



Control systems TI0173

Project Work

ALUNOS:

ANTONIO PEDRO DE MOURA LAURENO - 555650

CLEITON MOREIRA DE CARVALHO JUNIOR - 582818

DAVI PONTES LUCIANO - 554589

HUBERT LUZ DE MIRANDA - 552798

Nosso sistema

O sistema designado para a nossa equipe foi o Sistema 1, que consiste em um sistema de dois tanques, onde a vazão volumétrica Q_{in} representa as entradas do sistema, enquanto a variável medida (saída) é o nível de fluido h_2 no segundo tanque. As áreas dos dois tanques são A_1 e A_2 , enquanto a_1 , e a_2 são as áreas dos orifícios indicadas na Figura 1. O fluido é perfeito (sem tensões de cisalhamento, sem viscosidade, sem condução de calor) e sujeito apenas à gravidade. Os tanques estão cheios de água (fluido incompressível) e a pressão externa é constante (pressão atmosférica)

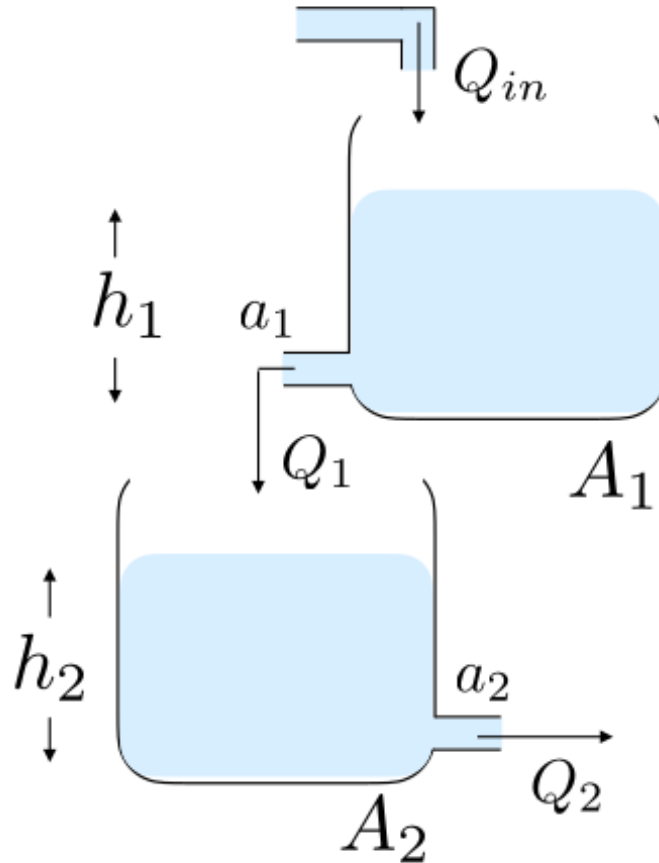


Figura 1: Sistema de dois tanques

Task 1

Modelo de espaços de estado do sistema

O modelo de espaço de estados é uma representação matemática de um sistema físico que utiliza um conjunto de variáveis internas, conhecidas como variáveis de estado, para descrever a dinâmica do sistema. Através de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, o modelo relaciona a entrada, a saída e o estado do sistema, fornecendo uma descrição completa e detalhada do seu comportamento interno, o que é especialmente útil para sistemas não-lineares e com múltiplas entradas e saídas (MIMO).

Para o nosso sistema de dois tanques acoplados, a escolha mais natural e intuitiva para as variáveis de estado é a altura da coluna de líquido em cada tanque. Essas alturas representam a energia potencial armazenada no sistema e, conhecendo seus valores em um instante de tempo t , juntamente com a entrada futura $u(t)$, podemos prever todo o comportamento subsequente do sistema.

Inicialmente, definimos as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em termos das alturas $h_1(t)$ e $h_2(t)$, respectivamente:

Inicialmente, definimos as variáveis de estado $x_1(t)$ e $x_2(t)$ em termos das alturas $h_1(t)$ e $h_2(t)$, respectivamente:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= h_1(t) \\ x_2(t) &= h_2(t) \end{aligned} \quad (\text{Estado})$$

A variável de entrada $u(t)$ é definida como a vazão de entrada:

$$u(t) = Q_{in}(t)$$

E a saída do sistema é dada pela altura no segundo tanque:

$$y(t) = h_2(t)$$

Para construir as equações de estado que relacionam essas variáveis, é necessário aplicar os princípios físicos que governam a dinâmica dos fluidos nos tanques. A relação fundamental que descreve o comportamento do nível de cada tanque é a equação do balanço de volumes, baseada no princípio da conservação de massa. Essa equação estabelece que a taxa de variação do volume de líquido em um tanque é igual à vazão total que entra menos a vazão total que sai.

Adicionalmente, utilizaremos a Lei de Torricelli para modelar as vazões de saída. Esta lei estabelece que a velocidade de um fluido escoando por um orifício sob a ação da gravidade é proporcional à raiz quadrada da altura da coluna de líquido (h) acima do orifício. A vazão de saída (Q), portanto, é dada pela equação:

$$[Q = a\sqrt{2gh}]$$

onde a é a área da seção transversal do orifício de saída e g é a aceleração da gravidade.

A equação de balanço de volumes é dada por:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_{in} - Q_1$$

Como $V = Ah$, temos:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_{in}(t) - Q_1(t)$$

A vazão de saída Q_1 do primeiro tanque depende da raiz da altura:

$$Q_1 = a_1 \sqrt{2gh_1}$$

Logo, substituímos na equação do balanço:

$$A_1 \dot{h}_1 = u(t) - a_1 \sqrt{2gh_1} \Rightarrow \dot{h}_1 = \frac{u(t)}{A_1} - \frac{a_1 \sqrt{2gh_1}}{A_1} \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{u(t)}{A_1} - \frac{a_1 \sqrt{2g} x_1^{1/2}}{A_1}$$

Agora, fazemos o mesmo para o segundo tanque, cuja entrada é Q_1 e saída é Q_2 :

$$\begin{aligned} \dot{h}_2 &= \frac{Q_1 - Q_2}{A_2} = \frac{a_1 \sqrt{2gh_1} - a_2 \sqrt{2gh_2}}{A_2} \Rightarrow \dot{h}_2 = \frac{a_1 \sqrt{2g} x_1^{1/2} - a_2 \sqrt{2g} x_2^{1/2}}{A_2} \\ \dot{x}_2 &= \frac{a_1 \sqrt{2g} x_1^{1/2} - a_2 \sqrt{2g} x_2^{1/2}}{A_2} \end{aligned}$$

Sabemos que a função de saída é:

$$y(t) = x_2(t)$$

Substituindo os parâmetros conhecidos: $A_1 = 0,5$, $A_2 = 2$, $a_1 = 0,02$, $a_2 = 0,05$, e $g = 9,81$, temos:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{0,5}{0,5} - \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,02 x_1^{1/2}}{0,5} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 1 - 0,1771 x_1^{1/2}$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,02 x_1^{1/2}}{2} - \frac{\sqrt{2 \cdot 9,81} \cdot 0,05 x_2^{1/2}}{2} \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0,0443 x_1^{1/2} - 0,1107 x_2^{1/2}$$

$$y(t) = x_2(t)$$

Com isso, o modelo em espaço de estados está completamente definido em termos das variáveis x_1 , x_2 , entrada $u(t)$ e saída $y(t)$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 1 - 0,1771 x_1^{1/2} \\ \dot{x}_2(t) = 0,0443 x_1^{1/2} - 0,1107 x_2^{1/2} \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

Estado de equilíbrio do sistema

O estado de equilíbrio é a condição na qual, com uma entrada constante, todas as variáveis de estado permanecem inalteradas ao longo do tempo. Fisicamente, para o sistema de tanques, isso significa que as alturas dos líquidos se estabilizam porque a vazão que entra em cada tanque é exatamente igual à vazão que sai. Neste ponto, as derivadas das variáveis de estado (\dot{x}_1 e \dot{x}_2) são nulas. Para esta análise, o ponto de equilíbrio é calculado para uma vazão de entrada constante $\bar{u} = 0,5 \text{ m}^3/\text{s}$, resultando nas alturas de equilíbrio \bar{x}_1 e \bar{x}_2 .

