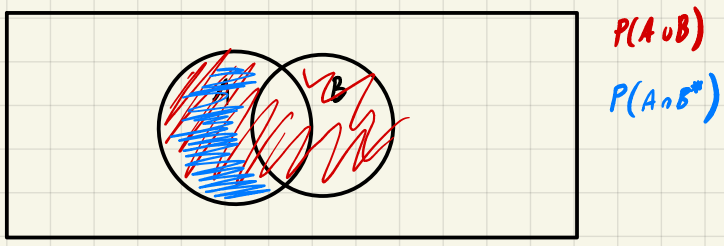
2023-01-01

1) Givet:

$P(A|B) = 0{,}6,\quad P(A\cup B) = 0{,}9,\quad P(A\cap B^*) = 0{,}4$

Vi får då följande venndiagram:



$\longrightarrow$ Vi ser att $P(B) = P(A\cup B) - P(A\cap B^*) = 0{,}9 - 0{,}4 = 0{,}5$

(Obs! - Ej skalenlig...)

Med $P(B)$ får vi:

$$P(A|B) = \frac{P(B\cap A)}{P(B)} \Rightarrow P(B\cap A) = P(A|B)\,P(B) = 0{,}3$$

Slutligen tar vi fram $P(A)$:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) \Rightarrow P(A) = P(A\cup B) - P(B) + P(A\cap B) = 0{,}9 - 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}7$$

Svar: C

2) Vi vet att $E(X)$ ges av:

$$E(X) = \int f_x\, x\, dx = \int_0^1 Cx^{a-1}x\,dx = \int_0^1 Cx^a dx = C\int_0^1 x^a dx = C\left[\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_0^1 = C\left(\frac{\overbrace{1^{a+1}}^{=1 \text{ då } 1^x=1}}{a+1} - 0\right) = \frac{C}{a+1}$$

Vi vet även att $\int f_x\,dx = 1$:

$$\int_0^1 f_x\,dx = \int_0^1 Cx^{a-1}dx = C\left[\frac{x^a}{a}\right]_0^1 = C\left(\frac{1^a}{a} - 0\right) = \frac{C}{a} = 1 \Rightarrow C = a$$

Detta ger...

$$E(X) = \frac{1}{6} = \frac{C}{a+1} = \frac{\overbrace{a}^{C=a}}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{a+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6a = a+1 \Rightarrow 5a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Svar: A

3) Vi vet att:

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Vi tar nu fram följande:

$$E(X) = 0 \cdot (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3) + 1 \cdot (0{,}3 + 0{,}1 + 0) = 0{,}4$$

$$E(Y) = 0 \cdot (0{,}1 + 0{,}3) + 1 \cdot (0{,}2 + 0{,}1) + 2 \cdot (0{,}3 + 0) = 0{,}9$$

$$E(XY) = 0 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 = 0{,}1$$

Vi får alltså:

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0{,}1 - 0{,}4 \cdot 0{,}9 = -0{,}26$$

Svar: B

4) <u>Givet:</u>

5 tomtar, 4 grisar, totalt 9

Detta ger:

$$\frac{\binom{5}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = 0{,}444\ldots$$

Svar: C

5) Givet:

$$\mu_{\text{Alla bussikor}} = 2{,}9 \cdot 50 = 145$$

$$\sigma_{\text{Alla b.}} = 1{,}8 \cdot 50 = \frac{90}{\sqrt{50}}$$

166?

Vi tar nu fram $P(X > a) = 0{,}05$:

$$P(X > a) = \phi\left(\frac{a - 145}{\left(\frac{90}{\sqrt{50}}\right)}\right) = \phi(1{,}6449) \Rightarrow a \approx 166$$

Svar: A

6) Givet:

$P(P \mid TC) = 0{,}69$

$P(N \mid TC^*) = 0{,}92$

$P(TC) = 0{,}02$

$P(TC^*) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

Sökt:

$P(TC^* \mid N)$

Vi använder Bayes sats och får:

$$P(TC^* \mid N) = \frac{P(N \mid TC^*) \cdot P(TC^*)}{P(N \mid TC^*) P(TC^*) + P(P \mid TC^*) P(TC^*)} = 0{,}92$$

Svar: B

7) Vi börjar med att undersöka skattningarnas väntevärdesriktighet:

$$\boxed{E(X)_{P_0} = \mu}$$

$$\mu^*_{obs} = \frac{X_1 + X_2}{3} = \frac{\mu + 2\mu}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu \longrightarrow \underbrace{\mu}_{(E(\lambda)_{P_0})} = \mu \longrightarrow \text{Väntevärdesriktig}$$

$$\hat{\mu}_{obs} = \frac{X_1 + \frac{X_2}{2}}{2} = \frac{\mu + \frac{2\mu}{2}}{2} = \frac{\mu + \mu}{2} = \frac{2\mu}{2} = \mu \longrightarrow \underbrace{\mu}_{(E(\lambda)_{P_0})} = \mu \longrightarrow \text{Väntevärdesriktig}$$

Vi vet även att den skattning med minst varians klassas som mest effektiv:

$$\boxed{V(X)_{P_0} = \mu}$$

$$V(\mu^*_{obs}) = V\left(\frac{X_1 + X_2}{3}\right) = \frac{V(X_1) + V(X_2)}{3^2} = \frac{\mu + 2\mu}{9} = \frac{\mu}{3}$$

$$V(\hat{\mu}_{obs}) = V\left(\frac{X_1 + \frac{X_2}{2}}{2}\right) = \frac{V(X_1) + \left(\frac{1}{2^2}\right)V(X_2)}{2^2} = \frac{\mu + \frac{1}{4}(2\mu)}{4} = \frac{3\mu}{8}$$

$\Rightarrow$ Då $\frac{\mu}{3} < \frac{3\mu}{8}$ vet vi att μ^*_{obs} är den mest effektiva skattningen av μ.

