2022-12-21

1) Givet:

$F(X) = \frac{x(6-x)}{8}$

Vi tar fram $f(x)$

$$F(x) = \frac{6x - x^2}{8}$$

$$f(x) = \frac{6}{8} - \frac{2x}{8}$$

Nu tar vi fram $E(X^2)$ enligt:

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\left(\frac{6-2x}{8}\right)dx = \frac{1}{8}\int_0^2 6x^2 - 2x^3 dx = \frac{1}{8}\left[\frac{6x^3}{3} - \frac{2x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{8}{8} = 1$$

Svar: B

2) Vi beräknar $P(Y<3)$:

$$\int_0^\infty\int_1^3 xe^{-xy}dy\,dx \Rightarrow u = -xy \Rightarrow \frac{du}{dy} = -x \Rightarrow dy = -\frac{du}{x} \Rightarrow \text{Gränser: } \begin{cases} u_1 = -3x \\ u_2 = -x \end{cases} \Rightarrow \int_0^\infty\int_{-x}^{-3x} \frac{xe^u\,du\,dx}{-x} = -\int_{-\infty}^{0}\left[e^u\right]_{-x}^{-3x}dx =$$

$$= \int_0^\infty -e^{-3x} + e^{-x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}dx - \int_0^\infty e^{-3x}dx \Rightarrow u = -3x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -3 \Rightarrow dx = \frac{du}{-3} \Rightarrow \text{Gränser: } \begin{cases} u_1 = -\infty \\ u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x}dx - \int_0^{-\infty} e^u \frac{du}{-3} = \int_0^\infty e^{-x}dx + \frac{1}{3}\left[e^u\right]_0^{-\infty} =$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}dx - \frac{1}{3} \Rightarrow u = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow \frac{du}{-1} = dx \Rightarrow \text{Gränser: } \begin{cases} u_1 = -\infty \\ u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \int_0^{-\infty} \frac{e^u\,du}{-1} - \frac{1}{3} = -\left[e^u\right]_0^{-\infty} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Svar: D

3) Givet:

$D(X) = D(Y) = D(Z) = 2$

Z oberoende av X och Y

$D(2X - Y + 3Z) = 8$

Sökt:

$C(X,Y)$

Vi tar fram variansen:

$$V(2X - Y + 3Z) = 2^2V(X) + 2(2)(-1)C(X,Y) + (-1)^2V(Y) + \overbrace{3^2V(Z)}^{\text{oberoende av } X,Y} =$$

$$= 4V(X) - 4C(X,Y) + V(Y) + 9V(Z) = 8^2 = 64$$

$(V(X) = (D(X))^2)$

Vi vet även att:

$D(X) = D(Y) = D(Z) = 2$ och att $V(X) = (D(X))^2$

vilket innebär:

$V(X) = V(Y) = V(Z) = 2^2 = 4$

$$4V(X) - 4C(X,Y) + V(Y) + 9V(Z) = 4(4) - 4C(X,Y) + (4) + 9(4) = 8 \Rightarrow$$

$$16 - 4C(X,Y) + 4 + 36 = 56 - 4C(X,Y) = 64 \Rightarrow C(X,Y) = \frac{(64-56)}{-4} = -2$$

Svar: B

4) Givet:

5 räkor

7 svamp

4 köttfärs

$5+7+4=16$ totalt

Vi får:

$$P = \frac{\overbrace{\binom{5}{2}\binom{7}{1}}^{P(\text{en svamp, två räkor})} + \underbrace{\binom{5}{3}}_{P(\text{tre räkor})}}{\underbrace{\binom{16}{3}}_{\text{Vi tar 3 av 16 totalt}}}$$

5) Givet:

$P(B) = 0{,}15$

$P(R) = 0{,}85$

Då vi söker sannolikheten för röda hyaciner så vet vi att $p = P(R) = 0{,}85$

Vi beräknar nu $P(X \geq 10)$ enligt:

$$P(X \geq 10) = 1 - \underbrace{P(X \leq 9)}_{\text{Ges av } Bin(12,\, 0{,}85),\ x=9} \approx 0{,}736$$

Alternativt vet vi att $P(X \geq 10) = P(X \leq 2)$ (max 2 blåa innebär minst 10 röda då det bara finns två färger):

$\underbrace{P(X \leq 2)}_{\text{där } p=0{,}15 \text{ och } n=12} \approx 0{,}736$ enligt tabell 6.

