

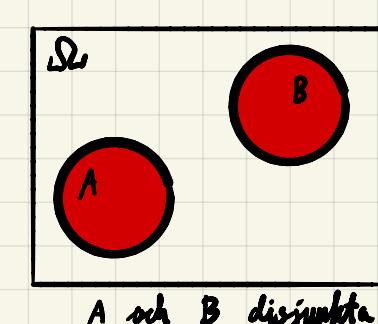
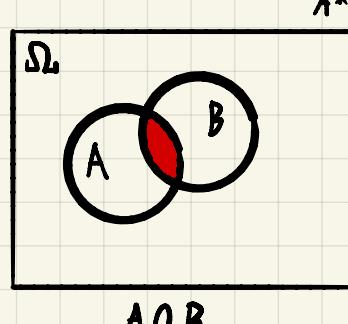
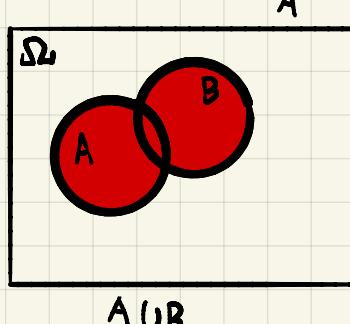
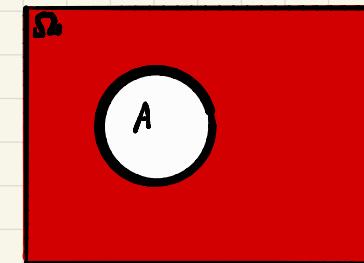
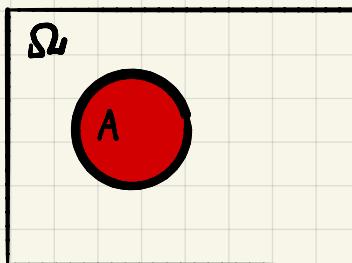
Kombinatorik

	Med återläggning	Utan återläggning	
Med ordning	n^k	$n(n-1) \cdots (n-k+1)$	$n \rightarrow$ Antal element i en mängd
utan ordning	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$	$k \rightarrow$ Antal element som dras ur en mängd.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{OBS! Ej permutation; kombination!})$$

Betingad Sannolikhet (Sannolikheten att B händer
givet att A händer)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$



Bayes Sats

Låt A_1, \dots, A_n vara n disjunkta händelser...

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B | A_j) P(A_j)}$$

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)} \quad \text{← (Om } n=1, \text{ specialfall)}$$

Komplement

$$P(A) = 1 - P(A^c) \quad \boxed{A \quad A^c}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$$

$$P(A^c \cup B) = 1 - P(A \cap B^c)$$

Disjunkta

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$A \cap B = \emptyset$$

Additionssatsen

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Oberoende

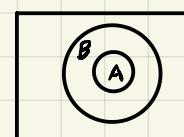
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) && \text{(Om } A \text{ och } B \text{ är oberoende)} \\ P(B | A) &= P(B) \end{aligned}$$

Om A och B är oberoende så är även A^c och B det.

Lagen om total sannolikhet (slumpmässigt vald...)

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i) P(A_i)$$

$$\begin{aligned} A \subset B \\ \text{(zillhör)} \end{aligned}$$



Stokastiska variabler

Poissonfördelning

- Diskret fördelning som ofta används när något utspelar sig över en tidsperiod
- Sannolikhetsfunktionen för en stokastisk variabel $X \in Po(\mu)$ ges av:

$$P_x(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

där $k = 0, 1, 2, \dots$ och $\mu > 0$

Väntevärde: $E(X) = \mu$

Varians: $V(X) = \mu$

Täthetsfunktion $f_X(x)$

- Om X är en kontinuerlig stokastisk variabel gäller:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

- Allmänt gäller:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

(då totala sannolikheten alltid är 1)

$$0 \leq f_X(x) \leq 1$$

- För kontinuerliga stokastiska variabler gäller även:

$$f(a) \neq P(X=a)$$

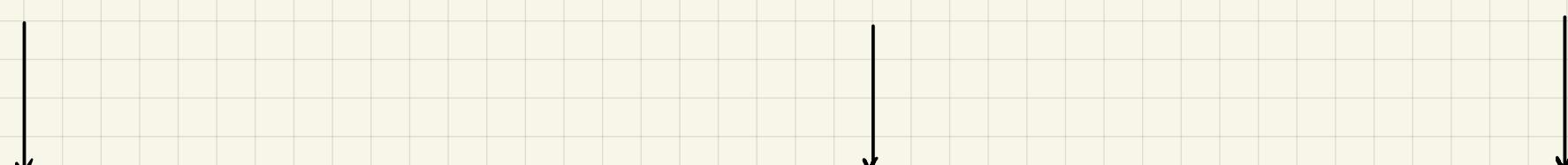
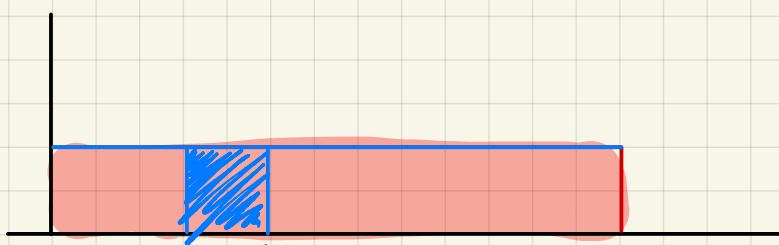
$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

