曲线拟合(Curve Fitting)策略中的路径构造过程

首先将光栅化图像降采样 256 倍并对 RGB 转换成辐射强度 I(x, y)，然后使用双边滤波器过滤高频噪音：

$$I^{\text{filtered}}(x)=\frac{1}{W_p}\sum_{x_i\in\Omega}I(x_i)f_r(\|I(x_i)-I(x)\|)g_s(\|x_i-x\|),$$

$$W_p=\sum_{x_i\in\Omega}f_r(\|I(x_i)-I(x)\|)g_s(\|x_i-x\|)$$

其中 fr 与 gs 分别使用二维和一维的高斯核心（核心大小为 3x3 或者 5x5）。其后使用 Sobel 算子计算梯度：

$$\mathbf{G}_x=\begin{bmatrix}-1 & 0 & +1\\ -2 & 0 & +2\\ -1 & 0 & +1\end{bmatrix}*\mathbf{A}\quad\text{and}\quad\mathbf{G}_y=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ +1 & +2 & +1\end{bmatrix}*\mathbf{A}$$

$$\mathbf{G}=\sqrt{{\mathbf{G}_x}^2+{\mathbf{G}_y}^2}$$

梯度大小超过一个阈值就采纳为边缘，以此过滤低频噪音。于是根据此产生梯度图。随后对梯度图映射采样，得出数据点，使用最小二平方法对数据进行 3 次多项式回归，多项式采用贝塞尔样条曲线：

$$\vec{B}(t)=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{i}(1-t)^{(3-k)}t^k\vec{c}_i,\ t\in[0,1]$$

使用多项式标准基：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1\\ \boldsymbol{c}_2\\ \boldsymbol{c}_3\\ \boldsymbol{c}_4\end{bmatrix}$$

$$\vec{B}(t)=TMC$$

误差期望函数：

$$\vec{E}[C]=\sum_{k=1}^{n}(\vec{P}_k-\vec{B}(t_k))^2,\ \text{where}\ t_k=\frac{d(P_k,P_{k-1})}{\sum_{j=2}^{n}d(P_j,P_{j-1})}$$

$$\vec{E}[C]=(X-TMC_i)^T(X-TMC_i)$$

求最优 Ck：

$$\frac{\partial E}{\partial C_i}=-2T^T(P_i-TMC_i)=0$$

$$C_i=M^{-1}(T^TT)^{-1}T^TP_i$$

可考虑的优化，贝塞尔曲线可以进行重参数化使路径长度分布更均匀，即最小化：

$$Var[R(T)]=Var[\frac{1}{T}\int_0^T\|\vec{B}(t)\|dt],T\in[0,1]$$