2020-01-08

1) Givet:

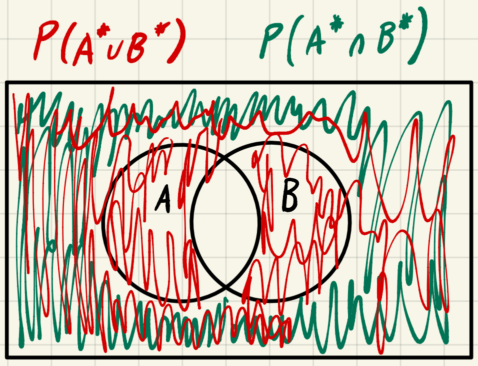
$P(A^* \cap B^*) = 0{,}1$

$P(A^* \cup B^*) = 0{,}7$

$P(B) = 0{,}6$

$P(A) = ?$

Vi skissar upp mängderna i ett venndiagram:



(Obs. ej skalenlig...)

Vi ser här att $P(A \cup B) = 1 - P(A^* \cap B^*) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

samt att $P(A \cap B) = 1 - P(A^* \cup B^*) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

Vi får nu fram $P(A)$ enligt:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0{,}9 - 0{,}6 + 0{,}3 = 0{,}6$$

Svar: C

2) Vi börjar med att derivera för att få täthetsfunktionen:

$$F_x' = f_x = \underbrace{0\,(x - 11 + c) + \frac{1}{2c}(1)}_{\text{Produktregeln}} = \frac{1}{2c}$$

Vi tar nu fram $E(X)$ och $E(X^2)$:

$$E(X) = \int f_x \cdot x \, dx = \int_{11-c}^{11+c} \frac{x}{2c} \, dx = \frac{1}{2c}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{11-c}^{11+c} = \frac{1}{2c}\left(\frac{(11+c)^2 - (11-c)^2}{2}\right) = \frac{1}{2c}\left(\frac{121 + 22c + c^2 - (121 - 22c + c^2)}{2}\right) = \frac{44c}{4c} = 11$$

$$E(X^2) = \int f_x \, x^2 \, dx = \int_{11-c}^{11+c} \frac{x^2}{2c} \, dx = \frac{1}{2c}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{11-c}^{11+c} = \frac{1}{2c}\left(\frac{(11+c)^3 - (11-c)^3}{3}\right) = \frac{1}{2c}\left(\frac{(121 + 22c + c^2)(11+c) - (121 - 22c + c^2)(11-c)}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{2c}\left(\frac{1331 + 242c + 11c^2 + 121c + 22c^2 + c^3 - (1331 - 242c + 11c^2 - 121c + 22c^2 - c^3)}{3}\right) = \frac{1}{2c}\left(\frac{1331 + 363c + 33c^2 + c^3 - (1331 - 363c + 33c^2 - c^3)}{3}\right) =$$

$$= \frac{0 + 726c + 0 + 2c^3}{3 \cdot 2c} = \frac{363 + c^2}{3}$$

Vi tar nu fram $V(x)$:

$$V(x) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{363 + c^2}{3} - 11^2 = \frac{363 + c^2}{3} - \frac{121 \cdot 3}{3} = \frac{c^2}{3}$$

Vi vet även att $V(X)=12$, alltså:

$$V(X)=\frac{c^2}{3}=12 \Rightarrow c^2=3\cdot 12 = c=\sqrt{36}=\pm 6$$

Då variansen av en stokastisk variabel aldrig kan vara negativ vet vi att $c=6$

Alternativ lösning:

Vi ser även att $f_x=\frac{1}{2c}$ kan jämställas med en likformig fördelning $U(a,b)$: $f_x=\frac{1}{b-a}$ vilken har variansen $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$ eller i vårt fall: $V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(2c)^2}{12}$ där $V(X)=12$, alltså:

$\frac{(2c)^2}{12}=12 \Rightarrow 4c^2=144 \Rightarrow c=\sqrt{\frac{144}{4}}=\pm 6 \longrightarrow$ V(X) kan ej vara negativt $\longrightarrow c=6$

Svar: 6

3) Vi vet att:

$D(X)=\sqrt{2}$, $D(Y)=\sqrt{5}$

...vi får då:

$$\rho(X,Y)=\frac{C(X,Y)}{D(X)D(Y)} \Rightarrow -\frac{2}{3}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)=C(X,Y)\approx -2{,}11$$

Nu använder vi följande formel enligt (då X, Y är beroende):

$V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)+2abC(X,Y)$ (finns ej på formelbladet...)

