0,48$

$P(M) = 1 - 0,48 = 0,52$

$P(D|K) = 0,46$

Vi använder oss av lagen om total sannolikhet enligt:

$$P(D) = \underbrace{P(D|M)P(M)}_{\text{(Sökt...)}} + P(D|K)P(K) \Rightarrow \frac{0,64 - (0,46 \cdot 0,48)}{0,52} = P(D|M) \Rightarrow$$

(Slumpmässigt vald man som stödjer dödsstraff)

$$\Rightarrow \underbrace{P(D|M)}_{\text{(Man som stödjer dödsstraff)}} = 0,8062 \Rightarrow \overbrace{P(D|M)P(M)} = 0,8062 \cdot 0,52 = 0,4192$$

Svar: D

2) Givet:

$E(X) = 3$

$E(Y) = 2$

$D(X) = 2$

$D(Y) = 1$

$C(X,Y) = 1$

Vi beräknar nu $E((2X-3Y)^2)$ enligt:

$$E((2X-3Y)^2) = E(4X^2 - 12XY + 9Y^2) = E(4X^2) + E(-12XY) + E(9Y^2) = 4E(X^2) - 12E(XY) + 9E(Y^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \Rightarrow E(XY) = C(XY) + E(X)E(Y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Rightarrow E(X^2) = V(X) + (E(X))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(Y^2) = V(Y) + (E(Y))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4E(X^2) - 12E(XY) + 9E(Y^2) = 4\left(V(X) + (E(X))^2\right) - 12\left(E(X)E(Y) + C(XY)\right) + 9\left(V(Y) + (E(Y))^2\right) =$$

$$\Rightarrow V(X) = (D(X))^2 \Rightarrow V(Y) = (D(Y))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\left((D(X))^2 + (E(X))^2\right) - 12\left(E(X)E(Y) + C(XY)\right) + 9\left((D(Y))^2 + (E(Y))^2\right) =$$

$$= 4(2^2 + 3^2) - 12(3 \cdot 2 + 1) + 9(1^2 + 2^2) = 52 - 84 + 45 = 13$$

Svar: B

3) Givet:

$p_{X,Y}(x,y)$	$X=1$	$X=2$
$Y=2$	0,2	0,5
$Y=4$	0,2	0,1

Vi sätter $2X - Y = Z$ och får:

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 \Rightarrow$$

$$E(Z) = 2\left(1 \cdot (0,2+0,2) + 2 \cdot (0,5+0,1)\right) - \left(2 \cdot (0,2+0,5) + 4 \cdot (0,2 \cdot 0,1)\right) = 3,2 - 2,6 = 0,6$$

$$E(Z^2) = 4\left(1^2 (0,2+0,2) + 2^2 (0,5+0,1)\right) - 4\left(1 \cdot 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 2 \cdot 0,5 + 1 \cdot 4 \cdot 0,2 + 2 \cdot 4 \cdot 0,1\right) + \left(2^2 (0,2+0,5) + 4^2 (0,2+0,1)\right) = 11,2 - 16 + 7,6 = 2,8$$

$$Z^2 = (2X - Y)^2 = 4X^2 - 2(2XY) + Y^2 = 4X^2 - 4XY + Y^2$$

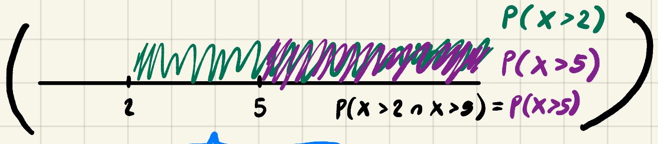
$$V(Z) = 2,8 - (0,6)^2 = 2,44$$

4) Givet:

$$P(X > 5 \mid X > 2)$$

$$F_X(x) \begin{cases} 1 - e^{-0,3x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

