2022-03-14

1) Givet:

$P(A) = P(B) = 0{,}5$

$P(C) = 0{,}3$

Vi får:

$P(\text{högst två händelser inträffar}) = 1 - P(\text{alla tre händelser inträffar}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}925$

Svar: 0,925

2) Vi börjar med att ta fram sannolikhetsfunktionen $F_x$ enligt:

$$F_x = \int f_x\,dx = \int_1^x \frac{C}{x^4}\,dx = C\int_1^x x^{-4}\,dx = C\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^x = C\left(\frac{x^{-3}}{-3} - \frac{1^{-3}}{-3}\right) = C\left(\frac{1}{-3x^3} + \frac{1}{3}\right) \quad \frac{3}{-3x^3} + 1 = 1 - \frac{1}{x^3}$$

Vi tar nu fram $C$ enligt:

$$\int f_x\,dx = 1 \Rightarrow \int_1^\infty \frac{C}{x^4}\,dx = C\int_1^\infty x^{-4}\,dx = C\left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^\infty = C\left(\underbrace{\frac{1}{-3x^3}}_{(x\to\infty)} + \frac{1}{3(1)^3}\right) = C\left(0 + \frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{C}{3} = 1 \Rightarrow C = 3$$

...vilket ger:

$$F_x = \frac{C}{-3x^3} + \frac{C}{3} = \frac{3}{-3x^3} + \frac{3}{3} = -\frac{1}{x^3} + 1$$

...alltså:

$$P(X \geq 5) = 1 - \underbrace{P(X \leq 5)}_{\left(\frac{C}{x^4}\text{ är kontinuerlig}\right)} = 1 - F_x(5) = 1 - \left(-\frac{1}{(5)^3} + 1\right) = 1 - (0{,}992) = 0{,}008$$

Svar: C

3) Vi tar fram $V(X^2)$ enligt:

$$V(X^2) = E(X^4) - (E(X^2))^2$$

...vi får alltså:

$$E(X^2) = 0^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + 1^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{12}$$

$$E(X^4) = 0^4\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + 1^4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) = \frac{7}{12}$$

3 forts.)

Detta ger...

$V(x^2) = E(x^4) - (E(x^2))^2 = \frac{7}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 \approx 0{,}24$ //

Svar: B

4) Givet:

8 fisk $\quad tot = 8 + 12 + 10 = 30$

12 nöt $\quad p = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

10 fjäder

$X \in Bin\left(4, \frac{4}{15}\right)$

Vi får:

$P(X = 2) = binompdf\left(4, \frac{4}{15}, 2\right) \approx 0{,}23$ //

$\left(X \in Bin\left(4, \frac{4}{15}\right)\right)$

Svar: D

5) Givet:

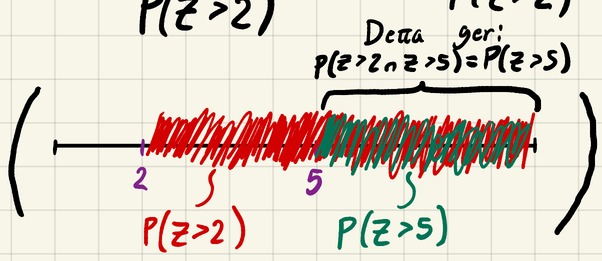
$X \in P_o(2), \quad Y \in P_o(2)$

$Z = X + Y$ där $Z = X + Y \in P_o(2+2) = P_o(4)$

(Notera att $P(X > 5)$ därmed blir det $P(X \leq 5)$
och inte $P(X \leq 4)$...)

