2022-01-24

1) Givet:

Mynt 1: $P(kr) = 0{,}25$, $P(kl) = 0{,}75$

Mynt 2: $P(kr) = 0{,}5$, $P(kl) = 0{,}5$

Mynt 3: $P(kr) = 0{,}8$, $P(kl) = 0{,}2$

Scenarion:

(1,2), (2,1), (1,3), (3,1),

(2,3), (3,2)

Varje scenario-par är oberoende händelser; varje par har en sannolikhet på $\frac{1}{3}$.

Vi beräknar:

$$\frac{1}{3}\Big(\overbrace{0{,}25\cdot 0{,}5}^{(1,2)\,,\,(2,1)} + \underbrace{0{,}5\cdot 0{,}8}_{(2,3)\,,\,(3,2)} + \overbrace{0{,}25\cdot 0{,}8}^{(1,3)\,,\,(3,1)}\Big) = \frac{1}{3}\left(\frac{29}{40}\right) = \frac{29}{120}$$

Svar: $\frac{29}{120}$

2) Givet:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{16}xy^2, & 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Svar: A

Vi tar nu fram $E(X)$:

(multiplicera med x)

$$\int_0^2\int_0^2 \frac{3}{16}xy^2 x\,dx\,dy = \frac{3}{16}\int_0^2 x^2\int_0^2 y^2\,dy\,dx = \frac{3}{16}\int_0^2 x^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2 dx =$$

$$= \frac{3}{16}\int_0^2 x^2\left(\frac{8}{3}-0\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-0\right) = \frac{4}{3}$$

3) Givet:

$E(X) = 0{,}5$

$E(Y) = 2$

$D(Y) = 3$

$Z \in Bin(10,\ 0{,}8)$

Svar: 50

Vi bestämmer nu $V(2X+Y-5Z)$:

$$V(2X+Y-5Z) = V(2X) + V(Y) + V(-5Z) = 2^2V(X) + V(Y) + (-5)^2V(Z) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Då X är $Exp(2)$ vet vi att $\underbrace{V(X) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}}_{\text{(Se formelblad)}} \Rightarrow$

$\left(\sqrt{V(X)} = D(X) \iff V(X) = (D(X))^2\right)$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{4}\right) + (D(Y))^2 + 25V(Z) = 1 + 3^2 + 25V(Z) = 10 + 25V(Z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{V(Z) = 10\cdot 0{,}8(1-0{,}8) = 1{,}6}_{\text{(Se formelblad)}} \Rightarrow 10 + 25(1{,}6) = 50$$

4) Givet:

$P(X=0, Y=0) = 0{,}1$

$P(X=1, Y=0) = \alpha$

$P(X=0, Y=1) = 0{,}2$

$P(X=1, Y=1) = \beta$

Vi bestämmer nu $D(X+1)$ enligt:

$$P(X=0) = 0{,}1+0{,}2 = 0{,}3$$

$$P(X=1) = 1-(0{,}1+0{,}2) = 0{,}7$$

$$E(X) = 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}7 = 0{,}7$$

$$E(X^2) = 0^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}7 = 0{,}7$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0{,}7 - (0{,}7)^2 = 0{,}21$$

Vi vet även att:

$$D(X+1) = D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}21} = 0{,}458$$

Svar: 0,458

5) Givet:

$P(K) = 1-0{,}1 = 0{,}9$

$P(K^*) = 0{,}1$

5 bilar totalt

Svar: C

Vi beräknar nu:

$$\underset{\substack{\text{(minst 4}\\\text{klarar bes.)}}}{P(X\geq 4)} = \underset{\substack{\text{(max 1 bil}\\\text{ej klarar bes.)}}}{\overset{(\mu=0,1)}{P(Y\leq 1)}} \longrightarrow \text{Ges från Binomialtabell } n=5,\ x=1,\ \mu=0{,}1 \Rightarrow$$

$$P(Y\leq 1) \approx 0{,}92$$

6) Givet:

Exponentialfördelad

$E(X) = 4$

$\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{4}$

Sökt:

$P(X\geq 8)$

(Då exponentialfördelningen saknar tabell så beräknar vi sannolikhetsfunktionen F_x.)