Detta ger:



$$P(X > 5 \mid X > 2) = \frac{P(X > 2 \cap X > 5)}{P(X > 2)} = \frac{P(X > 5)}{P(X > 2)}$$

Vi får då...

$$P(X > 5 \mid X > 2) = \frac{P(X > 5)}{P(X > 2)} = \frac{1 - F_X(5)}{1 - F_X(2)} = \frac{e^{-0,3 \cdot 5}}{e^{-0,3 \cdot 2}} = e^{-0,9} = 0,407$$

Svar: 0,407

5) Givet:

$X \in N(2,8,\ 0,5)$

$Y \in N(2,8,\ 0,5)$

$Z = \max(X, Y)$

Vi beräknar nu $P(Z > 3)$ enligt:

$$P(\max(X, Y) > 3) = 1 - P(X < 3)P(Y < 3) = 1 - \phi\left(\frac{3 - 2,8}{0,5}\right)\phi\left(\frac{3 - 2,8}{0,5}\right) = 1 - \phi(0,4)\phi(0,4) =$$

$$= 1 - 0,6554 \cdot 0,6554 \approx 0,57$$

Svar: D

6) Givet:

$X \in P_o(256)$

240 testkit från början

256 arbetsdagar

Enligt sektion 6 i formelbladet vet vi att $P_o(\mu)$ approximeras av $N(\mu, \sqrt{\mu})$ om $\mu \geq 15$. Vi tillämpar nu detta och får:

$N(256, \sqrt{256})$

Vi undersöker nu sannolikheten att kiten kommer räcka enligt:

$$P(X \leq 240) = \phi\left(\frac{240 - 256}{\sqrt{256}}\right) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587 \approx 0,16$$

(där $N(256, \sqrt{256})$)

Svar: A

7) Givet:

$X \in Exp(\lambda), \quad x = 8$

$Y \in Exp(3\lambda), \quad y = 3$

$Z \in Exp(4\lambda), \quad z = 2$

$f_x = \lambda e^{-\lambda x}$ (Exp)

Vi bestämmer nu ML-skattningen av λ:

$$L(\theta) = \left(\lambda e^{-8\lambda}\right)\left(3\lambda e^{-3\lambda(3)}\right)\left(4\lambda e^{-4\lambda(2)}\right) = \left(\lambda e^{-8\lambda}\right)\left(3\lambda e^{-9\lambda}\right)\left(4\lambda e^{-8\lambda}\right) = 12\lambda^3 e^{-8\lambda + (-9\lambda) + (-8\lambda)} = 12\lambda^3 e^{-25\lambda}$$

Vi tar nu logaritmen av $L(\theta)$ för att förenkla derivering:

$$\ln(L(\theta)) = \ln(12) + 3\ln(\lambda) - 25\lambda$$

Vi deriverar nu och undersöker vad λ blir då $(\ln(L(\theta)))' = 0$ enligt:

$$(\ln(L\theta))' = 3\left(\frac{1}{\lambda}\right) - 25 = 0 \Rightarrow \frac{25}{3} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\left(\frac{25}{3}\right)} = 0,12$$

Svar: C

8) Givet:

$\bar{x} = 137 \quad \sigma_x^2 = 92{,}5 \quad n_x = 5$

$\bar{y} = 208 \quad \sigma_y^2 = 163 \quad n_y = 5$

Enligt sektion 11.3 i boken (två normalfördelade stickprov med olika varians; det vi har i det här fallet) får vi:

$$X - Y = N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}\right) = N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{\frac{92{,}5}{5} + \frac{163}{5}}\right) = N\left(\mu_x - \mu_y, \sqrt{51{,}1}\right)$$

Vi har nu en känt D men okänt θ där $N(\theta, D)$. Därmed använder vi λ-metoden enligt:

$$I_{\mu_x - \mu_y} = \theta^*_{obs} \pm D \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = \bar{x} - \bar{y} \pm \sqrt{51{,}1} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}$$