Para encontrar o ponto de equilíbrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , fazemos $\dot{x}_1 = 0$ e $\dot{x}_2 = 0$, com a entrada constante $\bar{u} = 0,5$.

$$0 = 1 - 0,1771 x_1^{1/2} \Rightarrow x_1^{1/2} = \frac{1}{0,1771} = 7,8481 \Rightarrow \bar{x}_1 = (7,8481)^2 = 31,855 \text{ m}$$

$$\bar{x}_1 = \left(\frac{1}{0,1771} \right)^2 = 31,855 \text{ m}$$

Agora, com $\dot{x}_2 = 0$, temos:

$$0 = 0,0443 x_1^{1/2} - 0,1107 x_2^{1/2}$$

Substituindo o valor de $x_1^{1/2}$:

$$0,0443 \cdot x_1^{1/2} = 0,1107 \cdot x_2^{1/2} \Rightarrow \frac{x_2^{1/2}}{x_1^{1/2}} = \frac{0,0443}{0,1107} = 0,4 \Rightarrow x_2^{1/2} = 0,4 \cdot x_1^{1/2}$$

$$x_2 = (0,4 \cdot x_1^{1/2})^2 = 0,16 \cdot x_1$$

Substituindo $x_1 = 31,87$:

$$\bar{x}_2 = 0,16 \cdot 31,855 = 5,097 \text{ m}$$

Portanto, o estado de equilíbrio é:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (31,855 \text{ m}, 5,097 \text{ m})$$

Sistema Linearizado

Para realizar a linearização do sistema, precisamos aproximar as funções não lineares encontradas no modelo de espaço de estados em torno de um ponto de equilíbrio (\bar{x}, \bar{u}) . Utilizamos para isso a expansão da série de Taylor, que consiste em uma técnica para aproximar funções por meio de polinômios. Desprezando os termos de ordem superior, a expansão de primeira ordem para um sistema $\dot{x} = f(x, u)$ e $y = g(x, u)$ é:

$$\begin{aligned}\dot{x} &\approx f(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u - \bar{u}) \\ y &\approx g(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (x - \bar{x}) + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} (u - \bar{u})\end{aligned}$$

Como no ponto de equilíbrio $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, e definindo as variáveis de desvio $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta u = u - \bar{u}$ e $\Delta y = y - \bar{y}$, obtemos o sistema linearizado. Precisamos deixar nosso sistema linearizado no seguinte padrão (A, B, C, D):

$$\begin{aligned}\Delta \dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u\end{aligned}$$

Onde as matrizes Jacobianas A, B, C e D são calculadas no ponto de equilíbrio: $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$, $B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$, $C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$, $D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}}$. As funções do nosso sistema são:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x, u) = \frac{1}{A_1}(u - a_1\sqrt{2gx_1}) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x, u) = \frac{1}{A_2}(a_1\sqrt{2gx_1} - a_2\sqrt{2gx_2}) \\ y &= g(x, u) = x_2\end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{\frac{g}{2x_1}} \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{a_1}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2x_1}} \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{\frac{g}{2x_2}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} &= \frac{1}{A_1} \quad , \quad \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = 1 \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

No ponto de equilíbrio $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (31,855 \text{ m}, 5,097 \text{ m})$, temos:

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} = -\frac{0.02}{0.5} \sqrt{\frac{9.81}{2 \cdot 31.855}} \approx -0.015696$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} = \frac{0.02}{2} \sqrt{\frac{9.81}{2 \cdot 31.855}} \approx 0.003924$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} = -\frac{0.05}{2} \sqrt{\frac{9.81}{2 \cdot 5.097}} \approx -0.024525$$

Expandindo \dot{x}_1 :

A equação para a primeira variável de estado, \dot{x}_1 , é linearizada em torno do ponto de operação da seguinte forma:

$$\dot{x}_1 \approx f_1(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} (x_2 - \bar{x}_2) + \left. \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|_{\bar{u}} (u - \bar{u})$$

Como $f_1(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, a equação para a variável de desvio $\delta \dot{x}_1 = \dot{x}_1$ fica:

$$\delta \dot{x}_1 \approx \left(-\frac{a_1}{A_1} \sqrt{\frac{g}{2\bar{x}_1}} \right) \delta x_1 + (0) \delta x_2 + \left(\frac{1}{A_1} \right) \delta u$$

$$\delta \dot{x}_1 \approx -0.015696 \delta x_1 + 2 \delta u$$

Fazendo o mesmo para \dot{x}_2 :

A linearização para a segunda variável de estado, \dot{x}_2 , segue o mesmo procedimento:

$$\dot{x}_2 \approx f_2(\bar{x}, \bar{u}) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{\bar{x}} (x_1 - \bar{x}_1) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{\bar{x}} (x_2 - \bar{x}_2) + \left. \frac{\partial f_2}{\partial u} \right|_{\bar{u}} (u - \bar{u})$$

Como $f_2(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, a equação para a variável de desvio $\delta \dot{x}_2 = \dot{x}_2$ fica:

$$\delta \dot{x}_2 \approx \left(\frac{a_1}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2\bar{x}_1}} \right) \delta x_1 + \left(-\frac{a_2}{A_2} \sqrt{\frac{g}{2\bar{x}_2}} \right) \delta x_2 + (0) \delta u$$

$$\delta \dot{x}_2 \approx 0.003924 \delta x_1 - 0.024525 \delta x_2$$

Finalmente, o sistema linearizado (A, B, C, D) em torno do estado de equilíbrio é:

$$A = \begin{bmatrix} -0.015696 & 0 \\ 0.003924 & -0.024525 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Simulação e comparação dos dois sistemas

Simulamos o sistema para nossa entrada no ponto de equilíbrio $u(t) = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$ para os casos onde o sistema estava linearizado e não linearizado, o gráfico foi feito utilizando a linguagem de programação *Python* e o código pode ser encontrado na pasta "CodigosTask1" no arquivo "task1.ipynb".