Svar: A

8) Vi bestämmer ML-skattningen enligt:

$$f_{X_{Exp}} = \lambda e^{-\lambda x}$$

Vi får:

$$L(\lambda) = \left(\lambda e^{-\lambda(7,3)}\right)\left(3\lambda e^{-3\lambda(2,6)}\right)\left(4\lambda e^{-4\lambda(1,6)}\right) = 12\lambda^3 e^{-21,5}$$

Vi tar nu fram $\ln(L(\lambda))$ för att förenkla derivering:

$$\ln(L(\lambda)) = \ln\left(12\lambda^3 e^{-21,5}\right) = \ln 12 + 3\ln\lambda - 21,5\lambda$$

...vilket vid derivering blir:

$$\ln(L(\lambda))' = 0 + \frac{3}{\lambda} - 21,5$$

Vi sätter $\ln(L(\lambda))' = 0$ och får:

$$\ln(L(\lambda))' = \frac{3}{\lambda} - 21,5 = 0 \Rightarrow \frac{3}{\lambda} = 21,5 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{21,5} \approx 0,14$$

Svar: A

9) Vi använder formeln för två normalfördelade stickprov med samma varians och får:

$\bar{X} - \bar{Y}$ är $N\left(\mu_1 - \mu_2,\ s\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\right)$

9 forts.)

s i eт fås i sin tur av:

$$s^2 = \frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2} = \frac{(6-1)\cdot 8{,}8 + (12-1)\cdot 3{,}04}{6+12-2} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{(6-1)\cdot 8{,}8 + (12-1)\cdot 3{,}04}{6+12-2}} = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$$

$\bar{X} - \bar{Y}$ är alltså: $N\left(\mu_x - \mu_y,\ s\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\right) = N\left(\mu_x - \mu_y,\ 2{,}2\cdot\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}\right)$

Vi får nu följande intervall:

$$I_{\mu_x-\mu_y} = (\bar{x} - \bar{y}) \pm s\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n_x+n_y-2) = (49{,}2 - 37{,}4) \pm 2{,}2\cdot\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} \cdot t_{\frac{0{,}01}{2}}\overbrace{(6+12-2)}^{(n_x+n_y-2)} = 11{,}8 \pm 1{,}1 \cdot \overbrace{2{,}92}^{t_{0{,}005}(16)} = (8{,}59,\ 15)$$

Svar: B

10) Vi får:

$$\bar{x} = \frac{64+70+78+84+100+102}{6} = 83$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{6-1}\left((64-83)^2 + (70-83)^2 + (78-83)^2 + (84-83)^2 + (100-83)^2 + (102-83)^2\right)} = \sqrt{241{,}2}$$

Då vi jobbar med en χ^2-fördelning får vi:

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$$

=> Vilket i ett uppåt begränsat intervall gör: $I_{\sigma^2} = \left(-\infty,\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right) = \left(-\infty,\ \frac{(6-1)\sqrt{241{,}2}^2}{\chi^2_{1-0{,}05}(6-1)}\right) =$

$$= \left(-\infty,\ \frac{1206}{\chi^2_{0{,}95}(5)}\right) = \left(-\infty,\ \frac{1206}{1{,}15}\right) \approx (-\infty,\ 1048{,}7)$$

Svar:

11) Vi tar först fram:

$\chi^2_{0{,}05}(3-1) = \chi^2_{0{,}025}(2) = 5{,}99$

$\chi^2_{0{,}05}(3-1) = \chi^2_{0{,}05}(2) = 7{,}38$

$\Longrightarrow$ Då $Q > 5{,}99$ och $Q > 7{,}38$ kan H_0 förkastas vid båda risknivåerna.

Svar: B

12) Här använder vi formel 13.1a och 13.1b för att få fram α^*_{obs} och β^*_{obs}:

$$\bar{x} = \frac{5+9+13+15}{4} = 10{,}5$$

$$\overline{\ln y} = \frac{17+29+36+45}{4} = 31{,}75$$

$$\beta^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(\ln(y_i)-\overline{\ln y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-10{,}5)(y_i-31{,}75)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-10{,}5)^2} \approx 2{,}6356$$

$$\alpha^* = \bar{y}-\beta\cdot\bar{x} = \overline{\ln y}-\beta\bar{x} = 31{,}75-2{,}6356\cdot 10{,}5 = 4{,}0762$$

Vid insättning får vi:

$$\ln(y_i) = \alpha+\beta x_i+\varepsilon_i \Rightarrow \ln(y_i(20)) = 4{,}0762+2{,}6356\cdot 20 = 56{,}7882 \Rightarrow$$

$$e^{\ln(y_i(20))} = y_i(20) = e^{56{,}7882} = 4{,}6\cdot 10^{24}$$ //

Svar: C