6) Givet:

$A \in N(2{,}3\ ,\ 1{,}5)$

$B \in N(1{,}7\ ,\ 2{,}1)$

Vi beräknar nu $B-A$ och $P(X \geq 1)$ enligt:

$$B - A \in N\left(\mu_B - \mu_A, \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_A^2}\right) = N\left(1{,}7 - 2{,}3, \sqrt{2{,}1^2 + 1{,}5^2}\right) = N\left(-0{,}6\ ,\ \sqrt{6{,}66}\right)$$

Vi standardiserar nu $N(-0{,}6\ ,\ \sqrt{6{,}66})$ till $N(0,1)$ enligt:

$$\underbrace{P(X \geq 1)}_{N(0{,}6\ ,\ \sqrt{6{,}66})} = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \phi\left(\frac{1-(-0{,}6)}{\sqrt{6{,}66}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{1{,}6}{\sqrt{6{,}66}}\right) = 1 - \phi(0{,}62) = 0{,}2676$$

Svar: 0,2676

7) Givet:

$X_1 \in Bin(200, p)$

$X_2 \in Bin(400, p)$

$x_1 = 42$

$x_2 = 76$

Vi bestämmer nu MK-skattningen av p enligt:

$$Q = \left(\underbrace{42}_{x_1} - \underbrace{200p}_{E(X)=np \text{ för Bin.}}\right)^2 + \left(76 - 400p\right)^2$$

Vi deriverar nu Q:

$$Q' = \underbrace{2(42-200p)200}_{\text{Kedjeregeln}} + 2(76-400p)400 = 16800 - 80000p + 60800 - 320000p =$$

$$= 77600 - 400000p$$

Det p som minimerar Q ges där $Q'=0$, alltså:

$$77600 - 400000p = 0 \Rightarrow p = \frac{-77600}{-400000} = 0{,}194$$

Svar: A

(2018-12-19)

7 Alt2) Givet:

$X \in Exp(\lambda)$

$x_1 = 18$

$x_2 = 34$

$x_3 = 12$

Vi bestämmer nu MK-skattningen av λ enligt:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Q = \left(18 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(34 - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(12 - \frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$Q' = \frac{2}{\lambda^2}\left(18 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{2}{\lambda^2}\left(34 - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{2}{\lambda^2}\left(12 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda^2}\left(\left(18 - \frac{1}{\lambda}\right) + \left(34 - \frac{1}{\lambda}\right) + \left(12 - \frac{1}{\lambda}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left(18 - \frac{1}{\lambda} + 34 - \frac{1}{\lambda} + 12 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda^2}\left(64 - \frac{3}{\lambda}\right) = \frac{128}{\lambda^2} - \frac{3}{\lambda^3}$$

Vi sätter nu $Q' = 0$ och får:

$$\frac{128}{\lambda^2} - \frac{6}{\lambda^3} = 0 \Rightarrow \frac{128}{\lambda^2} = \frac{6}{\lambda^3} \Rightarrow 128\lambda^3 = 6\lambda^2 \Rightarrow 128\lambda^3 - 6\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(128\lambda - 6) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \frac{6}{128} \approx 0.0469$$

Svar: A

(2018-12-20)

7 Alt3) Givet:

$X \in ffg(p)$ där $0 \le p \le 1$

$x_1 = 12$

$x_2 = 19$

Vi bestämmer nu MK-skattningen enligt:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$Q = \left(12 - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(19 - \frac{1}{p}\right)^2$$

$$Q' = \frac{2}{p^2}\left(12 - \frac{1}{p}\right) + \frac{2}{p^2}\left(19 - \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{p^2}\left(\left(12 - \frac{1}{p}\right) + \left(19 - \frac{1}{p}\right)\right) = \frac{2}{p^2}\left(31 - \frac{2}{p}\right) = \frac{62}{p^2} - \frac{4}{p^3}$$

Vi sätter nu $Q' = 0$ och får:

$$\frac{62}{p^2} - \frac{4}{p^3} = 0 \Rightarrow \frac{62}{p^2} = \frac{4}{p^3} \Rightarrow 62p^3 = 4p^2 \Rightarrow 62p^3 - 4p^2 = 0 \Rightarrow p^2(62p - 4) = 0 \Rightarrow p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = \frac{4}{62} = \frac{2}{31}$$

Svar: $\frac{2}{31}$

8) Givet:

$X \in U(0, 4\theta)$

$Y \in U(0, 2\theta)$

$x = 7{,}3$

$y = 3{,}2$

$$V(X) = \frac{(4\theta - 0)^2}{12} = \frac{16\theta^2}{12} = \frac{4\theta^2}{3}$$

$$V(Y) = \frac{(2\theta - 0)^2}{12} = \frac{4\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3}$$

Vi beräknar nu $V(\theta^*)$ enligt:

$$V(\theta^*) = V\left(\frac{X+Y}{3}\right) = \frac{1}{3^2}V(X) + \frac{1}{3^2}V(Y) = \frac{1}{9}\left(\frac{4\theta^2}{3}\right) + \frac{1}{9}\left(\frac{\theta^2}{3}\right) = \frac{4\theta^2}{27} + \frac{\theta^2}{27} = \frac{5\theta^2}{27}$$

Detta ger följande skattning:

$$D(\theta^*) = \theta\sqrt{\frac{5}{27}} \quad \left(\text{då} \quad D(X) = \sqrt{V(X)}\right)$$

Medelfelet för skattningen blir då:

$$D(\theta^*) = \underbrace{\theta^*}_{= \frac{x+y}{3}}\sqrt{\frac{5}{27}} = \frac{x+y}{3}\sqrt{\frac{5}{27}} = \frac{7{,}3 + 3{,}2}{3}\sqrt{\frac{5}{27}} \approx 1{,}506$$

Svar: D

9) <u>Givet:</u>

Datamängd: 2, 4, 11, 9, 4

Vi beräknar nu konfidensintervallet enligt:

Då varje μ_i och σ_i är okända så använder vi t-metoden och får...