Plot do gráfico:

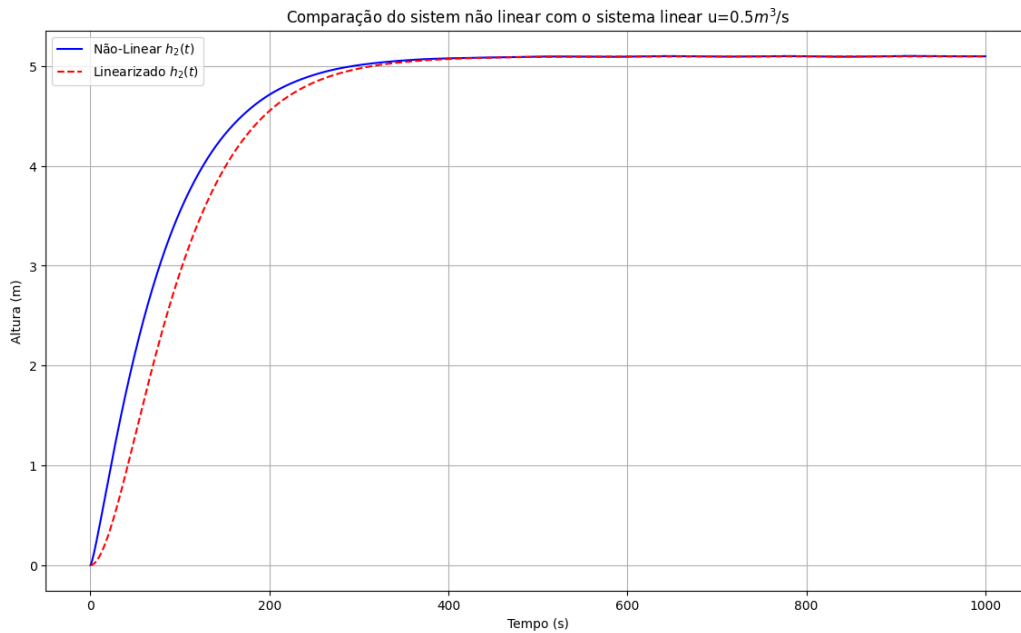


Figura 2: Gráfico comparativo entre o sistemas linear e não linear

A diferença entre as respostas dos sistemas linearizado e não linear pode ser atribuída à própria natureza da linearização. Quando realizamos a linearização de um sistema dinâmico não linear, utilizamos uma expansão em série de Taylor de primeira ordem em torno de um ponto de equilíbrio específico. Neste caso, determinado por uma entrada constante $u = 0.5 \text{ m}^3/\text{s}$. Isso significa que o modelo linearizado é uma aproximação local, válida apenas para pequenas perturbações em torno desse ponto de operação.

No nosso caso, as equações dinâmicas originais dos tanques envolvem termos não lineares como $\sqrt{h_1}$ e $\sqrt{h_2}$, relacionados à vazão, que depende da raiz quadrada da altura. A linearização substitui esses termos por aproximações lineares, o que introduz erro quanto maior for a distância do sistema ao ponto de equilíbrio.

Task 2

Cálculo da função de transferência e plot do gráfico da resposta à função degrau

O processo para derivar a função de transferência de um sistema a partir de sua representação em espaço de estados é um procedimento algébrico padrão que envolve o uso da Transformada de Laplace. Abaixo, descrevemos o método conceitual.

PONTO DE PARTIDA: O MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Iniciamos com a representação genérica do sistema no domínio do tempo, composta por duas equações principais.

Equação de Estado: Descreve a dinâmica das variáveis de estado.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Equação de Saída: Relaciona as variáveis de estado com a saída do sistema.

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Onde:

$x(t)$ é o vetor de variáveis de estado.

$u(t)$ é o vetor de entradas (ou controle).

$y(t)$ é o vetor de saídas.

A, B, C, D são as matrizes de estado, entrada, saída e transmissão direta, respectivamente.

Buscamos encontrar a função de transferência $G(s)$ que satisfaz a relação no domínio de Laplace:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Aplicamos a Transformada de Laplace em ambas as equações, com a premissa fundamental para funções de transferência de que as condições iniciais são nulas ($x(0) = 0$).

Transformada da Equação de Estado:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} &= \mathcal{L}\{Ax(t) + Bu(t)\} \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ sX(s) &= AX(s) + BU(s) \quad (\text{pois } x(0) = 0)\end{aligned}$$

Transformada da Equação de Saída:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y(t)\} &= \mathcal{L}\{Cx(t) + Du(t)\} \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Manipulamos algebricamente a equação de estado transformada para isolar $X(s)$.

$$\begin{aligned}sX(s) - AX(s) &= BU(s) && (\text{Agrupar termos com } X(s)) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) && (\text{Fatorar } X(s), \text{ usando a matriz identidade } I) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) && (\text{Pré-multiplicar pela inversa de } (sI - A))\end{aligned}$$

Com a expressão para $X(s)$ em mãos, a substituímos na equação de saída transformada.

$$\begin{aligned}Y(s) &= CX(s) + DU(s) \\ Y(s) &= C[(sI - A)^{-1}BU(s)] + DU(s)\end{aligned}$$

Finalmente, fatoramos o termo de entrada $U(s)$ para obter a forma desejada.

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D] U(s)$$

Ao comparar esta equação com a definição $Y(s) = G(s)U(s)$, encontramos a fórmula geral para a função de transferência:

$$\boxed{G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

s.

CÁLCULO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DO NOSSO SISTEMA A PARTIR DO MODELO DE ESPAÇO DE ESTADOS

O sistema é inicialmente descrito pelas seguintes equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Com as matrizes:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0,015696 & 0 \\ 0,003924 & -0,024525 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y = (0 \ 1) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + (0) u$$

Observação: A matriz A utilizada nos cálculos é a que aparece na segunda linha da primeira imagem, que parece ser uma correção da primeira.

CÁLCULO DA FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

A função de transferência é dada por $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Como $D = 0$, a equação simplifica para $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$.

A. CÁLCULO DE $(sI - A)$

$$sI - A = s \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,015696 & 0 \\ 0,003924 & -0,024525 \end{pmatrix}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,015696 & 0 \\ 0,003924 & -0,024525 \end{pmatrix}$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s + 0,015696 & 0 \\ -0,003924 & s + 0,024525 \end{pmatrix}$$

B. CÁLCULO DA INVERSA $(sI - A)^{-1}$

A inversa é calculada como $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}$.

DETERMINANTE:

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= (s + 0,015696)(s + 0,024525) - (0 \cdot -0,003924) \\ &= s^2 + 0,024525s + 0,015696s + (0,015696)(0,024525) \\ &= s^2 + 0,040221s + 0,000385 \end{aligned}$$

MATRIZ ADJUNTA:

$$\begin{aligned} \text{adj}(sI - A) &= \begin{pmatrix} s + 0,024525 & 0 \\ -(-0,003924) & s + 0,015696 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s + 0,024525 & 0 \\ 0,003924 & s + 0,015696 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

INVERSA:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s + 0,024525 & 0 \\ 0,003924 & s + 0,015696 \end{pmatrix}}{s^2 + 0,040221s + 0,000385}$$

CÁLCULO FINAL DE $\frac{Y(s)}{U(s)}$

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= (0 \ 1) \frac{\begin{pmatrix} s + 0,024525 & 0 \\ 0,003924 & s + 0,015696 \end{pmatrix}}{s^2 + 0,040221s + 0,000385} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(0,003924 \ s + 0,015696)}{s^2 + 0,040221s + 0,000385} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{0,003924 \cdot 2 + (s + 0,015696) \cdot 0}{s^2 + 0,040221s + 0,000385} \\ &= \frac{0,007848}{s^2 + 0,040221s + 0,000385} \end{aligned}$$

PLOT DO GRÁFICO

Para o plot do gráfico, testamos vários valores de amplitude para identificar qual deles iria se adequar para o valor da saída no nosso estado estacionário ($h_2 = 5.097m$) *Python* e as bibliotecas *control*, *numpy* e *matplotlib.pyplot*. Todo o código referente a essa questão pode ser encontrado na pasta "CódigosTask2"no arquivo "task2.ipynb".