Vi får alltså:

$$V(3X-4Y)=(3)^2V(X)+(-4)^2V(Y)+2(3\cdot -4)C(X,Y)=9V(X)+16V(Y)-24C(X,Y)=9\cdot 2+16\cdot 5-24\cdot -2{,}11\approx 148{,}6$$

Svar: D

4) Givet:

$p=0{,}7$

$n=10$, $x=\frac{10}{2}=5$

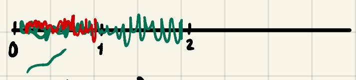
$X\in Bin(10,\ 0{,}7)$

Vi får:

$P(X\geq 5)=1-P(X\leq 4)$ $(X\in Bin(10, 0{,}7))$ $\longrightarrow$ Då 0,7 inte finns i tabell kan vi istället ta fram $P(X\leq 5)\approx 0{,}95$ (Max 5 inte beställer) $(X\in B(10, 1-0{,}7)=B(10, 0{,}3))$

5) Vi inför en ny s.v. $W=(X+Y+Z)$ där $W\in P_o(1+0{,}5+0{,}9)=P_o(2{,}4)$

Vi söker nu:



$$P(W=2)=P(W\leq 2)-P(W\leq 1)=0{,}56971-0{,}30844=0{,}26127$$

Svar: 0,261

6) Givet:

$X \in N(500, 100)$

Vi tar nu fram $P(X \geq \alpha) = 0{,}1$ genom standardisering av $N(500, 100)$

$$P(X \geq \alpha) = \phi\left(\frac{\alpha - 500}{100}\right) = 0{,}1 \Rightarrow \phi\left(\frac{\alpha - 500}{100}\right) = \phi(1{,}2816) \Rightarrow \frac{\alpha - 500}{100} = 1{,}2816 \Rightarrow \alpha = 100 \cdot 1{,}2816 + 500 \approx 628$$

Svar: B

7) Vi tar fram MK-skattningen:

$$Q = \left(1{,}4075 - \frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(0{,}7142 - \frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(0{,}4004 - \frac{2}{\lambda}\right)^2 =$$

$$Q' = 2\left(1{,}4075 - \frac{2}{\lambda}\right) \cdot \frac{2}{\lambda^2} + 2\left(0{,}7142 - \frac{2}{\lambda}\right) \cdot \frac{2}{\lambda^2} + 2\left(0{,}4004 - \frac{2}{\lambda}\right) \cdot \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}\left(\left(2{,}815 - \frac{4}{\lambda}\right) + \left(1{,}4284 - \frac{4}{\lambda}\right) + \left(0{,}8008 - \frac{4}{\lambda}\right)\right) = \frac{2}{\lambda^2}\left(5{,}0442 - \frac{12}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{10{,}0884}{\lambda^2} - \frac{24}{\lambda^3}$$

Vi sätter $Q' = 0$:

$$\frac{10{,}0884}{\lambda^2} - \frac{24}{\lambda^3} = 0 \Rightarrow \frac{10{,}0884}{\lambda^2} = \frac{24}{\lambda^3} \Rightarrow 10{,}0884\lambda^3 = 24\lambda^2 \Rightarrow 10{,}0884\lambda^3 - 24\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(10{,}0884\lambda - 24) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}, \ \lambda_3 = \frac{24}{10{,}0884} \approx 2{,}379$$

Svar: B

8) Vi får:

$$\begin{cases} x_1 = 262 - 252 = 10 \\ x_2 = 272 - 262 = 10 \\ x_3 = 284 - 278 = 6 \\ x_4 = 298 - 282 = 16 \\ x_5 = 294 - 278 = 16 \end{cases}$$

$$\bar{x} = \frac{10 + 10 + 6 + 16 + 16}{5} = 11{,}6$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\left((10-11{,}6)^2 + (10-11{,}6)^2 + (6-11{,}6)^2 + (16-11{,}6)^2 + (16-11{,}6)^2\right)} = \sqrt{18{,}8}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - 0{,}95}{2} = 0{,}025$$

Intervallet ges alltså av:

$$I = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 11{,}6 \pm \frac{\sqrt{18{,}8}}{\sqrt{5}} \cdot t_{0{,}025}(4) \approx (7{,}47,\ 15{,}73)$$

Svar: B

9) Då $H_1: \mu < 5$ vet vi att vi jobbar med ett ensidigt uppåt begränsat intervall där λ_α.

Då σ är okänd vet vi även att $D^*_{obs} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Det enda alternativet som matchar är F.

Svar: F

10) Vi får:

$$P(X \leq 1700) = \phi\left(\frac{1700-1800}{\left(\frac{300}{\sqrt{9}}\right)}\right) = \phi(-1) = 1-\phi(1) = 1-0{,}8413 \approx 0{,}159$$

Svar: D

11) Vi har här att $Q \sim \chi^2$ fördelad med $(4-1-1)=2$ frihetsgrader eftersom vi har ett test av en fördelning med en skattad parameter. Då har vi att $Q \sim \chi^2(2)$ och eftersom det gäller att $\chi^2_{0,05}(2) = 5{,}99$ och $\chi_{0,01}(2) = 9{,}21$. Eftersom $5{,}99 < \underbrace{6{,}5329}_{Q}$ så kan vi förkasta H_0 på risknivå 5% men inte på 1% då $9{,}21 > \underbrace{6{,}5329}_{Q}$.

12) Vi vet att $\beta_{obs} = 2$ och intervallet måste därmed vara symmetriskt kring det men också 0 eftersom effekten som belysningsindex har på jordgubbsvikten inte är signifikant på 5% nivån.

Snok