Projet HPC - simulation de processus gaussiens

DELAMOTTE Kieran

14.02.2023

À rendre pour le mardi 21 février 2023.

1 Décomposition de Karhunen-Loève 1D

Dans cet exercice, on s'intéresse au processus stochatique $Z(x,\omega)$ de moyenne nulle et dont la fonction de covariance est $K(x,y) = e^{-|x-y|/\lambda}, \lambda > 0$ sur l'intervalle $\mathscr{I} = [-1,1]$. On souhaite générer des réalisations de ce processus stochastique à l'aide de la décomposition de Karhunen-Loève.

Question 1. Écrire la décomposition de Karhunen-Loève et expliquer pourquoi la génération de trajectoires se résume à la détermination de valeurs et modes propres d'un opérateur que l'on explicitera.

Question 2. Par soucis de simplicité, on approche les intégrales par la méthode du point milieu. Montrer que la discrétisation du problème analytique expliqué ci-dessus se ramène à un problèmes de valeurs et vecteurs propres d'une matrice.

Question 3. En expliquant la démarche, générer des trajectoires approchées en considérant une troncature de la variance totale à 95%. Rappeler la complexité de la méthode et l'illustrer.

Question 4. ($\star\star$) Déterminer analytiquement les valeurs et modes propres de l'opérateur T_K défini par

$$T_K : \varphi \mapsto \int_{\mathscr{I}} K_\lambda(x,y)\varphi(y)dy.$$

Comparer avec les solutions discrètes obtenues ci-dessus.

2 CHAMP GAUSSIEN SUR UN DOMAINE DE $\mathbb{R}^2$

Dans cet exercice, on veut simuler des réalisations d'un champ gaussien $Z(\mathbf{x},\omega)$, avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ de moyenne nulle et dont la fonction de covariance est

$$\begin{aligned} K_\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= e^{-|x_1-y_1|/\lambda_1} e^{-|x_2-y_2|/\lambda_2} \\ &= e^{-\|x-y\|_1/\lambda}, \end{aligned}$$

avec $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)^T$, la division s'entendant terme à terme.
On se propose de générer des trajectoires de ce processus à l'aide de la décomposition de Karhunen-Loève. Dans toute la suite, $\mathscr{D} = [-1,1] \times [-1,1]$.

Question 1. (Génération du maillage) Construire une triangulation $\mathscr{D}_h$ de $\mathscr{D}$ à l'aide de la fonction *Delaunay* contenue dans le module *scipy.spatial.* Il suffit alors de générer une grille cartésienne de $(N_x+1) \times (N_y+1)$ points.

Question 2. (Décomposition de Karhunen-Loève) Écrire la décompostion de Karhunen-Loève du processus Z_ω. D'une manière analogue à celle utilisée en 1d, on approche les intégrales sur un triangle par une méthode à 1 point de Gauss :

$$\int_{T_k} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \simeq f(\mathbf{x_k})|T_k|,$$

où $\mathbf{x_k}$ et $|T_k|$ sont respectivement le barycentre et l'aire du triangle T_k.
Montrer que la discrétisation du problème intégral revient à un calcul de valeur/vecteur propres. On pourra utiliser la fonction *distance_matrix* de *scipy.spatial* pour construire la matrice $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_1$.

Question 3. (Symétrisation du problème) En notant $D = \text{diag}(|T_1|, \ldots, |T_N|)$ la matrice diagonale des poids d'intégration et en remarquant que $D = D^{1/2}D^{1/2}$, montrer que l'on peut rendre le problème discret symétrique.

Question 4. (Génération de trajectoires) Générer des trajectoires du processus approché. On écrira les résultats au format *vtu* à l'aide du module *meshio.*

Question 5. (Produit tensoriel) Écrire au format vtu les modes propres utilisés pour le calcul des trajectoires. Montrer que l'on obtient les mêmes modes propres en utilisant un produit tensoriel des modes 1d de l'exercice 1. Comparer les complexités de chacune des méthodes. Conclure.