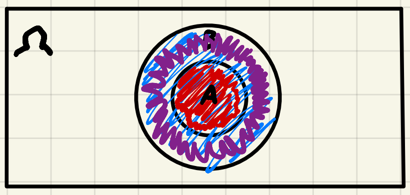
2022-04-21

1) Vi vet att:



$P(A) = 0,4 \quad P(B) = 0,7$

$P(A^* \cap B) = P(B) - P(A) = 0,7 - 0,4 = 0,3$

Svar: C

2) Vi beräknar först $E(X^2)$ och $E(X)$ enligt:

OBS! $|k|$ har både ett positivt och negativt värde (e.x. $|k| = 3 \Rightarrow k = \pm 3$)

$E(X) = 0^2 \cdot 0,3 + \overbrace{1 \cdot 0,2 + -1 \cdot 0,2}^{=0} + 2 \cdot 0,1 - 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,05 - 3 \cdot 0,5 = 0$

$E(X^2) = 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,2 + (-1)^2 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,1 + (-2)^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,05 + (-3)^2 \cdot 0,05 = 2,1$

Vi tar nu fram $V(X)$ enligt:

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2,1 - 0^2 = 2,1$

Svar: C

3) <u>Givet:</u>

$n = 7$ (7 dagar i en vecka)

$X \in Bin(7,\ 0,12)$

Vi beräknar nu $P(X \geq 2)$:

$P(X \geq 2) = 1 - \overbrace{P(X \leq 1)}^{\text{Diskret förd.}} = 1 - 0,798775 = 0,201$

4) Vi vet att:

$X_{Exp} \in Exp(\lambda)$

$E(X)_{Exp} = \frac{1}{\lambda} \quad , \quad V(X)_{Exp} = \frac{1}{\lambda^2}$

Då alla X_i är fördelade enligt $Exp(2)$

$E(X_i) = \frac{1}{2} \quad , \quad V(X_i) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \quad , \quad D(X_i) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

Då alla X_i är fördelade enligt $Exp(2)$ kan vi använda centrala gränsvärdessatsen och får:

$Y \in N(\mu n, \sigma\sqrt{n}) = N\left(\frac{1}{2}(100), \frac{1}{2}\sqrt{100}\right) = N\left(50, \frac{10}{2}\right) = N(50, 5)$

4 forts.)

Vi får då följande normalfördelning:

$$Y \in N(50,\ 5)$$

Vi standardiserar denna och får:

$$P(X \geq a) = \phi\left(\frac{a-50}{5}\right) = \phi\left(2{,}3263\right) = 0{,}01 \Rightarrow a = 2{,}3263 \cdot 5 + 50 \doteq 61{,}6$$

Svar: D

5) Då alla s.v. är beroende använder vi följande formel:

$$V(aX+bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab\,C(X,Y) \qquad \text{där} \quad \begin{cases} V(X) = 6 - 2^2 = 2 \\ V(Y) = 4 - 1^2 = 3 \end{cases}$$

...och:

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

...vilket ger:

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$V(X-2Y) = V(X) + (-2)^2V(Y) + 2(-2)(1)C(X,Y) = 2 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot -1 = 18$$

Svar: A

6) Vi sätter $Z = X + Y$ och får:

$$Z \in P_o(3+4) = P_o(7)$$

Detta ger:

$P(Z=5) \longrightarrow$ Detta tas fram genom att sätta in det i funktionen f_x, alltså:

$$f_{X(k)} = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} \qquad f_{X(k)}(7) = \frac{7^5}{5!}e^{-7} \approx 0{,}128$$

Svar: 0,128

7) Vi tar fram MK-skattningen:

$$E(X) = \frac{0+\theta}{2} = \frac{\theta}{2} \qquad E(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{0+2\theta}{2} = \theta \qquad E(Z) = \frac{0+3\theta}{2} = \frac{3\theta}{2}$$

$$Q(\theta) = \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^2 + \left(4 - \theta\right)^2 + \left(9 - \frac{3\theta}{2}\right)^2$$

$$-\frac{6}{2}\left(9 - \frac{3\theta}{2}\right) = -27 + \frac{18\theta}{4}$$

$$Q(\theta)' = 2\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(4-\theta\right)(-1) + 2\left(9 - \frac{3\theta}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -1\left(1 - \frac{\theta}{2}\right) - 2\left(4-\theta\right) - 3\left(9 - \frac{3\theta}{2}\right) = -1 + \frac{\theta}{2} - 8 + 2\theta - 27 + \frac{18\theta}{4} = -36 + \frac{14}{2}$$

