2022-05-31

1) Givet:

$$P(P \mid S) = 0{,}98$$

$$P(N \mid \neg S) = 0{,}97$$

$$P(P \mid \neg S) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$$

$$P(N \mid S) = 1 - 0{,}98 = 0{,}02$$

$$P(S) = \frac{5}{1000}$$

$$P(\neg S) = 1 - \frac{5}{1000} = \frac{995}{1000}$$

Vi får:

$$P(\neg S \mid P) = \frac{P(P \mid \neg S)P(\neg S)}{P(P \mid \neg S)P(\neg S) + P(P \mid S)P(S)} \approx 0{,}859$$

Svar: D

2) Givet:

$$Y = -2X + 1$$

$$P\left(Y > \tfrac{1}{2}\right) = P\left(-2X + 1 > \tfrac{1}{2}\right) = P\left(-2X > \tfrac{1}{2} - 1\right) = P\left(-2X > -\tfrac{1}{2}\right) = P\left(X < \left(\frac{-\frac{1}{2}}{-2}\right)\right) = P\left(X < \tfrac{1}{4}\right)$$

...vi får nu:

$$0 \leq x \leq \tfrac{1}{4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} f_X(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{4}} 2x\,dx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 0 = \frac{1}{16}$$

Svar: A

3) Givet:

$$E(X) = 0\,(0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1) + 1\,(0{,}1 + 0{,}2 + 0) + 2\,(0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1) = 0{,}9$$

$$E(Y) = 0\,(0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1) + 1\,(0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1) + 2\,(0{,}1 + 0 + 0{,}1) = 0{,}9$$

$$E(XY) = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}1}_{=0} + 1^2 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 + 2^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}8$$

...detta ger:

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0{,}8 - 0{,}9 \cdot 0{,}9 = -0{,}01$$

Svar: A

4) Givet:

$p_{\text{sch}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$

$X \in Hyp(18, 4, \frac{2}{9})$

Vi beräknar:

$$P(X=2) = p_X(2) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{18\cdot\frac{2}{9}}{2}\binom{18(1-\frac{2}{9})}{4-2}}{\binom{4}{2}} = 0,178$$

Svar: C

5) Givet:

$$E(X)_{Exp} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{E(x)} = \frac{1}{4}$$

$$D(X)_{Exp} = (V(X))^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{(\frac{1}{4})} = 4$$

$X \in Exp(\frac{1}{4})$

100 samtal $X_1, X_2, \ldots X_{100}$ totalt

Vi får (m.h.a centrala gränsvärdessatsen):

$$Y \in N(\mu n, \sigma\sqrt{n}) = N(4\cdot 100, 4\sqrt{100}) = N(400, 40)$$

Detta ger:

$$P(Y > \underbrace{6\cdot 60}_{\text{(Gör om från timmar till minuter)}}) = 1 - \phi\left(\frac{360-400}{40}\right) = 1 - (1 - \phi(1)) = 0,8413$$

Svar: C

6) Givet: (10:30 → 10:50 → 20min)

$X \in P_o(2\cdot 1,3) = P_o(2,6)$

Vi ska ta fram $P(2 < X < 5)$; alltså:

$$P(2 < X < 5) = P(X \le 4) - P(X \le 2) = 0,87742 - 0,51843 \approx 0,36$$

Svar: B

7) Vi får:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i)^2 = \left(-3{,}6 - (-2{,}7\theta)\right)^2 + \left(9{,}3 - 7{,}9\theta\right)^2 = \left(-3{,}6 + 2{,}7\theta\right)^2 + \left(9{,}3 - 7{,}9\theta\right)^2$$

$$Q' = 0 \Rightarrow Q' = 2\left(-3{,}6 + 2{,}7\theta\right)(2{,}7) + 2\left(9{,}3 - 7{,}9\theta\right)(-7{,}9) = -19{,}44 + 14{,}58\theta - 146{,}94 + 124{,}82\theta = 139{,}4\theta - 166{,}38 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{166{,}38}{139{,}4} \approx 1{,}19$$

Svar: B

8) Vi undersöker först väntevärdesriktighet:

$$X \in U(0, 4\theta), \quad Y \in U(0, 2\theta) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{0 + 4\theta}{2} = 2\theta \\ E(Y) = \frac{0 + 2\theta}{2} = \theta \end{cases}$$

$$\theta^*_{obs} = \frac{x + 2y}{4} \Rightarrow E(\theta^*_{obs}) = \frac{E(X) + 2E(Y)}{4} = \frac{2\theta + 2(\theta)}{4} = \theta$$ Väntevärdesriktig!

$$\hat{\theta}_{obs} = \frac{x + y}{3} \Rightarrow E(\hat{\theta}_{obs}) = \frac{E(X) + E(Y)}{3} = \frac{2\theta + \theta}{3} = \theta$$ Väntevärdesriktig!