Vi får nu:

$$P(Z > 5 \mid Z > 2) = \frac{P(Z > 2 \cap Z > 5)}{P(Z > 2)} = \frac{P(Z > 5)}{P(Z > 2)} = \frac{1 - P(Z \leq 5)}{1 - P(Z \leq 2)} = \frac{1 - 0{,}78513}{1 - 0{,}21487} \approx 0{,}28$$ //




Svar: A

6) Givet:

$X \in N(0, 3)$

$Y \in N(0, 3)$

Detta ger:

$Z = X - Y \in N\left(0 - 0, \sqrt{3^2 + 3^2}\right) = N\left(0, \sqrt{18}\right)$

6 forts.)

$$P(|z|>2) = 1 - P(|z|<2) = 1 - P(-2<z<2) = 1 - \left(\phi\left(\frac{2-0}{\sqrt{18}}\right) - \phi\left(\frac{-2-0}{\sqrt{18}}\right)\right) = 1 - \left(\phi(0{,}47) - \left(1-\phi(0{,}47)\right)\right) = 1 - \left(0{,}6808 - (1-0{,}6808)\right) \approx$$

$$\approx 0{,}64$$

Svar: C

7) Givet:

$$\bar{x} = \frac{82+91+122}{3} = \frac{295}{3}$$

$$I_{\mu\,(\text{övre})} = \bar{x} + D(\bar{x}) \cdot \lambda_\alpha \quad \text{där} \quad D(\mu^*_{obs}) = D(\bar{x}) = \sqrt{V(\bar{x})} = \sqrt{V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)} = \sqrt{\frac{V(\sum_{i=1}^{n} x_i)}{n^2}} = \sqrt{\frac{nV(x_i)}{n^2}} = \sqrt{\frac{V(x_i)}{n}} = \sqrt{\frac{\mu}{n}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{295}{3}\right)}{3}} = \sqrt{\frac{295}{9}}$$

Vi får:

$$I_\mu = \bar{x} + D(\bar{x}) \cdot \lambda_\alpha = \frac{295}{3} + \sqrt{\frac{295}{9}} \cdot 1{,}6449 = (-\infty, 107{,}75]$$

Svar: A

8) Vi tar fram $D(\bar{x})$ enligt:

$$D(\bar{x}) = \sqrt{V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)} = \sqrt{\frac{nV(X_i)}{n^2}} = \sqrt{\frac{V(X_i)}{n}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{n}} = \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{n}} = \frac{\bar{x}}{\sqrt{n}}$$

Svar: D

9) Vi får:

$$X_i \in U(\theta, 7\theta) \iff E(X_i) = \frac{\theta + 7\theta}{2} = \frac{8\theta}{2} = 4\theta$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_i)^2 = (28-4\theta)^2 + (19-4\theta)^2 + (22-4\theta)^2$$

Vilket vid derivering ger...

$$Q' = 2(28-4\theta)(-4) + 2(19-4\theta)(-4) + 2(22-4\theta)(-4) = -224 + 32\theta - 152 + 32\theta - 176 + 32\theta = -552 + 96\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{552}{96} = 5{,}75$$

Svar: D

10) Givet:

Litet värde på $X$ innebär $P(X \leq 3)$; alltså:

$$P(X < 3) = p_X(1) + p_X(2) + p_X(3) = 0{,}1\left(1-0{,}1\right)^{1-1} + 0{,}1\left(1-0{,}1\right)^{2-1} + 0{,}1\left(1-0{,}1\right)^{3-1} = 0{,}271$$

Svar: D

11) Homogenitetstest innebär att om $Q > \chi^2((r-1)(s-1))$ förkasta $H_0$, annars inte.

I vårt fall är $r = 8$, $s = 2$, alltså:

$$\chi^2((8-1)(2-1)) = \chi^2(7) \quad \text{där} \quad \begin{cases} \chi^2_{0{,}05}(7) = 14{,}1 \\ \chi^2_{0{,}01}(7) = 18{,}5 \end{cases}$$

...vi får:

$19{,}7 > 14{,}1 \rightarrow$ förkasta $H_0$ vid 5%

$19{,}7 > 18{,}5 \rightarrow$ förkasta $H_0$ vid 1%

Svar: B

12) Kravet är att 0 inte får ingå i något $I_\beta$ för att kunna förkasta $H_0$.
Vi kan alltså bara förkasta $H_0$ i $I_\beta(0{,}99)$. Då $y_i$:na beror av $x_i$:na endast om $\beta = 0$ och denna förkastas så kan vi inte förkasta att de beror av varandra.

Svar: D