- Likformig fördelning

$$\int_a^b f_X(x) dx \text{ där...}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{(b-a)}$$

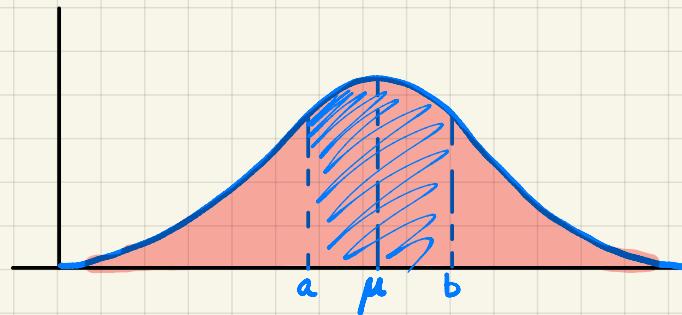
$$(a < x < b)$$



• Normalfördelning

$$\int_a^b f_x(x) dx \text{ där...}$$

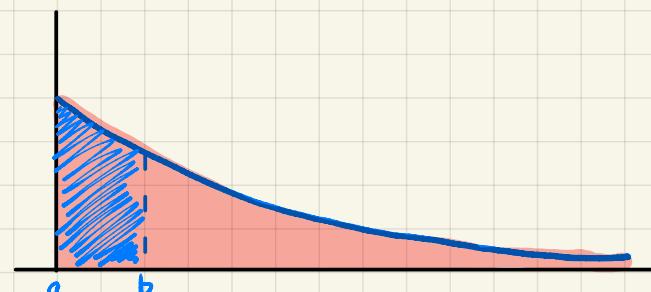
$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}}$$



• Exponentialfördelning

$$\int_a^b f_x(x) dx \text{ där...}$$

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$



$$\cdot f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{för } x \geq 0 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

$$\cdot \text{Väntevärde: } E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\cdot \text{Varians: } V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\cdot P(X > A | X > B) = P(X > A - B)$$

Bionomialfördelning

• Vi vet hur många försök n vi ska göra

• Försöken är oberoende av varandra

• Det finns endast två möjliga utfall; p och $p-1$

• Samolikhefsfunktion:

$$P_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ där } n \text{ är antalet försök och } 0 \leq p \leq 1$$

• Väntevärde:

$$E(X) = np$$

• Varians:

$$V(X) = np(1-p)$$

Multinomialfördelning

• Vi vet hur många försök n vi ska göra

• Försöken är oberoende av varandra

• Det finns mer än två möjliga utfall; p och $p-1$

• Samolikhefsfunktion:

$$P_{X_1, \dots, X_r}(k_1, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r} \quad (\text{Varje försök kan resultera i } r \text{ möjliga utfall})$$

$$\cdot \sum_{i=1}^r p_i = 1 \quad (\text{Summan av sannolikheten av alla utfall är 1})$$



Miniräknare

• 2ND → **DISTR**

$$\left\{ \begin{array}{l} A: \text{binompdf}(n, p, k) \\ B: \text{binomcdf}(n, p, k) \end{array} \right.$$

Används om man söker sannolikheten för ett specifikt värde e.g. $P(X = A)$

Används om man söker sannolikheten för ett specifikt värde eller något mindre e.g. $P(X \leq A)$

För $P(X > A)$ kan man nyttja $P(X > A) = 1 - P(X \leq A)$



$$\cdot \sum_{i=1}^r k_i = n \quad (\text{Summan av samtliga utfall är } n)$$

Fördelningsfunktion $F_X(x)$

- Fördelningsfunktionen för en kontinuerlig stokastisk variabel ges av:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Varians

- $V(X) = E((X - \mu)^2)$
- $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Standardavvikelse

- $\sigma = \sqrt{V(X)}$
- $V(X) = \sigma^2$

Sannolikhetsfunktion

- Om X är en **diskret** stokastisk variabel gäller:

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b P_X(k) \quad (\text{där } P_X(k) \geq 0 \text{ för alla } k \text{ och } \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = 1)$$

ML-Metoden

- Diskret:

$$L(\theta) = P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(x_i; \theta)$$

- Kontinuerlig:

$$L(\theta) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

- Populärt knep: maximera $\ln(L(\theta))$ i stället för $L(\theta)$.

Varians / Kovarians

- $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) + 2ab C(X, Y)$ (**beroende** X, Y)
- $V(aX + bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$ (**oberoende**)
- $V(aX + b) = V(aX)$

- $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$
- $D(X) = \sqrt{V(X)}$
- $V(X) = (D(X))^2$
- $C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Väntevärdesriktighet

- En punktskattning θ_{obs}^* sägs vara väntevärdesriktig om: $E(\theta^*) = \theta$
- Vid jämförelse av skattningar används variansen av skattningarna. Skattningen med minst varians klassas som mest effektiv.