$I_\mu = \bar{x} \pm D^*_{obs} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(f)$ (ett konfidensintervall för θ med konfidensgraden $1-\alpha$.)

$$D^*_{obs} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$f = n - \underbrace{1}_{\text{Då vi skattar "1" variabel.}}$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Detta ger...

$$\bar{x} = \frac{2+4+11+9+4}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$f = 5 - 1 = 4$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{4}\left((2-6)^2 + (4-6)^2 + (11-6)^2 + (9-6)^2 + (4-6)^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}(58)} = \sqrt{14,5}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0,95}{2} = 0,025$$

$t_{\frac{\alpha}{2}}(\overset{(f)}{4}) = 2,78$ enligt tabell 3.

Sammantaget får vi:

$$I_\mu = 6 \pm \frac{\sqrt{14,5}}{\sqrt{5}} \cdot 2,78 \approx 10,734$$

Den övre gränsen blir alltså ~10,73.

Svar: D

10) <u>Givet:</u>

Rödgröna = 0,492 $(X \in Bin(n,p))$

Felmarginal = 0,02

Konfidensgrad = 0,95

Detta ger:

$$0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$$

Vi använder nu Approximativa metoden enligt:

$I_p = p^*_{obs} \pm \overbrace{\underbrace{D^*_{obs}}_{\text{Medelfel}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}}^{\text{(felmarginal)}}$ där D^*_{obs} ges av $D\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt{V\left(\frac{x}{n}\right)} \Rightarrow V\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^2} V(x) =$

$$= \frac{1}{n^2} n p^*_{obs}(1-p^*_{obs}) = \frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n} \Rightarrow$$

$$D\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}}$$

$$I_p = p^*_{obs} \pm \sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}}$$

10 forts.)

Vi får alltså:

$$I_p = p^*_{obs} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}}}_{\text{(felmarginal)}}$$

Detta ger:

$$\sqrt{\frac{p^*_{obs}(1-p^*_{obs})}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = \underbrace{0{,}02}_{\text{(Enligt uppgiftsbeskrivning)}}$$

Vi vet även att $\lambda_{\frac{\alpha}{2}} = \lambda_{0{,}025}$ och att $p^*_{obs} = 0{,}492$ vilket ger följande:

$$\frac{\sqrt{0{,}492(1-0{,}492)}}{\sqrt{n}} \cdot 1{,}9600 = 0{,}02 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sqrt{0{,}492(1-0{,}492)} \cdot 1{,}96}{0{,}02} \Rightarrow n = \left(\frac{\sqrt{0{,}492(1-0{,}492)} \cdot 1{,}96}{0{,}02}\right)^2 \approx 2400$$

Svar: C

11) Givet:

$X \in ffg$

$H_0: p = 0{,}1$

$H_1: p = 0{,}25$

Observation: $x \leq 3$

Styrkan hos testet ges av P(förkasta H_0) om H_1 är sann, detta ger:

$P(\underbrace{X \leq 3}_{\text{(Observation)}})$ där $X \in ffg(\underbrace{0{,}25}_{H_1: p=0{,}25})$

$$P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0{,}25(1-0{,}25)^{1-1} + 0{,}25(1-0{,}25)^{2-1} + 0{,}25(1-0{,}25)^{3-1} =$$

$$= 0{,}25 + 0{,}1875 + 0{,}140625 = 0{,}58$$

Svar: C

12) Givet:

Reklam (kkr)	28	39	45	53	59
Försäljning (kkr)	315	335	340	350	352

$y_i = \alpha + \beta x_i + \gamma x_i^2 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, 5$

y_i = försäljning (kkr), x_i = reklamkostnad (kkr)

$\alpha^*_{obs} = 239{,}3, \quad \beta^*_{obs} = 3{,}42, \quad \gamma^*_{obs} = -0{,}026$

$I_\beta(0{,}99) = (-2{,}45,\ 9{,}30)$

$I_\gamma(0{,}99) = (-0{,}09,\ 0{,}04)$

Då $\beta = 0 \in I_\beta(0{,}99)$ så kan vi inte förkasta $\beta = 0$ på 1% nivån => ej signifikant. Detta medför även att P-värdet > 0,01

Då $\gamma = 0 \in I_\gamma(0{,}99)$ så kan vi inte förkasta $\gamma = 0$ på 1% nivån heller => ej signifikant. Detta medför även att P-värdet > 0,01