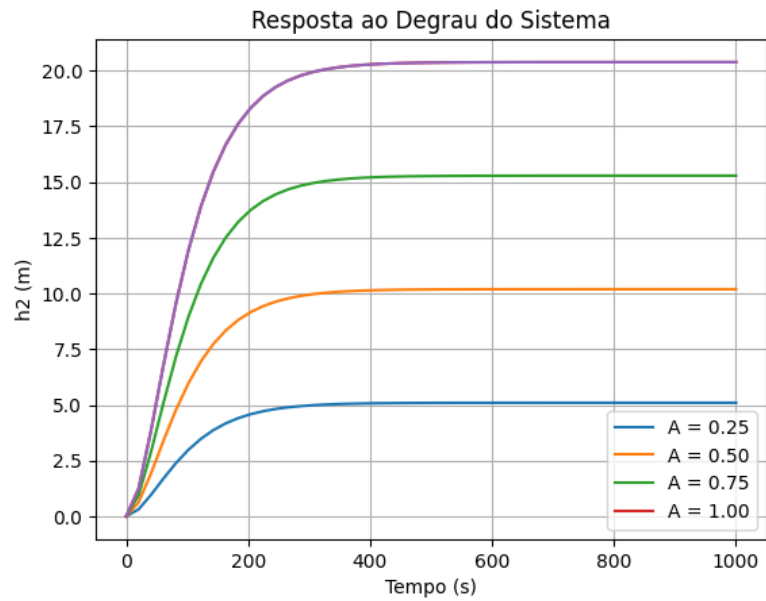


Figura 3: Gráfico da resposta ao degrau da função de transferência encontrada com amplitudes diferentes

Ao analisar o gráfico, podemos perceber que a amplitude adequada para a entrada do nosso sistema é $A = 0.25m/s$, o que pode ser confirmado ao extrair o valor final da saída do gráfico (ganho da função), que nos retornou $y = 5.096m$ valor suficientemente próximo da saída que buscávamos. Vamos utilizar esta amplitude que vamos utilizar para a sequência do nosso *Project Work*.

Agora, podemos plotar o gráfico da resposta ao degrau com a amplitude correta $A = 0.25m^3/s$:

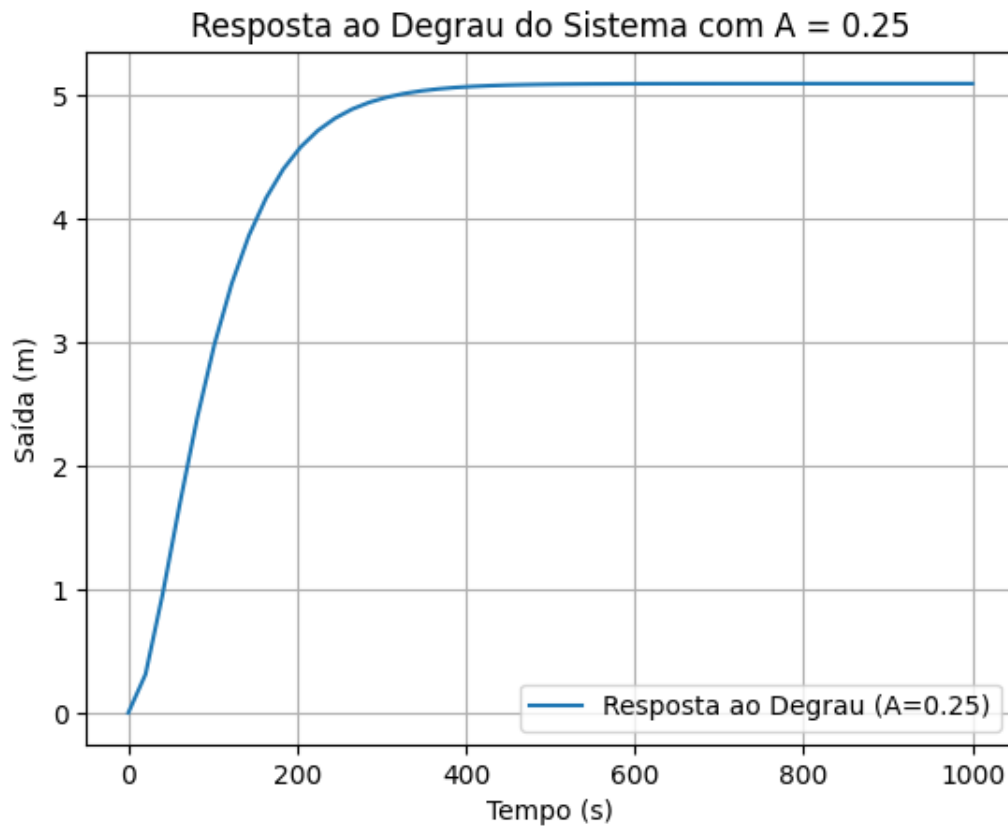


Figura 4: Gráfico da resposta ao degrau da função de transferência encontrada com amplitude definida

Características da resposta transistória

Todos os códigos necessários para essa questão podem ser encontrados na pasta "CodigosTask2" no arquivo "task2.ipynb". Utilizamos as mesmas bibliotecas da questão anterior.

ESTADO ESTACIONÁRIO

Ao analisar o gráfico da resposta ao degrau do sistema, identificamos que a amplitude adequada da entrada é $A = 0,25 \text{ m}^3/\text{s}$, valor que leva a saída a atingir aproximadamente $h_2 = 5,096 \text{ m}$ em regime permanente. Este valor é coerente com o ponto de equilíbrio obtido na Task 1, e por isso, adotamos essa amplitude como referência para a sequência do nosso *Project Work*.

Essa abordagem garante que a resposta simulada esteja coerente com a variação real de vazão aplicada ao sistema físico.

TEMPO DE ESTABILIZAÇÃO

OVERSHOOT

O overshoot de um sistema pode ser encontrado pela divisão entre o maior valor da resposta do sistema e o valor do estado estacionário. Entretanto, como foi citado anteriormente, estamos trabalhando com um sistema superamortecido, em que o maior valor atingido pela curva da resposta do sistema é o seu estado estacionário. Logo, o $\%OS = 0.00\%$

TEMPO DE SUBIDA

O tempo de subida de um sistema corresponde ao tempo que a saída leva para sair de 10% para 90% do estado estacionário do sistema. Portanto, o tempo de subida pode ser encontrado por meio da seguinte fórmula:

$$t_r = t_{90\%} - t_{10\%}$$

Onde $t_{90\%}$ é o instante em que a saída atinge 90% do valor final e $t_{10\%}$ é o instante em que atinge 10%.

RESULTADOS

Valores das características da resposta transitória calculados utilizando a linguagem de programação *Python* e valores encontrados teoricamente:

- Valor de Estado Estacionário: 5.096m
- $\%OS$: 0.00%
- Tempo de Estabilização: 311.66s
- Tempo de Subida : 177.59s

A análise conjunta destes resultados oferece uma caracterização completa e consistente do comportamento do sistema em malha aberta. O valor de estado estacionário obtido na simulação, 5.096 m, valida o ganho estático do modelo linearizado, sendo coerente com o ponto de equilíbrio da Tarefa 1. O overshoot de 0.00% é uma consequência direta da natureza superamortecida do sistema, confirmada pela presença de dois polos reais e negativos na função de transferência. Por fim, os valores elevados para o tempo de

estabilização (311.66 s) e de subida (177.59 s) são esperados e fazem sentido, pois refletem a dinâmica inerentemente lenta do processo físico, representada matematicamente pela proximidade dos polos à origem no plano-s. Agora, podemos plotar um gráfico com as características da resposta transitória encontradas:

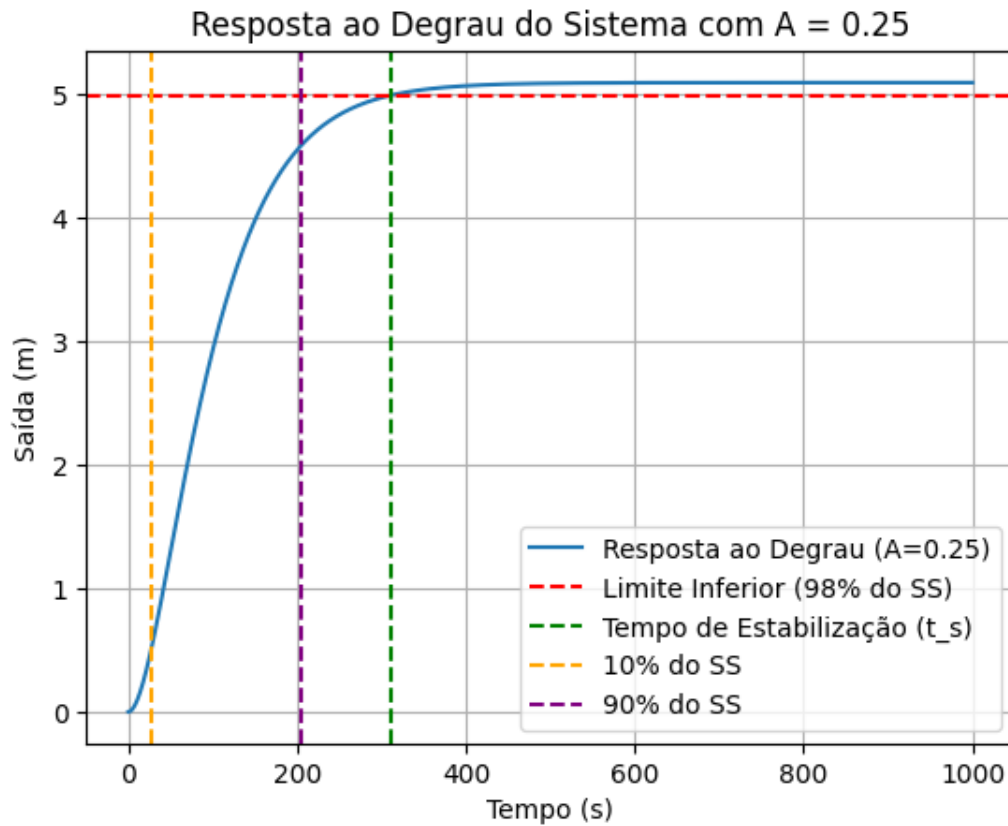


Figura 5: Gráfico com características da resposta transitória

Identificação e plot do mapa dos polos e zeros do sistema.

Podemos reafirmar a veracidade dos valores encontrados por nós ao visualizar o gráfico apresentado acima.

Vamos determinar os polos e zeros para a função de transferência que deduzimos no exercício anterior:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,007848}{s^2 + 0,040221s + 0,000385}$$

DETERMINAÇÃO DOS ZEROS

$$\text{Numerador} = 0,007848$$

Como o numerador é uma constante diferente de zero, não existe nenhum valor finito de s que o torne nulo. Portanto, o sistema não possui zeros no plano complexo finito.

DETERMINAÇÃO DOS POLOS

Os polos de uma função de transferência são as raízes do polinômio do denominador, também conhecidas como as raízes da equação característica do sistema.

$$\text{Denominador}(s) = s^2 + 0,040221s + 0,000385 = 0$$

Para encontrar as raízes, utilizamos a fórmula de Bhaskara para uma equação de segundo grau ($as^2 + bs + c = 0$):

$$s = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde:

- $a = 1$
- $b = 0,040221$
- $c = 0,000385$

Calculamos o discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$):

$$\Delta = (0,040221)^2 - 4(1)(0,000385)$$

$$\Delta = 0,0016177 - 0,001540$$

$$\Delta = 0,0000777$$

Como $\Delta > 0$, teremos dois polos reais e distintos. Agora, calculamos os polos p_1 e p_2 :

$$s = \frac{-0,040221 \pm \sqrt{0,0000777}}{2}$$
$$s = \frac{-0,040221 \pm 0,008815}{2}$$

Os dois polos são:

$$p_1 = \frac{-0,040221 + 0,008815}{2} = \frac{-0,031406}{2} = -0,015703$$

$$p_2 = \frac{-0,040221 - 0,008815}{2} = \frac{-0,049036}{2} = -0,024518$$

Portanto, os polos do sistema original são $p_1 \approx -0,0157$ e $p_2 \approx -0,0245$.

Análise correspondente à função $P(s) = \frac{1}{s^2 + 0.0407221s + 0.099385}$.

Portanto, o sistema não possui nenhum zero finito e possui dois polos reais distintos e negativos, $p_1 \approx -0,0157$ e $p_2 \approx -0,0245$.

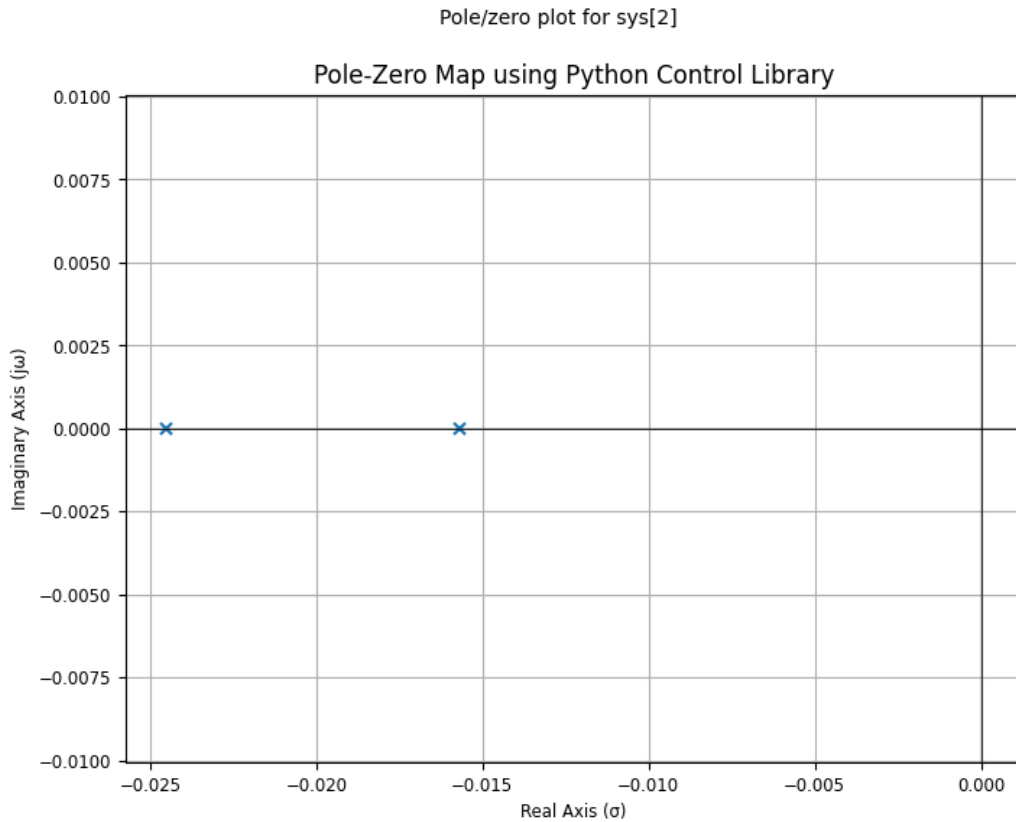


Figura 6: Gráfico de polos e zeros

O gráfico acima foi obtido através do código presente no diretório Task 2.

