2022-06-08

1) Givet:

$P(A) = 0{,}5$

$P(B) = 0{,}3$

$P(A \cap B) = 0{,}1$

$P(A^*) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

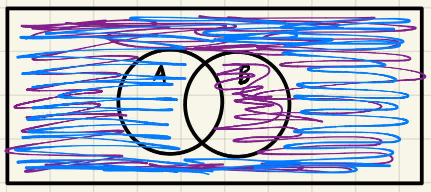
$P(B^*) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$

Sökt:

$P(A \cup B \mid A^* \cup B^*)$

Vi tar fram $P(A \cup B)$ och $P(A^* \cup B^*)$ enligt:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}7$



$(P(A^*))$ $(P(B^*))$

Vi ser av venndiagrammet att: $P(A^* \cup B^*) = 1 - P(A \cap B) = 0{,}9$

Vi får nu att:

$P(A^* \cup B^*)$ $P(A \cup B)$

Vilket ger... $P((A^* \cup B^*) \cap (A \cup B)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}1 = 0{,}6$

$$P(A \cup B \mid A^* \cup B^*) = \frac{P((A^* \cup B^*) \cap (A \cup B))}{P(A^* \cup B^*)} = \frac{0{,}6}{0{,}9} = \frac{2}{3}$$

Svar: B

2) Givet:

$f_X = 2xe^{1-x^2}$ där $x \geq c > 0$

Sökt:

c

Allmänt gäller:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

...men eftersom $x \geq c > 0$ vet vi att:

$$\int_{c}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Detta ger...

$$\int_{c}^{\infty} 2xe^{1-x^2}dx = 1 \Rightarrow u = 1-x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-2x} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\infty \\ u_2 = 1-c^2 \end{cases} \Rightarrow \int_{1-c^2}^{-\infty} \frac{2xe^u}{-2x}du = \int_{1-c^2}^{-\infty} -e^u du = -\left[e^u\right]_{1-c^2}^{-\infty} =$$

$$= -(\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} - e^{1-c^2}) = e^{1-c^2} = 1 \Rightarrow \ln(e^{1-c^2}) = \ln(1) \Rightarrow 1-c^2 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases} \rightarrow \text{Då } c > 0 \text{ vet vi att } c = 1$$

Svar: B

3) Givet:

$p_{X,Y}(j,k)$	0	1	2
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$

$D(XY) = \sqrt{V(XY)}$

$V(XY) = E(X^2Y^2) - (E(XY))^2$

Vilket ger...

$V(XY) =$ Wtf?

Då X och Y antas vara beroende (inget annat sägs) får vi följande:

$E(XY) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$

$E(X^2Y^2) = 0^2 \cdot 0^2 \cdot \frac{1}{12} + 1^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{6}$

Vidare har vi följande:

$D(XY) = \sqrt{V(XY)} = \sqrt{E(X^2Y^2) - (E(XY))^2} = \sqrt{\frac{5}{6} - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{18}} = 0{,}624$

4) <u>Givet:</u>

20 min period

$\mu = 2,5$

Period 10:00 - 11:00

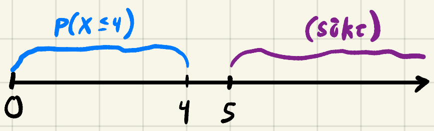
$$p_X(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

Notera; Varje 20 minut blir en egen stokastisk variabel X_n och det totala väntevärdet ges därmed av:

$$E(X) = \underbrace{E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)}_{(1\ h)} = 3 \cdot 2,5 = 7,5$$

Vi beräknar nu:

$$P(X \geq 5) = 1 - \overbrace{\underbrace{P(X \leq 4)}_{\substack{\text{(KOLLA I TABELL)} \\ \mu = 7,5}}}^{\text{(Diskret så 5 ingår inte)}} = 1 - 0,13206 = 0,86794 \approx 0.87$$



