Numerische Untersuchung eines operatorbasierten Ansatzes im Kontext der Riemannschen Zetafunktion

Eine explorative Studie mit expliziter Zirkularitätsanalyse

Davin Niclas Lindt ChatGPT (OpenAI) Claude AI (Anthropic)

16. Dezember 2025

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein operatorbasierter Ansatz untersucht, der durch numerische Konstruktionen motiviert ist, welche die nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion mit dem Spektrum eines selbstadjungierten Operators in Beziehung setzen sollen. Ausgangspunkt ist eine datengetriebene Konstruktion eines Integraloperators aus bekannten Zetafunktionsnullstellen, gefolgt von einer numerischen Inversion zu einem effektiven Potential und der Analyse des entstehenden Schrödinger-Operators.

Ein zentrales Anliegen dieser Arbeit ist nicht der Beweis der Riemannschen Vermutung, sondern die systematische Untersuchung der internen Konsistenz, Stabilität und insbesondere der Zirkularität des Ansatzes. Es wird explizit gezeigt, dass der untersuchte Zugang in erheblichem Maße zirkulär ist und keine echte Vorhersagekraft bezüglich unbekannter Zetafunktionsnullstellen besitzt.

Die Arbeit stellt damit ein dokumentiertes Negativresultat dar und liefert eine vollständige numerische Analyse, die zukünftige Arbeiten vor ähnlichen Fehlannahmen bewahren soll.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Motivation

Die Riemannsche Vermutung (RH) ist eines der zentralen offenen Probleme der modernen Mathematik. Seit über 160 Jahren wird nach einem Beweis gesucht, dass alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

auf der kritischen Geraden $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegen.

Eine besonders einflussreiche Idee ist die sogenannte *Hilbert–Pólya- Vermutung*, nach der die imaginären Teile der Nullstellen als Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators interpretiert werden könnten. Diese Arbeit ist durch diese Idee inspiriert, erhebt jedoch *zu keinem Zeitpunkt* den Anspruch, einen solchen Operator explizit gefunden zu haben.

Ziel dieser Arbeit ist es, einen numerisch konstruierten operatorbasierten Ansatz systematisch zu untersuchen, seine internen Annahmen offenzulegen und seine Grenzen klar zu benennen.

Wichtig: Diese Arbeit ist **keine Beweisarbeit**. Alle Ergebnisse sind entweder

- rein numerisch,
- heuristisch motiviert oder
- explizit als Annahmen gekennzeichnet.

2 Mathematischer Hintergrund

2.1 Nichttriviale Nullstellen der Zetafunktion

Die nichttrivialen Nullstellen werden als

$$\rho_n = \frac{1}{2} + i\gamma_n$$

geschrieben, wobei $\gamma_n \in \mathbb{R}$.

Annahme A1 (RH-konform): Für die numerischen Experimente wird angenommen, dass alle betrachteten Nullstellen auf der kritischen Geraden liegen. Diese Annahme ist äquivalent zur RH und stellt bereits eine starke Voraussetzung dar.

2.2 Spektraltheoretische Motivation

Ein selbstadjungierter Operator besitzt ein reelles Spektrum. Würden die γ_n als Eigenwerte eines solchen Operators auftreten, wäre RH automatisch erfüllt.

Diese Arbeit konstruiert jedoch keinen solchen Operator *a priori*, sondern geht den umgekehrten Weg:

> Bekannte γ_n werden als Input verwendet, um numerisch einen Operator zu konstruieren.

Dieser Umstand ist zentral für die spätere Zirkularitätsanalyse.

3 Konstruktion eines Integraloperators

Aus einer endlichen Menge bekannter Nullstellen $\{\gamma_n\}_{n=1}^{N}$ wird ein Kernel der Form

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{N} w_n \cos(\gamma_n(x + y))$$

konstruiert, wobei die Gewichte w_n exponentiell gedämpft werden.

Numerischer Befund: Der so konstruierte Operator ist numerisch:

- symmetrisch,
- Hilbert–Schmidt,
- spektral stabil unter Gitterverfeinerung.

Wichtig: Dies stellt *keinen Beweis* für eine zugrunde liegende mathematische Struktur dar, sondern lediglich numerische Konsistenz.

4 GLM-Inversion und effektives Potential

Mithilfe einer diskreten Gel'fand–Levitan–Marchenko-artigen Inversion wird aus dem Kernel ein effektives Potential $q(x)$ rekonstruiert.

Numerischer Befund:

- $q(x)$ ist glatt und beschränkt,
- kleine Änderungen der Eingabedaten führen zu kleinen Änderungen von $q(x)$.

Keine bewiesene Aussage: Es existiert kein Beweis, dass dieses Potential eindeutig oder physikalisch bedeutungsvoll ist.

5 Schrödinger-Operator und Spektrum

Aus $q(x)$ wird ein diskretisierter Schrödinger-Operator

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

konstruiert.

Gesicherte numerische Eigenschaften:

- H ist selbstadjungiert,
- das Spektrum ist reell,
- die Eigenwerte sind numerisch stabil.

Aber: Die Eigenwerte wurden *nicht unabhängig* von den ursprünglichen γ_n erzeugt.

6 Spektrale Rückabbildung

Es wird numerisch beobachtet, dass für geeignete Transformationen

$$\gamma_n \approx a(-\log|\lambda_n|) + b$$

gilt.

Numerischer Befund: Die Approximation ist im Trainingsbereich gut.

Kritischer Punkt: Diese Beziehung wurde *ex post* gefittet und besitzt keinen theoretischen Unterbau.

7 Explizite Zirkularitätsanalyse

Ein zentraler Beitrag dieser Arbeit ist ein systematischer Zirkularitätstest:

1. Teile bekannte γ_n in Trainings- und Testdaten.
2. Konstruiere den Operator nur aus den Trainingsdaten.
3. Sage Test-γ_n über das Spektrum voraus.

Ergebnis: Der mittlere relative Fehler liegt bei ca. 50%.

Schlussfolgerung: Der Ansatz besitzt **keine echte Vorhersagekraft**. Die beobachtete Übereinstimmung ist überwiegend zirkulär.

8 Diskussion und Interpretation

8.1 Was diese Arbeit zeigt

- Numerische Stabilität ersetzt keinen Beweis.
- Operatorbasierte Konstruktionen sind hochgradig anfällig für Zirkularität.
- Ohne unabhängige spektrale Information ist keine Vorhersage möglich.

8.2 Was diese Arbeit nicht zeigt

- Keinen Beweis der RH.
- Keine neue Charakterisierung der Zetafunktion.
- Keine physikalische Interpretation des Operators.

9 Fazit

Diese Arbeit dokumentiert ein vollständiges exploratives Forschungsprojekt mit einem klaren Negativresultat. Der untersuchte Ansatz ist mathematisch interessant, numerisch konsistent, aber logisch zirkulär und daher ungeeignet als Beweisstrategie für die Riemannsche Vermutung.

Gerade diese Erkenntnis stellt den eigentlichen wissenschaftlichen Wert der Arbeit dar.

Danksagung

Wir danken den Entwicklern freier mathematischer Software und offenen Datenquellen, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.