ANÁLISE DA ESTABILIDADE

O sistema apresenta duas raízes reais negativas distintas. Portanto, ambas estão no LHP e nenhuma das duas é puramente imaginária, sendo assim, seguindo os critérios da estabilidade BIBO, estável. Como o sistema não apresenta zeros no plano complexo finito, ele não apresenta zeros no gráfico

acima. Além disso, os zeros não têm interferência nesse sistema, trazendo a análise da influência mais para o âmbito dos polos.

Variáveis manipuladas e suas propriedades

VARIÁVEIS MANIPULADAS E CONTROLADAS

Como já foi definido anteriormente, como Variável Manipulada (Entrada), temos $u(t)$, que é a vazão de entrada do primeiro tanque, $Q_{in}(t)$. Já como Variável Controlada (saída), temos $y(t)$, que é a altura do nível de água no segundo tanque ($h_2(t)$)

CONFIABILIDADE E OBSERVABILIDADE

- Confiabilidade: Se para um sistema for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um estado inicial desejado para um estado final desejado, o sistema é dito controlável; caso contrário, o sistema é não controlável. Ou seja, ela verifica se é possível manipular a vazão de entrada ($Q_{in}(t)$) para atingir qualquer combinação de alturas desejadas nos tanques 1 e 2 (h_1 e h_2). Se o sistema for controlável, significa que sua entrada tem influência suficiente para direcionar todos os estados internos do sistema. Se não fosse, poderia haver uma altura em um dos tanques que nós não conseguiríamos controlar com a entrada disponível. Dado o sistema encontrado, precisamos construir a matriz de controlabilidade C_m para verificar se o sistema é completamente controlável.

Sabemos que:

$$C_m = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

Sabemos que $n = 2$, pois o sistema tem 2 variáveis de entrada. Logo, a matriz que vamos calcular tem essa configuração:

$$C_m = [B \quad AB]$$

As matrizes que vamos precisar são:

$$A = \begin{bmatrix} -0,015696 & 0 \\ 0,003924 & -0,024525 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Organizando e calculando C_m , temos:

$$AB = A \cdot B = \begin{bmatrix} -0,015696 & 0 \\ 0,003924 & -0,024525 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,031392 \\ 0,007848 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz de controlabilidade é:

$$C_m = \begin{bmatrix} 2 & -0,031392 \\ 0 & 0,007848 \end{bmatrix}$$

Agora, precisamos calcular o determinante da matriz C_m . Se $\det(C_m)$ for diferente de zero, significa que o sistema é Completamente Controlável. Calculando, temos:

$$\det(C_m) = (2)(0,007848) - (0)(-0,031392) = 0,015696 \neq 0$$

Logo, o sistema é Completamente Controlável

- Observabilidade: A observabilidade verifica se, medindo apenas a altura no tanque 2 ($y(t) = h_2(t)$), é possível descobrir qual é a altura no tanque 1 ($h_1(t)$). Se o sistema for observável, a medição da saída fornece informações suficientes para deduzir o comportamento de todo o sistema. Se não fosse, a altura no tanque 1 poderia estar variando de uma forma que sua medição da altura no tanque 2 não conseguiria detectar. Dado o sistema encontrado, precisamos construir a matriz de observabilidade O_m para verificar se o sistema é Completamente Observável.

Para verificar se o sistema é observável, construímos a matriz de observabilidade O_m :

$$O_m = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sabemos que $n = 2$, pois o sistema tem 2 variáveis de entrada. Logo, a matriz que vamos calcular tem essa configuração:

$$O_m = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$$

As matrizes que vamos precisar são:

$$A = \begin{bmatrix} -0,015696 & 0 \\ 0,003924 & -0,024525 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Organizando e calculando O_m , temos:

$$CA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,015696 & 0 \\ 0,003937 & -0,024525 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,003924 & -0,024525 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz de observabilidade é:

$$O_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,003924 & -0,024525 \end{bmatrix}$$

Agora, precisamos calcular o determinante da matriz O_m . Se $\det(O_m)$ for diferente de zero, significa que o sistema é Completamente Observável. Calculando, temos:

$$\det(O_m) = (0)(-0,024525) - (1)(0,003924) = -0,003924 \neq 0$$

Logo, o sistema é Completamente Observável

Task 3

Definição do diagrama de blocos

O diagrama de blocos apresentado descreve a arquitetura de controle em malha fechada para o nível do segundo tanque. A estrutura utiliza realimentação negativa para comparar o nível desejado com o valor medido.

Identificação dos blocos:

- Setpoint (Referência, $R(s)$): É o valor desejado para a variável controlada. Neste projeto, a referência é uma mudança na vazão de entrada, representada por um degrau de amplitude $A = 0.25 \text{ m}^3/s$ sobre o ponto de operação. O sistema de controle deve atuar para que a saída siga essa mudança com o mínimo de erro.
- Saída do Sistema (Variável Controlada, $C(s)$): É a variável física que se deseja controlar. Conforme definido no projeto, esta é a altura do fluido no segundo tanque, $h_2(t)$.
- Controlador ($G_1(s)$): Este bloco é o "cérebro" do sistema. Corresponde ao compensador de atraso (Lag) projetado para garantir que o sistema atenda ao requisito de 1% de erro em regime estacionário.

- Atuador Ideal ($G_2(s) = 1$): É o "músculo" do sistema, a válvula de controle. Foi modelado como ideal ($G_2(s) = 1$), assumindo que sua resposta é instantânea e muito mais rápida que a dinâmica dos tanques.
- Sistema/Planta ($G_p(s)$): Representa a dinâmica do processo físico dos dois tanques. Sua função de transferência foi obtida a partir do modelo linearizado na Tarefa 2.
- Sensor Ideal ($H(s) = 1$): São os "olhos" do sistema, medindo a altura h_2 . Foi considerado ideal ($H(s) = 1$), o que define uma malha de realimentação unitária e simplifica a análise de erro.

Finalmente, podemos esboçar o diagrama de blocos:

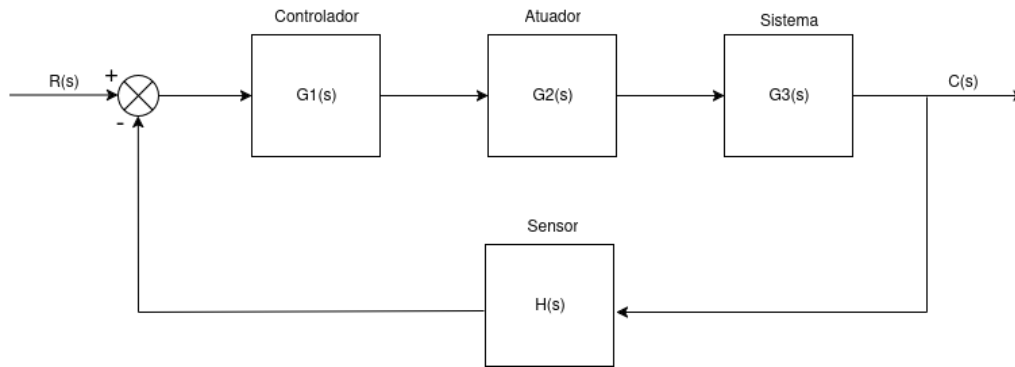


Figura 7: Diagrama de blocos do compensador

Projeto de um controlador

EXPLICAÇÃO DO COMPENSADOR LAG

Para mantermos o erro dentro de um valor escolhido (10%) sem afetar significativamente, utilizamos um Lag Compensator, pois:

O compensador Lag, também conhecido como *compensador atrasador*, é uma técnica de controle utilizada principalmente para melhorar o desempenho de erro em regime permanente de um sistema, sem comprometer significativamente a resposta transitória.