Ovanstående uttryck anger dock ett två sidigt konfidensintervall, vi vill ha ett ensidigt vilket vi får vid λ_α (ej $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$):

$$I_{\mu_x - \mu_y} = \left(-\infty, 137 - 208 + \sqrt{51{,}1} \cdot \lambda_\alpha\right) \text{ där } \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 = \left(-\infty, -71 + \sqrt{51{,}1} \cdot \underbrace{\lambda_{0{,}05}}_{\text{(Fås av tabell 2)}}\right) =$$

$$= \left(-\infty, -71 + \sqrt{51{,}1} \cdot 1{,}6449\right) \approx \left(-\infty, -59{,}24\right)$$

Svar: D

9) Givet:

Datamängd: 4, 9, 9, 13, 6, $n = 5$

$X_i \in Po(\mu)$

Vi skattar:

$E(X_i) = \mu$ med $\bar{x}$

$D(X_i) = \sqrt{\mu}$ med $\sqrt{\bar{x}}$

Enligt sektion 9,3 vet vi att $\overbrace{\text{medelfelet}}^{\left(\text{Allmän formel: } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$ i detta fall ges av skattning av $D(\mu)$, alltså:

$$D(\mu^*) = \frac{D(X_i)}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{\overset{\frac{4+9+9+13+6}{5} = 8{,}2}{\bar{x}}}}{\sqrt{\underset{=5}{n}}} = \frac{\sqrt{8{,}2}}{\sqrt{5}} \approx 1{,}28$$

Svar: A

10) Givet:

$X \in ffg(p)$

$H_0: p = 0{,}1$

$H_1: p = 0{,}4$

Observerar $x = 3$

P-värdet är P(förkasta H_0) om H_0 är sann, i vårt fall blir detta:

$$P(X \leq 3) = \underbrace{P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)}_{(X \in ffg(0{,}1))} = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 0{,}1(1-0{,}1)^{3-1} + 0{,}1(1-0{,}1)^{3-2} + 0{,}1(1-0{,}1)^{3-3} =$$

$$= 0{,}271$$

Svar: 0,271

11) Givet:

400 totalt antal hårdiskar ($n = 400$)

95 %, 375 inga fel ($x_1 = 375$, $p_1 = 0{,}95$)

3 %, 15 har ett fel ($x_2 = 15$, $p_2 = 0{,}03$)

2 %, 10 har mer än ett fel ($x_3 = 10$, $p_3 = 0{,}02$)

11 forts.)

Här testar vi given fördelning (sektion 14.3 - χ^2-test) där $np_j \geq 5$ $j=1,2,3$ enligt:

$$Q = \sum_{j=1}^{r} \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j} = \frac{(375 - 400 \cdot 0{,}95)^2}{400 \cdot 0{,}95} + \frac{(15 - 400 \cdot 0{,}03)^2}{400 \cdot 0{,}03} +$$

$$+ \frac{(10 - 400 \cdot 0{,}02)^2}{400 \cdot 0{,}02} = \frac{25}{380} + \frac{9}{12} + \frac{4}{8} = 1{,}3158$$

(ges av att vi har 3 scenarion)

Nu jämför vi Q med $\chi^2(r-1)$ där $r=3$ och $\alpha = 0{,}05$ och $0{.}01$ (från uppg.-beskrivning). Vi får då:

$$\begin{cases} \chi^2_{0{,}05}(3-1) = \chi^2_{0{,}05}(2) = 5{,}99 \\ \chi^2_{0{,}01}(3-1) = \chi^2_{0{.}01}(2) = 9{,}21 \end{cases}$$

Om $Q < \chi^2_\alpha(r-1)$ så förkastas INTE H_0, därmed kan varken H_0 förkastas på risknivån 1% eller 2% i vårt fall.

Svar: A

12) Andelen av de uppmätta data som ligger i en boxplott är 50% enligt boken.

Svar: A