Vi beräknar: (Sannolikheten att värdet är $0\leq i\leq 8$)

$$P(X\geq 8) = 1 - P(X\leq 8) = 1 - F_x(8)$$

Här ges F_x av nedan:

$$F_x = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx = \left[\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^x = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Då $\lambda = \frac{1}{4}$ i det här fallet så får vi $F_x = 1 - e^{-\frac{x}{4}}$. Med detta får vi:

$$P(X\geq 8) = 1 - P(X\leq 8) = 1 - F_x(8) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{8}{4}}\right) \approx 0{,}135$$

7) Givet:

$P(X_i=0)=\frac{1}{4}$

$P(X_i=1)=\frac{3}{8}-\alpha$

$P(X_i=2)=\frac{3}{8}-\alpha$

$x_1=1$

$x_2=1$

$x_3=1$

Vi beräknar nu MK-skattningen av α:

Oberoende; $E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)=\mu$

Vi tar först fram μ enligt:

$$0\cdot P(X_i=0)+1\cdot P(X_i=1)+2\cdot P(X_i=2)=0\cdot\frac{1}{4}+1\left(\frac{3}{8}-\alpha\right)+2\left(\frac{3}{8}+\alpha\right)=\frac{3}{8}-\alpha+\frac{6}{8}+2\alpha=\frac{9}{8}+\alpha=\mu$$

Nu tar vi fram MK:

$$Q=\left(1-\left(\frac{9}{8}+\alpha\right)\right)^2+\left(1-\left(\frac{9}{8}+\alpha\right)\right)^2+\left(2-\left(\frac{9}{8}+\alpha\right)\right)^2=\frac{51}{64}-1{,}25\alpha+3\alpha^2$$

...och nu derivatan av Q där $Q'=0$:

$$Q'=-1{,}25+6\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{1{,}25}{6}=\frac{5}{24}$$

Svar: B

8) Givet:

Observationer: 4,12, 3,87, 3,76, 4,05, 4,18

$n=5$ (tot. antal observationer)

$$\begin{cases}0{,}8=1-\alpha\Rightarrow\alpha=0{,}2\\ \frac{\alpha}{2}=\frac{0{,}2}{2}=0{,}1\end{cases}$$ (tvåsidigt intervall)

Både D och μ är okända → t-metoden:

Vi börjar med felaktiga mätningen och får...

$$\bar{x}_1=\frac{4{,}12+3{,}87+3{,}76+4{,}05+4{,}18}{\underset{(n)}{5}}=3{,}996 \qquad \bar{x}_2=3{,}98$$

$$I_\mu=\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=3{,}996\pm\underbrace{\frac{1}{5-1}\left((4{,}12-3{,}996)^2+(3{,}87-3{,}996)^2+(3{,}76-3{,}996)^2+(4{,}05-3{,}996)^2+(4{,}18-3{,}996)^2\right)}_{(s=0{,}03093)}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot t_{0{,}1}(4)=3{,}996\pm\frac{\left(\frac{0{,}12372}{4}\right)}{\sqrt{5}}\cdot1{,}53=(3{,}9748,\ 4{,}01716)$$

Nu tar vi fram intervallet för nya mätningen:

$$\bar{x}_2=\frac{4{,}12+3{,}87+3{,}76+4{,}05+4{,}10}{\underset{(n)}{5}}=3{,}98$$

$$I_\mu=\bar{x}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}\cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=3{,}98\pm\underbrace{\frac{1}{5-1}\left((4{,}12-3{,}98)^2+(3{,}87-3{,}98)^2+(3{,}76-3{,}98)^2+(4{,}05-3{,}98)^2+(4{,}10-3{,}98)^2\right)}_{(s=0{,}02485)}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot t_{0{,}1}(4)=3{,}98\pm\frac{\left(\frac{0{,}0994}{4}\right)}{\sqrt{5}}\cdot1{,}53=(3{,}9630,\ 3{,}9970)$$

Vi undersöker nu längden av de två intervallen:

I_1: $4{,}0098-3{,}9822\approx0{,}042$ $(s=0{,}03093)$

I_2: $3{,}9970-3{,}9630\approx0{,}034$ $(s=0{,}02485)$

$\Rightarrow I_2$ blir kortare och s blir mindre.