Sua função de transferência geral é dada por:

$$P(s) = \frac{s + z}{s + p}$$

onde z (zero) está mais distante da origem do que p (polo), com $\frac{z}{p} > 1$. Isso significa que o compensador introduz um polo mais lento que o zero, o que aumenta o ganho de baixa frequência do sistema, contribuindo para a redução do erro de regime permanente (erro estacionário), especialmente para entradas do tipo degrau ou rampa.

A razão pela qual o compensador Lag reduz o erro sem afetar significativamente a resposta transitória está relacionada à sua estrutura: o zero e o polo introduzidos estão localizados muito próximos um do outro e próximos à origem no plano- s . Essa proximidade faz com que o efeito do polo e do zero se anule parcialmente no lugar das raízes, mantendo inalteradas as posições dos polos dominantes do sistema. Dessa forma, o comportamento transitório permanece praticamente o mesmo.

Além disso, o compensador Lag atua predominantemente em baixas frequências, o que significa que ele aumenta o ganho do sistema apenas na região onde o erro estacionário é influenciado, sem impactar o ganho em altas frequências, que afetam a velocidade e o amortecimento da resposta.

Portanto, o compensador Lag é uma boa escolha para aplicações onde se deseja melhorar a precisão do sistema (reduzir o erro estacionário) mantendo a forma e a velocidade da resposta transitória praticamente inalteradas.

Assumindo o sistema da figura 4, o erro é calculado da seguinte forma.

As relações fundamentais neste sistema são:

1. O sinal de erro, $E(s)$, é a diferença entre o sinal de referência (entrada desejada), $R(s)$, e o sinal de saída, $Y(s)$.

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

2. A saída do sistema, $Y(s)$, é o resultado da função de transferência da planta, $G(s)$, atuando sobre o sinal de erro, $E(s)$.

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

Nosso objetivo é encontrar uma expressão para o erro $E(s)$ que dependa apenas da entrada $R(s)$ e da dinâmica do sistema $G(s)$. Para isso, substituímos a segunda equação na primeira:

$$E(s) = R(s) - [G(s)E(s)]$$

Agora, realizamos a álgebra para isolar $E(s)$:

$$\begin{aligned} E(s) + G(s)E(s) &= R(s) && \text{(Agrupar termos com } E(s)) \\ E(s)(1 + G(s)) &= R(s) && \text{(Fatorar } E(s)) \\ E(s) &= \frac{R(s)}{1 + G(s)} && \text{(Isolar } E(s)) \end{aligned}$$

Esta equação nos dá o sinal de erro no domínio de Laplace para qualquer entrada $R(s)$.

Para encontrar o valor do erro em regime estacionário (e_{ss}), ou seja, o valor de $e(t)$ quando $t \rightarrow \infty$, usamos o Teorema do Valor Final (TVF). O teorema afirma que, para um sistema estável, o valor final pode ser encontrado através do seguinte limite no domínio de Laplace:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Substituindo a expressão para $E(s)$ que encontramos no Passo 2 dentro da fórmula do TVF:

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{R(s)}{1 + G(s)} \right]$$

Rearranjando, chegamos exatamente à fórmula geral para o erro em regime estacionário:

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G(s)}$$

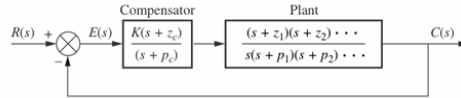


Figura 8: Sistema com compensador Lag

O erro compensado é dado por E_{ss} , sendo $R(s) = \frac{0,25}{s}$ (resposta ao degrau unitário). $G(s)$ é nossa função de transferência obtida na Task 2, questão 4, e $G_d(s)$ e $G_n(s)$, respectivamente, denominador e numerador de $G(s)$.

$$E_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G(s)}$$

Como $R(s) = 0,25 \cdot \frac{1}{s}$:

$$\Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,25}{1 + \frac{G_n(s)}{G_d(s)}} = \frac{0,25 \cdot G_d(0)}{G_d(0) + G_n(0)}$$

Portanto:

$$E_{ss} = \frac{0,25 \cdot G_d(0)}{G_d(0) + G_n(0)}$$

Para o erro de estado estacionário com o Lag compensador, temos para a resposta ao degrau unitário:

$$E_{ssc} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot R(s)}{1 + G(s) \cdot P(s)} \Rightarrow \frac{0,25 \cdot G_d(0) \cdot p}{G_d(0) \cdot p + G_n(0) \cdot z}$$

Isolando $\frac{z}{p}$ na equação, temos:

$$\frac{z}{p} = \frac{0,25 \cdot G_d(0) - E_{ssc} \cdot G_d(0)}{E_{ssc} \cdot G_n(0)}$$

Perceba que, se fôssemos reduzir o erro a zero, $z \rightarrow \infty$, então é por isso que o Lag compensador pode ser usado para diminuir, mas não zerar o erro.

PROJETO DO COMPENSADOR

Primeiramente, calculamos o K_p e o erro estacionário descompensado E_{ss} . A constante K_p é o limite da função de transferência quando s tende a zero.

$$\begin{aligned} K_{p,\text{atual}} &= \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{0,007848}{s^2 + 0,040221s + 0,000385} \\ &= \frac{0,007848}{0 + 0 + 0,000385} \\ K_{p,\text{atual}} &\approx 20,38 \end{aligned}$$

O erro é então calculado pela fórmula, sendo $R(s) = 0,25 \cdot \frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned} E_{ss,\text{atual}} &= \frac{0,25}{1 + K_{p,\text{atual}}} \\ &= \frac{0,25}{1 + 20,38} \\ &= \frac{0,25}{21,38} \\ E_{ss,\text{atual}} &\approx 0,01169 \end{aligned}$$

Para obter o erro relativo a entrada, temos que dividir esse erro por 0,25, que é o valor da amplitude do degrau:

$$E_{ss,atual}(\%) = \frac{0,01169}{0,25} \times 100\% = 4,6772\%$$

O cálculo demonstra que o erro estacionário do sistema em seu estado original é de aproximadamente 4,6772%. A meta de projeto especificada na questão é um erro de 10%.

Ao comparar os dois valores, concluímos que o sistema, sem qualquer controlador, já é mais preciso (pois possui um erro menor) do que o desempenho alvo.

A análise inicial revelou que o sistema não compensado possui um erro em regime estacionário de aproximadamente 4,7%. Este valor já satisfaz o requisito de projeto, que estipula um erro máximo de 10%. No entanto, uma prática de engenharia robusta não visa apenas atender às especificações mínimas, mas superá-las para garantir o bom desempenho e a confiabilidade do sistema.

: O nosso cálculo de 4,7% é baseado em um modelo matemático linearizado. Sistemas físicos reais estão sujeitos a variações de parâmetros e não-linearidades que não são capturadas pelo modelo. Projetar o sistema para ter um erro de apenas 1% cria uma margem de segurança significativa, garantindo que, mesmo com essas incertezas, o erro real permanecerá bem abaixo do limite máximo de 10%.