Svar: D

5) <u>Givet:</u>

23 cm avstånd mellan två stöd som håller kex

$\mu = 2$

$D(X) = 0,3$

Vi vet att tjockleken är normalfördelad som $N(2, 0,3)$. Vi använder nu centrala gränsvärdessatsen enligt:

$$Y_n = N(n\mu, \sqrt{n}\sigma) = N(12 \cdot 2, \sqrt{12} \cdot 0,3) = N(24, 0,3\sqrt{12})$$

Detta ger...

$$P(X \leq 23) = \phi\left(\frac{23-24}{0.3\sqrt{12}}\right) \approx 1 - (0,96) = 1 - 0,8315 = 0,1685 \approx 0,17$$

6)

7) Givet:

$$f_x(x) = \frac{x}{a} e^{-(x/a)^2}, \quad x > 0, \ a > 0$$

$x_1 = 5, \quad x_2 = 12$

Vi tar nu fram ML-skattningen av a enligt:

$$L(a) = \left(\frac{5}{a^2} e^{-(5/a)^2}\right)\left(\frac{12}{a^2} e^{-(12/a)^2}\right) = \frac{60}{a^2} e^{-\frac{169}{a^2}}$$

Vi förenklar nu den kommande deriveringen genom att ta fram $\ln(L(a))$:

$$\ln(L(a)) = \ln(60) - 2\ln(a) - \frac{169}{a^2}$$

Vi sätter nu $\ln(L(a)) = 0$ och får:

$$\ln(L(a))' = 0 - \frac{2}{a} - (-2)\cdot\frac{169}{a^3} = -\frac{2}{a} + \frac{338}{a^3} = 0 \Rightarrow \frac{338}{a^3} = \frac{2}{a} \Rightarrow 338a = 2a^3 \Rightarrow \sqrt{\frac{338}{2}} = a = 13$$

Svar: 13

8) Givet:

$X \in Bin(n, p)$

$n = 600$

Medelfelet ges av $D\left(\frac{X}{n}\right)$, alltså:

$$V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{V(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$D\left(\frac{X}{n}\right) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Vi vet även att $p = \frac{x}{n} = \frac{60}{600} = 0{,}1$, alltså:

$$\sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{600}} \approx 0.0122$$

Svar: A

9) Givet:

$$\bar{x} = \frac{4,82+4,25+3,96+3,73+3,32}{5} = 4,016$$

$\alpha = 1 - 0,99 = 0,01$

Då vi varken vet μ eller σ så använder vi t-metoden:

$$I_\mu = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\left((4,82-4,016)^2 + (4,25-4,016)^2 + (3,96-4,016)^2 + (3,73-4,016)^2 + (3,32-4,016)^2\right)} \approx 0,5636$$

(Ej $\frac{\alpha}{2}$ då vi ska ta fram ett ensidigt intervall.)

$$I_\mu = 4,016 - \frac{0,5636}{\sqrt{5}} \cdot t_{0,01}(\underbrace{4}_{(n-1)}) = 4,016 - \frac{0,5636}{\sqrt{5}} \cdot \overbrace{3,75}^{\text{(ges av tabell 3)}} \approx 3,07$$

Vi får alltså följande intervall:

$$I_\mu = (3,07,\ \infty)$$

Svar: B

10) Givet:

$n = 18$ $\quad X \in Bin(n, p)$

$p = 0,5$

Vi beräknar nu styrkan:

$$P(X \geq 11) = 1 - P(\underbrace{X \leq 10}_{(X \in Bin(18,\ 0,5))}) = 1 - 0,94235$$

11) Givet:

$X \in N(\mu, 3)$

Vi börjar med att ta fram μ & σ för skattningen:

$$E(\bar{x}) = \frac{x_1 + x_2 \ldots x_n}{n} = \frac{\mu n}{n} = \mu$$

$$D(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{}$$

12) Då p-värden < α i båda fallen så kan H_0 förkastas i båda fall och därmed är effekten signifikant i båda fallen.