7 forts) Vi sätter nu $Q'(\theta)=0$ och får:

$$Q'(\theta) = -36 + \frac{14\theta}{2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{36 \cdot 2}{14} \approx 5{,}14$$

Svar: C

8) Vi undersöker först om skattningarna är väntevärdesriktiga:

$$E(X) \underset{\text{Normalf.}}{=} \mu$$

$$\mu^*_{obs} = \frac{2x_1 + 3x_2}{5} = \frac{2(\mu)+3(\mu)}{5} = \mu \Rightarrow \mu = \mu \longrightarrow \text{Väntevärdesriktig!}$$

$$\hat{\mu}_{obs} = \frac{4x_1 + 9x_2}{13} = \frac{4\mu + 9\mu}{13} = \mu \Rightarrow \mu = \mu \longrightarrow \text{Väntevärdesriktig!}$$

Vi tar nu fram variansen av skattningarna:

$$V(\mu^*_{obs}) = V\left(\frac{2x_1 + 3x_2}{5}\right) = \frac{4V(x_1) + 9V(x_2)}{25} = \frac{4\sigma^2 + 9\sigma^2}{25} = \frac{4(3^2)+9(2^2)}{25} = \frac{72}{25}$$

$$\left(V(X) \underset{\text{Normalf.}}{=} \sigma^2\right)$$

$$V(\hat{\mu}_{obs}) = V\left(\frac{4x_1 + 9x_2}{13}\right) = \frac{16V(x_1) + 81V(x_2)}{169} = \frac{16\sigma^2 + 81\sigma^2}{169} = \frac{16(3^2)+81(2^2)}{169} = \frac{468}{169}$$

Då $\frac{72}{25} > \frac{468}{169}$ vet vi att $\hat{\mu}_{obs}$ klassas som mest effektiv (minst varians).

Svar: B

9) Vi får (med t-metoden):

$$I_\mu = 4{,}9 \pm \frac{0{,}9}{\underbrace{\sqrt{9}}_{(n=9)}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(9-1) = (3{,}893,\ 5{,}907)$$

Detta ger:

$$4{,}9 + \frac{0{,}9}{\sqrt{9}} \cdot t_{(1-\alpha)}(8) = 5{,}907 \Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}}(8) = \frac{5{,}907 - 4{,}9}{\left(\frac{0{,}9}{\sqrt{9}}\right)} \approx 3{,}3567$$ vilket ungefär motsvarar $\frac{\alpha}{2} = 0{,}005 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$

Med detta får vi konfidensgraden $(1-\alpha)$:

$1 - \alpha = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

Svar: 0,99

10) Givet:

$X \in Exp(\lambda)$

$H_0: \lambda = 1$, $H_1: \lambda = 3$

Detta ger:

$P(X \leq \frac{1}{6})$

10 forts.)

Vi tar fram $Exp(\lambda)$ sannolikhetsfunktion:

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx \Rightarrow u = -\lambda x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\lambda \Rightarrow \int_0^{-\lambda x} \frac{\lambda e^u du}{-\lambda} = \int_0^{-\lambda x} e^u du = \left[-e^u\right]_0^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}$$

Med detta får vi:

(där $H_0 : \lambda = 1$)

$$P(X \leq \tfrac{1}{6}) = f(\tfrac{1}{6}) = 1 - e^{-1 \cdot (\frac{1}{6})} \approx 0,15$$

Svar: A

11) Då $Q = 1,91$ och $n = 4$ får vi:

$f = n - 1 = 4 - 1 = 3$

$\chi^2_{0,05}(f) = \chi^2_{0,05}(3) = 7,81$

$\chi^2_{0.01}(f) = \chi^2_{0,01}(3) = 11,3$

Då både 7,81 och 11,3 är större än $Q = 1,91$ kan ingen förkastas.

Svar: A

12) Vi tar nu fram β^* och således α^* enligt:

$$\beta^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{76,044}{325,04} \approx 0,234$$

$$\alpha^* = \bar{y} - \beta^* \bar{x} = 5,6025 - 0,234 \cdot 19,407 \approx 1,06$$

Svar: A