Vi använder nu variansen av skattningarna för att undersöka vilken som kan klassas som mest effektiv (minst varians):

$$V(X) = \frac{(4\theta - 0)^2}{12} = \frac{16\theta^2}{12} = \frac{4\theta^2}{3}, \quad V(Y) = \frac{(2\theta - 0)^2}{12} = \frac{4\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3}$$

$$V(\theta^*_{obs}) = V\left(\frac{X + 2Y}{4}\right) = \frac{V(X) + 2^2 V(Y)}{4^2} = \frac{V(X) + 4V(Y)}{16} = \frac{\frac{4\theta^2}{3} + 4\left(\frac{\theta^2}{3}\right)}{16} = \frac{\frac{8\theta^2}{3}}{16} = \frac{\theta^2}{6}$$

$$V(\hat{\theta}_{obs}) = V\left(\frac{X + Y}{3}\right) = \frac{V(X) + V(Y)}{3^2} = \frac{\frac{4\theta^2}{3} + \frac{\theta^2}{3}}{3} = \frac{\frac{5\theta^2}{3}}{3} = \frac{5\theta^2}{9}$$

Då $\frac{5\theta^2}{9} > \frac{\theta^2}{6}$ vet vi att θ^*_{obs} är mest effektiv (minst varians).

Svar: C

9) Vi arbetar med 2 stickprov med samma varians:

$$I_\mu = \bar{x} - \bar{y} \pm s\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n_x+n_y-2) \quad \text{där} \quad s = \sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_y^2}{n_x+n_y-2}} \quad (\text{ges av } 11.2b)$$

Vi söker dock enbart övre gränsen;

$$I_{\mu(\text{övre})} = \bar{x} - \bar{y} + s\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n_x+n_y-2) = \bar{x} - \bar{y} + \sqrt{\frac{(n_x-1)s_x^2 + (n_y-1)s_x^2}{n_x+n_y-2}}\sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}(n_x+n_y-2) =$$

$$= (19{,}5 - 13{,}9) + \sqrt{\frac{(10-1)4{,}06 + (10-1)3{,}48}{10+10-2}}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}\, t_{\frac{0{,}05}{2}}(10+10-2) = 5{,}6 + \sqrt{\frac{67{,}86}{18}}\sqrt{\frac{2}{10}}\, t_{0{,}025}(18) = 5{,}6 + 1{,}823496641 \approx 7{,}42$$

Svar: D

10) Givet:

$X \in Bin(800, p)$

Detta ger följande:

$$p^*_{obs} = \frac{742}{800}$$

$$I_p = p^*_{obs} \pm D\left(\frac{x}{n}\right) \cdot \lambda_\alpha \quad \text{där} \quad D\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt{V\left(\frac{x}{n}\right)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n^2}} = \sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{742}{800}\right)\left(1-\left(\frac{742}{800}\right)\right)}{800}} \approx 0{,}00917$$

(Ensidigt begränsat)

...alltså:

$$I_p = \frac{742}{800} - 0{,}00917 \cdot \underbrace{\lambda_{0,1}}_{=1{,}2816} \approx (0{,}916, \infty)$$

Svar: D

11) Givet:

$X \in Bin(8, p)$

Vi beräknar:

$$P(X > 2) = 1 - \underbrace{P(X \leq 2)}_{(X \in Bin(8,\, 0{,}25))} = 1 - 0{,}67854 \approx 0{,}32$$

Svar: C

12) Om p-värde $< \alpha$ förkasta H_0, annars inte

Då $0 \in I_\gamma(0{,}95)$ kan vi inte förkasta H_0 här; p-värdet för $H_{0,\gamma} > 0{,}05$

Vi ser även att $I_\gamma(0{,}95)$ är symmetriskt kring skattningen $\beta^*_{obs} = 3{,}42$; alltså

är $H_{0,\beta} < 0{,}05$ då $H_{0,\beta}$ kan förkastas.

Då $0 \in I_\gamma(0{,}95)$ vet vi även att termen som γ multipliceras med ej

är signifikant.

Svar: A