2020-10-16

1) Givet:

$P(B_i) = 0{,}7 \quad P(S \mid B_i) = 0.02$

$P(B_å) = 0{,}2 \quad P(S \mid B_å) = 0{,}05$

$P(C_y) = 0{,}1 \quad P(S \mid C_y) = 0{,}1$

Vi tillämpar nu lagen om total sannolikhet:

$$P(S) = P(S \mid B_i)P(B_i) + P(S \mid B_å)P(B_å) + P(S \mid C_y)P(C_y) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}034$$

Svar: 0,034

2) Vi vet att $E(X)$ och $E(X^2)$ ges av:

$$E(X) = \int_0^5 f_x \, x \, dx = \int_0^5 0{,}08x^2 dx = 0{,}08\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^5 = 0{,}08\left(\frac{5^3}{3} - 0\right) = \frac{10}{3}$$

$$E(X^2) = \int_0^5 f_x \, x^2 dx = \int_0^5 0{,}08x^3 dx = 0{,}08\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^5 = 0{,}08\left(\frac{5^4}{4} - 0\right) = 12{,}5$$

I sin tur får vi fram $V(X)$ enligt:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 12{,}5 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \approx 1{,}39$$

3) Vi vet att:

$D(3X - 2Z + Y - 3) = D(3X - 2Z + Y)$ då alla stokastiska variabler är oberoende.

...samt att:

$$D(3X - 2Z + Y) = \sqrt{V(3X - 2Z + Y)} = \sqrt{V(3X) + V(-2Z) + V(Y)} = \sqrt{3^2 V(X) + (-2)^2 V(Z) + V(Y)}$$

...dessutom vet vi att $D(X) = \sqrt{V(X)}$, alltså:

$D(X) = 2 \Rightarrow V(X) = 2^2 = 4$

$D(Y) = 5 \Rightarrow V(Y) = 5^2 = 25$

$D(Z) = 3 \Rightarrow V(Z) = 3^2 = 9$

Vi får nu:

$$D(3X - 2Z + Y - 3) = \sqrt{3^2 V(X) + (-2)^2 V(Z) + V(Y)} = \sqrt{3^2(4) + (-2)^2(9) + (25)} = \sqrt{97} \approx 9{,}85$$

Svar: D

4) Vi vet att:

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(Y=1 \cap X=1)}{P(Y=1)}$$

...samt att:

$$P(X=1) = 1 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{12}$$

$$P(Y=1) = 1 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$$

Vi ser även att $P(Y=1 \cap X=1) = \frac{1}{4}$ från angivna tabellen.

Detta ger:

$$P(X=1 \mid Y=1) = \frac{P(Y=1 \cap X=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{3}{5}$$

Svar: D

5) Vi börjar med att standardisera $N(-4, 2)$ enligt:

$$\underbrace{P(X > a) = \phi\left(\frac{a-(-4)}{2}\right)}_{\text{se tabell 2.}} = \phi\left(\frac{a+4}{2}\right) \Rightarrow \phi\left(\frac{a+4}{2}\right) = \phi(1{,}6449) \Rightarrow \frac{a+4}{2} = 1{,}6449 \Rightarrow a = 2 \cdot 1{,}6449 - 4 \approx -0{,}71$$

$a+4 = 2 \cdot$

Svar: A

6) <u>Givet:</u>

$n = 10$

$p = 0.2$

$X \in Bin(10, 0{,}2)$

Vi får nu:

$$P(X \geq 2) = \underbrace{1 - P(X \leq 1)}_{\text{Diskret fördelning...}} = 1 - 0{,}37581 = 0{,}62419 \approx 0{,}62$$