Då datapunkterna kommer närmre varandra så minskar standardavvikelsen och intervallet (vars längd är proportionelligt med standardavvikelsen) blir kortare.

Svar: D

9) Givet:

$\bar{x} = 0{,}2$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-0{,}95}{2} = 0{,}025$

Då vi jobbar med en binomialfördelning får vi D till:

$$D^*_{obs} = D\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt{V\left(\frac{x}{n}\right)} = \sqrt{\frac{V(X)}{n^2}} = \sqrt{\frac{np(1-p)}{n^2}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \text{ där}$$

$$p = 0{,}2 \Rightarrow D\left(\frac{x}{n}\right) = \sqrt{\frac{0{,}2\,(1-0{,}2)}{n}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{n}}$$

Nu undersöker vi intervallet:

$$I_p = 0{,}2 \pm D^*_{obs} \cdot \lambda_{0{,}025} = (0{,}15,\ 0{,}25)$$

Vi behöver nu kolla från båda håll och får följande ekv.-system:

$$\begin{cases} 0{,}2 + \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_{0.025} = 0{,}25 \\ 0{,}2 - \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_{0{,}025} = 0{,}15 \end{cases}$$

Vi löser nu systemet:

$$0{,}2 + \frac{0{,}4}{\sqrt{n}} \cdot 1{,}9600 = 0{,}25 \Rightarrow \frac{0{,}784}{\sqrt{n}} = 0{,}05 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0{,}784}{0{,}05} \Rightarrow n = 15{,}68^2 \approx 246$$

Svar: D

10) Givet:

$X \in Po(\mu)$

$H_0: \mu = 3$

$H_1: \mu > 3$

Obs.: $x = 7$

Vi undersöker nu P-värdet för testet enligt:

$$P(X \geq 7) = 1 - \underbrace{P(X \leq 6)}_{\text{(där } \mu = 3)}^{\text{(Diskret fördelning...)}} = 1 - 0{,}96649 = 0{,}03351 \approx 0{,}034$$

11) Givet:

$X \in Po(2\mu)$

$Y \in Po(\mu)$

$\mu^*_{obs} = \frac{x+2y}{4}$

$\hat{\mu}_{obs} = \frac{x+y}{3}$

Svar: D

Vi börjar med att undersöka väntevärdesriktigheten hos de två skattningarna. Då de två skattningarna är av μ så måste μ^*_{obs} och $\hat{\mu}_{obs}$ bli lika med μ efter insättning av X och Y:

$$\mu^*_{obs} = \frac{\overset{x}{(2\mu)} + 2\overset{y}{(\mu)}}{4} = \frac{4\mu}{4} = \mu \Rightarrow \mu = \mu \quad \text{Väntevärdesriktig!}$$

$$\hat{\mu}_{obs} = \frac{(2\mu) + (\mu)}{3} = \frac{3\mu}{3} = \mu \Rightarrow \mu = \mu \quad \text{Väntevärdesriktig!}$$

Nu undersöker vi effektiviteten av skattningarna m.h.a. variansen av dem (skattningen med minst varians klassas som mest effektiv):

$$V(\mu^*_{obs}) = V\left(\frac{X+2Y}{4}\right) = \frac{V(X) + 2^2 V(Y)}{4^2} = \frac{2\mu + 4(\mu)}{16} = \frac{6\mu}{16} = \frac{3\mu}{8}$$

$$V(\hat{\mu}_{obs}) = V\left(\frac{X+Y}{3}\right) = \frac{V(X) + V(Y)}{3^2} = \frac{2\mu + \mu}{9} = \frac{3\mu}{9} = \frac{\mu}{3}$$

$\Rightarrow$ Då $\frac{\mu}{3} < \frac{6\mu}{16}$ vet vi att $\hat{\mu}_{obs}$ klassas som mest effektiv (minst varians)

12) De båda p-värdena är större än 0,01. Detta eftersom både $I_\beta(0,99)$ och $I_\gamma(0,99)$ överlappar med 0. Detta innebär att man inte kan förkasta $H_{0,\beta}: \beta = 0$ eller $H_{0,\gamma}: \gamma = 0$ på signifikansnivån 1%. Nollhypotesen kan förkastas omm P värdet är mindre än signifikansnivån.