Para determinar a proporção $\frac{z}{p}$ para um erro de 1%, nosso erro tem que ser 0,0025 aplicaremos os valores da função de transferência do nosso sistema:

$$G(s) = \frac{0,007848}{s^2 + 0,040221s + 0,000385}$$

Sendo:

$$G_n(s) = 0,007848 \quad \text{e} \quad G_d(s) = s^2 + 0,040221s + 0,000385$$

A proporção é dada por:

$$\frac{z}{p} = \frac{0,25 \cdot G_d(0) - E_{ssc} \cdot G_d(0)}{E_{ssc} \cdot G_n(0)}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{z}{p} = \frac{0,25 \cdot 0,000385 - 0,0025 \cdot 0,000385}{0,0025 \cdot 0,007848} = \frac{0,00009625 - 0,0000096}{0,0025 \cdot 0,007848} \approx 4,86$$

Isso nos leva a um zero menor que o polo, ou seja, um zero mais distante da origem. Em compensadores Lag, $\frac{z}{p} > 1$ quando queremos diminuir o erro. Ou seja, o polo deve estar mais próximo da origem do que o zero, que está de acordo com o resultado que tivemos calculando $\frac{z}{p}$. Essa resposta é esperada pois queremos diminuir o erro e, portanto, o zero ficará menos negativo do que o polo, ou seja, mais distante da origem.

Portanto, escolhemos a localização do zero com base na regra a seguir, que é uma regra empírica comumente utilizada e é uma regra que atende à nossa necessidade de fazer o polo e o zero valores muito próximos um do outro e muito próximos da origem, para não alterarmos a resposta transitória. A relação é:)

$$z = \frac{\text{Re}(p_{\text{dominante}})}{50}$$

Na Task 2, questão 4, obtemos que o polo dominante é:

$$p_{\text{dominante}} = -0,0157$$

Logo:

$$z = \frac{-0,0157}{50} = -0,000314$$

Segundo a proporção entre z e p :

$$\frac{z}{p} = 4,86 \Rightarrow p = \frac{-0,000314}{4,86} \approx -0,000065$$

Dessa forma, temos o compensador Lag projetado da seguinte forma, sendo $G1(s)$ a função do compensador:

$$G1(s) = \frac{s + 0,000314}{s + 0,000065}$$

Simulação do sistema

Para simular os sistemas compensados e não compensados encontrados na questão anterior, utilizamos a linguagem de programação *Python* e as bibliotecas *control*, *matplotlib.pyplot* e *numpy* para plotar o comportamento dos sistemas em malha fechada para um degrau de entrada com amplitude $A = 0.25m^3/s$.

Todo o código referente a essa questão pode ser encontrado na pasta "CódigosTask3" no arquivo "task3.ipynb".

Com essas informações, obtivemos o seguinte gráfico para um t variando de zero até oitenta mil segundos:

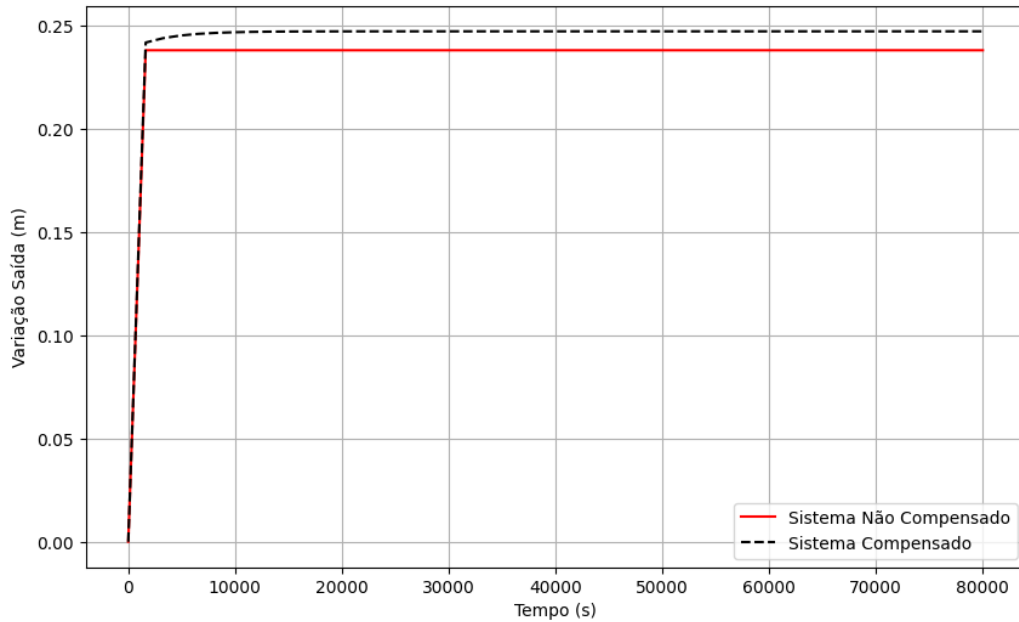


Figura 9: Gráfico comparativo entre os sistemas compensados e não compensados com um maior intervalo de tempo

Agora podemos observar que a saída do sistema compensado atingiu seu estado estacionário. Portanto, podemos calcular os erros em estado estacionário dos sistemas pela seguinte equação:

$$E_{ss} = A - y_{ss}$$

Onde E_{ss} é o erro em regime estacionário, A é a amplitude do degrau de entrada (o valor desejado) e y_{ss} é o valor final da saída em regime estacionário obtido na simulação.

Para encontrar os valores de erro, utilizamos a linguagem de programação *Python* e obtivemos os seguintes resultados:

- Erro em Regime Estacionário (Não Compensado): 4.68%
- Erro em Regime Estacionário (Compensado): 1.01%

A simulação confirma o sucesso do projeto do compensador Lag. O erro em regime estacionário foi reduzido de 4.68% no sistema original para 1.01% no sistema compensado, atingindo a meta de projeto.

Os gráficos também ilustram a desvantagem desta técnica: a melhoria na precisão foi acompanhada por uma resposta significativamente mais lenta, como evidenciado pela necessidade de aumentar o tempo de simulação para que o sistema compensado atingisse o seu estado estacionário. A resposta transitória, no entanto, foi preservada, mantendo o comportamento superamortecido e sem sobressinal do sistema original.

Comentários sobre resultados e escolhas

Inicialmente tivemos que escolher uma amplitude do degrau de entrada $A = 0.25m^3$ para que a nossa saída no estado estacionário fosse a encontrada no estado de equilíbrio $h_2 = 5.097$, foi necessário utilizar este critério pelo resto do projeto.

Decidimos, ainda que, uma vez que, conforme calculado, o erro de 4,7% do sistema original já atendia ao requisito de 10%, em vez de projetar um controlador para aumentar a imprecisão, o que não reflete o foco do que foi aprendido até agora na disciplina, que seria aprimorar o erro, optou-se por aprimorá-lo. Foi estabelecida uma nova meta de 1% de erro por duas razões principais: primeiro, para criar um sistema mais robusto e com margem de segurança contra incertezas do modelo; e segundo, para demonstrar corretamente a aplicação da técnica do compensador de atraso (Lag), cuja finalidade é melhorar a precisão do sistema.

Outra decisão de design do projeto foi a escolha do posicionamento do z , dado pela relação:

$$z = \frac{\text{Re}(p_{\text{dominante}})}{50}$$

A escolha dessa regra é devido a ser uma regra prática, obtida empiricamente, que usualmente proporciona o afastamento necessário do z em relação ao polo dominante, e conseqüentemente, a aproximação necessária à origem. Além disso, proporciona um distanciamento entre polo e zero do compensador suficientemente pequeno para não surtir efeito considerável no root locus.

Afinal, os resultados obtidos pelo nosso sistema fora satisfatórios, antes do compensador já obtivemos um erro satisfatório (4.68%) e após projetar um sistema compensador conseguimos diminuir este erro consideravelmente (1.01%). Portanto, acreditamos que as escolhas feitas durante o desenvolvimento do projeto foram bem feitas e os resultados obtidos a partir destas escolhas foram satisfatórios.