$X \in Bin(10, 0{,}2)$, $x=1$

Svar: C

7) Vi beräknar ML-skattningen enligt:

$$f_X = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$L(\mu) = \left(\frac{\mu^{13}}{13!} e^{-\mu}\right)\left(\frac{(3\mu)^{31}}{31!} e^{-3\mu}\right)\left(\frac{(5\mu)^{55}}{55!} e^{-5\mu}\right) = \frac{3^{31} \cdot 5^{55} \cdot \mu^{99}}{13! \cdot 31! \cdot 55!} e^{-9\mu}$$

Vi tar nu fram $\ln(L(\mu))$:

$$\ln(L(\mu)) = \ln(3^{31} \cdot 5^{55}) + 99\ln(\mu) - \ln(13! \cdot 31! \cdot 55!) - 9\mu$$

7 forts.)

Vi deriverar nu $\ln(L(\mu))$ och sätter $\ln(L(\mu))' = 0$:

$$\ln(L(\mu))' = 0 + \frac{99}{\mu} - 0 - 9 = 0 \Rightarrow \frac{99}{\mu} = 9 \Rightarrow \frac{99}{9} = \mu \Rightarrow \mu = 11$$

Svar: 11

8) Vi bestämmer felet genom att ta fram standardavvikelsen av skattningen:

$$d(p^*) = D\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt{V\left(\frac{x}{n}\right)} = \sqrt{\frac{V(x)}{n^2}} = \sqrt{\frac{np^*(1-p^*)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n}} = \sqrt{\frac{p^*-(p^*)^2}{n}}$$

Vi sätter nu $p^* = \frac{x}{n}$ och får:

$$D\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt{\frac{p^*-(p^*)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{x}{n}-\left(\frac{x}{n}\right)^2}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n^2}}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{xn}{n^2}-\frac{x^2}{n^2}}{n}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{xn-x^2}{n^2}\right)}{n}} = \sqrt{\frac{xn-x^2}{n^3}} = \sqrt{\frac{x(n-x)}{n^3}}$$

Svar: D

9) Givet:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$, $n = 12$, $m = 12$, $\alpha = 0{,}1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}05$

I vanliga fall när man skattar 1 variabel tar man $t_{\frac{\alpha}{2}}(f)$ där $f = n-1$. Men eftersom Vi skattar 2 variabler tar vi istället $f = n+m-2$. Vi får alltså:

$$t_{\frac{\alpha}{2}}(n+m-2) = t_{0{,}05}(12+10-2) = t_{0{,}05}(20) = 1{,}72$$

Då vi arbetar med ett tvåsidigt intervall vet vi även att det ges av $|t|$. Alltså:

$|t| > 1{,}72$

Svar: C

10) Vi beräknar:

$$P(X \geq 13) = 1 - \underbrace{P(X \leq 12)}_{X \in P_o(7)} = 1 - 0{,}97300 = 0{,}027$$

Svar: B

11) Givet:

$X \in N(\mu, 1)$

$H_0: \mu = 0$, $H_1: \mu = 1$

Vi får alltså:

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ och söker $P(\bar{x} \geq 0{,}56)$

11 forts.)

Vi vet även att $n = 4$ och att $D(\bar{X}) = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Vi standardiserar :

$$P(\bar{X} \geq 0{,}56) = 1 - \underbrace{P(\bar{x} \leq 0{,}56)}_{X \in N(1,1)} = 1 - \phi\left(\frac{0{,}56 - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{0{,}56 - 1}{\frac{1}{\sqrt{4}}}\right) = 1 - \phi(-0{,}88) = 1 - (1 - \phi(0{,}88)) = 0{,}8106$$

Svar: C

12) 1) Konfidensintervallet I_β måste innehålla β^*_{obs} då intervallet är symmetriskt runt β^*.

2) Konfidensintervallet får ej innehålla 0 eftersom effekten som belysningindex har på jordgubbsvikten är signifikant.

A är det enda alternativ som uppfyller dessa krav.

Övrig notering:

$$\frac{0{,}35 + 3{,}65}{2} = \frac{4}{2} = 2 = \beta^*_{obs}$$